

**T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**HİPERBOLİK FIBONACCI VE LUCAS
FONKSİYONLARI**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tuna BATU

Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK

Tez Danışmanı : Yrd. Doç. Dr. Serpil HALICI

Haziran 2009

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HİPERBOLİK FIBONACCI VE LUCAS
FONKSİYONLARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

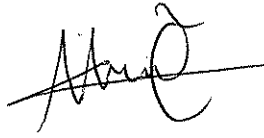
Tuna BATU

Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK

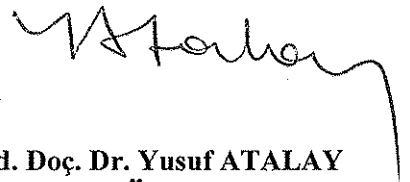
Bu tez 22 / 06 /2009 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Oybirliği ile kabul edilmiştir.



Yrd. Doç. Dr. Serpil HALICI
Jüri Başkanı



Doç. Dr. Mehmet ÖZEN
Üye



Yrd. Doç. Dr. Yusuf ATALAY
Üye

TEŞEKKÜR

Bu çalıőmanın fikir aőamasından baőlayıp dŰzenlenip yazılmasına kadar her dŰneminde sabırla ilgilenen, teővik ve yardımlarını hiçbir zaman esirgemeyen danıőmanım Sayın Yrd. Doç. Dr. Serpil HALICI' ya çok teőekkŰr ederim. Ayrıca, maddi ve manevi saėladıkları her tŰrlŰ destekten dolayı aileme Őukranlarımı sunmayı borç bilirim.

Bu tez Sakarya Űniversitesi Bilimsel Araőtırmalar Komisyonu tarafından 2008.50.01.025 nolu proje ile desteklenmiőtir.

Tuna BATU

İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR.....	ii
İÇİNDEKİLER.....	iii
SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ.....	vi
ŞEKİLLER LİSTESİ.....	viii
TABLolar LİSTESİ.....	ix
ÖZET.....	x
SUMMARY.....	xi
BÖLÜM 1.	
GİRİŞ	1
1.1. Fibonacci Sayıları ve Tekrarlı Bağıntılar.....	1
1.2. Tekrarlı Bağıntıların Çözümü	2
1.3. Fibonacci Sayıları ve Binet formülü.....	10
BÖLÜM 2.	
MERTEBELİ FIBONACCI SAYILARI.....	13
2.1. m. mertebeden Genelleştirilmiş Fibonacci Sayıları	13
2.2. m. mertebeden Fibonacci Sayıları ve Gazale Formülleri.....	13
2.3. -m. mertebeden Fibonacci Sayıları ve Gazale Formülleri.....	18
2.4. $\sqrt{-m}$. mertebeden Fibonacci Sayıları ve Gazale Formülleri.....	24
BÖLÜM 3.	
LUCAS SAYILARI.....	31
3.1. Lucas Sayıları ve Tekrarlı Bağıntısı.....	31
3.2. Lucas Sayıları ve Binet Formülü.....	32

BÖLÜM 4.

MERTEBELİ LUCAS SAYILARI.....	35
4.1. m. mertebeden Lucas Sayıları ve Gazale Formülleri.....	35
4.2. -m. mertebeden Lucas Sayıları ve Gazale Formülleri.....	38
4.3. $\sqrt{-m}$. mertebeden Lucas Sayıları ve Gazale Formülleri.....	43

BÖLÜM 5.

ALTIN MATRİSLER.....	49
5.1. Altın Matrisler.....	49
5.2. m. mertebeden Altın Matrisler.....	51
5.3. -m. mertebeden Altın Matrisler.....	54
5.4. $\sqrt{-m}$. mertebeden Altın Matrisler.....	57

BÖLÜM 6.

HİPERBOLİK FONKSİYONLAR.....	61
6.1. Genel Konik Tanımı.....	61
6.2. Hiperboller.....	62
6.2.1. Hiperbollerin merkezil denklemleri.....	64
6.3. Hiperbolik Fonksiyonlar.....	67
6.4. Hiperbolik Fonksiyonlar İçin Genel Formüller.....	72
6.5. Hiperbolik Fonksiyonların Grafikleri.....	73

BÖLÜM 7.

HİPERBOLİK FİBONACCI VE LUCAS FONKSİYONLARI.....	82
7.1. Hiperbolik Fibonacci ve Lucas Fonksiyonları.....	82
7.2. m. mertebeden Hiperbolik Fibonacci ve Lucas Fonksiyonları.....	85
7.2.1. m. mertebeden hiperbolik fibonacci ve lucas fonksiyonlarının özellikleri.....	88
7.3. Simetrik Hiperbolik Fibonacci ve Lucas Fonksiyonları.....	90
7.3.1. Simetrik hiperbolik fibonacci ve lucas fonksiyonlarının özellikleri.....	94

7.4. Simetrik Hiperbolik Fibonacci ve Lucas Fonksiyon Grafikleri.....	96
7.5. Simetrik Fibonacci Fonksiyonları ve m. mertebeden Altın Matris...	102
7.6. Simetrik Fibonacci Fonksiyonları ve -m. mertebeden Altın Matris.	103
BÖLÜM 8.	
SONUÇLAR VE ÖNERİLER.....	106
KAYNAKLAR.....	107
ÖZGEÇMİŞ.....	109

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

$cF(x)$: Kosinüs hiperbolik Fibonacci fonksiyonu
$cF_s(x)$: Simetrik kosinüs hiperbolik Fibonacci fonksiyonu
$cL(x)$: Kosinüs hiperbolik Lucas fonksiyonu
$cL_s(x)$: Simetrik kosinüs hiperbolik Lucas fonksiyonu
$cosechx$: Kosekant hiperbolik fonksiyonu
$coshx$: Kosinüs hiperbolik fonksiyonu
$cothx$: Kotanjant hiperbolik fonksiyonu
$ctF(x)$: Kotanjant hiperbolik Fibonacci fonksiyonu
$ctF_m(x)$: m. mertebeden kotanjant hiperbolik Fibonacci fonksiyonu
$ctL(x)$: Kotanjant hiperbolik Lucas fonksiyonu
$ctL_m(x)$: m.mertebeden kotanjant hiperbolik Lucas fonksiyonu
$F_m(n)$: m. mertebeden n. Fibonacci sayısı
$F_{-m}(n)$: -m. mertebeden n. Fibonacci sayısı
$F_{\sqrt{-m}}(n)$: $\sqrt{-m}$.mertebeden n. Fibonacci sayısı
F_n	: n. Fibonacci sayısı
F_{-n}	: Negatif yönde n. Fibonacci sayısı
$F(n)$: n. Fibonacci sayısı
$F(-n)$: Negatif yönde n. Fibonacci sayısı
G	: Altın matris
G_m	: m. mertebeden altın matris
G_m^n	: m. mertebeden altın oranın n.kuvveti
G_{-m}	: -m. mertebeden altın matris
$G_{\sqrt{-m}}$: $\sqrt{-m}$. mertebeden altın matris

L_n	: n. Lucas sayısı
L_{-n}	: Negatif yönde n. Lucas sayısı
$L(n)$: n. Lucas sayısı
$L(-n)$: Negatif yönde n. Lucas sayısı
$L_m(n)$: m. mertebeden n. Lucas sayısı
$L_{-m}(n)$: -m. mertebeden n. Lucas sayısı
$L_{\sqrt{-m}}(n)$: $\sqrt{-m}$.mertebeden n. Lucas sayısı
P_n	: n. Pell sayısı
$P(n)$: n. Pell sayısı
$sechx$: Sekant hiperbolik fonksiyonu
$sF(x)$: Sinüs hiperbolik Fibonacci fonksiyonu
$sF_s(x)$: Simetrik sinüs hiperbolik Fibonacci fonksiyonu
$sF_m(x)$: m. mertebeden sinüs hiperbolik Fibonacci fonksiyonu
$sinhx$: Sinüs hiperbolik fonksiyonu
$sL(x)$: Sinüs hiperbolik Lucas fonksiyonu
$sL_m(x)$: m. mertebeden sinüs hiperbolik Lucas fonksiyonu
$sL_s(x)$: Simetrik sinüs hiperbolik Lucas fonksiyonu
$tanhx$: Tanjant hiperbolik fonksiyonu
$tF(x)$: Tanjant hiperbolik Fibonacci fonksiyonu
$tF_m(x)$: m.mertebeden tanjant hiperbolik Fibonacci fonksiyonu
$tL(x)$: Tanjant hiperbolik Lucas fonksiyonu
$tL_m(x)$: m.mertebeden tanjant hiperbolik Fibonacci fonksiyonu
Φ	: Altın oran
Φ_m	: m. mertebeden altın oran
Φ_{-m}	: -m. mertebeden altın oran
$\Phi_{\sqrt{-m}}$: $\sqrt{-m}$. mertebeden altın oran
$\Phi_{\sqrt{-m}}^n$: $\sqrt{-m}$. mertebeden altın oranın n. kuvveti

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 6.1.	Koniğin geometrik yeri.....	51
Şekil 6.2.	Hiperbol grafiği.....	52
Şekil 6.3.	Hiperbolün elemanları.....	53
Şekil 6.4.	Merkezil hiperbolün grafiği.....	55
Şekil 6.5.	x ekseni odaklı hiperbol grafiği.....	56
Şekil 6.6.	y ekseni odaklı hiperbol grafiği	56
Şekil 6.7.	Birim çember.....	59
Şekil 6.8.	Birim hiperbol	60
Şekil 6.9.	$e^x/2$ ve $e^{-x}/2$ fonksiyonlarının grafikleri	63
Şekil 6.10.	$\cosh x$ fonksiyonunun grafiği	64
Şekil 6.11.	$e^x/2$ ve $-e^{-x}/2$ fonksiyonlarının grafikleri.....	65
Şekil 6.12.	$\sinh x$ fonksiyonunun grafiği.....	66
Şekil 6.13.	$\cosh x$ ve $\sinh x$ ortak grafiği.....	67
Şekil 6.14.	$\tanh x$ fonksiyonunun grafiği.....	69
Şekil 7.1.	$\cosh x$ fonksiyonunun grafiği.....	81
Şekil 7.2.	$cF_s(x)$ fonksiyonunun grafiği.....	82
Şekil 7.3.	$\sinh x$ fonksiyonunun grafiği.....	83
Şekil 7.4.	$sF_s(x)$ fonksiyonunun grafiği.....	84
Şekil 7.5.	$\cosh x$ fonksiyonunun grafiği.....	84
Şekil 7.6.	$cL_s(x)$ fonksiyonunun grafiği.....	85
Şekil 7.7.	$\sinh x$ fonksiyonunun grafiği.....	85
Şekil 7.8.	$sL_s(x)$ fonksiyonunun grafiği.....	86

TABLULAR LİSTESİ

Tablo 1.1	Negatif ve pozitif indisli Fibonacci sayıları.....	1
Tablo 2.1	m. mertebeden farklı değerler ve oranlar.....	13
Tablo 2.2	-m. mertebeden farklı değerler ve oranlar	18
Tablo 2.3	$\sqrt{-m}$. mertebeden farklı değerler ve oranlar	24
Tablo 3.1	Lucas Sayıları.....	25
Tablo 4.1	m. mertebeden Lucas sayıları için değerler.....	30
Tablo 4.2	-m. mertebeden Lucas sayıları için değerler.....	34
Tablo 4.3	$\sqrt{-m}$. mertebeden Lucas sayıları için farklı değerler.....	38
Tablo 7.1.	Negatif ve pozitif indisli Fibonacci ve Lucas sayıları.....	70

ÖZET

Anahtar kelimeler: Hiperbolik Fibonacci ve Lucas fonksiyonları, m. mertebeden Fibonacci ve Lucas sayıları

Bu çalışmada hiperbolik Fibonacci ve Lucas fonksiyonlarının genel özellikleri incelendi. Birinci bölümde, Fibonacci sayıları, tekrarlı bağıntılar ve tekrarlı bağıntılarda genel çözüm bulma yöntemi verildi. İkinci bölümde m. mertebeden Fibonacci sayıları, mertebeli Fibonacci tekrarlı bağıntıları için Gazale formülleri elde edildi. Üçüncü bölümde Lucas sayıları ve tekrarlı bağıntıları incelendi. Dördüncü bölümde m. mertebeden Lucas sayıları, mertebeli Lucas tekrarlı bağıntıları için Gazale formülleri elde edildi. Beşinci bölümde, altın matrisler ve mertebeli altın matrisler incelendi. Altıncı bölümde hiperbolik Fibonacci ve Lucas fonksiyonlarının anlaşılmasında temel kavramlardan olan hiperbolik fonksiyonlar ve grafikleri incelendi. Son bölümde ise Hiperbolik Fibonacci ve Lucas Fonksiyonlarının genel tanımı, elde edilme yöntemleri, mertebeli ve simetrik fonksiyon çeşitleri üzerinde duruldu. Grafikleri hiperbolik fonksiyonlarla karşılaştırıldı. Altın matrislerle bağlantıları incelendi.

HYPERBOLIC FIBONACCI AND LUCAS FUNCTIONS

SUMMARY

Key Words: Hyperbolic Fibonacci and Lucas Functions, Fibonacci and Lucas numbers with order m

In this thesis, the general properties of hyperbolic Fibonacci and Lucas numbers are examined. Fibonacci numbers, recurrence relations and the method to derive general solution of a recurrence relations are given in the first chapter. The definition of Fibonacci numbers of order m is given and Fibonacci recurrence relations with order are investigated to derive Gazale formula in the second chapter. Lucas numbers and Lucas recurrence relations are examined in the third chapter. In the fourth chapter, the definition of Lucas numbers of order m is given and Lucas recurrence relations are investigated to derive Gazale Formula. Golden matrices and Golden matrices with order m are mentioned in the fifth chapter. In the sixth chapter including hyperbolic functions that consist of the fundamental concepts and definitions of hyperbolic Fibonacci and Lucas functions and graphics of these functions are examined. In the last chapter, the general definition, the methods of derivation of hyperbolic Fibonacci and Lucas Functions are given and different types of functions as symmetric and function with order are examined. Graphics of hyperbolic Fibonacci and Lucas Functions are compared to hyperbolic functions. The relation concerning with golden matrices is investigated.

BÖLÜM 1. GİRİŞ

1.1. Fibonacci Sayıları ve Tekrarlı Bağlıntılar

Her bir terimi kendisinden önceki iki terimin toplamına eşit olan sayıların dizisine, Fibonacci sayı dizisi denir. Fibonacci dizisinin her elemanı, birer Fibonacci sayısıdır,

$$\{1,1,2,3,5,8,13,21,34,\dots\}$$

Fibonacci sayı dizisinin n . elemanı, F_n ile gösterilir. Başlangıç şartları ile birlikte, Fibonacci sayı dizisi $n \in \mathbb{Z}$ için,

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

$$F_0 = 0, F_1 = 1$$

biçiminde ifade edilir. Fibonacci dizisi, sadece pozitif tamsayılarla sınırlı bir dizi değildir. n bir tamsayı olduğu için, negatif Fibonacci sayıları da elde edilebilir ve negatif indisli Fibonacci sayıları F_{-n} simgesiyle ifade edilir. İlk 11 n değeri için Fibonacci sayıları bulunduğu şu tablo oluşacaktır:

Tablo 1.1 Negatif ve pozitif indisli Fibonacci sayıları

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
F_n	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55
F_{-n}	0	1	-1	2	-3	5	-8	13	-21	34	-55

Tablo 1.1 e dikkat edildiğinde, pozitif ve negatif Fibonacci sayıları arasındaki bağıntı görülebilir. Tek indisli, F_n ve F_{-n} Fibonacci sayıları eşittir. Bu eşitlik,

$$F_n = (-1)^{n+1} F_{-n}$$

biçiminde ifade edilir. Örneğin $n=3$ ve $n=4$ için,

$$F_3 = (-1)^4 F_{-3} = 1.2 = 2$$

$$F_4 = (-1)^5 F_{-4} = (-1).(-3) = 3$$

olur. Fibonacci sayılarında her bir terim, kendinden önceki iki terimin toplamına eşit olduğundan ve bir sonraki işlemin içinde tekrar kullanıldığından, başlangıç şartlarıyla birlikte, $n \in Z$ için,

$$F(n) = F(n-1) + F(n-2)$$

$$F(0) = 0, F(1) = 1$$

biçiminde bir tekrarlı bağıntı yazılabilir. Bu tekrarlı bağıntı, Fibonacci tekrarlı bağıntısı olarak adlandırılır. Daha ayrıntılı bilgi için Vajda [2] ve Hoggat [3] kaynaklarına bakınız.

1.2. Tekrarlı Bağıntıların Çözümü

k . mertebeden sabit katsayılı, lineer, homojen tekrarlı bağıntılar,

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \dots + c_k a_{n-k} ; \quad c_k \in R \text{ ve } c \neq 0 \quad (1.1)$$

biçimindeki tekrarlı bağıntılardır. Lineer eşitlikler hiçbir şekilde, değişkenlerin köklerini veya çarpımlarını içermezler. Bütün değişkenler, en fazla birinci dereceden kuvvete sahip olabilirler ve değişkenlere bağlı trigonometrik, logaritmik veya üstel fonksiyonlar kullanılmaz. Bundan dolayı, (1.1) k .mertebeden sabit katsayılı, lineer,

homojen tekrarlı bağıntı ifadesi, en fazla birinci kuvvetten a_i terimlerini içerebilir. Ayrıca, diğer lineerlik şartlarını da sağlanmalıdır. Bir lineer eşitliğin, homojen olabilmesi için, kullanılan terimlerin dışında başka terim kullanılmaması gerekir. Dolayısıyla, (1.1) eşitliği göz önüne alındığında, bağıntının sağ tarafında kullanılan a_i terimlerinin dışında, başka bir terim kullanılmaması gerekir. Her n için, $a_n = 0$ eşitliği sağlanmalıdır. Diğer taraftan, bir bağıntının çözümü için k tane a_i değerine ihtiyaç varsa, bu durumda bağıntının mertebesi k olacaktır. Buna göre k . mertebeden sabit katsayılı lineer homojen denklemin çözülebilmesi için k tane,

$$a_0 = c_0$$

$$a_1 = c_1$$

$$\vdots$$

$$a_k = c_k$$

biçiminde başlangıç şartına ihtiyaç vardır. Sabit katsayılı ikinci mertebeden denklemlerin çözümünden önce, $n \geq 0$ için,

$$a_n = \gamma a_{n-1}$$

$$a_0 = c$$

başlangıç şartıyla verilen tekrarlı bağıntının çözümü olan,

$$a_n = c\gamma^n$$

eşitliğinin bilinmesi gerekir. Aynı işlem,

$$a_n = aa_{n-1} + ba_{n-2} \tag{1.2}$$

ikinci mertebeden sabit katsayılı bağıntısına uygulandığında, $c\gamma^n$ ifadesinin 0 dan farklı çözümü varsa bu durumda,

$$a_{n-1} = c\gamma^{n-1} \quad (1.3)$$

$$a_{n-2} = c\gamma^{n-2}$$

biçiminde olacaktır.(1.3) deki ifadeler, (1.2) eşitliğinde yerine yazıldığında,

$$c\gamma^n = ac\gamma^{n-1} + bc\gamma^{n-2}$$

olur. Eşitlikteki c sabit sayısı sadeleştirildiğinde,

$$\gamma^n = a\gamma^{n-1} + b\gamma^{n-2}$$

bağıntısı elde edilir. $n = 2$ için işleme devam edildiğinde,

$$\gamma^2 - a\gamma - b = 0$$

eşitliği bulunur. Bu eşitliğin kökü olan γ ,

$$x^2 - ax - b = 0 \quad (1.4)$$

karakteristik denkleminin de kökü olmalıdır. (1.4) eşitliğinin kökleri, (1.2) tekrarlı bağıntısının karakteristik kökleri olarak isimlendirilir. Sıradaki teorem, k . mertebeden sabit katsayılı, lineer, homojen tekrarlı bağıntıların çözülmesinde, karakteristik köklerin nasıl yardımcı olacağını göstermektedir. Bu konuyla ilgili daha geniş açıklama için, Koshy [1] ve Mauldin [22] kaynaklarına bakılabilir.

Teorem 1.2.1: γ ve δ , $x^2 - ax - b = 0$ denkleminin farklı kökleri, $a, b \in R$ ve $b \neq 0$ olsun. Bu durumda, k .mertebeden sabit katsayılı, lineer, homojen tekrarlı bağıntısının,

$$a_n = aa_{n-1} + ba_{n-2}$$

$$a_0 = c_0, a_1 = c_1$$

için her çözümü, A ve B sabitler olmak üzere,

$$a_n = A\gamma^n + B\delta^n$$

biçiminde ifade edilebilir.

İspat: İspat iki aşamalıdır:

1) $a_n = A\gamma^n + B\delta^n$ ifadesinin, her sabit A ve B değeri için, tekrarlı bağıntının bir çözümü olduğunun gösterilmesi,

2) Başlangıç değerlerini sağlayan A ve B değerlerinin bulunması.

İlk olarak γ ve δ , (1.4) karakteristik denklemini sağlayan değerler olduğundan,

$$\gamma^2 = a\gamma + b$$

$$\delta^2 = a\delta + b$$

biçiminde yazılabilir. İşlemler sırayla uygulandığında;

1) $a_n = A\gamma^n + B\delta^n$ ifadesinin, tekrarlı bağıntının bir çözümü olduğunu göstermek için, (1.2) denkleminde,

$$a_{n-1} = A\gamma^{n-1} + B\delta^{n-1}$$

$$a_{n-2} = A\gamma^{n-2} + B\delta^{n-2}$$

eşitlikleri yazılarak,

$$aa_{n-1} + ba_{n-2} = a(A\gamma^{n-1} + B\delta^{n-1}) + b(A\gamma^{n-2} + B\delta^{n-2})$$

ifadesi elde edilir ve işlem yapılarak, A ve B parantezlerine alındığında,

$$aa_{n-1} + ba_{n-2} = A\gamma^{n-2}(a\gamma + b) + B\delta^{n-2}(a\delta + b)$$

olur. $\gamma^2 = a\gamma + b$ ve $\delta^2 = a\delta + b$ olduğundan,

$$aa_{n-1} + ba_{n-2} = A\gamma^n + B\delta^n$$

elde edilir. Sonuç olarak, $a_n = A\gamma^n + B\delta^n$, (1.2) tekrarlı bağıntısının bir çözümüdür.

2) $a_n = A\gamma^n + B\delta^n$, (1.2) tekrarlı bağıntısının çözümü olduğundan dolayı, A ve B değerlerinin bulunabilmesi için başlangıç değerlerinin kullanılması yeterlidir. Başlangıç değerlerinin, yani $a_0 = c_0, a_1 = c_1$ değerlerinin, $a_n = A\gamma^n + B\delta^n$ formunda yazılabilmesi için sırayla $n = 0$ ve $n = 1$ değerleri yazıldığında,

$$c_0 = A + B = c, \quad c_1 = A\gamma + B\delta$$

olur. Denklem sistemi çözülerek, A ve B değerleri, $\gamma \neq \delta$ için,

$$A = \frac{c_1 - c_0\delta}{\gamma - \delta}, \quad B = \frac{c_0\gamma - c_1}{\gamma - \delta}$$

elde edilir. A ve B değerleri için a_n , başlangıç şartları ve tekrarlı bağıntıyı sağlar. Başlangıç şartları ve tekrarlı bağıntı, $\{a_n\}$ dizisini sağladığı için, gerçekten de $a_n = A\gamma^n + B\delta^n$, tekrarlı bağıntının tek çözümüdür.

Örnek 1.2.1: $a_n = 7a_{n-1} - 12a_{n-2}$ tekrarlı bağıntısı, $a_0 = 4$ ve $a_1 = 15$ başlangıç şartları için incelenirse, iki aşamalı çözümden yararlanılarak,

1) Tekrarlı bağıntının genel çözümünün bulunabilmesi için, ilk olarak karakteristik eşitlik yazılır. Tekrarlı bağıntının karakteristik eşitliği,

$$x^2 - 7x + 12 = 0$$

dır. Karakteristik kökler ise, 3 ve 4 olur. Bunun için tekrarlı bağıntının genel çözümü,

$$a_n = A3^n + B4^n$$

olur.

2) A ve B nin değerlerinin bulunabilmesi için başlangıç şartları kullanılarak,

$$a_0 = A + B = 4$$

$$a_1 = 3A + 4B = 15$$

biçiminde yazıldığında, $A = 1$ ve $B = 3$ değerleri elde edilir. Bunun için genel çözüm ifadesi,

$$a_n = 3^n + 3 \cdot 4^n$$

olur. Aynı yöntem Örnek 1.2.2 de olduğu gibi, n . Fibonacci sayısının bulunması için kullanılabilir.

