T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

E^3, $3-$BOYUTLU ÖKLİDYEN UZAYDA BİR KATI CİSMİN DİFERENSİYEL GEOMETRİSİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

EBRU IŞIK

Enstitü Anabilim Dalı	**:**	**MATEMATİK**
Tez Danışmanı	**:**	**Doç. Dr. Murat TOSUN**

Haziran 2009

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

E^3, 3 – BOYUTLU ÖKLİDYEN UZAYDA BİR KATI CİSMİN DİFERENSİYEL GEOMETRİSİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Ebru IŞIK

Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK

Bu tez 11 / 06 /2009 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Oybirliği ile kabul edilmiştir.

Doç.Dr.	**Prof.Dr.**	**Yrd.Doç.Dr.**
Murat TOSUN	**İbrahim OKUR**	**İbrahim ÖZGÜR**
Jüri Başkanı	**Üye**	**Üye**

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans danışmanlığımı üstlenip, bilgi ve tecrübesiyle destek veren, çalışmalarım boyunca yardımlarını esirgemeyen saygıdeğer hocam sayın Doç. Dr. Murat TOSUN'a şükran ve saygılarımı sunarım.

Tez çalışmam sırasında bana yardımcı olan Yrd. Doç. Dr. Soley ERSOY'a ve Arş. Gör. Ayşe Zeynep PİRDAL'a teşekkürü borç bilirim.

Desteğini her zaman yanımda hissettiğim değerli eşim Serkan IŞIK'a ve sevgili aileme teşekkür ederim.

Ebru IŞIK

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

E^3	: $3-$boyutlu Öklid uzayı
ISA	: Ani dönme ekseni
L	: Regle yüzeyin doğrultmanı
(x_1, x_2, x_3)	: Hareketli cismin sabit bir A noktasının koordinatları
Σ_{m}	: Hareketli aksoid
Σ_{f}	: Sabit aksoid
Γ_{A}	: A noktasının sabit aksoide göre yörüngesi
$\Gamma_{\mathrm{A}}^{(\mathrm{m})}$	: A noktasının hareketli aksoide göre yörüngesi
$o_{\mathrm{m}} - i_{\mathrm{m}} j_{\mathrm{m}} k_{\mathrm{m}}$	: Hareketli referans çatısı
$o_{\mathrm{f}} - i_{\mathrm{f}} j_{\mathrm{f}} k_{\mathrm{f}}$	: Sabit referans çatısı
$\mathbf{r}_{\mathrm{m}}$	: Σ_{m} nin striksiyon eğrisinin vektörü
$\mathbf{r}_{\mathrm{f}}$	: Σ_{f} nin striksiyon eğrisinin vektörü
$\mathbf{S}_{\mathrm{m}}$	: Hareketli aksoidin doğrultmanı
$\mathbf{S}_{\mathrm{f}}$	: Sabit aksoidin doğrultmanı
σ_{m}	: Σ_{m} nin doğrultmanının birim vektörünün küresel gösterge eğrisinin yay uzunluğu
σ_{f}	: Σ_{f} nin doğrultmanının birim vektörünün küresel gösterge eğrisinin yay uzunluğu
$\left\{\mathbf{r}_{\mathrm{m}}, E_1^{(\mathrm{m})}, E_2^{(\mathrm{m})}, E_3^{(\mathrm{m})}\right\}$	: Σ_{m} nin Frenet Çatısı
$\left\{\mathbf{r}_{\mathrm{f}}, E_1^{(\mathrm{f})}, E_2^{(\mathrm{f})}, E_3^{(\mathrm{f})}\right\}$	: Σ_{f} nin Frenet Çatısı
$\alpha_{\mathrm{m}}, \beta_{\mathrm{m}}, \gamma_{\mathrm{m}}$	: Σ_{m} nin yapı parametreleri
$\alpha_{\mathrm{f}}, \beta_{\mathrm{f}}, \gamma_{\mathrm{f}}$	: Σ_{f} nin yapı parametreleri

ŞEKİLLER LİSTESİ

ÖZET

Anahtar Kelimeler: Hareketli cisim, Adjoint yaklaşım, Uzaysal hareket, Aksoid, Euler-Savary analoğu

Bu tez dokuz bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde diferensiyel geometriden çok iyi bilinen temel kavramlar verilmiştir. İkinci bölümde Öklid uzayında regle yüzeyler üzerinde durulmuş ve gerekli teoremler özetlenmiştir.

Üçüncü bölümde bir regle yüzeye adjoint bir eğrinin yeni bir yaklaşımı incelenmiş ve bir regle yüzeye adjoint bir eğrinin sabit nokta koşulu bulunmuştur. Dördüncü bölümde uzaysal harekette bir nokta yörüngesinin temel denklemleri elde edilmiştir. Beşinci bölümde aksoidlerin indirgenmiş yapı parametrelerinin kinematik anlamları ortaya konulmuştur. Altıncı bölümde hareketli cisimdeki bazı noktalar (ivme merkezi, infleksiyon yüzeyi, Bresse hiperbolü) özel kinematik anlamları ile hareketli aksoidin doğal üçyüzlüsünde konumlandırılmıştır. Yedinci bölüm, iki alt başlık altında incelenmiştir.Birinci alt bölüm uzaysal harekette bir nokta yörüngesinin hareketli çatısına ayrılmış, ikinci alt bölümde ise bir nokta yörüngesinin geodezik Euler-Savary analoğu ve Euler-Savary analoğu kurulmuştur. Küresel harekette bir nokta yörüngesinin ani geometrik özellikleri ise sekizinci bölümde tartışılmıştır.

Dokuzuncu bölümde tüm çalışmanın kısa bir özeti yapılmıştır. Ayrıca, uzaysal harekette aksoidlerin geometrik özellikleri ekte anlatılmıştır.

