T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İKİ PARAMETRELİ DEFORME BOZON CEBİRİ İÇİN İNHOMOJEN KUANTUM DEĞİŞMEZLİK GRUBU

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Hüseyin ALİM

Enstitü Anabilim Dalı : FİZİK

Tez Danışmanı : Yrd. Doç. Dr. Ali Serdar ARIKAN

Haziran 2009

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İKİ PARAMETRELİ DEFORME BOZON CEBİRİ İÇİN İNHOMOJEN KUANTUM DEĞİŞMEZLİK GRUBU

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Hüseyin ALİM

Enstitü Anabilim Dalı : FİZİK

Bu tez 09 / 06 /2009 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Oy birliği ile kabul edilmiştir.

Yrd. Doç. Dr.	**Doç. Dr.**	**Yrd. Doç. Dr.**
Ali Serdar ARIKAN	**Mehmet ÖZEN**	**H. Ahmet YILDIRIM**
Jüri Başkanı	**Üye**	**Üye**

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım boyunca beni cesaretlendirerek moralimi yüksek tutan, ilgi ve yardımlarını benden hiçbir zaman esirgemeyen ve tezimin hazırlanmasında bana yol gösteren, değerli bilgilerinden istifade etme imkanı bulduğum çok değerli sayın Yrd. Doç. Dr. Ali Serdar ARIKAN hocama çok teşekkür ederim. Gelecek çalışmalarımda yardımlarını büyük bir içtenlik ve samimiyetim ile arzu ederim.

Ayrıca değerli bilgilerinden istifade ettiğim saygıdeğer hocalarım sayın Prof. Dr. Ali Ekber KULİEV, Prof. Dr. Recep AKKAYA, Prof. Dr. Hüseyin Murat TÜTÜNCÜ, Yrd. Doç. Dr. Erdoğan ŞENTÜRK, Yrd. Doç. Dr. Yusuf ATALAY ve Yrd. Doç. Dr. Ali ÇORUH hocalarıma da çok teşekkür ederim.

Çalışmalarım boyunca dualarını eksik etmeyen aileme de çok teşekkür ederim.

Hüseyin ALİM

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

$V(x)$	:	Potansiyel enerji fonksiyonu
k	:	Esnek yayın yay sabiti
x	:	Konum operatörü
m	:	Kütle
p	:	Momentum operatörü
$\mathcal{H}$	:	Hamiltonyen operatörü
a	:	Yok etme operatörü
$a^{\dagger}$	:	Yaratma operatörü
E_0	:	Taban enerji özdeğeri
E_n	:	n. enerji özdeğeri
ħ	:	Planck sabiti
ω	:	Açısal frekans
$\mathcal{N}$	:	Sayı operatörü
a_q	:	Deforme yok etme operatörü
$a_q^{\dagger}$	:	Deforme yaratma operatörü
q	:	Deformasyon parametresi
$[\mathcal{N}]$	:	Deforme sayı operatörü
C	:	Deforme bozonik yok etme operatörü
$C^{\dagger}$	:	Deforme bozonik yaratma operatörü
M^{T}	:	Transpozesi alınmış matris
M^{*}	:	M matrisinin kompleksi
F	:	Kuvvet
$\dot{\otimes}$	:	Matris tensör çarpımı notasyonu
q_1	:	Deformasyon parametresi
q_2	:	Deformasyon parametresi
r	:	Deformasyon parametresi

q	:	Deformasyon parametresi
$SU(2)$	:	İki boyutlu özel üniter grup
$SU(d)$	:	d-boyutlu özel üniter grup
PW	:	Pusz-Woronowicz
$SU_q(d)$	:	d-boyutlu deforme özel üniter grup
$U(2)$	:	İki boyutlu üniter grup
$U(d)$	:	d- boyutlu üniter grup
CBY	:	Coon-Baker-Yu
FCBY	:	Fibonacci-Coon-Baker-Yu
J_+	:	Açısal momentumun yaratma operatörü
J_-	:	Açısal momentum yok etme operatörü
J_z	:	Açısal momentum operatörü
$GL_q(d)$	:	d- boyutlu deforme genel lineer grup
$GL(d)$	:	d- boyutlu deforme genel lineer grup
$SL(d)$	:	d- boyutlu özel lineer grup
$SL_q(d)$	:	d-boyutlu deforme özel lineer grup
R	:	R matrisi
$BIGL_{q^{-2},q^2}(2)$	:	İki boyutlu iki parametreli inhomojen bozonik genel deforme lineer kuantum grubu

ŞEKİLLER LİSTESİ

ÖZET

Anahtar kelimeler: Harmonik Salınıcı, Deforme Bozon Cebiri, Newton Salınıcısı, Fibonacci Salınıcısı, Hopf cebiri, Kuantum Matris Grubu, R-Matrisi

Bu çalışmada iki deformasyon parametresi içeren bir bozon cebiri göz önüne aldık. Bu cebirin homojen olmayan kuantum simetri grubunu bulduk. Elde ettiğimiz kuantum matris grubu için *R*-matrisini yazdık.

THE INHOMOGENEOUS QUANTUM INVARIANCE GROUP OF THE TWO PARAMETER DEFORMED BOSON ALGEBRA

SUMMARY

Key Words: Harmonic Oscillator, Deformed Boson Algebra, Newton Oscillator, Fibonacci Oscillator, Hopf Algebra, Quantum Matrix Group, R-Matrix

In this study, we considered a boson algebra including two deformation parameters. We found the inhomogeneous quantum symmetry group of this system. We wrote R-matrix for this quantum matrix group.

BÖLÜM 1. GİRİŞ

Mekanik; cisimlerin hareketini inceleyen bir bilim dalıdır. Mekanik konusunu, statik, kinematik ve dinamik olmak üzere üç bölüme ayırmak mümkündür. Statik; cisimlerin yapılarının bozulmadan dengede kalabilmeleri için gerekli koşulların ne olacağı ile ilgilenir. Kinematik; cisimlerin hareketlerini (konumlarının zamanla değişimini) ele alır. Dinamik ise; harekete sebep olan unsurlar ışığında cisimlerin hareketini inceler[1, 2].

Bir cisim, örneğin; dünya çevresinde dönen bir uydu, yörünge üzerinde ilerlerken aynı anda kendi ekseni etrafında da dönme hareketi yapabilir. Bir başka cisim örneğin; bir yağmur damlası, hareket ederken aynı anda şeklini de değiştirebilir. Hareketin kendine özgü bu karmaşıklığını kolaylaştırmak için genellikle bu yapılar incelenmeden önce, parçacık adı verilen yapının hareketi göz önüne alınır. Matematiksel olarak parçacık; nokta gibi boyutları (eni, boyu ve derinliği) olmayan bir sistemdir. Bu sebeple parçacık hareketi düşünüldüğünde dönme veya şekil değiştirme gibi durumları söz konusu olmaz. Doğada parçacık diye bir nesne bulunmaz ancak yine de bu kavram yararlıdır, çünkü boyutları olan bir cisim bile bazı durumlarda bir parçacık gibi davranabilir. Parçacık gibi davranabilmesi için cismin çok küçük olması gerekmez. Örneğin dünya ile güneş arasındaki uzaklık göz önüne alınırsa, bu uzaklığa göre güneş ve dünya bir parçacık gibi kabul edilebilir. Güneşi ve gezegenleri bir parçacık gibi kabullenerek hesap yapılırsa çok fazla hata yapmadan yaklaşık olarak onların hareketi ile ilgili bilgiler elde edilebilir. Gerekli durumlar ve şartlar el verdiğinde bir futbol topu atomlar veya protonlar bir parçacık olarak düşünülebilir. Bir sistemin tek bir parçacık olarak düşünülmesinin uygun olmadığı durumlarda da, o sistemin birçok parçacıktan oluştuğu kabul edilerek, problem basite indirgenebilir [2].

Eğer bir parçacık belirli bir denge konumu etrafında ileri-geri yer değiştiriyorsa bu parçacığın harmonik (salınım veya titreşim) hareket yaptığı söylenir. Bu hareketler, kendini tekrarlayabilme özelliklerinden dolayı periyodik hareket olarak da adlandırılırlar. Ancak sistem içerisindeki sürtünme kuvvetleri sebebiyle; çoğu zaman, bu hareketler sönümlü bir şekilde gözlenebilir. Mesela; bir keman teli veya sarkaç belli bir zaman sonra salınım yapamayacak duruma gelirler. Büyük nesnelerin sönümlü hareketlerinde sürtünme ortadan kaldırılamaz. Ancak, salınan sistem sürtünmenin neden olduğu enerji kaybına eşit bir enerji ile beslenerek salınımın devamı sağlanır. Duvar saatlerinde yay, salınan sarkaca bu enerjiyi sağlar ve sarkaç salınım hareketini bu sayede sürdürür[3, 4, 5].

Harmonik harekete örnek olarak bir yay sarkacı sistemi göz önüne alınabilir. Yay sarkacı sistemi sabit bir noktaya bağlanmış kütlesi ihmal edilen bir yay ile o yayın ucuna bağlanmış sürtünmesiz bir yüzey üzerindeki m kütleli bloktan oluşur. Yay gerilmemiş ve sıkıştırılmamış durumda iken blok, sistemin denge konumu olarak adlandırılan $x = 0$ konumundadır. Blok denge konumundan x kadar uzaklaştırıldığında, yay blok üzerine yer değiştirme ile orantılı

$$\boldsymbol{F} = -k\boldsymbol{x}, \tag{1.1}$$

eşitliği ile ifade edilebilen bir kuvvet uygular. Burada orantı katsayısı k yay sabiti olarak da adlandırılır. Bu kuvvet, eşitlikteki eksi işaretinden de anlaşılacağı gibi sistemi daima denge konumuna getirmeye çalışır ve bu sebeple de blok, bu kuvvetin etkisi altında harmonik hareket yapar[5].

(1.1) eşitliği ikinci mertebeden bir diferansiyel denklem olup; çözümü

$$x(t) = Asin(\omega t) + Bcos(\omega t), \tag{1.2}$$

eşitliği ile ifade edilebilir. Burada ω; söz konusu sistemin açısal frekansı olarak adlandırılır ve

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}\,, \tag{1.3}$$

eşitliğini sağlar.

Eşitlik (1.1)' deki yay kuvveti korunumlu bir kuvvettir. Dolayısı ile söz konusu kütle-yay sistemi için,

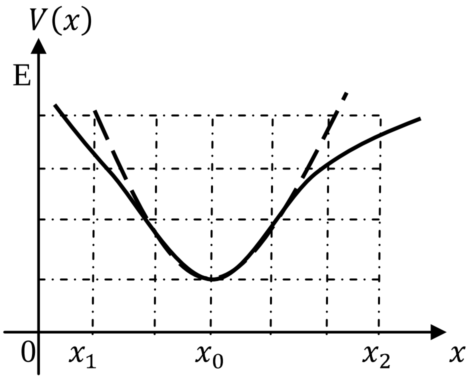
$$V(x) = \frac{1}{2}kx^2, \tag{1.4}$$

eşitliği ile ifade edilen bir potansiyel enerji fonksiyonu yazmak mümkündür. Sistemin toplam mekanik enerjisi

$$E = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kx^2, \tag{1.5}$$

eşitliği ile ifade edilebilir. Burada *p*, *m* kütleli bloğun momentumunu göstermektedir[4, 5].

Herhangi bir sistemin potansiyelinin kararlı denge durumu gözlendiğinde, minimum civarında bu sistemin potansiyeli Şekil 1.1'de de görüldüğü gibi kütle-yay sisteminin potansiyeline yaklaşır.



Şekil 1.1. Konum-Potansiyel Enerji Grafiği

Bu durumun matematiksel bir ifade ışığında da görülmesi mümkündür. $V(x)$ fonksiyonu $x = 0$ minimumu civarında Taylor serisine açılırsa;

$$V(x) = V(x_0) + \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_{x=x_0} (x - x_0) + \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right)_{x=x_0} (x - x_0)^2 + \cdots$$

$$\ldots + \frac{1}{n!}\left(\frac{\partial^n V}{\partial x^n}\right)_{x=x_0} (x - x_0)^n + \cdots, \tag{1.6}$$

eşitliği elde edilir[6, 7, 8].

Taylor serisine açılmış, $V(x)$ fonksiyonunun x_0 minimum noktasında birinci türevi sıfırdır. Uygun referans sistemi ışığında (1.6) eşitliği

$$V(x) = \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right)_{x=0} x^2 + \frac{1}{3!}\left(\frac{\partial^3 V}{\partial x^3}\right)_{x=0} x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}\left(\frac{\partial^n V}{\partial x^n}\right)_{x=x_0} x^n + \cdots, \tag{1.7}$$

şeklinde tekrar yazılabilir. *x*' in çok küçük değerleri için bu toplam ifadesindeki üç ve üçten daha yukarı mertebede bulunan terimler göz ardı edilebilir. Bu da *x*' in küçük değerleri için (1.7) eşitliğini

$$V(x) \cong \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} x^2 , \tag{1.8}$$

şeklinde yazmayı mümkün kılar. Elde edilen bu ifade, $k = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$ için, harmonik salınıcı için yazılan potansiyel ifadesi ile aynıdır [6, 7].