Örnek 1.2.2: Fibonacci tekrarlı bağıntısı ve başlangıç şartları,

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

$$F_0 = 0, F_1 = 1$$

kullanılarak karakteristik eşitlik olan,

$$x^2 - x - 1 = 0$$

denklemini elde edilir ve bu karakteristik eşitliğin kökleri,

$$\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \beta = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

olur. $F_n = A\alpha^n + B\beta^n$, genel çözümdür. İkinci aşamada ise A ve B değerlerini bulmak için $n = 1$ ve $n = 2$, genel çözüm ifadesinde yerine yazılarak,

$$F_1 = A\alpha + B\beta = 1$$

$$F_2 = A\alpha^2 + B\beta^2 = 1$$

eşitlikleri elde edilir. Denklem sistemi çözülerek α ve β değerleri yerine yazıldığında,

$$A = \frac{\alpha}{1+\alpha^2} = \frac{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

bulunur ve aynı biçimde,

$$B = \frac{\beta}{1+\beta^2} = \frac{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}{\frac{5-\sqrt{5}}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

olur. Bulunan A ve B değerleri, genel çözümde yerine yazıldığında, $\alpha - \beta = \sqrt{5}$ eşitliği de kullanılarak,

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}} = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$$

olur. Veya α ve β değerleri yerlerine yazıldığında,

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$$

çözümü elde edilir. Bu genel çözüm, aynı zamanda Binet Formülü olarak bilinir. Aynı genel çözüm, Pell sayıları için de bulunabilir. Pell bağıntısı ve başlangıç şartları,

$$P_n = 2P_{n-1} + P_{n-2}$$

$$P_0 = 0, P_1 = 1$$

yazılarak, ilk aşamada karakteristik eşitlik olan,

$$x^2 - 2x - 1 = 0$$

elde edilir ve karakteristik eşitliğin kökleri,

$$\varepsilon = 1 + \sqrt{2}, \tau = 1 - \sqrt{2}$$

olur. $P_n = A\varepsilon^n + B\tau^n$, genel çözümdür. İkinci aşamada ise, A ve B değerlerini bulmak için, $n = 0$ ve $n = 1$, genel çözüm ifadesinde yerine yazılarak,

$$P_0 = A + B = 0$$

$$P_1 = A\varepsilon + B\tau = 1$$

eşitlikleri elde edilir. Denklem sistemi çözümlenerek, ε ve τ değerleri yerlerine yazıldığında,

$$A = \frac{1}{2\sqrt{2}}, B = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

olarak bulunur. A ve B değerleri genel çözüm ifadesinde yerine yazılarak ve işlemler düzenlenerek,

$$P_n = \frac{1}{2\sqrt{2}} [(1 + \sqrt{2})^n - (1 - \sqrt{2})^n]$$

genel çözümünü elde edilir.

1.3. Fibonacci Sayıları ve Binet Formülü

Fibonacci tekrarlı bağıntısı,

$$F(n) = F(n-1) + F(n-2)$$

$$F(0) = 0, F(1) = 1$$

başlangıç şartlarıyla yazıldığında, tekrarlı bağıntıda eşitliğin her iki tarafı $F(n-1)$ ile bölünerek,

$$\frac{F(n)}{F(n-1)} = 1 + \frac{1}{\frac{F(n-1)}{F(n-2)}} \quad (1.5)$$

biçiminde yazılabilir. $n \rightarrow \infty$ şartı için, (1.5) ifadesi ikinci dereceden denkleme indirgenerek,

$$x^2 - x - 1 = 0 \quad (1.6)$$

elde edilir. (1.6) denkleminin iki tane kökü vardır,

$$x_1 = \Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \text{ (pozitif kök)}$$

$$x_2 = 1 - \Phi = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}, \text{ (negatif kök)}$$

Pozitif köke eşit olan Φ sayısı, aynı zamanda altın oran olarak adlandırılır ve (1.6) denkleminin köklerinden biri olduğundan bu denklemi sağlaması gerekir ve

$$\Phi^2 = \Phi + 1 \quad (1.7)$$

olarak yazılabilir. (1.7) denklemini kullanılıp, eşitliğin her iki tarafı Φ ile çarpılarak kuvvet artırma işlemi yapılır ve elde edilen denklemlerin katsayıları, Fibonacci sayıları kullanılarak yazılırsa,

$$\begin{aligned}\Phi^2 &= \Phi + 1 = F(2)\Phi + F(1) \\ \Phi^3 &= \Phi^2 + \Phi = \Phi + 1 + \Phi = 2\Phi + 1 = F(3)\Phi + F(2) \\ \Phi^4 &= \Phi^3 + \Phi^2 = 2\Phi + 1 + \Phi + 1 = 3\Phi + 2 = F(4)\Phi + F(3) \\ \Phi^5 &= \Phi^4 + \Phi^3 = 3\Phi + 2 + 2\Phi + 1 = 5\Phi + 3 = F(5)\Phi + F(4) \\ &\vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots\end{aligned}$$

ve n . kuvvete kadar işlem devam ettirilirse, son aşamada,

$$\Phi^n = \Phi^{n-1} + \Phi^{n-2} = F(n)\Phi + F(n-1) \quad (1.8)$$

bağıntısı elde edilir. (1.6) denkleminin diğer kökü olan $1-\Phi$ değeri de (1.8) bağıntısını sağlamalıdır;

$$(1-\Phi)^n = (1-\Phi)^{n-1} + (1-\Phi)^{n-2} = F(n)(1-\Phi) + F(n-1) \quad (1.9)$$

Şimdi, (1.8) ve (1.9) bağıntıları taraf tarafa çıkartılırsa,

$$\begin{aligned}\Phi^n &= F(n)\Phi + F(n-1) \\ -(1-\Phi)^n &= -F(n)(1-\Phi) - F(n-1) \\ \hline \Phi^n - (1-\Phi)^n &= F(n)\Phi - F(n)(1-\Phi)\end{aligned}$$

buradan da,

$$\Phi^n - (1-\Phi)^n = F(n)(2\Phi - 1)$$

olur. $F(n)$ yalnız bırakılarak işlem devam ettirilirse,

$$F(n) = \frac{\Phi^n - (1 - \Phi)^n}{(2\Phi - 1)}$$

$(2\Phi - 1) = \sqrt{5}$ olduğundan,

$$F(n) = \frac{\Phi^n - (1 - \Phi)^n}{\sqrt{5}}$$

olur. Son olarak Φ ve $(1 - \Phi)$ değerleri bağıntıda yerine yazıldığında,

$$F(n) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$$

Binet Formülü elde edilir. Daha geniş bilgi için Nalty [24] kaynağına bakınız.

BÖLÜM 2. MERTEBELİ FIBONACCI SAYILARI

2.1. m. mertebeden Genelleştirilmiş Fibonacci Sayıları

Fibonacci tekrarlı bağıntısında bilindiği gibi, her sayı kendisinden önceki iki sayının toplamına eşittir. Eğer her sayı, kendisinden önceki sayının m katıyla bir önceki sayının toplamına eşit oluyorsa, bu sayılara da m . mertebeden Fibonacci sayıları denir. F_m simgesiyle ifade edilirler ve $m \in \mathbb{R}^+$ için,

$$F_m(n+2) = mF_m(n+1) + F_m(n) \quad (2.1)$$

Gazale [4] de ifade edilen tekrarlı bağıntıyla yazılırlar. Başlangıç değerleri, Fibonacci sayılarında olduğu gibidir:

$$F_m(0) = 0, F_m(1) = 1$$

(2.1) eşitliğinde $m=1$ için Fibonacci sayıları ve $m=2$ için ise Pell sayıları için tekrarlı bağıntılar elde edilir;

$$F(n+2) = F(n+1) + F(n) \quad (\text{Fibonacci tekrarlı bağıntısı})$$

$$P(n+2) = 2P(n+1) + P(n) \quad (\text{Pell tekrarlı bağıntısı})$$

2.2. m. mertebeden Fibonacci Sayıları ve Gazale Formülleri

m . mertebeden Fibonacci tekrarlı bağıntısını ifade eden (2.1) bağıntısı kullanılarak, Stakhov [18] de ifade edildiği gibi ikinci dereceden karakteristik denklem elde edilebilir. İlk olarak, (2.1) denkleminde, eşitliğin her iki tarafı $F_m(n+1)$ ile bölünürse;

$$\frac{F_m(n+2)}{F_m(n+1)} = m + \frac{1}{\frac{F_m(n+1)}{F_m(n)}} \quad (2.2)$$

ifadesi bulunur. $n \rightarrow \infty$ şartı için (2.2) eşitliği ikinci dereceden bir denkleme indirgenerek,

$$x^2 - mx - 1 = 0 \quad (2.3)$$

karakteristik denklemini elde edilir. (2.3) denkleminin,

$$x_1 = \frac{m + \sqrt{m^2 + 4}}{2}, \quad (\text{pozitif kök})$$

$$x_2 = \frac{m - \sqrt{m^2 + 4}}{2}, \quad (\text{negatif kök})$$

olmak üzere iki kökü vardır. (2.3) denkleminin kökleri arasında var olan birkaç özellik, ileride kullanılmak üzere yazılırsa,

$$x_1 + x_2 = m, \quad x_1 x_2 = -1, \quad x_1 - x_2 = \sqrt{m^2 + 4}$$

olur. (2.3) denkleminin pozitif kökü olan x_1 , aynı zamanda m. mertebeden altın oran olarak adlandırılır ve Φ_m simgesiyle gösterilir. Bu durumda,

$$x_1 = \Phi_m, \quad x_2 = \frac{-1}{\Phi_m}$$

olacaktır. Φ_m kullanılarak birkaç bağıntı elde edilebilir. (2.3) denkleminde x yerine Φ_m yazılırsa,

$$\Phi_m^2 = 1 + m\Phi_m \quad (2.4)$$

biçiminde olur. (2.4) eşitliğinde, her iki tarafının kökü alınarak ve ortaya çıkan Φ_m değerlerinin yerine köklü eşiti yazılarak işleme devam edildiğinde,

$$\begin{aligned}\Phi_m &= \sqrt{1 + m\Phi_m} \\ \Phi_m &= \sqrt{1 + m\sqrt{1 + m\Phi_m}} \\ \Phi_m &= \sqrt{1 + m\sqrt{1 + m\sqrt{1 + m\Phi_m}}} \\ &\vdots \\ \Phi_m &= \sqrt{1 + m\sqrt{1 + m\sqrt{1 + m\sqrt{1 + \dots}}}}\end{aligned}$$

sonsuz giden bir köklü ifade bulunur. Aynı şekilde (2.4) eşitliğinden,

$$\Phi_m = m + \frac{1}{\Phi_m} \quad (2.5)$$

eşitliği yazılabilir. (2.5) eşitliğinde, paydada ortaya çıkan Φ_m değerlerinin yerine, m türünden eşitleri yazılarak ve bu işleme devam edilerek,

$$\Phi_m = m + \frac{1}{m + \frac{1}{m + \frac{1}{m + \frac{1}{\ddots}}}}$$

sürekli kesir ifadesi elde edilir. Görüldüğü gibi, m . mertebeden altın oran olan Φ_m , m cinsinden farklı bağıntılarla ifade edilebilir. Φ_m kullanılarak, $F_m(n)$ tekrarlı bağıntısının x_1 ve x_2 cinsinden genel çözümü bulunabilir. Bunun için sabit katsayılı genel çözüm ifadesi, $k_1, k_2 \in R$ olmak üzere,

$$F_m(n) = k_1 x_1^n + k_2 x_2^n \quad (2.6)$$

biçiminde yazılabilir. Burada kullanılan k_1 ve k_2 sayılarının, başlangıç koşulları olan $F_m(0) = 0, F_m(1) = 1$ için de geçerli olması gerekir. Bu değerler kullanılarak k_1 ve k_2 sayılarının bulunabilmesi için,

$$F_m(0) = k_1 x_1^0 + k_2 x_2^0 = k_1 + k_2 = 0 \quad ,$$

$$F_m(1) = k_1 x_1^1 + k_2 x_2^1 = k_1 \Phi_m - k_2 \frac{1}{\Phi_m} = 1$$

yazılır. Bu eşitlikler düzenlendiğinde,

$$k_1 = -k_2 \text{ ve } k_1 \Phi_m + k_1 \frac{1}{\Phi_m} = k_1 \left(\Phi_m + \frac{1}{\Phi_m} \right) \text{ olur.}$$

$$\left(\Phi_m + \frac{1}{\Phi_m} \right) = x_1 - x_2 = \sqrt{m^2 + 4}$$

olduğundan,

$$k_1 = \frac{1}{\sqrt{m^2 + 4}}, \quad k_2 = \frac{-1}{\sqrt{m^2 + 4}}$$

biçiminde yazılır. Bulunan k_1 ve k_2 değerleri, (2.6) denkleminde yerine yazıldığında;

$$F_m(n) = \frac{1}{\sqrt{m^2 + 4}} x_1^n - \frac{1}{\sqrt{m^2 + 4}} x_2^n$$

olur. x_1 ve x_2 değerleri yerlerine yazıldığında;

$$F_m(n) = \frac{1}{\sqrt{m^2 + 4}} \left[\left(\frac{m + \sqrt{m^2 + 4}}{2} \right)^n - \left(\frac{m - \sqrt{m^2 + 4}}{2} \right)^n \right] \quad (2.7)$$

veya m. mertebeden altın oran olan Φ_m kullanılarak,

$$F_m(n) = \frac{1}{\sqrt{m^2 + 4}} [(\Phi_m)^n - (\frac{-1}{\Phi_m})^n]$$

$$F_m(n) = \frac{(\Phi_m)^n - (-1)^n (\Phi_m)^{-n}}{\sqrt{m^2 + 4}}$$

biçiminde yazılabilir. m. mertebeden genel Fibonacci bağıntısı (2.7), Gazale formülü olarak adlandırılır. Gazale formülünde, m=1 için işlem yapıldığında, Binet Formülü;

$$F(n) = \frac{1}{\sqrt{5}} [(\Phi)^n - (\frac{-1}{\Phi})^n]$$

elde edilir. Tablo 2.1 de görüldüğü gibi, farklı mertebelere göre farklı değerler ve oranlar bulunabilir.

Tablo 2.1 m. mertebeden farklı değerler ve oranlar

m/n	Φ_m	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
1	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	5	-3	2	-1	1	0	1	1	2	3	5
2	$1+\sqrt{2}$	29	-12	5	-2	1	0	1	2	5	12	29
$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}+\sqrt{7}}{2}$	19	$-5\sqrt{3}$	4	$-\sqrt{3}$	1	0	1	$\sqrt{3}$	4	$5\sqrt{3}$	19
$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\sqrt{2}$	4	$-\frac{5\sqrt{2}}{2}$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	0	1	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5\sqrt{2}}{2}$	4

Fibonacci sayılarına benzer şekilde m. mertebeden Fibonacci sayıları için,

$$F_m(n) = (-1)^{n+1} F_m(-n)$$

eşitliği geçerlidir. Örneğin $m=2$ ve $n=2$ için,

$$F_2(2) = (-1)^3 F_2(-2) = 2$$

olur. Daha ayrıntılı bilgi için Olsen [23] ve Vera [5] kaynaklarına bakılabilir.

2.3. -m. mertebeden Fibonacci Sayıları ve Gazale Formülleri

(-m). mertebeden Fibonacci sayılarını bulmak için yeni bir tekrarlı bağıntı oluşturulur ve bu sayılar pozitif mertebelilerden farklı olarak F_{-m} simgesiyle ifade edilirse, $m \in R^+$ için,

$$F_{-m}(n+2) = (-m)F_{-m}(n+1) + F_{-m}(n) \quad (2.8)$$

biçiminde yazılabilir. Başlangıç değerleri, Fibonacci sayılarında olduğu gibidir,

$$F_{-m}(0) = 0, F_{-m}(1) = 1$$

(2.8) tekrarlı bağıntısının her iki tarafı $F_{-m}(n+1)$ ile bölüldüğünde,

$$\frac{F_{-m}(n+2)}{F_{-m}(n+1)} = (-m) + \frac{1}{\frac{F_{-m}(n+1)}{F_{-m}(n)}}$$

olarak yazılabilir. $n \rightarrow \infty$ için $\frac{F_{-m}(n+2)}{F_{-m}(n+1)} = x$ alınırsa, yukarıdaki (2.8) eşitliği,

$$x = (-m) + \frac{1}{x}$$

olur. Eşitliğin her iki tarafı x ile çarpılıp düzenlendiğinde,

$$x^2 + mx - 1 = 0 \quad (2.9)$$

ikinci dereceden denklemi elde edilir. Bu denklemin,

$$x_1 = \frac{-m + \sqrt{m^2 + 4}}{2} = -\left(\frac{m - \sqrt{m^2 + 4}}{2}\right), \text{ (pozitif kök)}$$

$$x_2 = \frac{-m - \sqrt{m^2 + 4}}{2} = -\left(\frac{m + \sqrt{m^2 + 4}}{2}\right), \text{ (negatif kök)}$$

olmak üzere iki kökü vardır. (2.9) denkleminin kökleri arasında,

$$x_1 + x_2 = -m, \quad x_1 x_2 = -1$$

eşitlikleri vardır. (2.9) ikinci dereceden denkleminin kökleri olan x_1 ve x_2 , altın oran yani Φ_m cinsinden yazılırsa,

$$x_1 = -\left(\frac{m - \sqrt{m^2 + 4}}{2}\right) = \frac{1}{\Phi_m},$$

$$x_2 = -\left(\frac{m + \sqrt{m^2 + 4}}{2}\right) = -\Phi_m$$

olur. Şimdi x_1 ve x_2 kökleri için genelleştirilmiş çözüm ifadesine bakılırsa, $k_1, k_2 \in R$ için,

$$F_{-m}(n) = k_1 x_1^n + k_2 x_2^n \tag{2.10}$$

olarak yazılabilir. (2.10) bağıntısında kullanılan k_1 ve k_2 sabit sayılarının, başlangıç koşulları olan, $F_{-m}(0) = 0, F_{-m}(1) = 1$ için de geçerli olması gerekir. Bu değerler kullanılarak k_1 ve k_2 sayıları bulunabilir,

$$F_{-m}(0) = k_1 x_1^0 + k_2 x_2^0 = k_1 + k_2 = 0,$$

$$F_{-m}(1) = k_1 x_1^1 + k_2 x_2^1 = k_1 \frac{1}{\Phi_m} + k_2 (-\Phi_m) = 1$$

Bu eşitlikler düzenlediğinde,

$$k_1 = -k_2,$$

$$k_1 \frac{1}{\Phi_m} + k_1 \Phi_m = k_1 \left(\Phi_m + \frac{1}{\Phi_m} \right) = 1$$

olur. $(\Phi_m + \frac{1}{\Phi_m})$ ifadesi kullanılarak k_1 ve k_2 sayıları m cinsinden bulunduğunda,

$$\left(\Phi_m + \frac{1}{\Phi_m} \right) = x_1 - x_2 = \frac{-m + \sqrt{m^2 + 4}}{2} - \frac{(-m - \sqrt{m^2 + 4})}{2} = \sqrt{m^2 + 4}$$

olur ve buradan da,

$$k_1 = \frac{1}{\sqrt{m^2 + 4}}, k_2 = -\frac{1}{\sqrt{m^2 + 4}}$$

elde edilir. Son aşamada, bulunan k_1 ve k_2 değerleri, (2.10) da yazıldığında,

$$F_{-m}(n) = \frac{1}{\sqrt{m^2 + 4}} x_1^n - \frac{1}{\sqrt{m^2 + 4}} x_2^n,$$

$$F_{-m}(n) = \frac{1}{\sqrt{m^2 + 4}} (x_1^n - x_2^n) \quad (2.11)$$

olur. x_1 ve x_2 değerleri (2.11) ifadesinde yazıldığında,

$$F_{-m}(n) = \frac{1}{\sqrt{m^2 + 4}} \left[\left(\frac{-m + \sqrt{m^2 + 4}}{2} \right)^n - \left(\frac{-m - \sqrt{m^2 + 4}}{2} \right)^n \right] \quad (2.12)$$

biçiminde $(-m)$. mertebeden Fibonacci sayıları için Gazale formülü bulunur. Eğer (2.11) bağıntısında, x_1 ve x_2 değerlerinin yerine, Φ_m cinsinden değerleri yazılırsa,

$$F_{-m}(n) = \frac{1}{\sqrt{m^2 + 4}} \left[\left(\frac{1}{\Phi_m} \right)^n - (-\Phi_m)^n \right]$$

olup, gerekli düzenlemeler yapıldığında,

$$F_{-m}(n) = -\frac{1}{\sqrt{m^2 + 4}} [(-\Phi_m)^n - (\frac{1}{\Phi_m})^n]$$

$$F_{-m}(n) = -\frac{(-1)^n \Phi_m^n - \Phi_m^{-n}}{\sqrt{m^2 + 4}}$$

elde edilir. $(-m)$. mertebeden Fibonacci sayıları ve $(-m)$. mertebeden Gazale formülü karşılaştırılırsa, (2.8) tekrarlı bağıntısında $m = 1$ için eşitlik,

$$F_{-1}(n+2) = (-1)F_{-1}(n+1) + F_{-1}(n)$$

$$F_{-1}(0) = 0, F_{-1}(1) = 1$$

olur. $n = 0$ değeri kullanıldığında,

$$F_{-1}(2) = (-1)F_{-1}(1) + F_{-1}(0) = -1$$

bulunur. Bu defa $m = 1$ ve $n = 0$ değerleri, bulunan $(-m)$. mertebeden Gazale formülünde yerine yazıldığında,

$$F_{-1}(2) = \frac{(-1)^{2+1}}{\sqrt{m^2 + 4}} [(\frac{\sqrt{5} + 1}{2})^2 - (\frac{2}{-1 - \sqrt{5}})^2]$$

$$F_{-1}(2) = \frac{(-1)}{\sqrt{5}} [(\frac{6 + 2\sqrt{5}}{4}) - (\frac{6 - 2\sqrt{5}}{4})]$$

$$F_{-1}(2) = \frac{(-1)}{\sqrt{5}} [(\frac{4\sqrt{5}}{4})] = -1$$

bulunur. Görüldüğü gibi her iki bağıntıyla da aynı sonuçlar bulunmuş olur.

Teorem 2.3.1 : $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{-m}(n+2)}{F_{-m}(n+1)} = -\Phi_m$ dir.

İspat:

$$F_{-m}(n+2) = -\frac{(-1)^{n+2} \Phi_m^{n+2} - \Phi_m^{-n-2}}{\sqrt{m^2 + 4}},$$

$$F_{-m}(n+1) = -\frac{(-1)^{n+1} \Phi_m^{n+1} - \Phi_m^{-n-1}}{\sqrt{m^2 + 4}} \text{ olduğundan,}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{-m}(n+2)}{F_{-m}(n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^{n+2} \Phi_m^{n+2} - \Phi_m^{-n-2}}{(-1)^{n+1} \Phi_m^{n+1} - \Phi_m^{-n-1}}$$

biçiminde yazılabilir. İşlem yapıldığında,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{-m}(n+2)}{F_{-m}(n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^{n+2} \Phi_m^{n+2} - \frac{1}{\Phi_m^{n+2}}}{(-1)^{n+1} \Phi_m^{n+1} - \frac{1}{\Phi_m^{n+1}}}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{-m}(n+2)}{F_{-m}(n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1) \Phi_m^2}{\Phi_m^1} = -\Phi_m$$

eşitliği elde edilir.

Tanım 2.3.1: -m. mertebeden altın oran, Φ_{-m} olarak ifade edildiğinde,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{-m}(n+2)}{F_{-m}(n+1)} = -\Phi_m \text{ olduğundan dolayı,}$$

$$\Phi_{-m} = -\Phi_m$$

eşitliği vardır. -m. mertebeden genel çözümle ilgili birkaç değer ve eşitlik, Tablo 2.2 de gösterilmiştir.

Tablo 2.2 $-m$. mertebeden farklı değerler ve oranlar

$-m/n$	Φ_{-m}	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
1	$\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$	5	3	2	1	1	0	1	-1	2	-3	5
2	$-\sqrt{2}-1$	29	12	5	2	1	0	1	-2	5	-12	29
$\sqrt{3}$	$\frac{-\sqrt{3}-\sqrt{7}}{2}$	19	$5\sqrt{3}$	4	$\sqrt{3}$	1	0	1	$-\sqrt{3}$	4	$-5\sqrt{3}$	19
$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\sqrt{2}$	4	$\frac{5\sqrt{2}}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	0	1	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{5\sqrt{2}}{2}$	4

Teorem 2.3.2 : $F_{-m}(n) = (-1)^{n+1} F_{-m}(-n)$ dir.

İspat: $F_{-m}(-n) = -\frac{(-1)^{-n} \Phi_m^{-n} - \Phi_m^n}{\sqrt{m^2 + 4}}$ olduğundan,

$$(-1)^{n+1} F_{-m}(-n) = -\frac{(-1)^1 \Phi_m^{-n} - (-1)^{n+1} \Phi_m^n}{\sqrt{m^2 + 4}}$$

$$(-1)^{n+1} F_{-m}(-n) = -\frac{(-1)^n \Phi_m^n - \Phi_m^{-n}}{\sqrt{m^2 + 4}} = F_{-m}(n)$$

eşitliği elde edilir.

Örnek 2.3.2 : $m=2$ ve $n=3$ için $F_{-m}(n) = (-1)^{n+1} F_{-m}(-n)$ eşitliği incelendiğinde,

$$F_{-2}(3) = (-1)^4 F_{-2}(-3) = 5 \text{ olur.}$$

Teorem 2.3.3: $F_{-m}(-n) = F_m(n)$ dir.

İspat: $F_{-m}(n) = -\frac{(-1)^n \Phi_m^n - \Phi_m^{-n}}{\sqrt{m^2 + 4}}$ olduğundan,

$$F_{-m}(-n) = -\frac{(-1)^{-n} \Phi_m^{-n} - \Phi_m^n}{\sqrt{m^2 + 4}}$$

$$F_{-m}(-n) = \frac{\Phi_m^n - (-1)^{-n} \Phi_m^{-n}}{\sqrt{m^2 + 4}}$$

eşitlikte pay $(-1)^{2n}$ ile çarpılırsa,

$$F_{-m}(-n) = \frac{\Phi_m^n - (-1)^n \Phi_m^{-n}}{\sqrt{m^2 + 4}}$$

elde edilir. Buradan da,

$$F_{-m}(-n) = \frac{\Phi_m^n - (-1)^n \Phi_m^{-n}}{\sqrt{m^2 + 4}} = F_m(n)$$

eşitliği bulunur.

