

**T.C.  
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**GENELLEŞTİRİLMİŞ HARMONİK DENGE METODU  
İLE DOĞRUSAL OLMAYAN SİSTEMLERİN  
ANALİZİNE YÖNELİK BİR ARAYÜZ ÇALIŞMASI**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**Selim Şeref ÖZTÜRK**

**Enstitü Anabilim Dalı : ELEKTRONİK VE BİLG. EĞT.**

**Tez Danışmanı : Yrd. Doç. Dr. İlyas ÇANKAYA**

**Temmuz 2009**

T.C.  
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GENELLEŞTİRİLMİŞ HARMONİK DENGE METODU  
İLE DOĞRUSAL OLMAYAN SİSTEMLERİN  
ANALİZİNE YÖNELİK BİR ARAYÜZ ÇALIŞMASI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Selim Şeref ÖZTÜRK

Enstitü Anabilim Dalı : ELEKTRONİK VE BİLG. EĞT.

Bu tez 23/07/2009 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Oybirliği ile kabul edilmiştir.

Yrd. Doç. Dr.  
İlyas ÇANKAYA  
Jüri Başkanı



Yrd. Doç. Dr.  
Türker Fedai ÇAVUŞ  
Üye



Yrd. Doç. Dr.  
Ali Fuat BOZ  
Üye



## **TEŞEKKÜR**

Bu tezin hazırlanmasında desteğini hiçbir zaman esirgemeyerek danıőmanlıęını yapan hocam Yrd.Doç.Dr. İlyas ÇANKAYA baőta olmak üzere aileme, bana maddi ve manevi anlamda destek olan herkese teőekkürlerimi bir borę bilirim.

## İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR .....	ii
İÇİNDEKİLER .....	iii
SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ.....	v
ŞEKİLLER LİSTESİ .....	vii
TABLolar LİSTESİ.....	x
ÖZET .....	xi
SUMMARY .....	xii
BÖLÜM 1.	
GİRİŞ .....	1
BÖLÜM 2.	
SİSTEMLERİN DAVRANIŞ ŞEKİLLERİ .....	3
2.1. Giriş .....	3
2.2. Doğrusallık ve Doğrusal Olmama.....	4
2.3. Doğrusal Olmayan Sistemlerde Görülen Davranış Şekilleri .....	13
2.3.1. Atlama.....	13
2.3.2. Çatallanma.....	16
2.3.3. Kaos .....	18
BÖLÜM 3.	
GENELLEŞTİRİLMİŞ HARMONİK DENGE METODU .....	22
3.1. Giriş .....	22
3.2. Harmonik Denge Denklemlerinin Klasik Hesabı .....	22
3.2.1. Örnek uygulama .....	23
3.3. Genelleştirilmiş Harmonik Denge Metodu.....	26

3.3.1. Genelleştirilmiş harmonik denge metodu ile örnek uygulama	34
BÖLÜM 4.	
GHDM İÇİN ARAYÜZ ÇALIŞMASI.....	47
4.1. Giriş.....	47
4.2. Arayüz Ekranı.....	47
4.2.1. Matlab GUI.....	47
4.2.2. Arayüz ekranının oluşturulması.....	52
4.2.3. Arayüz ekranının kullanımı.....	57
4.2.4. Örnek uygulama-1.....	60
4.2.5. Örnek uygulama-2.....	65
BÖLÜM 5.	
SONUÇLAR.....	73
BÖLÜM 6.	
TARTIŞMA VE ÖNERİLER.....	74
KAYNAKLAR.....	75
EKLER.....	78
ÖZGEÇMİŞ.....	83

## SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

$A_{u_0}$	: Giriş sinyalinin sabit bileşeni
$A_{u_1}$	: Giriş sinyalinin 1. harmoniğine ait genlik
$a_{xdc}$	: Sistemdeki sabit bileşen
$A_{x_r}$	: Kompleks genlikler
$A_{y_0}$	: Çıkış sinyalinin sabit bileşeni
$A_{y_1}$	: Çıkış sinyalinin 1. harmoniğine ait genlik
$A_{y_2}$	: Çıkış sinyalinin 2. harmoniğine ait genlik
$A_{y_3}$	: Çıkış sinyalinin 3. harmoniğine ait genlik
$c_{p,q}(l_1, \dots, l_{p+q})$	: Denklem terimlerinin katsayıları
$D$	: Diferansiyel operatör
$F_{p,q}[\cdot]$	: Doğrusal olmayan fonksiyon
$f_{uy}^{sym}(\cdot)$	: Simetrik fonksiyon
$l_i$	: Türev mertebesini
$M$	: En yüksek doğrusal olmama seviyesi
$n$	: Doğrusal olmama derecesi
$n_r^*$	: Kombinasyondaki farklı permütasyon sayısı
$p$	: Çıkışa ait üs derecesi
$q$	: Girişe ait üs derecesi
$R$	: Çıkış denklemindeki harmonik bileşen sayısı
$u(t)$	: Giriş sinyali
$y(t)$	: Çıkış sinyali
$\omega$	: Frekans değişkeni
$\omega_n$	: Doğal frekans

$\omega_r$	: Frekanslar
$\phi_{y_1}$	: Çıkış sinyalinin 1. harmoniğine ait faz
$\phi_{y_2}$	: Çıkış sinyalinin 2. harmoniğine ait faz
$\phi_{y_3}$	: Çıkış sinyalinin 3. harmoniğine ait faz
$Dc$	: Sabit bileşen
GHDM	: Genelleştirilmiş harmonik denge metodu
GUI	: Grafiksel kullanıcı arayüzü
NIDE	: Direransiyel denklem tanımlama modeli
rad	: Radyan
sn	: Saniye

## ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 2.1.	Genel olarak bir sistemin blok diyagramı .....	3
Şekil 2.2.	Duffing denkleminin faz değişim blok diyagramı.....	5
Şekil 2.3.	$u(t) = 5 \sin(0,8t)$ ile tanımlanan giriş sinyali.....	5
Şekil 2.4.	$u(t) = 5 \sin(0,8t)$ için çıkış sinyalinin değişimi .....	6
Şekil 2.5.	$u(t) = 2 \sin(0,8t)$ için çıkış sinyali değişimi.....	6
Şekil 2.6.	Doğrusal olmayan $k_2 y^3(t)$ terimi denklemden atılıp $u(t) = 5 \sin(0,8t)$ giriş sinyali uygulandığında oluşan çıkış sinyali	7
Şekil 2.7.	Doğrusal Olmayan Sistem.....	7
Şekil 2.8.	Toplamsallık (Süperpozisyon) İlkesi .....	8
Şekil 2.9.	Oransallık (Homojenlik) İlkesi.....	8
Şekil 2.10.	Doğrusal sistem .....	10
Şekil 2.11.	Doğrusal olmayan sistem .....	10
Şekil 2.12.a.	Çubuğun hafif yük altındaki durumu.....	13
Şekil 2.12.b.	Çubuğun ağır yük altındaki durumu .....	13
Şekil 2.13.a.	Doğrusal ve Doğrusal olmayan Yay kuvveti/Yer değiştirmesi.....	14
Şekil 2.13.b.	Doğrusal ve Doğrusal olmayan yayların doğal frekansı.....	14
Şekil 2.14.	Doğrusal olmayan yayların maksimum genlik cevabı.....	15
Şekil 2.15.	Doğrusal yayların maksimum genlik cevabı.....	15
Şekil 2.16.	Maksimum genlik cevabı ve atlama olayı.....	16
Şekil 2.17.	Çatallanma.....	17
Şekil 2.18.	Doğrusal Olmayan Sistemlerde Çatallanma ve Kaos .....	17
Şekil 2.19.	Lorenz'in Kaotik Çekicisi (Lorenz Strange Attractor) .....	19
Şekil 2.20.	Duffing denkleminin için $F_0 = 0,65$ 'deki örnek faz portresi .....	20
Şekil 2.21.	Duffing denkleminin için $F_0 = 0,6975$ 'deki örnek faz portresi .....	21
Şekil 3.1.	Genelleştirilmiş Harmonik Denge Metoduna ait akış şeması .....	33
Şekil 3.2.	fminsearch komutuna ait genel kullanım formu.....	39



Şekil 3.3.	Maksimum çıkış genliği.....	41
Şekil 3.4.	<i>Dc</i> bileşene ait genlik değişimi.....	42
Şekil 3.5.	Temel harmoniğe ait genlik değişimi .....	42
Şekil 3.6.	Temel harmoniğe ait faz değişimi .....	43
Şekil 3.7.	İkinci harmoniğe ait genlik değişimi .....	43
Şekil 3.8.	İkinci harmoniğe ait faz değişimi .....	44
Şekil 3.9.	Harmoniklere ait genlik değişimleri .....	44
Şekil 3.10.	Girişteki <i>dc</i> bileşenin maksimum genlik değişimine etkisi .....	46
Şekil 3.11.	Maksimum genlik değişimlerinin tepe noktaları.....	46
Şekil 4.1.	Matlab GUI ekranı.....	48
Şekil 4.2.	Property Inspector penceresi .....	50
Şekil 4.3.	Object Browser penceresi .....	51
Şekil 4.4.	M-file Editor penceresi .....	51
Şekil 4.5.	Kağıt üzerine elle çizilmiş örnek bir arayüz taslağı.....	53
Şekil 4.6.	Arayüzün NIDE model denklemini giriş kısmı.....	54
Şekil 4.7.	Arayüzün giriş ve çıkış sinyallerinin oluşturulduğu kısım .....	54
Şekil 4.8.	Arayüzün giriş sinyalinin oluşturulduğu kısım .....	55
Şekil 4.9.	Arayüzün çıkış sinyalindeki harmonik sayısının belirlendiği kısım.....	55
Şekil 4.10.	Arayüzün frekans aralığını giriş kısmı.....	55
Şekil 4.11.	Arayüzün başlangıç değerleri ve hata toleranslarını giriş kısmı ...	56
Şekil 4.12.	Arayüzün grafik çizim ekranı.....	56
Şekil 4.13.	Veri kaydetme işlemine ait mesaj penceresi .....	57
Şekil 4.14.	Arayüze giriş ekranı.....	58
Şekil 4.15.	Arayüz ekranı .....	59
Şekil 4.16.	Analiz sonrası çağrıla grafik çizim ekranı .....	61
Şekil 4.17.	<i>Dc</i> bileşene ait genlik değişimi.....	62
Şekil 4.18.	Temel harmoniğe ait genlik değişimi .....	62
Şekil 4.19.	Temel harmoniğe ait faz değişimi .....	63
Şekil 4.20.	2. harmoniğe ait genlik değişimi .....	63
Şekil 4.21.	2. harmoniğe ait faz değişimi .....	64
Şekil 4.22.	Maksimum genlik değişimi.....	64
Şekil 4.23.	Arayüz ekranının analize başlamaya hazır hali.....	66

Şekil 4.24.	Analiz sonrası çağrılan grafik çizim ekranı .....	67
Şekil 4.25.	<i>Dc</i> bileşene ait genlik değişimi.....	68
Şekil 4.26.	Temel harmoniğe ait genlik değişimi .....	68
Şekil 4.27.	Temel harmoniğe ait faz değişimi .....	69
Şekil 4.28.	2. harmoniğe ait genlik değişimi .....	69
Şekil 4.29.	2. harmoniğe ait faz değişimi .....	70
Şekil 4.30.	3. harmoniğe ait genlik değişimi .....	70
Şekil 4.31.	3. harmoniğe ait faz değişimi .....	71
Şekil 4.32.	Maksimum genlik değişimi .....	71
Şekil 4.33.	Harmoniklere ait genliklerin karşılaştırılması .....	72
Şekil A.1.	Nelder-Mead Üçgeni.....	79
Şekil A.2.	Nelder-Mead Üçgeni.....	79
Şekil A.3.	Nelder-Mead Üçgeni.....	80
Şekil A.4.	Nelder-Mead Üçgeni.....	82

## TABLolar LİSTESİ

Tablo 2.1.	Bazı sistemlerin matematiksel modelleri ve doğrusal olup olmadıkları .....	12
Tablo 3.1.	$\ddot{y}(t) + 2\mu\dot{y}(t) + \delta u(t)^2 \dot{y}(t) + \omega_n^2 y(t) + \alpha y(t)^3 = u(t)$ denkleminin doğrusal terimlerinin NIDE model katsayıları .....	29
Tablo 3.2.	$\ddot{y}(t) + 2\mu\dot{y}(t) + \delta u(t)^2 \dot{y}(t) + \omega_n^2 y(t) + \alpha y(t)^3 = u(t)$ denkleminin doğrusal olmayan terimlerinin NIDE model katsayıları.....	30
Tablo 3.3.	$r_1 = 0$ için doğrusal bileşenlere yönelik $f_x^{sym}$ hesaplamaları.....	35
Tablo 3.4.	$(\omega_{r_1} + \omega_{r_2} + \omega_{r_3}) = 0$ için doğrusal olmayan bileşenlere yönelik $f^{sym}$ hesaplamaları .....	36
Tablo 3.5.	$u^2(t)\dot{y}(t)$ bileşenine yönelik $f_{uy}^{sym}(-2,0,2)$ fonksiyonunun hesaplanması .....	37
Tablo 4.1.	Matlab GUI nesne kutusunda bulunan nesnelere ve görevleri hakkında açıklamalar .....	49
Tablo 4.2.	View Callback menüsü .....	52
Tablo A.1.	Nelder-Mead yöntemine ait örnek iterasyon sonuçları.....	81

## ÖZET

Anahtar Kelimeler: Doğrusal olmayan sistem, Atlama olayı, Genelleştirilmiş harmonik denge metodu, Frekans cevabı, Kullanıcı arayüzü.

Doğrusal olmayan sistemlere uygulanan analitik analiz tekniklerinden biri Harmonik Denge Metodu (Harmonic Balance Method)'dur. Bu metod doğrusal olmayan sistemlerin frekans cevabı analizlerinde çok sık kullanılır ve oldukça pratiktir. Metodun klasik uygulamasında sistemin giriş ve çıkışındaki harmonik sayısı ile derecesi arttıkça açılımlardaki terim sayısı oldukça arttığından uzun ve karışık işlemler gerektirmektedir. Bu metodun rahat bir şekilde kullanılabilmesi için metod genelleştirilmiş ve sayısal analiz teknikleri uygulanan programlama algoritmalarında kullanıma uygun hale getirilmiştir.

Genelleştirilmiş harmonik denge metodunu doğrusal olmayan bir sisteme uygulamak için öncelikle giriş ve çıkış sinyal formu belirlenir ve çıkış sinyal formunda belirlenen harmoniklere göre sistem üzerinde bir takım pratik hesaplamalar yapılarak bilinmeyen sayısı kadar denge denklemleri elde edilir. Bu denge denklemleri üzerinde uygun sayısal analiz teknikleri kullanılarak bilinmeyenler elde edilmiş olur.

Bu çalışmada doğrusallık ve doğrusal olamama kavramlarına değinilerek doğrusal olmayan sistemlerde görülen atlama, çatallanma ve kaos olaylarından bahsedildi. Genelleştirilmiş Harmonik Denge Metodu ile analitik çözümlene gerçekleştiren ve atlama frekansını otomatik olarak bulan bir arayüz oluşturularak bu arayüz hakkında bilgi verildi.

# **A INTERFACE STUDY FOR NONLINEAR SYSTEMS ANALYSIS WITH GENERALIZED HARMONIC BALANCE METHOD**

## **SUMMARY**

**Key Words:** Nonlinear system, jump phenomenon, generalized harmonic balance method, frequency response, user interface.

One of analyze techniques which applied on nonlinear systems is Harmonic Balance Method. This method is used very often on frequency response analyze of nonlinear systems and it's rather practical. On classical appliance of the method, term number in expansions remarkably increases when harmonic number and degree on entrance and exit of system so it is required long and assorted processes. The method was generalized and become convenient for usage on programming algorithms on which numerical analyze techniques so that it can be used easily.

Firstly, entrance and exit signal form are determined for applying Generalized Harmonic Balance Method on nonlinear systems. Then, as many as the number of variables, balance equations are obtained by doing some practical calculations on the system, according to harmonics which determined on exit signal form. The variables have been obtained by using convenient numerical analyze techniques on these balance equations.

In this study, terms of linearity and nonlinearities were examined and jump phenomenon, phenomenon of bifurcation and chaos which seen at nonlinear systems were mentioned. An interface which can make analytical resolution with Generalized Harmonic Balance Method and find jump phenomenon frequency was formed. Some information was given about this interface.

## BÖLÜM 1. GİRİŞ

Günlük hayatta çevremizde var olan bütün sistemler doğrusal olmayan sistemler kapsamına girer. Bu sistemleri anlayıp incelemek bize büyük faydalar sağlar. Bu sayede özellikleri hakkında bilgi edinilerek daha da yararlı hale getirilmeye çalışılır. Doğrusal olmayan sistemlerin kullanımı ve kontrolü istendiğinde sistemin farklı sinyaller için verdiği cevapların bilinmesi gerekir. Bu sistem davranışlarının tespit edilebilmesi için genelde zaman veya frekans boyutu analiz tekniklerine başvurulur [1]. Doğrusal olmayan sistemlerde doğrusal sistemlerden farklı olarak atlama, çatalanma ve kaos gibi davranışlar görülmektedir. Bu davranışlar en kolay sistemin frekans cevabına bakılarak incelenebilir. Doğrusal olmayan frekans boyutundaki sunumların çoğu Volterra serilerini temel alır. Bu konuda yapılan çalışmalarda göze çarpan özelliklerden biri Volterra serilerinin kullanımının oldukça genel olması, diğeri ise çok boyutlu formlarda dezavantaja sahip olmasıdır. Söz konusu dezavantaj doğrusal olmayan sistemlerin transfer fonksiyonlarının elde edilmesinde, bunların grafiksel gösteriminde ve yorumlanmasında karşılaşılan zorluklardan dolayı sınırlamaların bulunmasından kaynaklanmaktadır [2]. Doğrusal olmayan sistemlerin analizinde kullanılan bir diğer metod da harmonik denge metodudur. Bu metod sayesinde frekans boyutundaki analiz işlemleri kolayca gerçekleştirilebilmektedir. Ancak sistemin derecesi arttıkça ve giriş çıkış sinyal formu genişledikçe bu metodla analiz oldukça zorlaşır. Bu nedenle işlemleri kolaylaştırmak ve bilgisayar programlarına uyarlamak amacıyla 2003 yılında Peyton tarafından yazılan bir makalede yeni bir algoritma geliştirilmiştir. Sunulan bu algoritma temelinde klasik harmonik denge metodunu kullandığından dolayı geliştirilmiş harmonik denge metodu olarak adlandırılır. Bu tez çalışmasında da geliştirilmiş harmonik denge metodu tanıtılarak kullanımı örnek bir sistem modeli üzerinde gerçekleştirilmiştir. Kullanılan sistem modeli, içerdği doğrusal olmayan terimler arasında giriş bileşeni ile çıkış bileşeninin türevinin çarpımından oluşan bir bileşene sahip olması bakımından orijinal bir özellik taşımaktadır. Gerçekleştirilen

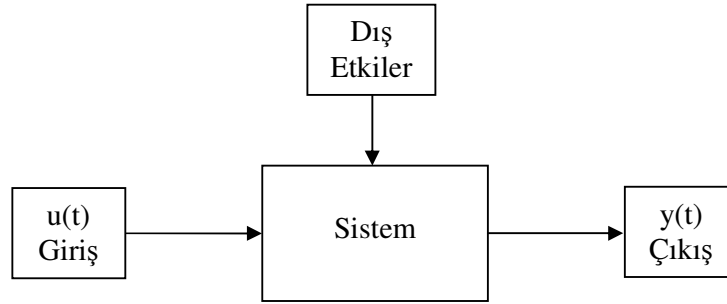
bu çalışmada aynı zamanda sunulan yöntemin daha kolay kullanılabilmesi ve de eğitim ortamlarına katkı sağlaması amacıyla bir arayüz tasarlanmıştır. Bu arayüzde kullanıcı sistem modeline ait diferansiyel denklemi, analizle ilgili bazı parametreleri ve frekans aralığını girdiğinde analiz için gerekli olan frekans cevabını basit ve kolay bir şekilde elde edebilmektedir. Aynı zamanda tez içerisinde sunulan teknik sayesinde doğrusal olmayan sistem modellerine ait elde edilen frekans cevabındaki atlama olayının otomatik tespiti de sağlanmaktadır.

Tezin ilerleyen bölümlerinde yukarıda değinilen çalışmanın aktarılabilmesi için Bölüm 2’de sistemlerin davranış şekilleri (doğrusallık ve doğrusal olmama, doğrusal olmayan sistem özellikleri, atlama, çatlama, kaos) hakkında bilgi verildi. Bölüm 3’te geliştirilmiş harmonik denge metodu anlatılıp örnek bir sistem modeli üzerinde uygulaması gerçekleştirilerek elde edilen sonuçlar grafiksel olarak sunuldu. Bölüm 4’te geliştirilmiş harmonik denge metodu için bir arayüz oluşturularak bu arayüzün nasıl oluşturulduğu, nasıl çalıştığı ve kullanımı hakkında bilgiler verildi. Örnek olarak Bölüm 3’de kullanılan sistem modeline ve ayrıca zorlayıcı yay (hardening spring) yapısına sahip yeni bir sistem modeline ait sonuçların elde edilişi gösterildi. Bölüm 5’te yapılan çalışma incelenerek sonuçları ve olumlu yanları ortaya kondu. Bölüm 6’da ise olumsuz yanları ortaya konarak geliştirilebilir yönlerinden bahsedildi.

## BÖLÜM 2. SİSTEMLERİN DAVRANIŞ ŞEKİLLERİ

### 2.1. Giriş

Bir veya birçok girişe karşılık, bir veya birçok çıkış üreten yapılara sistem denir. Örnek bir sistem yapısı Şekil 2.1’de gösterilmiştir.



Şekil 2.1. Genel olarak bir sistemin blok diyagramı

Sistemler matematiksel olarak modellenebilir ve bu matematiksel modeller sistem davranışını incelemeye kullanılırlar. Sistemin doğrusal olup olmadığına göre matematiksel model için bir çözümleme yöntemi belirlenip sonuca ulaşılır ve hangi etkilere hangi tepkileri verdiği görülür. Sistemin doğrusal bir sistem olup olmadığı matematiksel modeli analiz edilerek anlaşılır. Aslında tabiattaki bütün fiziksel sistemler doğrusal olmayan bir yapıya sahiptir. Doğrusal olmayan sistemlere ait matematiksel çözümleri, analitik çözümleme yöntemlerinden elde etmek oldukça güçtür. Bundan dolayı sistemin içinde doğrusal olmayan fonksiyonlar olmadığında tasarımcılar oldukça sevinir [3]. Genel olarak sistemin belirli bir çalışma bölgesinde doğrusal olarak çalıştığı kabul edilir ve bu aralık için doğrusal çözümleme yapılır [4]. Bununla birlikte birçok doğrusal olmayan sistem basit bir doğrusal modelle tanımlanamayan bazı bileşenlere sahiptir. Sertlikte veya sönüm katsayısında üstel veya ani değişikliklere sebep olan elemanlar sistem davranışının önemli bir kısmına



etki ederler [5]. Bu tip doğrusal bölge tanımlanamayan elemanların olduğu ya da bu yöntemle istenen sonucun alınmadığı durumlarda mecburen doğrusallaştırma yerine analitik çözümler kullanılır.

## 2.2. Doğrusallık ve Doğrusal Olmama

Matematiksel modellere ait denklemleri doğrusal olan sistemlere doğrusal sistemler (linear systems) denir [6]. Başka bir deyişle bir sistemin girişindeki değişim çıkışında orantısal bir değişim oluşturuyorsa bu sistem doğrusal sistem olarak adlandırılır. Bu orantısal değişim grafiğe döküldüğünde karşımıza bir doğru çıkar. Doğrusal sistem adını bu grafikteki doğrudan alır.

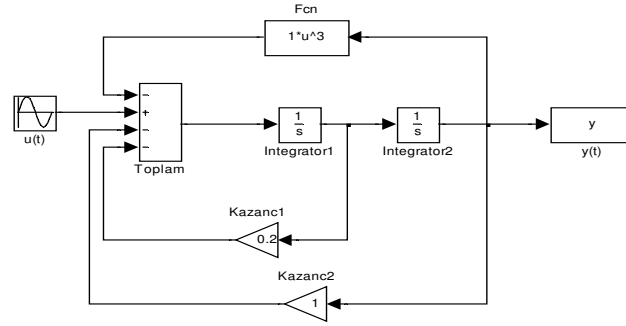
Doğrusal sistemin matematiksel modelindeki giriş ve çıkış değişkenleri birlikte toplanıp çıkarıldığında, sabit bir değer eklendiğinde veya katları alındığında sistem girişi ile sistem çıkışı arasında orantılı bir değişim olması beklenir. Yani bu işlemlerden sonra sistemin doğrusallığı bozulmaz.

Bir sistemin girişindeki değişim çıkışında orantısal bir değişim oluşturmuyorsa bu sistem doğrusal olmayan bir sistemdir. Doğrusal olmayan sistemlerde sistem davranışı önceden kestirilemez. Doğrusal olmayan sistemin verdiği cevap grafiğe döküldüğünde doğrusal olmayan bir görüntüyle karşılaşılır.

Bu duruma örnek olarak matematikte Duffing denklemi olarak bilinen; birçok elektronik, elektrik ve mekanik sistemin karşılığı olan, araştırmacıların üzerinde birçok araştırmalar yaptığı denklem 2.1 verilebilir.

$$\ddot{y}(t) + c_1 \dot{y}(t) + k_1 y(t) + k_2 y^3(t) = u(t) \quad (2.1)$$

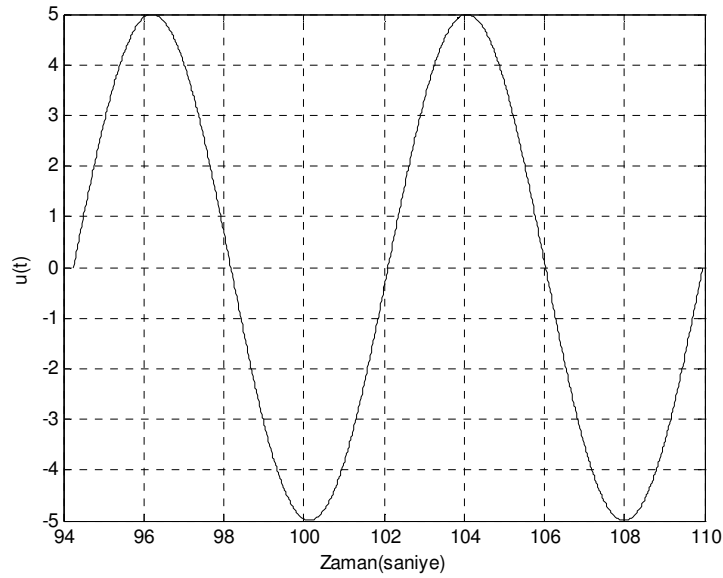
Denklem 2.1 ile tanımlanan sisteme ait faz değişim blok diyagramının Matlab Simulink kullanılarak oluşturulmuş hali Şekil 2.2'de görülmektedir [7].



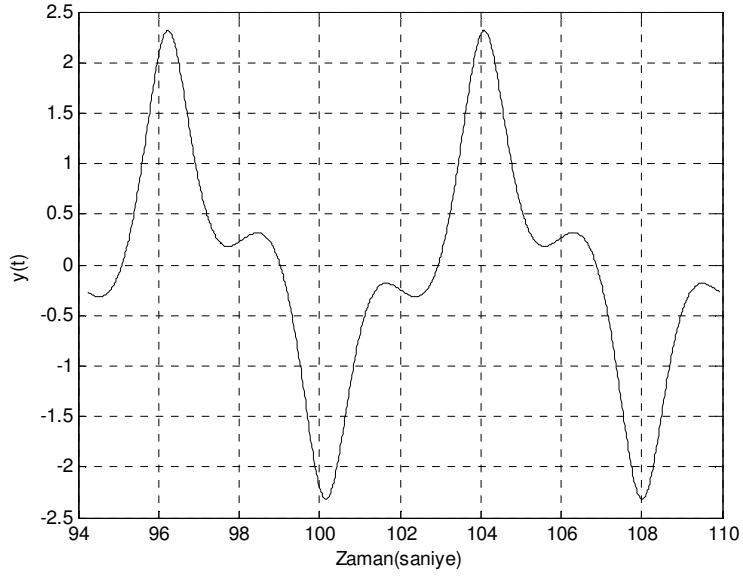
Şekil 2.2. Duffing denkleminin faz değişim blok diyagramı

$c_1 = 0,2$ ,  $k_1 = 1$ ,  $k_2 = 1$  ve  $u(t) = 5 \sin(0,8t)$  değerleri için sisteme ait giriş ve çıkış sinyalleri Şekil 2.3 ve 2.4'de gösterilmiştir.

Görüldüğü gibi giriş sinyali düzgün bir formda iken çıkış sinyali bozulmuş bir hale gelmektedir. Giriş sinyal formunun çıkışta bozulmasının nedeni denklemdaki doğrusal olmayan  $k_2 y^3(t)$  teriminden kaynaklanmaktadır. Giriş sinyalinin genliği, frekansı ve sistemin matematiksel modelindeki katsayılar değiştirildikçe çıkış sinyalinin formundaki bu bozulma da değişir.

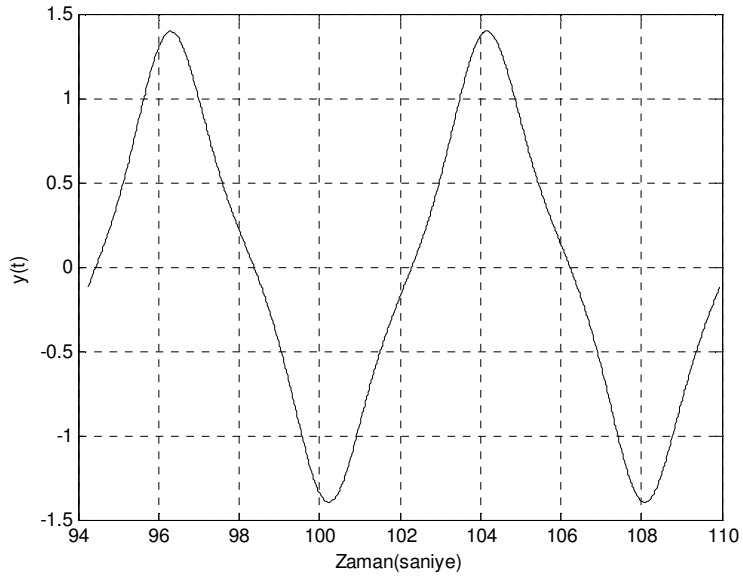


Şekil 2.3.  $u(t) = 5 \sin(0,8t)$  ile tanımlanan giriş sinyali



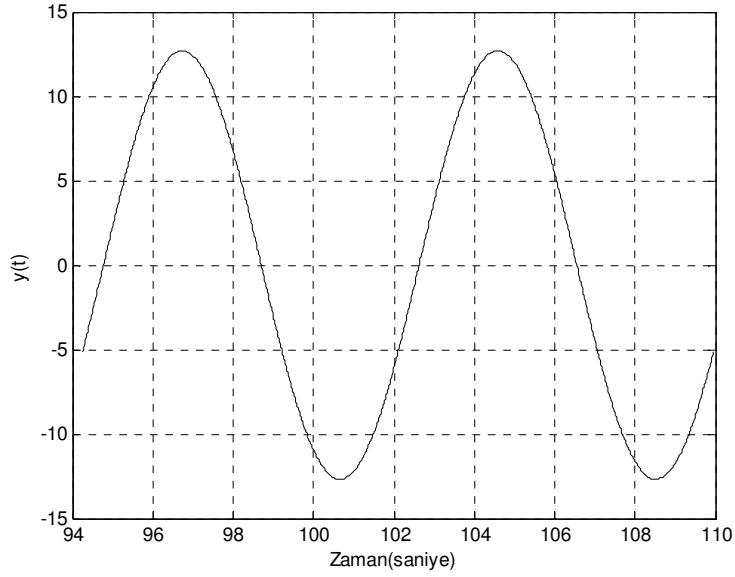
Şekil 2.4.  $u(t) = 5 \sin(0,8t)$  için çıkış sinyalinin değişimi

Giriş sinyalinin genliği 2 olarak alınıp diğer katsayıları sabit tutularak çıkış sinyali tekrar çizdirilirse çıkış sinyal formundaki bozulmanın azaldığı görülür (Şekil 2.5).