DIFFERANTIAL GEOMETRY OF A RIGID BODY IN THREE DIMENSIONAL EUCLIDEAN SPACE

SUMMARY

Keywords: Moving body, adjoint approach, spatial motion, aksode, Euler-Savary analogue

This thesis consists of eight chapters. In the first chapter, we have given basic concepts well known from differential geometry. In the second chapter, ruled surface were explaned in three dimensional Euclidean space and necessary theorems were summarized. In the third chapter, a new approach of a space curve adjoint to a ruled surface was examined and fixed point condition of a curve adjoint to a ruled surface was obtained. In the fourth chapter of this thesis, the basic equations of a point trajectory in spatial motion were obtained. In the fifth chapter, the kinematic meaning of the induced construction parameters of axodes were revealed. In the sixth chapter, some points (the acceleration center, the inflection points, the Bresse hyperboloid) with special kinematic meaning in the moving body are located in the natural trihedron of the moving axode. The seventh chapter was separated with two subchapter. The first subchapter was devoted to the moving frame of a point trajectory in spatial motion and the second one to the geodesic Euler-Savary analogue and Euler-Savary analogue of a point trajectory. The invariants of a point trajectory in spherical motion were discussed in the eight chapter.

Finally, a brief summary of the study is in the tenth chapter. Also, the geometrical properties of axodes in spatial motion have been related in appendix.

BÖLÜM 1. TEMEL KAVRAMLAR

Tanım 1.1. Boş olmayan bir cümle A ve bir K cismi üstünde bir vektör uzayı V olsun. Bir $f : A\times A \to V$ fonksiyonu,

1) $\forall P,Q,R \in A$ için $f(P,Q)+f(Q,R)=f(P,R)$

2) $\forall P \in A$ ve $\forall \alpha \in V$ için $f(P,Q)=\alpha$ olacak biçimde bir tek $Q \in A$ noktası vardır.

Şartlarını sağlıyorsa A ya V vektör uzayı ile birleştirilmiş Afin uzay adı verilir [3].

Tanım 1.2. A bir reel afin uzay ve A nın birleştiği vektör uzayı da V olsun. V de bir iç çarpım işlemi olarak

$$\langle\ ,\ \rangle : V\times V \to \mathbb{R}$$
$$(x,y) \to \langle x,y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \begin{cases} x=(x_1,\dots,x_n) \\ y=(y_1,\dots,y_n) \end{cases}$$

Öklid iç çarpımı tanımlanırsa bu işlem yardımı ile A da uzaklık ve açı gibi metrik kavramlar tanımlanabilir. Böylece A afin uzayı da yeni bir ad olarak Öklid uzayı adını alır [3].

Eğer $A=\mathbb{R}^n$ sıralı $n-$lilerin cümlesi ve $V=\mathbb{R}^n$ $n-$boyutlu standart vektör uzayı olarak alınırsa $V=\mathbb{R}^n$ vektör uzayında Öklid iç çarpımı ile birlikte $A=\mathbb{R}^n$, Afin uzayı, $n-$boyutlu standart Öklid uzayı olarak adlandırılır ve E^n ile gösterilir [3].

Tanım 1.3.

$$\begin{aligned} d: E^n \times E^n &\to \mathbb{R} \\ (x,y) &\to d(x,y)=\left\|\overrightarrow{xy}\right\|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i-x_i)^2} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan d fonksiyonuna E^n Öklid uzayında, uzaklık fonksiyonu ve $d(x,y)$ reel sayısına da $x,y\in E^n$ noktaları arasındaki uzaklık denir [3].

Teorem 1.1. E^n de uzaklık fonksiyonu bir metriktir [3].

Tanım 1.4.

$$\begin{aligned} d: E^n \times E^n &\to \mathbb{R} \\ (x,y) &\to d(x,y)=\left\|\overrightarrow{xy}\right\| \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan d fonksiyonuna E^n de Öklid metriği denir [3].

Tanım 1.5. $\forall x,y,z\in E^n$ için $\widehat{xyz}$ açısının ölçüsü

$$\cos\theta=\frac{\left\langle \overrightarrow{xy},\overrightarrow{yz}\right\rangle}{\left\|\overrightarrow{xy}\right\|\left\|\overrightarrow{yz}\right\|}$$

den hesaplanan θ reel sayısıdır [3] .

Tanım 1.6. E^n de sıralı bir $\{P_0, P_1, P_2, ..., P_n\}$ nokta $n+1$-lisine $\mathbb{R}^n$ de karşılık gelen $\left\{\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}, ..., \overrightarrow{P_0P_n}\right\}$ vektör n-lisi $\mathbb{R}^n$ için bir ortonormal baz ise $\{P_0, P_1, P_2, ..., P_n\}$ sistemine E^n de bir dik çatı veya Öklid çatısı denir [3] .

Tanım 1.7. E^n deki $\{E_0, E_1, ..., E_n\}$ çatısına standart öklid çatısı denir ki burada

$$E_0 = (1,0,...,0), \quad E_1 = (0,1,...,0), \quad ..., \quad E_n = (0,0,...,1)$$

dır [3].

Tanım 1.8. E^n de bir X noktasının E^n deki Standart Öklid Çatısına göre ifadesi

$$\overrightarrow{E_0X} = \sum_{i=1}^{n} x_i \overrightarrow{E_0E_i}$$

şeklindedir. Burada

$$x_i : E^n \to \mathbb{R}, \quad 1 \le i \le n ,$$

fonksiyonlarına X noktasının Öklid koordinat fonksiyonları ve $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ sıralı ve reel değerli fonksiyonlar n-lisine de E^n in Öklid Koordinat Sistemi adı verilir [3].