Örnek 2.3.3: $m = 2$ ve $n = 3$ için, $F_{-m}(-n) = F_m(n)$ eşitliği incelendiğinde,

$$F_{-2}(-3) = F_2(3) = 5 \text{ olur.}$$

2.4. $\sqrt{-m}$. mertebeden Fibonacci Sayıları ve Gazale Formülleri

$\sqrt{-m}$. mertebeden tekrarlı bağıntıyı oluşturabilmek için m . mertebeden tekrarlı bağıntılarda kullanılan gösterim uygulanabilir. Bu sayılar $F_{\sqrt{-m}}$ simgesiyle ifade edilirse, $m \in \mathbb{Z}^+$ için,

$$F_{\sqrt{-m}}(n+2) = \sqrt{-m} F_{\sqrt{-m}}(n+1) + F_{\sqrt{-m}}(n)$$

$$(2.13) F_{\sqrt{-m}}(0) = 0, F_{\sqrt{-m}}(1) = 1$$

biçiminde oluşturulabilir. Eşitliğin her iki tarafı $F_{\sqrt{-m}}(n+1)$ ile bölüldüğünde ve düzenleme yapıldığında,

$$\frac{F_{\sqrt{-m}}(n+2)}{F_{\sqrt{-m}}(n+1)} = \sqrt{-m} + \frac{1}{\frac{F_{\sqrt{-m}}(n+1)}{F_{\sqrt{-m}}(n)}} \quad (2.14)$$

elde edilir. $m > 4$ ve $n \rightarrow \infty$ için, $\frac{F_{\sqrt{-m}}(n+2)}{F_{\sqrt{-m}}(n+1)} = x$ alındığında, (2.14) eşitliği yardımıyla,

$$x^2 - \sqrt{-m}x - 1 = 0 \quad (2.15)$$

ikinci dereceden karakteristik denklemi elde edilir. Bu denklemin:

$$x_1 = \frac{\sqrt{-m} + \sqrt{-m+4}}{2} = \frac{\sqrt{mi} + \sqrt{m-4}i}{2} = \frac{i(\sqrt{m} + \sqrt{m-4})}{2},$$

$$x_2 = \frac{\sqrt{-m} - \sqrt{-m+4}}{2} = \frac{\sqrt{mi} - \sqrt{m-4}i}{2} = \frac{i(\sqrt{m} - \sqrt{m-4})}{2}$$

olmak üzere iki tane karmaşık kökü vardır. (2.15) denkleminin kökleri arasında,

$$x_1 x_2 = -1, x_1 + x_2 = \sqrt{-m}$$

eşitlikleri geçerlidir. Ayrıca, elde edilen x_1 ve x_2 kökleri için, $\sqrt{-m}$ mertebeye göre altın oran, Teorem 2.4.1 den dolayı $\Phi_{\sqrt{-m}}$ biçiminde tanımlanarak,

$$x_1 = \Phi_{\sqrt{-m}}, x_2 = \frac{-1}{\Phi_{\sqrt{-m}}}$$

yazılabilir. $\Phi_{\sqrt{-m}}$ ifadesi aynı zamanda (2.15) denkleminin köklerinden biri olduğundan ve

$$\Phi_{\sqrt{-m}}^2 = \sqrt{-m}\Phi_{\sqrt{-m}} + 1 \quad (2.16)$$

yazılarak eşitliğin her iki tarafının karekökü alınıp, $\Phi_{\sqrt{-m}}$ yerine yazıldığında,

$$\Phi_{\sqrt{-m}} = \sqrt{1 + \sqrt{-m}\Phi_{\sqrt{-m}}}$$

$$\Phi_{\sqrt{-m}} = \sqrt{1 + \sqrt{-m}\sqrt{1 + \sqrt{-m}\Phi_{\sqrt{-m}}}}$$

$$\Phi_{\sqrt{-m}} = \sqrt{1 + \sqrt{-m}\sqrt{1 + \sqrt{-m}\sqrt{1 + \sqrt{-m}\dots}}}$$

biçiminde, sonsuza giden bir köklü ifade elde edilebilir. Bu defa yine (2.16) eşitliği kullanılarak,

$$\Phi_{\sqrt{-m}} = \sqrt{-m} + \frac{1}{\Phi_{\sqrt{-m}}}$$

bağıntısı yardımıyla, aynı şekilde paydada elde edilen her $\Phi_{\sqrt{-m}}$ yerine yazıldığında,

$$\Phi_{\sqrt{-m}} = \sqrt{-m} + \frac{1}{\sqrt{-m} + \frac{1}{\Phi_{\sqrt{-m}}}}$$

$$\Phi_{\sqrt{-m}} = \sqrt{-m} + \frac{1}{\sqrt{-m} + \frac{1}{\sqrt{-m} + \frac{1}{\ddots}}}$$

gibi sonsuza giden bir sürekli kesir elde edilir. x_1 ve x_2 kökleri için genel çözüm bulunmak istenirse, $k_1, k_2 \in C$ olmak üzere,

$$F_{\sqrt{-m}}(n) = k_1 x_1^n + k_2 x_2^n \quad (2.17)$$

olarak yazılabilir. (2.17) de kullanılan k_1, k_2 sayılarının başlangıç koşulları olan $F_{\sqrt{-m}}(0) = 0, F_{\sqrt{-m}}(1) = 1$ için de geçerli olması gerekir. Bu değerler kullanılarak k_1, k_2 sayıları bulunabilir:

$$F_{\sqrt{-m}}(0) = k_1 x_1^0 + k_2 x_2^0 = k_1 + k_2 = 0$$

$$F_{\sqrt{-m}}(1) = k_1 x_1^1 + k_2 x_2^1 = k_1 x_1 + k_2 x_2 = 1$$

Bu eşitlikler kullanılarak,

$$k_1(x_1 - x_2) = 1$$

$$k_1 \left(\frac{i(\sqrt{m} + \sqrt{m-4})}{2} - \frac{i(\sqrt{m} - \sqrt{m-4})}{2} \right) = k_1(\sqrt{m-4}i) = 1$$

olup $m \neq 4$ için tanımlı,

$$k_1 = \frac{1}{\sqrt{m-4}i}, \quad k_2 = -\frac{1}{\sqrt{m-4}i}$$

elde edilir. Son olarak bulunan k_1 ve k_2 değerleri, (2.17) de yerine yazıldığında,

$$F_{\sqrt{-m}}(n) = \frac{1}{\sqrt{m-4}i} (x_1^n - x_2^n)$$

$$F_{\sqrt{-m}}(n) = \frac{1}{\sqrt{m-4}i} \left[\left(\frac{i(\sqrt{m} + \sqrt{m-4})}{2} \right)^n - \left(\frac{i(\sqrt{m} - \sqrt{m-4})}{2} \right)^n \right] \quad (2.18)$$

$\sqrt{-m}$. mertebeden karmaşık sayı mertebeli Gazale formülü bulunur. $\Phi_{\sqrt{-m}}$ cinsinden eşitlik yazıldığında;

$$F_{\sqrt{-m}}(n) = \frac{1}{\sqrt{m-4}i} \left[(\Phi_{\sqrt{-m}})^n - \left(\frac{-1}{\Phi_{\sqrt{-m}}} \right)^n \right]$$

$$F_{\sqrt{-m}}(n) = \frac{\Phi_{\sqrt{-m}}^n - (-1)^n \Phi_{\sqrt{-m}}^{-n}}{\sqrt{m-4}i}$$

olur. $\sqrt{-m}$. mertebeden tekrarlı bağıntı (2.15) ve elde edilen karmaşık sayı mertebeli Gazale formülü (2.18), ayrı ayrı kullanılarak karşılaştırma yapıldığında;

$$F_{\sqrt{-m}}(n+2) = \sqrt{-m}F_{\sqrt{-m}}(n+1) + F_{\sqrt{-m}}(n)$$

$$F_{\sqrt{-m}}(0) = 0, F_{\sqrt{-m}}(1) = 1$$

tekrarlı bağıntısı, $m = 2$ ve $n = 2$ için hesaplandığında,

$$F_{\sqrt{-2}}(2) = \sqrt{-2}F_{\sqrt{-2}}(1) + F_{\sqrt{-2}}(0)$$

$$F_{\sqrt{-2}}(2) = \sqrt{-2}.1 + 0 = \sqrt{2}i$$

olur. Bu defa $m = 2$ ve $n = 2$ şartları, karmaşık sayı mertebeli Gazale formülü (2.18) de yerine yazıldığında;

$$F_{\sqrt{-2}}(2) = \frac{1}{\sqrt{2-4i}} \left[\left(\frac{i(\sqrt{2} + \sqrt{-2})}{2} \right)^2 - \left(\frac{i(\sqrt{2} - \sqrt{-2})}{2} \right)^2 \right]$$

$$F_{\sqrt{-2}}(2) = \frac{i^2}{\sqrt{2-4i}} \left[\left(\frac{(\sqrt{2} + \sqrt{-2})}{2} \right)^2 - \left(\frac{(\sqrt{2} - \sqrt{-2})}{2} \right)^2 \right]$$

$$F_{\sqrt{-2}}(2) = \frac{i}{\sqrt{2-4i}} \left[\left(\frac{(\sqrt{2} + \sqrt{-2})}{2} \right)^2 - \left(\frac{(\sqrt{2} - \sqrt{-2})}{2} \right)^2 \right]$$

$$F_{\sqrt{-2}}(2) = \frac{i}{\sqrt{2}i} \left(\frac{2+4i-2}{2} - \frac{2-4i-2}{2} \right)$$

$$F_{\sqrt{-2}}(2) = \sqrt{2}i$$

bulunur. Görüldüğü gibi her iki bağıntıyla da aynı sonuç bulunabilir.

Teorem 2.4.1: $m > 4$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{\sqrt{-m}}(n+2)}{F_{\sqrt{-m}}(n+1)} = \Phi_{\sqrt{-m}}$ dir.

İspat:

$$F_{\sqrt{-m}}(n+2) = \frac{\Phi_{\sqrt{-m}}^{n+2} - (-1)^{n+2} \Phi_{\sqrt{-m}}^{-n-2}}{\sqrt{m-4i}},$$

$$F_{\sqrt{-m}}(n+1) = \frac{\Phi_{\sqrt{-m}}^{n+1} - (-1)^{n+1} \Phi_{\sqrt{-m}}^{-n-1}}{\sqrt{m-4i}} \text{ olduğundan,}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{\sqrt{-m}}(n+2)}{F_{\sqrt{-m}}(n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Phi_{\sqrt{-m}}^{n+2} - (-1)^{n+2} \Phi_{\sqrt{-m}}^{-n-2}}{\Phi_{\sqrt{-m}}^{n+1} - (-1)^{n+1} \Phi_{\sqrt{-m}}^{-n-1}}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{\sqrt{-m}}(n+2)}{F_{\sqrt{-m}}(n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Phi_{\sqrt{-m}}^2}{\Phi_{\sqrt{-m}}^1} = \Phi_{\sqrt{-m}}$$

eşitliği elde edilir. (2.18) eşitliğinde farklı mertebeye değerleri için Tablo 2.3 de gösterildiği gibi farklı değerler elde edilebilir. Tabloya dikkat edilirse yaklaşım yapılırken, $m > 4$ şartına dikkat edilmelidir. Çünkü, $n \rightarrow \infty$ yaklaşımı yapılırken 4 den küçük bazı pozitif tamsayı değerleri için 0 değerleri elde edildiğinden dolayı tanımsızlık ortaya çıkmaktadır.

Tablo 2.3 $\sqrt{-m}$. mertebeden Fibonacci farklı değerleri ve oranları

$\sqrt{-m}/n$	$\Phi_{\sqrt{-m}}$	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
1	$\frac{i+\sqrt{3}}{2}$	-1	-i	0	-i	1	0	1	i	0	i	-1
2	$\frac{\sqrt{2i}+\sqrt{2}}{2}$	-1	0	-1	$-\sqrt{2i}$	1	0	1	$\sqrt{2i}$	-1	0	-1
3	$\frac{\sqrt{3i}+1}{2}$	1	$\sqrt{3i}$	-2	$-\sqrt{3i}$	1	0	1	$\sqrt{3i}$	-2	$-\sqrt{3i}$	1
6	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$	19	$-4\sqrt{6}i$	-5	$-\sqrt{6}i$	1	0	1	$\sqrt{6}i$	-5	$-4\sqrt{6}i$	19

Teorem 2.4.2: $F_{\sqrt{-m}}(n) = (-1)^{n+1} F_{\sqrt{-m}}(-n)$

İspat: $F_{\sqrt{-m}}(-n) = \frac{\Phi_{\sqrt{-m}}^{-n} - (-1)^{-n} \Phi_{\sqrt{-m}}^n}{\sqrt{m-4i}}$ eşitliğinin her iki tarafı $(-1)^{n+1}$ ile çarpılırsa,

$$(-1)^{n+1} F_{\sqrt{-m}}(-n) = \frac{(-1)^{n+1} \Phi_{\sqrt{-m}}^{-n} - (-1) \Phi_{\sqrt{-m}}^n}{\sqrt{m-4i}}$$

$$(-1)^{n+1} F_{\sqrt{-m}}(-n) = \frac{\Phi_{\sqrt{-m}}^n - (-1)^n \Phi_{\sqrt{-m}}^{-n}}{\sqrt{m-4i}} = F_{\sqrt{-m}}(n)$$

eşitliği elde edilir.

Örnek 2.4.2: $m=2$ ve $n=3$ için, $F_{\sqrt{-m}}(n) = (-1)^{n+1} F_{\sqrt{-m}}(-n)$ eşitliği incelendiğinde Tablo 2.3 den de görüleceği gibi,

$$F_{\sqrt{-2}}(3) = (-1)^4 F_{\sqrt{-2}}(-3) = -1 \text{ olur.}$$

BÖLÜM 3. LUCAS SAYILARI

3.1. Lucas Sayıları ve Tekrarlı Bağıntılar

Lucas sayıları, Fibonacci sayılarıyla benzer özelliklere sahiptir. Bir Lucas dizisinde de her bir terim kendisinden önceki iki terimin toplamına eşittir ve bu dizinin her terimi bir Lucas sayısıdır. Lucas sayı dizisinin n .elemanı L_n ile gösterilir ve başlangıç şartlarıyla birlikte Lucas sayı dizisi $n \in Z$ için,

$$L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$$

$$L_0 = 2, L_1 = 1$$

biçiminde ifade edilir. Görüldüğü gibi, Lucas sayı dizisinin Fibonacci sayı dizisinden farklılığı, $n = 0$ için alınan başlangıç değerinden kaynaklanmaktadır. Başlangıç değerinin farklı olması, iki dizideki terimlerin farklılaşması sonucunu doğurmaktadır. Dolayısıyla, Fibonacci ve Lucas sayıları, $n = 1$ için hariç, alınan tüm n değerleri için farklıdır. İlk 11 n değeri için Lucas sayıları yazıldığında şu tablo oluşacaktır:

Tablo 3.1 Lucas Sayıları

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
L_n	2	1	3	4	7	11	18	29	47	76	123
L_{-n}	2	-1	3	-4	7	-11	18	-29	47	-76	123

Tabloya dikkat edildiğinde pozitif ve negatif indisli Lucas sayıları arasındaki bağıntı görülebilir. Çift indisli L_n ve L_{-n} Lucas sayıları eşittir. Bu eşitlik,

$$L_n = (-1)L_{-n}$$

biçiminde ifade edilir. Örneğin $n=2$ için,

$$L_2 = (-1)^2 L_{-2} = 3$$

olur. Lucas sayılarında da her bir terim kendinden önceki iki terimin toplamı olduğundan ve bir sonraki işlemin içinde tekrar kullanıldığından, başlangıç şartlarıyla birlikte $n \in \mathbb{Z}$ için,

$$L(n) = L(n-1) + L(n-2)$$

$$L(0) = 2, L(1) = 1$$

biçiminde bir tekrarlı bağıntı yazılabilir. Bu tekrarlı bağıntı Lucas tekrarlı bağıntısı olarak adlandırılır.

3.2. Lucas Sayıları ve Binet Formülü

Lucas sayıları, Fibonacci sayılarıyla benzer özelliklere sahiptir. Tekrarlı bağıntı olarak düşünüldüğünde, daha önce değinildiği gibi aralarındaki tek fark başlangıç şartlarıdır. Lucas sayıları,

$$L(n+2) = L(n+1) + L(n)$$

$$L(0) = 2, L(1) = 1 \tag{3.1}$$

biçiminde bir tekrarlı bağıntıyla ifade edilir. (3.1) bağıntısında, eşitliğin her iki tarafı $L(n+1)$ ile bölüldüğünde,

$$\frac{L(n+2)}{L(n+1)} = 1 + \frac{1}{L(n)} \tag{3.2}$$

olur. $n \rightarrow \infty$ şartı için, (3.2) ifadesi ikinci dereceden denkleme indirgenerek,

$$x^2 - x - 1 = 0 \quad (3.3)$$

elde edilir. (3.3) denkleminin iki tane kökü vardır:

$$x_1 = \Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \text{ (pozitif kök)}$$

$$x_2 = 1 - \Phi = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}, \text{ (negatif kök)}$$

(3.3) bağıntısının x_1 ve x_2 cinsinden genel çözümünün bulunabilmesi için $L(n)$, $k_1, k_2 \in R$ için,

$$L(n) = k_1 x_1^n + k_2 x_2^n \quad (3.4)$$

biçiminde ifade edilir. Çözüm için k_1 ve k_2 değerlerinin bulunması gerekir. Bunun içinde, başlangıç değerleri kullanılırsa,

$$L(0) = k_1 x_1^0 + k_2 x_2^0 = k_1 + k_2 = 2$$

$$L(1) = k_1 x_1^1 + k_2 x_2^1 = k_1 x_1 + (2 - k_1) x_2 = 1$$

işlemleri yapıp, x_1 ve x_2 değerleri yerine yazıldığında;

$$k_1(x_1 - x_2) + 2x_1 = 1$$

$$k_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} - \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right) + 2 \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1$$

$$k_1 = k_2 = 1$$

eşitlikleri elde edilir. (3.4) denkleminde, bulunan k_1 ve k_2 değerleri yerine yazılırsa,

$$L(n) = x_1^n + x_2^n$$

olur. x_1 ve x_2 değerleri yerine yazılırsa Lucas sayıları için Binet formülü olan,

$$L(n) = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

bağıntısı elde edilir.

BÖLÜM 4. MERTEBELİ LUCAS SAYILARI

4.1. m. mertebeden Lucas sayıları ve Gazale Formülleri

Fibonacci Sayılarında olduğu gibi, Lucas sayıları içinde m. mertebeden tekrarlı bağıntı oluşturulabilir, $m \in \mathbb{R}^+$ için,

$$L_m(n+2) = mL_m(n+1) + L_m(n) \quad (4.1)$$

Gazale [4] de belirtilen tekrarlı bağıntısıyla yazılırlar. Başlangıç değerleri,

$$L_m(0) = 2, L_m(1) = m$$

olup, m. mertebeden Fibonacci sayılarında uygulanan genel çözüm bulma yöntemleri Lucas sayılarında da uygulanabilir. İlk olarak (4.1) tekrarlı bağıntısında denklemin her iki tarafı da $L_m(n+1)$ ile bölünür ve (4.2) de olduğu gibi düzenlenirse,

$$\frac{L_m(n+2)}{L_m(n+1)} = 1 + \frac{1}{\frac{L_m(n+1)}{L_m(n)}} \quad (4.2)$$

bağıntısı elde edilir. $n \rightarrow \infty$ şartı için, (4.2) ifadesi ikinci dereceden denkleme indirgenerek,

$$x^2 - mx - 1 = 0 \quad (4.3)$$

elde edilir, bu denklemin

$$x_1 = \frac{m + \sqrt{m^2 + 4}}{2}, \quad (\text{pozitif kök})$$

$$x_2 = \frac{m - \sqrt{m^2 + 4}}{2}, \quad (\text{negatif kök})$$

olmak üzere iki kökü vardır. Fibonacci sayılarında olduğu gibi x_1 ve x_2 kökleri m . mertebeden altın oran olan Φ_m cinsinden,

$$x_1 = \Phi_m, \quad x_2 = \frac{-1}{\Phi_m}$$

biçiminde yazılırlar. (4.3) denkleminin kökleri arasında var olan birkaç özellik, ileride kullanılmak üzere yazılırsa,

$$x_1 + x_2 = m, \quad x_1 x_2 = -1, \quad x_1 - x_2 = \sqrt{m^2 + 4}$$

olur. (4.1) bağıntısının, x_1 ve x_2 cinsinden genel çözümünün bulunabilmesi için $L_m(n)$, $k_1, k_2 \in R$ için,

$$L_m(n) = k_1 x_1^n + k_2 x_2^n \quad (4.4)$$

şeklinde ifade edilebilir. Çözüm için k_1 ve k_2 değerlerinin bulunması gereklidir. Bunun içinde başlangıç değerleri kullanılarak,

$$L_m(0) = k_1 x_1^0 + k_2 x_2^0 = k_1 + k_2 = 2$$

$$L_m(1) = k_1 x_1^1 + k_2 x_2^1 = k_1 x_1 + (2 - k_1) x_2 = m$$

işlemleri yapıp, x_1 ve x_2 değerleri yerine yazıldığında,

$$k_1(x_1 - x_2) + 2x_2 = m$$

$$k_1(\sqrt{m^2 + 4}) + 2\left(\frac{m - \sqrt{m^2 + 4}}{2}\right) = m$$

$$k_1 = k_2 = 1$$

olur. Bulunan k_1 ve k_2 değerleri (4.4) bağıntısında yerine yazıldığında,

$$L_m(n) = x_1^n + x_2^n$$

elde edilir. x_1 ve x_2 değerleri de yerine yazılarak,

$$L_m(n) = \left(\frac{m + \sqrt{m^2 + 4}}{2}\right)^n + \left(\frac{m - \sqrt{m^2 + 4}}{2}\right)^n \quad (4.5)$$

m . mertebeden Lucas sayıları için Gazale formülü elde edilir. (4.5) bağıntısında $m = 1$ için, Binet Formülü bulunmuş olur. m . mertebeye göre, altın oran cinsinden yazılırsa,

$$L_m(n) = (\Phi_m)^n + \left(\frac{-1}{\Phi_m}\right)^n$$

olur. Eşitlik düzenlendiğinde,

$$L_m(n) = (\Phi_m)^n + (-1)^n (\Phi_m)^{-n} \text{ elde edilir.}$$

Teorem 4.1.1: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L_m(n+2)}{L_m(n+1)} = \Phi_m$ dir.

İspat:

$$L_m(n+2) = (\Phi_m)^{n+2} + (-1)^{n+2} (\Phi_m)^{-n-2},$$

$$L_m(n+1) = (\Phi_m)^{n+1} + (-1)^{n+1} (\Phi_m)^{-n-1}$$

olduğundan,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L_m(n+2)}{L_m(n+1)} = \frac{(\Phi_m)^{n+2} + (-1)^{n+2} (\Phi_m)^{-n-2}}{(\Phi_m)^{n+1} + (-1)^{n+1} (\Phi_m)^{-n-1}},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L_m(n+2)}{L_m(n+1)} = \frac{(\Phi_m)^2}{(\Phi_m)^1} = \Phi_m$$

eşitliği elde edilir.

Tablo 4.1 m. mertebeden Lucas sayıları için değerler

m/n	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
1	-11	7	-4	3	-1	2	1	3	4	7	11
2	-82	34	-14	6	-2	2	2	6	14	34	82
$\sqrt{3}$	$-29\sqrt{3}$	23	$-6\sqrt{3}$	5	$-\sqrt{3}$	2	$\sqrt{3}$	5	$6\sqrt{3}$	23	$29\sqrt{3}$

Teorem 4.1.2: $L_m(n) = (-1)^n L_m(-n)$ dir.

İspat: $L_m(-n) = (\Phi_m)^{-n} + (-1)^{-n} (\Phi_m)^n$ olduğundan, eşitliğin her iki tarafı $(-1)^n$ ile çarpılırsa,

$$(-1)^n L_m(-n) = (-1)^n (\Phi_m)^{-n} + (\Phi_m)^n = L_m(n)$$

eşitliği elde edilir.

Örnek 4.1.2: $m=3$ ve $n=3$ için, $L_m(n) = (-1)^n L_m(-n)$ bağıntısı yazıldığında,

$$L_2(3) = (-1)^3 L_2(-3) = 14 \text{ olur.}$$

4.2. -m. mertebeden Lucas Sayıları ve Gazale Formülleri

(-m). mertebeden Lucas sayılarını bulmak için yeni bir tekrarlı bağıntı oluşturulduğunda ve bu sayılar pozitif mertebelilerden farklı olarak $L_{-m}(n)$ simgesiyle ifade edildiğinde, $m \in R^+$ için,

$$L_{-m}(n+2) = (-m)L_{-m}(n+1) + L_{-m}(n) \quad (4.7)$$

biçiminde yazılabilir. Başlangıç değerleri,

$$L_{-m}(0) = 2, L_{-m}(1) = -m$$

alınır. (4.7) tekrarlı bağıntısının her iki tarafı $L_{-m}(n+1)$ ile bölündüğünde,

$$\frac{L_{-m}(n+2)}{L_{-m}(n+1)} = (-m) + \frac{1}{\frac{L_{-m}(n+1)}{L_{-m}(n)}}$$

olarak yazılabilir. $n \rightarrow \infty$ için $\frac{L_{-m}(n+2)}{L_{-m}(n+1)} = x$ alındığında, (4.7) eşitliği,

$$x = (-m) + \frac{1}{x}$$

olur. Eşitliğin her iki tarafı x ile çarpılıp düzenlendiğinde,

$$x^2 + mx - 1 = 0 \quad (4.8)$$

elde edilir. Bu denklemin,

$$x_1 = \frac{-m + \sqrt{m^2 + 4}}{2} = -\left(\frac{m - \sqrt{m^2 + 4}}{2}\right), \text{ (pozitif kök)}$$

$$x_2 = \frac{-m - \sqrt{m^2 + 4}}{2} = -\left(\frac{m + \sqrt{m^2 + 4}}{2}\right), \text{ (negatif kök)}$$

olmak üzere, iki kökü vardır. (4.8) denkleminin kökleri arasında,

$$x_1 + x_2 = -m, \quad x_1 x_2 = -1$$

eşitlikleri vardır. (4.8) ikinci dereceden denkleminin kökleri olan x_1 ve x_2 , altın oran, yani Φ_m cinsinden yazılırsa,

$$x_1 = -\left(\frac{m - \sqrt{m^2 + 4}}{2}\right) = \frac{1}{\Phi_m},$$

$$x_2 = -\left(\frac{m + \sqrt{m^2 + 4}}{2}\right) = -\Phi_m$$

olur. (4.7) bağıntısının x_1 ve x_2 cinsinden genel çözümünün bulunabilmesi için $L_{-m}(n)$, $k_1, k_2 \in R$ olmak üzere,

$$L_{-m}(n) = k_1 x_1^n + k_2 x_2^n \tag{4.9}$$

şeklinde ifade edilebilir. Çözüm için k_1 ve k_2 değerlerinin bulunması gereklidir. Bunun içinde başlangıç değerleri kullanıldığında;

$$L_{-m}(0) = k_1 x_1^0 + k_2 x_2^0 = k_1 + k_2 = 2$$

$$L_{-m}(1) = k_1 x_1^1 + k_2 x_2^1 = k_1 x_1 + (2 - k_1) x_2 = -m$$

elde edilir. Bu eşitlikler düzenlendiğinde,

$$k_1(x_1 - x_2) + 2x_2 = -m$$

$$k_1 \sqrt{m^2 + 4} + 2\left(-\frac{m + \sqrt{m^2 + 4}}{2}\right) = -m$$

$$k_1 = k_2 = 1$$

olur. Son olarak bulunan k_1 ve k_2 değerleri (4.9) da yerine yazılırsa,

$$L_{-m}(n) = \left(-\frac{m - \sqrt{m^2 + 4}}{2}\right)^n + \left(-\frac{m + \sqrt{m^2 + 4}}{2}\right)^n$$

-m. mertebeden Lucas sayıları için Gazale formülü bulunmuş olur. Eşitlik, m. mertebeden altın oran olan Φ_m cinsinden yazılırsa,

$$L_{-m}(n) = \left(\frac{1}{\Phi_m}\right)^n + (-\Phi_m)^n$$

$$L_{-m}(n) = (-1)^n (\Phi_m)^n + (\Phi_m)^{-n}$$

elde edilir.