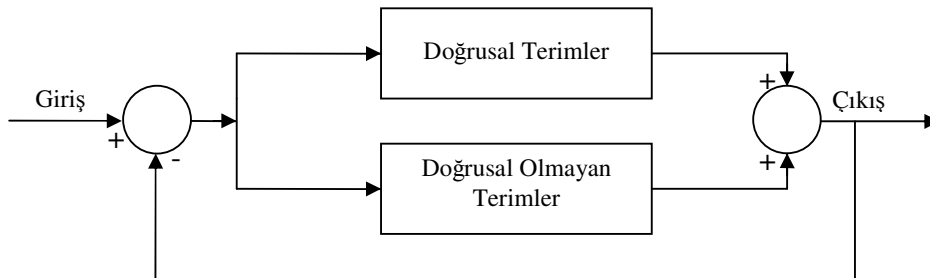
Şekil 2.5.  $u(t) = 2 \sin(0,8t)$  için çıkış sinyali değişimi

Sistemi tanımlayan denklemdeki doğrusal olmayan  $k_2 y^3(t)$  terimi çıkarılıp  $u(t) = 5 \sin(0,8 t)$  giriş sinyali için tekrar çıkış sinyali çizdirilirse çıkış sinyal formunun giriş sinyal formuyla aynı olduğu, sadece genliğinin ve frekansının değiştiği görülür (Şekil 2.6).



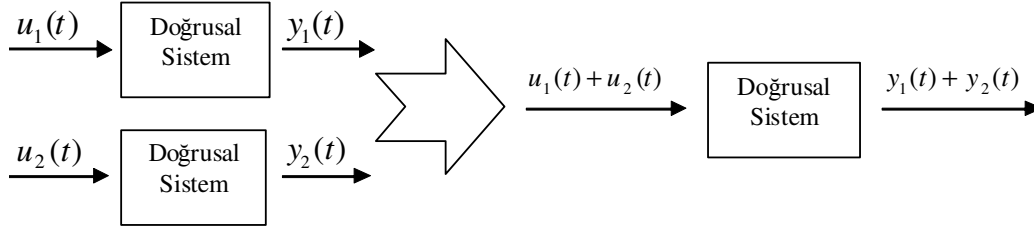
Şekil 2.6. Doğrusal olmayan  $k_2 y^3(t)$  terimi denklemden atılıp  $u(t) = 5 \sin(0,8 t)$  giriş sinyali uygulandığında oluşan çıkış sinyali

Görüldüğü gibi doğrusal olmayan terim atıldığında sistem doğrusal hale gelmiş ve doğrusal özellik göstermiştir. Buradan hareketle doğrusal olmayan sistemler Şekil 2.7'de görüldüğü gibi doğrusal olan ve doğrusal olmayan terimler olarak ayrılabilir.



Şekil 2.7. Doğrusal Olmayan Sistem [8]

Bir sistemin doğrusal olup olmadığının anlaşılabilmesi için toplamsallık (Süperpozisyon) ve Oransallık (Homojenlik) ilkeleri uygulanır. Sistem eğer bu ilkelerden birine uyuyorsa doğrusal bir sistem, aksi halde doğrusal olmayan bir sistemdir.



Şekil 2.8. Toplamsallık (Süperpozisyon) İlkesi [4]

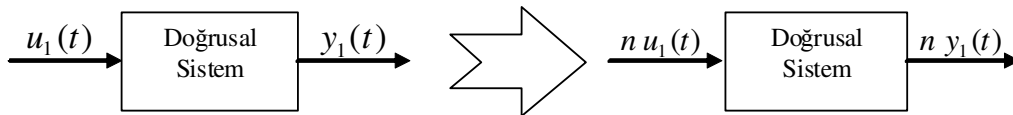
Şekil 2.8’de görüldüğü gibi bir sisteme  $u_1(t)$  giriş sinyali uygulandığında  $y_1(t)$  çıkışı,  $u_2(t)$  giriş sinyali uygulandığında  $y_2(t)$  çıkışı elde ediliyor olsun. Giriş sinyalleri  $u_1(t)$  ve  $u_2(t)$ ’nin alabileceği bütün değerler için  $u_1(t) + u_2(t)$  girişine karşılık  $y_1(t) + y_2(t)$  çıkışı elde ediliyorsa sistem toplamsallık (süperpozisyon) ilkesine uyuyordur ve dolayısıyla sistem doğrusal bir sistemdir. Bu durum aşağıdaki matematiksel işlemlerle anlatılır:

$$T[u_1(t)] = y_1(t) \quad (2.2)$$

$$T[u_2(t)] = y_2(t) \quad (2.3)$$

$$T[u_1(t) + u_2(t)] = y_1(t) + y_2(t) \quad (2.4)$$

ise bu sistem toplamsallık ilkesine uyar ve sistem doğrusaldır.



Şekil 2.9. Oransallık (Homojenlik) İlkesi [4]

Şekil 2.9'da görüldüğü gibi bir sisteme  $u_1(t)$  giriş sinyali uygulandığında  $y_1(t)$  çıkışı elde ediliyor olsun. Giriş sinyali  $u_1(t)$ 'nin ve  $n$  sabit sayısının alabileceği bütün değerler için  $n u_1(t)$  girişine karşılık  $n y_1(t)$  çıkışı elde ediliyorsa sistem oransallık (homojenlik) ilkesine uyuyordur ve dolayısıyla sistem doğrusal bir sistemdir. Bu durum aşağıdaki matematiksel işlemlerle anlatılır:

$$T[u_1(t)] = y_1(t) \quad (2.5)$$

$$T[n u_1(t)] = n y_1(t) \quad (2.6)$$

ise bu sistem oransallık ilkesine uyar ve sistem doğrusaldır [6, 9].

Örnek olarak  $Y(u) = 2u$  matematiksel modellenmiş sistem ele alınarak ve toplamsallık ilkesine uyup uymadığı incelenir.  $u_1 = 4$ ,  $u_2 = 11$  ve  $u_3 = u_1 + u_2 = 15$  için,

$$y_1 = Y(u_1) = Y(4) = 2 \cdot 4 = 8 \quad (2.7)$$

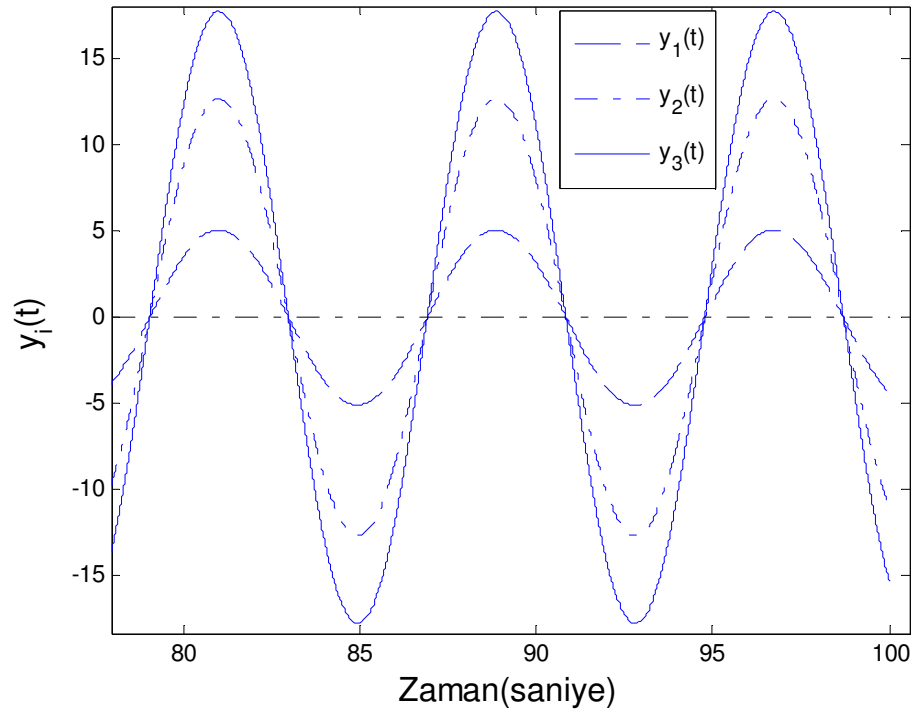
$$y_2 = Y(u_2) = Y(11) = 2 \cdot 11 = 22 \quad (2.8)$$

$$y_3 = Y(u_3) = Y(15) = 2 \cdot 15 = 30 \quad (2.9)$$

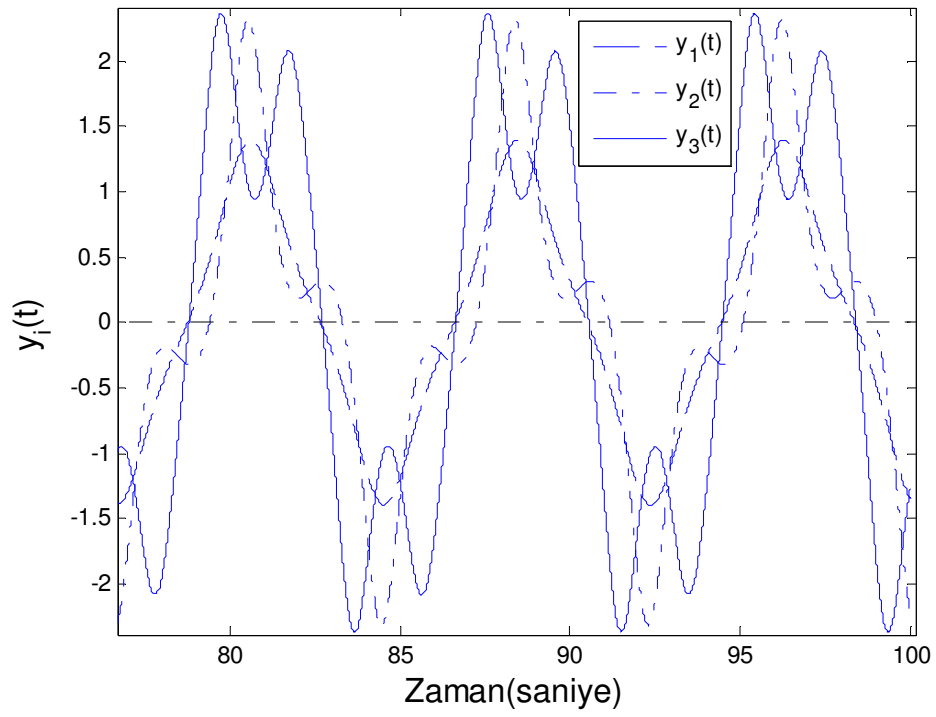
olarak bulunur. Görüldüğü gibi  $y_3 = y_1 + y_2 = 8 + 22 = 30$  olduğundan  $Y(x) = 2u$  sistemi toplamsallık ilkesini sağlar ve bu sistem doğrusal bir sistemdir.

$\ddot{y}(t) + 0,2 \dot{y}(t) + y(t) = u(t)$  ve  $\ddot{y}(t) + 0,2 \dot{y}(t) + y(t) + y^3(t) = u(t)$  denklemlerine  $u_1(t) = 2 \sin(0,8t)$ ,  $u_2(t) = 5 \sin(0,8t)$  ve  $u_1(t) + u_2(t) = 7 \sin(0,8t)$  sinyalleri ayrı ayrı uygulanarak sonuç incelenip, toplamsallık ilkesine uyup uymadıklarına göre denklemlerin doğrusal olup olmadıklarına karar verilebilir.

$\ddot{y}(t) + 0,2 \dot{y}(t) + y(t) = u(t)$  denklemine yukarıda belirtilen  $u_1(t)$ ,  $u_2(t)$  ve  $u_1(t) + u_2(t)$  sinyalleri uygulandığında sırasıyla aşağıdaki  $y_1(t)$ ,  $y_2(t)$  ve  $y_3(t)$  çıkış sinyalleri elde edilmiştir. Şekil 2.10'da görüldüğü gibi  $y_3(t) = y_1(t) + y_2(t)$  olduğundan  $\ddot{y}(t) + 0,2 \dot{y}(t) + y(t) = u(t)$  denklemi doğrusal bir denklemdir.



Şekil 2.10. Doğrusal sistem



Şekil 2.11. Doğrusal olmayan sistem

Aynı sinyaller  $\ddot{y}(t) + 0,2 \dot{y}(t) + y(t) + y^3(t) = u(t)$  denkleminde uygulanır ise sırasıyla Şekil 2.11'deki  $y_1(t)$ ,  $y_2(t)$  ve  $y_3(t)$  çıkış sinyalleri elde edilir. Bu şekilden anlaşıldığı üzere  $y_3(t) \neq y_1(t) + y_2(t)$  eşitsizliğinden dolayı  $\ddot{y}(t) + 0,2 \dot{y}(t) + y(t) + y^3(t) = u(t)$  denklemi doğrusal olmayan bir denklemdir.

Doğrusal sistemlerde birtakım girişler uygulandığında sistemin vereceği cevap biliniyorsa sistem denklemi bilinmese bile istenen diğer girişler içinde sistem cevabı bulunabilir.

$3y(t)\dot{y}(t) + 2y(t) = u(t)$  matematiksel modellenmiş sistem örnek olarak ele alındığında, diferansiyel denklemden oluştuğu için toplamsallık ilkesinin uygulanması zordur. Bu tip sistemlerin doğrusal olup olmadığı en kolay oransallık ilkesi uygulanarak anlaşılır. Öncelikle matematiksel eşitliğin her iki tarafı  $n$  ile çarpılır:

$$n * [3y(t)\dot{y}(t) + 2y(t)] = n * [u(t)] \quad (2.10)$$

$$3n y(t)\dot{y}(t) + 2n y(t) = n u(t) \quad (2.11)$$

Daha sonra sistemi tanımlayan denklemdeki her bir değişken (girişler ve çıkışlar) ayrı ayrı  $n$  ile çarpılır:

$$3[n y(t)]*[n \dot{y}(t)] + 2[n y(t)] = n * [u(t)] \quad (2.12)$$

$$3n^2 y(t)\dot{y}(t) + 2n y(t) = n u(t) \quad (2.13)$$

Denklem 2.11 ile 2.13 birbirine eşit olmadığından sistem toplamsallık ilkesine uymaz ve sistem doğrusal olmayan bir sistemdir. Görüldüğü gibi  $3y(t)\dot{y}(t)$  terimi doğrusallığı bozar ( $3n y(t)\dot{y}(t) \neq 3n^2 y(t)\dot{y}(t)$ ). Doğrusallığı bozma nedeni iki değişkenin çarpım durumunda olmasıdır. Sistemdeki diğer terimler doğrusaldır. Konunun daha iyi anlaşılması açısından aşağıdaki Tablo 2.1'de bazı örnek sistemlere ait matematiksel modeller verilip bunların doğrusal olup olmadıkları incelenmiştir.



Tablo 2. 1. Bazı sistemlerin matematiksel modelleri ve doğrusal olup olmadıkları

Sistem	Doğrusal Olup Olmadığı	Doğrusal Olmayan Terim
$\ddot{y}(t) + k_1^3 \dot{y}(t) + k_2 y(t) = k_3 u(t)$	Doğrusal Sistem	Yok
$\ddot{y}(t) + k_1 \dot{y}^3(t) + k_2 y(t) = k_3 u(t)$	Doğrusal Olmayan Sistem	$k_1 \dot{y}^3(t)$
$\frac{d^2 y}{dt^2} + k_1 \frac{dy}{dt} + k_2 y = k_3^2 u(t)$	Doğrusal Sistem	Yok
$\ddot{y}(t) + k_1 \dot{y}(t) + \cos(k_2) y(t) = k_3 u(t)$	Doğrusal Sistem	Yok
$\ddot{y}(t) + k_1^2 \dot{y}(t) + k_2 \cos(y(t)) = k_3 u(t)$	Doğrusal Olmayan Sistem	$k_2 \cos(y(t))$
$ \ddot{y}(t)  + k_1 \dot{y}(t) + k_2 y(t) = k_3 u(t)$	Mutlak Değerden Dolayı Doğrusal Olmayabilir	$ \dot{y}(t) $ doğrusal olmayabilir
$\ddot{y}(t) + \frac{1}{k_1} \dot{y}(t) + k_2 y(t) = k_3 u(t)$	Doğrusal Sistem	Yok
$\ddot{y}(t) + k_1 \dot{y}(t) + k_2 \frac{1}{y(t)} = k_3 u(t)$	Doğrusal Olmayan Sistem	$k_2 \frac{1}{y(t)}$
$\ddot{y}(t) + k_1 \dot{y}(t) + k_2 y(t) = k_3 u^2(t)$	Doğrusal Olmayan Sistem	$k_3 u^2(t)$
$\sqrt{k_3 + k_1 k_2} \ddot{y}(t) + k_1 \dot{y}(t) + y(t) = u(t)$	Doğrusal Sistem	Yok
$\sqrt{k_3 + k_1 k_2} \ddot{y}(t) + k_1 \dot{y}(t) + y(t) = u(t)$	Doğrusal Olmayan Sistem	$\sqrt{k_3 + k_1 k_2} \ddot{y}(t)$

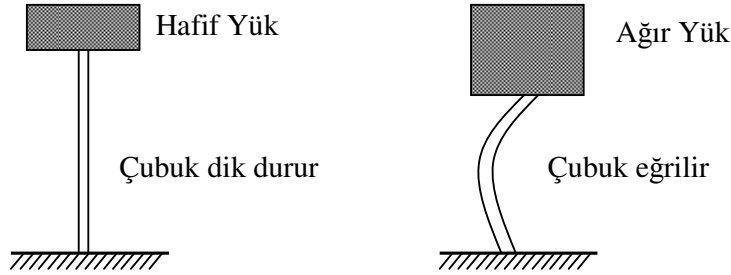
Tablo 2.1’de görüldüğü gibi sistem değişkenleri (girişler ve çıkışlar) üslü, birbirleriyle çarpım durumunda, paydada, köklü ifade içinde olduklarında sistemin doğrusallığını bozarlar.

Doğrusal olmayan sistemler doğrusal sistemlere göre daha zor çözümler. Çünkü doğrusal olmayan bir sistem, değişim anında değişimin kurallarının da değiştiği bir sistemdir. Mesela sürtünmenin hıza bağlı olduğu veya popülasyon dinamiği ve benzeri durumlar doğrusal olmayan sistemlere has tipik hallerdir. Sürtünme hıza bağlı ise, hız değişimi de cisme tesir eden sürtünmeye bağlı olduğundan, hız değişimi hızın kendisine göre değişmektedir. Bunun gibi durumlarda bazen, bilhassa sistem “açıksa” yani sisteme dışarıdan etki varsa beklenmedik davranış biçimleri gösterebilmektedir.

## 2.3. Doğrusal Olmayan Sistemlerde Görülen Davranış Şekilleri

### 2.3.1. Atlama

Doğrusal olmayan bir sistemin girişindeki çok ufak bir değişimin sistemin çıkışında çok büyük değişimlere yol açtığı an atlama olayı (jump phenomenon) gerçekleşmiş olur. Atlama olayı sadece doğrusal olmayan sistem modellerinde görülmektedir [10]. Atlama anında doğrusal olmayan sistemlerde çıkış sinyalinin genlik, frekans ve fazında ani değişimler meydana gelir. Fiziksel bütün sistemlerin bir sonu vardır. Bu son atlama olayıdır. Genellikle sistemler için istenmeyen bir durumdur. Atlama olayı bir geminin alabora olduğu an veya bir elektrik motorunun uygulanan fazla gerilimden ötürü dönmeye başladığı andır. Örneğin bir çubuğun eğrilmesini ele alalım. Eğer Şekil 2.12.a'daki gibi çubuğun tepesine küçük bir ağırlık konulursa, çubuk bu ağırlığı destekleyip dik kalabilir. Yük her seferinde azar azar artırıldığında başlarda çubuk dik kalacaktır. Fakat yük çok ağır hale geldiyse, çubuğun dikey konumu kararsız olur ve çubuk eğrilebilir (Şekil 2.12.b). Burada ağırlık, kontrol parametresi rolünü oynar. Sistem atlama noktasına gelmişse, en son çok ufak bir ağırlık artışı yaptığımızda çubuk kırılır yani atlama olayı gerçekleşmiş olur.



Şekil 2. 12. a) Çubuğun hafif yük altındaki durumu b) Çubuğun ağır yük altındaki durumu

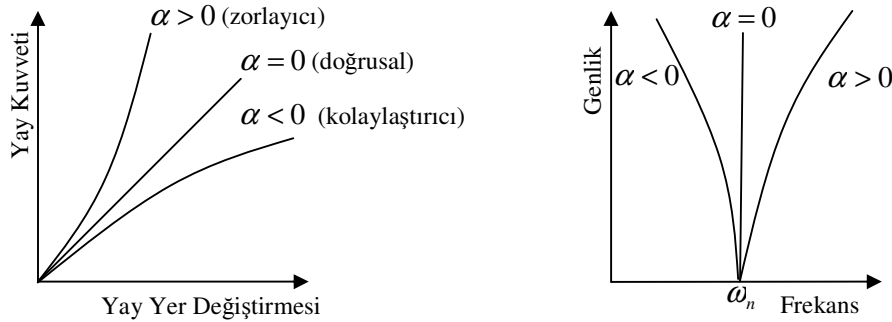
Doğrusal olmayan sistemin matematiksel modelinin üs derecesinin iki ya da daha fazla olması ara modülasyonlara sebep olur ve çıkışta giriş bileşenlerine ek olarak farklı bileşenler görülür. Geri beslemeli dinamik sistem yapılarından dolayı teorikte çıkışta sonsuz tane harmonik vardır. Bu sonsuz bileşeni ihmal ettiğimizde doğrusal bir çözüm bulmuş olsak da bir çok fiziki sistem doğrusal olmadığından bu çözüm

uygulanamaz. Bu tip sistemlerin frekans cevabında atlama rezonansı (jump resonance) olarak adlandırılan davranışlar ortaya çıkabilir [5].

Denklem 2.1'deki Duffing denkleminin bir benzeri olan kütle-yay-damper sistemi denklem 2.14'te gösterildiği gibidir.

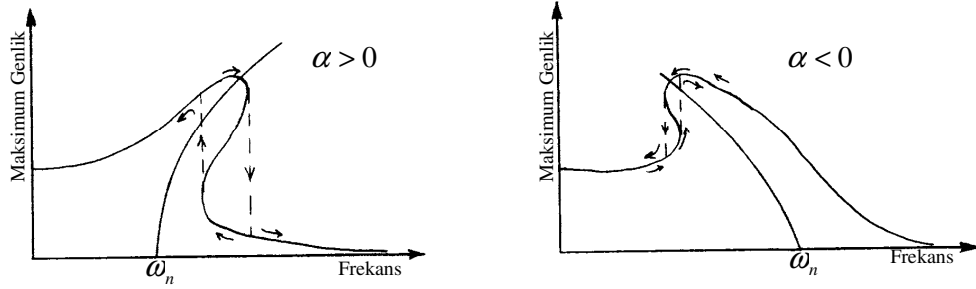
$$m \ddot{y}(t) + c \dot{y}(t) + k y(t) + \alpha y^3(t) = u(t) \quad (2.14)$$

Bu sistemin doğrusal olmamasına neden olan  $\alpha y^3(t)$  terimidir. Eğer bu terimin katsayısı sıfıra eşitlenirse yani  $\alpha=0$  olursa sistem doğrusal bir davranış gösterecektir. Eğer  $\alpha > 0$  olursa sistem zorlayıcı (hardening) etki gösterecek yani yay kuvveti arttıkça yay yer değiştirme miktarı daha az artacaktır. Benzer şekilde  $\alpha < 0$  olursa sistem kolaylaştırıcı (softening) etki gösterecek yani yay kuvveti arttıkça yay yer değiştirme miktarı yay kuvvetinin artışından çok daha fazla artacaktır. Bu durumlar Şekil 2.13.a'da gösterilmiştir. Şekil 2.13.b'de  $\alpha$ 'nın aldığı değere göre doğal frekans gösterilmiştir.

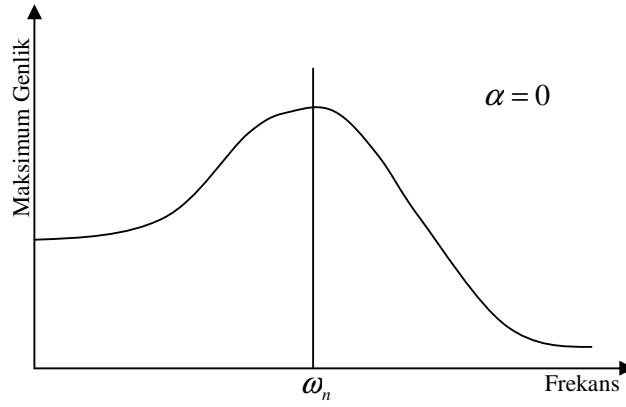


Şekil 2. 13. a) Doğrusal ve Doğrusal olmayan Yay kuvveti/Yer değiştirmesi b) Doğrusal ve Doğrusal olmayan yayların doğal frekansı

Sistem girişine sinüzoidal bir sinyal uygulayıp bu sinyalin frekansı belirli aralıklarla değiştirilerek, sistemin diğer parametreleri sabit tutulursa atlama rezonansı Şekil 2.14'te görüldüğü gibi zorlayıcı (hardening) ve kolaylaştırıcı (softening) formlarda elde edilir. Eğer sistem doğrusal ise bahsedilen işlem gerçekleştirildiğinde Şekil 2.15'te görülen grafik elde edilir.



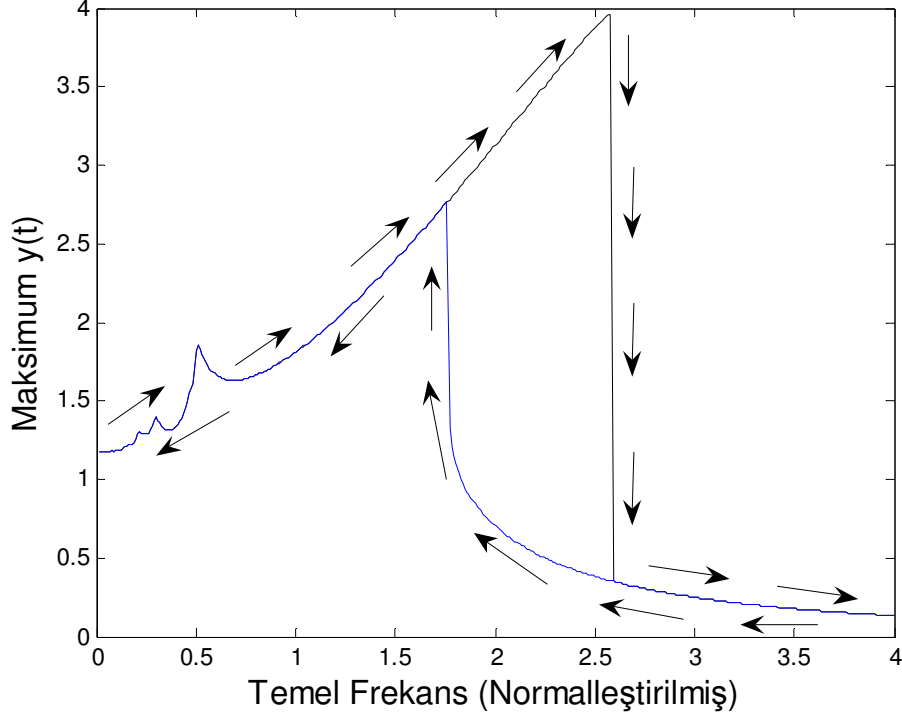
Şekil 2. 14. Doğrusal olmayan yayların maksimum genlik cevabı



Şekil 2. 15. Doğrusal yayların maksimum genlik cevabı

Şekil 2.2’de verilen kanonik modelde  $u(t) = 2\sin(\omega t)$ ,  $c_1 = 0,2$ ,  $k_1 = 1$  ve  $k_2 = 0,5$  olarak alınıp  $\omega = [0,01 : \pm 0,01 : 4]$  frekans aralığında bir simülasyon yapılmış olsun. Yapılan bu simülasyonda maksimum genlik cevabı Şekil 2.16’daki gibi elde edilmiştir.

Yapılan simülasyonda frekans ileri yönde artarak ilerledikçe genlik de kritik bir frekans değerine kadar normal bir şekilde artmakta, kritik frekans değeri olan  $\omega = 2,58$  değerine gelindiğinde frekanstaki çok ufak artış genlik değerinde büyük bir azalış oluşturmaktadır. Benzer şekilde frekans geri yönde azalarak ilerledikçe frekanstaki azalış genliği belli bir oranda değiştirmekte ve  $\omega = 1,77$  kritik frekans değerine gelindiğinde frekanstaki çok ufak azalış genlikte oldukça büyük bir artışa neden olmaktadır. İşte bu iki kritik frekans değeri sistemin atlama noktalarıdır.

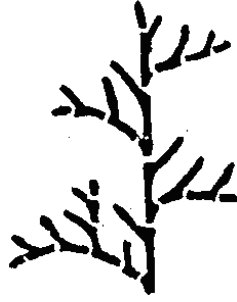


Şekil 2. 16. Maksimum genlik cevabı ve atlama olayı

### 2.3.2. Çatallanma

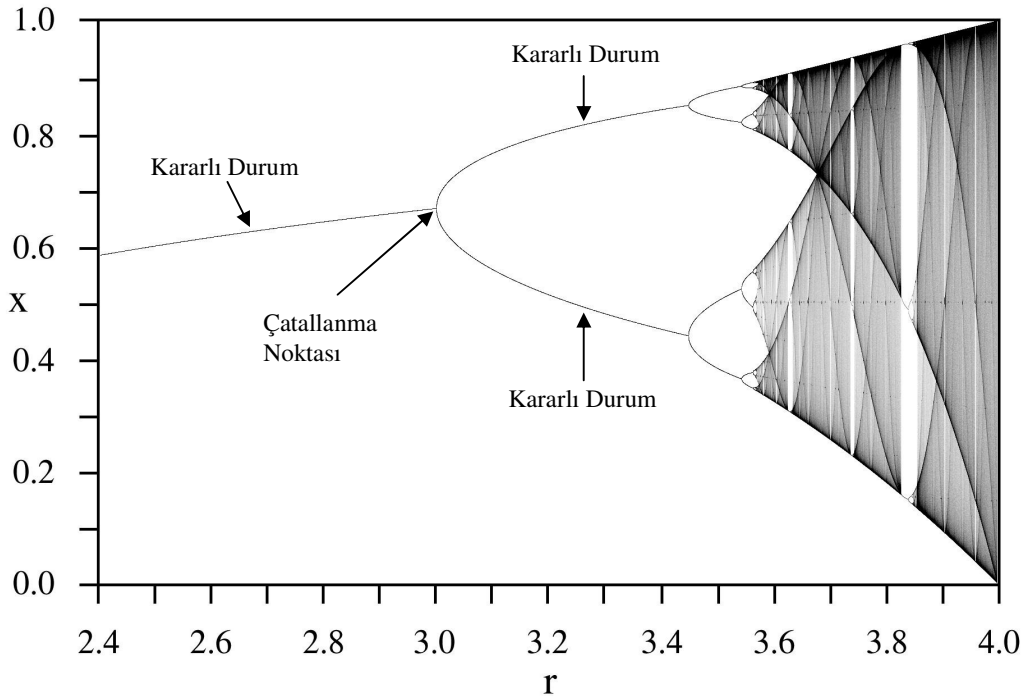
Bir sistemin kararlılığına etki eden parametrelerde küçük değişiklikler yapılırsa yeni portrenin eskisine benzemesi beklenense de durum her zaman bu şekilde olmayabilir. Parametrelerden biri değişikliğe uğradığında aniden yeni bir denge noktası ortaya çıkabilir ya da kararlı denge noktası kararsız hale gelebilir. Yani sabit noktalar oluşturulabilir, yok edilebilir veya bu noktaların kararlılığı değişebilir. Dinamikteki bu değişimlere Çatallanma (Bifurcation), değişimin görüldüğü parametre değerlerine de Çatallanma Noktaları denir.

Çatallanma kelime anlamı olarak tek bir parçanın veya bir arada duran parçaların ikiye veya daha fazla parçalara ikiye ikiye ayrılması durumudur. Bu durum Şekil 2.17’de gösterildiği gibi doğada ağaçların dal yapısına da benzer. Dinamik sistemlerde de çatallanma bu şekilde gerçekleşir. Doğrusal olmayan sistemlerin bazı kritik parametre değerlerinde yörüngelerinin yapısında çatallanma şeklinde bir değişim görülür. Çatallanma adını bu değişimlerden alır.



Şekil 2.17. Çatallanma [11]

Aşağıda doğrusal olmayan bir sistemin çatallanma ve daha sonrasında kaosa gidişi görülmektedir.



Şekil 2.18. Doğrusal Olmayan Sistemlerde Çatallanma ve Kaos [12]

Doğrusal olmayan sistemlerin çözümünde Çatallanma olayı önemli bir rol oynamaktadır. Sistemdeki ani değişimler kararlı normal durumdan artarak cevap vermeyi, bu da gerilim çökmesini, kaos olaylarını beraberinde getirmektedir. Bir sistemin dinamik davranışı bir parametre değişimiyle değiştirildiği zaman güç sistemlerinde çatallaşmalar doğmaktadır (Şekil 2.18). Meydana gelen bir çatallanma

sistemdeki herhangi bir parametreden kaynaklanabilir. Meydana gelen çatallanmada limit döngülerin sayısı, limit döngülerin ya da denge noktalarının kararlılığı, denge noktalarının sayısı, periyodik çözümlerin periyodu değişmektedir.