Tanım 1.9. X bir cümle ve X in alt kümelerinin bir koleksiyonu τ olsun. Eğer τ koleksiyonu

1) $X, \phi \in \tau$,

2) $\forall A_1, A_2 \in \tau \Rightarrow A_1 \cap A_2 \in \tau$,

3) $A_i \in \tau, i \in \tau, \bigcup_{i \in I} A_i \in \tau$

önermelerini sağlıyorsa τ ya X üzerinde bir topoloji, (X, τ) ikilisine de topolojik uzay denir [3].

Tanım 1.10. X ve Y birer topolojik uzay olsunlar. Bir

$$f : X \to Y$$

fonksiyonu sürekli , f^{-1} tersi var ve f^{-1} de sürekli ise f ye X ten Y ye bir homeomorfizm (topolojik dönüşüm) denir [3].

Tanım 1.11. X bir topolojik uzay olsun. X in P ve Q gibi iki farklı noktası için X de sırasıyla, P ve Q noktalarını içine alan A_P ve A_Q açık alt cümleleri $A_P \cap A_Q = \varnothing$ olacak biçimde bulunabilirse X topolojik uzayına Haussdorf uzayı denir [3].

Tanım 1.12. M bir topolojik uzay olsun. M için aşağıdaki önermeler doğrulanıyor ise M ye n-boyutlu topolojik manifold (veya kısaca topolojik n-manifold) adı verilir [3].

1) M bir Hausdorff uzayıdır.

2) M nin her bir açık alt cümlesi E^n e veya E^n nin bir açık alt cümlesine homeomorftur.

3) M sayılabilir çoklukta açık cümlelerle örtülebilir.

Tanım 1.13. M bir $n-$boyutlu topolojik manifold ve U da E^n in bir açık alt cümlesi olsun. U bir ψ homeomorfizmi ile M nin bir W alt cümlesine eşlenebilir.

$$\psi : U \subset E^n \to W \subset M$$

(ψ, W) ikilisine M de bir koordinat komşuluğu veya harita denir [3].

Tanım 1.14. M bir topolojik manifold ve M nin bir açık örtüsü U_α olsun. U_α açık cümlelerinin α indislerinin cümlesi A olmak üzere U_α örtüsü için $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ yazılır. E^n de U_α ya ψ_α homeomorfizmi altında homeomorf olan bir açık cümle V_α olsun. Böylece ortaya çıkan (ψ_α, U_α) haritalarının

$$\{(\psi_\alpha, U_\alpha)\}_{\alpha\in A}$$

koleksiyonuna bir atlas denir [3].

Tanım 1.15. $I \subset \mathbb{R}$ bir açık alt aralık olmak üzere

$$\alpha : I \to E^n \text{ , } I \subset \mathbb{R}$$

diferensiyellenebilir fonksiyona E^n de bir eğri adı verilir ve M ile gösterilir. Burada (I,α) ya M eğrisinin koordinat komşuluğu , $t \in I$ değişkenine de M eğrisinin parametresi denir [3].

Tanım 1.16. E^n de bir M eğrisi (I,α) ve (J,β) koordinat komşulukları ile verilsin.

$$h : \alpha^{-1} \circ \beta : J \to I$$

diferensiyellenebilir fonksiyonuna M nin bir parametre değişimi (yani M nin I daki parametresinin J deki parametre ile değişimi) denir [3].

Tanım 1.17. $M \subset E^n$ eğrisi (I,α) koordinat komşuluğu ile verilsin.

$$\begin{aligned} \|\alpha'\| &: I \to \mathbb{R} \\ t &\to \|\alpha'\|(t) = \|\alpha'(t)\| \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan $\|\alpha'\|$ fonksiyonuna, M eğrisinin (I,α) koordinat komşuluğuna göre skalar hız fonksiyonu ve $\|\alpha'(t)\|$ reel sayısına da M nin (I,α) koordinat komşuluğuna göre $\alpha(t)$ noktasındaki skalar hızı denir [3].

Tanım 1.18. M eğrisi (I,α) koordinat komşuluğu ile verilmiş olsun. Eğer $\forall s \in I$ için

$$\|\alpha'(s)\| = 1$$

ise M eğrisine (I,α) koordinat komşuluğuna göre birim hızlı eğri, $s \in I$ parametresine de yay-parametresi adı verilir [3].

Tanım 1.19. Her noktasındaki hız vektörü sıfırdan farklı olan eğriye regüler eğri denir [3].

Teorem 1.2. E^n de regüler her eğrinin, birim hızlı olacak şekilde bir koordinat komşuluğu vardır [3].

BÖLÜM 2. REGLE YÜZEYLER

Bu kısımda E^3 de regle yüzey kavramını ele alacağız ve regle yüzeyler için temel özellikleri vereceğiz.

Tanım 2.1. $M \subset E^3$ yüzey olsun. $\forall P \in M$ noktasında, E^3 ün M de kalan bir doğrusu var ise M ye bir regle yüzey , $P \in M$ noktasından geçen ve M de kalan doğruya da M nin bir doğrultmanı adı verilir [3].

Teorem 2.1. $M \subset E^3$ bir regle yüzey olsun. M nin doğrultmanları, M de hem asimptotik ve hem de geodezik çizgilerdir [3].

Teorem 2.2. $M \subset E^3$ bir regle yüzey ve M nin Gauss eğrilik fonksiyonu K olsun. Bu takdirde $\forall P \in M$ için $K(P) \leq 0$ dır [3].