Teorem 4.2.1: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L_{-m}(n+2)}{L_{-m}(n+1)} = -\Phi_m$ dir.

İspat:

$$L_{-m}(n+2) = (-1)^{n+2} (\Phi_m)^{n+2} + (\Phi_m)^{-n-2},$$

$$L_{-m}(n+1) = (-1)^{n+1} (\Phi_m)^{n+1} + (\Phi_m)^{-n-1}$$

olduğundan,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L_{-m}(n+2)}{L_{-m}(n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^{n+2} (\Phi_m)^{n+2} + (\Phi_m)^{-n-2}}{(-1)^{n+1} (\Phi_m)^{n+1} + (\Phi_m)^{-n-1}}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L_{-m}(n+2)}{L_{-m}(n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^{n+2} (\Phi_m)^{n+2} + \frac{1}{\Phi_m^{n+2}}}{(-1)^{n+1} (\Phi_m)^{n+1} + \frac{1}{\Phi_m^{n+1}}}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L_{-m}(n+2)}{L_{-m}(n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)\Phi_m^2}{\Phi_m^1} = -\Phi_m$$

elde edilir.

Teorem 4.2.2: $L_{-m}(n) = (-1)^n L_{-m}(-n)$ dir.

İspat: $L_{-m}(-n) = (-1)^{-n} (\Phi_m)^{-n} + (\Phi_m)^n$ olduğundan eşitliğin her iki tarafı $(-1)^n$ ile çarpılırsa,

$$(-1)^n L_{-m}(-n) = \Phi_m^{-n} + (-1)^n \Phi_m^n = L_{-m}(n)$$

eşitliği bulunur.

Örnek 4.2.1: $m = 2$ ve $n = 3$ için, $L_{-m}(n) = (-1)^n L_{-m}(-n)$ eşitliği incelendiğinde,

$$L_{-2}(3) = (-1)^3 L_{-2}(-3) = -14 \text{ olur.}$$

Teorem 4.2.3: $L_m(n) = L_{-m}(-n)$ dir.

İspat:

$$L_{-m}(n) = (-1)^n (\Phi_m)^n + (\Phi_m)^{-n}$$

$L_{-m}(-n) = (-1)^{-n} (\Phi_m)^{-n} + (\Phi_m)^n$ olduğundan eşitliğin her iki tarafı $(-1)^n$ ile çarpılırsa,

$$(-1)^{2n} L_{-m}(-n) = (-1)^n (\Phi_m)^{-n} + (\Phi_m)^n = L_m(n)$$

eşitliği elde edilir.

Örnek 4.2.2: $m = 2$ ve $n = 3$ için, $L_m(n) = L_{-m}(-n)$ eşitliği incelendiğinde,

$$L_2(3) = L_{-2}(-3) = 14 \text{ olur.}$$

Tablo 4.2 $-m$. mertebeden Lucas sayıları için değerler

$-m/n$	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
1	11	7	4	3	1	2	-1	3	-4	7	-11
2	82	34	14	6	2	2	-2	6	-14	34	-82
$\sqrt{3}$	$29\sqrt{3}$	23	$6\sqrt{3}$	5	$\sqrt{3}$	2	$-\sqrt{3}$	5	$-6\sqrt{3}$	23	$-29\sqrt{3}$

Teorem 4.2.4: $\frac{L_{-m}(n) + \sqrt{m^2 + 4}.F_{-m}(n)}{2} = \Phi_{-m}^n$ dir.

İspat:

$$F_{-m}(n) = -\frac{(-1)^n \Phi_m^n - \Phi_m^{-n}}{\sqrt{m^2 + 4}},$$

$$L_{-m}(n) = (-1)^n (\Phi_m)^n + (\Phi_m)^{-n}$$

olduğundan,

$$\frac{L_{-m}(n) + \sqrt{m^2 + 4}.F_{-m}(n)}{2} = \frac{(-1)^n \Phi_m^n + \Phi_m^{-n} - (-1)^n \Phi_m^n + \Phi_m^{-n}}{2}$$

$$\frac{L_{-m}(n) + \sqrt{m^2 + 4}.F_{-m}(n)}{2} = \frac{2\Phi_m^{-n}}{2} = \Phi_m^{-n}$$

olur.

4.3. $\sqrt{-m}$. mertebeli Lucas Sayıları için Gazale Formülleri

$\sqrt{-m}$. mertebeden tekrarlı bağıntıyı oluşturabilmek için m . mertebeden tekrarlı bağıntılarda kullanılan gösterim uygulanabilir. Bu sayılar $L_{\sqrt{-m}}$ simgesiyle ifade edildiğinde, $m \in \mathbb{Z}^+$ için,

$$L_{\sqrt{-m}}(n+2) = \sqrt{-m}L_{\sqrt{-m}}(n+1) + L_{\sqrt{-m}}(n) \quad (4.10)$$

tekrarlı bağıntısıyla yazılırlar. Başlangıç değerleri,

$$L_{\sqrt{-m}}(0) = 2, L_{\sqrt{-m}}(1) = \sqrt{-m}$$

biçiminde oluşturulur. Eşitliğin her iki tarafı $L_{\sqrt{-m}}(n+1)$ ile bölüldüğünde ve düzenleme yapıldığında,

$$\frac{L_{\sqrt{-m}}(n+2)}{L_{\sqrt{-m}}(n+1)} = 1 + \frac{1}{\frac{L_{\sqrt{-m}}(n+1)}{L_{\sqrt{-m}}(n)}} \quad (4.11)$$

olur. $m > 4$ ve $n \rightarrow \infty$ için, $\frac{L_{\sqrt{-m}}(n+2)}{L_{\sqrt{-m}}(n+1)} = x$ alındığında, (4.11) eşitliği,

$$x = \sqrt{-m} + \frac{1}{x}$$

olup,

$$x^2 - \sqrt{-m}x - 1 = 0 \quad (4.12)$$

ikinci dereceden denklemini elde edilir. Bu denklemin:

$$x_1 = \frac{\sqrt{-m} + \sqrt{-m+4}}{2} = \frac{\sqrt{mi} + \sqrt{m-4}i}{2} = \frac{i(\sqrt{m} + \sqrt{m-4})}{2},$$

$$x_2 = \frac{\sqrt{-m} - \sqrt{-m+4}}{2} = \frac{\sqrt{mi} - \sqrt{m-4}i}{2} = \frac{i(\sqrt{m} - \sqrt{m-4})}{2}$$

olmak üzere iki tane karmaşık sayı kökü vardır. (4.12) denkleminin kökleri arasında,

$$x_1 x_2 = -1, x_1 + x_2 = \sqrt{-m}$$

eşitlikleri geçerlidir. Ayrıca, elde edilen x_1 ve x_2 kökleri için, $\sqrt{-m}$. mertebeye göre altın oran, $\Phi_{\sqrt{-m}}$ için,

$$x_1 = \Phi_{\sqrt{-m}}, \quad x_2 = \frac{-1}{\Phi_{\sqrt{-m}}}$$

eşitlikleri vardır. x_1 ve x_2 kökleri için genel çözüm ifadesi bulunabilmesi için, $k_1, k_2 \in R$ olmak üzere,

$$L_{\sqrt{-m}}(n) = k_1 x_1^n + k_2 x_2^n \quad (4.13)$$

olarak yazılabilir. (4.13) denklemindeki k_1, k_2 sayılarının, başlangıç koşulları olan $L_{\sqrt{-m}}(0) = 2, L_{\sqrt{-m}}(1) = \sqrt{-m}$ için de geçerli olması gerekir. Bu değerler kullanılarak k_1, k_2 sayıları bulunabilir:

$$L_{\sqrt{-m}}(0) = k_1 x_1^0 + k_2 x_2^0 = k_1 + k_2 = 2$$

$$L_{\sqrt{-m}}(1) = k_1 x_1^1 + k_2 x_2^1 = k_1 x_1 + k_2 x_2 = \sqrt{-m}$$

olarak yazılabilir. Bu eşitlikler kullanılarak,

$$k_1 x_1 + (2 - k_1) x_2 = \sqrt{-m}$$

$$k_1 (x_1 - x_2) + 2x_2 = \sqrt{-m}$$

olur. $x_1 - x_2 = \sqrt{m-4}i$ ve $x_2 = \frac{i(\sqrt{m} - \sqrt{m-4})}{2}$ olduğundan,

$$k_1 \sqrt{m-4}i = \sqrt{-m} - 2 \frac{i(\sqrt{m} - \sqrt{m-4})}{2}$$

elde edilir. Eşitliğin her iki tarafı $\sqrt{m-4}i$ ile bölünerek işlemler yapıldığında,

$$k_1 = k_2 = 1$$

olur. Son olarak, bulunan k_1 ve k_2 değerleri (4.13) de yerlerine yazılarak,

$$L_{\sqrt{-m}}(n) = x_1^n + x_2^n$$

genel bağıntısı bulunur. x_1 ve x_2 değerleri yerine yazıldığında,

$$L_{\sqrt{-m}}(n) = \left(\frac{i(\sqrt{m} + \sqrt{m-4})}{2}\right)^n + \left(\frac{i(\sqrt{m} - \sqrt{m-4})}{2}\right)^n$$

$\sqrt{-m}$. mertebeden Lucas sayıları için Gazale formülü bulunur. Eşitlik $\Phi_{\sqrt{-m}}$ cinsinden yazıldığında,

$$L_{\sqrt{-m}}(n) = (\Phi_{\sqrt{-m}})^n + \left(-\frac{1}{\Phi_{\sqrt{-m}}}\right)^n$$

$$L_{\sqrt{-m}}(n) = (\Phi_{\sqrt{-m}})^n + (-1)^n \Phi_{\sqrt{-m}}^{-n}$$

biçiminde ifade edilir.

Teorem 4.3.1: $m > 4$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L_{\sqrt{-m}}(n+2)}{L_{\sqrt{-m}}(n+1)} = \Phi_{\sqrt{-m}}$ dir.

İspat:

$$L_{\sqrt{-m}}(n+2) = (\Phi_{\sqrt{-m}})^{n+2} + (-1)^n \Phi_{\sqrt{-m}}^{-n-2},$$

$$L_{\sqrt{-m}}(n+1) = (\Phi_{\sqrt{-m}})^{n+1} + (-1)^n \Phi_{\sqrt{-m}}^{-n-1}$$

olduğundan,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L_{\sqrt{-m}}(n+2)}{L_{\sqrt{-m}}(n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\Phi_{\sqrt{-m}})^{n+2} + (-1)^n \Phi_{\sqrt{-m}}^{-n-2}}{(\Phi_{\sqrt{-m}})^{n+1} + (-1)^n \Phi_{\sqrt{-m}}^{-n-1}}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L_{\sqrt{-m}}(n+2)}{L_{\sqrt{-m}}(n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\Phi_{\sqrt{-m}})^2}{(\Phi_{\sqrt{-m}})^1} = \Phi_{\sqrt{-m}}$$

elde edilir.

Teorem 4.3.2: $L_{\sqrt{-m}}(n) = (-1)^n L_{\sqrt{-m}}(-n)$ dir.

İspat:

$$L_{\sqrt{-m}}(-n) = (\Phi_{\sqrt{-m}})^{-n} + (-1)^{-n} \Phi_{\sqrt{-m}}^n$$

$$(-1)^n L_{\sqrt{-m}}(-n) = (-1)^n (\Phi_{\sqrt{-m}})^{-n} + \Phi_{\sqrt{-m}}^n = L_{\sqrt{-m}}(n)$$

eşitliği elde edilir.

Örnek 4.3.1: $m=4$ ve $n=3$ için, $L_{\sqrt{-4}}(n) = (-1)^n L_{\sqrt{-4}}(-n)$ eşitliği incelendiğinde,

$$L_{\sqrt{-4}}(3) = (-1)^3 L_{\sqrt{-4}}(-3) = 2i \text{ olur.}$$

Tablo 4.3 $\sqrt{-m}$. mertebeden Lucas sayılarında farklı değerler

$\sqrt{-m}/n$	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
1	-i	-1	-2i	1	-i	2	i	1	2i	-1	i
4	6i	-4	-2i	0	-2i	2	2i	0	2i	-4	-6i
9	-123i	-47	18i	7	-3i	2	3i	-7	-18i	47	123i

Teorem 4.3.3 : $\frac{L_{\sqrt{-m}} + \sqrt{m-4i} \cdot F_{\sqrt{-m}}(n)}{2} = \Phi_{\sqrt{-m}}^n$ dir.

İspat:

$$L_{\sqrt{-m}}(n) = \Phi_{\sqrt{-m}}^n + (-1)^n \Phi_{\sqrt{-m}}^{-n},$$

$$F_{\sqrt{-m}}(n) = \frac{\Phi_{\sqrt{-m}}^n - (-1)^n \Phi_{\sqrt{-m}}^{-n}}{\sqrt{m-4i}}$$

olduğundan,

$$\frac{L_{\sqrt{-m}} + \sqrt{m-4i} F_{\sqrt{-m}}(n)}{2} = \frac{\Phi_{\sqrt{-m}}^n + (-1)^n \Phi_{\sqrt{-m}}^{-n} + \Phi_{\sqrt{-m}}^n - (-1)^n \Phi_{\sqrt{-m}}^{-n}}{2}$$

$$\frac{L_{\sqrt{-m}} + \sqrt{m-4i} F_{\sqrt{-m}}(n)}{2} = \frac{2\Phi_{\sqrt{-m}}^n}{2} = \Phi_{\sqrt{-m}}^n$$

eşitliği elde edilir.

Teorem 4.3.4: $L_{\sqrt{-m}}(n)F_{\sqrt{-m}}(n) = \frac{\Phi_{\sqrt{-m}}^{2n} - \Phi_{\sqrt{-m}}^{-2n}}{\sqrt{m-4i}}$ dir.

İspat:

$$L_{\sqrt{-m}}(n) = \Phi_{\sqrt{-m}}^n + (-1)^n \Phi_{\sqrt{-m}}^{-n},$$

$$F_{\sqrt{-m}}(n) = \frac{\Phi_{\sqrt{-m}}^n - (-1)^n \Phi_{\sqrt{-m}}^{-n}}{\sqrt{m-4i}}$$

olduğundan,

$$L_{\sqrt{-m}}(n)F_{\sqrt{-m}}(n) = \frac{(\Phi_{\sqrt{-m}}^n - (-1)^n \Phi_{\sqrt{-m}}^{-n})(\Phi_{\sqrt{-m}}^n + (-1)^n \Phi_{\sqrt{-m}}^{-n})}{\sqrt{m-4i}}$$

$$L_{\sqrt{-m}}(n)F_{\sqrt{-m}}(n) = \frac{\Phi_{\sqrt{-m}}^{2n} - \Phi_{\sqrt{-m}}^{-2n}}{\sqrt{m-4i}}$$

eşitliği elde edilir.

BÖLÜM 5. ALTIN MATRİSLER

5.1. Altın Matris

Altın matris, 2x2 boyutunda olan ve tüm tamsayı kuvvetlerinin elemanları Fibonacci sayıları cinsinden yazılabilen bir matristir:

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Stakhov [18] de ifade edildiği gibidir. Altın matrislerle Fibonacci sayıları arasındaki bağıntının bulunabilmesi için, altın matrisin kuvvetleri alınarak ve matrisin her bir elemanı, Fibonacci sayıları cinsinden yazılarak işleme devam edildiğinde;

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F(2) & F(1) \\ F(1) & F(0) \end{pmatrix},$$

$$G^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F(3) & F(2) \\ F(2) & F(1) \end{pmatrix},$$

$$G^3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F(4) & F(3) \\ F(3) & F(2) \end{pmatrix},$$

$$G^4 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F(5) & F(4) \\ F(4) & F(3) \end{pmatrix},$$

yazılabilir. Altın matrisin kuvvetleriyle, Fibonacci sayıları arasında görülen ilişki, n. kuvvet için, $n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere,

$$G^n = \begin{pmatrix} F(n+1) & F(n) \\ F(n) & F(n-1) \end{pmatrix} \tag{5.1}$$

biçiminde altın matris bağıntısıdır. Altın matrisin kuvvetlerinin determinantlarına bakıldığında,

$$\text{Det}(G) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

$$\text{Det}(G^2) = (\text{Det}(G))^2 = 1$$

$$\text{Det}(G^3) = (\text{Det}(G))^3 = -1$$

$$\text{Det}(G^4) = (\text{Det}(G))^4 = 1$$

çift kuvvetler için 1, tek kuvvetler için -1 olur. Bu durumda,

$$\text{Det}(G^n) = (\text{Det}(G))^n = (-1)^n$$

bağıntısı yazılabilir. (5.1) bağıntısının determinantı alınarak,

$$\text{Det}(G^n) = \begin{vmatrix} F(n+1) & F(n) \\ F(n) & F(n-1) \end{vmatrix} = (-1)^n$$

buradan da,

$$F(n+1)F(n-1) - [F(n)]^2 = (-1)^n$$

eşitliği elde edilir ki bu bağıntı Cassini Formülü olarak bilinir

Teorem 5.1.1: $G^n = G^{n-1} + G^{n-2}$ dir.

İspat: (5.1) altın matris bağıntısı kullanılarak,

$$G^{n-1} = \begin{pmatrix} F(n) & F(n-1) \\ F(n-1) & F(n-2) \end{pmatrix}$$

$$G^{n-2} = \begin{pmatrix} F(n-1) & F(n-2) \\ F(n-2) & F(n-3) \end{pmatrix}$$

matrisleri yazıldığında,

$$G^{n-1} + G^{n-2} = \begin{pmatrix} F(n) + F(n-1) & F(n-1) + F(n-2) \\ F(n-1) + F(n-2) & F(n-2) + F(n-3) \end{pmatrix}$$

$$G^{n-1} + G^{n-2} = \begin{pmatrix} F(n+1) & F(n) \\ F(n) & F(n-1) \end{pmatrix} = G^n$$

eşitliği elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

5.2. m. mertebeden Altın Matrisler

m. mertebeden altın matris, $m \in \mathbb{Z}^+$ için,

$$G_m = \begin{pmatrix} m & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.2)$$

Stakhov [18] ve Gazale [4] de ifade edilen matrisler olup, $m = 1$ için Fibonacci altın matrisi elde edilir. Fibonacci altın matrisinde olduğu gibi, aynı özelliklerin sağlanıp sağlanmadığı gözlemlenebilir. Öncelikle m. mertebeden Fibonacci sayılarının tekrarlı bağıntısı,

$$F_m(n+2) = mF_m(n+1) + F_m(n)$$

$$F_m(0) = 0, F_m(1) = 1$$

olduğu hatırlanmalıdır. İlerideki işlemlerde kullanılmak üzere, ilk 6 terim,

$$F_m(0) = 0,$$

$$F_m(1) = 1,$$

$$F_m(2) = m,$$

$$F_m(3) = m^2 + 1,$$

$$F_m(4) = m^3 + 2m,$$

$$F_m(5) = m^4 + 3m^2 + 1$$

bulunur. m . mertebeden bir altın matrisin n . kuvvetinin genel ifadesini bulmak için, kuvvetleri alınarak elde edilen matrislerin elemanları, m . mertebeden Fibonacci sayıları cinsinden yazıldığında,

$$G_m^1 = \begin{pmatrix} m & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_m(2) & F_m(1) \\ F_m(1) & F_m(0) \end{pmatrix}$$

$$G_m^2 = \begin{pmatrix} m & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m^2 + 1 & m \\ m & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_m(3) & F_m(2) \\ F_m(2) & F_m(1) \end{pmatrix}$$

$$G_m^3 = \begin{pmatrix} m^3 + 2m & m^2 + 1 \\ m^2 + 1 & m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_m(4) & F_m(3) \\ F_m(3) & F_m(2) \end{pmatrix}$$

$$G_m^4 = \begin{pmatrix} m^4 + 3m^2 + 1 & m^3 + 2m \\ m^3 + 2m & m^2 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_m(5) & F_m(4) \\ F_m(4) & F_m(3) \end{pmatrix}$$

G_m matrisinin kuvveti ile elemanları olan m . mertebeden Fibonacci sayıları arasındaki bağıntı n . kuvvet için,

$$G_m^n = \begin{pmatrix} F_m(n+1) & F_m(n) \\ F_m(n) & F_m(n-1) \end{pmatrix} \quad (5.3)$$

biçiminde m . mertebeden altın matris bağıntısı yazılabilir. G_m matrisinin kuvvetlerinin determinantlarına bakıldığında;

$$\text{Det}(G_m^1) = \begin{vmatrix} m & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

$$\text{Det}(G_m^2) = (\text{Det}G_m)^2 = 1$$

$$\text{Det}(G_m^3) = (\text{Det}G_m)^3 = -1$$

$$\text{Det}(G_m^4) = (\text{Det}G_m)^4 = 1$$

yani, çift kuvvetler için 1, tek kuvvetler için -1 olur. Böylece,

$$\text{Det}(G_m^n) = (-1)^n$$

bağıntısı yazılabilir. (5.3) bağıntısının determinantı alındığında,

$$\text{Det}(G_m^n) = \begin{vmatrix} F_m(n+1) & F_m(n) \\ F_m(n) & F_m(n-1) \end{vmatrix} = (-1)^n$$

olup,

$$F_m(n+1)F_m(n-1) - F_m(n)^2 = (-1)^n$$

eşitliği elde edilir. Bu formül, Fibonacci altın matrisleri için elde edilen Cassini Formülü ile benzer olduğundan, m. mertebeden Cassini formülü olarak isimlendirilir. m. mertebeden altın matrislerin, m. mertebeden tekrarlı bağıntılarla yakın ilgisi vardır.

Teorem 5.2.1: $G_m^n = mG_m^{n-1} + G_m^{n-2}$ dir.

İspat:

$$G_m^{n-1} = \begin{pmatrix} F_m(n) & F_m(n-1) \\ F_m(n-1) & F_m(n-2) \end{pmatrix}$$

$$G_m^{n-2} = \begin{pmatrix} F_m(n-1) & F_m(n-2) \\ F_m(n-2) & F_m(n-3) \end{pmatrix}$$

olduğundan,

$$mG_m^{n-1} + G_m^{n-2} = \begin{pmatrix} mF_m(n) & mF_m(n-1) \\ mF_m(n-1) & mF_m(n-2) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_m(n-1) & F_m(n-2) \\ F_m(n-2) & F_m(n-3) \end{pmatrix}$$

$$mG_m^{n-1} + G_m^{n-2} = \begin{pmatrix} mF_m(n) + F_m(n-1) & mF_m(n-1) + F_m(n-2) \\ mF_m(n-1) + F_m(n-2) & mF_m(n-2) + F_m(n-3) \end{pmatrix}$$

$$mG_m^{n-1} + G_m^{n-2} = \begin{pmatrix} F_m(n+1) & F_m(n) \\ F_m(n) & F_m(n-1) \end{pmatrix}$$

eşitliği sağlanır. Böylece teorem ispatlanmış olur.

5.3. -m. mertebeden Altın Matrisler

(-m). mertebeden bir altın matris, $m \in Z^+$ olmak üzere,

$$G_{-m} = \begin{pmatrix} -m & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

biçiminde tanımlanabilir. m. mertebeden matrislerle benzer özelliklere sahiptirler.

(-m). mertebeden matrisler için (-m). mertebeden tekrarlı bağıntı,

$$F_{-m}(n+2) = -mF_{-m}(n+1) + F_{-m}(n)$$

$$F_{-m}(0) = 0, F_{-m}(1) = 1$$

kullanılır.