### 2.3.3. Kaos

Kaos denildiğinde ilk bakışta akla rastgelelik (randomness), anarşi, özgürlük gibi sözcükler gelebilir. Oysa bilimsel anlamda kaos kuramının bunlarla bir ilgisi yoktur. Kaos kuramı daha çok düzensizliğin içindeki düzenin (order of disorder) araştırılması ile ilgilenmektedir [13].

Kaos konusunda çalışmalar 1980’li yıllarda hızlı bir gelişim sürecine girdi. Pek çok yerde bilim adamları uzmanlık konularını ikinci plana atıp kaos üzerine çalışmalarını hızlandırdı. Dünyada kaos konusunu araştırmak için kaos araştırma merkezleri kuruldu.

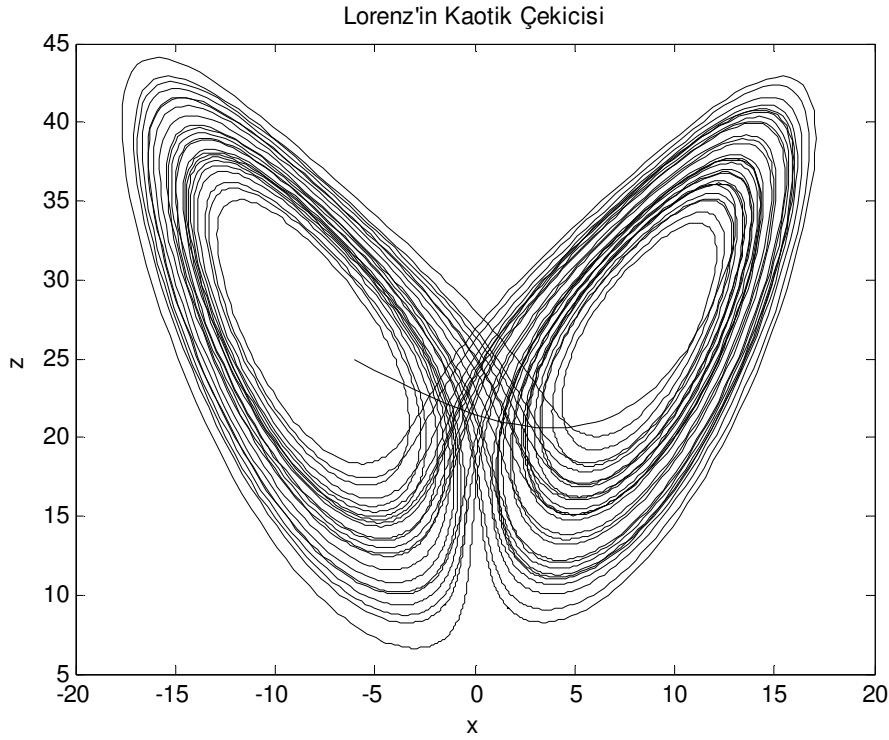
Dünyadaki doğal olaylara bakıldığında zaman, çatlayan topraktan kırılan cama, ağaç dallarından köklerine kadar hep çatallanmalar, kırıklı, kesikli düzgün olmayan şekiller görülür. Örneğin deniz ve okyanus dalgalarındaki düzensizlikler, insanları ölüme götüren kalp ve beyin titreşimlerindeki düzensizlikler de kaos kavramı içine girer. Kaos her yerde karşımıza çıkmaktadır. Bayrağın dalgalanması, denizdeki ve okyanustaki suların dalgalanması, yolda hareket eden bir arabanın aniden kayması kaos olayına örnek olarak verilebilir. İçinde bulunulan ortam ne olursa olsun bu tip düzensiz gibi görülen davranışlar kaos kavramına uyar. Kaos kuramının kurucularından olan Mandelbrot, “Siz hiç küre şeklinde bulut, koni şeklinde dağ gördünüz mü?” diyerek geometride kullandığımız düzenli biçimlerin gerçek dünya ile çelişmesini vurgulamıştır.

Kaos kuramının ilgilendiği temel sorulardan biri, küçük nedenlerin kendilerinden çok daha önemli sonuçlara yol açıp açmayacakları sorusudur. Sözü edilen teoride “kelebek kanadı etkisi” adı verilen bu etki, teknik olarak “başlangıç koşullarına hassas bağımlılık” olarak adlandırılır. “Çin’de bir kelebek kanadını çırpsa, Meksika Körfezi’nde fırtına çıkabilir” şeklinde ifade edilen bu etki ile çok küçük bir nedenin

çok önemli sonuçlara yol açabileceği anlatılır. Küçük nedenlerin büyük sonuçlara yol açması eski bir deyişte şöyle görülmektedir:

Bir çivi kaybolduğu için bir nal kayboldu.  
 Bir nal kaybolduğu için bir at kayboldu  
 Bir at kaybolduğu için bir atlı kayboldu  
 Bir atlı kaybolduğu için bir haber kayboldu  
 Bir haber kaybolduğu için bir savaş kaybedildi  
 Ve bir savaş kaybedildiği için bir krallık yok oldu.

Kaosu anlamak için klasik bir sistem olan Lorenz sistemi incelenebilir. Baykuş gözlerini ya da kelebek kanatlarını andıran bu şekil kaosu ilk keşifleri tarafından sembolik olarak benimsenmiştir. Düzensizliğin içinde saydam ve güzel bir yapının bulunduğu bu şekille açıklanmaktadır. Lorenz fonksiyonu yardımıyla elde edilen Lorenz'in Kaotik Çekicisi grafiği Şekil 2.19'da görülmektedir.



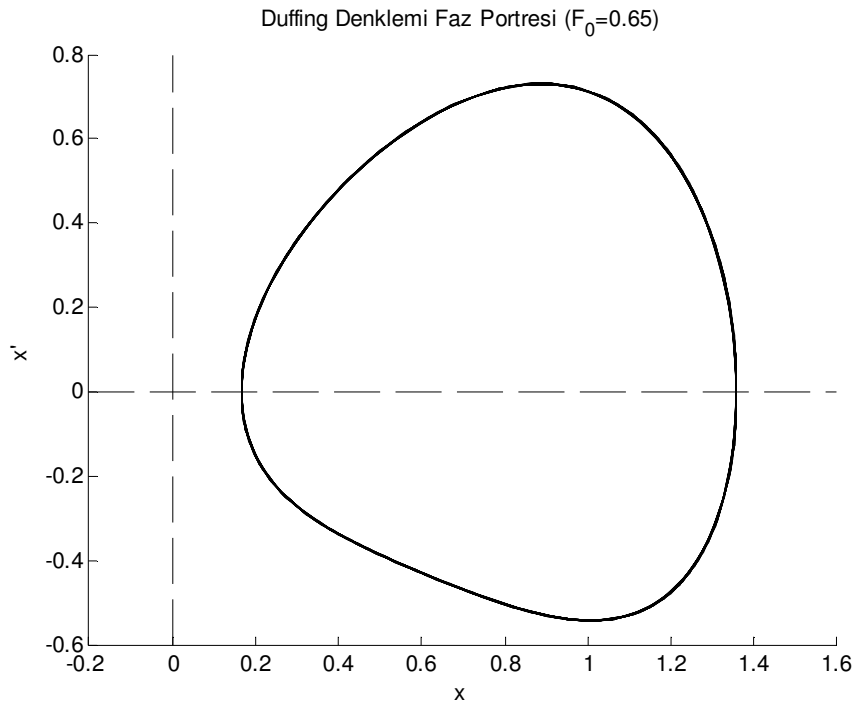
Şekil 2.19. Lorenz'in Kaotik Çekicisi (Lorenz Strange Attractor)



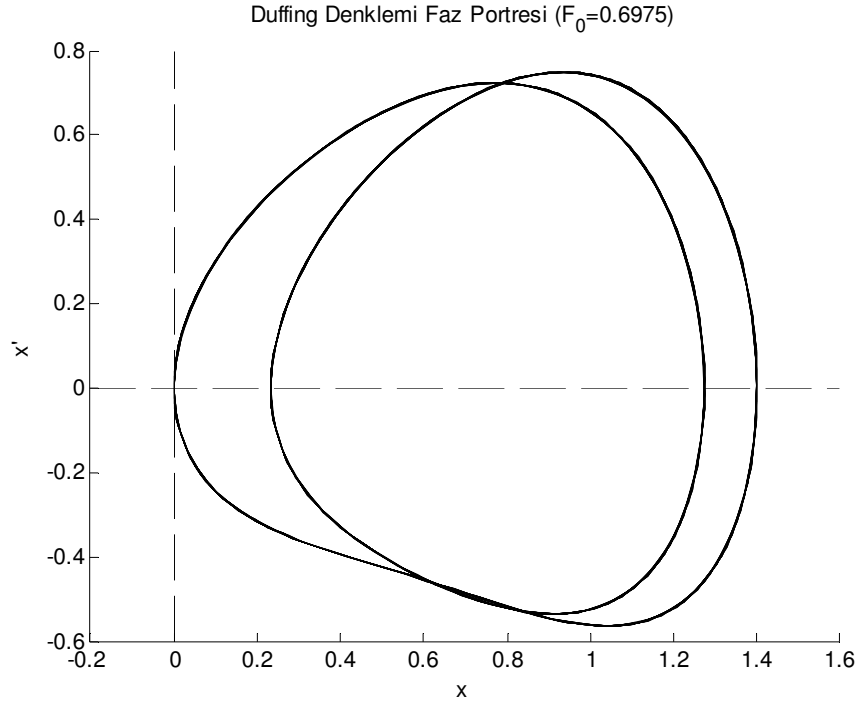
Şekil 2.19’da sistem hiçbir zaman aynı şekilde tekrar etmediğinden, sistem yörüngesi kendi kendisiyle asla kesişmez. Bunun aksine sonsuza kadar kendi etrafında salınmaya devam eder. Bu hareket soyut olmasına rağmen gerçek sistem hakkında fikir verir. Burada çekicinin bir kanadından diğer kanadına geçmesi su tekerleğinin veya konveksiyon halindeki akışkanların dönüş hareketinin ters yönünde kabul edilir.

Kaos olayını bir simülasyonla göstermek üzere denklem 2.1’e  $u(t) = F_0 \cos(\omega t)$  giriş sinyali uygulanarak sistem katsayıları  $c_1 = k_2 = \omega = 1$ ,  $k_1 = -1$  olacak şekilde ele alındığında  $\ddot{y}(t) + \dot{y}(t) - y(t) + y^3(t) = F_0 \cos(t)$  haline gelen denklem üzerinde Matlab yazılım programı kullanılarak bir simülasyon gerçekleştirilmiş olsun [7].

Öncelikle giriş sinyalinin genliği  $F_0 = 0,65$  olacak şekilde seçildiğinde aşağıda verilen Şekil 2.20’deki faz portresi elde edilir. Görüldüğü gibi hız değişimine karşılık yer değişiminin çizildiği faz portresinde tek bir yörünge üzerinde hareket ediliyor olması sistemin seçilen değerlerinden ötürü doğrusal olarak davranış sergilediğini söylemektedir. Bir anlamda kaosa gitmeyen bir yapıya sahip bulunmaktadır.



Şekil 2.20. Duffing denklemi için  $F_0 = 0,65$  ’deki örnek faz portresi



Şekil 2.21. Duffing denklemi için  $F_0 = 0,6975$ 'deki örnek faz portresi

Aynı işlem  $F_0 = 0,6975$  olarak alınıp tekrarlandığında Şekil 2.21 ortaya çıkar. Ufak bir parametre değişikliği önemli nedenlere yol açmıştır. Burada sistemin kaosa gittiği görülür. Çünkü faz portresi sistemde her zaman aynı yerde değil de farklı iki yerde çıkmıştır. Sistemin kaosa gidip gitmediğini anlamakta faz portresi önemli bir yer teşkil eder.

## **BÖLÜM 3. GENELLEŞTİRİLMİŞ HARMONİK DENGE METODU**

### **3.1. Giriş**

Bölüm 1’de gerçek hayatta bulunan bütün sistemlerin, doğrusal olmayan sistemler kapsamına girdiğinden bahsedilmişti. Bizler etrafında neler olup bittiğini merak ederek ve birtakım ihtiyaçlarımıza göre olup bitenleri inceleyerek öğrendiklerimizle bu sistemleri kontrol altına almaya çalışırız. Bu kontrol neticesinde çevremizde karşılaştığımız sorunları çözerek hayatımızı daha da kolaylaştırmayı amaçlarız. Zorla titreşimin doğrusal olmayan etkisi kullanılarak beton kirişlerde hasar tespiti [14], düzenli deniz dalgalarında yer alan bir geminin sallanma cevabı [10, 15], hızlı tren geçen bir yerleşim birimindeki binalara etki eden tren titreşimini en aza indirme, asma bir köprünün hangi etkiler altında varlığını devam ettireceği, LC osilatörlerde gürültü analizi [16] gibi günlük hayatta karşılaşılabileceğimiz birçok problem doğrusal olmayan sistemlere ait analiz metodları kullanılarak çözülebilir. Bu durum da doğrusal olmayan sistemlerin analizini oldukça önemli bir hale getirir. Doğrusal olmayan sistemleri kullanmak ve kontrol etmek istediğimizde sisteme birbirinden farklı uyarımlar uygulayarak bu uyarımlara karşı sistemin verdiği tepkinin bilinmesi, bunun için de sistemin zaman veya frekans boyutunda analizi gerekir [1].

### **3.2. Harmonik Denge Denklemlerinin Klasik Hesabı**

Doğrusal olmayan sistemlerin analizinde Harmonik Denge Metodu (Harmonic Balance Method) önemli bir yer tutar. Analitik analiz tekniklerinden biri olan bu metod doğrusal olmayan sistemlerin frekans cevabı analizlerinde çok sık kullanılır ve oldukça pratiktir [5]. Yöntem uygulanırken sistem girişi ve çıkışı için sinüzoidal sinyaller belirlenir. Bu giriş ve çıkış sinüzoidalleri sistemin matematiksel

denkleminde yerine konularak gerekli açılımlar yapılır. Eşitliğin her iki tarafındaki aynı harmonikte olan sinüs ve kosinüs sinyalleri ayrı ayrı birbirlerine eşitlenerek bilinmeyen sayısınca harmonik denge denklemleri elde edilir. Bu denklemler kullanılarak uygun bir sayısal yöntem vasıtasıyla bilinmeyenler bulunur [17, 18].

### 3.2.1. Örnek uygulama

Bir geminin düzenli deniz dalgaları karşısındaki sallanma hareketini tanımlayan ve yapı olarak Van der Pol sistemi ile benzer olan bir doğrusal olmayan diferansiyel denklem aşağıdaki gibi tanımlanır [19].

$$\ddot{y}(t) + 2\mu\dot{y}(t) + \delta y(t)^2 \dot{y}(t) + \omega_n^2 y(t) + \alpha y(t)^3 = \omega_n^2 u(t) \quad (3.1)$$

İkinci derece diferansiyel denklem olan denklem 3.1'de yer alan giriş ve çıkışa ait tanımlamalar  $u(t) = A_u \cos(\omega t - \phi)$  ve  $y(t) = A_1 \cos(\omega t)$  şeklinde kabul edilmiş olsun. Denklemin çözümü için denge denklemlerinin bulunup sayısal çözümleme yöntemleri kullanılarak bilinmeyenlerin bulunması gerekir. Denge denklemlerinin elde edilebilmesi için denklemdaki bileşenler tek tek hesaplanır:

$$\dot{y}(t) = -A_1 \omega \sin(\omega t) \quad (3.2)$$

$$\ddot{y}(t) = -A_1 \omega^2 \cos(\omega t) \quad (3.3)$$

$y(t)^2 = A_1^2 \cos^2(\omega t)$  hesaplamasında kosinüslü ifadenin üssel formdan kurtarılması gerekir. Bu işlem için  $\cos^2(\omega t) = \frac{\cos(2\omega t) + 1}{2}$  dönüşümü kullanılarak denklem 3.4 elde edilmiş olur.

$$y(t)^2 = \frac{A_1^2}{2} (1 + \cos(2\omega t)) \quad (3.4)$$

3.2 ve 3.4 numaralı denklemler kullanılarak  $y(t)^2 \dot{y}(t)$  bileşeni

$$y(t)^2 \dot{y}(t) = -\frac{A_1^2}{2} (1 + \cos(2\omega t)) A_1 \omega \sin(\omega t) \text{ olarak bulunur. Burada ifadenin}$$

tamamının aynı cinsten olması için  $\cos(2\omega t) = 1 - 2\sin^2(\omega t)$  dönüşümü kullanılırsa denklem 3.5 elde edilir.

$$\begin{aligned} y(t)^2 \dot{y}(t) &= -\frac{A_1^3 \omega}{2} (1 + 1 - 2\sin^2(\omega t)) \sin(\omega t) \\ &= -\frac{A_1^3 \omega}{2} (2 - 2\sin^2(\omega t)) \sin(\omega t) \\ &= -A_1^3 \omega (1 - \sin^2(\omega t)) \sin(\omega t) \\ &= -A_1^3 \omega (\sin(\omega t) - \sin^3(\omega t)) \end{aligned} \quad (3.5)$$

Denklem 3.5'e  $\sin^3(\omega t) = \frac{3\sin(\omega t) - \sin(3\omega t)}{4}$  dönüşümü uygulanarak düzenleme yapılırsa;

$$\begin{aligned} y(t)^2 \dot{y}(t) &= -A_1^3 \omega \left[ \sin(\omega t) - \frac{3\sin(\omega t) - \sin(3\omega t)}{4} \right] \\ &= -A_1^3 \omega \left[ \sin(\omega t) - \frac{3}{4} \sin(\omega t) + \frac{\sin(3\omega t)}{4} \right] \\ &= -A_1^3 \omega \left[ \frac{\sin(\omega t)}{4} + \frac{\sin(3\omega t)}{4} \right] \\ &= -\frac{A_1^3 \omega}{4} \sin(\omega t) - \frac{A_1^3 \omega}{4} \sin(3\omega t) \end{aligned} \quad (3.6)$$

sonucuna ulaşılır.

$y(t)^3 = A_1^3 \cos^3(\omega t)$  hesaplamasında kosinüslü ifadenin üssel formdan kurtarılması

için  $\cos^3(\omega t) = \frac{\cos(3\omega t) + 3\cos(\omega t)}{4}$  dönüşümü kullanılarak denklem 3.7 elde edilir.

$$y(t)^3 = A_1^3 \left[ \frac{\cos(3\omega t) + 3\cos(\omega t)}{4} \right] = \frac{3A_1^3}{4} \cos(\omega t) + \frac{A_1^3}{4} \cos(3\omega t) \quad (3.7)$$

$u(t) = A_u \cos(\omega t - \phi)$  ifadesinde bir düzenlemeye gidildiğinde;

$$u(t) = A_u (\cos(\omega t) \cos(\phi) + \sin(\omega t) \sin(\phi)) \quad (3.8)$$

$$u(t) = [A_u \cos(\phi)] \cos(\omega t) + [A_u \sin(\phi)] \sin(\omega t) \quad (3.9)$$

elde edilir.

3.2, 3.3, 3.6, 3.7 ve 3.9 numaralı denklemler, 3.1 numaralı denklemde yerlerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} -A_1 \omega^2 \cos(\omega t) - 2\mu A_1 \omega \sin(\omega t) + \delta \left[ -\frac{A_1^3 \omega}{4} \sin(\omega t) - \frac{A_1^3 \omega}{4} \sin(3\omega t) \right] + \omega_n^2 A_1 \cos(\omega t) \\ + \alpha \left[ \frac{3A_1^3}{4} \cos(\omega t) + \frac{A_1^3}{4} \cos(3\omega t) \right] = \omega_n^2 [A_u \cos(\phi) \cos(\omega t) + A_u \sin(\phi) \sin(\omega t)] \quad (3.10) \end{aligned}$$

denklemini elde edilir. Bu denklemin sinüs ve kosinüs bileşenlerine göre tekrar düzenlemesi yapılırsa;

$$\begin{aligned} \left[ -A_1 \omega^2 + \omega_n^2 A_1 + \frac{3A_1^3 \alpha}{4} \right] \cos(\omega t) - \left[ 2\mu A_1 \omega + \frac{\delta A_1^3 \omega}{4} \right] \sin(\omega t) + \frac{A_1^3 \alpha}{4} \cos(3\omega t) \\ - \frac{\delta A_1^3 \omega}{4} \sin(3\omega t) = [\omega_n^2 A_u \cos(\phi)] \cos(\omega t) + [\omega_n^2 A_u \sin(\phi)] \sin(\omega t) \quad (3.11) \end{aligned}$$

denklemini ortaya çıkar. Denklemdaki eşitliğin her iki tarafındaki sinüslü ifadeler sinüslü ifadelere, kosinüslü ifadeler kosinüslü ifadelere eşitlenirse denge denklemleri denklem 3.12 ve denklem 3.13'de görüldüğü gibi elde edilmiş olur.

$$\cos(\omega t) : -A_1 \omega^2 + \omega_n^2 A_1 + \frac{3\alpha}{4} A_1^3 = \omega_n^2 A_u \cos(\phi) \quad (3.12)$$

$$\sin(\omega t) : 2\mu A_1 \omega + \frac{A_1^3}{4} \delta\omega = -\omega_n^2 A_u \sin(\phi) \quad (3.13)$$

Daha sonra elde edilen bu denge denklemlerine uygun bir sayısal çözümleme metodu uygulanarak denklemdeki bilinmeyenler bulunur.

### 3.3. Genelleştirilmiş Harmonik Denge Metodu

Bir önceki konuda görüldüğü gibi metodun klasik uygulamasında belirlenen bir noktaya kadar alınmış Fourier serilerinden oluşan genel sinüzoidal forma ait harmonik sayısı ve sistemin derecesi arttıkça elde edilen terim sayısı oldukça arttığından uzun ve karmaşık işlemler yapılması gerekmektedir. Bundan dolayı bu yöntem ile gerçekleştirilen uygulamalarda işlemleri basitleştirmek için genelde analiz gerçekleştirilirken frekans bileşeni olarak tek sinüzoidal sinyal kullanılmış, buna karşılık gerçekte var olabilecek yüksek dereceli harmonikler ve sabit bileşen ihmal edilmiştir [18].

Klasik uygulamanın getirdiği bu problemleri çözmek amacıyla harmonik denklemlerin sembolik hesabına yönelik bir algoritma geliştirilmiş, bu da araştırmacılara daha pratik analiz imkânı sunmuştur [18, 19, 20]. Sonraları bu çalışma daha da geliştirilerek, doğrudan sistem katsayıları ve genel harmonik sinyal formundaki kompleks genlikleri ve fazları cinsinden yazılmasını sağlayan ve önceki yöntemlere ve algoritmalara göre daha geniş bir sınıfa uygulanabilecek yeni bir algoritma geliştirilmiştir [18, 21, 22, 23]. 2003 yılında Peyton tarafından gerçekleştirilen bir çalışmada, analitik yöntemler kullanılarak harmonik denge metodunun bilgisayar ortamında kullanılabilmesi amaçlanmıştır. Karmaşık işlemlerin bilgisayara yaptırılarak rahat bir şekilde kullanılabilmesi için metod genelleştirilmiş ve programlama algoritmalarında kullanıma uygun hale getirilmiştir. Bu sayede denge denklemleri, genel doğrusal olmayan sistem formu ve harmonik sayısı isteğe göre belirlenebilen bir giriş sinyali için üretilebilir.

Denge denklemlerinin elde edilmesi için öncelikle sistem denkleminin algoritmaya uygun bir formda tanımlanması gerekir. Dinamik sistemler genellikle frekans

boyutunda Laplace, zaman boyutunda ise diferansiyel denklemler kullanılarak gösterilirler. Zaman boyutundaki gösterim sistem davranışını net bir şekilde yansıtır ve doğrusal olmayan ters tepki, sönüm veya doğrusal olmayan ölçülendirme dinamikleri gibi fiziksel davranışlar hakkında bilgi verir [5, 18, 24]. Doğrusal olmayan sistemlerin zaman boyutunda gösterimi genelde integro-diferansiyel denklemler kullanılarak yapılır. Tek giriş-tek çıkışlı integro diferansiyel denklemler aşağıdaki gibi gösterilebilir [21].

$$\sum_{m=1}^M \sum_{p=0}^m \sum_{l_1, l_{p+q}=0}^L c_{p,q}(l_1, \dots, l_{p+q}) \prod_{i=0}^p D^{l_i} y(t) \prod_{i=p+1}^{p+q} D^{l_i} u(t) = 0 \quad (3.14)$$

Denklem 3.14’de gösterilen denkleme NIDE model adı verilir. Burada  $D$  türev alma operatörünü,  $l_i$  türevin derecesini,  $u(t)$  ve  $y(t)$  ise giriş ve çıkış sinyallerini belirtir. Sistem denklemindeki her bir terim kendisiyle ilgili  $c_{p,q}(l_1, \dots, l_{p+q})$  katsayısıyla çarpılarak  $D^{l_i} y(t)$  içindeki  $p$ ’inci derece çarpan ya da  $D^{l_i} u(t)$  içindeki  $q$ ’uncu derece çarpandan oluşmaktadır. Çarpım durumundaki toplamlar, bütün terimleri en fazla sistemin doğrusal olmama derecesine kadar yani  $M$ ’inci doğrusal olmama derecesine kadar üretmektedir. Denge denklemlerinin sembolik olarak elde edilebilmesi için denklem 3.14 kullanılır [18].

Örnek sistem modeli olarak kullanacağımız doğrusal olmayan geminin düzenli deniz dalgalarında sallanma hareketini tanımlayan diferansiyel denklem aşağıda verilmiştir.

$$\ddot{y}(t) + 2\mu\dot{y}(t) + \delta u(t)^2 \dot{y}(t) + \omega_n^2 y(t) + \alpha y(t)^3 = u(t) \quad (3.15)$$

Doğrusal olmayan denklem 3.15, görüldüğü gibi doğrusal ve doğrusal olmayan terimlerden oluşmaktadır. Doğrusal terimler kendi aralarında giriş ve çıkışa ait olan terimler, doğrusal olmayan terimler ise yine kendi arasında çıkışa ait olan terimler ve giriş ile çıkış çarpımına ait olan terimler olarak incelenebilir. Denklem 3.14’de belirtilen NIDE modelde çıkışa ait doğrusal olmama derecesini “ $p$ ” indisi, girişe ait doğrusal olmama derecesini “ $q$ ” indisi gösterdiğine göre saf giriş ya da çıkışlarda,



sadece çıkışa ait terimler varsa girişe ait olan doğrusal olmama derecesi “ $q=0$ ”, aynı şekilde sadece girişe ait terimler varsa çıkışa ait olan doğrusal olmama derecesi “ $p=0$ ” olarak alınır. Bu durum NIDE model denkleminde uygulandığında sade girişe ait NIDE model katsayısı,

$$\sum_{m=q=1}^M \sum_{l_1, l_q=-L}^L c_{0,q}(l_1, \dots, l_q) \prod_{i=1}^q D^{l_i} u(t) \quad (3.16)$$

sade çıkışa ait NIDE model katsayısı,

$$\sum_{m=p=1}^M \sum_{l_1, l_p=-L}^L c_{p,0}(l_1, \dots, l_p) \prod_{i=1}^p D^{l_i} y(t) \quad (3.17)$$

olarak bulunur.

Örnek olarak denklem 3.16’den hareketle sade giriş  $\omega_n^2 u(t)$  terimine ait NIDE model katsayısı hesaplanabilir. Terimdeki girişin üs derecesi 1 olduğundan  $q=1$ , bütün giriş ve çıkış üs dereceleri toplamı 1 olduğundan  $M=p+q=1$ , girişin türev derecesi 0 olduğundan  $L=0$  olarak alınır.

$$\sum_{m=q=1}^1 \sum_{l_1=0}^0 c_{0,1}(l_1) \prod_{i=1}^1 D^{l_i} u(t) = c_{0,1}(0) u(t) = -\omega_n^2 u(t) \quad (3.18)$$

Denklem 3.18’den hareketle  $c_{0,1}(0) = -\omega_n^2$  olarak bulunur. Bu terim denklem 3.15’de görüldüğü gibi eşitliğin sağ tarafındadır ve denklemin 0 (sıfır)’a eşitlenmesi için eşitliğin sol tarafına geçirildiğinde (-) “eksi” işaretini alır.

Benzer şekilde denklem 3.17 kullanılarak sade çıkış  $\omega_n^2 y(t)$  terimine ait NIDE model katsayısı hesaplanabilir. Terimdeki çıkışın üs derecesi 1 olduğundan  $p=1$ , bütün giriş ve çıkış üs dereceleri toplamı 1 olduğundan  $M=p+q=1$ , çıkışın türev derecesi 0 olduğundan  $L=0$  olarak alınır.

$$\sum_{m=p-1}^1 \sum_{l_1=0}^0 c_{1,0}(l_1) \prod_{i=1}^1 D^{l_i} y(t) = c_{1,0}(0) y(t) = \omega_n^2 y(t) \quad (3.19)$$

Denklem 3.19’da görüldüğü gibi  $c_{1,0}(0) = \omega_n^2$  olarak bulunur.

$\delta y(t)^2 \dot{y}(t)$  teriminin NIDE model katsayısı bulunmak istenirse terimdeki bütün çıkışların üs dereceleri toplamı 3 olduğundan  $p=3$ , terimdeki bütün giriş ve çıkışların üs dereceleri toplamı 3 olduğundan  $M = p + q = 3$ , çıkışın türev derecesi 1 olduğundan  $L=1$  olarak alınır.

$$\sum_{m=p-1}^3 \sum_{l_1=-1}^1 c_{3,0}(l_1) \prod_{i=1}^3 D^{l_i} y(t) = c_{3,0}(0,0,1) y(t)^2 \dot{y}(t) = \delta y(t)^2 \dot{y}(t) \quad (3.20)$$

olduğundan  $c_{3,0}(0,0,1) = \delta$  şeklinde bulunur.

Bu işlemler sistemin bütün terimlerine uygulandığında NIDE model katsayıları Tablo 3.1 ve Tablo 3.2’deki gibi elde edilir.