Şimdi regle yüzeyler için atlas kavramını ele alalım. M bir regle yüzey olsun.

$$\alpha : I \to M$$

eğrisinin teğet vektör alanı T olmak üzere, $\forall t \in I$ için $\alpha(t)$ noktasında M nin doğrultmanı T ile lineer bağımsız olacak şekilde verilsin. $\alpha(t) \in M$ noktasındaki doğrultman,

$$\beta : \mathbb{R} \to M$$
$$\beta(v) = (\alpha_1(t) + va_1(t), ..., \alpha_3(t) + va_3(t))$$

şeklindedir. Burada, $a_i(t) \in \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq 3$, skalarları, doğrultmanın $\alpha(t)$ noktasındaki bileşenleridir. Böylece,

$$\varphi : \mathrm{I} \times \mathbb{R} \to E^3$$
$$\varphi(t, v) = (\alpha_1(t) + va_1(t), \alpha_2(t) + va_2(t), \alpha_3(t) + va_3(t))$$

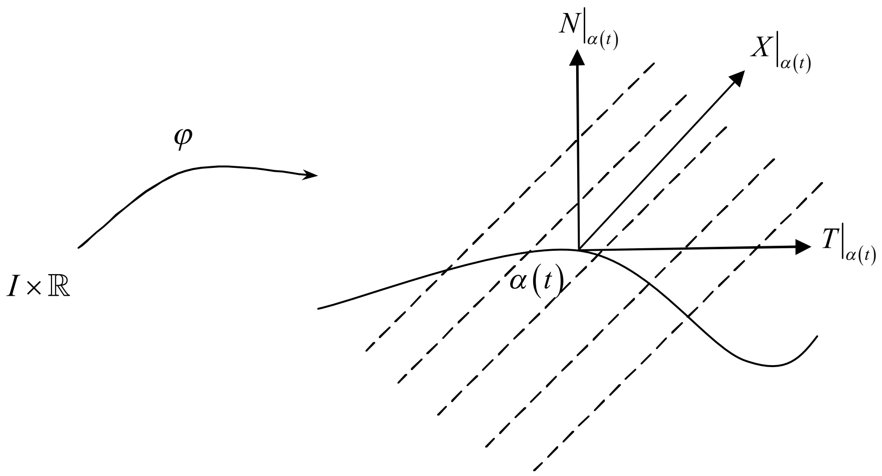
olmak üzere; $\{(I \times \mathbb{R}, \varphi)\}$ sistemi, M için bir atlastır. $\alpha : I \to M$ eğrisinin yay-parametresi ile verildiğini ve doğrultmanın üzerindeki

$$X\Big|_{\alpha(t)} = \sum_{i=1}^{3} a_i(t) \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_{\alpha(t)}$$

tanjant vektörünün de $\forall t \in I$ için birim vektör olduğunu kabul edelim. $\alpha : I \to M$ eğrisi $\langle T, X \rangle = 0$ olacak şekilde seçilmiş ise M nin birim normali N olmak üzere

$$\{T, X, N\}$$

sistemi, α boyunca bir ortonormal sistem teşkil eder (Şekil 2.1).



Şekil 2. 1 $\{T, X, N\}$ ortanormal sistemi

Şimdi $\{T, X, N\}$ sisteminin α boyunca değişimini, yani, T ye göre her birinin kovaryant türevlerini bulalım. α boyunca,

$$\begin{aligned} 1 = \langle T, T \rangle = \langle N, N \rangle = \langle X, X \rangle &\Rightarrow 0 = T\left[\langle X, X \rangle\right] = 2\langle D_T X, X \rangle \\ &\Rightarrow \langle D_T X, X \rangle = 0 \end{aligned}$$

dir. Benzer şekilde

$$\begin{aligned} \langle D_T N, N \rangle &= 0 \\ \langle D_T T, T \rangle &= 0 \end{aligned}$$

dir. Burada $a, b, c \in C^{\infty}(M, \mathbb{R})$ fonksiyonları,

$$\begin{aligned} a\big|_{\alpha(t)} &= \langle D_T T, X\rangle\big|_{\alpha(t)} \\ b\big|_{\alpha(t)} &= \langle D_T T, N\rangle\big|_{\alpha(t)} \\ c\big|_{\alpha(t)} &= \langle D_T X, N\rangle\big|_{\alpha(t)} \end{aligned} \tag{2.1}$$

şeklinde tanımlanırsa,

$$\left.\begin{aligned} D_T T &= aX + bN \\ D_T X &= -aT + cN \\ D_T N &= -bT - cX \end{aligned}\right\} \tag{2.2}$$

elde edilir. (2.2) denklemi matris formunda ,

$$\begin{bmatrix} D_T T \\ D_T X \\ D_T N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ X \\ N \end{bmatrix}$$

şeklinde ifade edilir.

$\varphi(t,v) = \alpha(t) + vX(t)$ ile verilen ifade $\{(I\times\mathbb{R},\varphi)\}$ atlasında $\forall v\in\mathbb{R}$ sabit değeri için M nin bir $\varphi_v : I\times\{v\}\to M$ eğrisini belirtir. Bu eğrinin teğet vektör alanı

$$A = T + vD_T X$$

ve burada $D_T X = -aT + cN$ olduğundan

$$A = (1 - av)T + cvN$$

şeklinde bulunur. Bu ifade eder ki, A vektör alanı da X e diktir.

Bir doğrultman boyunca, M nin teğet düzlemlerinin çakışık olduğu genellikle doğru değildir. Ancak, bu düzlemlerin daima sabit olması, $c \in C^{\infty}(M, \mathbb{R})$ fonksiyonu ile yakından ilgilidir. Bu ilgiyi bir teorem ile verelim:

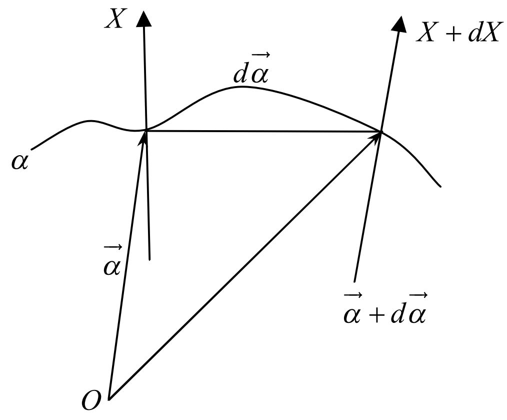
Teorem 2.3. Bir regle yüzeyin, bir doğrultmanı boyunca teğet düzlemleri aynıdır $\Leftrightarrow c = 0$ [3].