Teorem 5.3.1: G_{-m} matrisinin kuvveti ile elemanları olan (-m).mertebeden Fibonacci sayıları arasındaki bağıntı n. kuvvet için,

$$G_{-m}^n = \begin{pmatrix} F_{-m}(n+1) & F_{-m}(n) \\ F_{-m}(n) & F_{-m}(n-1) \end{pmatrix} \text{ dir.}$$

İspat: -m. mertebeden ilk 5 Fibonacci sayısı ;

$$F_{-m}(0) = 0,$$

$$F_{-m}(1) = 1,$$

$$F_{-m}(2) = -m,$$

$$F_{-m}(3) = m^2 + 1,$$

$$F_{-m}(4) = -m^3 - 2m,$$

$$F_{-m}(5) = m^4 + 3m^2 + 1,$$

olur. $(-m)$. mertebeden bir altın matrisin n . kuvvetinin genel ifadesini bulmak için, kuvvetleri alınarak elde edilen matrislerin elemanları, $(-m)$. mertebeden Fibonacci sayıları cinsinden yazıldığında,

$$G_{-m}^1 = \begin{pmatrix} -m & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{-m}(2) & F_{-m}(1) \\ F_{-m}(1) & F_{-m}(0) \end{pmatrix}$$

$$G_{-m}^2 = \begin{pmatrix} -m & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -m & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m^2 + 1 & -m \\ -m & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{-m}(3) & F_{-m}(2) \\ F_{-m}(2) & F_{-m}(1) \end{pmatrix}$$

$$G_{-m}^3 = \begin{pmatrix} m^2 + 1 & m \\ m & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -m & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -m^3 - 2m & m^2 + 1 \\ m^2 + 1 & -m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{-m}(4) & F_{-m}(3) \\ F_{-m}(3) & F_{-m}(2) \end{pmatrix}$$

$$G_{-m}^4 = \begin{pmatrix} m^4 + 3m^2 + 1 & m^3 + 2m \\ m^3 + 2m & m^2 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{-m}(5) & F_{-m}(4) \\ F_{-m}(4) & F_{-m}(3) \end{pmatrix}$$

olup, n . kuvvete kadar işlem yapıldığında,

$$G_{-m}^n = \begin{pmatrix} F_{-m}(n+1) & F_{-m}(n) \\ F_{-m}(n) & F_{-m}(n-1) \end{pmatrix}$$

biçiminde genel bağıntı elde edilir. Böylece teorem ispatlanmış olur.

Teorem 5.3.2: $Det(G_{-m}^n) = (-1)^n$ dir.

İspat:

$$Det(G_{-m}^1) = \begin{vmatrix} -m & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

$$Det(G_{-m}^2) = (Det(G_{-m}))^2 = 1$$

$$Det(G_{-m}^3) = (Det(G_{-m}))^3 = -1$$

$$Det(G_{-m}^4) = (Det(G_{-m}))^4 = 1$$

çift kuvvetler için 1, tek kuvvetler için -1 olur. Bu durumda,

$$DetG_{-m}^n = (-1)^n$$

eşitliği geçerlidir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 5.3.3 : $F_{-m}(n+1)F_{-m}(n-1) - [F_{-m}(n)]^2 = (-1)^n$ dir.

İspat:

$$\text{Det}G_{-m}^n = \begin{vmatrix} F_{-m}(n+1) & F_{-m}(n) \\ F_{-m}(n) & F_{-m}(n-1) \end{vmatrix} = (-1)^n$$

eşitliği elde edilebilir. Determinant alındığında,

$$F_{-m}(n+1)F_{-m}(n-1) - [F_{-m}(n)]^2 = (-1)^n$$

olur. Bu eşitlik, Fibonacci altın matrisler için elde edilen Cassini Formülü ile benzer olduğundan $(-m)$. mertebeden Cassini formülü olarak isimlendirilir. $(-m)$. mertebeden altın matrislerin, $(-m)$. mertebeden tekrarlı bağıntılarla yakın ilişkisi vardır.

Teorem 5.3.4 : $G_{-m}^n = -mG_{-m}^{n-1} + G_{-m}^{n-2}$ dir.

İspat:

$$G_{-m}^{n-1} = \begin{pmatrix} F_{-m}(n) & F_{-m}(n-1) \\ F_{-m}(n-1) & F_{-m}(n-2) \end{pmatrix}$$

$$G_{-m}^{n-2} = \begin{pmatrix} F_{-m}(n-1) & F_{-m}(n-2) \\ F_{-m}(n-2) & F_{-m}(n-3) \end{pmatrix}$$

olduğundan,

$$-mG_{-m}^{n-1} + G_{-m}^{n-2} = \begin{pmatrix} -mF_{-m}(n) & -mF_{-m}(n-1) \\ -mF_{-m}(n-1) & -mF_{-m}(n-2) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_{-m}(n-1) & F_{-m}(n-2) \\ F_{-m}(n-2) & F_{-m}(n-3) \end{pmatrix}$$

$$-mG_{-m}^{n-1} + G_{-m}^{n-2} = \begin{pmatrix} -mF_{-m}(n) + F_{-m}(n-1) & -mF_{-m}(n-1) + F_{-m}(n-2) \\ -mF_{-m}(n-1) + F_{-m}(n-2) & -mF_{-m}(n-2) + F_{-m}(n-3) \end{pmatrix}$$

$$-mG_{-m}^{n-1} + G_{-m}^{n-2} = \begin{pmatrix} F_{-m}(n+1) & F_{-m}(n) \\ F_{-m}(n) & F_{-m}(n-1) \end{pmatrix} = G_{-m}^n$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

5.4. $\sqrt{-m}$. mertebeden Altın Matrisler

$\sqrt{-m}$. mertebeden altın matris olarak, $m \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere,

$$G_{\sqrt{-m}} = \begin{pmatrix} \sqrt{-m} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

biçiminde tanımlanabilir. $\sqrt{-m}$. mertebeden matrisler için, $\sqrt{-m}$. mertebeden tekrarlı bağıntı,

$$F_{\sqrt{-m}}(n+2) = \sqrt{-m}F_{\sqrt{-m}}(n+1) + F_{\sqrt{-m}}(n)$$

$$F_{\sqrt{-m}}(0) = 0, F_{\sqrt{-m}}(1) = 1$$

biçiminde yazılır.

Teorem 5.4.1 : $G_{\sqrt{-m}}$ matrisinin kuvveti ile elemanları olan $\sqrt{-m}$. mertebeden Fibonacci sayıları arasındaki bağıntı n. kuvvet için,

$$G_{\sqrt{-m}}^n = \begin{pmatrix} F_{\sqrt{-m}}(n+1) & F_{\sqrt{-m}}(n) \\ F_{\sqrt{-m}}(n) & F_{\sqrt{-m}}(n-1) \end{pmatrix} \text{ dir.}$$

İspat: $\sqrt{-m}$. mertebeden ilk 5 Fibonacci sayısı,

$$F_{\sqrt{-m}}(0) = 1,$$

$$F_{\sqrt{-m}}(1) = 1,$$

$$F_{\sqrt{-m}}(2) = \sqrt{mi},$$

$$F_{\sqrt{-m}}(3) = -m + 1$$

$$F_{\sqrt{-m}}(4) = -m\sqrt{mi} + 2\sqrt{mi},$$

$$F_{\sqrt{-m}}(5) = m^2 - 3m + 1$$

$\sqrt{-m}$. mertebeden bir altın matrisin n. kuvvetinin genel ifadesini bulmak için, kuvvetleri alınarak elde edilen matrislerin elemanları $\sqrt{-m}$. mertebeden Fibonacci sayıları cinsinden yazıldığında,

$$G_{\sqrt{-m}}^1 = \begin{pmatrix} \sqrt{mi} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{\sqrt{-m}}(2) & F_{\sqrt{-m}}(1) \\ F_{\sqrt{-m}}(1) & F_{\sqrt{-m}}(0) \end{pmatrix}$$

$$G_{\sqrt{-m}}^2 = \begin{pmatrix} -m+1 & \sqrt{mi} \\ \sqrt{mi} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{\sqrt{-m}}(3) & F_{\sqrt{-m}}(2) \\ F_{\sqrt{-m}}(2) & F_{\sqrt{-m}}(1) \end{pmatrix}$$

$$G_{\sqrt{-m}}^3 = \begin{pmatrix} -m+1 & \sqrt{mi} \\ \sqrt{mi} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{mi} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{\sqrt{-m}}(4) & F_{\sqrt{-m}}(3) \\ F_{\sqrt{-m}}(3) & F_{\sqrt{-m}}(2) \end{pmatrix}$$

$$G_{\sqrt{-m}}^4 = \begin{pmatrix} m^2 - 3m + 1 & -m\sqrt{mi} + 2\sqrt{mi} \\ -m\sqrt{mi} + 2\sqrt{mi} & -m + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{\sqrt{-m}}(5) & F_{\sqrt{-m}}(4) \\ F_{\sqrt{-m}}(4) & F_{\sqrt{-m}}(3) \end{pmatrix}$$

olup, n. kuvvete kadar işlem yapıldığında,

$$G_{\sqrt{-m}}^n = \begin{pmatrix} F_{\sqrt{-m}}(n+1) & F_{\sqrt{-m}}(n) \\ F_{\sqrt{-m}}(n) & F_{\sqrt{-m}}(n-1) \end{pmatrix}$$

biçiminde, $\sqrt{-m}$. mertebeden genel altın matris bağıntısı yazılabilir. $G_{\sqrt{-m}}$ matrisin kuvvetlerinin determinantlarına bakıldığında,

Teorem 5.4.2 : $Det(G_{\sqrt{-m}}^n) = (-1)^n$ dir.

İspat:

$$Det(G_{\sqrt{-m}}^1) = \begin{vmatrix} \sqrt{-m} & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

$$Det(G_{\sqrt{-m}}^2) = (Det(G_{\sqrt{-m}}))^2 = 1$$

$$Det(G_{\sqrt{-m}}^3) = (Det(G_{\sqrt{-m}}))^3 = -1$$

$$\text{Det}(G_{\sqrt{-m}}^4) = (\text{Det}(G_{\sqrt{-m}}))^4 = 1$$

çift kuvvetler için 1, tek kuvvetler için -1 olur. Bu durumda,

$$\text{Det}G_{\sqrt{-m}}^n = (-1)^n$$

Teorem 5.4.3 : $F_{\sqrt{-m}}(n+1)F_{\sqrt{-m}}(n-1) - F_{\sqrt{-m}}(n)^2 = (-1)^n$ dir.

İspat:

$$\text{Det}G_{\sqrt{-m}}^n = \begin{vmatrix} F_{\sqrt{-m}}(n+1) & F_{\sqrt{-m}}(n) \\ F_{\sqrt{-m}}(n) & F_{\sqrt{-m}}(n-1) \end{vmatrix} = (-1)^n$$

yazılıp, işlem yapıldığında,

$$F_{\sqrt{-m}}(n+1)F_{\sqrt{-m}}(n-1) - F_{\sqrt{-m}}(n)^2 = (-1)^n$$

eşitliği elde edilir. Bu formül, Fibonacci altın matrislerin için elde edilen Cassini Formülü ile benzer olduğundan, $\sqrt{-m}$. mertebeden Cassini formülü olarak isimlendirilir. $\sqrt{-m}$. mertebeden altın matrislerin, $\sqrt{-m}$. mertebeden tekrarlı bağıntılarla yakın ilgisi vardır.

Teorem 5.4.4 : $G_{\sqrt{-m}}^n = \sqrt{-m}G_{\sqrt{-m}}^{n-1} + G_{\sqrt{-m}}^{n-2}$ dir.

İspat:

$$G_{\sqrt{-m}}^{n-1} = \begin{pmatrix} F_{\sqrt{-m}}(n) & F_{\sqrt{-m}}(n-1) \\ F_{\sqrt{-m}}(n-1) & F_{\sqrt{-m}}(n-2) \end{pmatrix}$$

$$G_{\sqrt{-m}}^{n-2} = \begin{pmatrix} F_{\sqrt{-m}}(n-1) & F_{\sqrt{-m}}(n-2) \\ F_{\sqrt{-m}}(n-2) & F_{\sqrt{-m}}(n-3) \end{pmatrix}$$

olduğundan,

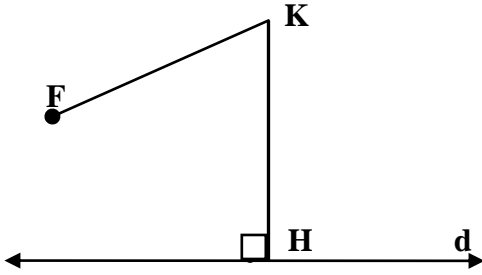
$$\begin{aligned}
\sqrt{-m}G_{\sqrt{-m}}^{n-1} + G_{\sqrt{-m}}^{n-2} &= \begin{pmatrix} \sqrt{-m}F_{\sqrt{-m}}(n) & \sqrt{-m}F_{\sqrt{-m}}(n-1) \\ \sqrt{-m}F_{\sqrt{-m}}(n-1) & \sqrt{-m}F_{\sqrt{-m}}(n-2) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_{\sqrt{-m}}(n-1) & F_{\sqrt{-m}}(n-2) \\ F_{\sqrt{-m}}(n-2) & F_{\sqrt{-m}}(n-3) \end{pmatrix} \\
\sqrt{-m}G_{\sqrt{-m}}^{n-1} + G_{\sqrt{-m}}^{n-2} &= \begin{pmatrix} \sqrt{-m}F_{\sqrt{-m}}(n) + F_{\sqrt{-m}}(n-1) & \sqrt{-m}F_{\sqrt{-m}}(n-1) + F_{\sqrt{-m}}(n-2) \\ \sqrt{-m}F_{\sqrt{-m}}(n-1) + F_{\sqrt{-m}}(n-2) & \sqrt{-m}F_{\sqrt{-m}}(n-2) + F_{\sqrt{-m}}(n-3) \end{pmatrix} \\
\sqrt{-m}G_{\sqrt{-m}}^{n-1} + G_{\sqrt{-m}}^{n-2} &= \begin{pmatrix} F_{\sqrt{-m}}(n+1) & F_{\sqrt{-m}}(n) \\ F_{\sqrt{-m}}(n) & F_{\sqrt{-m}}(n-1) \end{pmatrix} = G_{\sqrt{-m}}^n
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir ve ispat tamamlanır.

BÖLÜM 6. HİPERBOLİK FONKSİYONLAR

Bu bölümde, hiperbolik Fibonacci ve Lucas fonksiyonları için temel tanım ve kavramlar tanıtılacaktır.

6.1. Genel Konik Tanımı



Şekil 6.1 Koniğin geometrik yeri

Düzlemde değişmeyen F noktası ile değişmeyen d doğrusu verilmiş olsun. F noktasına uzaklığı, d doğrusuna uzaklığına oranı sabit kalan noktaların geometrik yerine konik denir. Şekil 6.1 de K aranan noktadır. Buna göre değişmeyen bu oran,

$$\frac{|KF|}{|KH|} = e$$

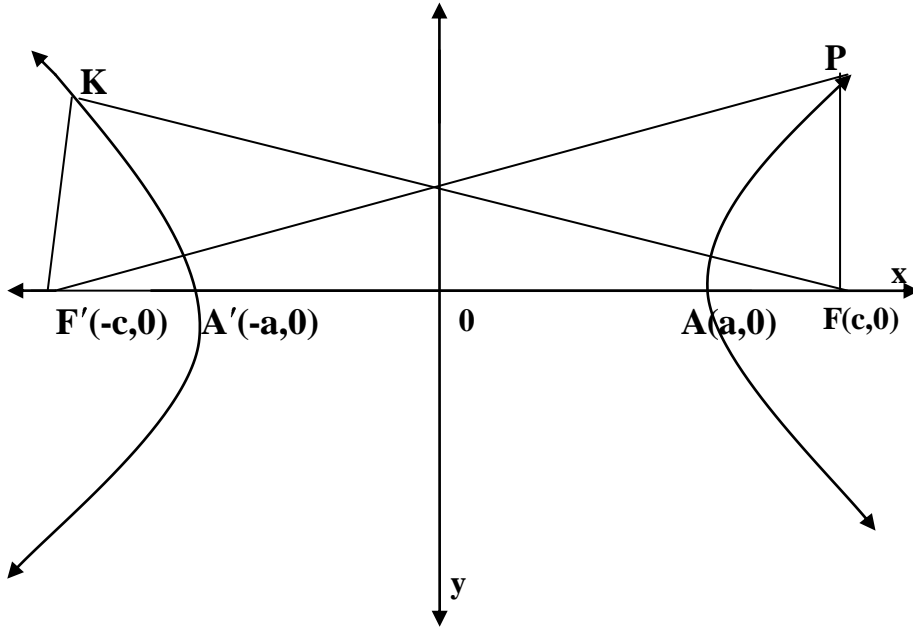
ile gösterilirse,

- $e < 1$ ise konik bir elipstir,
- $e = 1$ ise konik bir paraboldür,
- $e > 1$ ise konik bir hiperboldür.

e ye eksantrik denir. Asıl konu, hiperbollerle ilgili olduğundan dolayı hiperbollerin özelliklerinin iyi bilinmesi gerekir. Hiperbol, bir konik olmakla birlikte birçok fonksiyonla uyum sağlayabilen ve şekilsel benzerlikleri olan noktalar kümesidir.

6.2. Hiperboller

Düzlemde $|FF'| = 2c$ olmak üzere, alınan sabit F ve F' noktalarına uzaklıkları farkı, sabit bir $2a$ değerine eşit olan noktaların kümesine hiperbol denir. Şekil 6.2 de de görüleceği gibi, bu şartı sağlayan noktalar kümesi hiperbolü oluşturmaktadır ve aynı şartı sağlayan simetrik noktalar olduğundan dolayı, hiperbolün simetrik iki eğrisel kolu vardır ve bu kollar aynı eksen simetri merkezinden eşit mesafede keserler. Simetri eksenini de duruma göre x veya y eksenini olacaktır.

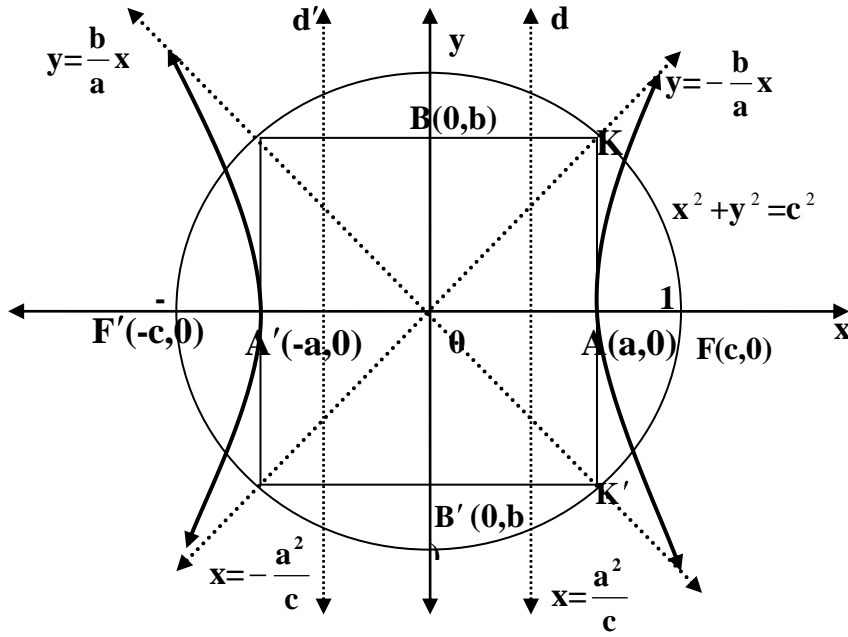


Şekil 6.2 Hiperbol grafiği

Hiperbolün bu özelliğinden dolayı, Şekil 6.2 de görüldüğü gibi,

$$\|PF'\| - \|PF\| = \|KF\| - \|KF'\| = \|AF'\| - \|AF\| = 2a$$

eşitliklerini sağladığından, alınan her P ve K noktası, hiperbol üzerindedir ve bu şekilde alınan sonsuz sayıdaki noktanın geometrik yeri bir hiperbol belirtir. Hiperboller için kullanılan temel kavramlar, Şekil 6.3 deki gibi gösterilebilir;



Şekil 6.3 Hiperbolün elemanları

Şekil 6.3 e bakıldığında;

- 1) Sabit alınan F ve F' noktaları hiperbolün odak noktaları,
- 2) $|FF'|$ nün orta noktası O hiperbolün merkezi,
- 3) FF' doğrusu hiperbolün odaklar eksenini,
- 4) A ve A' noktaları hiperbolün köşeleri,
- 5) O_y doğrusu hiperbolün yedek eksenini,
- 6) O_x ve O_y eksenleri hiperbolün simetri eksenleri,
- 7) B ve B' noktaları hiperbolün yedek eksen köşeleri,
- 8) $|AA'| = 2a$ uzunluğu asal eksen uzunluğu,
- 9) $|BB'| = 2b$ uzunluğu yedek eksen uzunluğu,
- 10) $|FF'| = 2c$ odaklar arası uzaklık,

11) O merkezli çemberin $x=a$ doğrusunu kestiği noktalar K ve K' ,

$|AK| = |OB| = |OB'| = b$ olsun. OAK diküçgeninde, a, b, c arasındaki bağıntı;

$$c^2 = a^2 + b^2 \text{ olur.}$$

12) Doğrultman denklemleri yani d ve d' doğrularının denklemleri $x = \mp \frac{a^2}{c}$,

13) Asimptot denklemleri $y = \mp \frac{b}{a}x$ olarak tanımlanır.

14) Hiperbolde odaklar arası uzaklığın asal eksen uzunluğuna oranına hiperbolün dışmerkezliği denir ve e ile gösterilir,

$$e = \frac{|FF'|}{|AA'|} = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a} > 1 \text{ olur.}$$

15) Merkezi O ve yarıçap uzunluğu a olan çembere hiperbolün asal çemberi denir.

Denklemleri

$$x^2 + y^2 = a^2 \text{ dir.}$$

16) Merkezi O ve yarıçap uzunluğu b olan çembere hiperbolün yedek çemberi denir.

Denklemleri

$$x^2 + y^2 = b^2 \text{ dir.}$$

17) Merkezi hiperbolün odaklarından biri ve yarıçap uzunluğu $2a$ olan çembere hiperbolün doğrultman çemberi denir.

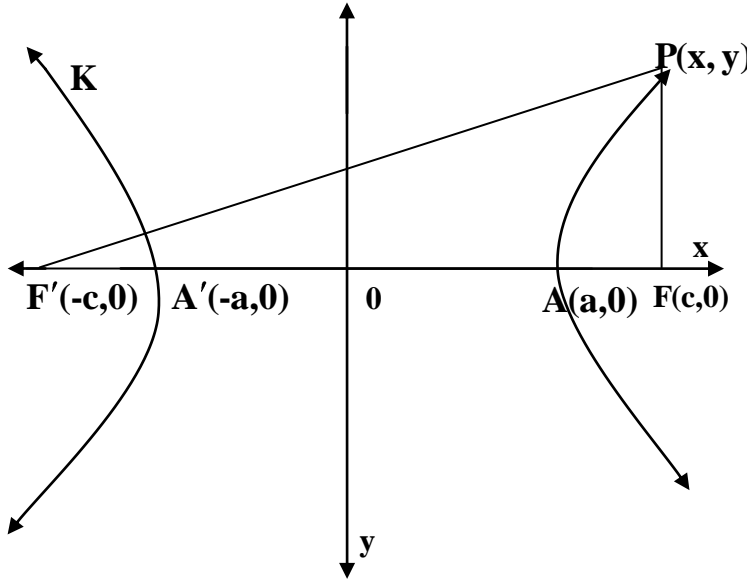
$$F(c,0) \wedge r = 2a \Rightarrow (x-c)^2 + y^2 = 4a^2$$

$$F(-c,0) \wedge r = 2a \Rightarrow (x+c)^2 + y^2 = 4a^2$$

bulunur.

6.2.1. Hiperbollerin merkezli denklemleri

Merkezi orijinde ve eksenleri koordinat eksenleri olan hiperbole, merkezil hiperbol denir.



Şekil 6.4 Merkezil hiperbolün grafiği

Şekil 6.4 de görüldüğü gibi, $P(x,y)$ noktalarının geometrik yerinin bir hiperbol olması için gerek ve yeter koşul,

$$\|PF'\| - \|PF\| = 2a, \|PF'\| - \|PF\| = 2a$$

olmasıdır. İki nokta arasındaki uzaklık bağıntısı kullanılarak bu ifade açılırsa,

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

elde edilir. Gerekli işlemler yapıldığında,

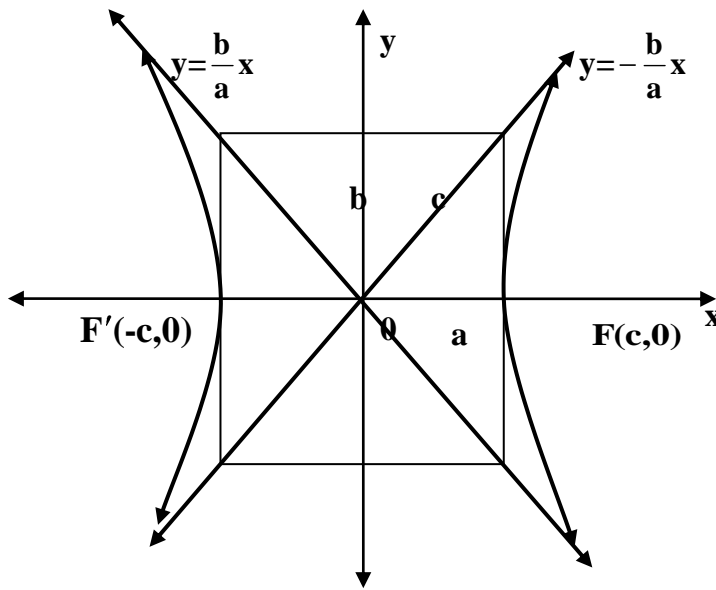
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

biçiminde hiperbol denklemi elde edilir. Hiperbolün merkezil denklemi, parametrik olarak,

$$x = a \cdot \sec \Phi, \quad y = b \cdot \tan \Phi$$

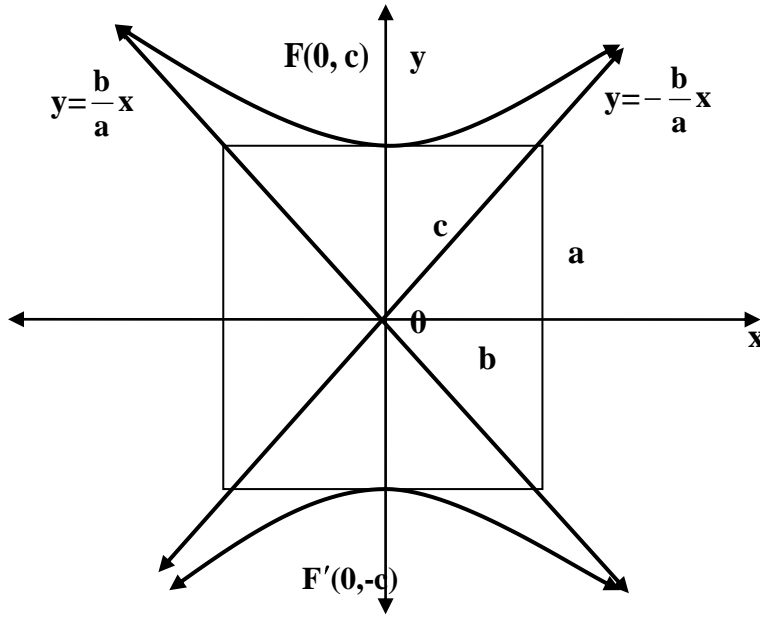
biçiminde ifade edilebilir. Eğer merkezli hiperbolün odakları, x ekseninde ise Şekil 6.5 deki gibi,

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ olur.}$$



Şekil 6.5 x ekseninde odaklı hiperbol grafiği

Eğer odaklar y ekseninde ise Şekil 6.6 da olduğu gibi,



Şekil 6.6 y eksenini odaklı hiperbol grafiği

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

hiperbolü olacaktır.