Tablo 3.1. Denklem 3.15’e ait doğrusal terimlerin NIDE model katsayıları

Doğrusal Terimler				
Terim	$p$	$q$	$l$	NIDE Katsayısı $c_{p,q}(l_1, l_2, \dots, l_i)$
$\ddot{y}(t)$	1	0	(2)	$c_{1,0}(2) = 1$
$2\mu\dot{y}(t)$	1	0	(1)	$c_{1,0}(1) = 2\mu$
$\omega_n^2 y(t)$	1	0	(0)	$c_{1,0}(0) = \omega_n^2$
$u(t)$	0	1	(0)	$c_{0,1}(0) = 1$

Tablo 3.2. Denklem 3.15'e ait doğrusal olmayan terimlerin NIDE model katsayıları

Doğrusal Olmayan Terimler				
Terim	$p$	$q$	$l$	NIDE Katsayısı $c_{p,q}(l_1, l_2, \dots, l_i)$
$\delta u(t)^2 \dot{y}(t)$	1	2	(1,0,0)	$c_{1,2}(1,0,0) = \delta$
$\alpha y(t)^3$	3	0	(0,0,0)	$c_{3,0}(0,0,0) = \alpha$

Uygulamada bir sisteme ait parametreler ve giriş sinyali, denge denklemlerini elde etmek için geliştirilen formülde yerine konur [5, 21]. Klasik uygulamada görüldüğü gibi harmonik denge metodunda giriş ve çıkış sinyalleri, sinüzoidal sinyallerin toplamı şeklinde olduğundan aşağıdaki gibi  $a_{x_r}$  genlikli ve  $\phi_{x_r}$  fazlı  $R_x$  adet sinüzoidalden oluşan ve  $a_{x_0}$  sabit bileşenli genel formdaki bir  $x(t)$  sinyali için tanımlanır.

$$x(t) = a_{x_{dc}} + \sum_{r=1}^{R_x} a_{x_r} \cos(\omega_r t + \phi_{x_r}) \quad (3.21)$$

Bu ifade işlem kolaylığı açısından Euler dönüşümüyle üstel formda aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$x(t) = \sum_{r=-R_x}^{R_x} \frac{A_{x_r}}{2} e^{j\omega_r t} \quad (3.22)$$

Denklem 3.22'de  $A_{x_r}$  karmaşık genlikler ve  $\omega_r$  frekans tanımlamaları aşağıdaki gibi yapılmıştır.

$$\left. \begin{aligned} A_{x_0} &= 2a_{x_{dc}} & \omega_0 &= 0 \\ A_{x_{-r}} &= a_{x_r} e^{-j\phi_r} & \omega_{-r} &= -\omega_r \\ A_{x_r} &= a_{x_r} e^{j\phi_r} & \omega_r &= r\omega \end{aligned} \right\} \quad (3.23)$$

Belirlenen giriş ve çıkış sinyallerinin genelleştirilmiş formu denklemde yerine konularak açılımların yapılması gerekir.

$$F_p[y(t)]F_q[Au(t)] = \frac{A^q}{2^m} \sum_{\substack{n \text{ tane alınan} \\ \{r_1, \dots, r_m\} \text{ dizisinin} \\ \{R, \dots, R\} \text{ aralığında} \\ \text{bütün kombinasyonları}}} n_r^* f_{uy}^{sym}(r_1, \dots, r_m) e^{j(\omega_1 + \dots + \omega_m)t} \quad (3.24)$$

Burada  $f_{uy}^{sym}(\cdot)$  simetrik fonksiyonu belirtir.

$$f_{uy}^{sym}(r_1, \dots, r_m) = \frac{1}{n_r^*} \sum_{\substack{\{r_1, \dots, r_m\} \\ \text{bütün ayrık} \\ \text{permütasyonları}}} \prod_{i=1}^p A_{y_{r_i}}(j\omega_{r_i})^{l_i} \prod_{i=p+1}^{p+q} A_{u_{r_i}}(j\omega_{r_i})^{l_i} \quad (3.25)$$

$n_r^*$  çarpanı ise simetrik fonksiyon için yapılan hesaplamada kombinasyona ait farklı permütasyon sayısını belirtir.

$$n_r^* = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_c!} \quad n = n_1 + n_2 + \dots + n_c \quad (3.26)$$

Çıkış frekanslarından herhangi birine ait harmonik bileşenler ( $\omega_r$ ) denge denklemi olarak tanımlanan denklem 3.27 ile ifade edilir. Burada algoritmanın otomatik forma sokulması gerekir. Bunun için denklemdeki kombinasyonları üreten ek bir algoritma kullanılır.

$$\sum_{m=1}^M \sum_{p=0}^m \frac{A^q}{2^m} \sum_{l_1, l_{p+q} = -L}^L c_{p,q}(l_1, \dots, l_{p+q}) \times \sum_{\substack{\text{her defasında } n \text{ tane alınan} \\ \{r_1, \dots, r_m\} \text{ dizisinin} \\ \{R, \dots, R\} \text{ aralığında} \\ \left[ \sum \omega_i = \omega_r \text{ şartıyla} \right] \\ \text{bütün kombinasyonları}}} n_r^* f_{uy}^{sym}(r_1, \dots, r_m) e^{j(\omega_1 + \dots + \omega_m)t} = 0 \quad (3.27)$$

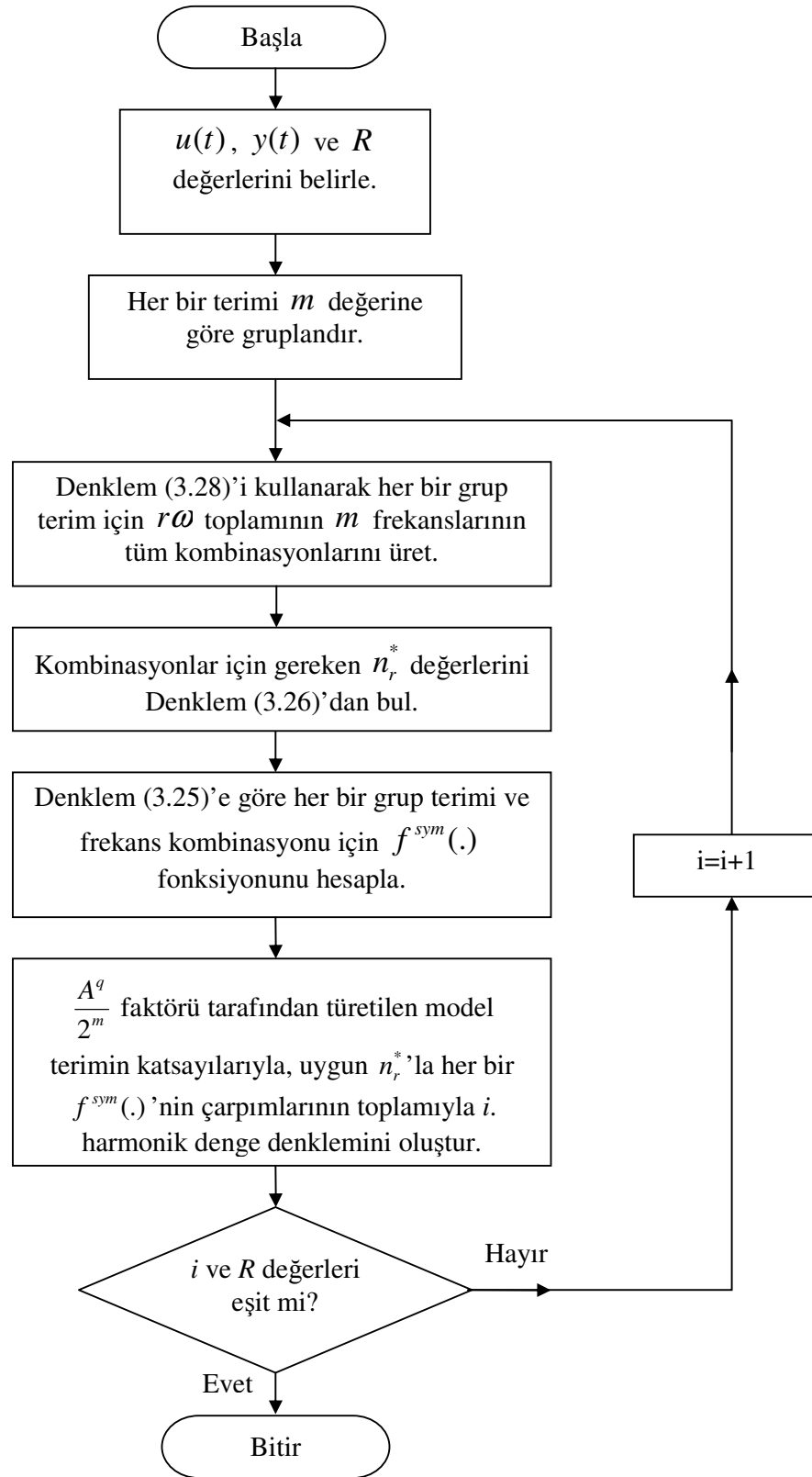
Belirlenen çoklu sinüzoidal sinyalin frekansları arasında harmonik olarak bir ilişki söz konusudur. Harmonikler temel bir  $\omega$  frekansının katları şeklinde  $\omega_r = r\omega$  ifade edilir. Analiz yaparken bir algoritmaya daha ihtiyaç duyulur. Bu algoritma kabul edilen bir çıkış harmoniği için harmonik denge denklemi oluşturulurken gereken

simetrik fonksiyonların otomatik bir şekilde elde edilebilmesi için uygun frekans bileşeninin seçilmesi işlemini gerçekleştirmelidir. Yöntem uygulanırken elemanları  $\{-R, \dots, R\}$  harmonik grubundan toplamları istenilen çıkış harmoniği olan  $r$  değerini verecek şekilde seçilerek  $\{-r, \dots, r\}$  harmonik grubunu üreten denklem 3.28'de gösterilen fonksiyon kullanılmaktadır.

$$S_{n,r}(r_1, \dots, r_n) = \sum_{r_1 = \max\{-R, r-(n-1)R\}}^{\min\{r, R\}} \{r_1, S_{n-1, r-r_1}(r_2, \dots, r_n)\} \quad (3.28)$$

Doğrusal olmayan bir sistemin denge denklemleri bilgisayar kullanılmadan kağıt üzerinde elde edilmek istendiğinde harmonik denge metodu kullanılarak 6-7 saat sürmekteyken, yine kağıt üzerine fakat bu kez geliştirilmiş harmonik denge metodu kullanılarak aynı sistemin denge denklemlerini yaklaşık 15-20 dakikada elde etmek mümkündür. Bu da geliştirilmiş harmonik denge metodu algoritmasının başarısını ortaya koymaktadır.

Yukarıdaki denklemler Mathematica, Maple ya da Matlab gibi hazır sembolik paket programlar kullanılarak yeniden gösterilebilir. Bu çözümler elle gerçekleştirildiği takdirde aşağıdaki pratik adımlar uygulanarak çözüme daha hızlı bir şekilde ulaşılabilir. Elle gerçekleştirilmiş çözüm için Şekil 3.1'deki akış diyagramı takip edilmelidir.



Şekil 3.1 Genelleştirilmiş Harmonik Denge Metoduna ait akış şeması

### 3.3.1 Genelleştirilmiş harmonik denge metodu ile örnek uygulama

Denklem 3.15’de diferansiyel denklemi verilen örnek sistem üzerinde bir uygulama gerçekleştirilsin. Sistemin NIDE model katsayılarını bir önceki konudaki gibi bulduktan sonra  $u(t)$  giriş sinyali ve  $y(t)$  çıkış sinyal formlarının belirlenmesi gerekir. Çıkış sinyali giriş sinyaline göre belirlenir. Giriş sinyalinde tek harmonikler varsa çıkışta tek, çift harmonikler varsa çıkışta çift, ikisi birden varsa çıkışta hem tek hem de çift harmonikler olması gerekir. Giriş sinyalinde 1. harmonik olan bir sistemde, çıkış sinyalinde “1., 3., 5., ...” harmonikler alınabilir. Fakat harmonik sayısı arttıkça etkisi ihmal edilecek derecede azalacağından gereksiz işlem kalabalığından kurtulmak amacıyla genelde 3. harmonikten sonrası ihmal edilir. İstendiği takdirde çıkış sinyali için sadece 1. harmonik de alınabilir. Eğer giriş sinyalinde  $dc$  bileşen (bias) ve 1. harmonik varsa çıkış sinyalinde  $dc$  bileşen, 1. harmonik ve 2. harmonik olmalıdır.

Giriş ve çıkış sinyalleri denklem 3.29 ve denklem 3.30’da görüldüğü gibi belirlensin.

$$u(t) = a_{u_{dc}} + a_{u_1} \cos(\omega t) \quad (3.29)$$

$$y(t) = a_{y_{dc}} + a_{y_1} \cos(\omega t + \phi_{y_1}) + a_{y_2} \cos(2\omega t + \phi_{y_2}) \quad (3.30)$$

Çıkış sinyalinde 0., 1. ve 2. harmonik bulunacağı kabul edildiğinden dolayı gerçekleştirilecek işlemlerin sonucunda 3 tane denge denkleminin elde edilmesi gelir. Her bir harmonik için ayrı ayrı denge denklemi hesaplanacak demektir. Çıkış sinyalindeki harmoniklerden dolayı harmonik seti bu harmoniklerin negatifini de barındıracak  $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$  şekilde belirlenir.

0. harmonik yani  $r=0$  için denge denklemi hesaplınsın. Bunun için doğrusal ve doğrusal olmayan bileşenlerin katkılarının ayrı ayrı hesaplanıp toplanması gerekir.

Doğrusal bileşenler hesaplanırken  $n=1$  olduğu için kombinasyonda yalnızca 1 eleman  $\{r_1\}$  bulunacaktır. Bu duruma uygun olarak denklem 3.25 yeniden hesaplanırsa,

$$f_x^{sym}(r_1) = A_{x_{r_1}} (r_1 j \omega)^l \quad (3.31)$$

denklemleri ortaya çıkar. Burada  $x$  indisi giriş ya da çıkıştan birini ifade eder. Doğrusal terimler için  $f_x^{sym}$  fonksiyonunun değeri hesaplandığında aşağıda verilen Tablo 3.3 elde edilir.

Tablo 3.3.  $r_1 = 0$  için doğrusal bileşenlere yönelik  $f_x^{sym}$  hesaplamaları

Doğrusal Terimler ( $r_1 = 0$ için)					
Terim	$p$	$q$	$l$	$n_r^*$	$f_x^{sym}(r_1) = A_{y_{r_1}} (jr_1 \omega)^l$
$\ddot{y}(t)$	1	0	2	$\frac{1!}{1!} = 1$	$f_y^{sym}(r_1) = 1 \cdot A_{y_0} (0j\omega)^2 = 0$
$\dot{y}(t)$	1	0	1	$\frac{1!}{1!} = 1$	$f_y^{sym}(r_1) = 1 \cdot A_{y_0} (0j\omega)^1 = 0$
$y(t)$	1	0	0	$\frac{1!}{1!} = 1$	$f_y^{sym}(r_1) = 1 \cdot A_{y_0} (0j\omega)^0 = A_{y_0}$
$u(t)$	0	1	0	$\frac{1!}{1!} = 1$	$f_u^{sym}(r_1) = 1 \cdot A_{u_0} (0j\omega)^0 = A_{u_0}$

Doğrusal olmayan bileşenler hesaplanırken  $n=3$  olduğu için kombinasyonda 3 eleman  $\{r_1, r_2, r_3\}$  bulunacaktır. 0. harmonik için bir hesaplama yapıldığında 3 harmoniğin toplamı  $(\omega_{r_1} + \omega_{r_2} + \omega_{r_3}) = 0$  olacak şekilde tekrarsız harmonik dizilişleri Tablo 3.4'deki gibi elde edilir.



Tablo 3.4.  $(\omega_{r_1} + \omega_{r_2} + \omega_{r_3}) = 0$  için doğrusal olmayan bileşenlere yönelik  $f^{sym}$  hesaplamaları

$(\omega_{r_1} + \omega_{r_2} + \omega_{r_3}) = 0$			$n_r^*$	$f^{sym}(r_1, r_2, r_3)$	
$r_1$	$r_2$	$r_3$		$y^3(t)$	$u^2(t)\dot{y}(t)$
-2	0	2	$\frac{3!}{1!1!1!} = 6$	$A_{y_{-2}} A_{y_0} A_{y_2}$	$\frac{1}{6} [2A_{y_{-2}} A_{u_0} A_{u_2} (-2j\omega) + 2A_{y_2} A_{u_{-2}} A_{u_0} (2j\omega)]$
-2	1	1	$\frac{3!}{1!2!} = 3$	$A_{y_{-2}} A_{y_1}^2$	$\frac{1}{3} [A_{y_{-2}} A_{u_1}^2 (-2j\omega) + 2A_{y_1} A_{u_{-2}} A_{u_1} (j\omega)]$
-1	-1	2	$\frac{3!}{1!2!} = 3$	$A_{y_{-1}}^2 A_{y_2}$	$\frac{1}{3} [2A_{y_{-1}} A_{u_{-1}} A_{u_2} (-j\omega) + A_{y_2} A_{u_{-1}}^2 (2j\omega)]$
-1	0	1	$\frac{3!}{1!1!1!} = 6$	$A_{y_{-1}} A_{y_0} A_{y_1}$	$\frac{1}{6} [2A_{y_{-1}} A_{u_0} A_{u_1} (-j\omega) + 2A_{y_1} A_{u_{-1}} A_{u_0} (j\omega)]$
0	0	0	$\frac{3!}{3!} = 1$	$A_{y_0}^3$	0

{-2,0,2} dizilişinde toplam 3 tane harmonik olduğu için  $n = 3$ , ilk eleman “-2”nin aynısından bir tane olduğundan  $n_1 = 1$ , ikinci eleman “0”ın aynısından bir tane olduğundan  $n_2 = 1$  ve üçüncü eleman “2”nin aynısından bir tane olduğundan  $n_3 = 1$

alınarak  $n_r^*$  değeri  $n_r^* = \frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_c!} = \frac{3!}{1!1!1!}$  şeklinde hesaplanır. {-2,1,1} dizilişini baz

aldığımızda toplam 3 tane harmonik olduğundan  $n = 3$ , ilk eleman “-2”nin aynısından bir tane olduğundan  $n_1 = 1$ , ikinci eleman “1”in aynısından 2 tane

olduğundan  $n_2 = 2$  alınarak  $n_r^*$  değeri  $n_r^* = \frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_c!} = \frac{3!}{1!2!}$  şeklinde hesaplanır. 0.

harmoniğe ait bütün  $n_r^*$  hesaplamaları Tablo 3.4’de görülmektedir.

Kübik bileşen  $y^3(t)$  için denklem 3.25 uygulanırsa  $f_y^{sym}(r_1, \dots, r_i) = \prod_{i=1}^p A_{y_{r_i}} (j\omega_{r_i})^i$

olur ve;

$$f_y^{sym}(-2,0,2) = A_{y_{-2}} (-2j\omega)^0 A_{y_0} (0j\omega)^0 A_{y_2} (2j\omega)^0 = A_{y_{-2}} A_{y_0} A_{y_2} \quad (3.32)$$

şeklinde hesaplanır. Kübik bileşenin 0. harmoniğe ait diğer dizilişleri için  $f_y^{sym}$  fonksiyonunun hesaplanmış halleri Tablo 3.4'de gösterilmiştir.

$u^2(t)\dot{y}(t)$  terimi giriş ve çıkışın çarpım durumunda olduğundan çapraz çarpım terim olarak adlandırılır. Denklem 3.25 kullanıldığında  $f_{uy}^{sym}(-2,0,2)$  değerinin  $\{-2,0,2\}$  harmonik dizilişinin bütün kombinasyonlarında ayrı ayrı hesaplanıp sonuçların toplanması gerekir. Bu durum Tablo 3.5'te görülmektedir.

Tablo 3.5.  $u^2(t)\dot{y}(t)$  bileşenine yönelik  $f_{uy}^{sym}(-2,0,2)$  fonksiyonunun hesaplanması

$r_1$	$r_2$	$r_3$	$f^{sym}(-2,0,2)$ 'nin parçaları
-2	0	2	$A_{y_{-2}}(-2j\omega)^1 A_{u_0}(0j\omega)^0 A_{u_2}(2j\omega)^0 = A_{y_{-2}} A_{u_0} A_{u_2}(-2j\omega)$
-2	2	0	$A_{y_{-2}}(-2j\omega)^1 A_{u_2}(2j\omega)^0 A_{u_0}(0j\omega)^0 = A_{y_{-2}} A_{u_0} A_{u_2}(-2j\omega)$
0	2	-2	$A_{y_0}(0j\omega)^1 A_{u_0}(2j\omega)^0 A_{u_0}(-2j\omega)^0 = 0$
0	-2	2	$A_{y_0}(0j\omega)^1 A_{u_0}(-2j\omega)^0 A_{u_0}(2j\omega)^0 = 0$
2	0	-2	$A_{y_2}(2j\omega)^1 A_{u_0}(0j\omega)^0 A_{u_{-2}}(-2j\omega)^0 = A_{y_2} A_{u_0} A_{u_{-2}}(2j\omega)$
2	-2	0	$A_{y_{-2}}(2j\omega)^1 A_{u_{-2}}(-2j\omega)^0 A_{u_0}(0j\omega)^0 = A_{y_{-2}} A_{u_0} A_{u_{-2}}(2j\omega)$

Tablo 3.5'ten elde edilen terimler  $\frac{1}{n_r^*}$ 'la çarpıldığında  $f_{uy}^{sym}(-2,0,2)$  değeri,

$$f_{uy}^{sym}(-2,0,2) = \frac{1}{6} \left( 2A_{y_{-2}} A_{u_0} A_{u_2}(-2j\omega) + 2A_{y_2} A_{u_{-2}} A_{u_0}(-2j\omega) \right) \quad (3.33)$$

şeklinde elde edilir. Benzer şekilde 0. harmoniğin diğer harmonik diziliminde aynı hesaplamalar yapılırsa Tablo 3.4 elde edilir. 0. harmoniğe yani  $dc$  bileşene ait harmonik denge denklemi denklem 3.27 kullanılarak aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\begin{aligned}
& \sum_{m=1}^M \sum_{p=0}^m \frac{A^q}{2^m} \sum_{l_1, l_{p+q}=-L}^L c_{p,q}(l_1, \dots, l_{p+q}) \times \sum_{\substack{\text{her defasında } n \text{ tane alınan} \\ \{r_1, \dots, r_m\} \text{ dizisinin} \\ \{-R, \dots, R\} \text{ aralığında} \\ \sum \omega_i = \omega, \text{ şartıyla} \\ \text{bütün kombinasyonları}}} n_r^* f_{uy}^{sym}(r_1, \dots, r_m) e^{j(\omega_{r_1} + \dots + \omega_{r_m})t} \\
& = \frac{1}{2} c_{0,1}(0) \sum_{\substack{\{r_1\} \\ \{0\}}} f_u^{sym}(r_1) + \frac{1}{2} c_{1,0}(0) \sum_{\substack{\{r_1\} \\ \{0\}}} f_y^{sym}(r_1) + \frac{1}{2} c_{1,0}(1) \sum_{\substack{\{r_1\} \\ \{0\}}} f_y^{sym}(r_1) \\
& + \frac{1}{2} c_{1,0}(2) \sum_{\substack{\{r_1\} \\ \{0\}}} f_y^{sym}(r_1) + \frac{1}{8} c_{3,0}(0,0,0) \sum_{\substack{\{r_1, r_2, r_3\} \\ \{-2, -1, 0, 1, 2\} \\ \sum \omega_i = 0}} n_r^* f_y^{sym}(r_1, r_2, r_3) \\
& + \frac{1}{8} A^2 c_{1,2}(1,0,0) \sum_{\substack{\{r_1, r_2, r_3\} \\ \{-2, -1, 0, 1, 2\} \\ \sum \omega_i = 0}} n_r^* f_{uy}^{sym}(r_1, r_2, r_3) = 0 \tag{3.34}
\end{aligned}$$

Burada elde edilen katsayılar yerine konarak giriş sinyali ikinci harmonik içermediğinden  $A_{u_2} = 0$  alınıp denklemde sadeleştirmeler yapılırsa,

$$\begin{aligned}
& -\frac{A_{u_0}}{2} + \frac{\omega_n^2}{2} A_{y_0} + \frac{3\alpha}{8} \left[ 2A_{y_{-2}} A_{y_0} A_{y_2} + A_{y_{-2}} A_{y_1}^2 + A_{y_{-1}}^2 A_{y_2} + 2A_{y_{-1}} A_{y_0} A_{y_1} + \frac{A_{y_0}^3}{3} \right] \\
& + \frac{\delta}{4} A^2 j\omega \left[ A_{y_2} A_{u_{-1}}^2 - A_{y_{-2}} A_{u_1}^2 - A_{y_{-1}} A_{u_0} A_{u_1} + A_{y_1} A_{u_{-1}} A_{u_0} \right] = 0 \tag{3.35}
\end{aligned}$$

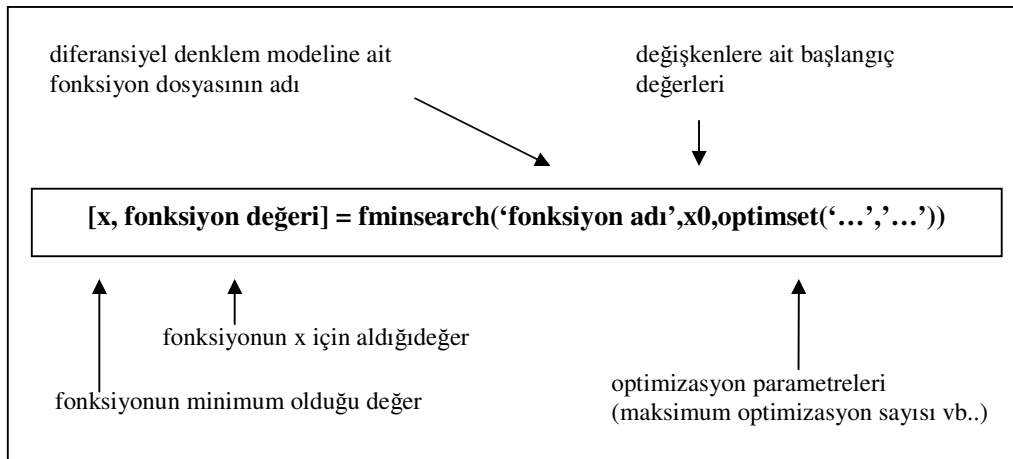
*dc* bileşene ait denge denklemi denklem 3.35'deki gibi elde edilmiş olur.

Benzer işlemler 1.(temel) ve 2. harmoniklere ait denge denklemlerini elde etmek için yapılırsa bu denge denklemleri denklem 3.36 ve denklem 3.37'de görüldüğü gibi elde edilir.

$$\begin{aligned}
& -\frac{A_{u_1}}{2} + \frac{A_{y_1}}{2} (\omega_n^2 - \omega^2 + 2\mu j\omega) + \frac{3\alpha}{8} \left[ 2A_{y_{-2}} A_{y_1} A_{y_2} + 2A_{y_{-1}} A_{y_0} A_{y_2} + A_{y_{-1}} A_{y_1}^2 + A_{y_0}^2 A_{y_1} \right] \\
& + \frac{\delta}{8} A^2 j\omega \left[ 4A_{y_2} A_{u_{-1}} A_{u_0} - A_{y_{-1}} A_{u_1}^2 + 2A_{y_1} A_{u_{-1}} A_{u_1} + A_{y_1} A_{u_0}^2 \right] = 0 \tag{3.36}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{A_{y_2}}{2} (\omega_n^2 - 4\omega^2 + 4\mu j\omega) + \frac{3\alpha}{8} [A_{y_2}^2 A_{y_2}^2 + 2A_{y_1} A_{y_1} A_{y_2} + A_{y_0}^2 A_{y_2} + A_{y_0} A_{y_1}^2] \\ & + \frac{\delta}{4} A^2 j\omega [2A_{y_2} A_{u_1} A_{u_1} + A_{y_2} A_{u_0}^2 + A_{y_1} A_{u_0} A_{u_1}] = 0 \end{aligned} \quad (3.37)$$

Denge denklemleri elde edildikten sonra katsayıların yerlerine sayısal değerleri yazılır. Denge denklemindeki bilinmeyenler  $(a_{y_0}, a_{y_1}, \phi_{y_1}, a_{y_2}, \phi_{y_2})$  uygun bir sayısal analiz yöntemi kullanılarak çözümlenir. Çözümleme işi bilgisayarda örneğin Matlab'ta yönteme ait algoritma programa çevrilerek yapılabilir ve bunun için *fminsearch* komutu kullanılabilir. *fminsearch* komutu Ek-A'da bahsedilen Nelder-Mead simplex yöntemini kullanarak bu çözümlemeyi gerçekleştirir. *fminsearch* komutuna ait kullanım yapısı Şekil 3.2'de görülmektedir [25].



Şekil 3.2. *fminsearch* komutuna ait genel kullanım formu

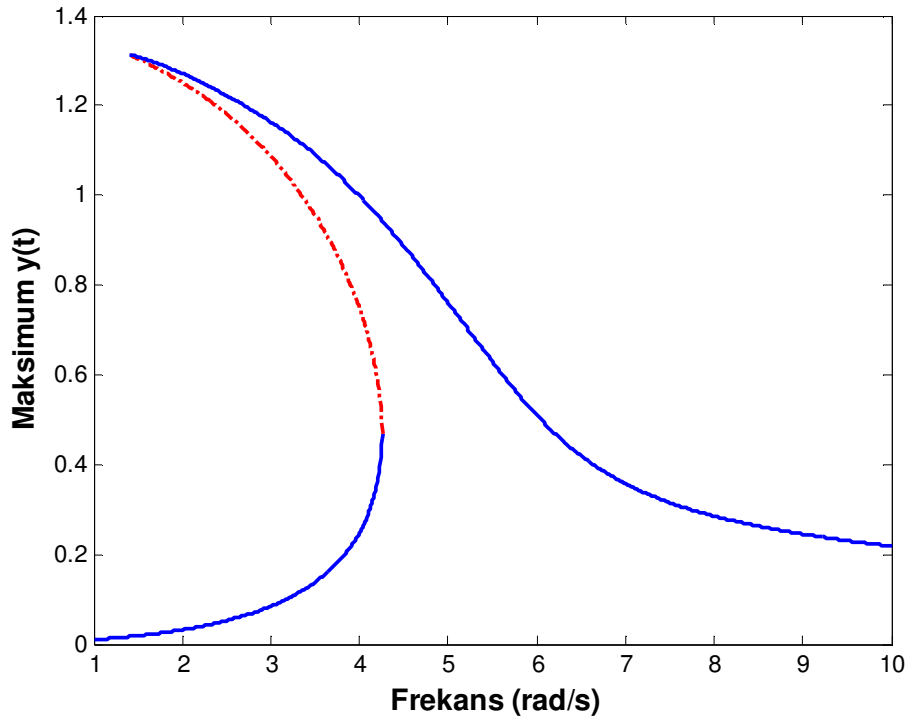
Doğrusal olmayan sistemlere ait frekans cevabının analitik bir yöntemle bir anda elde edilebilmesi mümkün değildir. Atlama olayı gerçekleşmeyen doğrusal sistemlerde veya giriş sinyali genliği küçük olduğundan doğrusal yapı gösteren doğrusal olmayan sistemlerde frekans cevabının elde edilmesi kolaydır. Fakat doğrusal olmayan sistemlerde giriş genliği arttıkça doğrusal olmayan etkide artacağından frekans cevabının elde edilmesinde büyük zorluklar ortaya çıkar. Doğrusal olmayan terimlere ait katsayılar da baskın bir özellik gösterdiği takdirde süper harmonikler görülmeye başlar ve atlama olayları gerçekleşmeye başlar. Bu nedenlerden dolayı doğrusal olmayan bir sisteme ait frekans cevabı analitik bir yöntem kullanılarak elde

edilecekse sisteme ait başlangıç değerleri işleme başlayacağımız frekans değerine göre doğru bir şekilde tanımlanır ve her çözümleme sonucu bir sonraki işleme başlangıç değeri olarak verilir. İlk frekans değerinden belirlenen artırımlarla kararlılık durumlarındaki maksimum genlik cevapları bulunur. Bu şekilde devam ederken maksimum çıkış genliğinin düzenli yapısında sapma görüldüğü frekansta atlama olayı gerçekleşmiştir. Bu frekanstan itibaren frekans azaltılarak ilerlenir. Yine öyle bir frekansa gelinir ki bu frekans değerinde de maksimum çıkış genliğinin yapısı düzensizleşir. Bu frekanstan itibaren de tekrar yön değiştirilir ve ileri yönde frekans artırılarak devam edilir. Bu işlem atlama frekanslarının sayısınca tekrar edilir. Her bir atlama frekansına gelindiğinde frekans artırılıyorsa azaltılmaya başlanır, azaltılıyorsa artırılmaya başlanır. Süper harmoniklerin sayısına bağlı olarak tekrarlanan bu işlem sayesinde simülasyonlarda görülemeyen bölgeler görüntülenmiş olur. Sistem değiştiğinde süper harmoniklerin sayısı ve atlama frekansları değişeceğinden araştırmacılar her defasında aynı zorlukları yaşamaktadır.

Yukarıda denklem 3.15’de verilen örnek sistem modeline ait elde edilen denge denklemleri, katsayıları  $\mu = 0,09$ ,  $\delta = -0,0192$ ,  $\omega_n = 5,2779$ ,  $\alpha = -0,71455\omega_n^2$ ,  $A_{u_0} = 0,1$  ve  $A_{u_1} = 0.168\omega^2$  olarak alınıp Nelder-Mead yöntemi kullanılarak yukarıda anlatıldığı gibi çözüldüğünde Şekil 3.3-3.9’daki grafikler elde edilir. Şekil 3.3 sisteme ait maksimum genlik değişimlerini gösterirken Şekil 3.4-3.8’de sisteme ait çıkışta elde edilen sinyalin *dc* bileşenine ait genlik ile temel ve ikinci harmoniğine ait genlik ve faz değişimlerini göstermektedir. Şekil 3.9’da ise harmoniklere ait genlik değişimleri karşılaştırmalı olarak görülmektedir.