Tanım 2.2. Regle yüzeyin komşu iki anadoğrusu arasındaki en kısa uzaklığın bu iki komşu anadoğru arasındaki açıya oranına regle yüzeyin dağılma parametresi (drali) denir [3].

Anadoğrularının birim doğrultman vektörü X olan bir regle yüzeyin dralini P_X ile gösterelim. Komşu anadoğruların ortak dikmesi doğrultusundaki birim vektör, vektörel çarpım ile, $X \wedge X'$ olduğundan bu doğrultudaki birim vektör

$$\frac{X \wedge X'}{\|X'\|}$$

dir, burada $X' = D_T X$ dır.



Şekil 2.2. Dayanak eğrisinin komşu iki noktası

Dayanak eğrisinin komşu iki noktası $\vec{\alpha}(s)$ ve $\vec{\alpha}(s+ds)=\vec{\alpha}(s)+d\vec{\alpha}(s)$ olmak üzere bu noktalardaki anadoğrular arasındaki en kısa uzaklık, $d\vec{\alpha}$ vektörünün

$$\frac{X \wedge X'}{\|X'\|}$$

vektörü üzerindeki izdüşümüdür. Böylece en kısa uzaklık k ile gösterilirse

$$\begin{aligned} k &= \left\langle d\vec{\alpha}, \frac{X \wedge X'}{\|X'\|} \right\rangle, \\ k &= \frac{\det\left[d\alpha, X, X'\right]}{\|X'\|} \end{aligned} \tag{2.3}$$

dir. Eğer anadoğruların küresel göstergesini göz önüne alırsak, komşu iki anadoğru arasındaki açıyı yay elementi cinsinden

$$d\psi = \left\| \frac{dX}{ds} \right\| ds = \left\| D_T X \right\| ds = \sqrt{a^2 + c^2}\, ds \tag{2.4}$$

olarak alınabilir. Böylece regle yüzeyin drali

$$P_X = -\frac{k}{d\psi}$$

$$P_X = \frac{\det\left[d\alpha, X, X'\right]}{\left\| X' \right\|} : \left\| X' \right\| ds \tag{2.5}$$

$$P_X = \frac{\det\left[\frac{d\alpha}{ds}, X, X'\right]}{\left\| X' \right\|^2} = \frac{c}{a^2 + c^2} \tag{2.6}$$

şeklinde bulunur. Regle yüzeyler için dral koordinat değişimlerine göre en basit diferensiyel invaryanttır.

Tanım 2.3. Bir regle yüzeyin anadoğruları boyunca teğet düzlemleri aynı ise regle yüzeye açılabilirdir denir [3].

Teorem 2.4. Bir $\vec{\varphi}(s,v)$ regle yüzeyinin açılabilir olması için gerek ve yeter şart dağılma parametresinin sıfır olmasıdır [3].

Tanım 2.4.

$$\begin{aligned} &\varphi : I \times \mathbb{R} \to E^3 \\ &\quad \varphi(t,v) \to \varphi(t,v) = \alpha(t) + vX(t) \end{aligned} \tag{2.7}$$

regle yüzeyi $\forall t \in I$ için

$$\varphi(t+2\pi, v) = \varphi(t, v)$$

olacak şekilde peryodik ise regle yüzeye kapalıdır denir [3].

Kapalı regle yüzeylerin dayanak eğrileri ve anadoğrularının küresel göstergeleri kapalı eğrilerdir. Yani bir peryod sonra her anadoğru kendisi üzerine gelir.

Tanım 2.5. Bir $\varphi(t,v)$ regle yüzeyinin anadoğrularının her birini dik olarak kesen eğriye regle yüzeyin ortogonal yörüngesi denir [3].

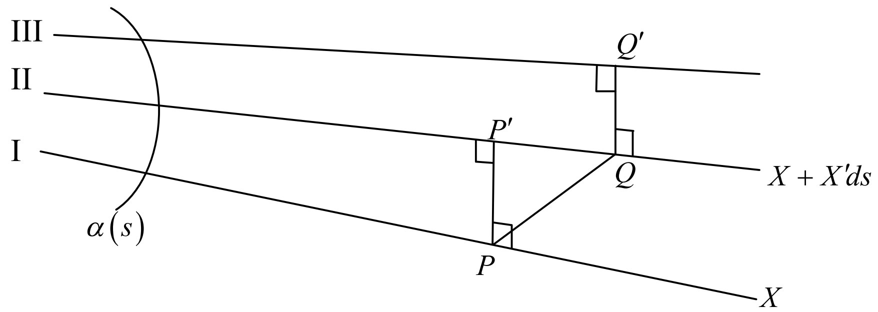
Tanım 2.6. Bir $\varphi(t,v)$ regle yüzeyinde komşu iki doğrultmanın ortak dikmesinin esas doğrultman üzerindeki ayağına boğaz (merkez veya striksiyon) noktası adı verilir [3].

Tanım 2.7. Bir $\varphi(t,v)$ regle yüzeyinin anadoğrusu dayanak eğrisi boyunca yüzeyi oluştururken boğaz noktalarının geometrik yerine regle yüzeyin boğaz (striksiyon) çizgisi (eğrisi) adı verilir [3].