6.3. Hiperbolik Fonksiyonlar

Tanım aralığının merkezi orijinde olan her f fonksiyonu bir çift fonksiyon ve bir tek fonksiyonun toplamı olarak tek bir gösterime sahiptir. Bu gösterim,

$$f(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2} + \frac{f(x) + f(-x)}{2} \quad (6.1)$$

biçiminde yapılır. e^x de bu (6.1) deki gibi yazılırsa,

$$e^x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} + \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad (6.2)$$

olur. (6.2) de elde edilen bağıntıda, e^x in tek ve çift kısımları yeni türden birer fonksiyon olarak tanımlanabilirler ve hiperbolik fonksiyonlar olarak isimlendirilirler. Hiperbolik fonksiyonların değerleri bundan dolayı e^x ve e^{-x} bağlı değerlerdir. Çift kısmı, hiperbolik kosinüs ve tek kısmı da hiperbolik sinüs olarak adlandırılır.

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

biçiminde ifade edilirler. Hiperbolik kosinüs fonksiyonu çift bir fonksiyondur. Çünkü $f(x) = f(-x)$ eşitliği sağlanır;

$$\left. \begin{array}{l} \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \\ \cosh(-x) = \frac{e^{-x} + e^x}{2} \end{array} \right\} \cosh x = \cosh(-x)$$

Hiperbolik sinüs fonksiyonu ise tek bir fonksiyondur. Çünkü $f(x) = -f(-x)$ eşitliği sağlanır;

$$\left. \begin{array}{l} \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \\ \sinh(-x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \end{array} \right\} \sinh x = -\sinh(-x)$$

Sinüs ve kosinüs fonksiyonlarına bağlı olarak diğer standart hiperbolik fonksiyonları, yani hiperbolik tanjant, kotanjant, sekant ve kosekant fonksiyonları tanımlanabilir,

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}},$$

$$\coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}},$$

$$\operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x} = \frac{2}{e^x + e^{-x}},$$

$$\sec hx = \frac{1}{\cosh x} = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$$

Fonksiyonların isimlendirilmesinde trigonometrik kavramların kullanılmasının nedeni, e^x ve e^{-x} 'in özelliklerinin standart trigonometrik fonksiyonların özellikleriyle çok benzer olmasındandır. Aynı şekilde, hiperbolik fonksiyonlardan elde edilen bağıntılar trigonometrik fonksiyonlardan elde edilen bağıntılarla benzerdir ve bir çoğu da aynıdır:

Trigonometrik Özdeşlik:

a) $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

b) $\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$

c) $\sin(x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$

d) $\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$

e) $\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$

f) $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$

g) $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

Hiperbolik Özdeşlik:

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

$$\sinh(x + y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$$

$$\sinh(x - y) = \sinh x \cosh y - \cosh x \sinh y$$

$$\cosh(x + y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$$

$$\cosh(x - y) = \cosh x \cosh y - \sinh x \sinh y$$

$$\sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x$$

$$\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x$$

Hatta işleme gerek kalmadan, bir kural sayesinde, trigonometrik fonksiyonlardan elde edilen bağıntıların hiperbolik karşılıkları bulunabilir. Bunun için kullanılabilecek en uygun yöntem, Osborn kuralıdır.

Tanım 6.3.1: (Osborn Kuralı) Verilen herhangi bir trigonometrik bağıntının hiperbolik karşılığının elde edilebilmesi için sadece kosinüsü kosinüs hiperbolik ($\cos \rightarrow \cosh$) ve sinüsü sinüs hiperbolik ($\sin \rightarrow \sinh$) olarak değiştirmek yeterlidir. Dikkat edilecek tek önemli nokta, eğer trigonometrik ifade iki sinüs fonksiyonunun çarpımını içeriyorsa, bu ifadenin işareti pozitif iken negatif veya tam tersi yani negatif iken pozitif yapılır.

Örnek 6.3.1 : $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ bağıntısında $\sin^2 x$ iki sinüs fonksiyonunun çarpımı olduğundan dolayı hiperbolik fonksiyon bağıntısına dönüştürülürken, $\sin^2 x$ ifadesi $-\sinh^2 x$ olarak değiştirilir. Sonuç olarak,

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

yazılır. Buraya kadar görüldüğü gibi, hiperbolik fonksiyonlarla trigonometrik fonksiyonların ortak özellikleri vardır, ancak iki fonksiyon türünün her yönüyle aynı özelliklere sahip olduğunu söyleyemeyiz. Örneğin sinüs ve kosinüs trigonometrik fonksiyonları sürekli ve periyodikken, hiperbolik sinüs ve kosinüs fonksiyonları için aynı özellikler geçerli değildir. Diğer taraftan elde edilen bu yeni fonksiyonların hiperbolik olarak ifade edilmesinin elbette ki özel nedenleri vardır. Trigonometrik fonksiyonların çemberin geometrisiyle yakın ilişkisi vardır. Bazen trigonometrik fonksiyonlar çembersel fonksiyonlar olarak isimlendirilirler. Örnek olarak;

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

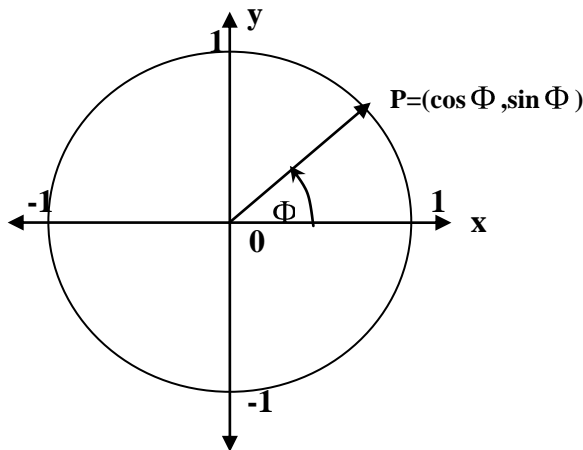
eşitliğinden elde edilen,

$$P = (\cos \Phi, \sin \Phi)$$

noktası birim çember üzerinde bir noktadır ve çemberin geometrisiyle ifade edilebilir

$$x^2 + y^2 = 1$$

birim çemberi çizilirse,



Şekil 6.7 Birim çember

olur. Birim çember üzerinde alınan her $P = (\cos \Phi, \sin \Phi)$ için, birim çember eşitliğinin sağlandığı görülür. Aynı şekilde, hiperbolik fonksiyonların hiperbol geometrisiyle yakın ilişkisi olduğu gösterilebilir. Örnek olarak,

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

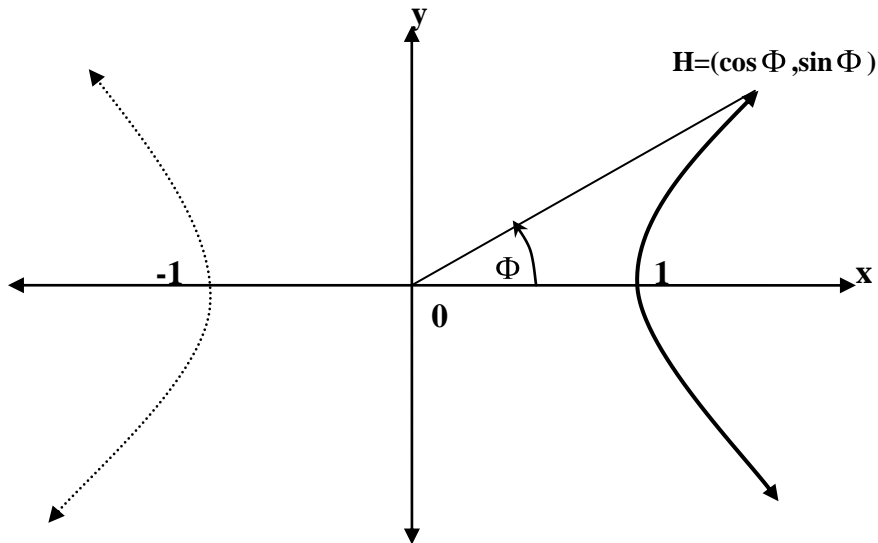
eşitliğinden alınan,

$$H = (\cosh \Phi, \sinh \Phi)$$

noktası,

$$x^2 - y^2 = 1$$

birim hiperbolü üzerinde bir noktadır. İki ayrı eğrisi vardır. Ama $\cosh \Phi > 0$ olduğu için sadece sağdaki eğri alınır. $x^2 - y^2 = 1$ birim hiperbolü çizilirse,



Şekil 6.8 Birim hiperbol

elde edilir. Bundan dolayı sinüs hiperbolik, kosinüs hiperbolik fonksiyonları hiperbolik fonksiyonlar olarak isimlendirilirler. Trigonometrik fonksiyonlar ve hiperbolik fonksiyonlar arasındaki benzerlik bu kadardır. Daha fazla ortak özelliğe sahip değildirlir.

6.4. Hiperbolik Fonksiyonlar için Genel Formüller

1) Toplam Formülleri:

$$a) \sinh(x \pm y) = \sinh x \cosh y \pm \cosh x \sinh y$$

$$b) \cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y$$

$$c) \tanh(x \pm y) = \frac{\tanh x \pm \tanh y}{1 \pm \tanh x \tanh y}$$

$$d) \coth(x \pm y) = \frac{\coth x \coth y \pm 1}{\coth y \pm \coth x}$$

2) Çift Kat Açılı Formülleri:

$$a) \sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x$$

$$b) \cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x$$

$$c) \tanh 2x = \frac{2 \tanh x}{1 + \tanh^2 x}$$

3) Yarım Açılı Formülleri

$$a) \sinh \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{\cosh x - 1}{2}}$$

$$b) \cosh \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{\cosh x + 1}{2}}$$

$$c) \tanh \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{\cosh x - 1}{\cosh x + 1}}$$

4) Toplam, Fark ve Çarpım Formülleri

$$a) \sinh x + \cosh y = 2 \sinh x \frac{1}{2}(x + y) \cosh \frac{1}{2}(x - y)$$

$$b) \sinh x + \sinh y = 2 \cosh x \frac{1}{2}(x+y) \sinh \frac{1}{2}(x-y)$$

$$c) \cosh x + \cosh y = 2 \cosh x \frac{1}{2}(x+y) \cosh \frac{1}{2}(x-y)$$

$$d) \cosh x - \cosh y = 2 \cosh x \frac{1}{2}(x+y) \cosh \frac{1}{2}(x-y)$$

$$e) \sinh x \sinh y = \frac{1}{2}[\cosh(x+y) - \cosh(x-y)]$$

$$f) \cosh x \cosh y = \frac{1}{2}[\cosh(x+y) + \cosh(x-y)]$$

$$g) \sinh x \cosh y = \frac{1}{2}[\sinh h(x+y) - \sinh(x-y)]$$

6.5. Hiperbolik Fonksiyonların Grafikleri

1) Kosinüs Hiperbolik Fonksiyonu:

$\cosh x$ ve $\sinh x$ hiperbolik fonksiyonları e^x kullanılarak tanımlanırlar. $\cosh x$ fonksiyonu ,

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

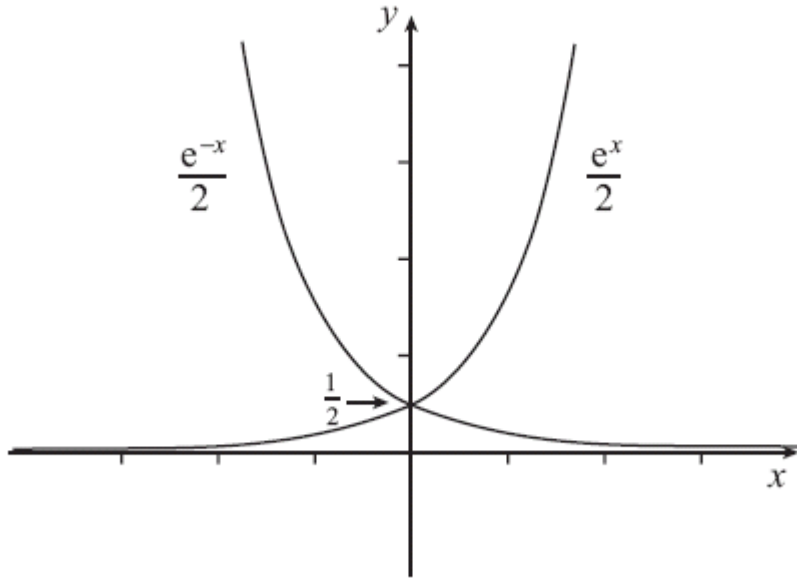
olarak tanımlanır. e^x ve e^{-x} in grafikleri kullanılarak $\cosh x$ fonksiyonunun grafiği çizilebilir. İlk aşamada $\cosh 0$ in değeri hesaplanırsa,

$$\cosh 0 = \frac{e^0 + e^0}{2} = 1$$

olur. Sonra, x değeri büyürken ne olacağının görülebilmesi için $\cosh x$ ifadesi,

$$\cosh x = \frac{e^x}{2} + \frac{e^{-x}}{2}$$

biçiminde yazılabilir. x değeri büyürken fonksiyonun grafiğinin davranışını görebilmek için fonksiyonu oluşturan iki üstel ifadenin grafiklerine bakılır,



Şekil 6.9 $e^x/2$ ve $e^{-x}/2$ fonksiyonlarının grafikleri

x artarken, e^x de hızlı artandır ancak e^{-x} tam tersine hızlı azalır. Bunun için, $\frac{e^x}{2} + \frac{e^{-x}}{2}$ toplamının ikinci kısmı yani $\frac{e^{-x}}{2}$, x artarken çok az bir artış gösterir.

Bundan dolayı, x değeri artarken, $\cosh x$ değeri gittikçe $\frac{e^x}{2}$ ye yaklaşır. Dolayısıyla x in çok büyük değerleri için,

$$\cosh x \approx \frac{e^x}{2}$$

yazılabilir. Ancak $\cosh x$ fonksiyonunun grafiği, her zaman $\frac{e^x}{2}$ fonksiyonun

grafiklerinin üstünde kalacaktır. Çünkü $\frac{e^{-x}}{2}$ ne kadar küçülürse küçülsün, daima değeri 0 dan büyük olacaktır. x daha da büyüdükçe iki grafik arasındaki fark gittikçe küçülecektir. x , 0 dan küçük olduğunda, negatif olarak küçüldükçe ve mutlak değer olarak büyüdükçe, e^{-x} hızla artacaktır. Fakat e^x tam tersine hızla azalacaktır. Bunun için $\frac{e^x}{2} + \frac{e^{-x}}{2}$ toplamının birinci kısmı gittikçe küçülecektir. x negatif olarak

küçüldükçe ve mutlak değer olarak gittikçe büyüdükçe, $\cosh x$ fonksiyonu $\frac{e^{-x}}{2}$ ye yaklaşacaktır. Dolayısıyla mutlak değerce çok büyük negatif x değerleri için,

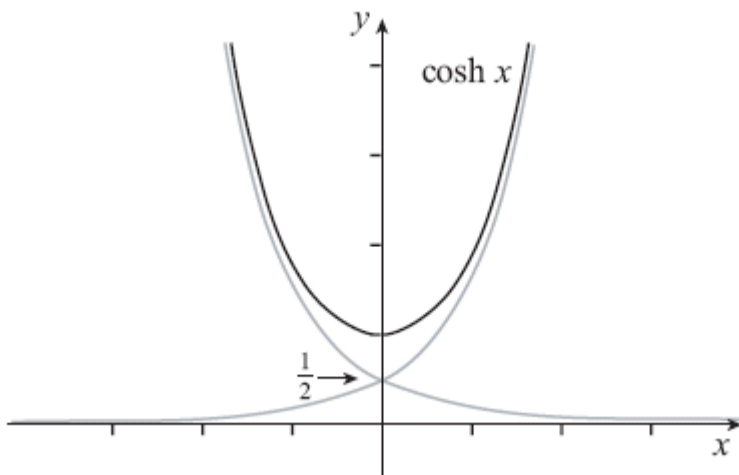
$$\cosh x \approx \frac{e^{-x}}{2}$$

yazılabilir. $\cosh x$ fonksiyonunun grafiği her zaman x negatifken, $\frac{e^{-x}}{2}$ fonksiyonunun

grafığının üstünde kalacaktır. Çünkü $\frac{e^x}{2}$ ne kadar küçülürse küçülsün daima değeri 0 dan büyük olacaktır. Ama x negatif olarak daha da küçüldükçe ve mutlak değer olarak büyüdükçe, iki grafik arasındaki fark gittikçe küçülecektir. Şimdi bu bilgiler ışığında, $\cosh x$ fonksiyonunun grafiği daha rahat gözlemlenebilir. $\cosh x$ fonksiyonunun grafiği çizildiğinde, aynı zamanda fonksiyonun y eksenine göre simetrik olduğu görülür. Çünkü,

$$\cosh x = \cosh(-x)$$

dir. $\cosh x$ fonksiyonunun grafiği $\frac{e^x}{2}, \frac{e^{-x}}{2}$ fonksiyonlarıyla beraber Tablo 6.10 da olduğu gibidir,



Şekil 6.10 $\cosh x$ fonksiyonunun grafiği

2) Sinüs Hiperbolik Fonksiyonu:

Sinüs hiperbolik fonksiyonu,

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

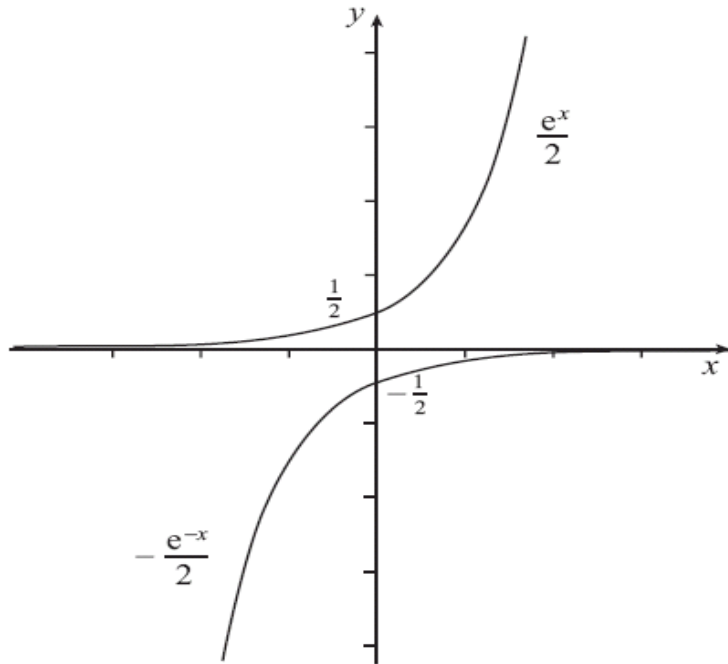
formülüyle ifade edilir. Kosinüs hiperbolik fonksiyonunda olduğu gibi, sinüs hiperbolik fonksiyonunun grafiği de, e^x ve e^{-x} fonksiyonları baz alınarak gözlemlenebilir. İlk olarak, $x = 0$ için $\sinh 0$ değeri hesaplandığında,

$$\sinh 0 = \frac{e^0 - e^0}{2} = 0$$

bulunur. Sonra, x değeri büyürken ne olacağını görülebilmesi için, $\sinh x$ ifadesi,

$$\sinh x = \frac{e^x}{2} - \frac{e^{-x}}{2}$$

biçiminde yazılabilir. x değeri büyürken fonksiyonun grafiğinin davranışını görebilmek için, fonksiyonu oluşturan iki üstel ifadenin grafiklerine bakılır,



Şekil 6.11 $e^x/2$ ve $-e^{-x}/2$ fonksiyonlarının grafikleri

x artarken, $\frac{e^x}{2}$ de hızlı artandır ama $\frac{e^{-x}}{2}$ tam tersine hızlı azalandır. $\frac{e^x}{2} - \frac{e^{-x}}{2}$

toplamının ikinci kısmı, yani $\frac{e^{-x}}{2}$, x artarken çok az bir artış gösterir. Bundan dolayı

x değeri artarken, $\sinh x$ değeri gittikçe $\frac{e^x}{2}$ ye yaklaşır. Dolayısıyla, x in çok büyük değerleri için,

$$\sinh x \approx \frac{e^x}{2}$$

yazılabilir. Ancak $\sinh x$ fonksiyonunun grafiği her zaman, $-\frac{e^x}{2}$ fonksiyonun

grafığının altında kalacaktır. Çünkü $\frac{e^{-x}}{2}$ ne kadar küçülürse küçülsün daima değeri 0

dan büyük olacaktır. x daha da büyüdükçe iki grafik arasındaki fark gittikçe küçülecektir. x , 0 dan küçük olduğunda, negatif olarak küçüldükçe ve mutlak değer olarak büyüdükçe $-e^{-x}$ fonksiyonu negatif olarak mutlak değerce hızla

büyüyecektir. e^x ise hızla küçülecektir. Bundan dolayı $\frac{e^x}{2} - \frac{e^{-x}}{2}$ toplamının birinci

kısmı gittikçe küçülecektir. Bunun için $\sinh x$ fonksiyonu gittikçe $\frac{e^{-x}}{2}$ fonksiyonuna

yaklaşacaktır. Dolayısıyla x in çok büyük değerleri için,

$$\sinh x \approx -\frac{e^x}{2}$$

ifadesi yazılabilir. Ancak x negatifken, $\sinh x$ fonksiyonunun grafiği her zaman $\frac{e^{-x}}{2}$

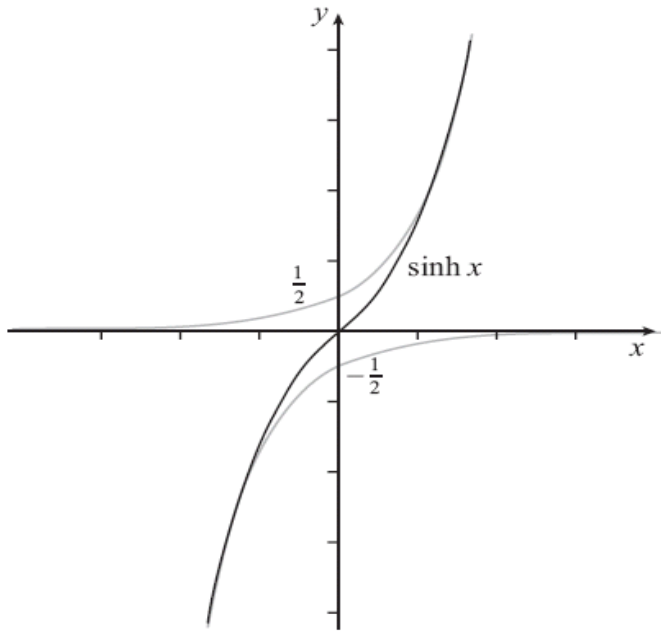
fonksiyonunun grafiğinin üstünde kalacaktır. Çünkü $\frac{e^x}{2}$ ne kadar küçülürse küçülsün

daima değeri olarak 0 dan büyük olacaktır. Ama x negatif olarak daha da küçüldükçe ve mutlak değeri olarak büyüdükçe iki grafik arasındaki fark gittikçe küçülecektir.