Harmonik salınıcı problemi klasik mekanikte olduğu kadar kuantum mekaniğinde de önemli bir yere sahiptir. Moleküllerde, kristal yapılarda tek tek atomların denge konumları civarındaki titreşim hareketlerinin incelenmesinde veya bir kovuk içindeki elektromanyetik alan salınımlarının kuantum mekaniksel incelemelerinde, kuantum katıhal fiziği, kuantum optik, kuantum alan teorisi, moleküler spektroskopi vb. alanlarda harmonik salınıcı önemli rol oynar. Harmonik salınıcı problemi, öz değer problemi tam olarak çözülebilen belli başlı problemlerden biri olduğundan, çözümü zor bazı problemler için sık sık başvurulan önemli bir modeldir [5].

Kuantum harmonik salınıcı problemi kuantum mekaniğinde iki farklı yöntem ışığında çözülebilir. Bunlardan biri harmonik salınıcı sistemi için yazılan Schrödinger denkleminin Hermite polinomları yardımı ile çözülmesidir. Diğeri ise çarpanlara ayırma yöntemi ile elde edilen çözümdür. Çarpanlara ayırma yöntemi daha sade bir matematik içermesi ve alan teorisi ile ilgili dikkate değer yaklaşımlara ufuk açması bakımından önemlidir.

Çalışmamızın ikinci bölümünde harmonik salınıcı cebirini kısaca tekrar ettik. Daha sonra bu cebirsel yapının bir veya daha fazla deformasyon parametresi ile deforme edilmesi sonucu, sistemlerin tutarlı bir şekilde nasıl genelleştirildiğini, yapılan farklı çalışmalar ışığında özetledik. Böylece, göz önüne aldığımız q,r-deforme bozon cebirinin nasıl inşa edildiği hakkında genel bir bilgi vermiş olduk. Çalışmamızın son bölümünde de göz önüne alınan (q,r)-deforme bozon cebiri için inhomojen kuantum simetri grubunun varlığını inceledik.

BÖLÜM 2. ÇARPANLARA AYIRMA YÖNTEMİ İLE HARMONİK SALINICI PROBLEMİNİN ÇÖZÜMÜ

Kuantum harmonik salınıcı problemi için, Hamiltoniyen operatörü

$$\boldsymbol{\mathcal{H}} = \frac{\boldsymbol{p^2}}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\boldsymbol{x^2}, \tag{2.1}$$

eşitliği ile ifade edilir. Burada $\boldsymbol{x}$ konum, $\boldsymbol{p}$ ise momentum operatörüdür. Bu operatörlerin

$$[\boldsymbol{x},\boldsymbol{p}] = i\hbar, \tag{2.2}$$

şeklinde ifade edilen komütasyon bağıntısını sağlamasından dolayı, (2.1) eşitliğini

$$\boldsymbol{\mathcal{H}} = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\boldsymbol{p}}{\sqrt{2m}} + i\sqrt{\frac{m\omega^2}{2}}\boldsymbol{x}\right)\left(\frac{\boldsymbol{p}}{\sqrt{2m}} - i\sqrt{\frac{m\omega^2}{2}}\boldsymbol{x}\right) + \left(\frac{\boldsymbol{p}}{\sqrt{2m}} - i\sqrt{\frac{m\omega^2}{2}}\boldsymbol{x}\right)\left(\frac{\boldsymbol{p}}{\sqrt{2m}} + i\sqrt{\frac{m\omega^2}{2}}\boldsymbol{x}\right)\right),$$

şeklinde yeniden yazmak mümkündür. Parantez içerisindeki ifadelerden toplama işareti içeren terimler $i\sqrt{\frac{m\omega^2}{2}}$ parantezine, çıkarma işareti içeren terimler de $-i\sqrt{\frac{m\omega^2}{2}}$ parantezine alınırsa, (2.1) eşitliği,

$$\boldsymbol{\mathcal{H}} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{m\omega^2}{2}}\left(\boldsymbol{x} - \frac{i\boldsymbol{p}}{m\omega}\right)\sqrt{\frac{m\omega^2}{2}}\left(\boldsymbol{x} + \frac{i\boldsymbol{p}}{m\omega}\right) + \sqrt{\frac{m\omega^2}{2}}\left(\boldsymbol{x} + \frac{i\boldsymbol{p}}{m\omega}\right)\sqrt{\frac{m\omega^2}{2}}\left(\boldsymbol{x} - \frac{i\boldsymbol{p}}{m\omega}\right)\right),$$

şeklinde yazılabilir.

Kök içindeki terimlerden $\sqrt{\hbar\omega}$ parantez dışına alınırsa aşağıdaki Hamiltonyen eşitliği yazılabilir.

$$\boldsymbol{\mathcal{H}} = \frac{\hbar\omega}{2}\left(\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\boldsymbol{x} - \frac{i\boldsymbol{p}}{m\omega}\right)\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\boldsymbol{x} + \frac{i\boldsymbol{p}}{m\omega}\right) + \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\boldsymbol{x} + \frac{i\boldsymbol{p}}{m\omega}\right)\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\boldsymbol{x} - \frac{i\boldsymbol{p}}{m\omega}\right)\right). \quad (2.3)$$

Hermitik olmayan bir $\boldsymbol{a}$ operatörü

$$\boldsymbol{a} \equiv \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\boldsymbol{x} + \frac{i\boldsymbol{p}}{m\omega}\right), \quad (2.4)$$

eşitliği ile tanımlandığında, bu operatörün hermitik eşleniği [9, 10]

$$\boldsymbol{a}^{\dagger} \equiv \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\boldsymbol{x} - \frac{i\boldsymbol{p}}{m\omega}\right), \quad (2.5)$$

de kullanılarak (2.3) eşitliğindeki Hamiltonyen operatörü

$$\boldsymbol{\mathcal{H}} = \frac{\hbar\omega}{2}(\boldsymbol{a}^{\dagger}\boldsymbol{a} + \boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^{\dagger}), \quad (2.6)$$

şeklinde yazılabilir. Eşitlik (2.2), (2.4) ve (2.5) kullanılarak $\boldsymbol{a}$ operatörü ve $\boldsymbol{a}^{\dagger}$ operatörleri arasındaki komütasyon bağıntısı

$$[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}^{\dagger}] = 1, \quad (2.7)$$

bulunur. Bu komütasyon bağıntısı (2.6) eşitliğinde kullanılırsa Hamiltonyen operatörü için aşağıdaki ifade yazılabilir [11].

$$\boldsymbol{\mathcal{H}} = \hbar\omega\left(\boldsymbol{a}^{\dagger}\boldsymbol{a} + \frac{1}{2}\right). \quad (2.8)$$

Böylece kuantum harmonik salınıcı için Schrödinger denklemi

$$\hbar\omega\left(\boldsymbol{a}^{\dagger}\boldsymbol{a} + \frac{1}{2}\right)|E_n\rangle = E_n|E_n\rangle, \quad (2.9)$$

eşitliği ile ifade edilebilir. Burada E_n Hamiltonyen operatörünün özdeğerini temsil ederken $|E_n\rangle$ ise bu özdeğere karşı gelen özdurumu gösterir.

Hamiltonyen operatörü $\boldsymbol{\mathcal{H}}$ ile $\boldsymbol{a}$ ve $\boldsymbol{a}^\dagger$ operatörleri arasındaki komütasyon bağıntıları araştırıldığında, bu bağıntıların

$$[\boldsymbol{\mathcal{H}}, \boldsymbol{a}] = -\hbar\omega\boldsymbol{a}, \tag{2.10}$$

$$[\boldsymbol{\mathcal{H}}, \boldsymbol{a}^\dagger] = \hbar\omega\boldsymbol{a}^\dagger, \tag{2.11}$$

şeklinde olduğu kolaylıkla görülebilir.

(2.9) ve (2.10) eşitlikleri dikkate alınarak $[\boldsymbol{\mathcal{H}}, \boldsymbol{a}]$ komütatörünün $|E_n\rangle$ enerji özdurumuna etkisinden

$$[\boldsymbol{\mathcal{H}}, \boldsymbol{a}]|E_n\rangle = (\boldsymbol{\mathcal{H}}\boldsymbol{a} - \boldsymbol{a}\boldsymbol{\mathcal{H}})|E_n\rangle = -\hbar\omega\boldsymbol{a}|E_n\rangle,$$

$$\boldsymbol{\mathcal{H}}\boldsymbol{a}|E_n\rangle = (E_n - \hbar\omega)\boldsymbol{a}|E_n\rangle, \tag{2.12}$$

eşitliği elde edilir. Benzer şekilde (2.9) ve (2.11) eşitliklerinden yararlanılarak,

$$[\boldsymbol{\mathcal{H}}, \boldsymbol{a}^\dagger]\big|E_n\rangle = (\boldsymbol{\mathcal{H}}\boldsymbol{a}^\dagger - \boldsymbol{a}^\dagger\boldsymbol{\mathcal{H}})\big|E_n\rangle = \hbar\omega\, \boldsymbol{a}^\dagger|E_n\rangle,$$

$$\boldsymbol{\mathcal{H}}\boldsymbol{a}^\dagger|E_n\rangle = (E_n + \hbar\omega)\boldsymbol{a}^\dagger|E_n\rangle, \tag{2.13}$$

eşitlikleri de yazılabilir.

Eşitlik (2.12)'ye dikkatli bir şekilde bakılacak olursa $\boldsymbol{\mathcal{H}}$ Hamiltonyen operatörünün $\boldsymbol{a}|E_n\rangle$ şeklinde ifade edilen bir özduruma etki etmesi sonucu $(E_n - \hbar\omega)$ özdeğeri elde edilmektedir. Bu da

$$\boldsymbol{a}|E_n\rangle \sim |E_n - \hbar\omega\rangle,$$

ifadesinin varlığını göstermektedir. Böylece

$$\boldsymbol{a}|E_n\rangle = \alpha_-\,|E_n - \hbar\omega\rangle, \tag{2.14}$$

eşitliği yazılabilir. (2.14) eşitliği ve bu ifadenin kompleks eşleniği kullanılarak;

$$\langle E_n|\boldsymbol{a}^\dagger\boldsymbol{a}|E_n\rangle = |\alpha_-|^2\langle E_n - \hbar\omega|E_n - \hbar\omega\rangle, \tag{2.15}$$

eşitliği yazılabilir. Ayrıca (2.9) ve (2.15) eşitliği kullanılarak

$$\alpha_- = \sqrt{\left(\frac{E_n}{\hbar\omega} - \frac{1}{2}\right)}, \tag{2.16}$$

elde edilir [12, 13].

Eşitlik (2.13) için de benzer şekilde $\boldsymbol{\mathcal{H}}$ Hamiltonyen operatörünün $\boldsymbol{a}^\dagger|E_n\rangle$ şeklinde ifade edilen bir özduruma etki etmesi sonucu $(E_n + \hbar\omega)$ öz değeri elde edilmekte ve bu durum

$$\boldsymbol{a}^\dagger|E_n\rangle \sim |E_n + \hbar\omega\rangle,$$

yazılabileceğini göstermektedir. Öyleyse

$$\boldsymbol{a}^\dagger|E_n\rangle = \alpha_+\,|E_n + \hbar\omega\rangle, \tag{2.17}$$

eşitliği yazılabilir ve α_- katsayısı bulunurken izlenen yola benzer yol takip edilerek α_+ katsayısı için

$$\alpha_+ = \sqrt{\left(\frac{E}{\hbar\omega} + \frac{1}{2}\right)}, \tag{2.18}$$

eşitliği elde edilebilir.

Eşitlikler (2.14) ve (2.17)'den de anlaşılmaktadır ki $\boldsymbol{a}$ operatörü Hamiltonyen özdurumunu $\hbar\omega$ kadar düşük özdeğerli bir başka özduruma çevirirken, $\boldsymbol{a}^{\dagger}$ operatörü Hamiltonyen özdurumunu $\hbar\omega$ kadar yüksek özdeğerli bir başka özduruma dönüştürmektedir. İşte bu özelliklerinden dolayı bu operatörler indirgenme ve yükseltgenme veya azaltma ve artırma operatörleri olarak adlandırılırlar.