Tanım 2.8. Bir $\varphi(s,v)$ regle yüzeyinin merkez noktasının $\vec{\alpha}$ yer vektörü dayanak eğrisinin $\vec{\alpha}(s)$ yer vektörü, $X(s)$ doğrultman vektörü ve dayanak eğrisine olan $\bar{u}$ uzaklığı cinsinden

$$\bar{\alpha}(s,\bar{u}) = \alpha(s) + \bar{u}\ X(s) \tag{2.8}$$

şeklinde ifade edilebilir. $\bar{u}$ parametresi regle yüzeyin dayanak eğrisinin yer vektörü ve doğrultman cinsinden bulunabilir. Regle yüzeyin ilk ikisi $\vec{X}(s)$ ve $\vec{X}(s)+d\vec{X}(s)$ olan komşu üç ana doğrusu verilsin (Şekil 2.3.).



Şekil 2.3. Regle yüzeyin komşu üç anadoğrusu

P, P' ve Q, Q' komşu anadoğruların ortak dikmelerinin anadoğrular üzerindeki ayakları olsunlar. İlk iki komşu anadoğrunun ortak dikmesi

$$X(s) \wedge \left(X(s) + D_T X(s)\,ds\right) = X(s) \wedge D_T X(s)\,ds \tag{2.9}$$

bağıntısından dolayı $X \wedge D_T X$ vektörüne paraleldir. Limit halinde $\overrightarrow{PQ}$ vektörü $\overrightarrow{PP'}$ ile çakışır ve boğaz çizgisinin teğeti olur. Böylece

$$\left\langle X, \overrightarrow{PQ} \right\rangle = 0,\ \left\langle X + D_T X ds, \overrightarrow{PQ} \right\rangle = 0 \tag{2.10}$$

olacağından

$$\left\langle D_T X, \overrightarrow{PQ} \right\rangle = 0 \tag{2.11}$$

elde edilir. Ayrıca (2.8) dan dayanak eğrisinin s yay-parametresine göre türevi alınırsa ve (2.11) denkleminden

$$\left\langle D_T X, \frac{d\overline{\alpha}}{ds} \right\rangle = 0 \tag{2.12}$$

$$\left\langle D_T X, T + \frac{d\overline{u}}{ds} X + \overline{u} D_T X \right\rangle = 0,$$

$$\left\langle D_T X, T \right\rangle + \overline{u} \left\| D_T X \right\|^2 = 0$$

$$\overline{u} = -\frac{\left\langle D_T X, T \right\rangle}{\left\| D_T X \right\|^2} = \frac{a}{a^2 + c^2} \tag{2.13}$$

bulunur. Böylece striksiyon eğrisinin yer vektörü için (2.8) den

$$\vec{\overline{\alpha}}(s) = \vec{\alpha}(s) - \frac{\left\langle D_T X, T \right\rangle}{\left\| D_T X \right\|^2} X(s) \tag{2.14}$$

elde edilir. Eğer $\left\| D_T X \right\| = 0$ ise regle yüzey striksiyon eğrisine sahip değildir. Bu hal regle yüzeyin silindir olmasını karakterize eder. Regle yüzeyler için striksiyon eğrisi dayanak eğrisi olarak alınırsa (2.13) formülünden

$$\overline{u} = 0 \text{ veya } \left\langle D_T X, T \right\rangle = 0$$

elde edilir [3].

Teorem 2.5. $c \neq 0$ olmak üzere M bir kapalı regle yüzey olsun. M nin

$$\varphi : I \times \mathbb{R} \to E^3$$
$$\varphi(t,v) = \alpha(t) + vX(t)$$

fonksiyonu ile tanımlı $\{(I \times \mathbb{R}, \varphi)\}$ atlası verilsin. M nin doğrultmanları arasında, ortogonal yörüngeler boyunca en kısa uzaklık

$$v = \frac{a}{a^2 + c^2}$$

değerine karşılık gelen

$$\varphi_v : I \to M$$

eğrisi boyunca ölçülen uzaklıktır [3].

Şimdi, $c \neq 0$ olmak üzere bir kapalı regle yüzey için merkez noktası ve striksiyon çizgisinin tanımını değişik bir şekilde olmak üzere aşağıdaki gibi verebiliriz.

Tanım 2.9. $c \neq 0$ olmak üzere kapalı M regle yüzeyi

$$\varphi(t,v) = \alpha(t) + vX(t)$$

için atlas

$$\{(I \times \mathbb{R}, \varphi)\}$$

olarak verilsin. M nin her bir doğrultmanı üzerinde

$$v = \frac{a}{a^2 + c^2}$$

değerine karşılık gelen noktaya o doğrultman üzerindeki merkez nokta (boğaz noktası) ve M nin merkez noktalarının geometrik yerine de M nin striksiyon çizgisi denir [3].

Merkez noktasını karakterize eden bir teorem aşağıda verilmiştir.

Teorem 2.6. M regle yüzeyi $\{(I \times \mathbb{R}, \varphi)\}$ atlası ile verilsin. O zaman, $\alpha(t)$ noktasından geçen anadoğrultman üzerinde $\varphi(t, v_0)$ noktası merkez noktasıdır $\Leftrightarrow \alpha$ nın teğet vektör alanı T ve doğrultmanın teğet vektör alanı da X olmak üzere, $\varphi(t, v_0)$ noktasındaki teğet düzlemin bir normali $D_T X$ dir [3].

Teorem 2.7. Bir regle yüzeyinin Gauss eğriliğinin mutlak değeri, bir doğrultman boyunca, bu doğrultman üzerindeki merkez noktada maksimum değerini alır [3].

Sonuç 2.1. Bir regle yüzeyin dağılma parametresi yalnızca doğrultmanlara bağlıdır [3].