Burada dikkat edilecek nokta, $\cosh x$ fonksiyonu gibi $\sinh x$ fonksiyonu y eksenine göre simetrik değildir. $\sinh x$ fonksiyonu tek bir fonksiyon yani,

$$\sinh x = -\sinh(-x)$$

eşitliği vardır. $\sinh x$ fonksiyonunun grafiği,



Şekil 6.12 $\sinh x$ fonksiyonunun grafiği

biçimindedir. Görüldüğü gibi kosinüs ve sinüs hiperbolik fonksiyonlarının her ikisi de x değeri büyüdükçe, $\frac{e^x}{2}$ değerine yaklaşır. Bundan dolayı, çok büyük x değerleri için $\cosh x$ ve $\sinh x$ olabildiğince birbirlerine yaklaşır. Bunun için çok büyük x değerleri için,

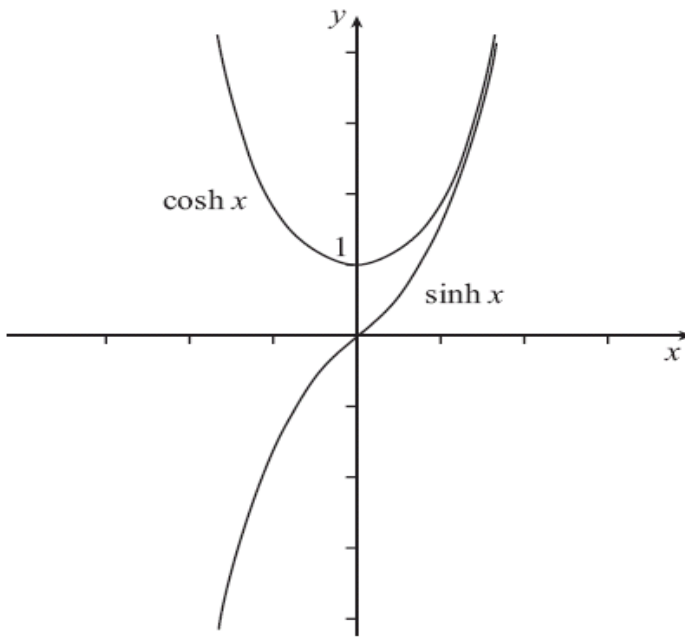
$$\sinh x \approx \cosh x$$

ifadesi yazılabilir. Aynı şekilde x negatif olarak mutlak değerce büyüdükçe $\sinh x$ fonksiyonu, $-\frac{e^{-x}}{2}$ fonksiyonuna yaklaşırken, $\cosh x$ fonksiyonu $\frac{e^{-x}}{2}$ ye

yaklaşmaktadır. Bundan dolayı x negatif olarak mutlak değer olarak arttıkça, $\sinh x$ ve $-\cosh x$ fonksiyonları gittikçe birbirlerine yaklaşırlar. Sonuç olarak mutlak değerce çok büyük negatif x değerleri için,

$$\sinh x \approx -\cosh x$$

ifadesi yazılabilir. Eğer $\sinh x$ ve $\cosh x$ fonksiyonlarının grafiği aynı eksenler üzerinde gösterildiğinde bahsedilen yaklaşımlar daha rahat görülebilir,



Şekil 6.13 $\cosh x$ ve $\sinh x$ ortak grafiği

3) Tanjant Hiperbolik Fonksiyonu:

Tanjant hiperbolik fonksiyonu,

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

biçiminde ifade edilen fonksiyondur. Sinüs ve kosinüs hiperbolik fonksiyonlarında olduğu gibi tanjant hiperbolik fonksiyonunun da üstel fonksiyonlarıyla yakın alakası vardır. Tanjant hiperbolik fonksiyonu,

$$\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

biçiminde yazılabilir. $\sinh x$ ve $\cosh x$ fonksiyonları konusundaki bilgiler $\tanh x$ fonksiyonunun grafiğini çizmek için kullanılabilir. İlk olarak $x=0$ için $\tanh x$ in değerine bakılırsa,

$$\tanh 0 = \frac{\sinh 0}{\cosh 0} = 0$$

olur. x değeri büyüdükçe, $\sinh x \approx \cosh x$ ifadesi ortaya çıktığından dolayı $\tanh x$ değeri 1 e yaklaşacaktır.

$$\tanh x \approx 1$$

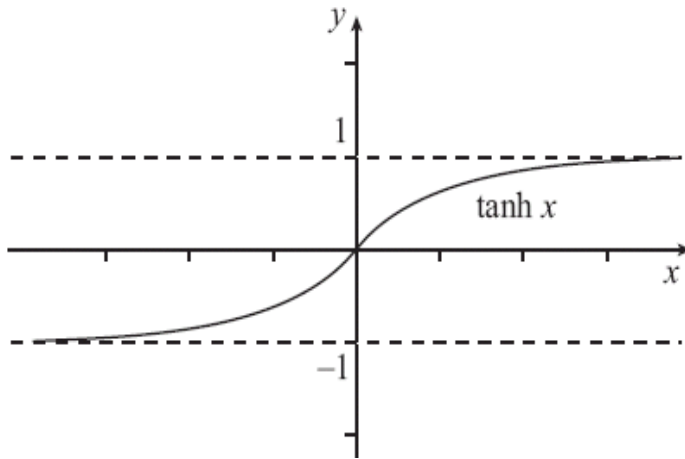
Ama $\sinh x$, her zaman $\cosh x$ den küçük olacağından dolayı, $\tanh x$ fonksiyonu her zaman 1 den küçük olacaktır. Ne kadar 1 e yaklaşırsa yaklaşsın hiçbir zaman 1 değerini alamayacaktır. x negatif olarak mutlak değerce arttığında ise, $\sinh x \approx -\cosh x$ olacağından $\tanh x$ gittikçe -1 e yaklaşacaktır. Yani mutlak değerce çok büyük negatif x değerleri için,

$$\tanh x \approx -1$$

olur. Ancak $\sinh x$ her zaman $-\cosh x$ den büyük olduğundan, $\tanh x$ her zaman -1 den büyük olur. x negatif olarak mutlak değerce arttıkça $\tanh x$ gittikçe -1 e yaklaşır. Ama asla -1 olamaz. $\tanh x$ fonksiyonu simetrik fonksiyon değildir. Grafikte de bu rahatça görülebilir. Tek bir fonksiyondur,

$$\tanh(-x) \approx -\tanh x$$

olur. $\tanh x$ fonksiyonunun grafiği,



Şekil 6.14 $\tanh x$ fonksiyonunun grafiği

olur. Diğer hiperbolik fonksiyonlar $\sinh x$, $\cosh x$ ve $\tanh x$ fonksiyonları kadar sık kullanılmazlar.

BÖLÜM 7. HİPERBOLİK FIBONACCI VE LUCAS FONKSİYONLARI

7.1. Hiperbolik Fibonacci ve Lucas Fonksiyonları

Fibonacci sayıları arasındaki tekrarlı bağıntı,

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

$$F_0 = 0, F_1 = 1$$

Lucas sayıları arasındaki tekrarlı bağıntı ise,

$$L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$$

$$L_0 = 2, L_1 = 1$$

biçimindedir. İlk dokuz Fibonacci ve Lucas sayısı yazıldığında,

Tablo 7.1 Negatif ve pozitif indisli Fibonacci ve Lucas sayıları

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
F_n	0	1	1	2	3	5	8	13	21
F_{-n}	0	1	-1	2	-3	5	-8	13	-21
L_n	2	1	3	4	7	11	18	29	47
L_{-n}	2	-1	3	-4	7	-11	18	-29	-47

F_n ve L_n sayılarının aralarında var olan birçok özellik görülebilir. Tabloya bakıldığında F_n ve F_{-n} dizilerinin belli değerlerde çakıştığı görülür. $k \in \mathbb{Z}$ için $n=2k+1$, yani tek indisli terimler için iki dizinin terimleri birbirine eşit, $n=2k$ yani çift indisli terimler ise birbirlerinin ters işaretlisidir;

$$F_{2k} = -F_{-2k}$$

$$F_{2k+1} = F_{-2k-1}$$

olur. Bundan dolayı,

$$F_n = (-1)^{n+1} F_{-n}$$

biçiminde bir eşitlik olduğunu hatırlayalım. Benzer özellikler Fibonacci sayılarında olduğu gibi, Lucas sayılarında da geçerlidir. $n=2k$ yani çift indisli terimler birbirlerine eşit, tek terimliler ise birbirlerinin zıt işaretlisidir. Yani,

$$L_{2k} = L_{-2k}$$

$$L_{2k+1} = -L_{-2k-1}$$

olur. Bundan dolayı,

$$L_n = (-1)^n L_{-n}$$

biçiminde bir eşitlik yazılabilir. Binet Formülüne göre bu ifadeler düzenlendiğinde,

$$F_n = \begin{cases} \frac{\Phi^{2k+1} + \Phi^{-(2k+1)}}{\sqrt{5}} & n = 2k + 1 \\ \frac{\Phi^{2k} - \Phi^{-2k}}{\sqrt{5}} & n = 2k \end{cases}$$

$$L_n = \begin{cases} \Phi^{2k} + \Phi^{-2k} & n = 2k \\ \Phi^{2k+1} - \Phi^{-(2k+1)} & n = 2k + 1 \end{cases}$$

olur. Eğer elde edilen bu bağıntılardaki k sayıları, x ile değiştirilir ve x reel sayı olarak tanımlanırsa sonuçta sürekli fonksiyonlar olan ve hiperbolik Fibonacci ve hiperbolik Lucas fonksiyonları olarak adlandırılan Stakhov [18] de tanımlanan fonksiyonlar elde edilir. Kosinüs hiperbolik olduğunda fonksiyonun önüne c , sinüs hiperbolik olduğunda ise fonksiyonun önüne s harfi getirilerek ifade edilirler. Sırasıyla,

hiperbolik Fibonacci sinüs fonksiyonu,

$$sF(x) = \frac{\Phi^{2x} - \Phi^{-2x}}{\sqrt{5}}$$

hiperbolik Fibonacci kosinüs fonksiyonu,

$$cF(x) = \frac{\Phi^{2x+1} + \Phi^{-(2x+1)}}{\sqrt{5}}$$

hiperbolik Lucas sinüs fonksiyonu,

$$sL(x) = \Phi^{2x+1} - \Phi^{-(2x+1)}$$

hiperbolik Lucas kosinüs fonksiyonu,

$$cL(x) = \Phi^{2x} + \Phi^{-2x}$$

biçiminde ifade edilirler. $k \in \mathbb{Z}$ alındığında, hiperbolik Fibonacci ve Lucas fonksiyonlarıyla, Fibonacci ve Lucas sayıları arasında,

$$sF(k) = F_{2k}$$

$$cF(k) = F_{2k+1}$$

$$sL(k) = L_{2k+1}$$

$$cL(k) = L_{2k}$$

eşitlikleri yazılabilir.

7.2. m. mertebeden Hiperbolik Fibonacci ve Lucas Fonsiyonları

m. mertebeden Fibonacci sayıları,

$$F_m(n) = \frac{\Phi_m^n - (-1)^n \Phi_m^{-n}}{\sqrt{4 + m^2}} \quad (7.1)$$

bağıntısı ile m. mertebeden Lucas sayıları ise,

$$L_m(n) = (\Phi_m)^n + (-1)^n (\Phi_m)^{-n} \quad (7.2)$$

bağıntısı ile ifade edildiğini hatırlanırsa, $k \in \mathbb{Z}$ için,

$$F_m(n) = \begin{cases} sF_m(n) & n = 2k \\ cF_m(n) & n = 2k + 1 \end{cases}$$

$$L_m(n) = \begin{cases} cL_m(n) & n = 2k \\ sL_m(n) & n = 2k + 1 \end{cases}$$

eşitliklerinde n yerine x değişkeni yazılarak ve fonksiyon dönüşümleri yapılarak eşitlikler yazıldığında, sırasıyla,

$$F_m(x) = \begin{cases} sF_m(x) & x = 2k \\ cF_m(x) & x = 2k + 1 \end{cases}$$

$$L_m(x) = \begin{cases} cL_m(x) & x = 2k \\ sL_m(x) & x = 2k + 1 \end{cases}$$

fonksiyonları elde edilir. (7.1) formülünde n yerine x yazılırsa,

$$F_m(x) = \frac{\Phi_m^x - (-1)^x \Phi_m^{-x}}{\sqrt{4 + x^2}} \quad (7.3)$$

olur. (7.3) bağıntısında $x = 2k$ eşitliği için, m . mertebeden hiperbolik Fibonacci sinüs fonksiyonu,

$$sF_m(x) = \frac{\Phi_m^x - \Phi_m^{-x}}{\sqrt{4 + m^2}} = \frac{1}{\sqrt{m^2 + 4}} \left[\left(\frac{m + \sqrt{m^2 + 4}}{2} \right)^x - \left(\frac{m - \sqrt{m^2 + 4}}{2} \right)^{-x} \right]$$

olur. Yine (7.3) bağıntısında $x = 2k + 1$ eşitliği için, m . mertebeden hiperbolik Fibonacci kosinüs fonksiyonu,

$$cF_m(x) = \frac{\Phi_m^x + \Phi_m^{-x}}{\sqrt{4 + m^2}} = \frac{1}{\sqrt{m^2 + 4}} \left[\left(\frac{m + \sqrt{m^2 + 4}}{2} \right)^x + \left(\frac{m - \sqrt{m^2 + 4}}{2} \right)^{-x} \right]$$

elde edilir. (7.2) bağıntısında, n yerine x yazılırsa,

$$L_m(x) = (\Phi_m)^x + (-1)^x (\Phi_m)^{-x} \quad (7.4)$$

olur. (7.4) bağıntısında, $x = 2k$ eşitliği için m . mertebeden hiperbolik Lucas kosinüs fonksiyonu,

$$cL_m(x) = \Phi_m^x + \Phi_m^{-x} = \left(\frac{m + \sqrt{m^2 + 4}}{2} \right)^x + \left(\frac{m - \sqrt{m^2 + 4}}{2} \right)^{-x}$$

Yine (7.4) bağıntısında, $x = 2k + 1$ eşitliği için, m . mertebeden hiperbolik Lucas sinüs fonksiyonu,

$$sL_m(x) = \Phi_m^x - \Phi_m^{-x} = \left(\frac{m + \sqrt{m^2 + 4}}{2}\right)^x - \left(\frac{m - \sqrt{m^2 + 4}}{2}\right)^{-x}$$

bağıntısı elde edilir. m . mertebeden hiperbolik Fibonacci ve Lucas fonksiyonları, m . mertebeden Fibonacci ve Lucas sayıları türünden eşitleri yazılabilir. m . mertebeden diğer Fibonacci ve Lucas fonksiyonları da sırasıyla,

m . mertebeden hiperbolik Fibonacci tanjant fonksiyonu,

$$tF_m(x) = \frac{sF_m(x)}{cF_m(x)} = \frac{\Phi_m^x - \Phi_m^{-x}}{\Phi_m^x + \Phi_m^{-x}}$$

m . mertebeden hiperbolik Fibonacci kotanjant fonksiyonu,

$$ctF_m(x) = \frac{cF_m(x)}{sF_m(x)} = \frac{\Phi_m^x + \Phi_m^{-x}}{\Phi_m^x - \Phi_m^{-x}}$$

m . mertebeden hiperbolik Lucas tanjant fonksiyonu,

$$tL_m(x) = \frac{sL_m(x)}{cL_m(x)} = \frac{\Phi_m^x - \Phi_m^{-x}}{\Phi_m^x + \Phi_m^{-x}}$$

m . mertebeden hiperbolik Lucas kotanjant fonksiyonu,

$$ctL_m(x) = \frac{cL_m(x)}{sL_m(x)} = \frac{\Phi_m^x + \Phi_m^{-x}}{\Phi_m^x - \Phi_m^{-x}}$$

olur.

7.2.1. m. mertebeden Hiperbolik Fibonacci ve Lucas Fonksiyonlarının Özellikleri

Hiperbolik Fibonacci ve Lucas fonksiyonları arasında birçok bağıntı vardır. Bunlardan bazıları:

1) Hiperbolik Fibonacci ve Lucas tanjant ve kotanjant fonksiyonları birbirlerine eşittir,

$$tF_m(x) = tL_m(x)$$

$$ctF_m(x) = ctL_m(x)$$

2) Bir fonksiyonun çift olabilmesi için,

$$f(-x) = f(x)$$

Tek olabilmesi içinde,

$$f(-x) = -f(x)$$

eşitliklerinin sağlanması gerekir. Bundan yola çıkarak hiperbolik Fibonacci ve Lucas fonksiyonları incelendiğinde, ilk olarak,

$$sF_m(-x) = \frac{\Phi_m^{-x} - \Phi_m^x}{\sqrt{4+m^2}} = -\frac{\Phi_m^x - \Phi_m^{-x}}{\sqrt{4+m^2}} = -sF_m(x)$$

olur. $sF_m(-x) = -sF_m(x)$ olduğundan, $sF_m(x)$ fonksiyonu tek bir fonksiyondur.

$$cF_m(-x) = \frac{\Phi_m^{-x} + \Phi_m^x}{\sqrt{4+m^2}} = \frac{\Phi_m^x + \Phi_m^{-x}}{\sqrt{4+m^2}} = cF_m(x)$$

olur. $cF_m(-x) = cF_m(x)$ olduğundan, $cF_m(x)$ fonksiyonu çift bir fonksiyondur.

$$tF_m(-x) = \frac{sF_m(-x)}{cF_m(-x)} = \frac{\Phi_m^{-x} - \Phi_m^x}{\Phi_m^{-x} + \Phi_m^x} = -\frac{(\Phi_m^x - \Phi_m^{-x})}{\Phi_m^x + \Phi_m^{-x}} = -tF_m(x)$$

olur. $tF_m(-x) = -tF_m(x)$ olduğundan, $tF_m(x)$ fonksiyonu tek bir fonksiyondur.

$$ctF_m(-x) = \frac{cF_m(-x)}{sF_m(-x)} = \frac{\Phi_m^{-x} + \Phi_m^x}{\Phi_m^{-x} - \Phi_m^x} = -\frac{(\Phi_m^x + \Phi_m^{-x})}{\Phi_m^x - \Phi_m^{-x}} = -ctF_m(x)$$

olur. $ctF_m(-x) = -ctF_m(x)$ olduğundan, $ctF_m(x)$ fonksiyonu tek bir fonksiyondur.

Aynı işlemler Lucas hiperbolik fonksiyonları içinde uygulanabilir.

3) m. mertebeden Fibonacci tekrarlı bağıntısı olan,

$$F_m(n+2) = mF_m(n+1) + F_m(n)$$

ifadesinin benzeri m. mertebeden Fibonacci fonksiyonlarında,

$$sF_m(x+2) = m.cF_m(x+1) + sF_m(x)$$

$$cF_m(x+2) = m.sF_m(x+1) + cF_m(x)$$

biçiminde yazılabilir.

4) m. mertebeden Fibonacci sayıları için elde edilen Cassini Formülü:

$$F_m(n+1)F_m(n-1) - F_m(n)^2 = (-1)^n$$

benzer şekilde m. mertebeden Fibonacci fonksiyonlarında,

$$cF_m(x+1)cF_m(x-1) - (sF_m(x))^2 = 1$$

$$sF_m(x+1)sF_m(x-1) - (cF_m(x))^2 = -1$$

biçiminde yazılabilir.

7.3. Simetrik Hiperbolik Fibonacci ve Lucas Fonksiyonları

Klasik hiperbolik fonksiyonlar, simetri eksenlerine göre simetriklik özelliği taşırlar. Ancak aynı durum, hiperbolik Fibonacci ve Lucas fonksiyonları için geçerli değildir. Bu sorunu aşmak ve farklılığı ortadan kaldırmak için, Stakhov [18] de simetrik Fibonacci ve Lucas fonksiyonları tanımlanmaktadır. Hiperbolik Fibonacci ve Lucas fonksiyonlarında $2x$ olan üsler x olarak alındığında, simetrik Fibonacci ve Lucas fonksiyonları elde edilir. Sırasıyla,

simetrik hiperbolik Fibonacci sinüs fonksiyonu,

$$sF(x) = \frac{\Phi^{2x} - \Phi^{-2x}}{\sqrt{5}} \Rightarrow sF_s(x) = \frac{\Phi^x - \Phi^{-x}}{\sqrt{5}}$$

simetrik hiperbolik Fibonacci kosinüs fonksiyonu,

$$cF(x) = \frac{\Phi^{2x+1} + \Phi^{-(2x+1)}}{\sqrt{5}} \Rightarrow cF_s(x) = \frac{\Phi^x + \Phi^{-x}}{\sqrt{5}}$$

simetrik hiperbolik Lucas sinüs fonksiyonu,

$$sL(x) = \Phi^{2x+1} - \Phi^{-(2x+1)} \Rightarrow sL_s(x) = \Phi^x - \Phi^{-x}$$

simetrik hiperbolik Lucas kosinüs fonksiyonu,

$$cL(x) = \Phi^{2x} + \Phi^{-2x} \Rightarrow cL_s(x) = \Phi^x + \Phi^{-x}$$

biçiminde ifade edilirler. Simetrik hiperbolik Fibonacci ve Lucas fonksiyonlarıyla, Fibonacci ve Lucas sayıları birebir eşitliklerle,

$$F_n = \begin{cases} cF_s(n) & n = 2k + 1 \\ sF_s(n) & n = 2k \end{cases}$$

$$L_n = \begin{cases} cL_s(n) & n = 2k \\ sL_s(n) & n = 2k + 1 \end{cases}$$

biçiminde yazılabilirler. Simetrik hiperbolik Fibonacci ve Lucas Fonksiyonları kendi aralarında da,

$$sF_s(x) = \frac{sL_s(x)}{\sqrt{5}}$$

$$cF_s(x) = \frac{cL_s(x)}{\sqrt{5}}$$

eşitlikleri yazılabilir. Bunun yanında simetrik Fibonacci ve Lucas fonksiyonları klasik hiperbolik fonksiyonlar cinsinden de yazılabilirler. İlk olarak simetrik hiperbolik Fibonacci fonksiyonu için incelendiğinde,

$$sF_s(x) = \frac{\Phi^x - \Phi^{-x}}{\sqrt{5}}$$

eşitliğinde $\Phi_m = e^m = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ alındığında,

$$sF_s(x) = \frac{e^{mx} - e^{-mx}}{\sqrt{5}}$$

biçiminde yazılır. $\ln \Phi = m$ eşitliğinden,

$$sF_s(x) = \frac{e^{\ln \Phi x} - e^{-\ln \Phi x}}{\sqrt{5}}$$

elde edilir. Eşitlik,

$$sF_s(x) = \frac{2}{\sqrt{5}} \frac{e^{\ln\Phi x} - e^{-\ln\Phi x}}{2}$$

sinüs hiperbolik fonksiyonunun özelliğinden,

$$sF_s(x) = \frac{2}{\sqrt{5}} \sinh(\ln \Phi.x)$$

olur. Aynı yöntemle, simetrik hiperbolik Fibonacci kosinüs fonksiyonu için uygulanarak,

$$cF_s(x) = \frac{\Phi^x + \Phi^{-x}}{\sqrt{5}}$$

eşitliğinde $\Phi_m = e^m = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ alındığında,

$$cF_s(x) = \frac{e^{mx} + e^{-mx}}{\sqrt{5}}$$

biçiminde yazılır. $\ln \Phi = m$ eşitliğinden,

$$cF_s(x) = \frac{e^{\ln\Phi x} + e^{-\ln\Phi x}}{\sqrt{5}}$$

elde edilir. Eşitlik,

$$cF_s(x) = \frac{2}{\sqrt{5}} \frac{e^{\ln\Phi x} + e^{-\ln\Phi x}}{\sqrt{5}}$$

kosinüs hiperbolik fonksiyonunun özelliğinden,

$$cF_s(x) = \frac{2}{\sqrt{5}} \cosh(\ln \Phi.x)$$

elde edilir. Simetrik hiperbolik Lucas sinüs fonksiyonu,

$$sL_s(x) = \Phi^x - \Phi^{-x}$$

eşitliğinde $\Phi_m = e^m = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ alındığında,

$$sL_s(x) = e^{mx} - e^{-mx}$$

biçiminde yazılır. $\ln \Phi = m$ eşitliğinden,

$$sL_s(x) = e^{\ln \Phi \cdot x} - e^{-\ln \Phi \cdot x}$$

elde edilir. Eşitlik,

$$sL_s(x) = 2 \frac{e^{\ln \Phi x} - e^{-\ln \Phi x}}{2}$$

sinüs hiperbolik fonksiyonunun özelliğinden,

$$sL_s(x) = 2 \sinh(\ln \Phi \cdot x)$$

olur. Aynı şekilde, simetrik hiperbolik Lucas kosinüs fonksiyonu,

$$cL_s(x) = \Phi^x + \Phi^{-x}$$

eşitliğinde $\Phi_m = e^m = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ alındığında,

$$cL_s(x) = e^{mx} + e^{-mx}$$

biçiminde yazılır. $\ln \Phi = m$ eşitliğinden,

$$cL_s(x) = e^{\ln \Phi \cdot x} + e^{-\ln \Phi \cdot x}$$

elde edilir. Eşitlik,

$$cL_s(x) = 2 \frac{e^{\ln \Phi x} + e^{-\ln \Phi x}}{2}$$

kosinüs hiperbolik fonksiyonunun özelliğinden,

$$cL_s(x) = 2 \cosh(\ln \Phi x) \text{ olur.}$$

7.3.1. Simetrik fibonacci ve lucas fonksiyonlarının özellikleri

Simetrik Fibonacci ve Lucas fonksiyonları arasında birçok bağıntı vardır. Bunlardan bazıları,

$$1) sF_s(x) = \frac{sL_s(x)}{\sqrt{5}} \text{ ve } cF_s(x) = \frac{cL_s(x)}{\sqrt{5}} \text{ eşitlikleri vardır.}$$

2) Herhangi bir simetrik ifade verildiğinde $sF_s(x)$ yerine $cF_s(x)$ veya $cF_s(x)$ yerine $sF_s(x)$ yazılabilir. Aynı özellik Lucas sayıları içinde sağlanır. Örneğin,

$$sF_s(x+3) + cF_s(x) = 2cF_s(x+2)$$

eşitliği,

$$cF_s(x+3) + sF_s(x) = 2sF_s(x+2)$$

biçiminde yazılabilir. Aynı şekilde,

$$sL_s(x) + cL_s(x+3) = 2cL_s(x+2)$$

eşitliği,

$$cL_s(x) + sL_s(x+3) = 2sL_s(x+2)$$

biçiminde yazılabilir.

3) Fibonacci sayıları için geçerli olan,

$$F(n+2) = F(n+1) + F(n)$$

tekrarlı bağıntısı simetrik fonksiyonlar içinde kullanılabilir.

$$sF_s(x+2) = cF_s(x+1) + sF_s(x)$$

$$cF_s(x+2) = sF_s(x+1) + cF_s(x)$$

eşitlikleri yazılabilir.