Kuantum harmonik salınıcı, harmonik salınıcının toplam enerjisi için pozitif enerji değerleri vermelidir. Bu durumu daha iyi kavrayabilmek için (2.1) eşitliğine bakılabilir. Eşitliğin sağındaki ikinci terime bakıldığında $\boldsymbol{x}$ hermitik bir işlemcidir ve sadece reel özdeğerlere sahip olabilir. Bunun sonucu olarak, $\boldsymbol{x}$**'** in karesi daima pozitiftir. Aynı durum $\boldsymbol{p}$ momentum operatörü için de geçerlidir. (2.1) eşitliğinden konum ve momentumun her ikisinin karelerinin beklenen değerlerinin toplamı, Hamiltonyen'in beklenen değeri olduğundan bu değer ancak artı işaretli olabilir. Bu durum, kuantum harmonik salınıcı için, negatif enerji durumlarının bulunmadığını gösterir. Bu sebeple bu enerjinin bir en küçük değeri olmalıdır. Bu en küçük enerji değeri E_0 ile, bu enerjiye karşılık gelen özdurum da $|E_0\rangle$ ile gösterilirse, bu enerjinin en küçük değeri, [9, 14]

$$\boldsymbol{a}|E_0\rangle = 0, \tag{2.19}$$

eşitliği ile ifade edilir. Enerjinin en küçük değerini (taban durumu enerjisini) bulmak için (2.8) eşitliğinde ifade edilen Hamiltonyen operatörü $|E_0\rangle$ taban özdurumuna etki ettirilirse

$$\boldsymbol{\mathcal{H}}|E_0\rangle = \hbar\omega\left(\boldsymbol{a}^{\dagger}\boldsymbol{a} + \frac{1}{2}\right)|E_0\rangle,$$

$$= \frac{\hbar\omega}{2}|E_0\rangle, \tag{2.20}$$

sonucu elde edilir ki buradan da açıkça en küçük-taban durumunda $\frac{\hbar\omega}{2}$ kadar bir enerjinin var olduğu görülmektedir [11].

(2.14), (2.16), (2.17) ve (2.18) eşitlikleri ışığında

$$\boldsymbol{a}^{\dagger}\boldsymbol{a}|E_n\rangle = \left(\frac{E_n}{\hbar\omega} - \frac{1}{2}\right)|E_n\rangle, \tag{2.21}$$

yazılabileceği gibi, $\boldsymbol{\mathcal{N}} \equiv \boldsymbol{a}^{\dagger}\boldsymbol{a}$ şeklinde bir tanımlama yapılırsa (2.21) eşitliği

$$\boldsymbol{\mathcal{N}}|E_n\rangle = n|E_n\rangle, \tag{2.22}$$

şeklinde de ifade edilebilir. Burada n,

$$n = \frac{E_n}{\hbar\omega} - \frac{1}{2}, \tag{2.23}$$

eşitliğini sağlamaktadır. (2.23) eşitliğini düzenlersek; kuantum harmonik salınıcı enerji özdeğerleri için,

$$E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right), \qquad n = 0, 1, 2, \dots, d, \tag{2.24}$$

ifadesinin yazılabileceği görülür. (2.22) eşitliği ışığında $\boldsymbol{a}$ ve $\boldsymbol{a}^{\dagger}$ operatörleri için elde edilen ifadeler,

$$\boldsymbol{a}|E_n\rangle = \sqrt{n}|E_{n-1}\rangle, \tag{2.25}$$

$$\boldsymbol{a}^{\dagger}|E_n\rangle = \sqrt{n+1}|E_{n+1}\rangle, \tag{2.26}$$

şeklinde yeniden yazılabilir.

Eğer E_n, n tane özdeş parçacıktan oluşan bir sistemin enerjisi olarak kabul edilirse; (2.22) eşitliği, $\boldsymbol{\mathcal{N}}$ operatörünün sayı operatörü olarak adlandırılabilmesini sağlar. $\boldsymbol{a}^{\dagger}$ ve $\boldsymbol{a}$ operatörlerinin enerji seviyeleri arasındaki geçişi sağlamaları ve bu enerji seviyeleri arasındaki geçişin, sistemdeki özdeş parçacıkların sayılarının değişmesine tekabül etmesi; bu operatörlerin yaratma ve yok etme operatörleri olarak da adlandırılmasını sağlamıştır.

BÖLÜM 3. DEFORME BOZON CEBİRLERİ

Standart harmonik salınıcı cebirinin reel bir q parametresi ilave edilerek

$$\boldsymbol{a}_q \boldsymbol{a}_q^{\dagger} - q^2 \boldsymbol{a}_q^{\dagger} \boldsymbol{a}_q = 1, \tag{3.1}$$

şeklinde genelleştirilmesi ilk defa Arık ve Coon [15, 16] tarafından gerçekleştirilmiştir. Bu ifade içerdiği q parametresi sebebiyle q-deforme bozon cebiri olarak da adlandırılmaktadır. Cebirsel ifadedeki $\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{q}}^{\dagger}$ deforme yaratma operatörünü, $\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{q}}$ ise deforme yok etme operatörünü göstermektedir [17, 18].

(3.1) eşitliği için harmonik salınıcı cebirindekine benzer şekilde bir sayı operatörü tanımlamak mümkündür. Ancak bu durumda tanımlanan sayı operatörü, ikinci bölümde (2.22) eşitliği ile ifade edilen sayı operatöründen farklı olacağından bu sayı operatörünü,

$$[\boldsymbol{\mathcal{N}}] \equiv \boldsymbol{a}_q^{\dagger} \boldsymbol{a}_q,$$

şeklinde köşeli parantez kullanarak göstermek uygun olacaktır. Bu durum $\boldsymbol{a}_q \boldsymbol{a}_q^{\dagger}$ operatörü için de

$$[\boldsymbol{\mathcal{N}} + 1] \equiv \boldsymbol{a}_q \boldsymbol{a}_q^{\dagger},$$

yazmayı mümkün kılacaktır. Her iki deforme sayı operatörü için aşağıdaki özdeğer eşitlikleri yazılabilir [8].

$$[\boldsymbol{\mathcal{N}}]|n\rangle = [n]|n\rangle, \tag{3.2}$$

$$[\boldsymbol{\mathcal{N}} + 1]|n\rangle = [n + 1]|n\rangle. \tag{3.3}$$

Bu eşitlikleri kullanarak, (3.1) eşitliği için

$$[n + 1] - q^2[n] = 1, \tag{3.4}$$

fark denklemi elde edilir. $[0] = 0$ olacak şekilde bir ilk değer göz önüne alındığında, eşitlik (3.4)'ün çözümü Jackson sayısı [19] olarak bilinen

$$[n] = \frac{1 - q^{2n}}{1 - q^2}\,, \tag{3.5}$$

ifadesi olur[8, 17].

Standart harmonik salınıcı cebirini tanımlayan eşitliklere benzer şekilde; q-deforme bozon cebirini tanımlayan eşitlikleri ifade etmek için de; (3.1) eşitliğine ilave olarak

$$[\boldsymbol{\mathcal{N}}, \boldsymbol{a}_q] = -\boldsymbol{a}_q, \tag{3.6}$$

$$[\boldsymbol{\mathcal{N}}, \boldsymbol{a}_q^\dagger] = \boldsymbol{a}_q^\dagger, \tag{3.7}$$

eşitliklerini yazmak uygun olacaktır. Burada dikkat edilmesi gereken önemli bir nokta yukarıdaki komütasyon bağıntılarının; deforme yok etme ve yaratma operatörleri ile standart sayı operatörleri arasında yazılmış olmasıdır. Bu komütasyon bağıntılarını kullanarak

$$\boldsymbol{a}_q|n\rangle = \sqrt{[n]}|n - 1\rangle, \tag{3.8}$$

$$\boldsymbol{a}_q^\dagger|n\rangle = \sqrt{[n + 1]}|n + 1\rangle, \tag{3.9}$$

eşitlikleri elde edilebilir [8, 18, 20].

(3.8) ve (3.9) eşitliklerindeki deforme yok etme ve deforme yaratma operatörlerinin matris temsilleri de gösterilebilir. Bunun için herhangi bir $|\boldsymbol{n_j}\rangle$'in aşağıdaki bağıntıları sağlaması şartıyla,

$$\mathbf{I} = \sum |\boldsymbol{n}_j\rangle\langle\boldsymbol{n}_j|,$$

$$\langle\boldsymbol{n}_j|\boldsymbol{n}_k\rangle = \delta_{jk}, \tag{3.10}$$

bir $\boldsymbol{A}$ operatörünün matris temsilinin j'inci satır ve k'ncı sütun elemanı

$$A_{jk} = \langle\boldsymbol{n_j}|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{n}_k\rangle, \tag{3.11}$$

şeklinde ifade edilebilir. Bu eşitlik $\boldsymbol{A}$ operatörünün $|\boldsymbol{n}_j\rangle$ tabanındaki matris gösterimidir ve bu matrisin bütün elemanlarının bulunabilmesi için sadece temsili aranan operatörün kullanılan tabana etkilerinin sonucunun bilinmesi yeterlidir [5].

Operatörlerin matris gösterimleri kullanılan tabana göre değişir. Bir operatörün değişik durumlara göre matris gösterimleri üniter benzerlik dönüşümleri ile birbirlerine bağlıdır. Bunu görmek için bir $\boldsymbol{A}$ operatörünün iki farklı $|\boldsymbol{n_j}\rangle$ ve $|\boldsymbol{v_j}\rangle$ tabanına göre elde edilen [5]

$$A_{\boldsymbol{ij}} = \langle\boldsymbol{n_i}|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{n_j}\rangle,$$

$$A'_{\boldsymbol{ij}} = \langle\boldsymbol{v_i}|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{v_j}\rangle,$$

matris gösterimleri ele alınabilir. Tabanların tamlık özelliğinin sonucu olarak

$$|\boldsymbol{v_n}\rangle = \sum_{\boldsymbol{k}} |\boldsymbol{n_k}\rangle\langle\boldsymbol{n_k}|\,\boldsymbol{v_n}\rangle = \sum_{\boldsymbol{k}} S_{\boldsymbol{kn}}\,|\boldsymbol{n_k}\rangle, \tag{3.12}$$

yazmak mümkündür. Burada elemanları

$$S_{kn} = \langle \boldsymbol{n_k} | \boldsymbol{v_n} \rangle, \tag{3.13}$$

şeklinde tanımlanan **S** matrisi $|\boldsymbol{n_k}\rangle$ tabanından $|\boldsymbol{v_k}\rangle$ tabanına dönüşüm matrisidir ve

$$(\boldsymbol{SS}^{\dagger})_{kl} = \sum_{k} \langle \boldsymbol{n_k} | \boldsymbol{v_n} \rangle \langle \boldsymbol{n_l} | \boldsymbol{v_n} \rangle^{*} = \langle \boldsymbol{n_k} | \boldsymbol{n_l} \rangle = \delta_{kl}, \tag{3.14}$$

bağıntısından da görüldüğü gibi $\boldsymbol{S}^{\dagger}\boldsymbol{S} = 1$ eşitliğini sağlayan üniter bir matristir. Buna göre;

$$\langle \boldsymbol{n_j} | \boldsymbol{A} | \boldsymbol{n_k} \rangle = \sum_{l,m} \langle \boldsymbol{n_j} | \boldsymbol{v_l} \rangle \langle \boldsymbol{v_l} | \boldsymbol{A} | \boldsymbol{v_m} \rangle \langle \boldsymbol{v_m} | \boldsymbol{n_k} \rangle,$$

$$= \sum_{l,m} S_{jl} \, (\boldsymbol{A})_{lm} \boldsymbol{S}^{*}_{km} = (\boldsymbol{SAS}^{\dagger})_{jk}, \tag{3.15}$$

ifadesinden de açıkça görüldüğü gibi $\boldsymbol{A}$'nın farklı tabanlardaki matris gösterimleri üniter benzerlik dönüşümü ile birbirlerine bağlıdır[5].

Deforme harmonik salınıcı için (3.8) ve (3.9) eşitliklerini kullanarak

$$\boldsymbol{a}_{kn} = \langle k | \boldsymbol{a}_q | n \rangle = \sqrt{\left(\frac{1 - q^{2n}}{1 - q^2}\right)} \delta_{k,n-1}, \quad \delta_{k,n-1} = \begin{cases} 1 & k = n - 1 \\ 0 & k \neq n - 1 \end{cases},$$

$$\boldsymbol{a}^{\dagger}_{kn} = \langle k | \boldsymbol{a}^{\dagger}_q | n \rangle = \sqrt{\left(\frac{1 - q^{2n+2}}{1 - q^2}\right)} \delta_{k,n+1}, \quad \delta_{k,n+1} = \begin{cases} 1 & k = n + 1 \\ 0 & k \neq n + 1 \end{cases},$$

eşitliklerinin elde edilebileceği söylenebilir. Elde edilen ifadeleri ışığında da deforme yok etme operatörü $\boldsymbol{a}_q$ ve deforme yaratma operatörü $\boldsymbol{a}^{\dagger}_q$'nin matris temsilleri

$$\boldsymbol{a}_q = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{1} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \sqrt{1+q^2} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{1+q^2+q^4} & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{a}_q^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \sqrt{1} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \sqrt{1+q^2} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \sqrt{1+q^2+q^4} & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

şeklinde yazılabilir. Deformasyon parametresi q, bire eşit alındığında deforme yok etme operatörü $\boldsymbol{a}_q$ ve deforme yaratma operatörü $\boldsymbol{a}_q^\dagger$'nin matris temsili için yazılan ifadeler standart harmonik salınıcının yok etme ve yaratma operatörlerinin matris temsili için yazılan ifadeler ile aynı hali alır [8].

q-deforme bozon cebiri ile ilgili çalışmalara bakıldığında kolaylıkla fark edilebilir ki standart harmonik salınıcı cebirinin bir parametreli deformasyonu sadece (3.1) eşitliğindeki gibi değil, farklı eşitliklerle de ifade edilmiştir [20-24].