Teorem 2.8.(Chasles Teoremi) M bir regle yüzey, M nin bir doğrultmanı boyunca normali N_v, bu doğrutman üzerindeki merkez noktada M nin normali N ise N ile N_v arasındaki açının tanjantı, merkezden N_v nin başlangıç noktasına olan uzaklık ile doğru orantılıdır [3].

BÖLÜM 3. BİR REGLE YÜZEYE ADJOİNT BİR EĞRİNİN YENİ BİR YAKLAŞIMI

E^3, $3-$boyutlu Öklid uzayında bir L doğrusu bir Γ_P uzay eğrisi boyunca hareket ederken bir Σ regle yüzeyini meydana getirir ki bu regle yüzeyin vektörel denklemi

$$\Sigma : \mathbf{R}(\sigma, \mu) = \mathbf{r}_P(\sigma) + \mu \mathbf{L}(\sigma) \tag{3.1}$$

dir. Burada $\mathbf{r}_P(\sigma)$, Γ_P eğrisinin yer vektörüdür ve Σ nın dayanak eğrisi olarak adlandırılır. $\mathbf{L}(\sigma)$, L doğrusunun birim vektörüdür ve Σ nın doğrultmanı olarak isimlendirilir. Ayrıca σ ve μ, Σ nın parametreleridir. Genelde Σ nın striksiyon eğrisi, Σ nın dayanak eğrisidir ve σ parametresi L doğrusunun küresel gösterge eğrisinin yay uzunluğudur. Bir regle yüzeyin vektörel denklemi bir standart form olarak adlandırılır. Bu çalışma boyunca aksi belirtilmedikçe vektörler kalın harfle gösterilmiştir.

Σ regle yüzeyinin Frenet çatısı (doğal üçyüzlüsü) $\{\mathbf{r}_P, E_1, E_2, E_3\}$ olmak üzere

$$E_1 = \mathbf{L}(\sigma), \quad E_2 = \frac{\mathrm{d}\mathbf{L}}{\mathrm{d}\sigma}, \quad E_3 = E_1 \times E_2, \tag{3.2}$$

şeklinde tanımlanır. Frenet çatısının orijini Σ nın merkezinde ya da striksiyon noktasındadır ve bu $\mathbf{r}_P$ vektörü ile gösterilir. Şimdi $\{\mathbf{r}_P, E_1, E_2, E_3\}$ Frenet çatısının diferensiyel formüllerini hesaplayalım [7].

$$E_1' = \frac{\mathrm{d}E_1}{\mathrm{d}\sigma} = \frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}\sigma} = E_2 \Rightarrow E_1' = E_2$$

dir.

$$E_2' = aE_1 + bE_2 + cE_3$$

şeklinde yazılabileceğinden

$$\langle E_2, E_1 \rangle = 0 \Rightarrow \left\langle E_2', E_1 \right\rangle + \left\langle E_2, E_1' \right\rangle = 0$$

$$\left\langle E_2', E_1 \right\rangle = -\left\langle E_2, E_1' \right\rangle = -\langle E_2, E_2 \rangle = a = -1$$

$$\langle E_2, E_2 \rangle = 1 \Rightarrow \left\langle E_2', E_2 \right\rangle + \left\langle E_2, E_2' \right\rangle = 0$$

$$2\left\langle E_2', E_2 \right\rangle = 0 \Rightarrow \left\langle E_2', E_2 \right\rangle = b = 0$$

$$\langle E_2, E_3 \rangle = 0 \Rightarrow \left\langle E_2', E_3 \right\rangle + \left\langle E_2, E_3' \right\rangle = 0$$

$$\left\langle E_2', E_3 \right\rangle = -\left\langle E_2, E_3' \right\rangle = c = -\beta$$

dır. Buna göre

$$E_2' = -E_1 + \beta E_3$$

olarak bulunur.

$$E_3' = dE_1 + eE_2 + fE_3$$

olsun. Bu takdirde

$$\left\langle E_3, E_1 \right\rangle = 0 \Rightarrow \left\langle E_3', E_1 \right\rangle + \left\langle E_3, E_1' \right\rangle = 0$$
$$\left\langle E_3', E_1 \right\rangle = -\left\langle E_3, E_1' \right\rangle = 0$$

$$\left\langle E_3, E_2 \right\rangle = 0 \Rightarrow \left\langle E_3', E_2 \right\rangle + \left\langle E_3, E_2' \right\rangle = 0$$
$$\begin{aligned} \left\langle E_3', E_2 \right\rangle &= -\left\langle E_3, E_2' \right\rangle \\ e &= -\left\langle E_3, -E_1 + \beta E_3 \right\rangle \\ e &= \left\langle E_3, E_1 \right\rangle - \beta \left\langle E_3, E_3 \right\rangle \\ e &= -\beta \end{aligned}$$

$$\left\langle E_3, E_3 \right\rangle = 1 \Rightarrow \left\langle E_3', E_3 \right\rangle + \left\langle E_3, E_3' \right\rangle = 0$$
$$2\left\langle E_3', E_3 \right\rangle = 0 \Rightarrow \left\langle E_3', E_3 \right\rangle = f = 0$$