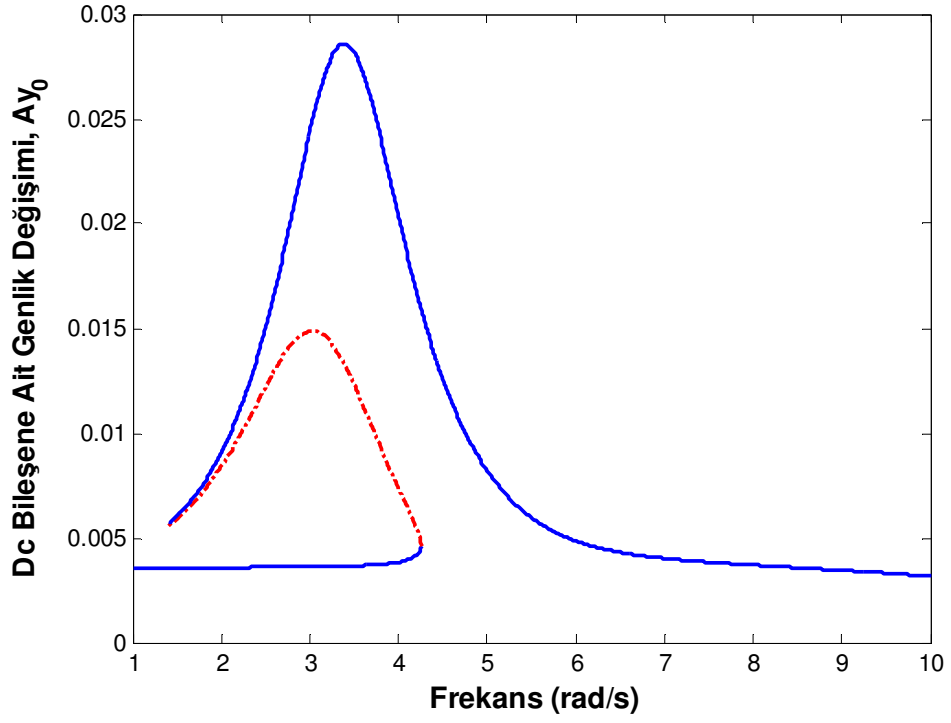
Şekil 3.3’den görüldüğü gibi sistem kolaylaştırıcı (softening) bir yapıda davranış şekli sergilemektedir. Bu durum  $\alpha = -0,71455\omega_n^2$  değerinin negatif olmasından kaynaklanmaktadır. Çözümleme işlemi  $\omega = 1$  rad/sn frekansından başlanılarak 0,01 artırımlarla ileri yönde devam edilmiştir.  $\omega = 4,26$  rad/sn frekansına kadar hata değeri  $10^{-16}$  seviyelerinde devam ederken bu frekansa gelindiğinde bir anda  $10^{-4}$  seviyesine çıkmıştır. Görülen hata değeri değişikliği bu frekansta bir atlama olduğunu anlatmaktadır. Atlama olayındaki 12 katlık bu hata oranındaki değişim modele göre değişiklik arz eder. İlk atlama noktası tespit edildikten sonra frekans

değişimi -0,01 azalış miktarı ile geri yöne doğru devam edilmiş, bu yönde de  $\omega = 1,4$  rad/sn değerine gelindiğinde hata değeri  $10^{-18}$ 'den  $10^{-6}$ 'ya çıkmıştır. Bu hata değeri ile yeni bir atlama noktası tespit edildikten sonra frekans değişimi tekrar artan yönde ilerletilmiştir. Yeni bir atlama noktası bulunmadığından çözümlene işlemi  $\omega = 10$  rad/sn frekansında sona erdirilmiştir. Görüldüğü gibi sistem,  $\omega = 1,4$  rad/sn ve  $\omega = 4,26$  rad/sn frekansları arasında başlangıç değerlerine bağımlı kalarak davranmış ve doğrusal olmayan davranış göstermiştir. Sistem rezonans frekansında 1,3137 genlik değeri ile en yüksek cevabı vermiştir.

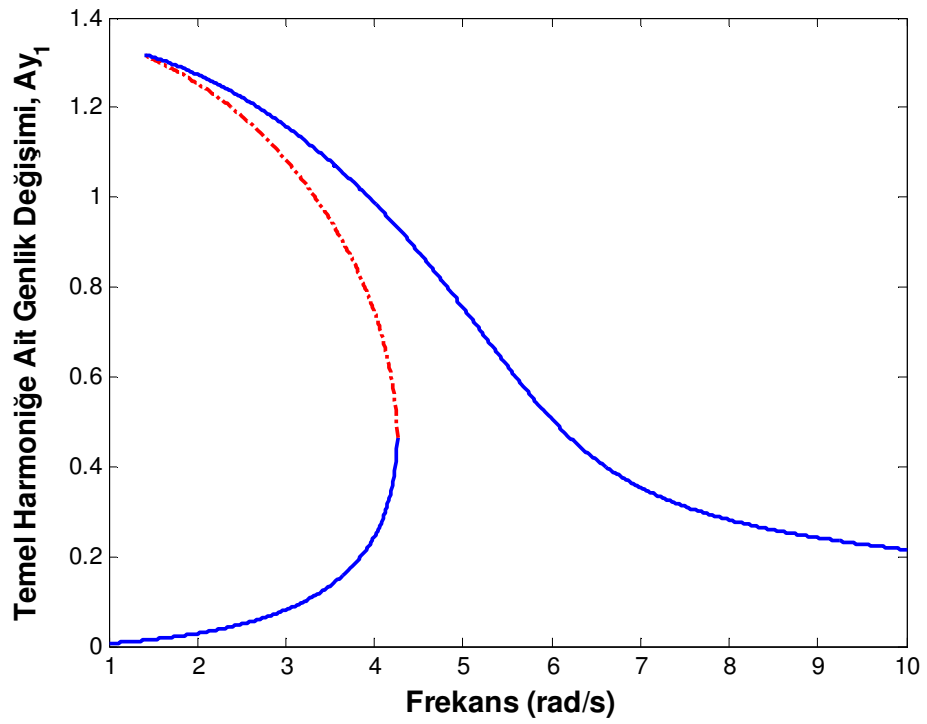


Şekil 3.3. Maksimum çıkış genliği

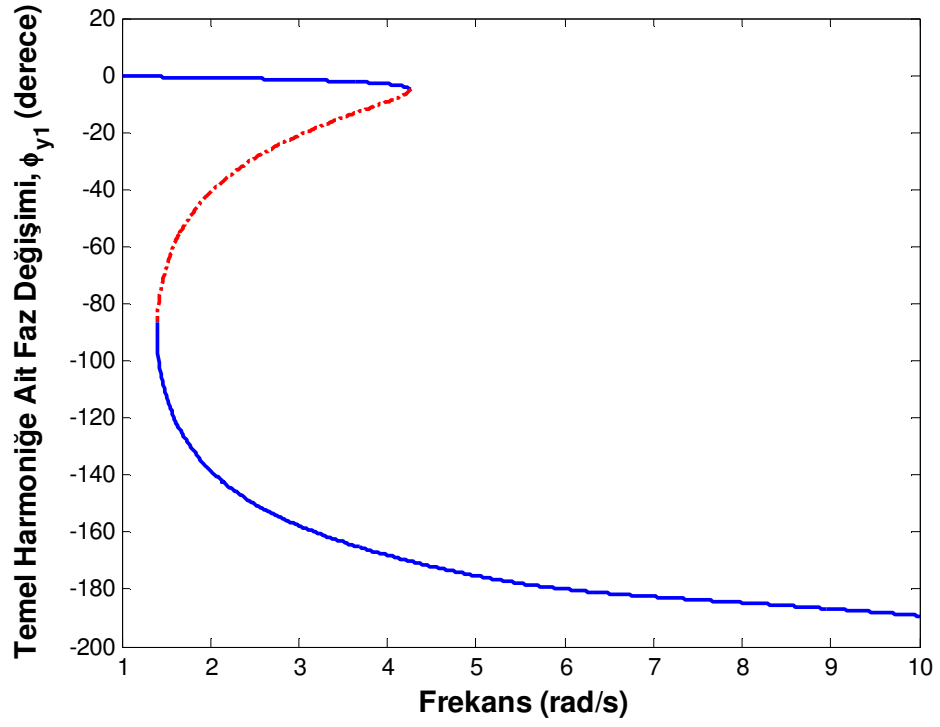
Kontrol teorisine göre ikinci dereceden sistemlerde faz farkı 0 ile -180 derecelik dilim arasında görülür. Bu yapıda sistemin rezonansa geldiği değer olan temel harmoniğin atlama noktasındaki değeri Şekil 3.5-3.6'da görüldüğü gibi -90 derece civarında gerçekleşmektedir. Şekil 3.7-3.8'e bakıldığında ikinci harmoniğe ait faz değeri ise -360 derece civarındadır.



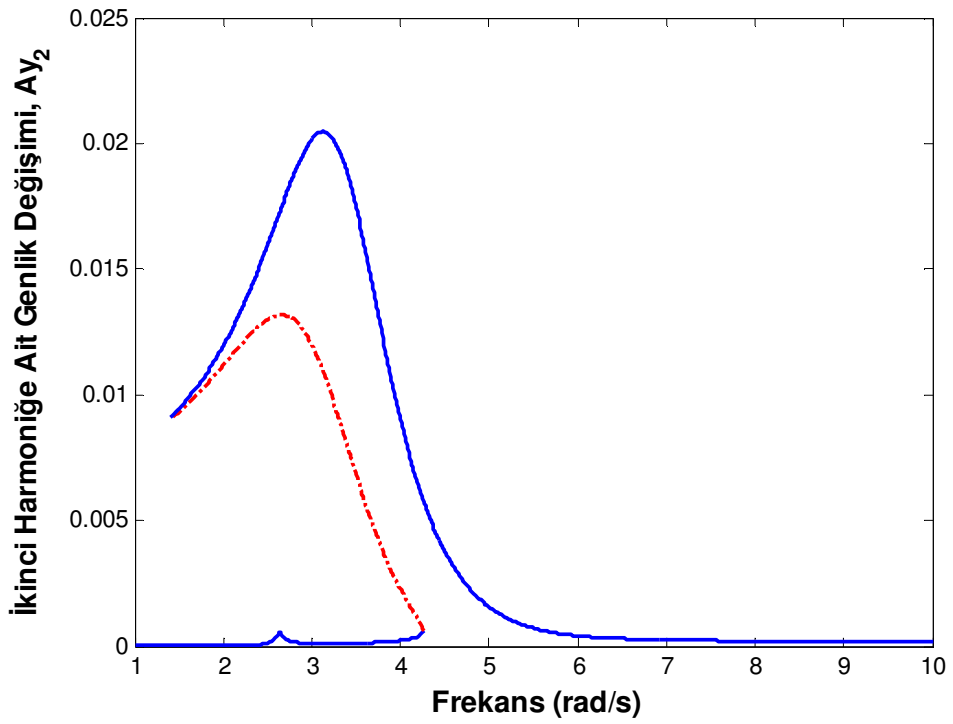
Şekil 3.4. Dc bileşene ait genlik değişimi



Şekil 3.5. Temel harmoniğe ait genlik değişimi

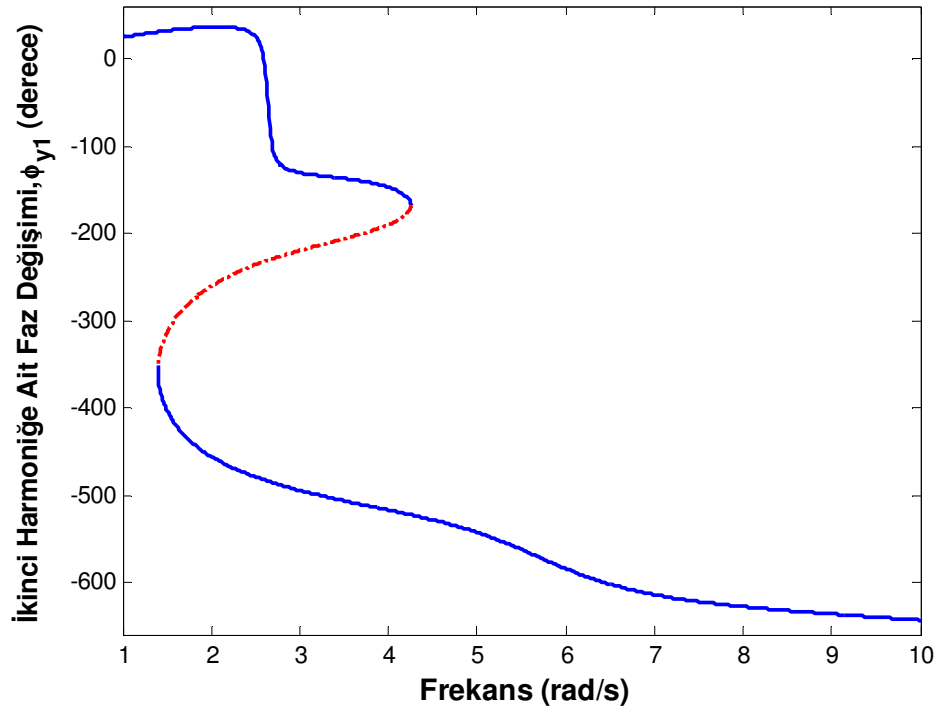


Şekil 3.6. Temel harmoniğe ait faz değişimi

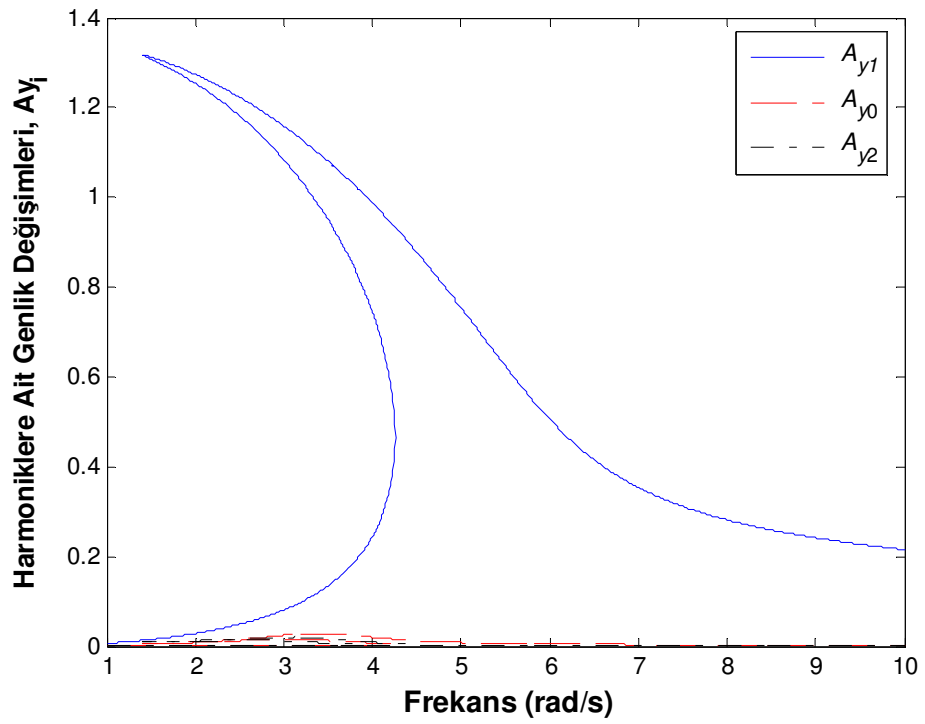


Şekil 3.7. İkinci harmoniğe ait genlik değişimi





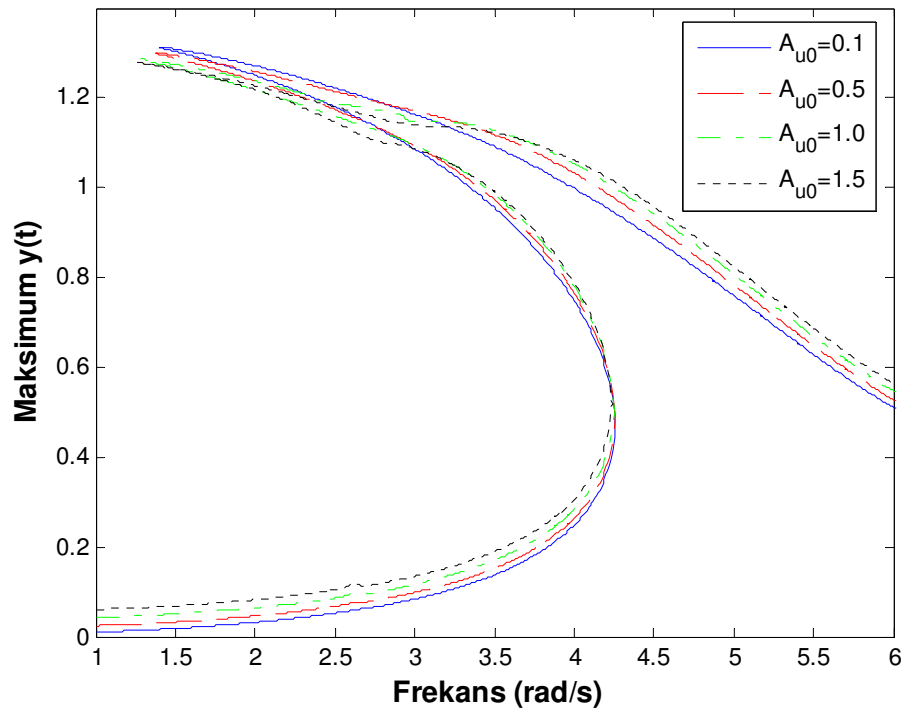
Şekil 3.8. İkinci harmoniğe ait faz değişimi



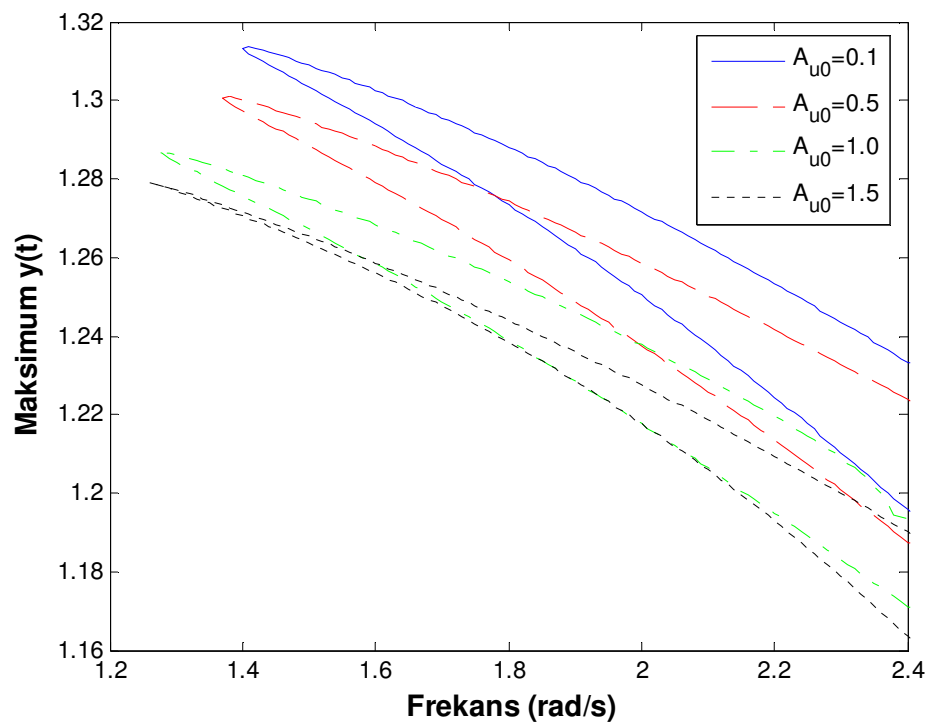
Şekil 3.9. Harmoniklere ait genlik değişimleri

Şekil 3.9’da görüldüğü gibi temel harmonik  $dc$  ve ikinci harmoniğe göre çok daha baskındır. Bu nedenden dolayıdır ki maksimum çıkış cevabındaki grafiksel değişim yapısı temel harmoniğin yapısına (değerler itibariyle de) çok benzemektedir. Bu türden çalışmalarda etkisi temel harmoniğin yanında çok küçük olan harmonikler (değerleri ihmal edilebilecek kadar küçük bulunan) çıkış sinyalinin belirlenmesi aşamasında hiç dikkate alınmayabilir. Bu sayede ihmal edilebilecek harmoniklerin belirlenmesi işlemleri daha da basitleştirir.

Sistemin girişini tanımlayan ifadedeki  $dc$  bileşenin sistem cevabı üzerindeki etkisini incelemek amacıyla sırasıyla  $A_{u_0} = 0,5$ ,  $A_{u_0} = 1$  ve  $A_{u_0} = 1,5$  değerleri için çözümlenmeler yapılarak her bir değer için maksimum genlik değişimi tekrar çizdirildiğinde Şekil 3.10’daki grafiksel sonuçlar elde edilir. Burada görüldüğü gibi girişteki  $dc$  bileşenin değeri arttıkça doğrusal olmayan unsurlar sisteme daha çok etki etmekte, doğrusal olmayan davranış daha net görülmektedir. Düşük ve yüksek frekanslarda grafik değerleri birbirlerine oldukça yakındır.  $\omega = 2.6$  rad/sn civarında grafikler arasında bir fark oluşmuş ve  $dc$  bileşeni büyük olan grafikte bu frekans değerinde daha çok bozulma olmuştur.  $A_{u_0} = 0,1$  değeri için yapılan çizimde ilk atlama frekansına doğru giderken genlik diğerlerine göre daha aşağıdan devam etmekte, ilk atlama frekansına gelindiğinde değerler hemen hemen birbirine eşit olmakta,  $A_{u_0} = 0,1$  giriş genlikli grafiğin tepe noktasının diğer çizimlere göre daha yukarıda olduğu görülmektedir. Bu durum Şekil 3.10’un tepe noktalarını yakından gösteren Şekil 3.11’de daha net olarak izlenebilir. Grafik diğerlerine göre biraz daha dik olduğundan doğrusal olmayan bölgesinin kapladığı frekans aralığı daha az gerçekleşmektedir. Grafiksel sonuçlar karşılaştırıldığında sinyal formu en düzgün olan grafik  $A_{u_0} = 0,1$  değeri için elde edilendir. Görüldüğü gibi  $A_{u_0}$  değeri artırıldıkça ortaya çıkan grafiğin sinyal formu daha fazla bozulmuş, tepe değeri daha aşağıya inmiş ve doğrusal olmayan bölge daha da artmıştır.



Şekil 3.10. Girişteki  $dc$  bileşenin maksimum genlik değişimine etkisi



Şekil 3.11. Maksimum genlik değişimlerinin tepe noktaları

## **BÖLÜM 4. GHDM İÇİN ARAYÜZ ÇALIŞMASI**

### **4.1. Giriş**

Sunulan tez çalışması için geliştirilmiş olan arayüzün program kısmı Matlab'da yazılmış olup kullanıcı arayüzü ise Matlab GUI'de (Graphical User Interface - Grafiksel Kullanıcı Arayüzü) oluşturulmuştur [26]. Bu bölümde öncelikle Matlab GUI tanıtılarak arayüzün oluşturulması hakkında bilgi verilecek daha sonra arayüzün kullanımı anlatılarak örnek çözümlene sonuçları ortaya konacaktır.

### **4.2. Arayüz Ekranı**

Günümüzde yazılmış olan programlarda, kullanıcıların kullanım kolaylığına sahip olmaları için, grafik tabanlı bir kullanıcı arayüzü olması gereklilik halini almıştır. Bu sayede kullanıcı yazılan programın ayrıntılarıyla fazla ilgilenmeden, en az ayrıntıya girerek, fazla zorluk yaşamadan programı kolayca kullanabilecektir. Bu nedenle Bölüm 3'de anlatımı ve uygulaması yapılan geliştirilmiş harmonik denge metodu analizi için bir arayüz ekranı yapılmış ve kullanıcıların ayrıntıya fazla boğulmadan bahsedilen metod ile doğrusal olmayan sistemlerin analizini yapmaları amaçlanmıştır.

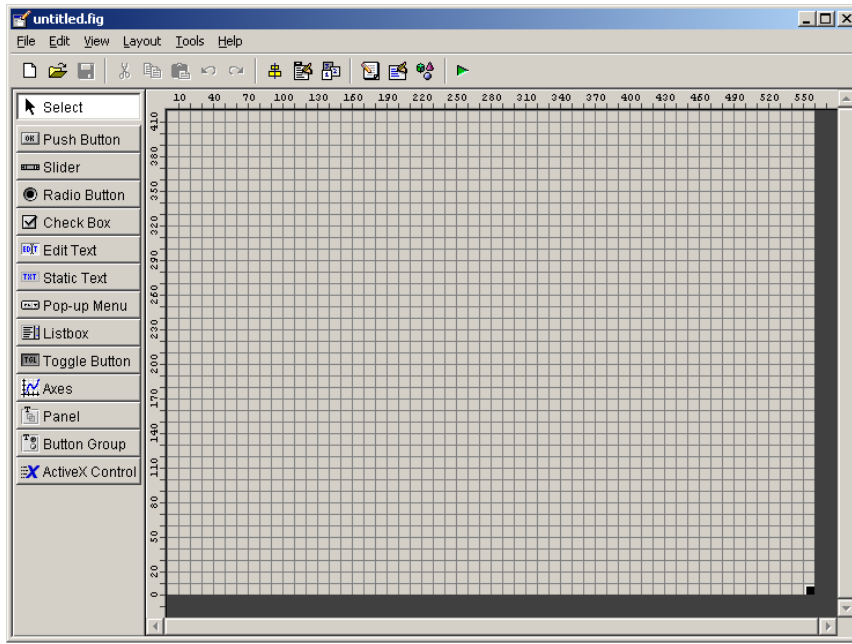
Bu başlık altında, yapılan arayüz ekranının oluşturulmasında kullanılan Matlab GUI hakkında bilgi verilecek, arayüz ekranının oluşturulması ve kullanımı anlatılacaktır.

#### **4.2.1 Matlab GUI**

Matlab Grafiksel Kullanıcı Arayüzü, programcılarının oluşturduğu grafik tabanlı uygulamaların son kullanıcıya fare ve klavye arabirimi kullanarak interaktif olarak hitap etmesini sağlayan bir platformdur. Matlab GUI, Matlab'ı kullanabilen,

Matlab'ta M-File ve M-Function oluşturabilen, herkes tarafından oluşturulacak kadar kolay bir esnekliğe sahiptir. Matlab GUI altındaki komut yapısı ile normal Matlab komutları arasında bir fark yoktur [26, 27].

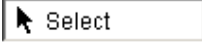
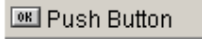
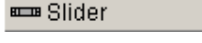
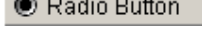


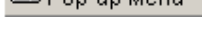

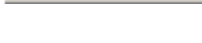

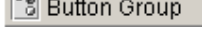
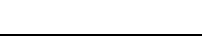

Matlab GUI ekranına, Matlab komut satırına “guide” komutunu girerek ya da Matlab'ta “File/New/GUI” seçeneklerini izleyerek gidilebilir. Bu yollardan biri uygulandığında Şekil 4.1'de gösterilen pencere gelecektir [26].



Şekil 4.1. Matlab GUI ekranı

Üzerinde çalışma yapılan bu pencereye figure adı verilir. Bir arayüzde birden fazla figure kullanılabilir. Ekranın sol tarafında tasarım esnasında kullanılabilen GUI nesnelere bulunmaktadır. Arayüz, bu nesnelere gerekenler figure üzerine eklenerek oluşturulabilir. Bunlardan kullanmak istenilen nesne tıklandıktan sonra tasarım ekranına gelinerek fareyle çizmek yeterlidir. Tablo 4.1'de bu nesnelere hakkında bilgi verilmiştir.

Tablo 4.1 Matlab GUI nesne kutusunda bulunan nesnelere ve görevleri hakkında açıklamalar.

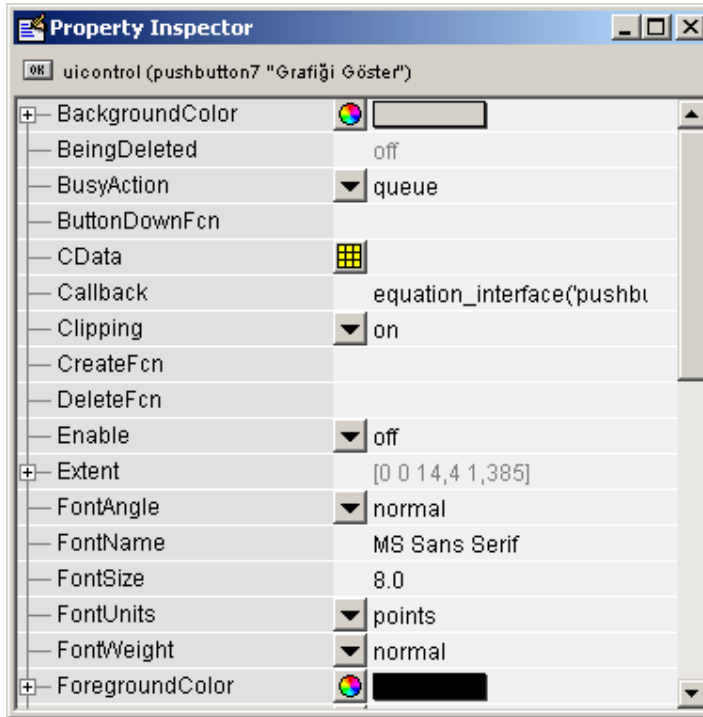
GUI Nesnesi	Açıklaması
 Select	Bir Nesneyi eklemek amacıyla tıklattıktan sonra fare “+” şekline gelir. İşlemi iptal edip fareyi tekrar göstergeç(h) haline çevirmek için kullanılır.
 Push Button	Tıklandığında kendisine verilen fonksiyonu işleten bir düğme oluşturmak için kullanılır.
 Slider	Kullanıcıya sayısal veri girişinde bulundurma veya işlem adımlarını belirtmek için kullanılır. Tasarım ekranına yatay veya düşey olarak yerleştirilebilir.
 Radio Button	Kullanıcıya birçok seçenek sunulup bu seçeneklerden yalnızca birini seçmesine izin vermek için kullanılır.
 Check Box	Kullanıcıya birçok seçenek sunulup bu seçeneklerden bir veya birden fazlasını seçmesine izin vermek için kullanılır.
 Edit Text	Kullanıcının, programa aktarmak amacıyla veri girişi yapması için kullanılır.
 Static Text	Ekrana bilgi yazdırmak için kullanılır.
 Pop-up Menu	Açılır liste kutusu işlemleri için kullanılır. Kullanıcıya liste halinde bir çok seçenek sunarak birini seçtirmek için kullanılır.
 Listbox	<i>Pop-Up Menu</i> nesnesiyle benzer işlem gerçekleştirir. Aynı anda bir çok liste elemanını göstererek seçim imkanı sunar.
 Toggle Button	<i>Push Button</i> nesnesiyle benzer bir işlem gerçekleştirir. Tek farkı tıklandığında basılı kalması, basılı durumdayken tıklandığında normal haline dönmesidir.
 Axes	Grafik, resim, hareketli görüntü oluşturmak ve kullanmak işlemini gerçekleştirir.
 Panel	Birden fazla nesnenin gruplanması işleminde kullanılır.
 Button Group	Birden fazla <i>Radio Button</i> nesnesinin tek bir amaç için kullanılması işlemini gerçekleştirir.
ActiveX Control	Başka programlarda oluşturulmuş kod bileşenlerini eklemek amacıyla kullanılır.

Her bir figure ve içerisindeki nesnelere ilgili program kodları o figure ekranına ait bir m dosyası üzerinde saklanır. Bu dosya, figure üzerinde bulunan her bir nesneye ait her bir olayı fonksiyon olarak barındırır. Figure üzerine eklenmiş herhangi bir nesne üzerine sağ tıklandığında bir kısayol menüsü gelir. Bu menünün seçenekleri şu şekildedir:

*Bring to Front:* Birden fazla nesne üst üste bulunduğu anda işaretli olan nesneyi diğer nesnelere arasından en ön sıraya getirir.

*Send to Back:* Birden fazla nesne üst üste bulunduğu anda işaretli olan nesneyi diğer nesnelere arasından en arka sıraya gönderir.

*Property Inspector:* İşaretli olan nesnenin özelliklerini ayarlamaya imkân sağlayan Şekil 4.2'deki pencereyi getirir. Nesnenin özellikleri bu pencereden ayarlanabileceği gibi programın içinde komutlar yardımıyla da ayarlanabilir.



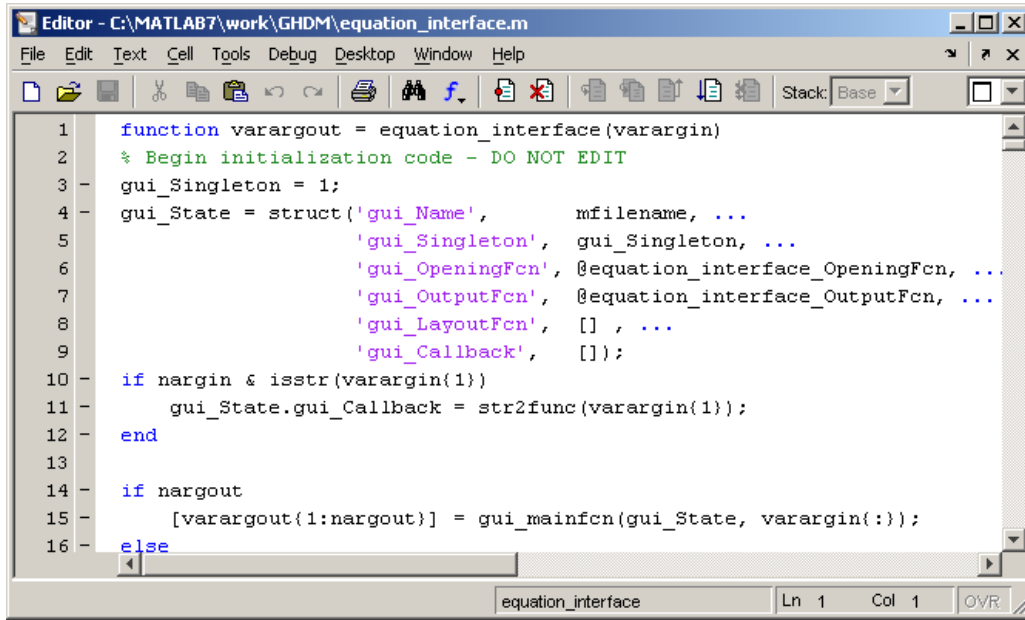
Şekil 4.2. Property Inspector penceresi

*Object Browser*: Çalışma ortamına eklenen bütün nesnelerin görüntüldüğü penceredir. Şekil 4.3'te gösterilen bu pencere sayesinde istenen nesneye kolayca ulaşıp istenen işlem gerçekleştirilebilir.