Bunların en önemlilerinden birisi Macfarlane[21] ve Biedenharn[22] tarafından öngörülen

$$\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^\dagger - q^{-1}\boldsymbol{a}^\dagger\boldsymbol{a} = q^{\boldsymbol{\mathcal{N}}}, \tag{3.16}$$

ifadesidir. Macfarlane-Biedenharn'ın bu konudaki çalışmalarını önemli kılan unsur, bu ifadenin kendisinden ziyade, bu ifadeyi kullanarak $SU_q(2)$ cebirinin inşa edilebileceğinin gösterilmesidir. Macfarlane ve Biedenharn, böyle bir ilişkinin varlığını göstermek için Schwinger'in[25] standart harmonik salınıcı cebirini kullanarak $SU(2)$ cebirini inşa ederken izlediği yolu takip etmiştir.

Birbirinden bağımsız $\boldsymbol{a_1}$ ve $\boldsymbol{a_2}$ deforme yok etme operatörleri ile $\boldsymbol{a}_1^\dagger$, $\boldsymbol{a}_2^\dagger$ deforme yaratma operatörlerini kullanarak

$$\mathbf{J}_+ = \boldsymbol{a}_1^\dagger \boldsymbol{a}_2,$$

$$\mathbf{J}_- = \boldsymbol{a}_2^\dagger \boldsymbol{a}_1,$$

operatörlerini tanımlamışlar ve

$$\mathbf{J_z} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\mathcal{N}_1} - \boldsymbol{\mathcal{N}_2}),$$

için $\mathbf{J}_+$, $\mathbf{J}_-$ ve $\mathbf{J_z}$ arasındaki komütasyon bağıntılarının

$$[\mathbf{J}_+, \mathbf{J}_-] = \frac{q^{2\mathrm{J_z}} - q^{-2\mathrm{J}_z}}{q - q^{-1}},$$

$$[\mathbf{J}_\mathrm{z}, \mathbf{J}_\pm] = \pm\mathbf{J}_\pm,$$

şeklinde yazılabileceğini göstermişlerdir. Bu cebirsel yapı, Sklyanin [26], Jimbo [27], Drinfeld [28] ve Woronowicz [29]'in $SU_q(2)$ kuantum grubu için öngördüğü cebirsel yapıdan başka bir şey değildir [21].

Yukarıdaki yaklaşımlara alternatif olarak q-deforme bozon cebiri ve $SU_q(2)$ kuantum grubu arasındaki ilişki, $SU_q(2)$ matris kuantum grubu ve bu matrisin elemanları arasındaki ilişki göz önüne alınarak da görülebilir.

Elemanları aşağıdaki gibi ifade edilen

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

M matrisi $GL_q(2)$ kuantum grubunun elemanı ise, bu matrisin elemanları arasındaki komütasyon bağıntıları,

$$ab = qba,$$

$ac = qca,$

$bd = qdb,$

$cd = qdc,$

$bc = cb,$

$ad - da = (q - q^{-1})bc\ ,$

eşitlikleri ile ifade edilebilir [30].

Bu komütasyon bağıntılarının bir kısmı aşağıdaki diyagram vasıtası ile daha kolay hatırlanabilir [31].

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "q"] \arrow[d, "q"'] & b \arrow[d, "q"] \\ c \arrow[r, "q"] & d \end{tikzcd}$$

Şekil 3.1. $GL_q(2)$ Kuantum matrisi elemanları komütasyon bağıntıları diyagramı

M matrisinin determinantı

$det_q M \equiv ad - qbc,$

eşitliği ile tanımlanır. Bu ifade matrisin bütün elemanları ile komütatiftir. Matrisin tersi için,

$MM^{-1} = M^{-1}M = \mathbb{1},$

eşitliğini sağlayacak şekilde,

$$M^{-1} = \left(det_q M\right)^{-1} \begin{pmatrix} d & -q^{-1}b \\ -qc & a \end{pmatrix},$$

ifadesi yazılabilir.

M matrisinin $SU_q(2)$ kuantum grubunun elemanı olabilmesi için

$$M^{-1} = M^{\dagger} = \begin{pmatrix} a^* & c^* \\ b^* & d^* \end{pmatrix},$$

eşitliğinin de sağlanması gerekir. Yani $M \epsilon SU_q(2)$ için M matrisinin elemanları $GL_q(2)$ komütasyon bağıntılarına ek olarak

$$d = a^*,$$

$$b = -qc^* ,$$

$$ad - qbc = 1,$$

eşitliklerini de sağlar [30, 31]. Böylece $SU_q(2)$ kuantum matris grubu

$$M = \begin{pmatrix} a & -qc^* \\ c & a^* \end{pmatrix},$$

eşitliği ile ifade edilirken, matris elemanları arasındaki ilişki

$$ac = qca , \tag{3.17}$$

$$ac^* = qc^*a , \tag{3.18}$$

$$cc^* = c^*c , \tag{3.19}$$

$$aa^* + q^2c^*c = 1, \tag{3.20}$$

$$a^*a + cc^* = 1, \tag{3.21}$$

şeklinde özetlenebilir.

(3.19), (3.20) ve (3.21) eşitlikleri kullanılarak

$$aa^* - q^2a^*a = 1 - q^2, \tag{3.22}$$

yazılabilir. $\boldsymbol{a} \longrightarrow \boldsymbol{a}'\sqrt{1-q^2}$ için; (3.22) eşitliği,

$$\boldsymbol{a}'\boldsymbol{a}^{*\prime} - q^2\boldsymbol{a}^{*\prime}\boldsymbol{a}' = 1, \tag{3.23}$$

şeklinde ifade edilen, bir boyutlu q-deforme salınıcısı olur [30]. Burada deformasyon parametresi q, 0 ile 1 arasında tanımlıdır.

(3.1) ve (3.16) eşitliklerinde görüldüğü gibi bir boyutlu deforme bozon cebiri farklı eşitliklerle ifade edilmiştir. Bu duruma benzer şekilde bir parametreli deforme bozon cebirinin çok boyutlu genelleştirilmeleri de farklı eşitliklerle ifade edilebilir[32,33].

q-deforme salınıcı cebirinin çok boyutlu genelleştirilmesi ilk olarak CBY (Coon, Baker, Yu) tarafından [34, 35]

$$\boldsymbol{a}_i\boldsymbol{a}_j^\dagger - q\boldsymbol{a}_j^\dagger\boldsymbol{a}_i = \delta_{ij}, \qquad i,j = 1,2,\dots,d, \tag{3.24}$$

eşitliği ile ifade edilmiştir[8, 36]. Daha sonra Arık ve Coon bir boyutlu deforme bozon cebirinin d tane komütatif kopyasını göz önüne alarak

$$\boldsymbol{a}_i\boldsymbol{a}_i^\dagger - q^2\boldsymbol{a}_i^\dagger\boldsymbol{a}_i = 1, \qquad i = 1,2,\dots,d, \tag{3.25}$$

$$[\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_j] = 0, \qquad i,j = 1,2,\dots,d, \tag{3.26}$$

$$[\boldsymbol{a}_i^\dagger, \boldsymbol{a}_j^\dagger] = 0, \quad i \neq j, \qquad i,j = 1,2,\dots,d, \tag{3.27}$$

eşitlikleri ile ifade edilen d-boyutlu q-deforme bozon cebirini inşa etmiştir[16]. Ancak bu cebirsel yapı bir kuantum grubu simetrisi göstermez. Cebirsel yapının kuantum grubu simetrisi göstermesi farklı koordinatlardaki yok etme operatörlerinin komütatif olmayan bir yapıya sahip olması ile gerçekleştirilebilir. Bu yapı ilk defa Pusz-Woronowicz [37] tarafından

$$\boldsymbol{C}_i\boldsymbol{C}_j = q\boldsymbol{C}_j\boldsymbol{C}_i\,,\ \ i < j\ \ \ i = 1,2,\dots d-1,\ \ j = 2,3,\dots d, \tag{3.28}$$

$$\boldsymbol{C}_i{\boldsymbol{C}_j}^{\dagger} = q{\boldsymbol{C}_j}^{\dagger}\boldsymbol{C}_i\,,\qquad\qquad i \neq j\quad i,j = 1,2,\dots,d, \tag{3.29}$$

$$\boldsymbol{C}_1\boldsymbol{C}_1^{\dagger} - q^2\boldsymbol{C}_1^{\dagger}\boldsymbol{C}_1 = 1, \tag{3.30}$$

$$\boldsymbol{C}_i\boldsymbol{C}_i^{\dagger} - q^2\boldsymbol{C}_i^{\dagger}\boldsymbol{C}_i = \boldsymbol{C}_{i-1}\boldsymbol{C}_{i-1}^{\dagger} - \boldsymbol{C}_{i-1}^{\dagger}\boldsymbol{C}_{i-1},\ \ i = 2,3,\dots,d, \tag{3.31}$$

$$\boldsymbol{C}_d\boldsymbol{C}_d^{\dagger} - \boldsymbol{C}_d^{\dagger}\boldsymbol{C}_d = q^{2\boldsymbol{\mathcal{N}}}, \tag{3.32}$$

eşitlikleri ışığında göz önüne alınmıştır.

Bu cebirsel yapılara ek olarak harmonik salınıcı için kuantizasyon işleminin Hamiltonyen denklemi yerine Newton denklemi göz önüne alınarak gerçekleştirildiği Newton salınıcısından da bahsetmek mümkündür [8, 36, 38]. Bu kuantizasyon işlemi sonucunda

$$f(\mathcal{H}) = g(\mathcal{H}+1) - g(\mathcal{H}), \tag{3.33}$$

şeklinde ifade edilen bir fark denklemi elde etmek olasıdır [38]. Ancak açıktır ki bir boyutlu sistemlerin çoğunda bu fark denklemi sağlanır. Bu sebeple bir boyutlu sistemleri için bu fark denklemi ışığında yapılan bir sınıflandırma herhangi bir orjinallik içermez. Fakat çok boyutlu sistemler göz önüne alınmaya başlandığında sistemin, Newton denkleminin göstermiş olduğu simetriye zorlanması

$$\boldsymbol{a_i}\boldsymbol{a_j^{\dagger}} - q\boldsymbol{a_j^{\dagger}}\boldsymbol{a_i} = q^{\boldsymbol{\mathcal{N}}}\delta_{ij}, \tag{3.34}$$

$$[\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_j] = 0, \qquad i,j = 1,2,\dots,d, \tag{3.35}$$

eşitlikleri ile ifade edilen $U(d)$ simetrisi gösteren bir cebirsel yapı yazmayı mümkün kılar[8, 36, 38, 39]. Bu cebirsel yapının bir boyutlu hali

$$\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^\dagger - q\boldsymbol{a}^\dagger\boldsymbol{a} = q^{\boldsymbol{\mathcal{N}}}, \tag{3.36}$$

eşitliği ile ifade edilebilir. Bu sistem için deforme sayı operatörünün spektrumu

$$[\mathcal{N}] = \mathcal{N}q^{\mathcal{N}-1}, \tag{3.37}$$

olup,

$$\boldsymbol{a}|0\rangle = 0, \tag{3.38}$$

$$\boldsymbol{a}|n\rangle = \sqrt{nq^{n-1}}|n-1\rangle, \tag{3.39}$$

$$\boldsymbol{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{(n+1)q^n}|n+1\rangle, \tag{3.40}$$

eşitlikleri yazılabilir. Böylece bir boyutlu Newton salınıcısı için yaratma ve yok etme operatörlerinin matris temsilleri, sırasıyla [36]

$$\boldsymbol{a}^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \sqrt{1} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \sqrt{2q} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \sqrt{3q^2} & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{1} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \sqrt{2q} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{3q^2} & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

şeklinde gösterilebilir.

Çok boyutu deforme bozon cebirlerinin iki parametre $(q_1\ , q_2)$ ile yazılması da mümkündür. Bunun nasıl yazılabileceğini görmek için öncelikle iki deformasyon parametresi içeren bir boyutlu bir sistemi göz önüne almak uygun olacaktır.

$$\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^{\dagger} - q_1^2\boldsymbol{a}^{\dagger}\boldsymbol{a} = q_2^{2\boldsymbol{\mathcal{N}}}, \tag{3.41}$$

eşitliği ile ifade edilen cebirsel yapı

$$\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^{\dagger} - q^2\boldsymbol{a}^{\dagger}\boldsymbol{a} = 1, \tag{3.42}$$

eşitliği ile gösterilen Arık-Coon salınıcısı ile

$$\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^{\dagger} - q^2\boldsymbol{a}^{\dagger}\boldsymbol{a} = q^{-2\boldsymbol{\mathcal{N}}}, \tag{3.43}$$

eşitliğinde gösterilen Macfarlane-Biedenharn salınıcısının genelleştirilmiş bir halidir. Çünkü $q_1 = q, \quad q_2 = 1$ için eşitlik (3.41), eşitlik (3.42) halini alırken; $q_1 = q_2^{-1} = q$ için eşitlik (3.41) , eşitlik (3.43) halini almaktadır.