4) Fibonacci sayılarında kullanılan formüllerden birisi olan Cassini formülü:

$$F(n+1)F(n-1) - F(n)^2 = (-1)^n$$

benzer biçimde simetrik Fibonacci fonksiyonları cinsinden,

$$cF_s(x+1)cF_s(x-1) - [sF_s(x)]^2 = 1$$

$$sF_s(x+1)sF_s(x-1) - [cF_s(x)]^2 = -1$$

biçiminde yazılabilir.

5) Hiperbolik fonksiyonların özelliklerinden birisi olan,

$$(\cosh x)^2 + (\sinh x)^2 = 1$$

ifadesinin benzeri simetrik hiperbolik Fibonacci fonksiyonlarında,

$$(cF_s(x))^2 + (sF_s(x))^2 = \frac{4}{5}$$

biçiminde yazılabilir.

7.4. Simetrik Fibonacci ve Lucas Fonksiyon Grafikleri

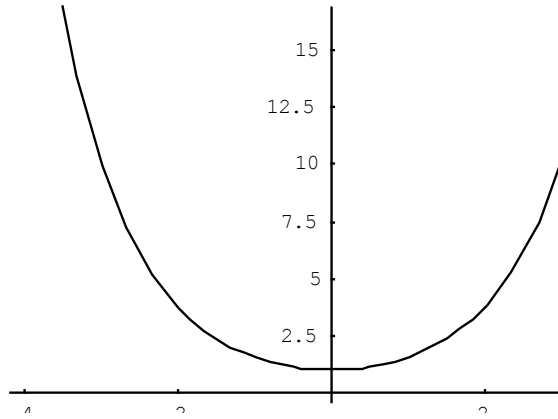
1) Simetrik Hiperbolik Fibonacci Kosinüs Fonksiyonu

$cF_s(x) = \frac{2}{\sqrt{5}} \cosh(\ln \Phi \cdot x)$ fonksiyonu $\cosh x$ fonksiyonuna bağlı değerlere sahip olduğundan grafiği de $\cosh x$ fonksiyonuna benzer şekle sahip olacaktır. İlk olarak başlangıç noktasına göre değerine bakıldığında,

$$cF_s(0) = \frac{2}{\sqrt{5}} \cosh(0)$$

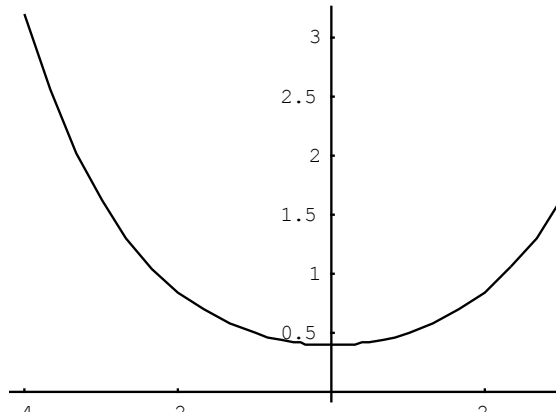
$$cF_s(x) = \frac{2}{\sqrt{5}} \left(\frac{e^0 + e^0}{2} \right) = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

olur. $\cosh x$ fonksiyonunu görüntü kümesi her zaman pozitiftir. Bundan dolayı grafiği x ekseninin üst kısmındadır. En küçük değerini $x=0$ da alır. Aynı durum $\frac{2}{\sqrt{5}} \cosh(\ln \Phi \cdot x)$ fonksiyonu içinde geçerlidir. Ancak $\cosh x$ fonksiyonu bütün x değerleri için daha hızlı artacaktır. Bundan dolayı $\frac{2}{\sqrt{5}} \cosh(\ln \Phi \cdot x)$ fonksiyonunun grafiği, $\cosh x$ fonksiyonunun grafiğinin altında kalacaktır. $\cosh x$ fonksiyonunun grafiği,



Şekil 7.1 $\cosh x$ fonksiyonunun grafiği

olurken, $cF_s(x) = \frac{2}{\sqrt{5}} \cosh(\ln \Phi \cdot x)$ fonksiyonunun grafiği aşağıdaki gibi olur.



Şekil 7.2 $cF_s(x)$ fonksiyonunun grafiği

2) Simetrik Hiperbolik Fibonacci Sinüs Fonksiyonu

$sF_s(x) = \frac{2}{\sqrt{5}} \sinh(\ln \Phi \cdot x)$ fonksiyonu $\sinh x$ fonksiyonuna bağlı değerlere sahip

olduğundan grafiği de $\sinh x$ fonksiyonuna benzer şekle sahip olacaktır. İlk olarak başlangıç noktasına göre değerine bakıldığında,

$$sF_s(0) = \frac{2}{\sqrt{5}} \sinh(0)$$

$$sF_s(x) = \frac{2}{\sqrt{5}} \left(\frac{e^0 - e^0}{2} \right) = 0$$

olur. Diğer değerler için $\frac{2}{\sqrt{5}} \sinh(\ln \Phi \cdot x)$ ile $\sinh x$ fonksiyonunun aldığı değerler karşılaştırılabilir. $\sinh x$ fonksiyonu $x \rightarrow \infty$ için artan bir fonksiyondur. Aynı şekilde $\sinh(\ln \Phi \cdot x)$ fonksiyonu da $x \rightarrow \infty$ için artan bir fonksiyon olacaktır. Hangi fonksiyonun hızlı artacağını görmek için $\ln \Phi$ değerine dikkat edilirse,

$$\ln \Phi = m$$

$$e^m = \Phi$$

$e > \Phi$ olduğundan dolayı m sayısının tanım aralığı,

$$0 < m < 1$$

$$0 < \ln \Phi < 1$$

olur. Bu durumda $x \in \mathbb{R}^+$ için,

$$\sinh x > \sinh(\ln \Phi \cdot x)$$

eşitsizliğinin yanında $\frac{2}{\sqrt{5}} < 1$ olduğundan,

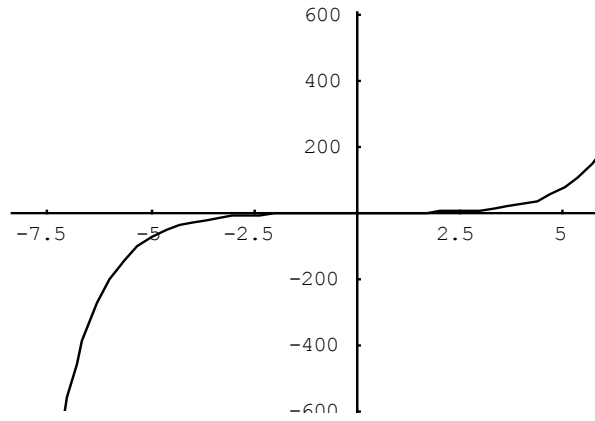
$$\sinh x > \sinh(\ln \Phi \cdot x) > \frac{2}{\sqrt{5}} \sinh(\ln \Phi \cdot x)$$

olur. Bundan dolayı, grafiğe bakıldığında değer olarak $x \rightarrow \infty$ için $\frac{2}{\sqrt{5}} \sinh(\ln \Phi \cdot x)$

fonksiyonunun grafiği $\sinh x$ fonksiyonunun altında kalır. $x \rightarrow -\infty$ için tam tersi bir

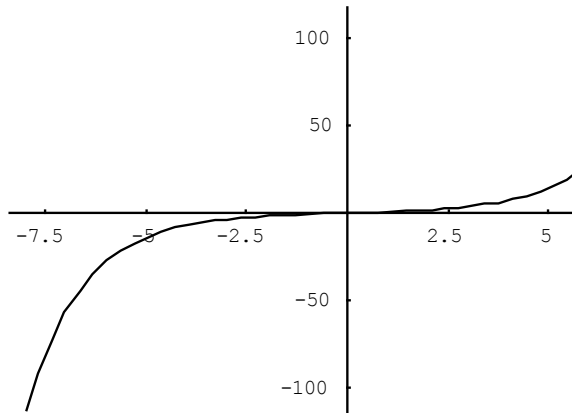
durum ortaya çıkar. $\sinh x$ fonksiyonu $\frac{2}{\sqrt{5}} \sinh(\ln \Phi \cdot x)$ fonksiyonundan

daha hızlı azalacağından dolayı, $\sinh x$ fonksiyonunun üstünde kalır. Bu durum aşağıda verilen fonksiyon grafiklerine bakıldığında daha net görülebilir. $\sinh x$ fonksiyonunun grafiği,



Şekil 7.3 $\sinh x$ fonksiyonunun grafiği

olurken, $cF_s(x) = \frac{2}{\sqrt{5}} \cosh(\ln \Phi \cdot x)$ fonksiyonunun grafiği Şekil 7.4 deki gibi olur.



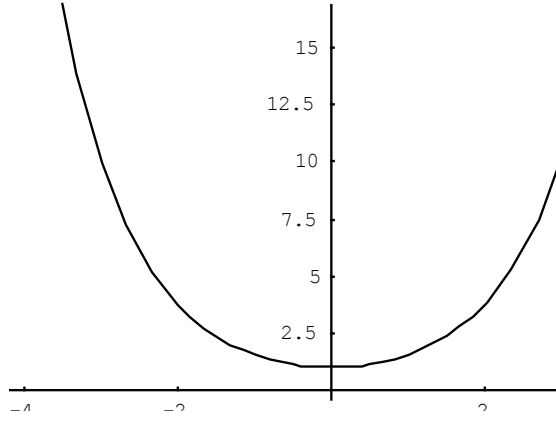
Şekil 7.4 $sF_s(x)$ fonksiyonunun grafiği

3) Simetrik Hiperbolik Lucas Kosinüs Fonksiyonu

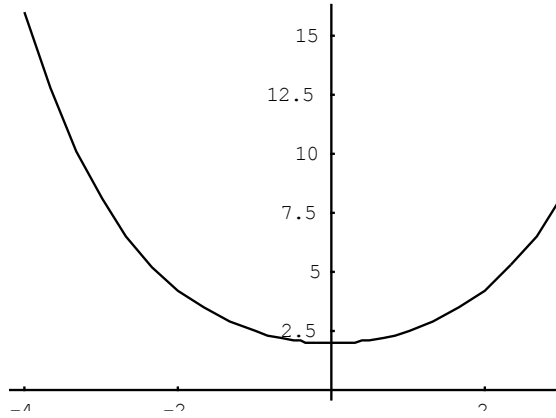
$cL_s(x) = 2 \cosh(\ln \Phi \cdot x)$ fonksiyonu da $\cosh x$ fonksiyonuyla bağlantılı bir fonksiyondur.

$$cL_s(x) = \sqrt{5}cF_s(x)$$

eşitliğinden dolayı $cF_s(x)$ fonksiyonundaki benzer durum $cL_s(x)$ içinde geçerlidir.



Şekil 7.5 $\cosh x$ fonksiyonunun grafiği



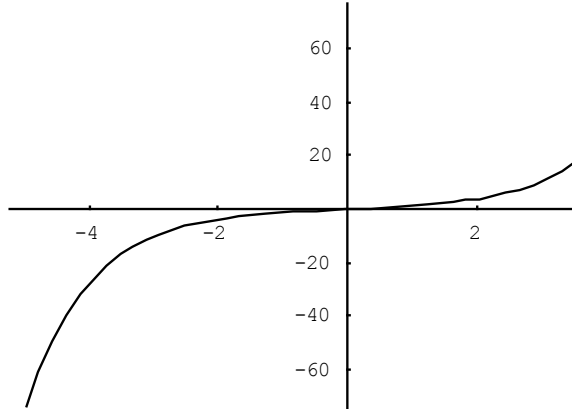
Şekil 7.6 $cL_s(x)$ fonksiyonunun grafiği

4) Simetrik Hiperbolik Lucas Sinüs Fonksiyonu

$sL_s(x) = 2 \sinh(\ln \Phi \cdot x)$ fonksiyonu da $\sinh x$ fonksiyonuyla bağlantılı bir fonksiyondur.

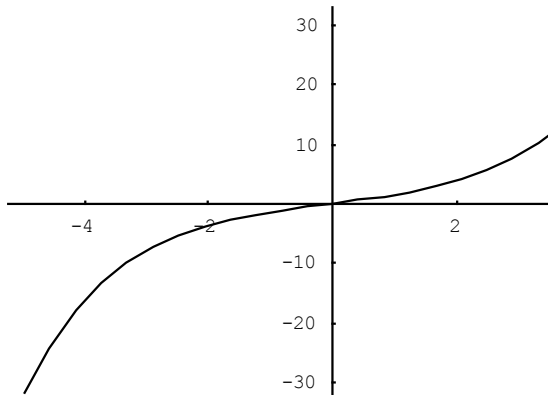
$$sL_s(x) = \sqrt{5}sF_s(x)$$

eşitliğinden dolayı aynı yorum bu fonksiyon içinde yapılabilir. $sL_s(x)$ fonksiyonu ile $\sinh x$ fonksiyonu yakın değerler alacaktır. Ancak yine $\sinh x$ fonksiyonu daha hızlı artacaktır. Bundan dolayı $sF_s(x)$ fonksiyonundaki benzer durum ortaya çıkar. $\sinh x$ fonksiyonunun grafiği,



Şekil 7.7: $\sinh x$ fonksiyonunun grafiği

Şekil 7.7 deki gibi olurken, $sL_s(x) = 2 \sinh(\ln \Phi \cdot x)$ fonksiyonunun grafiği,



Şekil 7.8: $sL_s(x)$ fonksiyonunun grafiği

Şekil 7.8 deki gibi olur.

7.5. Simetrik Fibonacci Fonksiyonları ve m. mertebeden Altın Matris

m. mertebeden Fibonacci altın matrisi,

$$G_m^n = \begin{pmatrix} F_m(n+1) & F_m(n) \\ F_m(n) & F_m(n-1) \end{pmatrix}$$

biçiminde yazıldığını hatırlayalım. Tek ve çift değerlerin incelenmesi için, $k \in Z$ olmak üzere $n=2k$ alındığında,

$$G_m^{2k} = \begin{pmatrix} F_m(2k+1) & F_m(2k) \\ F_m(2k) & F_m(2k-1) \end{pmatrix}$$

ve $n=2k-1$ alındığında,

$$G_m^{2k+1} = \begin{pmatrix} F_m(2k+2) & F_m(2k+1) \\ F_m(2k+1) & F_m(2k) \end{pmatrix}$$

matrisleri elde edilir.

$$F_m(n) = \begin{cases} sF_m(n) & n = 2k \\ cF_m(n) & n = 2k+1 \end{cases}$$

$$L_m(n) = \begin{cases} cL_m(n) & n = 2k \\ sL_m(n) & n = 2k+1 \end{cases}$$

eşitlikleri kullanıldığında,

$$G_m^{2k} = \begin{pmatrix} cF_m(2k+1) & sF_m(2k) \\ sF_m(2k) & cF_m(2k-1) \end{pmatrix}$$

$$G_m^{2k+1} = \begin{pmatrix} sF_m(2k+2) & cF_m(2k+1) \\ cF_m(2k+1) & sF_m(2k) \end{pmatrix}$$

matrisleri elde edilir. Fibonacci fonksiyonları elde etmek amacıyla, $x=2k$ olacak biçimde, x değişkeni eşitliklerde yerine yazıldığında,

$$G_m^{2x} = \begin{pmatrix} cF_m(2x+1) & sF_m(2x) \\ sF_m(2x) & cF_m(2x-1) \end{pmatrix}$$

$$G_m^{2x+1} = \begin{pmatrix} sF_m(2x+2) & cF_m(2x+1) \\ cF_m(2x+1) & sF_m(2x) \end{pmatrix}$$

biçiminde, m . mertebeden simetrik Fibonacci fonksiyonlarından oluşan iki farklı matris elde edilir. Bu matrislerin determinantları alındığında,

$$\text{Det}(G_m^{2x}) = cF_m(2x+1).cF_m(2x-1) - [sF_m(2x)]^2$$

$$\text{Det}(G_m^{2x+1}) = sF_m(2x+2).sF_m(2x) - [cF_m(2x+1)]^2$$

m . mertebeden Fibonacci fonksiyonları için Cassini formülü elde edilmiş olur. Buradan da,

$$cF_m(2x+1).cF_m(2x-1) - [sF_m(2x)]^2 = 1$$

$$sF_m(2x+2).sF_m(2x) - [cF_m(2x+1)]^2 = -1$$

eşitlikleri elde edilir.

7.6. Simetrik Fibonacci Fonksiyonları ve -m. mertebeden Altın Matris

-m. mertebeden Fibonacci altın matrisi,

$$G_{-m}^n = \begin{pmatrix} F_{-m}(n+1) & F_{-m}(n) \\ F_{-m}(n) & F_{-m}(n-1) \end{pmatrix}$$

biçiminde yazıldığını hatırlayalım.

$$F_{-m}(n) = (-1)^{n+1} F_{-m}(-n)$$

eşitliği kullanılarak,

$$G_{-m}^n = \begin{pmatrix} (-1)^{n+1} F_m(n+1) & (-1)^n F_m(n) \\ (-1)^n F_m(n) & (-1)^{n-1} F_m(n-1) \end{pmatrix}$$

elde edilir. Tek ve çift değerlerin incelenebilmesi için, $k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $n=2k$ alındığında,

$$G_{-m}^{2k} = \begin{pmatrix} (-1)^{2k+1} F_m(2k+1) & (-1)^{2k} F_m(2k) \\ (-1)^{2k} F_m(2k) & (-1)^{2k-1} F_m(2k-1) \end{pmatrix}$$

ve $n=2k-1$ alındığında,

$$G_{-m}^{2k+1} = \begin{pmatrix} (-1)^{2k+2} F_m(2k+2) & (-1)^{2k+1} F_m(2k+1) \\ (-1)^{2k+1} F_m(2k+1) & (-1)^{2k} F_m(2k) \end{pmatrix}$$

matrisleri elde edilir.

$$F_m(n) = \begin{cases} sF_m(n) & n = 2k \\ cF_m(n) & n = 2k+1 \end{cases}$$

$$L_m(n) = \begin{cases} cL_m(n) & n = 2k \\ sL_m(n) & n = 2k+1 \end{cases}$$

eşitlikleri kullanıldığında,

$$G_{-m}^{2k} = \begin{pmatrix} -cF_m(2k+1) & sF_m(2k) \\ sF_m(2k) & -cF_m(2k-1) \end{pmatrix}$$

$$G_{-m}^{2k+1} = \begin{pmatrix} sF_m(2k+2) & -cF_m(2k+1) \\ -cF_m(2k+1) & sF_m(2k) \end{pmatrix}$$

olur. Fibonacci fonksiyonları elde etmek amacıyla, $x=2k$ olacak biçimde, x değişkeni eşitliklerde yerine yazıldığında,

$$G_{-m}^{2x} = \begin{pmatrix} -cF_m(2x+1) & sF_m(2x) \\ sF_m(2x) & -cF_m(2x-1) \end{pmatrix}$$

$$G_{-m}^{2x+1} = \begin{pmatrix} sF_m(2x+2) & -cF_m(2x+1) \\ -cF_m(2x+1) & sF_m(2x) \end{pmatrix}$$

biçiminde, m . mertebeden simetrik Fibonacci fonksiyonlarından oluşan iki farklı matris elde edilir. Bu matrislerin determinantları alındığında,

$$\text{Det}(G_{-m}^{2x}) = cF_m(2x+1).cF_m(2x-1) - [sF_m(2x)]^2$$

$$\text{Det}(G_{-m}^{2x+1}) = sF_m(2x+2).sF_m(2x) - [cF_m(2x+1)]^2$$

elde edilir. m . mertebeden Fibonacci fonksiyonları için Cassini formülü elde edilmiş olur. Buradan da,

$$cF_m(2x+1).cF_m(2x-1) - [sF_m(2x)]^2 = 1$$

$$sF_m(2x+2).sF_m(2x) - [cF_m(2x+1)]^2 = -1$$

eşitlikleri elde edilir.

BÖLÜM 8. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmada ağırlıklı olarak Fibonacci ve Lucas Fonksiyonları üzerinde duruldu. Ayrıca bu fonksiyonların temeli olan tekrarlı bağıntılar ve mertebeli Fibonacci ve Lucas sayıları üzerinde yeni yaklaşımlar bulunmaya çalışıldı. Eksi mertebeli ve karmaşık sayı mertebeli Fibonacci ve Lucas sayıları için genel bağıntılar elde edilip edilemeyeceği denendi ve bu bağıntılar için Gazale formülleri çıkarılmaya çalışıldı. Bunlara bağlı olarak da altın matrislerde elde edilen bu yeni bağıntıların sağlaması yapıldı ve altın matris özellikleri sağladıkları görüldü. Burada, özellikle karmaşık sayı mertebeli sayılar için yeni bir fonksiyon tanımı yapılabilir ve bunun yanında elde edilen bu fonksiyonların, Fibonacci ve Lucas fonksiyonlarıyla bağlantısı olup olmadığı araştırılabilir. Buna ek olarak ters hiperbolik fonksiyonlar üzerinde aynı yöntemler kullanılarak inceleme yapılabilir. Ancak her şeyden önce, buraya kadar bahsedilen konular üzerinde kapsamlı bir araştırma yapılmak isteniyorsa, altyapı oluşturmak amacıyla Vajda [2], Hoggat [3] ve özellikle Stakhov [7-21] kaynakları üzerinde durulması faydalı olur.

KAYNAKLAR

- [1] KOSHY, T., Fibonacci and Lucas Numbers With Applications, John Wiley, New York, 2001.
- [2] VAJDA, S., Fibonacci & Lucas Numbers, and the Golden Section. Theory and Applications. – Ellis Horwood limited, 1989.
- [3] HOGGAT, VE., Fibonacci and Lucas Numbers.- Palo Alto, CA: Houghton-Mifflin; 1969.
- [4] GAZALE, Midhat J., Gnomon. From Pharaons to Fractals. Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 1999
- [5] VERA W. de Spinadel., From the Golden Mean to Chaos. Buenos Aires: Nueva, Libreria, 1998.
- [6] KOCER, G., TUĞLU, N., STAKHOV, A., On the m -extension of the Fibonacci and Lucas p -numbers. Chaos, Solitons & Fractals (in Press).
- [7] STAKHOV, A., The “golden” matrices and a new kind of cryptography. Chaos, Solitons & Fractals 2007, Volume 32, Issue 3, 1138-1146.
- [8] STAKHOV, A., ROZİN, B., On a new class of hyperbolic function. Chaos, Solitons & Fractals 2004, 23:379-389.
- [9] STAKHOV, A., ROZİN, B., The Golden Section, Fibonacci series and new hyperbolic models of Nature. Visual Mathematics, Volume 8, No. 3, 2006
- [10] STAKHOV, A., Fundamentals of a new kind of Mathematics based on the Golden Section. Chaos, Solitons & Fractals 2005, 27 (5): 1124-1146
- [11] STAKHOV, A.P., The Golden Section and Modern Harmony Mathematics. Applications of Fibonacci Numbers, Volume 7, 1998.
- [12] STAKHOV, A., ROZİN B., The “golden” algebraic equations. Chaos, Solitons & Fractals 2005, 27:1415-1421.
- [13] STAKHOV, AP., A generalization of the Fibonacci Q-matrix . J Rep Ukrainian Acad Sci 1999, No 9:46-49.

- [14] STAKHOV, AP., Fibonacci matrices, generalization of “Cassini formula”, and new coding theory. *Chaos, Solitons & Fractals* 2006, 30:56-66.
- [15] STAKHOV, AP., ROZIN, B., The “golden” hyperbolic models of Universe . *Chaos, Solitons & Fractals*, (In Press).
- [16] STAKHOV, A.P., ROZIN, B., Theory of Binet formulas for Fibonacci and Lucas p -numbers. *Chaos, Solitons & Fractals* 2005, 27 (5): 1162-1177.
- [17] STAKHOV, A.P., SLUCHENKOVA, A., Design of a New Coding Theory and Cryptography Based on the Fibonacci and “Golden” Matrices. *Mathematics & Design. Fifth International Mathematics & Design Conference – V M&D. Blumenau: Nova Letra, 2007: 154-162*
- [18] STAKHOV, A.P., Gazale formulas, a new class of the hyperbolic Fibonacci and Lucas functions and the improved method of the “golden” cryptography. *Academy of Trinitarism, Moscow: № 77-6567, publication14098, 21.12.2006*
- [19] STAKHOV, A.P., Fibonacci matrices, a generalization of the “Cassini formula,” and a new coding theory. *Chaos, Solitons & Fractals, 2006, Volume 30, Issue 1, 56-66.*
- [20] STAKHOV, A.P., Hyperbolic Fibonacci and Lucas functions: a history and applications. *Academy of Trinitarism, Moscow, № 77-6567, publication 14429, 31.05.2007*
- [21] STAKHOV, A.P., Hyperbolic Fibonacci and Lucas Functions: a New Mathematics for Living Nature. *Vinnitsa: Publisher “ITI,” 2003.*
- [22] MAULDIN, R.D., and WILLAMS, S.C., Random recursive construction. *Trans. Am. Math. Soc.* 1986; 295:325-346.
- [23] OLSEN, S.A., *The Golden Section: Natures Greatest Secret.* New York: Walker & Company, 2006
- [24] NALTY , Kurt, Derivation of the Fibonacci Formula using the Golden Ratio, November 23, 2008
- [25] DING, Yuzhong and LIANG, Xiquan, Formulas and identities of trigonometric functions. *Formalized Mathematics*, 12(3):243–246, 2004.
- [26] HOBSON, A.J. Hyperbolic Functions (Definitions, graphs and identities), “Just The Maths”, Unit number, 4.1,2002

ÖZGEÇMİŞ

Tuna BATU, 30.06.1977 de Tokat'da doğdu. İlköğretimini Kastamonu'da, orta ve lise eğitimini Sakarya'da tamamladı. 2002 yılında Dokuz Eylül Üniversitesi Matematik Bölümünden mezun oldu. 2007 yılında Sakarya Üniversitesi Matematik Bölümünde yüksek lisansa başladı.