Şekil 4.3. Object Browser penceresi

*M-file Editor*: Şekil 4.4'te görüldüğü gibi figure ve içerisindeki bütün nesnelere ait program kodlarının saklandığı *m* dosyasını görüntüler ve üzerinde işlem yapma olanağı verir. Arayüze ait bütün program kodları bu ekrandan yazılır.



Şekil 4.4. M-file Editor penceresi



*View Callback*: Bu seçenek tıklandığında bir alt menü gelir. Bu alt menüdeki en çok kullanılan seçenekler Tablo 4.2’de gösterilmiştir.

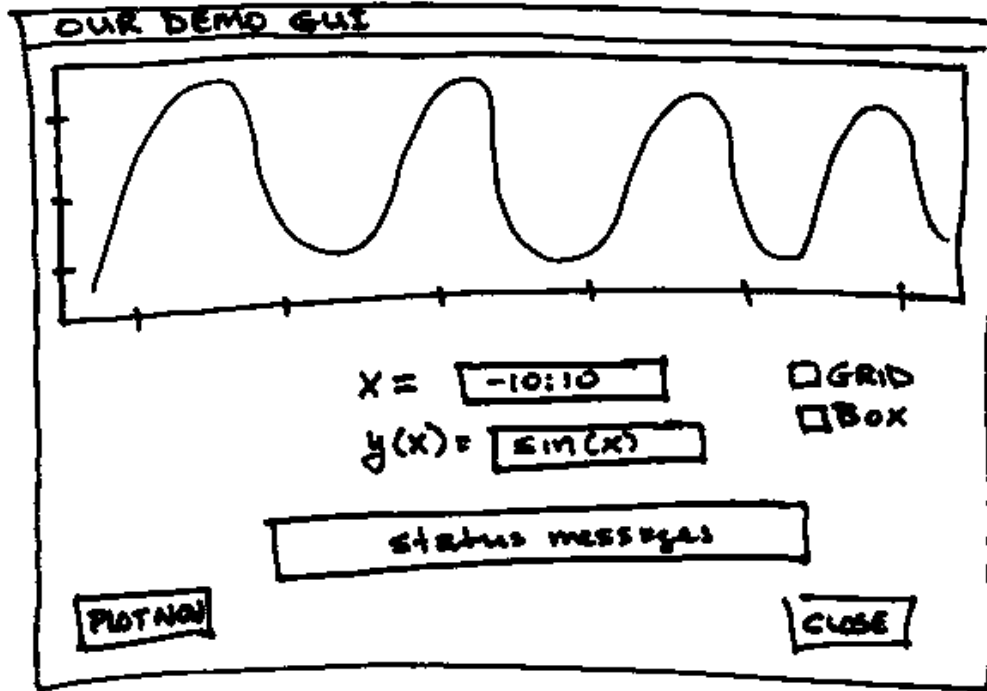
Tablo 4.2 View Callback menüsü

<i>Callback</i>	İşaretili olan nesne arayüzün çalışması esnasında tıklandığında, arka planda çalışacak fonksiyonu getirir. Örneğin bir düğme tıklandığında hangi işlemlerin yapılması isteniyorsa tasarım ekranında düğme üzerinde sağ tıklanır, View Callback / Callback seçeneği seçilir ve buradan düğmenin tıklanması olayında çalışacak fonksiyon geldiğinde istenilen kodlar yazılabilir.
<i>CreateFcn</i>	Arayüz çalışırken nesne oluşturulduğu ilk anda çalışması istenen kodların yazılacağı fonksiyonu getirir.
<i>DeleteFcn</i>	Arayüz çalışırken nesne kapandığı anda çalışması istenen kodların yazılacağı fonksiyonu getirir.

#### 4.2.2 Arayüz ekranının oluşturulması

Arayüzü oluşturmadan önce Şekil 4.5’e benzer olarak kağıt üzerinde taslağını oluşturmak gerekir. Bu işlem, arayüzün kolay ve planlı oluşturulmasını sağlar [28]. Bu taslaktan sonra arayüz adım adım bilgisayarda oluşturulmaya başlanır.

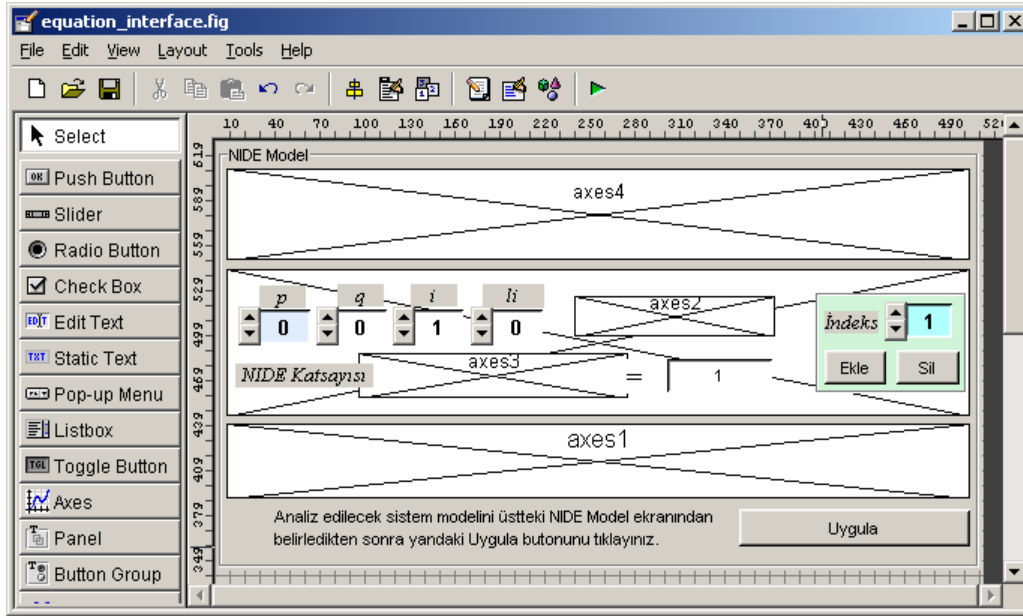
Bu taslak oluşturulurken programın girdilerinin neler olduğu ve hangi giriş nesnelere kullanılarak kullanıcıdan alınacağı, hangi işlemlerin yapılacağı, kullanıcıya yansıtılacak çıktılar neler olduğu ve hangi nesnelere kullanılarak kullanıcıya yansıtılacağı etraflıca düşünülmelidir. Arayüz kullanıcıdan analiz edilecek sistemin diferansiyel denklemini, bu denkleme uygulanacak giriş sinyalini, çıkış sinyalindeki harmonik sayısını, analiz yapılacak frekans aralığını, başlangıç değerlerini ve hata toleranslarını alarak bu bilgiler ışığında bir analiz gerçekleştirerek sonucu kullanıcıya grafiklerle sunmalıdır.



Şekil 4.5. Kağıt üzerine elle çizilmiş örnek bir arayüz taslağı [28]

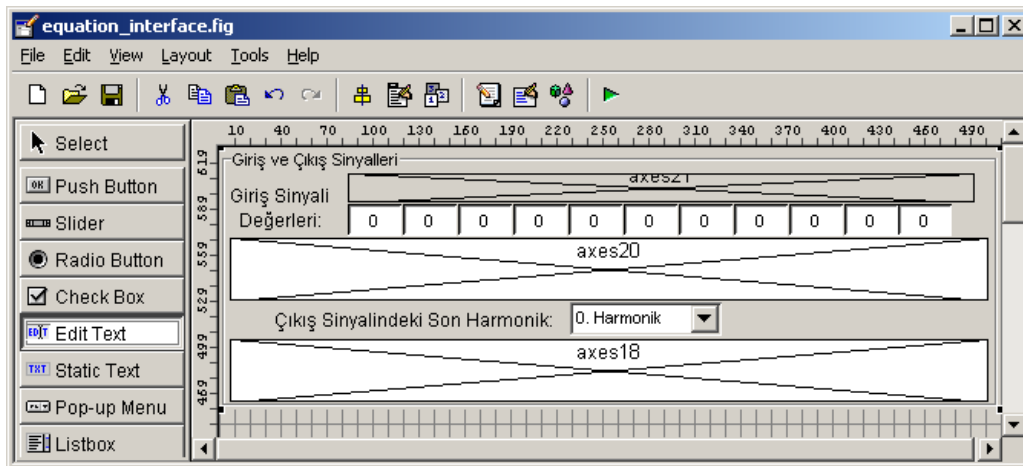
Bu çalışmada gerçekleştirilen arayüzü oluşturmak için önce Şekil 4.1'deki gibi boş bir GUI ekranı açılmalıdır. Kullanıcının diferansiyel denklemi NIDE model formunda girebilmesi için Şekil 4.6'daki gibi Edit Text, Push Button, Static Text, Axes, Panel, Slider nesnelere figürün üzerine eklenmelidir. Bu ekleme yapılırken ekran dizaynına ve estetikliğe önem verilmelidir. Burada Slider nesnelere NIDE modeldeki  $p$ ,  $q$ ,  $i$ ,  $l_i$  ve *indeks* değerlerini kullanıcının rahat bir şekilde girmesini sağlayarak ilgili değişkenin en son değerini yanına eklenen Edit Text kutusunda göstermektedir. axes4 nesnesi NIDE model genel denklem formunun görüntülenebilmesi, axes2 nesnesi oluşturulan terimin görüntülenebilmesi, axes3 nesnesi girişi yapılan NIDE model katsayısının görüntülenebilmesi amacıyla arayüze eklenmiştir. *Ekle* ve *Sil* düğmeleri kullanıcının girdiği terimi eklemesi ve yanlış girdiği terimleri ilgili terimin indeks numarasına giderek silmesi amacıyla tasarlanmıştır. Denkleme son halinin verildiğinin program tarafından anlaşılabilmesi için *Uygula* düğmesi konmuştur. Bu düğme tıklandığında girilen model kod ortamında bir değişkene atanarak bu değişken diskte kayıtlı hale getirilmektedir. Model girişini sağlayan bu nesnelere tek bir grup olması hem tasarımcı için

nesneleri birlikte aynı işleme tabi tutma açısından faydalı olacak hem de ekran tasarımı açısından bir estetiklik getirecektir. Bu amaçla bu nesnelere Panel nesnesi kullanılarak tek bir grup haline getirilmiştir. Böylece arayüzün model giriş bölümü hazırlanmış olur.



Şekil 4.6. Arayüzün NIDE model denklemini giriş kısmı

Giriş ve çıkış sinyallerinin oluşturulduğu bölümün yapılabilmesi için Edit Text, Static Text, Axes, Pop-up Menu, Panel nesnelere Şekil 4.7'de görüldüğü gibi bir tasarımla arayüze eklenmiştir.



Şekil 4.7. Arayüzün giriş ve çıkış sinyallerinin oluşturulduğu kısmı

Bilindiği gibi giriş sinyali sayısal olarak belirlidir. Çıkış sinyalinin ise arayüz tarafından hesaplanacaktır. Fakat çıkış sinyalinin kaç harmonikten oluşacağını arayüze girilmesi gerekir. Bundan dolayı giriş sinyalini oluşturan harmonik sayısınıca (en fazla 5. harmoniğe kadar) genlik ve faz girişinin yapılacağı Edit Text nesnelere eklenmiş ve bu nesnelere bilgi girişi yapıldığında Şekil 4.8’de görüldüğü gibi girilen değerlerin ifade edildiği sinyal *axes* nesnesi üzerinde görüntülenmiştir.

Giriş Sinyali	$A_{u0}$	$A_{u1}$	$\phi_{u1}$	$A_{u2}$	$\phi_{u2}$	$A_{u3}$	$\phi_{u3}$	$A_{u4}$	$\phi_{u4}$	$A_{u5}$	$\phi_{u5}$
Değerleri:	2.4	3	2	4	7	0	0	0	0	0	0

$2.4 + 3 \cos(\omega t + 2) + 4 \cos(2\omega t + 7)$

Şekil 4.8. Arayüzün giriş sinyalinin oluşturulduğu kısmı

Çıkış sinyalindeki harmonik sayısının girilmesi amacıyla *Pop-up Menu* nesnesi kullanılarak kullanıcı bu değeri belirlediğinde ifade edilen sinyal, bilinmeyen genlik ve faz değişkenleri ile *axes* nesnesi üzerinde Şekil 4.9’deki gibi görüntülenmiştir.

Çıkış Sinyalindeki Son Harmonik: 3. Harmonik

$$A_{y0} + A_{y1} \cos(\omega t + \phi_{y1}) + A_{y2} \cos(2\omega t + \phi_{y2}) + A_{y3} \cos(3\omega t + \phi_{y3})$$

Şekil 4.9. Arayüzün çıkış sinyalindeki harmonik sayısının belirlendiği kısmı

Analiz yapılacak frekans aralığı ve artış miktarı kullanıcıdan *Edit Text* nesnelere yardımıyla Şekil 4.10’da görüldüğü gibi alınarak atlama noktaları analiz esnasında arayüz tarafından otomatik olarak tespit edilip gerektiğinde ileri, gerektiğinde geri frekansta çözümleme yapılabilmektedir.

Frekans Aralığı

Başlangıç : Artırım : Bitiş

0.01 : 0.01 : 4

Not: Sistemin atlama noktası otomatik olarak bulunmaktadır. Bundan dolayı sadece analiz edilecek frekans aralığının girilmesi yeterlidir.

Şekil 4.10. Arayüzün frekans aralığını giriş kısmı

Başlangıç değerleri ve atlama noktasının otomatik yakalanmasına yardımcı olan hata toleransları Şekil 4.11’de görüldüğü gibi *Edit Text* nesneleri kullanılarak kullanıcı girişi sağlanmıştır.

Başlangıç Değerleri ve Hata Toleransları

Başlangıç Değerleri:

0.1570 0.0234 -0.0101 0.0100 0.4131

Atlama Noktasının Yakalanmasında  
Kullanılacak Hata Toleransları:

0.9 2

Şekil 4.11. Arayüzün başlangıç değerleri ve hata toleranslarını giriş kısmı

Bütün bu giriş işlemlerinin ardından arayüzün çözümlene yapabilmesi için *Analyze Başla* düğmesi eklenmiştir. Bu düğme tıklandığında girilen modele ait denge denklemleri otomatik olarak oluşturulmakta ve *fminsearch* komutu yardımıyla bu denge denklemleri çözümlenmektedir. Yapılan çözümlenmenin ardından sonuçların görülebilmesi için *Grafik Çizim Ekranı* düğmesi tıklandığında, kullanıcının grafik görüntüleme işlemlerini daha rahat yapabilmesi için Şekil 4.12’de görüldüğü gibi ayrı bir grafik çizdirme penceresi gelir.

Grafik Çizim Ekranı

Grafik Çizimi

**Grafik Seçimi**

Dc Bileşene Ait Genlik

Temel Harmoniğe Ait Genlik

Temel Harmoniğe Ait Faz

2. Harmoniğe Ait Genlik

2. Harmoniğe Ait Faz

Maksimum Genlik Değişimi

Çizgi Seçimi: Düz

Renk Seçimi: Mavi

Grafığı Çizdir

Izgaraları Göster

Önceki Grafığı Tut

Grafığı Temizle

Veri Kaydetme

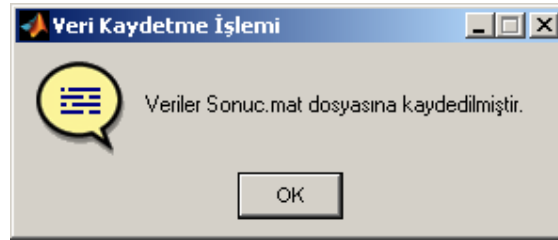
**Verilerin Saklanacağı Dosya Adı**

Deger.mat

Grafik Verilerini Kaydet

Şekil 4.12. Arayüzün grafik çizim ekranı

Bu pencereye eklenen *listbox* nesnesi sayesinde analiz yapıldığında elde edilen bilinmeyenlerle maksimum genlik değişimi listelenmiş, çizilecek grafiğe ait renk ve çizgi biçimi seçimi *Pop-up Menu* nesnesi sayesinde gerçekleştirilmiş, işaretli olan liste elemanının grafiğinin çizilmesi, grafiklerin üst üste çizdirilmesi, ızgaraların görünmesi ve grafiksel olarak çizilen figure nesnesinin temizlenmesi için düğmeler yerleştirilmiştir. Bu düğmelerden *Önceki Grafiği Tut* ve *Izgaraları Göster* düğmeleri *Toggle Button* nesnesi kullanılarak oluşturulmuştur. Bundan dolayı yapılan bir tıklama, ikinci bir tıklamaya kadar aktif olur. Örneğin *Önceki Grafiği Tut* düğmesi tıklandığında düğme basılı hale gelmekte *hold on* komutu çalıştırılmakta ve grafiklerin üst üste çizimi sağlanmakta, ikinci bir tıklamaya kadar bu komutun etkisi devam etmektedir. Şekil 4.12’de görüldüğü gibi ekranın altına da veri kaydetme bölümü eklenerek veri dosyasının adı *Edit Text* nesnesine girilip *Grafik Verilerini Kaydet* düğmesi tıklandığında elde edilen çözümlenme sonuçlarının arka planda istenilen isimle kaydedilmesi sağlanmış ve bu konuda kullanıcıya bilgi veren Şekil 4.13’deki mesaj penceresi gönderilmiştir.



Şekil 4.13. Veri kaydetme işlemine ait mesaj penceresi

Çözümlenme sonucu elde edilen değerler *.mat* uzantılı dosyaya kaydedilir. Bu verilerin içinde doğru çözümlenme için gereken frekans değişim aralığı  $W$ , yapılan çözümlenmede her bir frekans değerinde yapılmış olan hata değerleri *HATA* ve çözümlenme sonucu elde edilen değerler *Ay* adı altında kaydedilmektedir. Burada *Ay* değişkeninin içerisinde bütün harmoniklere ait çözümlenme değerleri mevcuttur.

### 4.2.3 Arayüz ekranının kullanımı

Bu çalışmada tek girişli – tek çıkışlı bir sistem modeli üzerinde, genelleştirilmiş harmonik denge metodu ile analiz yapmaya yönelik olarak geliştirilmiş arayüze

ulaşmak için Matlab ortamında *basla* komutu verilerek Şekil 4.14'deki giriş ekranı görüntülenir.



Şekil 4.14. Arayüze giriş ekranı

Arayüze giriş ekranında *Tamam* düğmesi tıklandığında Şekil 4.15'deki arayüz ekranı gelir. Bu ekrandaki üst bölmeden NIDE model mantığı ile kullanıcıdan analiz edilecek sisteme ait diferansiyel denklemin girilmesi istenir. Bu bölmede denkleme ait herhangi bir terim tanımlanırken; örneğin  $2\dot{y}(t)$  için,  $p=1$ ,  $q=0$ ,  $i=1$ ,  $l_i=2$  değerleri seçilir ve katsayı olarak *Değer* adlı kutuya "2" değeri yazılır. Bu değerlerin girilmesi esnasında oluşan terim anlık olarak  $l_i$  değerinin sağında bulunan *axes* nesnesinde görüntülenir. Bu işlemlerden sonra *Ekle* düğmesine basıldığında terim denkleme eklenip altta denklem kısmında görüntülenir ve bu şekilde diğer terimler eklenmeye devam edilir. Matematiksel model bu işlemlerle arayüze belirtildikten sonra *Uygula* düğmesine tıklanarak analize hazır hale getirilir.

NIDE Model tanımlamasının hemen altında bulunan *Giriş ve Çıkış Sinyalleri* adlı bölümde sisteme uygulanacak giriş sinyalindeki harmoniklerin genlik ve faz değerleri ilgili kutulara girilerek, bu giriş sinyaline bağlı olarak çıkış sinyalinde bulunması istenen son harmonik *pop-up menu* nesnesinden seçilir. Bu işlemler yapılırken anlık olarak altlarındaki *axes* nesnelerinde sinyal formları görüntülenir.

*Frekans Aralığı* kısmından analiz edilecek frekans aralığının başlangıç değeri, artırım miktarı ve bitiş değeri girilmelidir. Atlama frekansını defalarca denemeler yaparak tespit edip artan frekans, azalan frekans ve tekrar artan frekans ayarlaması yapmaya gerek yoktur. Program analiz esnasında atlama frekansını otomatik olarak bularak kullanıcıya oldukça büyük kolaylık sağlamaktadır. Aksi takdirde bu özelliğin olmadığı düşünüldüğünde oldukça çok vakit kaybedileceği açıktır.

**GHDM ile Analiz Arayüzü**

NIDE Model

$$\sum_{m=1}^M \sum_{p=0}^m \sum_{l_1, l_2, \dots, l_{p+q}=-L}^L c_{p,q}(l_1, \dots, l_{p+q}) \prod_{i=1}^p D^{l_i} y(t) \prod_{p=i+1}^{p+q} D^{l_i} u(t) = 0$$

İndeks

NIDE Katsayısı  $c_{0,0}$  =

$$y'' - 0.0192y'(u)^2 + 0.18y' - 19.9046(y)^3 + 27.8562y = u$$

Analiz edilecek sistem modelini üstteki NIDE Model ekranından belirledikten sonra yandaki Uygula butonunu tıklayınız.

Giriş ve Çıkış Sinyalleri

Giriş Sinyali	$A_{u0}$	$A_{u1}$	$\phi_{u1}$	$A_{u2}$	$\phi_{u2}$	$A_{u3}$	$\phi_{u3}$	$A_{u4}$	$\phi_{u4}$	$A_{u5}$	$\phi_{u5}$
Değerleri:	0.1	0.168	0	0	0	0	0	0	0	0	0

$0.1 + 0.168 \cos(\omega t)$

Çıkış Sinyalindeki Son Harmonik:

$$A_{y0} + A_{y1} \cos(\omega t + \phi_{y1}) + A_{y2} \cos(2\omega t + \phi_{y2})$$

Frekans Aralığı

Başlangıç  : Artırım  : Bitiş

Not: Sistemin atlama noktası otomatik olarak bulunmaktadır. Bundan dolayı sadece analiz edilecek frekans aralığının girilmesi yeterlidir.

Başlangıç Değerleri ve Hata Toleransları

Başlangıç Değerleri:

Atlama Noktasının Yakalanmasında Kullanılacak Hata Toleransları:

Şekil 4.15. Arayüz ekranı



İstenilen çözümlmeyi yapabilmek için sistemin başlangıç değerlerinin doğru olarak girilmesi oldukça önemlidir. Bu değerler arayüz ekranının sağ alt kısmında bulunan *Başlangıç Değerleri* kutusuna girilir. Başlangıç değerlerinin sayısı bilinmeyen sayısı kadar olmalıdır. Örneğin çıkış sinyalindeki son harmonik 2 olarak belirlendiğinde bilinmeyenler  $A_{y_0}$ ,  $A_{y_1}$ ,  $\phi_{y_1}$ ,  $A_{y_2}$  ve  $\phi_{y_2}$  olmak üzere 5 tane olmalıdır.

Atlama frekanslarının otomatik yakalanabilmesi için arayüz ekranının sağ alt köşesinde iki tane hata toleransı bulunmaktadır. Arayüzün program kısmında bu toleransların artırım miktarıyla çarpılması sonucu elde edilen değerlerden biri ileri yönde, diğeri ise geri yönde atlama noktası yakalanması için kullanılmaktadır. Arayüz atlama noktasını yakalayamadığı takdirde bu hata toleransları değiştirilmelidir. Bu değişimin artan olarak mı yoksa azalan olarak mı yapılacağı analiz edilecek modele göre değişir.

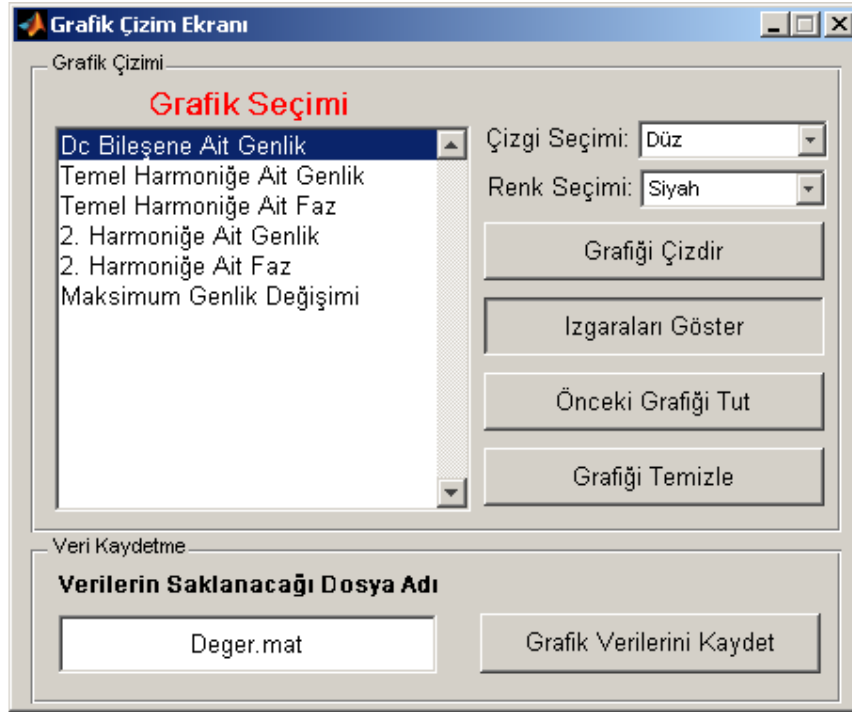
Bütün bu bilgiler arayüz ekranına doğru bir şekilde verildikten sonra *Analize Başla* düğmesi tıklanır ve analiz işlemi başlatılmış olur. Bu esnada arka planda sisteme ait denge denklemleri oluşturulur. Bu denklemlerin arayüzde belirtilen frekans aralığında, otomatik tespit edilen atlama noktalarına göre çözümlenerek bilinmeyen genlik ve faz değerlerini buldurmak için Nelder-Mead simplex çözümlleme metodu kullanılmıştır. Analiz işlemi girilen modele ve frekans aralığına bağımlı olarak çok kısa sürebileceği gibi saatlerce de sürebilir.

Analiz bittiğinde *Grafik Çizim Ekranı* düğmesi tıklanarak grafik görüntüleme penceresine gidilir. Buradan sistemdeki bütün bilinmeyenlere ve maksimum genliğe ait grafikler ayrı ayrı yada üst üste, istenilen çizgi biçimi ve renkte çizdirilebilir. İstenirse değerlerin daha iyi okunabilmesi için ızgaralar görüntülenebilir.

#### 4.2.4 Örnek uygulama-1

Bölüm 3'te Nelder-Mead yöntemi kullanılarak çözümlleme yapılan model üzerinde aynı katsayı, giriş sinyali ve çıkış sinyal formu ile sunulan arayüz ekranı kullanılarak bir çözümlleme işlemi gerçekleştirilebilir.

İlk olarak arayüz ekranının kullanımı kısmında belirtildiği gibi sistem denklemi, giriş sinyali, çıkış sinyalindeki son harmonik değeri, analiz yapılacak frekans aralığı, başlangıç değerleri ve hata toleransları girilerek analiz işlemine başlanır. Analiz işlemi bittikten sonra sonuçların görüntülenebilmesi için *Grafik Çizim Ekranı* düğmesiyle çizim ekranına gidildiğinde Şekil 4.16'daki pencereye ulaşılır.

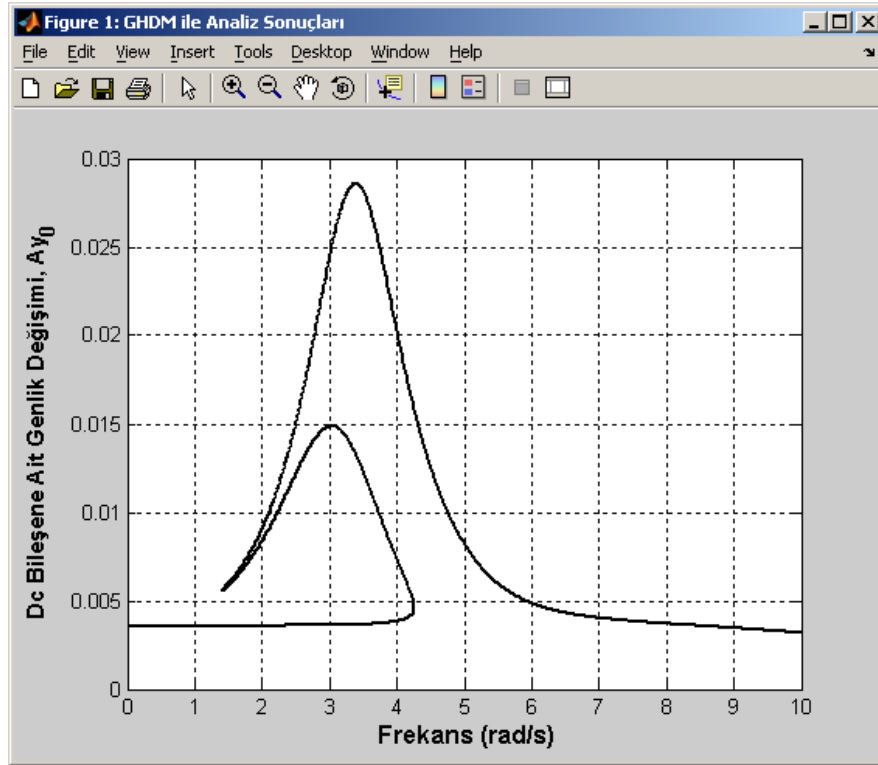


Şekil 4.16. Analiz sonrası çağrılan grafik çizim ekranı

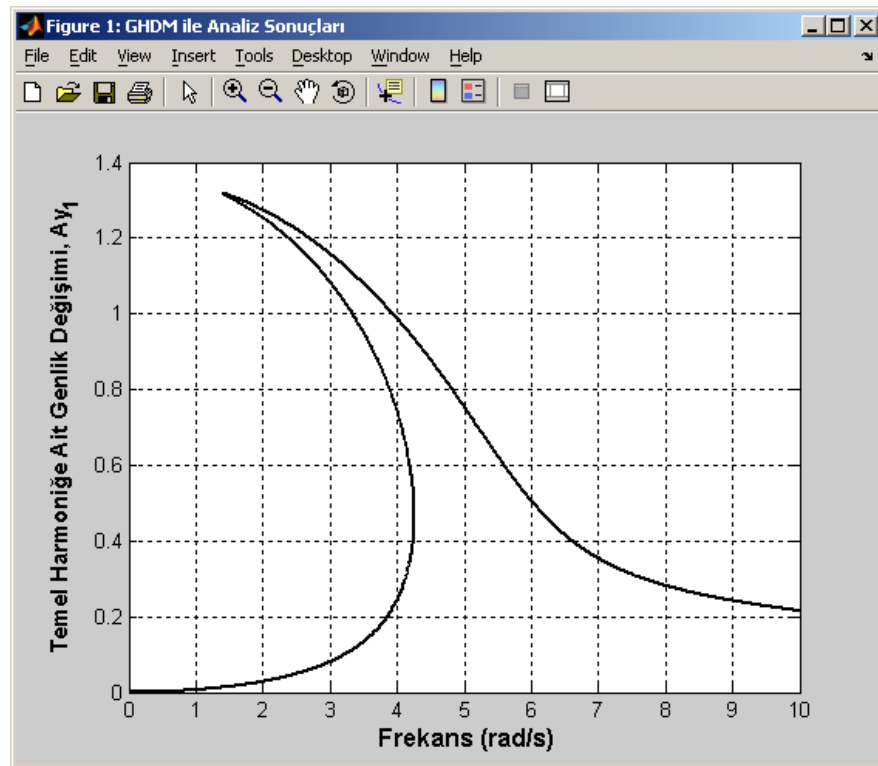
Görüldüğü gibi bu pencereye bilinmeyen  $A_{y_0}$ ,  $A_{y_1}$ ,  $\phi_{y_1}$ ,  $A_{y_2}$ ,  $\phi_{y_2}$  değerlerine ve maksimum genlik değişimine ait seçenekler otomatik olarak gelmektedir. Bu durum yapılan çözümleme sonucu bu 6 grafiğin elde edilebileceğini göstermektedir.

Şekil 4.17-4.22'de görüldüğü gibi sonuçlar Bölüm 3'te Nelder-Mead yöntemi kullanılarak yapılan çözümlemeyle bire bir aynı çıkmıştır. Bu durum, sunulan arayüzün sağlıklı çalıştığını göstermektedir.