(3.41) eşitliği ile ifade edilen q_1, q_2 deforme bozon cebirindeki deforme sayı operatörünün spektrumu

$$[n] = \frac{q_1^{2n} - q_2^{2n}}{q_1^2 - q_2^2}, \tag{3.44}$$

şeklinde yazılan Fibonacci temel sayılarıdır. Spektrumun bu özelliği sebebiyle de bu salınıcıya Fibonacci salınıcısı adı verilmiştir [40].

$$\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^{\dagger} - q_2^2\boldsymbol{a}^{\dagger}\boldsymbol{a} = q_1^{2\boldsymbol{\mathcal{N}}}, \tag{3.45}$$

eşitliğinin deforme sayı operatörünün de spektrumu eşitlik (3.44)'deki gibi Fibonacci temel sayılarıdır. (3.41) ve (3.45) eşitliği ile ifade edilen ve simetrisini kolayca gösterebileceğimiz bir genelleştirme gerçekleştirmek için iki boyutlu bir sistem göz önüne almak uygun olacaktır. İki boyutlu deforme sayı operatörünün spektrumunu veren

$$[\mathcal{N}_1 + \mathcal{N}_2] = \frac{q_1^{2(\mathcal{N}_1+\mathcal{N}_2)} - q_2^{2(\mathcal{N}_1+\mathcal{N}_2)}}{q_1^2 - q_2^2}, \tag{3.46}$$

ifadesinin

$$[\mathcal{N}_1 + \mathcal{N}_2] = [\mathcal{N}_1]q_2^{2\mathcal{N}_2} + q_1^{2\mathcal{N}_1}[\mathcal{N}_2], \tag{3.47}$$

şeklinde yazılabileceği bir cebirsel yapı oluşturulabilir. Öyle ki bu eşitlik

$$\boldsymbol{C}_1 = \boldsymbol{a_1} q_2^{\boldsymbol{\mathcal{N}_2}},$$

$$\boldsymbol{C}_2 = q_1^{\boldsymbol{\mathcal{N}_1}} \boldsymbol{a}_2,$$

eşitlikleriyle tanımlanan yeni yok etme operatörlerini yazmayı mümkün kılar. Ancak bu durumda $\boldsymbol{C}_1$ ve $\boldsymbol{C}_2$ deforme yok etme operatörleri

$$\boldsymbol{C}_1\boldsymbol{C}_2 = \frac{q_1}{q_2}\boldsymbol{C}_2\boldsymbol{C}_1,$$

komütasyon bağıntısını sağlar. Bu da yeni tanımlanan operatörler çerçevesinde

$$\boldsymbol{C_1}\boldsymbol{C_1^\dagger} - q_1^2\boldsymbol{C_1^\dagger}\boldsymbol{C_1} = q_2^{2\boldsymbol{\mathcal{N}}},$$

$$\boldsymbol{C_2}\boldsymbol{C_2^\dagger} - q_1^2\boldsymbol{C_2^\dagger}\boldsymbol{C_2} = \boldsymbol{C_1}\boldsymbol{C_1^\dagger} - q_2^2\boldsymbol{C_1^\dagger}\boldsymbol{C_1},$$

$$\boldsymbol{C_2}\boldsymbol{C_2^\dagger} - q_2^2\boldsymbol{C_2^\dagger}\boldsymbol{C_2} = q_1^{2\boldsymbol{\mathcal{N}}},$$

$$\boldsymbol{C_1}\boldsymbol{C_2^\dagger} = q_1q_2\boldsymbol{C_2^\dagger}\boldsymbol{C_1},$$

$$\boldsymbol{C}_1\boldsymbol{C}_2 = \frac{q_1}{q_2}\boldsymbol{C}_2\boldsymbol{C}_1,$$

$$[\boldsymbol{\mathcal{N}}] = \boldsymbol{C}_1^{\dagger}\boldsymbol{C}_1 + \boldsymbol{C}_2^{\dagger}\boldsymbol{C}_2,$$

eşitlikleri ile ifade edilen iki boyutlu q_1, q_2 deforme bozon cebirini yazmayı mümkün kılar. Ancak bu sistem standart harmonik salınıcısının göstermiş olduğu $U(d)$ simetrisini göstermez. Bu sistem Pusz-Woronowicz sistemine benzer şekilde kuantum grubu simetrisi gösterir.

(3.47) eşitliğinden bir genelleme yaparak iki parametreli d-boyutlu sistem için deforme sayı operatörünün spektrumu

$$[\mathcal{N}_1 + \mathcal{N}_2 + \mathcal{N}_3 +, \dots, +\mathcal{N}_d] = [\mathcal{N}_1] q_2^{2(\mathcal{N}_2+\mathcal{N}_3+,\dots,+\mathcal{N}_d)} + q_1^{2\mathcal{N}_1}[\mathcal{N}_2] q_2^{2(\mathcal{N}_3+,\dots,+\mathcal{N}_d)}$$

$$+q_1^{2\mathcal{N}_1} q_1^{2\mathcal{N}_2}[\mathcal{N}_3] q_2^{2(\mathcal{N}_4+,\dots,+\mathcal{N}_d)} +, \dots, +, \dots, +q_1^{2(\mathcal{N}_1+,\dots\dots,+\mathcal{N}_{d-1})}[\mathcal{N}_d], \tag{3.48}$$

şeklinde yazılabilir. Böylece sistemin yok etme operatörleri

$$\boldsymbol{C}_1 = \boldsymbol{a}_1 q_2^{\boldsymbol{\mathcal{N}}_2+\boldsymbol{\mathcal{N}}_3+,\dots,+\boldsymbol{\mathcal{N}}_d}, \tag{3.49}$$

$$\boldsymbol{C}_2 = q_1^{\boldsymbol{\mathcal{N}}_1}\boldsymbol{a}_2 q_2^{\boldsymbol{\mathcal{N}}_3+\boldsymbol{\mathcal{N}}_4+,\dots,+\boldsymbol{\mathcal{N}}_d}, \tag{3.50}$$

$$\vdots$$

$$\boldsymbol{C}_i = q_1^{\boldsymbol{\mathcal{N}}_1+\boldsymbol{\mathcal{N}}_2+,\dots,+\boldsymbol{\mathcal{N}}_{i-1}}\boldsymbol{a}_2 q_2^{\boldsymbol{\mathcal{N}}_{i+1}+\boldsymbol{\mathcal{N}}_{i+1}+,\dots,+\boldsymbol{\mathcal{N}}_d}, \tag{3.51}$$

$$\vdots$$

$$\boldsymbol{C}_d = q_1^{\boldsymbol{\mathcal{N}}_1+\boldsymbol{\mathcal{N}}_2+,\dots,+\boldsymbol{\mathcal{N}}_{d-1}}\boldsymbol{a}_d, \tag{3.52}$$

eşitliklerinde olduğu gibi gösterilebilir[40]. Bu eşitlikler tensör notasyonu yardımı ile

$$\boldsymbol{C}_1 = \boldsymbol{a} \otimes \underbrace{q_2^{\boldsymbol{\mathcal{N}}} \otimes \dots \otimes q_2^{\boldsymbol{\mathcal{N}}}}_{(d-1)terim}, \tag{3.53}$$

$$\boldsymbol{C}_2 = q_1^{\boldsymbol{\mathcal{N}}} \otimes \boldsymbol{a} \otimes \underbrace{q_2^{\boldsymbol{\mathcal{N}}} \otimes \dots \otimes q_2^{\boldsymbol{\mathcal{N}}}}_{(d-2)terim}, \tag{3.54}$$

$$\vdots$$

$$\boldsymbol{C}_i = \underbrace{q_1^{\boldsymbol{\mathcal{N}}} \otimes \dots \otimes q_1^{\boldsymbol{\mathcal{N}}}}_{(i-1)terim} \otimes \boldsymbol{a} \otimes \underbrace{q_2^{\boldsymbol{\mathcal{N}}} \otimes \dots \otimes q_2^{\boldsymbol{\mathcal{N}}}}_{(d-i)terim}, \tag{3.55}$$

$$\vdots$$

$$\boldsymbol{C}_d = \underbrace{q_1^{\boldsymbol{\mathcal{N}}} \otimes \dots \otimes q_1^{\boldsymbol{\mathcal{N}}}}_{(d-1)terim} \otimes \boldsymbol{a}, \tag{3.56}$$

şeklinde yeniden yazılabilir[8]. Bu operatörlerin sağladığı cebirsel yapı

$$\boldsymbol{C_i C_j} = \frac{q_1}{q_2} \boldsymbol{C_j C_i}\,, \qquad i < j \quad i = 1,2,\dots,d-1 \quad j = 2,3,\dots,d, \tag{3.57}$$

$$\boldsymbol{C_i C_j^\dagger} = q_1 q_2 \boldsymbol{C_j^\dagger C_i}, \quad i \neq j \qquad i,j = 1,2,\dots d, \tag{3.58}$$

$$\boldsymbol{C_1 C_1^\dagger} - q_1^2 \boldsymbol{C_1^\dagger C_1} = q_2^{2\boldsymbol{\mathcal{N}}} \tag{3.59}$$

$$\boldsymbol{C_i C_i^\dagger} - q_2^2 \boldsymbol{C_i^\dagger C_i} = \boldsymbol{C_{i+1} C_{i+1}^\dagger} - q_1^2 \boldsymbol{C_{i+1}^\dagger C_{i+1}} \qquad i = 1,2,\dots d-1, \tag{3.60}$$

$$\boldsymbol{C_d C_d^\dagger} - q_2^2\, \boldsymbol{C_d^\dagger C_d} = q_1^{2\boldsymbol{\mathcal{N}}}, \tag{3.61}$$

şeklinde yazılabilirken, toplam deforme sayı operatörü

$$[\boldsymbol{\mathcal{N}}] = \sum_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{d}} \boldsymbol{C_i^\dagger C_i}, \tag{3.62}$$

$$[\boldsymbol{\mathcal{N}}]|n\rangle = \frac{q_1^{2\mathcal{N}} - q_2^{2\mathcal{N}}}{q_1^2 - q_2^2} |n\rangle, \tag{3.63}$$

eşitliğini sağlar.

Fibonacci salınıcısına benzer şekilde CBY tarafından inşa edilen çok boyutlu deforme bozon cebirinin de iki parametre ile genelleştirilmesi mümkündür ki bu yapı Fibonacci Coon Baker Yu (FCBY) salınıcı olarak da bilinir. Cebirsel yapının nasıl inşa edildiğini görmek için

$$\boldsymbol{a}_i\boldsymbol{a}_j^\dagger - q\boldsymbol{a}_j^\dagger\boldsymbol{a}_i = \delta_{ij}, \qquad i,j = 1,2,\dots,d, \tag{3.64}$$

eşitliğinin sol terimini, hem sağdan hem de soldan $\boldsymbol{a}_k^\dagger$ ile çarpmak uygun olacaktır.

$$\boldsymbol{a}_i\boldsymbol{a}_i^\dagger\boldsymbol{a}_k^\dagger - q\boldsymbol{a}_i^\dagger\boldsymbol{a}_i\boldsymbol{a}_k^\dagger = \boldsymbol{a}_k^\dagger\boldsymbol{a}_i\boldsymbol{a}_i^\dagger - q\boldsymbol{a}_k^\dagger\boldsymbol{a}_i^\dagger\boldsymbol{a}_i, \tag{3.65}$$

eşitliği,

$$\boldsymbol{a}_i\boldsymbol{\mathcal{N}} = (\boldsymbol{\mathcal{N}} + \boldsymbol{1})\boldsymbol{a}_i$$

$$\boldsymbol{C}_i = q_2^{\frac{\boldsymbol{\mathcal{N}}}{2}}\boldsymbol{a}_i$$

$$q_1 = qq_2$$

eşitliklerini kullanarak;

$$\boldsymbol{C}_i\boldsymbol{C}_i^\dagger\boldsymbol{C}_k^\dagger - qq_2\boldsymbol{C}_i^\dagger\boldsymbol{C}_i\boldsymbol{C}_k^\dagger = q_2\boldsymbol{C}_k^\dagger\boldsymbol{C}_i\boldsymbol{C}_i^\dagger - qq_2^2\boldsymbol{C}_k^\dagger\boldsymbol{C}_i^\dagger\boldsymbol{C}_i, \tag{3.66}$$

şeklinde yeniden yazılabilir[33, 36, 41]. Bu ifadede

$$\boldsymbol{C}_i\boldsymbol{C}_i^\dagger - q_1\boldsymbol{C}_i^\dagger\boldsymbol{C}_i = \boldsymbol{\mathcal{H}}, \tag{3.67}$$

tanımlaması yapılırsa, (3.66) eşitliği

$$\boldsymbol{\mathcal{H}}\boldsymbol{C}_k^\dagger = q_2\boldsymbol{C}_k^\dagger\boldsymbol{\mathcal{H}} \tag{3.68}$$

eşitliğinin yazılabilmesini sağlar.

BÖLÜM 4. KUANTUM MATRİS GRUPLARI

Grup teorisi, simetrinin dili olması açısından fizik için çok önemlidir. Özellikle Lie cebiri ve Lie grubu fizikçiler için ayrı bir öneme sahiptir. Ancak bu yapılar lineer olmayan integrallenebilir sistemlerin kuantizasyonu çalışırken yetersiz kalmış ve daha genel bir ifadeye gereksinim duyulmuştur [42]. Bu genel ifade ilk defa $SU(2)$ grubunun q-deformasyonu olarak Kulish, Reshetikhin[43] ve Sklyanin, Takhtajan, Faddeev[44] tarafından yazılmıştır. Ancak bu yapıların kuantum grubu olarak adlandırılması ilk defa Drinfeld [28] tarafından 1986 yılında gerçekleştirilmiştir [45].

Mevcut çalışmalara bakıldığında; kuantum gruplarının farklı yaklaşımlar ışığında inşa edildiğini görmek mümkündür. Bu yaklaşımlardan birisi komütatif olmayan ve Hopf cebiri aksiyomlarını sağlayan elemanlardan oluşan bir matrisin inşasıdır[31, 45]. Hopf cebiri antipodu (antipode) bulunan bir bi-cebirdir (bialgebra). Öyle ki, A bir F cismi üzerinde birimsel birleşimli cebir ise A'da bi-cebir

$$m(m\otimes id) = m(id\otimes m), \tag{4.1}$$

$$m(id\otimes\eta) = m(\eta\otimes id) = id, \tag{4.2}$$

$$(id\otimes\Delta)\Delta = (\Delta\otimes id)\Delta, \tag{4.3}$$

$$(id\otimes\epsilon)\Delta = (\epsilon\otimes id)\Delta = \mathrm{id}, \tag{4.4}$$

aksiyomlarını sağlayan

$$A\otimes A \xrightarrow{m} A, \tag{4.5}$$

$$F \xrightarrow{\eta} A, \tag{4.6}$$

$$A \xrightarrow{\Delta} A \otimes A, \tag{4.7}$$

$$A \xrightarrow{\varepsilon} F, \tag{4.8}$$

lineer dönüşümler ile tanımlanabilir[31, 42, 46].

Eşitlik (4.1) cebirin birleşme özelliğine sahip olma koşuludur ve bu koşul aşağıdaki diyagramla da ifade edilebilir;

$$\begin{tikzcd}
A\otimes A\otimes A \arrow[r, "m\otimes id"] \arrow[d, "id\otimes m"'] & A\otimes A \arrow[d, "m"] \\
A\otimes A \arrow[r, "m"] & A
\end{tikzcd}$$

Şekil 4.1. Birleşme özelliği diyagramı

Eşitlik (4.2) cebirin birim elemanının varlığı koşuludur ve bu koşul aşağıdaki diyagramla gösterilir.

$$\begin{tikzcd}
F\otimes A \cong A \cong A\otimes F \arrow[r, "id\otimes\eta"] \arrow[d, "\eta\otimes id"'] \arrow[dr, "id"] & A\otimes A \arrow[d, "m"] \\
A\otimes A \arrow[r, "m"] & A
\end{tikzcd}$$

Şekil 4.2. Birim eleman diyagramı

Eşitlik (4.3) ko-asosyatiflik (coassociative) koşuludur ve bu koşul için

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"'] & A\otimes A \arrow[d, "id\otimes\Delta"] \\ A\otimes A \arrow[r, "\Delta\otimes id"] & A\otimes A\otimes A \end{tikzcd}$$

Şekil 4.3. Ko-asosyatiflik diyagramı

şeklinde bir komütatif diyagram çizmek mümkündür.

Eşitlik (4.4) ko-birimin (counit) varlığı koşuludur ve bu koşul için

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"'] \arrow[dr, "id"] & A\otimes A \arrow[d, "id\otimes\epsilon"] \\ A\otimes A \arrow[r, "\epsilon\otimes id"] & F\otimes A = A = A\otimes F \end{tikzcd}$$

Şekil 4.4. Ko-birim diyagramı

şeklinde bir komütatif diyagram çizilebilir.

Bi-cebirin antipodu

$$S\colon A \longrightarrow A$$

şeklinde ifade edilen ve

$$m(id\otimes S)\Delta = m(S\otimes id)\Delta$$

koşulunu sağlayan bir lineer dönüşümdür. Diğer eşitliklerde olduğu gibi bu ifade de aşağıdaki gibi komütatif bir diyagram ile gösterilebilir.

$$
\begin{tikzcd}
A\otimes A \arrow[rr, "S\otimes id"] & & A\otimes A \arrow[d, "m"] \\
A \arrow[u, "\Delta"] \arrow[r, "\epsilon"] \arrow[d, "\Delta"'] & F \arrow[r, "\eta"] & A \\
A\otimes A \arrow[rr, "id\otimes S"] & & A\otimes A \arrow[u, "m"']
\end{tikzcd}
$$

Şekil 4.5. Antipot diyagramı

Kuantum matris grubunun en bilinen örneklerinden birisi

$$T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

eşitliği ile ifade edilen, elemanları

$$ab = qba, \tag{4.9}$$

$$ac = qca, \tag{4.10}$$

$$bd = qdb, \tag{4.11}$$

$$cd = qdc, \tag{4.12}$$

$$bc = cb, \tag{4.13}$$

$$ad - da = (q - q^{-1})bc, \tag{4.14}$$

komütasyon bağıntılarını sağlayan, $GL_q(2,\mathbb{C})$ grubudur. Burada, matrisin elemanlarının sağlamış olduğu cebirsel yapının [45, 47]

$$\Delta(T) = T\dot{\otimes}T,$$

$$\epsilon(T) = \mathbb{1},$$

$$S(T) = T^{-1},$$

eşitlikleri ile tanımlanan ko-çarpım (coproduct), ko-birim ve antipot ifadeleri ışığında Hopf cebiri olduğunu göstermek mümkündür[31]. $\dot{\otimes}$ notasyonu matris elemanları arasındaki çarpmanın normal değil, matris tensör çarpımı olarak gerçekleştirdiğini belirtmek için kullanılmıştır [42].

$S(T) = T^{-1}$ ifadesi ışığında T matrisinin determinantı hakkında birkaç söz söylemek uygun olacaktır. T matrisinin elemanları komütatif olmadığından T matrisinin determinantı, elamanları komütatif olan bir matrisin determinantı gibi yazılmaz. Eğer T matrisinin elemanlarından a'nın tersi var ise, bu matris

$$T = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & d - ca^{-1}b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & a^{-1}b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{4.15}$$

şeklinde yazılabilir. Yukarıdaki ifade de ikinci matrisin determinantının bir'e eşit olduğu aşikardır. Öyleyse T matrisinin determinantı birinci matrise bakılarak yazılabilir. Yani T kuantum matrisinin q-determinantı

$$det_q T = a(d - ca^{-1}b), \tag{4.16}$$

yazılabileceği gibi, eşitlik (4.10) ışığında q-determinantı için

$$det_q T = ad - qcb, \tag{4.17}$$

ifadesi de yazılabilir. Bu ifade matrisin bütün elemanları ile komütatiftir [45].

Kuantum matris grupları için vurgulanması önemli olan bir başka nokta da T matrisinin elemanlarının sağlamış olduğu komütasyon bağıntılarının bilgisinin toplu halde bulunduğu bir R-matrisini yazmanın mümkün olmasıdır. Bu matris kuantum grupları için Jakobi koşuluna eşdeğer bir role sahip Yang-Baxter denklemini sağlar[45, 48, 49]. Bu matrisi elde etmek için RTT-bağıntısı olarak bilinen

$$RT_1T_2 = T_2T_1R,$$

eşitliğine bakmak uygun olur[50, 51]. Burada T_1 ve T_2 için

$$T_1 = T\otimes\mathbb{1} = \begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & c & 0 & d \end{pmatrix},$$

$$T_2 = \mathbb{1}\otimes T = \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & c & d \end{pmatrix},$$

eşitlikleri yazılabilir. Bu bilgileri ışığında $GL_q(2)$ kuantum matris grubu için R matrisinin

$$R = \begin{pmatrix} q^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & q - q^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q^{-1} \end{pmatrix},$$

şeklinde yazılabileceğini görmek zor değildir[45].

BÖLÜM 5. İKİ PARAMETRELİ DEFORME BOZON CEBİRİ İÇİN İNHOMOJEN KUANTUM DEĞİŞMEZLİK GRUBU

Biz bu çalışmada $\boldsymbol{\mathcal{H}}$ hermityen bir operatör olmak üzere

$$\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^* - q^2\boldsymbol{a}^*\boldsymbol{a} = \boldsymbol{\mathcal{H}}, \tag{5.1}$$

$$\boldsymbol{a}\boldsymbol{\mathcal{H}} = r^2\boldsymbol{\mathcal{H}}\boldsymbol{a}, \tag{5.2}$$

eşitlikleri ile tanımlanan iki parametreli deforme bozon cebirinin inhomojen kuantum değişmezlik grubunu araştırdık [52]. Böyle bir yapının varlığı, eşitlik (5.1) ve (5.2)'deki operatörler için bir dönüşüm matrisi yazılabilmesi anlamına gelir[52-55]. Bu dönüşüm matrisi

$$M=\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \eta & \gamma \\ \beta^* & \alpha^* & \eta^* & \gamma^* \\ \mathcal{X}_1 & \mathcal{X}_2 & \mathcal{X}_3 & \mathcal{X}_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{5.3}$$

eşitliği ile ifade edilirse; lineer dönüşümler, matris tensör çarpımı yardımı ile

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}' \\ \boldsymbol{a}^{*\prime} \\ \boldsymbol{\mathcal{H}}' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \eta & \gamma \\ \beta^* & \alpha^* & \eta^* & \gamma^* \\ \mathcal{X}_1 & \mathcal{X}_2 & \mathcal{X}_3 & \mathcal{X}_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \dot{\otimes} \begin{pmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{a}^* \\ \boldsymbol{\mathcal{H}} \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{5.4}$$

şeklinde yazılabileceği gibi; her bir operatör için

$$\boldsymbol{a}' = \alpha\otimes\boldsymbol{a} + \beta\otimes\boldsymbol{a}^* + \eta\otimes\boldsymbol{\mathcal{H}} + \gamma\otimes\mathbf{1}, \tag{5.5}$$

$$\boldsymbol{a}^{*\prime} = \alpha^*\otimes\boldsymbol{a}^* + \beta^*\otimes\boldsymbol{a} + \eta^*\otimes\boldsymbol{\mathcal{H}} + \gamma^*\otimes\mathbf{1}, \tag{5.6}$$

$$\boldsymbol{\mathcal{H}}' = \mathcal{X}_1 \otimes \boldsymbol{a} + \mathcal{X}_2 \otimes \boldsymbol{a}^* + \mathcal{X}_3 \otimes \boldsymbol{\mathcal{H}} + \mathcal{X}_4 \otimes \boldsymbol{1}, \tag{5.7}$$

eşitlikleri ile de ifade edilebilir. (5.6) eşitliği (5.5) eşitliğinin kompleks eşleniğidir. M dönüşüm matrisinin, birinci satırındaki elemanlar ile ikinci satırındaki elemanlar arasındaki ilişkinin sebebi de bu eşitlik ışığında anlaşılabilir.

Eşitlik (5.1) ve (5.2)'nin, eşitlik (5.5) ile (5.7) arasında ifade edilen dönüşümler ışığında değişmez kalması için, dönüşüm matrisi elemanları

$$\alpha \mathcal{X}_1 = r^2 \mathcal{X}_1 \alpha, \tag{5.8}$$

$$\beta \mathcal{X}_2 = r^2 \mathcal{X}_2 \beta\ , \tag{5.9}$$

$$\eta \mathcal{X}_3 = r^2 \mathcal{X}_3 \eta, \tag{5.10}$$

$$\gamma \mathcal{X}_4 = r^2 \mathcal{X}_4 \gamma, \tag{5.11}$$

$$\alpha \mathcal{X}_2 + \gamma \mathcal{X}_3 + \eta \mathcal{X}_4 = r^2 \mathcal{X}_1 \beta + r^2 \mathcal{X}_3 \gamma + r^2 \mathcal{X}_4 \eta, \tag{5.12}$$

$$q^2 \alpha \mathcal{X}_2 + \beta \mathcal{X}_1 = q^2 r^2 \mathcal{X}_1 \beta + r^2 \mathcal{X}_2 \alpha, \tag{5.13}$$

$$\eta \mathcal{X}_1 + r^2 \alpha \mathcal{X}_3 = r^2 \mathcal{X}_3 \alpha + r^4 \mathcal{X}_1 \eta, \tag{5.14}$$

$$\eta \mathcal{X}_2 + r^{-2} \beta \mathcal{X}_3 = r^2 \mathcal{X}_3 \beta + \mathcal{X}_2 \eta, \tag{5.15}$$

$$\alpha \mathcal{X}_4 + \gamma \mathcal{X}_1 = r^2 \mathcal{X}_1 \gamma + r^2 \mathcal{X}_4 \alpha, \tag{5.16}$$

$$\beta \mathcal{X}_4 + \gamma \mathcal{X}_2 = r^2 \mathcal{X}_2 \gamma + r^2 \mathcal{X}_4 \beta, \tag{5.17}$$

$$\alpha \alpha^* = \alpha^* \alpha, \tag{5.18}$$

$$\beta \beta^* = q^4 \beta^* \beta, \tag{5.19}$$

$$\eta\eta^* = q^2\eta^*\eta, \tag{5.20}$$

$$\alpha\beta^* = q^2\beta^*\alpha, \tag{5.21}$$

$$\beta\alpha^* = q^2\alpha^*\beta, \tag{5.22}$$

$$\eta\beta^* = q^2r^2\beta^*\eta, \tag{5.23}$$

$$\alpha\eta^* = q^2r^{-2}\eta^*\alpha, \tag{5.24}$$

$$\eta\alpha^* = q^2r^{-2}\alpha^*\eta, \tag{5.25}$$

$$\beta\eta^* = q^2r^2\eta^*\beta, \tag{5.26}$$

$$\mathcal{X}_1 = \alpha\gamma^* - q^2\gamma^*\alpha + \gamma\beta^* - q^2\beta^*\gamma, \tag{5.27}$$

$$\mathcal{X}_2 = \beta\gamma^* - q^2\gamma^*\beta + \gamma\alpha^* - q^2\alpha^*\gamma\ , \tag{5.28}$$

$$\mathcal{X}_3 = \alpha\alpha^* - q^2\beta^*\beta + \eta\gamma^* - q^2\gamma^*\eta + \gamma\eta^* - q^2\eta^*\gamma, \tag{5.29}$$

$$\mathcal{X}_4 = \gamma\gamma^* - q^2\gamma^*\gamma, \tag{5.30}$$

eşitliklerini sağlamalıdır. Ancak bu eşitliklerin sağlanması sistemin simetrisinin bir kuantum grubu olduğunu söylemez. Dönüşüm matrisinin bir kuantum matris grubunun elemanı olması için; (5.8)-(5.30) eşitlikleri ile ifade edilen cebirsel yapının Hopf cebiri olması gerekir.