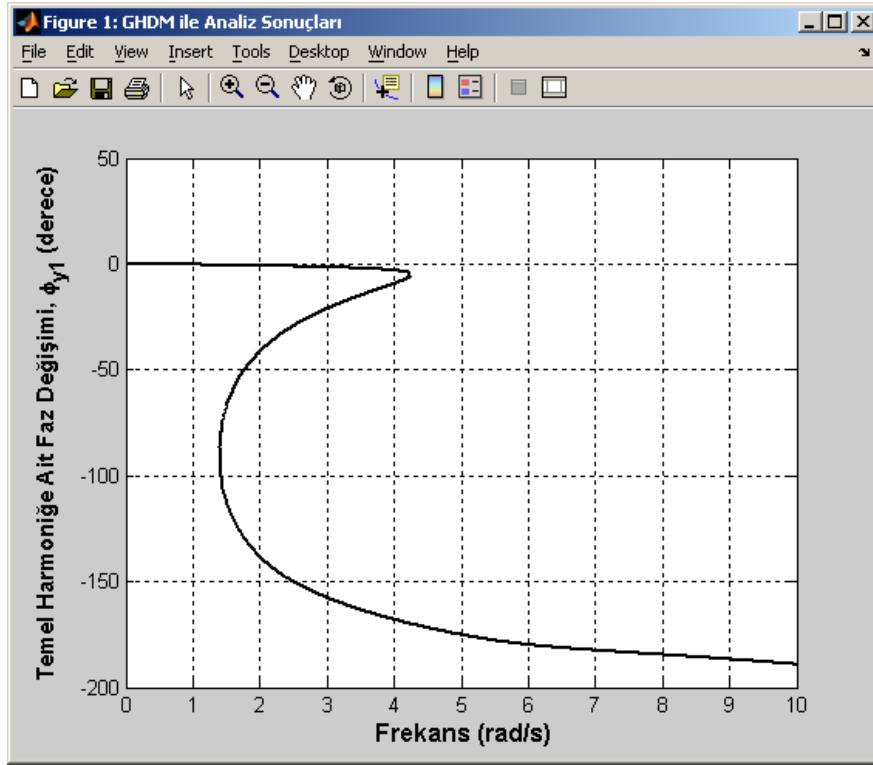
İstenildiğinde Şekil 4.16'daki grafik çizim ekranının alt bölümünden grafiklere ait veriler kaydedilebilir. Bu sayede çözümlemeler gerektiğinde yeniden analiz yaparak vakit kaybedilmeden istenen değerlere ulaşılabilir.



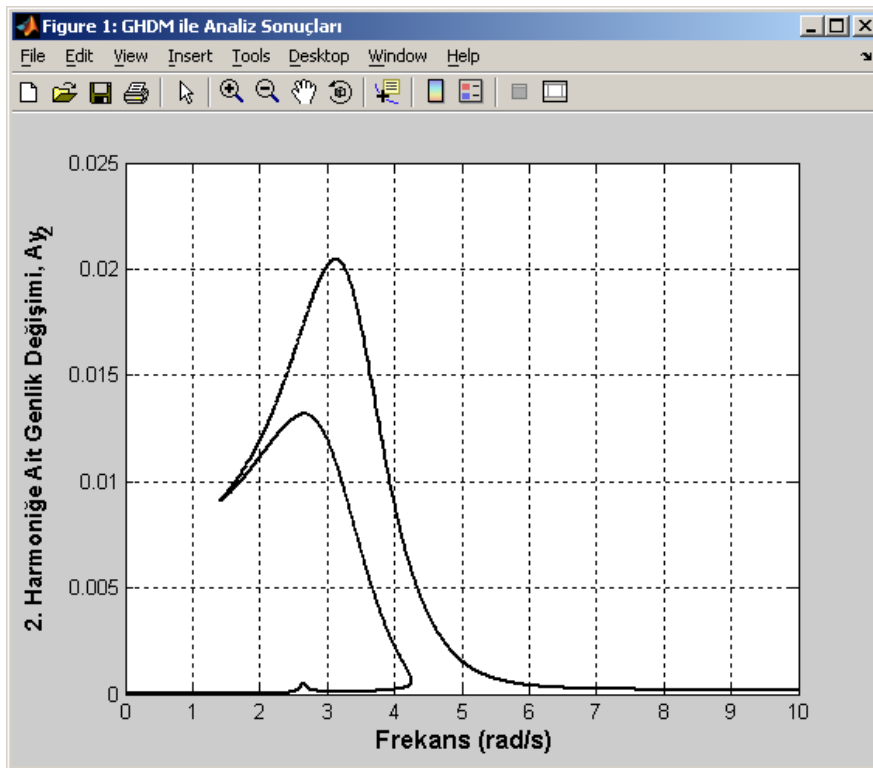
Şekil 4.17. Dc bileşene ait genlik değişimi



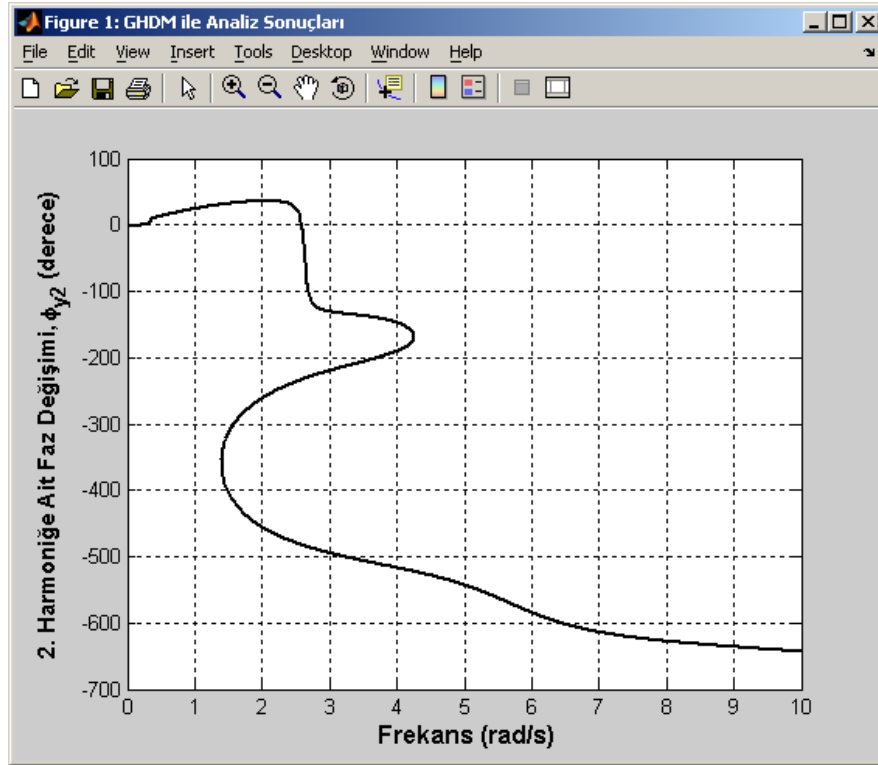
Şekil 4.18. Temel harmoniğe ait genlik değişimi



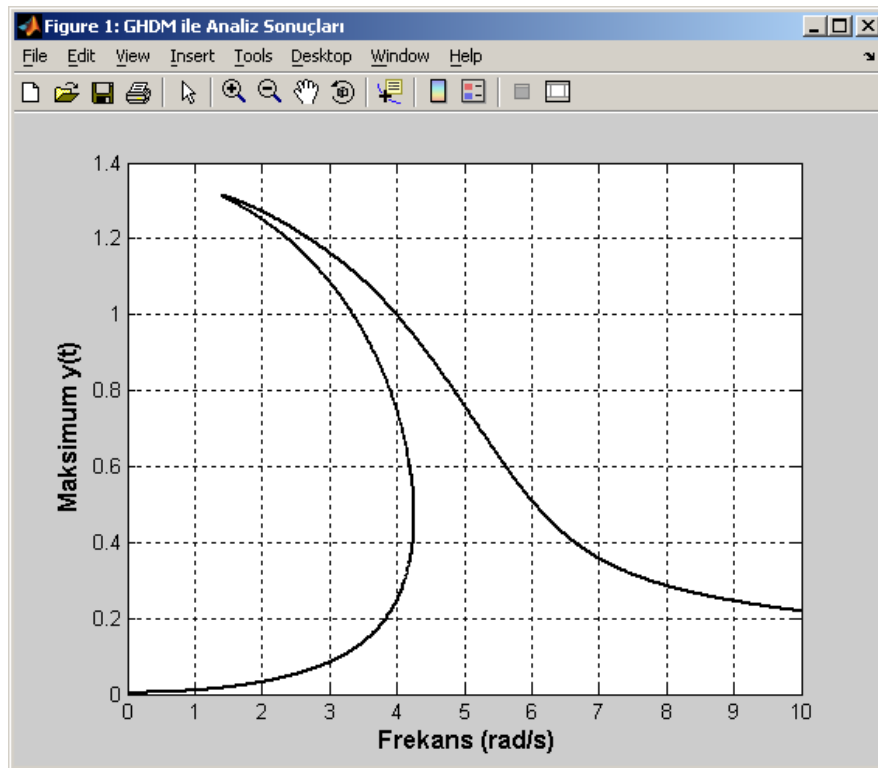
Şekil 4.19. Temel harmoniğe ait faz değişimi



Şekil 4.20. 2. harmoniğe ait genlik değişimi



Şekil 4.21. 2. harmoniğe ait faz değişimi



Şekil 4.22. Maksimum genlik değişimi

#### 4.2.5 Örnek uygulama-2

Bu çalışma kapsamında oluşturulan arayüzün kullanımı ile ilgili ikinci bir örnek uygulama aşağıda denklem 4.1 ile tanımlanan 2. dereceden diferansiyel sistem modeli üzerinde gerçekleştirilebilir.

$$\ddot{y}(t) + 2\mu\dot{y}(t) + d_1\dot{y}(t)^3 + d_2y(t)^2\dot{y}(t) + \omega_n^2y(t) + \alpha y(t)^3 = \omega_n^2u(t) \quad (4.1)$$

Örnek sistem modeline ait katsayı değerleri  $\omega_n = 1$ ,  $d_1 = 0,01$ ,  $d_2 = 0,01$ ,  $\mu = 0,005$  ve  $\alpha = 4$  olarak alınsın. Bu sistemin girişine 0. ile 1. harmonikten oluşan ve genlik değerleri  $A_{u_0} = 0,15$ ,  $A_{u_1} = 0,1$  olan bir giriş sinyali uygulansın. Gerçekleştirilecek çözüm sonucunda ortaya çıkacak olan çıkış sinyali formunun da 3. harmoniğe kadar olduğu kabul edilsin. Analiz yapılacak frekans aralığı 0,01 rad/sn'den başlayıp 0,01 artırımlarla 3 rad/sn'ye kadar gidecek şekilde belirlenmiş olsun. Başlangıç değerleri [0.2305 0.1222 0.1570 0.0234 -0.0101 0.0100 0.4131]' şeklinde bir sütun vektörü olarak alınarak ve atlama noktasının otomatik yakalanmasında kullanılan hata toleransları kısmına da 0,9 ve 2 değerleri girilmiş olsun.

Matlab komut ortamında *basla* komutu verilerek giriş ekranına ulaşıp bu pencerede *Tamam* düğmesine tıklanır ve karşılaşılan arayüz ekranına yukarıda bahsedilen bilgiler girildiğinde Şekil 4.23'deki analize hazır hale gelen ekran görüntüsü elde edilmiş olur.

**GHDM ile Analiz Arayüzü**

NIDE Model

$$\sum_{m=1}^M \sum_{p=0}^m \sum_{l_1, l_2, \dots, l_{p+q}=-L}^L c_{p,q}(l_1, \dots, l_{p+q}) \prod_{i=1}^p D^{l_i} y(t) \prod_{p=i+1}^{p+q} D^{l_i} u(t) = 0$$

İndeks

NIDE Katsayısı  $c_{0,0}$  =

$$y'' + 0.01(y')^2 y' + 0.01(y')^3 + 0.01y' + 4(y)^3 + y = u$$

Analiz edilecek sistem modelini üstteki NIDE Model ekranından belirledikten sonra yandaki Uygula butonunu tıklayınız.

Giriş ve Çıkış Sinyalleri

Giriş Sinyali	$A_{u0}$	$A_{u1}$	$\phi_{u1}$	$A_{u2}$	$\phi_{u2}$	$A_{u3}$	$\phi_{u3}$	$A_{u4}$	$\phi_{u4}$	$A_{u5}$	$\phi_{u5}$
Değerleri:	0.15	0.1	0	0	0	0	0	0	0	0	0

$0.15 + 0.1 \cos(\omega t)$

Çıkış Sinyalindeki Son Harmonik:

$$A_{y0} + A_{y1} \cos(\omega t + \phi_{y1}) + A_{y2} \cos(2\omega t + \phi_{y2}) + A_{y3} \cos(3\omega t + \phi_{y3})$$

Frekans Aralığı

Başlangıç	Artırım	Bitiş
<input type="text" value="0.01"/>	<input type="text" value="0.01"/>	<input type="text" value="3"/>

Not: Sistemin atlama noktası otomatik olarak bulunmaktadır. Bundan dolayı sadece analiz edilecek frekans aralığının girilmesi yeterlidir.

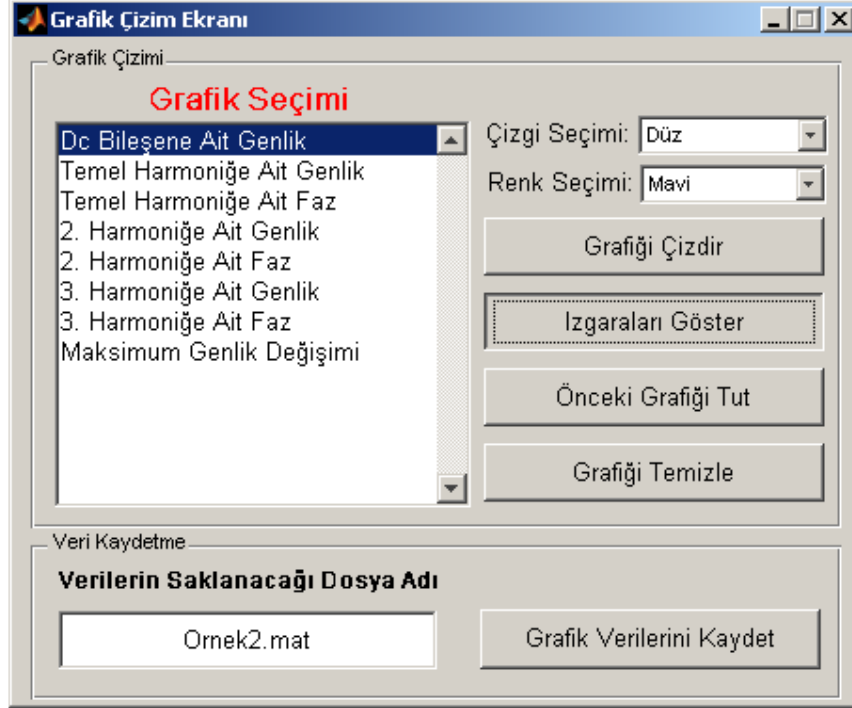
Başlangıç Değerleri ve Hata Toleransları

Başlangıç Değerleri:

Atlama Noktasının Yakalanmasında Kullanılacak Hata Toleransları:

Şekil 4.23. Arayüz ekranının analize başlamaya hazır hali

*Analize Başla* düğmesine tıklanarak analiz başlatılır ve analiz bitiminde *Grafik Çizim Ekranı* düğmesiyle Şekil 4.24'deki ekran görüntüsü elde edilir. Görüldüğü gibi çözümlene yapılan 3. harmoniğe kadar bilinmeyenlere ve maksimum genlik değişimine ait elde edilen sonuçlar grafik seçimi kısmında görüntülenmektedir.

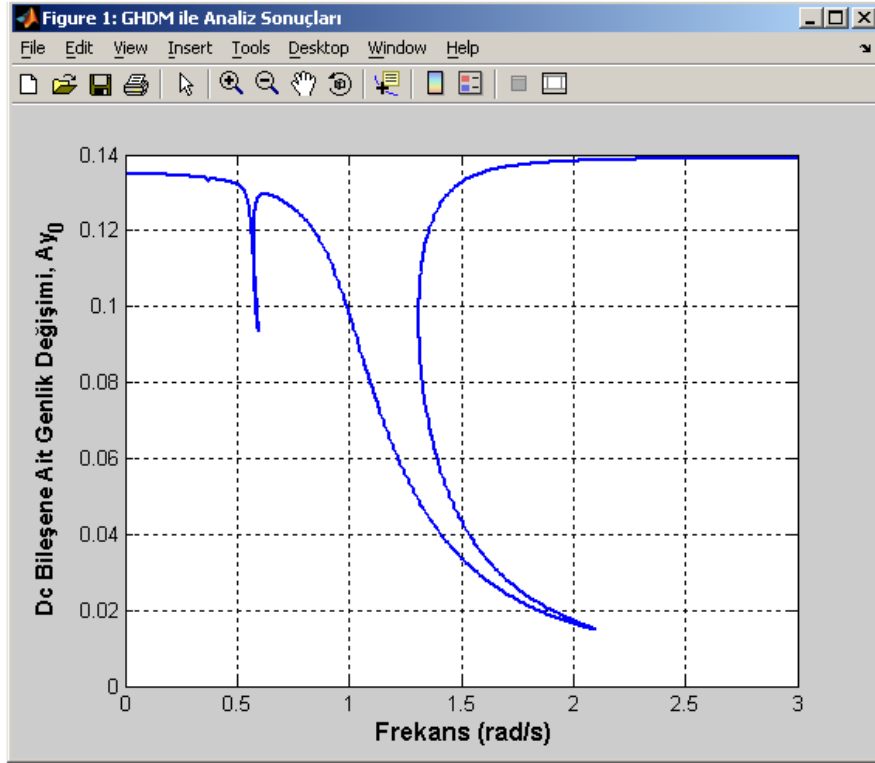


Şekil 4.24. Analiz sonrası çağrılan grafik çizim ekranı

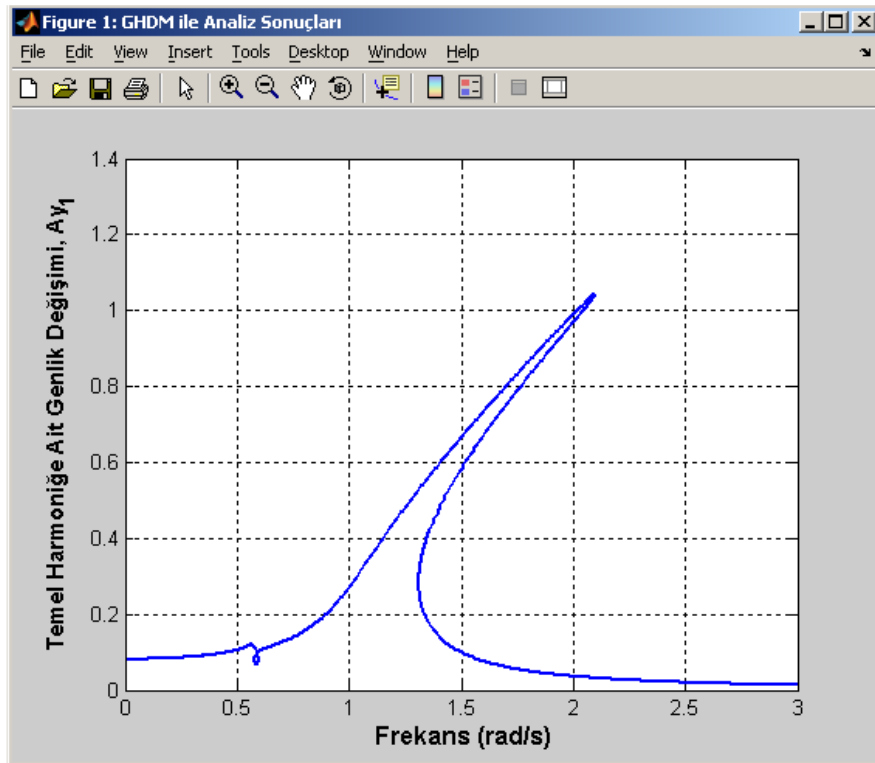
Burada *Izgaraları Göster* düğmesi aktif hale getirildikten sonra düz ve mavi çizgi seçimi yapıp bilinmeyenlere ve maksimum genlik değişimine ait grafikler çizdirilerek Şekil 4.25-4.32 elde edilir. Bu grafiklerde görüldüğü gibi sistemde atlama olayları  $\omega = 0,596$  rad/sn,  $\omega = 0,574$  rad/sn,  $\omega = 2,095$  rad/sn ve  $\omega = 1,311$  rad/sn frekanslarında tespit edilmiştir.

Arayüzün arka planında çalışan program  $\omega = 0,596$  rad/sn frekans değerinde ilk atlamayı tespit ederek bu değerden geriye doğru gitmeye başlamış, geri yönde tespit ettiği  $\omega = 0,574$  rad/sn frekansındaki atlama noktasından tekrar ileri yönde gitmeye başlayarak ilk doğrusal olmayan çalışma bölgesini belirlemiştir. Aynı şekilde yeniden  $\omega = 2,095$  rad/sn frekans değerine gelindiğinde yeniden geriye doğru  $\omega = 1,311$  rad/sn frekans değerine ve sonrasında da ileriye giderek ikinci bir doğrusal olmayan çalışma bölgesini belirleyerek son frekansa kadar analiz gerçekleştirilmiştir.

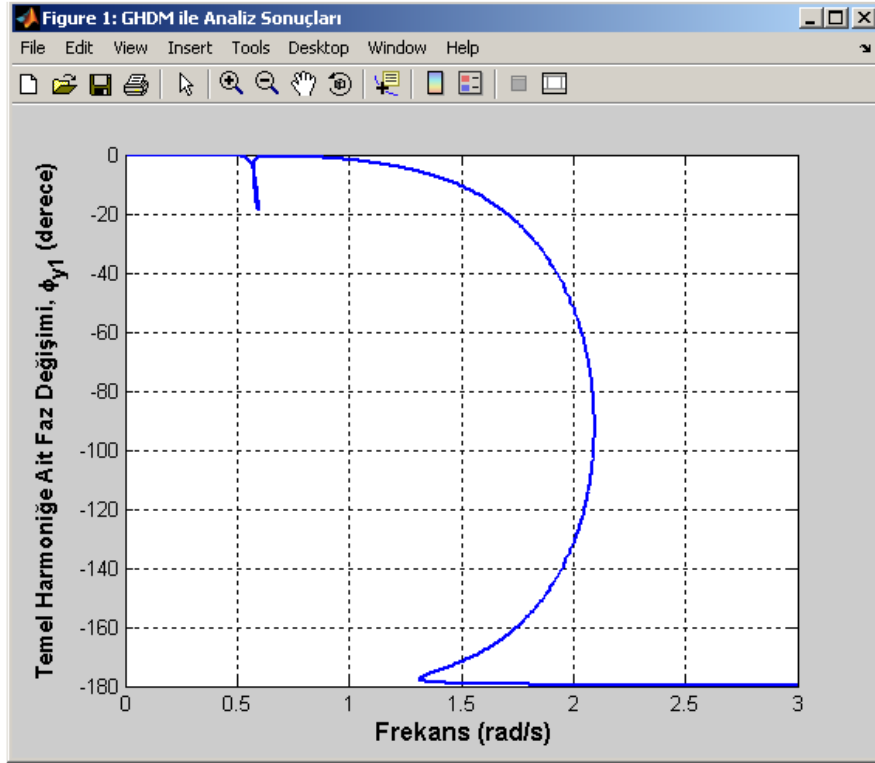




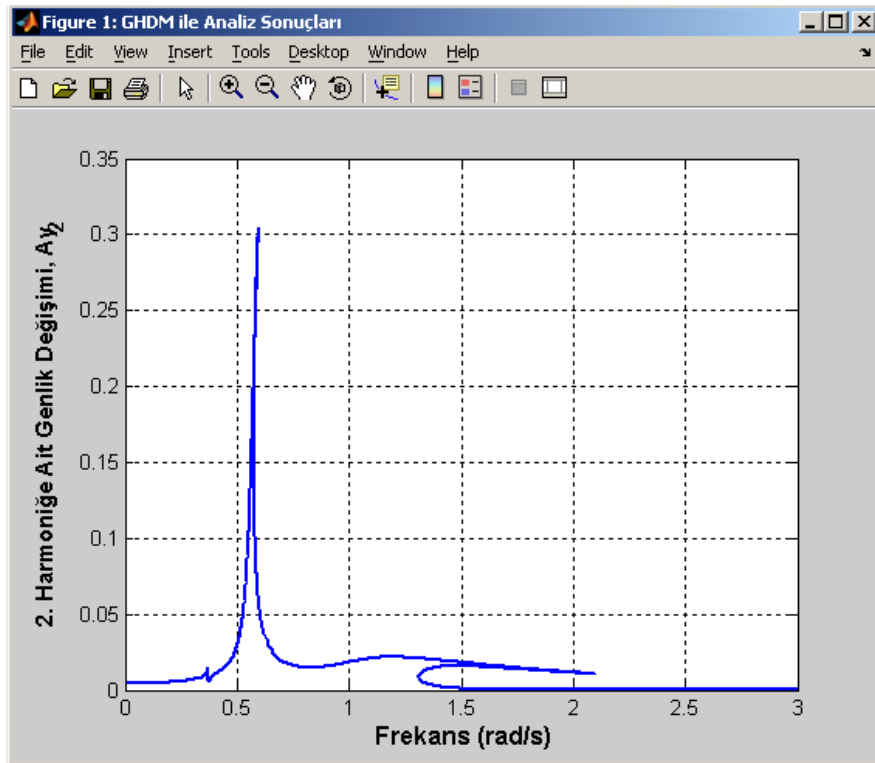
Şekil 4.25. Dc bileşene ait genlik değişimi



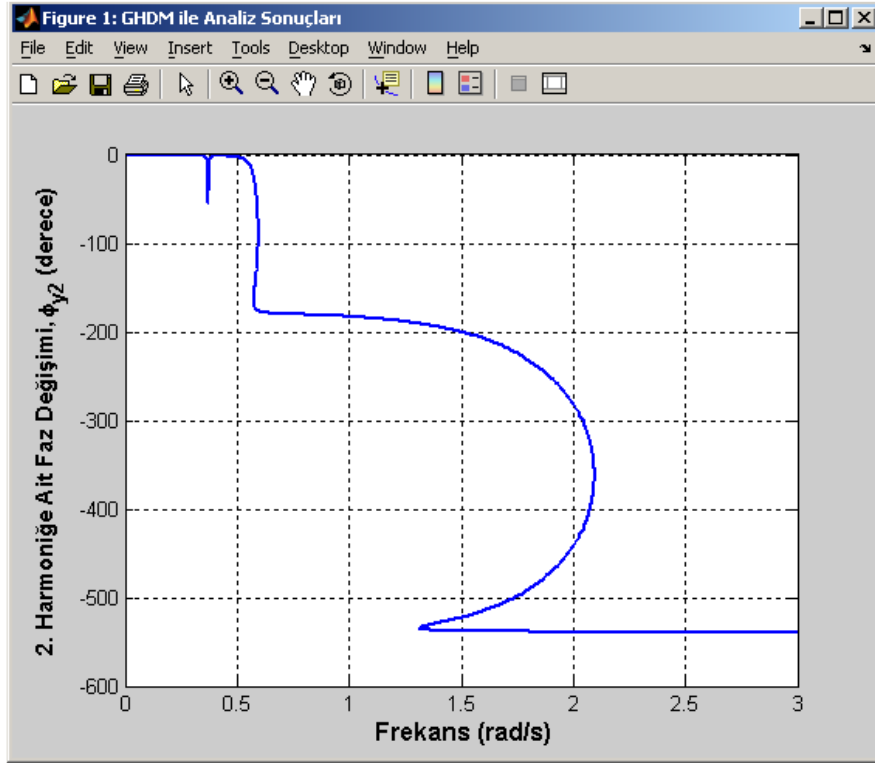
Şekil 4.26. Temel harmoniğe ait genlik değişimi



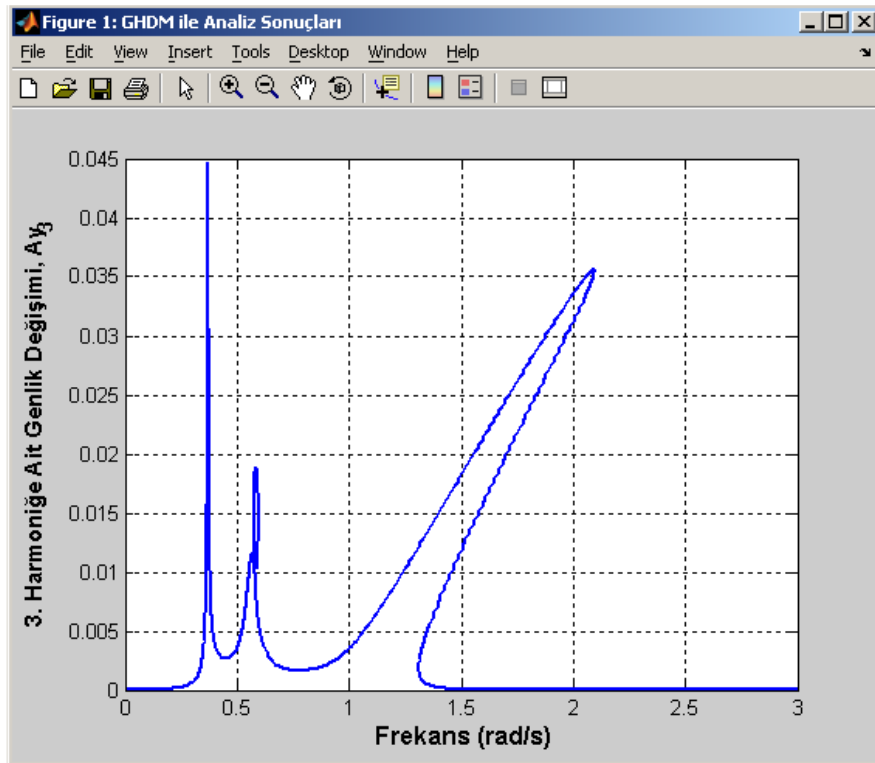
Şekil 4.27. Temel harmoniğe ait faz değişimi



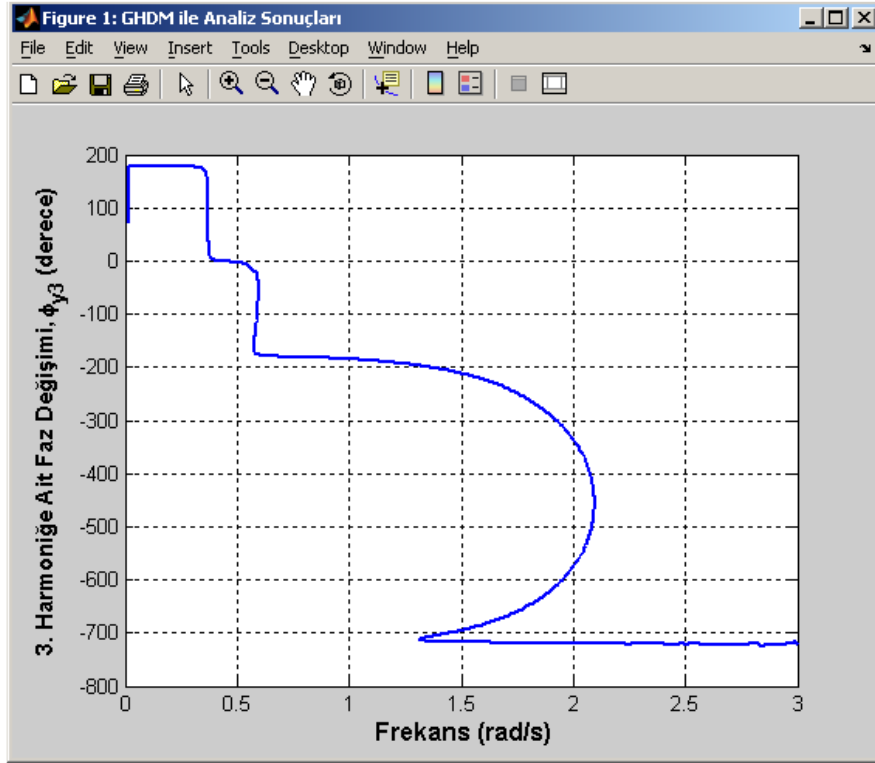
Şekil 4.28. 2. harmoniğe ait genlik değişimi



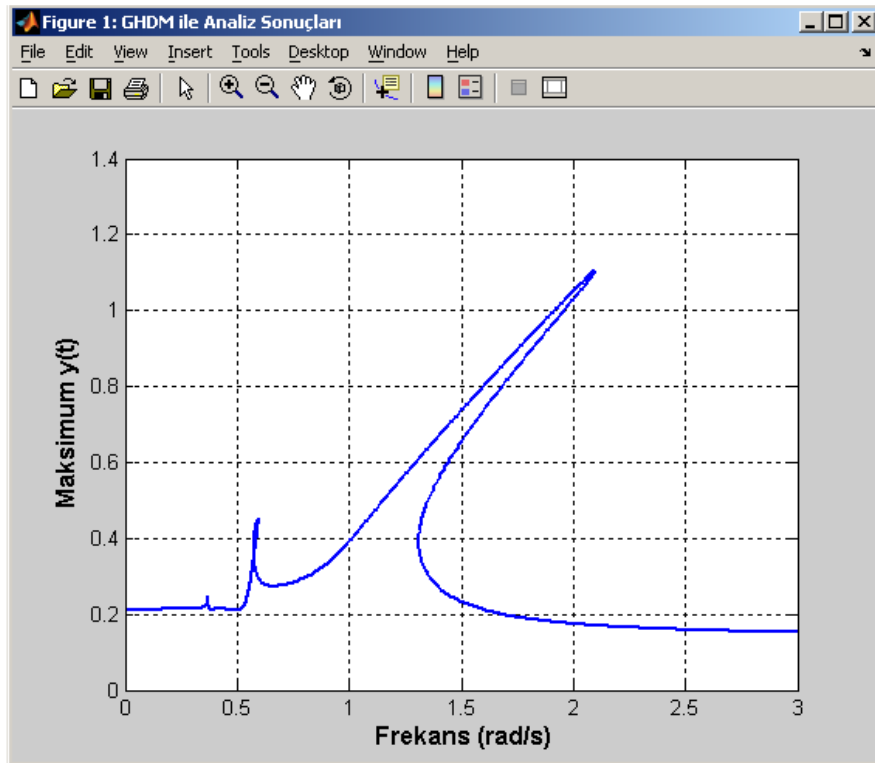
Şekil 4.29. 2. harmoniğe ait faz değişimi



Şekil 4.30. 3. harmoniğe ait genlik değişimi

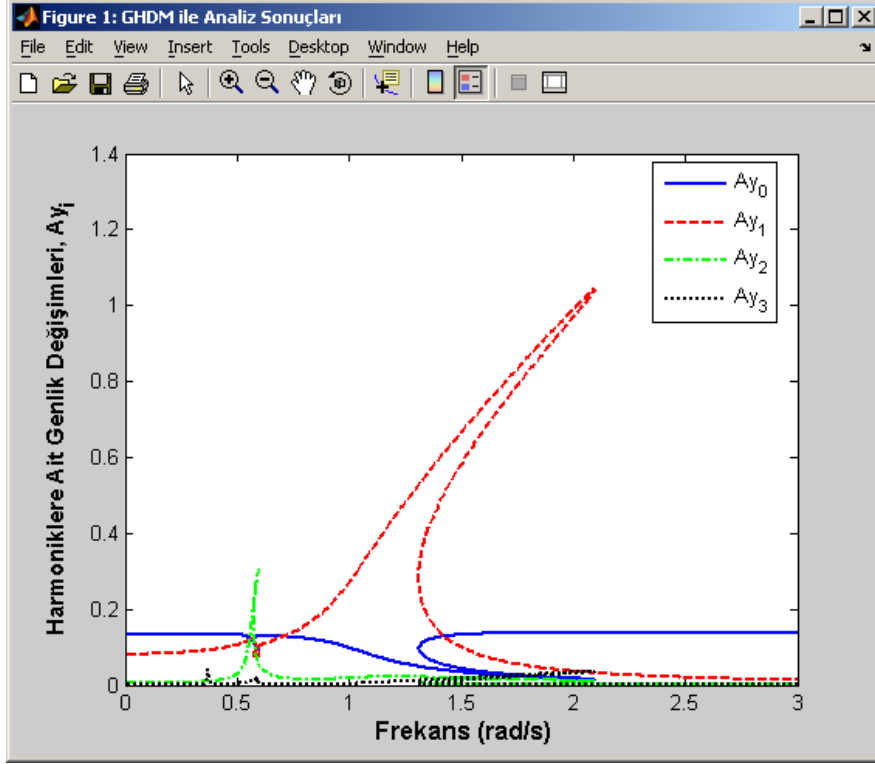


Şekil 4.31. 3. harmoniğe ait faz değişimi



Şekil 4.32. Maksimum genlik değişimi

Harmoniklere ait genliklerin karşılaştırılması amacıyla grafik çizim ekranında *Önceki Grafiği Tut* düğmesi aktif hale getirilip her bir harmonik genliği için farklı renk ve çizgi biçimi seçilerek üst üste karşılaştırmalı grafik çizimi yapılmıştır. Bu grafik Şekil 4.33’de görülmektedir.