$$\Delta(M) = M\dot{\otimes}M, \tag{5.31}$$

eşitliği ile tanımlanan ko-çarpım ifadesi ışığında, (5.3) eşitliğindeki dönüşüm matrisinin her bir elemanı için

$$\Delta(\alpha) = \alpha\otimes\alpha + \beta\otimes\beta^* + \eta\otimes\mathcal{X}_1\ , \tag{5.32}$$

$$\Delta(\beta) = \alpha \otimes \beta + \beta \otimes \alpha^* + \eta \otimes \mathcal{X}_2 \,, \tag{5.33}$$

$$\Delta(\eta) = \alpha \otimes \eta + \beta \otimes \eta^* + \eta \otimes \mathcal{X}_3, \tag{5.34}$$

$$\Delta(\gamma) = \alpha \otimes \gamma + \beta \otimes \gamma^* + \eta \otimes \mathcal{X}_4 + \gamma \otimes 1, \tag{5.35}$$

$$\Delta(\mathcal{X}_1) = \mathcal{X}_1 \otimes \alpha + \mathcal{X}_2 \otimes \beta^* + \mathcal{X}_3 \otimes \mathcal{X}_1, \tag{5.36}$$

$$\Delta(\mathcal{X}_2) = \mathcal{X}_1 \otimes \beta + \mathcal{X}_2 \otimes \alpha^* + \mathcal{X}_3 \otimes \mathcal{X}_2, \tag{5.37}$$

$$\Delta(\mathcal{X}_3) = \mathcal{X}_1 \otimes \eta + \mathcal{X}_2 \otimes \eta^* + \mathcal{X}_3 \otimes \mathcal{X}_3 \,, \tag{5.38}$$

$$\Delta(\mathcal{X}_4) = \mathcal{X}_1 \otimes \gamma + \mathcal{X}_2 \otimes \gamma^* + \mathcal{X}_3 \otimes \mathcal{X}_4 + \mathcal{X}_4 \otimes 1, \tag{5.39}$$

eşitlikleri yazılabilir. Yukarıdaki ko-çarpım ifadeleri de (5.8) ile (5.30) arasında ifade edilen komütasyon bağıntılarını sağlamalıdır. Bu durum

$$\alpha\beta = q^{-2}\beta\alpha, \tag{5.40}$$

$$\alpha\eta = r^{-2}\eta\alpha, \tag{5.41}$$

$$\alpha\gamma = \gamma\alpha, \tag{5.42}$$

$$\alpha\gamma^* = q^2\gamma^*\alpha, \tag{5.43}$$

$$\beta\eta = r^2\eta\beta, \tag{5.44}$$

$$\beta\gamma = \gamma\beta, \tag{5.45}$$

$$\beta\gamma^* = q^2\gamma^*\beta, \tag{5.46}$$

$$\eta\gamma = \gamma\eta, \tag{5.47}$$

$$\eta\gamma^* - q^2\gamma^*\eta = \frac{1}{2}(\mathcal{X}_3 + q^2\beta^*\beta - \alpha\alpha^*), \tag{5.48}$$

$$\eta\mathcal{X}_4 = r^2\mathcal{X}_4\eta, \tag{5.49}$$

$$\gamma\mathcal{X}_3 = r^2\mathcal{X}_3\gamma, \tag{5.50}$$

$$\mathcal{X}_3\mathcal{X}_4 = \mathcal{X}_4\mathcal{X}_3\,, \tag{5.51}$$

$$\mathcal{X}_1 = \mathcal{X}_2 = 0\,, \tag{5.52}$$

eşitliklerinin de sağlanmasını zorunlu kılar. Bu eşitlikler (5.32) ile (5.39) ifadeleri için de sağlanmaktadır. Yapının Hopf cebiri yapısına sahip olduğunu göstermek için ko-birim ve antipodun

$$\epsilon(M) = \mathbb{1}, \tag{5.53}$$

$$S(M) = M^{-1}, \tag{5.54}$$

eşitlikleri ile tanımlandıklarını akılda tutarak, dönüşüm matrisi *M*'nin tersinin varlığını araştırmak uygun olacaktır. *M* dönüşüm matrisinin elemanları

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta^* & \alpha^* \end{pmatrix}, \tag{5.55}$$

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \eta & \gamma \\ \eta^* & \gamma^* \end{pmatrix}, \tag{5.56}$$

$$\mathrm{B} = \begin{pmatrix} \mathcal{X}_3 & \mathcal{X}_4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{5.57}$$

olmak üzere

$$M = \begin{pmatrix} A & \Gamma \\ 0 & B \end{pmatrix}, \tag{5.58}$$

eşitliğindeki gibi blok formda yazılabilir. Bu yazım şekli, dönüşüm matrisi *M*' nin tersini

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}\Gamma\, B^{-1} \\ 0 & B^{-1} \end{pmatrix}, \tag{5.59}$$

şeklinde ifade etmeyi mümkün kılar. Bu ifadenin de

$$MM^{-1} = M^{-1}M = \mathbb{1},$$

eşitliğini sağladığı kolaylıkla görülebilir. Dönüşüm matrisi *M*'nin tersini ifade eden eşitliğe bakılırsa, bu ifadenin tersinin varlığının söz konusu olabilmesi için A ve B matrisinin terslerinin var olmasının gerekliliği görülebilir. B matrisi komütatif elemanlardan oluşan bir matristir ve bu matrisin tersini yazmak hiç de zor değildir. Ancak A matrisinin elemanları komütatif değildir. Bu elemanlar,

$$\alpha\alpha^* = \alpha^*\alpha, \tag{5.60}$$

$$\beta\beta^* = q^4\beta^*\beta, \tag{5.61}$$

$$\alpha\beta = q^{-2}\beta\alpha, \tag{5.62}$$

$$\alpha\beta^* = q^2\beta^*\alpha, \tag{5.63}$$

eşitliklerini sağlar. Bu matrisin tersi, Schirrmacher ve çalışma arkadaşlarının $GL(2)$'nin iki parametreli deformasyonu[56] ile ilgili yapmış oldukları çalışma ışığında, kolaylıkla yazılabilir.

Elemanları a, b, c, d olan bir $GL(2)$ matrisinin determinantı

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = Det \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

eşitliği ile ifade edilebilir. Bu eşitliğe benzer şekilde elemanları (5.60)-(5.63) eşitliklerini sağlayan $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta^* & \alpha^* \end{pmatrix}$ matrisinin determinantı için

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta^* & \alpha^* \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha^* & -P_1\beta \\ -P_2\beta^* & P_3\alpha \end{pmatrix} = \mathcal{D}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

eşitliğini öngörmek mümkündür. $\alpha,\ \beta,\ \beta^*\ ve\ \alpha^*$ operatörleri arasındaki komütasyon bağıntıları $P_1 = q^2,\ P_2 = q^{-2}\ ve\ \ P_3 = 1$ eşitliklerini bulmayı mümkün kılar. Böylece A matrisini kuantum determinantı

$$D = \alpha\alpha^* - q^{-2}\beta\beta^*$$

eşitliği ile ifade edilebilir. Yani

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha^* & -q^2\beta \\ -q^{-2}\beta^* & \alpha \end{pmatrix} D^{-1}, \tag{5.64}$$

yazılabilir[56]. Ayrıca belirtmek faydalı olacaktır ki; kuantum matrisi M’nin elemanları arasındaki komütasyon bağıntıları ile ilgili bilgilerin hepsini içeren ve

$$RM_1M_2 = M_2M_1R \tag{5.65}$$

şeklinde ifade edilen RMM ilişkisini sağlayan bir *R* matrisi yazmak da mümkündür. Burada $M_1 = M\otimes\mathbb{1}$ ve $M_2 = \mathbb{1}\otimes M'$ dir. Söz konusu kuantum matrisi *M* için *R* matrisini elde etmek istersek öncelikle

$$M_1 = \begin{pmatrix}
\alpha & 0 & 0 & 0 & \beta & 0 & 0 & 0 & \eta & 0 & 0 & 0 & \gamma & 0 & 0 & 0 \\
0 & \alpha & 0 & 0 & 0 & \beta & 0 & 0 & 0 & \eta & 0 & 0 & 0 & \gamma & 0 & 0 \\
0 & 0 & \alpha & 0 & 0 & 0 & \beta & 0 & 0 & 0 & \eta & 0 & 0 & 0 & \gamma & 0 \\
0 & 0 & 0 & \alpha & 0 & 0 & 0 & \beta & 0 & 0 & 0 & \eta & 0 & 0 & 0 & \gamma \\
\beta^* & 0 & 0 & 0 & \alpha^* & 0 & 0 & 0 & \eta^* & 0 & 0 & 0 & \gamma^* & 0 & 0 & 0 \\
0 & \beta^* & 0 & 0 & 0 & \alpha^* & 0 & 0 & 0 & \eta^* & 0 & 0 & 0 & \gamma^* & 0 & 0 \\
0 & 0 & \beta^* & 0 & 0 & 0 & \alpha^* & 0 & 0 & 0 & \eta^* & 0 & 0 & 0 & \gamma^* & 0 \\
0 & 0 & 0 & \beta^* & 0 & 0 & 0 & \alpha^* & 0 & 0 & 0 & \eta^* & 0 & 0 & 0 & \gamma^* \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathcal{X}_3 & 0 & 0 & 0 & \mathcal{X}_4 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathcal{X}_3 & 0 & 0 & 0 & \mathcal{X}_4 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathcal{X}_3 & 0 & 0 & 0 & \mathcal{X}_4 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathcal{X}_3 & 0 & 0 & 0 & \mathcal{X}_4 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix} \tag{5.66}$$

$$M_2 = \begin{pmatrix}
\alpha & \beta & \eta & \gamma & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\beta^* & \alpha^* & \eta^* & \gamma^* & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \mathcal{X}_3 & \mathcal{X}_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \alpha & \beta & \eta & \gamma & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \beta^* & \alpha^* & \eta^* & \gamma^* & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathcal{X}_3 & \mathcal{X}_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha & \beta & \eta & \gamma & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta^* & \alpha^* & \eta^* & \gamma^* & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathcal{X}_3 & \mathcal{X}_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha & \beta & \eta & \gamma \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta^* & \alpha^* & \eta^* & \gamma^* \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathcal{X}_3 & \mathcal{X}_4 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix} \tag{5.67}$$

eşitliklerini yazmak uygun olacaktır. Eşitlik (5.65) ışığında (5.66) ve (5.67) ifadelerini kullanarak, söz konusu sistem için *R* matrisi

$$R = \begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & q^{-2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{q^{-2}}{2} & 0 & 0 & -\frac{q^{-2}}{2} & 0 \\
0 & 0 & r^{-2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & q^{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r^{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r^{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r^{-2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix} \tag{5.68}$$

şeklinde yazılabilir.

BÖLÜM 6. SONUÇ

Bu çalışmada (5.1) ve (5.2) eşitlikleri ile tanımlanan iki parametreli deforme bozon cebiri için homojen olmayan bir kuantum simetri grubu yazılabileceğini gösterdik. Söz konusu simetriyi anlatan matris kuantum grubunun homojen bölümüne baktığımızda; matris elemanlarının $GL_{q^{-2},q^2}(2)$ matris kuantum grubunun komütasyon bağıntıları ile aynı eşitlikleri sağlaması sebebiyle de göz önüne almış olduğumuz iki parametreli deforme bozon cebirinin inhomojen kuantum simetri grubunu $BIGL_{q^{-2},q^2}(2)$ olarak isimlendirdik. Burada B bozonik, I homojen olmayan, $GL_{q^{-2},q^2}(2)$ de iki boyutlu iki parametreli genel deforme lineer kuantum grubunu anlatmak için kullanılan kısaltmalardır.

Göz önüne alınan cebirsel yapının deforme bozon cebirleri için bir genelleştirme içermesi ve bu yapının özel bir matematiksel yapıya sahip olduğunun gösterilmesi önemlidir. Ancak bu çalışmayı daha önemli yapacak unsur, onun inşa edilebilecek bir q-deforme kuantum alan teorisine uygulanabilmesi halinde gerçekleşebilecektir.

KAYNAKLAR

[1] RIZAOĞLU, E., SÜNEL, N., Klasik Mekanik, Sözkesen Matbaacılık, sf. 1, Tokat, 2006 (2. Basım).

[2] HALLIDAY, D., RESNICK, R., Fiziğin Temelleri (Mekanik ve Termodinamik), cilt 1, Çeviri Editörü: Prof. Dr. Cengiz YALÇIN ODTÜ Fizik Bölümü, Palme yayıncılık, sf. 28, 262-266, Ankara, 1992 (3. Basım).

[3] SERWAY, R.A., BEICHER, R.J., Fen ve Mühendislik İçin Fizik (Mekanik- Mekanik Dalgalar-Termodinamik), cilt1, Çeviri Editörü: Prof. Dr. Kemal ÇOLAKOĞLU, Palme Yayıncılık, sf. 191-196, 390-394, Ankara, 2007 (5. Basım).

[4] SERWAY, R.A., BEICHER, R.J., Fen ve Mühendislik İçin Fizik (Modern Fizik), cilt 3, Çeviri Editörü: Prof. Dr. Kemal ÇOLAKOĞLU, Palme Yayıncılık, sf. 1344-1346, Ankara, 2005 (5. Basım).

[5] DERELİ, T., VERÇİN, A., Kuantum Mekaniği, cilt 1-2, ODTÜ Geliştirme Vakfı Yayıncılık ve İletişim A.Ş., sf. 50-53, 125-141, sf. 1-14, Ekim, 2000 (2. Basım).

[6] GRIFFITHS, D.J., Introduction to Quantum Mechanics, Prentice Hall Inc., sf. 42-45, New Jersey, 1995 (Second Edition).

[7] TOWNSEND J.S., A Modern Approach to Quantum Mechanics, University Science Book, sf. 194-206, USA, 2000.

[8] ARIKAN, A.S., Multiparameter Generalization of Deformed Particle Algebras, Ph.D. Thesis, Boğaziçi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, sf. 1-35, 2004.

[9] GASIOROWICZ, S., Quantum Physics, John Willey & Sons, Inc. University of Minnesota, sf. 130-141, New York, 1996 (Second Edition).

[10] SAKURAI, J.J., Modern Quantum Mechanics Revised Edition, Editor: SAN FU, T., Addison-Wesley Publishing Company Inc., sf. 89-97, USA 1994.

[11] GOSWAMI, A., Quantum Mechanics, Wm. C. Brown Publisher Inc., University of Oregon, sf. 143-151, 2003 (Second Edition).

[12] BALLENTINE, L.E., Quantum Mechanics (A Modern Development), A Division of Simon &Schuster Englewood Cliffs, Simon Fraser University, sf. 151-157, New Jersey, 1990.

[13] OHANIAN, H.C., Principles of Quantum Mechanics, Prentice Hall, New Jersey, 1990.

[14] DİKİCİ, M., Kuantum Fiziğine Giriş, Ondokuz Mayıs Üniversitesi Eğitim Fakültesi Yayınları, sf. 157-160, Samsun, 1994.

[15] ARIK, M., COON, D.D., LAM, Y.M., Operator Algebra of Dual Resonance Models, J. Math. Phys. 16, pp. 1776-1779, 1975.

[16] ARIK M., COON, D.D., Hilbert Spaces of analytic functions and generalized coherent states, J. Math. Phys. 17, pp. 524-527, 1976.

[17] ARIK, M., From q-oscillators to Quantum Groups, Symmetries in Science VI : From the Rotation Group to Quantum Algebras, Plenium Press, sf. 47, N.Y., 1993.

[18] BONATSOS, D., DASKALOYANNIS, C., Quantum Groups and Their Applications in Nuclear Physics, Progress in Particle and Nuclear Physics, 43, pp. 537-618, 1999.

[19] JACKSON, F.H., Basic Integration, Quart J. Math., 2, pp. 1-16, 1951.

[20] TSOHANTJIS, I., PAOLUCCI, A., JARVIS, P.D., On boson algebras as Hopf algebras, J. Phys. A: Math. Gen. 30, pp. 4075-4087, 1997.

[21] MACFARLANE, A.J., On q-Analogues of The Quantum Harmonic Oscillator and The Quantum Group $SU_q(2)$, J. Phys. A: Math. Gen. 22, pp. 4581-4588, 1989.

[22] BIEDENHARN, L.C., The quantum group $SU_q(2)$ and a q-analogue of the boson operators, J. Phys. A: Math. Gen. 22, pp. L873-L878, 1989.

[23] SUN, C.P., FU, H.C., The q-deformed boson realization of the quantum group $SU_q(n)$ and its representations, J. Phys. A: Math. Gen., 22, pp. L983-L986, 1989.

[24] KWEK, L.C., OH, C.H., A General q-Oscillator Algebra, Letters in Mathematical Physics, 44, pp. 273-281, 1998.

[25] SCHWINGER, J., On angular momentum Report U.S. AEC NYO-3071 (unpublished) reprinted in 1965 Quantum Theory of Angular Momentum ed. BIEDENHARN, L.C. and VAN, DAM, H. pp. 229, New York, 1951.

[26] SKLYANIN, E.K., Quantum version of the method of inverse scattering problem, J. Sov. Math., 19, pp. 1546-1596, 1982.

[27] JIMBO, M., A q-Difference Analogue of U(g) and the Yang-Baxter Equation, Lett. Math. Phys., 10, pp. 63-69, 1985.

[28] DRINFELD, V.G., Quantum groups, Proc. Int. Congr. of Math., Berkeley, Vol 1, pp. 798-820, 1986.

[29] WORONOWICZ, S.L., Twisted *SU*(2) group An example of a noncommutative differential calculus, Publications of The Research Institute for Mathematical Sciences, 23, 1, pp. 117-181, 1987.

[30] ARIK, M., ÇELİK, S., Unitary Quantum Groups, Quantum Projective Spaces and *q*-Oscillator, Zeitschhrift für Physik C- Particles and Fields, 59, pp. 99-103, 1993.

[31] BIEDENHARN, L.C., LOHE, M.A., Quantum group symmetry and *q*-tensor algebras, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., sf; 117-121, 1-35, USA, 1995.

[32] MISHRA, A.K., RAJASEKARAN, G., Generalized Fock Spaces, New Forms of Quantum Statistics and Their Algebras, Pramana Journal of Physics, 45, 2, pp. 91-139, 1995.

[33] ÜNEL, N.G, Unitary Group and Quantum Group Invariant *q*-Oscillators Fibonaccization, Boğaziçi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, 1994.

[34] COON, D.D., YU, S., BAKER, M., Operator formulation of a Dual Multiparticle Theory with Nonlinear Trajectories, Phys. Rev. D, 5, pp. 1429-1433, 1972.

[35] YU, S., Manifestly Dual “Quarklike” Operator Formulation of a Dual Multiparticle Theory with Nonlinear Trajectories, Phys Rev D, 7, pp. 1871-1879, 1973.

[36] ALĞİN, A., *q*-Deformed Newton Oscillators, Ph. D. Thesis, Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, 2001.

[37] PUSZ, W., WORONOWICZ, S., Twisted second quantization, Rep. Math. Phys. 27, pp. 231-257, 1989.

[38] ARIK, M., ATAKISHIYEV, N.M., WOLF, K.B., Quantum Algebraic Structures Compatible with the Harmonic Oscillator Newton Equation, J. Phys. A., 32, pp. L371-L376, 1999.

[39] ALĞİN, A., ARIK, M., ATAKISHIYEV, N.M, SU(d)-Invariant Multidimensional *q*-Oscillators with Bosonic Degeneracy, Mod. Phys. Let. A, 15, 19, pp. 1237-1242, 2000.

[40] ARIK, M., DEMİRCAN, E., TURGUT, T., EKİNCİ, L., MUNGAN, M., Fibonacci Oscillators, Zeitschriftfür Physik C-Particles and Fields, 55, 1,

pp. 89-95, 1992.

[41] ARIK, M., RADOR, T., ÜNEL, G., Fibonaccization and Multiparameter q-Oscillators, Tr. J. of Physics, 22, pp. 267-271, 1998.

[42] KAYSERİLİOĞLU, U., Quantum Group Structures Associated with Invariances of Some Physical Algebras, Ph. D. Thesis, Boğaziçi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, 2005.

[43] KULISH, P., RESHETIKHIN, N.Y., Quantum Linear Problem for The Sine-Gordon Equation and Higher Representations, Journal of Mathematical Sciences, 23, 4, pp. 2435-2441, 1983 (Translated from Zap. Nauch. Seminarov LOMI, 101, pp. 101-110, 1981).

[44] SKALYANIN, E., TAKHTAJAN, L.A., FADDEEV, L.D., Quantum Inverse Problem Method I, Theor. Math. Phys., 40, pp. 688-706, 1979.

[45] ÇELİK, S., Kuantum Matris Grupları ve q-Osilatörleri, Doktora Tezi, İstanbul Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, 1992.

[46] ÜNLÜ, M.B., Braided q-Oscillators, Yüksek Lisans Tezi, Boğaziçi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, 1998.

[47] ÖZKANLAR, A., Representations of the Quantum Matrix Group $SL_q(2,R)$, Yüksek Lisans Tezi, Boğaziçi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, 2001.

[48] FADDEEV, L.D., Integrable Models in (1+1) Dimensional Quantum Field Theory, in Les Houches Lectures XXXIX, 1992, Elsevier Science Publishers B.V., pp. 573-608, Nort-Holland, Amsterdam, 1984.

[49] CHAICHIAN, M., KULISH, P., LUKIERSKI, J., q-Deformed Jacobi Identity, q-Oscillators and q-Deformed Infinite-Dimensional Algebras, Phys. Lett. B, Vol.237, Issue 3-4, pp. 401-406, 1990.

[50] ARIK, M., BAYKAL, A., Inhomogeneous Quantum Groups for Particle Algebras, Journal of Mathematical Physics, 45, 11, pp. 4207-4217, 2004.

[51] ARIK, M., GÜN, S., YILDIZ, A., Invariance Quantum Group of the Fermionic Oscillator, Eur. Phys. J. C., 22, pp. 453-455, 2003.

[52] ALİM, H., ALTINTAŞ, A.A., ARIK, M., ARIKAN, A.S., The Inhomogeneous Quantum Invariance Group of The Two Parameter Deformed Boson Algebra, International Journal of Modern Physics A, 2009 (incelemede).

[53] ARIK, M., KAYSERİLİOĞLU, U., Quantum Invariance Group of Boson and Fermions, arxiv: hep-th/0304185v1, 2003.

[54] ALTINTAŞ, A.A., ARIK, M., The Inhomogeneous Quantum Invariance Group of Commuting Fermions, Central European Journal of Physics, 5, 1, pp.70-82, 2007.

[55] ALTINTAŞ, A.A., ARIK, M., ARIKAN, A.S., The Inhomogeneous Quantum Invariance Group of *q*-Deformed Boson Algebra, Mod. Phys. Lett. A (incelemede).

[56] SCHIRRMACHER, A., WESS, J., ZUMINO, B., The two-parameter deformation of *GL*(2), its differential calculus, and Lie algebra, Z. Phys. C Particles and Fields, 49, pp. 317-324, 1991.

ÖZGEÇMİŞ

Hüseyin ALİM, 10.03.1975'de Giresun'da doğdu. İlk ve orta eğitimini Gümüşhane'de lise eğitimini İstanbul'da tamamladı. 1992 yılında Ümraniye Teknik ve Endüstri Meslek Lisesi Elektrik Bölümünden mezun oldu. 1993 yılında başladığı Harran Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Fizik Bölümünü 1997 yılında bitirdi. 1998 yılında Giresun (Tirebolu) Çok Programlı Lisesinde, 2003–2004 yıllarında Giresun Namık Kemal İlköğretim Okulunda, 2004–2005 yıllarında Şişli Teknik ve Endüstri Meslek Lisesinde, 2005–2008 yıllarında Şişli Mehmet Rıfat EVYAP Anadolu Teknik ve Endüstri Meslek Lisesinde Fizik öğretmeni olarak çalıştı. 2006'da Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Fizik Anabilim dalında Yüksek Lisansa başladı. Halen aynı üniversitede Yüksek Lisans eğitimine devam etmekte ve Çekmeköy (İstanbul) Tunç ÇAPA Lisesinde Fizik öğretmeni olarak çalışmaktadır.