Şekil 4.33. Harmoniklere ait genlik değişimlerinin karşılaştırılması

Görüldüğü gibi temel harmonik diğer harmoniklere göre daha baskındır. İlk atlama noktasında 2. harmoniğin genliği 0,3 değeri ile diğer harmoniklere göre daha yüksek seviyededir. Bu durum giriş genliğindeki *dc* bileşenden kaynaklanmaktadır. *Dc* bileşenin artması çift harmoniklerin seviyesini de artırır. En küçük atlama frekansından önce ve en büyük atlama frekansından sonra çıkışa ait *dc* bileşenin diğerlerine göre daha yüksek seviyede olduğu gözlenmektedir. Elde edilen tüm grafikler incelendiğinde  $\alpha = 4$  değerinin pozitif olmasından da anlaşılacağı gibi sistemin zorlayıcı (hardening) yapıda olduğu görülmüştür.

## BÖLÜM 5. SONUÇLAR

Bu çalışmada tek girişli – tek çıkışlı bir sistem modeli üzerinde, harmonik denge metoduna göre daha pratik olan genelleştirilmiş harmonik denge metodu uygulanmış ve yapılan analizde frekans cevabına bakılarak atlama olayı incelenmiştir. Aynı zamanda örnek olarak ele alınan sistem modelinin girişindeki *dc* bileşenin sistem cevabı üzerindeki etkisi örnek olarak elde edilen maksimum genlik değişimine ait grafiksel sonuçlarda karşılaştırmalı olarak sunulmuştur. Yapılan analizi daha da pratikleştirmek amacıyla bir arayüz çalışması gerçekleştirilmiş, bu sayede analiz yapmak kullanıcı için basitleştirilmiş ve daha da kolay hale getirilmiştir. Bu kolaylık özellikle atlama noktasının tespitinde ve geri dönüş noktalarının belirlenmesinde kendini göstermektedir. Klasik uygulamada kullanılan her bir frekans değeri için elde edilen kararlılık dilimindeki değerin bulunuşundaki hata tolerans değeri kontrol edilir ve buna göre frekans değişimine aynı yönde devam edileceğine ya da dönüş noktası olduğuna karar verilir. Gerçekleştirilen çalışmada ise hata tolerans değerinin büyüklüğü oluşturulan bir algoritma yapısı ile yazılım programına eklenerek bu dönüş noktalarının bulunuşu ve buna göre frekans değişiminin yönü otomatikleştirilmiştir. Bu avantaj kullanıcıların ilgili metodun detaylarına takılmadan analize yönelik sonuçlara daha çabuk ulaşmalarını sağlamıştır. Bu yönüyle aslında eğitim amaçlı kullanılabilir bir özelliğe de kavuşulmuştur.

## **BÖLÜM 6. TARTIŞMA VE ÖNERİLER**

Gerçekleştirilen arayüz çalışmasının belirtilen üstünlükleri yanında bir parça da eksikliğinden bahsetmek bu konuda araştırma yapan ya da yapacaklara fikir verme noktasında faydalı olacaktır. Kuşkusuz ele alınan sistem doğrusal olmayan bir yapıya sahip olduğundan davranış şekillerinin başlangıç değerlerine bağımlı olduğunun bilinmesi ve ona göre kullanıcının değer seçiminde dikkatli olması gerekir. Buna ek olarak denge denklemlerinin çözümünde, kullanılan sisteme göre elde edilen hata tolerans değerinin dönüş noktalarının tespitindeki büyüklüğüne de dikkat edilmesi gerekir. Bu değer analizi yapılacak olan doğrusal olmayan sistem modeline göre küçük farklılıklar gösterecektir.

Sunulan çalışmada hazırlanan arayüz modeli tek girişli – tek çıkışlı sistem yapıları için uygulandı. Benzer çalışma çok tonlu giriş sinyalinin tanımlandığı modeller ile çok giriş – çok çıkışlı sistem modelleri için geliştirilebilir. Ayrıca hazırlanan bu arayüz çalışması kullanıcılara daha yararlı olması amacıyla web ortamına uyarlanabilir.

## KAYNAKLAR

- [1] AKGÜN, D., ÇANKAYA, İ., VATANSEVER, F., Doğrusal Olmayan Sistemler İçin Simülatör Tasarımı ve Uygulamaları, 4rd International Advanced Technologies Symposium, Konya, pp. 1-6, 2005.
- [2] ÇANKAYA, İ., BOZ, A. F., Volterra Serileri Metodu İle Doğrusal Olmayan Sistemlerin Frekans Boyutunda Analizi, Süleyman Demirel Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi, Isparta, Cilt 9, Sayı 1, Sayfa 147-151, 2005.
- [3] ATHERTON, D. P., Nonlinear Control Engineering, Van Nostrand Reinhold Company, London, , pp. 1-15, 1975.
- [4] YILMAZ, S., Otomatik Kontrol Ders Notları, Kocaeli Üniversitesi Yayınları, Sayfa 2-41, 2008.
- [5] AKGÜN, D., Çok Girişli – Çok Çıkışlı Sistemlerin Frekans Boyutundaki Analizine Yönelik Poliharmonik Denge Denklemlerinin Kullanıldığı Yeni Bir Algoritma Tasarımı, Doktora tezi, Sakarya Üniversitesi, Sayfa 1-147, 2008.
- [6] YÜKSEL, İ., Otomatik Kontrol Sistem Dinamiği ve Denetim Sistemleri, Uludağ Üniversitesi Basım Evi, Bursa, Sayfa 51-54, 2001.
- [7] <http://www.mathworks.com/products/simulink/>, 20.05.2009.
- [8] HSU, J. C., MEYER, A. U., Modern Control Principles and Applications, McGraw-Hill, pp. 3-9, 1968.
- [9] DUTTON, K., THOMPSON, S., BARRACLOUGH, B., The Art Of Control Engineering, Addison-Wesley, pp. 645-657, 1997.
- [10] ÇANKAYA, İ., YILDIZ, A., Floquet Teori İle Doğrusal Olmayan Sistemlerin Kararlılık Analizi, Yıldız Teknik Üniversitesi Dergisi, Sayı 2, Sayfa 21-29, 2006.
- [11] GÜRSAKAL, N., Yeni Bilim, “İş, Güç” Endüstri İlişkileri ve İnsan Kaynakları Dergisi, Sayı 1, Cilt 3, Sıra 1, No 110, 2001.
- [12] <http://www.how-why.com/ph510/index.html>, 19.09.2008.
- [13] UYAROĞLU, Y., Kaotik Lorenz Sisteminin Yarı-Ayna Yapısı, Journal of Istanbul Kültür University, Sayfa 141-146, 2006/3.



- [14] CHEN, G., YANG, X., YING, X., NANNI, A., Damage Detection of Concrete Beams Using Nonlinear Features of Forced Vibration, *Structural Health Monitoring*, Vol. 5, pp. 125-141, 2006.
- [15] JONES, J. C. P., ÇANKAYA, İ., Generalized Harmonic Analysis of Nonlinear Ship Roll Dynamics, *Journal of Ship Research*, Vol. 40, No 4, pp. 39-48, 1996.
- [16] VIRTANEN, J., Harmonic Balance and Phase-Noise Analysis Methods in The APLAC Circuit Simulator, Helsinki University of Technology, pp. 1-83, 2005.
- [17] COOK, P. A., In M. J. Grimble (Ed.) *Nonlinear Dynamical Systems* Prentice Hall International Series in Systems and Control Engineering, 1994.
- [18] AKGÜN, D., ÇANKAYA, İ., VATANSEVER, F., Harmonik Denge Metodu Analizi İçin Bir Arayüz Tasarımı, UMES'07-Ulusal Teknik Eğitim, Mühendislik ve Eğitim Bilimleri Genç Araştırmacılar Sempozyumu, Kocaeli Üniversitesi, Kocaeli, Cilt 1, Sayfa 305-308, 2007.
- [19] JONES, J. C. P., ZHUANG, M., ÇANKAYA, İ., Symbolic Computation of Harmonic Balance Equations, *International Journal of Control*, Vol. 68, No. 3, pp. 449-460, 1997.
- [20] JONES, J. C. P., ÇANKAYA, İ., The Effect of a Constant Heeling Moment on The Main and Superharmonic Response of a Ship in Regular Beam Seas, *International Shipbuilding Progress*, Vol. 46, pp. 165-187, 1999.
- [21] JONES, J. C. P., Automatic Computation of Polyharmonic Balance Equations for Non-Linear Differential Systems, *International Journal of Control*, Vol. 76, No. 4, pp. 355-365, 2003.
- [22] JONES, J. C. P., ÇANKAYA, İ., Poliharmonic Balance Analysis of Nonlinear Ship Roll Response, *Nonlinear Dynamics*, Vol. 35, No. 4, pp. 123-146, 2004.
- [23] JONES, J. C. P., ÇANKAYA, İ., A Note on The Computation of Maximum Roll Amplitudes in Regular Beam Seas, *Journal of Ship Research*, Vol. 41, No 3, pp. 224-229, 1997.
- [24] PENG, Z. K., LANG, Z. Q., BILLINGS, S. A., Resonances and Resonant Frequencies for a Class of Nonlinear System, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 300, No 3-5, pp. 993-1014, 2007.
- [25] <http://www.mathworks.com/access/helpdesk/help/techdoc/ref/fminsearch.html>, 29.05.2009.

- [26] [http://www.mathworks.com/access/helpdesk/help/techdoc/creating\\_guis/bqz79mu.html](http://www.mathworks.com/access/helpdesk/help/techdoc/creating_guis/bqz79mu.html), 27.05.2009.
- [27] UZUNOĞLU, M., KIZIL, A., ONAR, Ö. Ç., Her Yönü İle MATLAB, Türkmen Kitabevi, 2. Baskı, İstanbul, 2003.
- [28] MARCHAND, P., HOLLAND, O. T., Graphics and GUIs with MATLAB, A CRC Pres Company, Third Edition, New York, pp. 396-502, 2003.
- [29] NELDER, J. A., MEAD, R. A, Simplex Method for Function Minimization, Comput. J., Vol. 7, pp. 308-313, 1965.
- [30] MATHEWS, J. H., FINK, K. K., Numerical Methods Using Matlab, Prentice Hall, 4th Edition, 2004.

## EKLER

### EK.A Nelder-Mead Simplex Yöntemi

İlk kez 1965 yılında J.NELDER ve R.MEAD tarafından, verilen bir fonksiyonun yerel minimum noktasını bulmak için uygulanan bir yöntemdir. Bu metotta iki değişken için bir üçgen oluşturulur. Bu üçgenin köşe noktalarındaki fonksiyon değerleri karşılaştırılarak tepe noktası sürekli değiştirilir. Tepe noktası her değiştirildiğinde üçgen biraz daha küçülür ve yeni yerel minimum noktaları bulunur. Bu işlem en uygun yerel minimum noktası bulunana kadar devam ettirilir [29].

Minimize edilecek  $f(x, y)$  fonksiyonunda başlangıç için köşe noktaları verilir. Verilen noktalar için fonksiyonun aldığı değerler bulunur. Burada  $BGW$  üçgeni esas alınır,  $B$  (best) en iyi değer,  $G$  (good) en iyiye yakın değer ve  $W$  (worst) kötü değer olarak alınır.

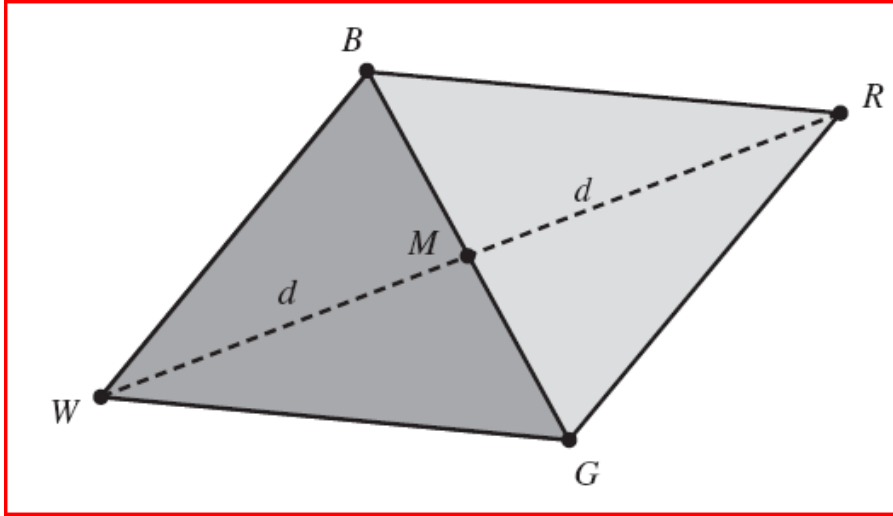
$M$  noktası  $B$  ve  $G$  noktalarının birleşmesiyle oluşan doğru parçasının orta noktasıdır.

$$M = \frac{B+G}{2} = \left( \frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right) \quad (\text{A.1})$$

$R$  noktası  $BG$  doğrusu boyunca simetri (yansıtma) ile elde edilen deneme noktasıdır.

$$R = M + (M - W) = 2M - W \quad (\text{A.2})$$

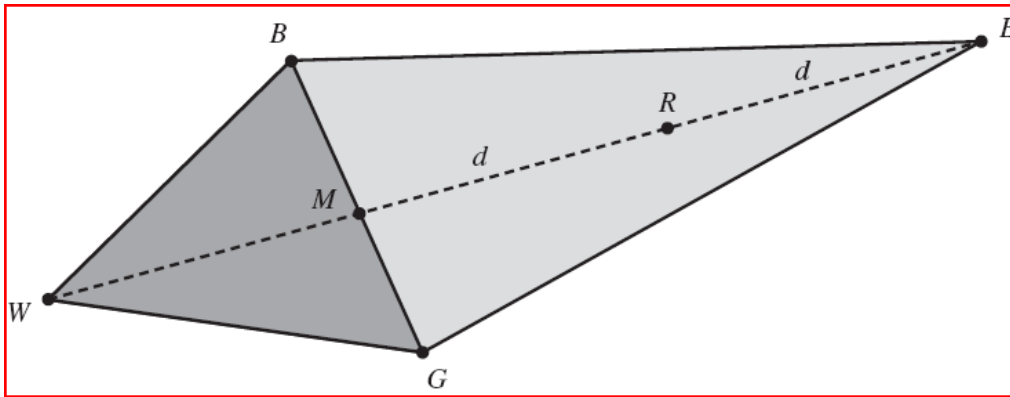
Oluşturulan  $BGW$  üçgeni ve  $R$  noktası Şekil A.1'de görülmektedir.



Şekil A. 1 Nelder-Mead üçgeni

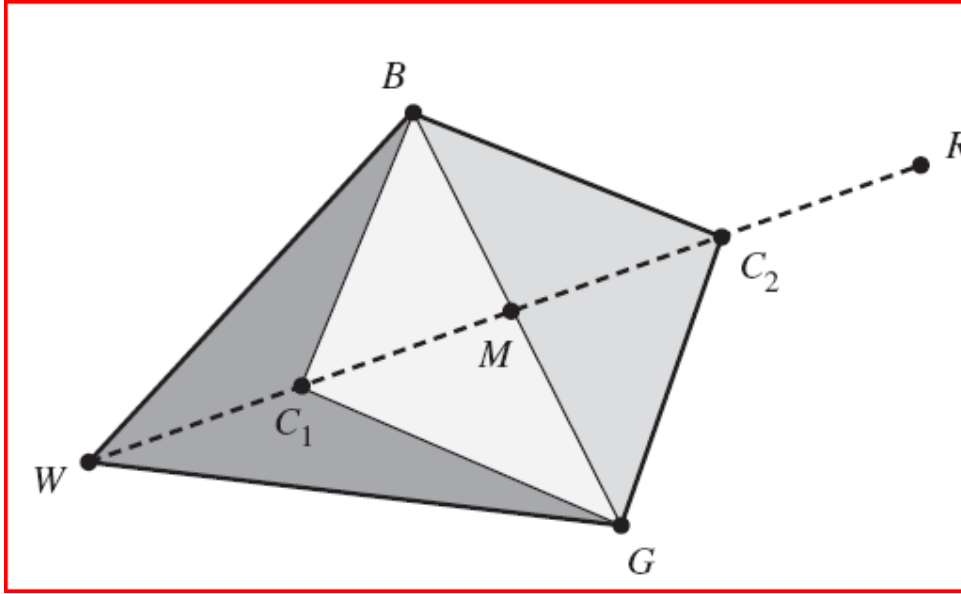
Şekil A.2’de görüldüğü gibi  $R$  noktasındaki fonksiyon değeri  $W$  noktasındaki değerden küçükse, minimum noktasına doğru bir çizgi çizilir.  $E$  noktası  $M$  ve  $R$  noktalarının birleşimiyle oluşan doğru parçası kadar  $R$  noktasına ilave edilmesi ile bulunur.

$$E = R + (R - M) = 2R - M \quad (\text{A.3})$$



Şekil A. 2 Nelder-Mead üçgeni

$C$  noktası ise Şekil A.3’te görüldüğü gibi  $R$  ve  $W$  noktalarının aynı olduğu durumlarda başka bir nokta bulmak için kullanılır. Üçgenin köşelerindeki fonksiyon değerleri birbirine tolere edilebilecek kadar yaklaştığında işlem sona erdirilir.



Şekil A. 3 Nelder-Mead üçgeni

Örnek Uygulama:

Nelder – Mead metodunu kullanarak  $f(x, y) = x^2 - 4x + y^2 - y - xy$  fonksiyonun minimum noktası bulunmak isteniyor [30].

Üçgenin köşe noktaları için başlangıç değerleri  $V_1 = (0, 0)$ ,  $V_2 = (1, 2, 0)$  ve  $V_3 = (0, 0, 8)$  olarak alınsın. Bu değerler için  $f(x, y)$  fonksiyonu hesaplanacak olursa  $f(0, 0) = 0, 0$ ,  $f(1, 2, 0) = -3,36$  ve  $f(0, 0, 8) = -0,16$  olduğu görülür.

$B, G, W$  noktalarını belirlemek için fonksiyon değerleri karşılaştırılır ve değer seçimi denklem A.4'deki şekilde yapılır.

$$B = (1, 2, 0) \quad G = (0, 0, 8) \quad W = (0, 0) \quad (A.4)$$

$W = (0, 0)$  değeri uygun bir değer olmadığından daha iyi bir değer aranması gerekir. Bunun için  $M = (B + G) / 2 = (0, 6, 0, 4)$  ve  $R = 2M - W = (1, 2, 0, 8)$  hesaplamaları yapılır.

$f(R) = f(1,2,0,8) = -4,48$  fonksiyonunun değeri  $f(G)$  değerinden azdır. Dolayısıyla ilk durum geçerlidir.

$f(R) \leq f(B)$  olduğu için sağ yöne taşınır ve  $E$  noktasının tepe değeri denklem A.5'deki şekilde hesaplanır.

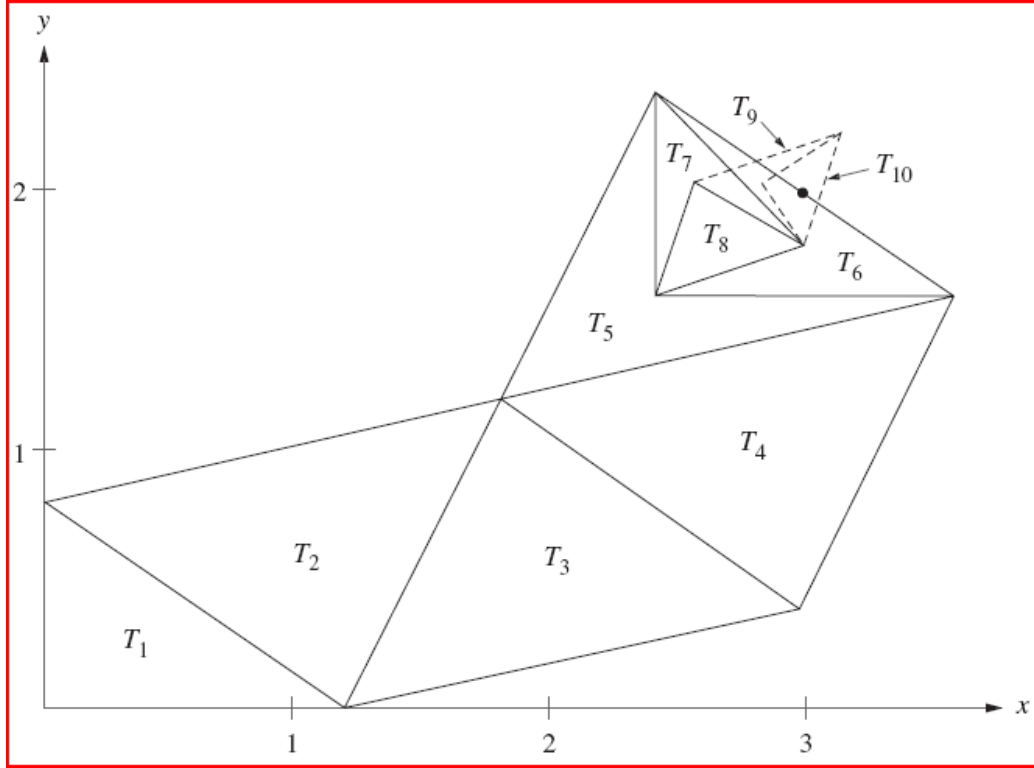
$$E = 2R - M = 2(1,2,0,8) - (0,6,0,4) = (1,8,1,2) \quad (\text{A.5})$$

$f(E) = f(1,8,1,2) = -5,88$  fonksiyonunun değeri  $f(B)$  değerinden azdır ve yeni üçgen  $V_1=(1,8,1,2)$ ,  $V_2=(1,2,0,0)$  ve  $V_3=(0,0,0,8)$  tepe noktası değerlerini alır. İterasyon bu şekilde devam ettirildiğinde çözümü  $f(3,2)$  noktasına yaklaşan bir üçgenler dizisi oluşur. En iyi tepe noktası  $B = 2.99996456,1.99983839$  ve çözümü  $f(B) = -6,99999998$  değerlerini alır. Tablo A.1'de iterasyonun adımları için üçgenin tepe noktalarındaki fonksiyon değerlerinden örnekler verilmiştir. Tablo A.1'e bakıldığında görüleceği gibi çözüm  $f(3,2) = -7$  değerine yaklaşık bir değer olarak bulunur. Nelder-Mead yönteminin sonuca ulaşması Şekil A.4'te gösterilmiştir.

Tablo A.1 Nelder-Mead yöntemine ait örnek iterasyon sonuçları

k	En İyi Değer	İyi Değer	Kötü değer
1	$f(1,2, 0,0) = -3,36$	$f(0,0, 0,8) = -0,16$	$f(0,0, 0,0) = 0,00$
2	$f(1,8, 1,2) = -5,88$	$f(1,2, 0,0) = -3,36$	$f(0,0, 0,8) = -0,16$
3	$f(1,8, 1,2) = -5,88$	$f(3,0, 0,4) = -4,44$	$f(1,2, 0,0) = -3,36$
4	$f(3,6, 1,6) = -6,24$	$f(1,8, 1,2) = -5,88$	$f(3,0, 0,4) = -4,44$
5	$f(3,6, 1,6) = -6,24$	$f(2,4, 2,4) = -6,24$	$f(1,8, 1,2) = -5,88$
6	$f(2,4, 1,6) = -6,72$	$f(3,6, 1,6) = -6,24$	$f(2,4, 2,4) = -6,24$
7	$f(3,0, 1,8) = -6,96$	$f(2,4, 1,6) = -6,72$	$f(2,4, 2,4) = -6,24$

8	$f(3,0, 1,8)=-6,96$	$f(2,55, 2,05)= -6,7725$	$f(2,4, 1,6)= -6,72$
9	$f(3,0, 1,8)=-6,96$	$f(3,15, 2,25)= -6,9525$	$f(2,55, 2,05)= -6,7725$
10	$f(3,0, 1,8)=-6,96$	$f(2,8125, 2,0375)= -6,9564062$	$f(3,15, 2,25)= -6,9525$



Şekil A. 4. Nelder-Mead yönteminin sonuca ulaşması

## ÖZGEÇMİŞ

Selim Şeref ÖZTÜRK, 16.05.1978'de İstanbul'da doğdu. İlk, orta ve lise eğitimini İstanbul'un Fatih ilçesinde tamamladı. 1994 yılında Fatih Yedikule Lisesinden mezun oldu. 1995 yılında başladığı Ankara Üniversitesi Bilgisayar Programcılığı bölümünü 1997 yılında bitirdi. 1997 – 2000 yılları arasında özel bir Bilgisayar Dershanesinde uzman öğretici olarak çalıştı. 2000 yılında Kocaeli Üniversitesi Bilgisayar Öğretmenliği Bölümüne girdi ve 2003 yılında mezun oldu. Aynı yıl İstanbul Bayrampaşa İnönü Anadolu Teknik – Teknik ve Endüstri Meslek Lisesi'ne Bilgisayar Öğretmeni olarak atandı ve halen bu görevini sürdürmektedir.



# GENELLEŞTİRİLMİŞ HARMONİK DENGE METODU İLE DOĞRUSAL OLMAYAN SİSTEMLERİN ANALİZİNE YÖNELİK BİR ARAYÜZ ÇALIŞMASI

Selim Şeref ÖZTÜRK

## ÖZET

Anahtar Kelimeler: Doğrusal olmayan sistem, Atlama olayı, Genelleştirilmiş harmonik denge metodu, Frekans cevabı, Kullanıcı arayüzü.

Doğrusal olmayan sistemlere uygulanan analitik analiz tekniklerinden biri Harmonik Denge Metodu (Harmonic Balance Method)'dur. Bu metod doğrusal olmayan sistemlerin frekans cevabı analizlerinde çok sık kullanılır ve oldukça pratiktir. Metodun klasik uygulamasında sistemin giriş ve çıkışındaki harmonik sayısı ile derecesi arttıkça açılımlardaki terim sayısı oldukça arttığından uzun ve karışık işlemler gerektirmektedir. Bu metodun rahat bir şekilde kullanılabilmesi için metod genelleştirilmiş ve sayısal analiz teknikleri uygulanan programlama algoritmalarında kullanıma uygun hale getirilmiştir.

Genelleştirilmiş harmonik denge metodunu doğrusal olmayan bir sisteme uygulamak için öncelikle giriş ve çıkış sinyal formu belirlenir ve çıkış sinyal formunda belirlenen harmoniklere göre sistem üzerinde bir takım pratik hesaplamalar yapılarak bilinmeyen sayısı kadar denge denklemleri elde edilir. Bu denge denklemleri üzerinde uygun sayısal analiz teknikleri kullanılarak bilinmeyenler elde edilmiş olur.

Bu çalışmada doğrusallık ve doğrusal olamama kavramlarına değinilerek doğrusal olmayan sistemlerde görülen atlama, çatallanma ve kaos olaylarından bahsedildi. Genelleştirilmiş Harmonik Denge Metodu ile analitik çözümlene gerekleŐtiren ve atlama frekansını otomatik olarak bulan bir arayüz oluşturularak bu arayüz hakkında bilgi verildi.

# **A INTERFACE STUDY FOR NONLINEAR SYSTEMS ANALYSIS WITH GENERALIZED HARMONIC BALANCE METHOD**

**Selim Şeref ÖZTÜRK**

## **SUMMARY**

**Key Words:** Nonlinear system, jump phenomenon, generalized harmonic balance method, frequency response, user interface.

One of analyze techniques which applied on nonlinear systems is Harmonic Balance Method. This method is used very often on frequency response analyze of nonlinear systems and it's rather practical. On classical appliance of the method, term number in expansions remarkably increases when harmonic number and degree on entrance and exit of system so it is required long and assorted processes. The method was generalized and become convenient for usage on programming algorithms on which numerical analyze techniques so that it can be used easily.

Firstly, entrance and exit signal form are determined for applying Generalized Harmonic Balance Method on nonlinear systems. Then, as many as the number of variables, balance equations are obtained by doing some practical calculations on the system, according to harmonics which determined on exit signal form. The variables have been obtained by using convenient numerical analyze techniques on these balance equations.

In this study, terms of linearity and nonlinearities were examined and jump phenomenon, phenomenon of bifurcation and chaos which seen at nonlinear systems were mentioned. An interface which can make analytical resolution with Generalized Harmonic Balance Method and find jump phenomenon frequency was formed. Some information was given about this interface.