dır. Böylece

$$E_3' = -\beta E_2$$

dır. Böylece Frenet çatısının diferensiyel formülleri

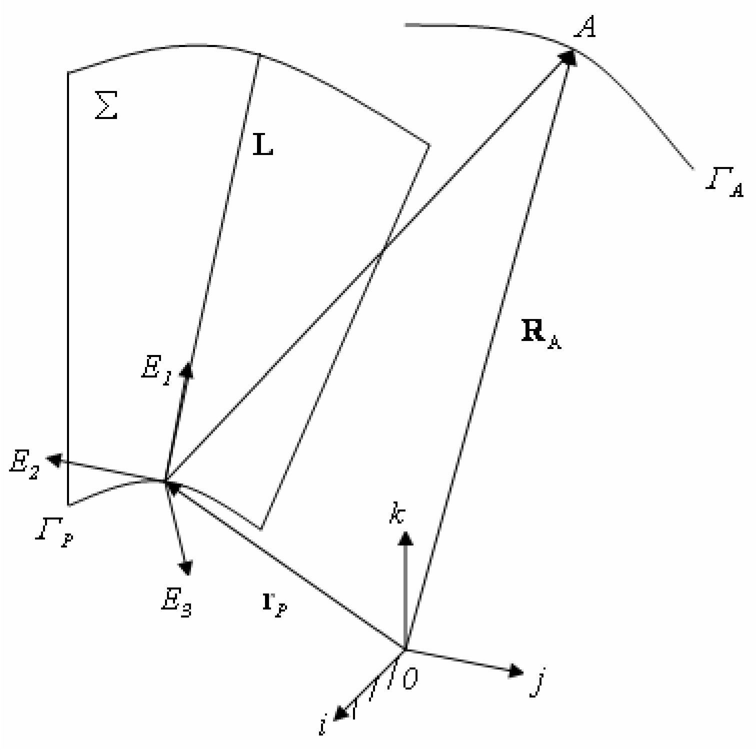
$$\left.\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}_P}{\mathrm{d}\sigma} &= \alpha E_1 + \gamma E_3 \\ \frac{\mathrm{d}E_1}{\mathrm{d}\sigma} &= E_2 \\ \frac{\mathrm{d}E_2}{\mathrm{d}\sigma} &= -E_1 + \beta E_3 \\ \frac{\mathrm{d}E_3}{\mathrm{d}\sigma} &= -\beta E_2 \end{aligned}\right\} \tag{3.3}$$

dir. Buradaki α, β, γ katsayıları Σ ın yapı parametreleri [9] ya da Σ ın eğrilik fonksiyonları [5] olarak adlandırılır.

Bu arada L doğrusuna ait olmayan bir A noktası, sabit çatı $o-ijk$ da bir Γ_{A} eğrisini çizer. Fakat A noktasının Γ_{A} daki her bir konumu daima Σ üzerindeki L nin bir konumuna karşılık gelir ya da A noktası L doğrusuna adjointtir. Bundan dolayı Γ_{A} eğrisi Σ regle yüzeyine adjointtir. Σ , orijinal bir regle yüzey olarak, Γ_A ise Σ nın adjoint eğrisi olarak tanımlanır. Böylece Γ_{A} nın vektörel denklemi

$$\Gamma_{\mathrm{A}}: \ \mathbf{R}_{\mathrm{A}} = \mathbf{r}_P + x_1 E_1 + x_2 E_2 + x_3 E_3, \tag{3.4}$$

şeklinde yazılır. Burada (x_1, x_2, x_3), $\{\mathbf{r}_P, E_1, E_2, E_3\}$ Frenet çatısındaki A noktasının koordinatlarıdır (Şekil 3.1).



Şekil 3.1. Hareketli cisimdeki bir A noktasının sabit çatı $o-ijk$ daki Γ_{A} yörüngesi

(3.3) denklemine gözönüne alınırsa $\mathbf{R}_{\mathrm{A}}$ nın σ ya göre 1. türevi :

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{R}_{\mathrm{A}}}{\mathrm{d}\sigma}=\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}_p}{\mathrm{d}\sigma}+\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}\sigma}E_1+x_1\frac{\mathrm{d}E_1}{\mathrm{d}\sigma}+\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}\sigma}E_2+x_2\frac{\mathrm{d}E_1}{\mathrm{d}\sigma}+\frac{\mathrm{d}x_3}{\mathrm{d}\sigma}E_3+x_3\frac{\mathrm{d}E_3}{\mathrm{d}\sigma}$$

$$=\left(\alpha E_1+\gamma E_3\right)+\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}\sigma}E_1+x_1E_2+\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}\sigma}E_2+x_2\left(-E_1+\beta E_3\right)+\frac{\mathrm{d}x_3}{\mathrm{d}\sigma}E_3+x_3\left(-\beta E_2\right)$$

$$=\left(\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}\sigma}+\alpha-x_2\right)E_1+\left(\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}\sigma}+x_1-\beta x_3\right)E_2+\left(\frac{\mathrm{d}x_3}{\mathrm{d}\sigma}+\gamma+\beta x_2\right)E_3$$

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{R}_{\mathrm{A}}}{\mathrm{d}\sigma}=A_1E_1+A_2E_2+A_3E_3 \tag{3.5}$$

dir. Burada

$$A_1=\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}\sigma}+\alpha-x_2,\quad A_2=\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}\sigma}+x_1-\beta x_3,\quad A_3=\frac{\mathrm{d}x_3}{\mathrm{d}\sigma}+\gamma+\beta x_2$$

dır. Yukarıdaki eşitliğin σ ya göre türevi alınarak $\mathbf{R}_{\mathrm{A}}$ nın herhangi bir sıradaki türevleri elde edilecek ve daha sonra Γ_{A} eğrisinin invaryantları Σ regle yüzeyinin invaryantları tarafından ileride gösterilecektir.

Eğer A noktası, $o-ijk$ sabit çatısında sabit bir nokta ise $\frac{\mathrm{d}\mathbf{R}_{\mathrm{A}}}{\mathrm{d}\sigma}=0$ olur. Böylece (3.5) denkleminden

$$\left.\begin{aligned} A_1&=\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}\sigma}+-x_2+\alpha=0\\ A_2&=x_1+\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}\sigma}-\beta x_3=0\\ A_3&=\beta x_2+\frac{\mathrm{d}x_3}{\mathrm{d}\sigma}+\gamma=0\end{aligned}\right\} \tag{3.6}$$

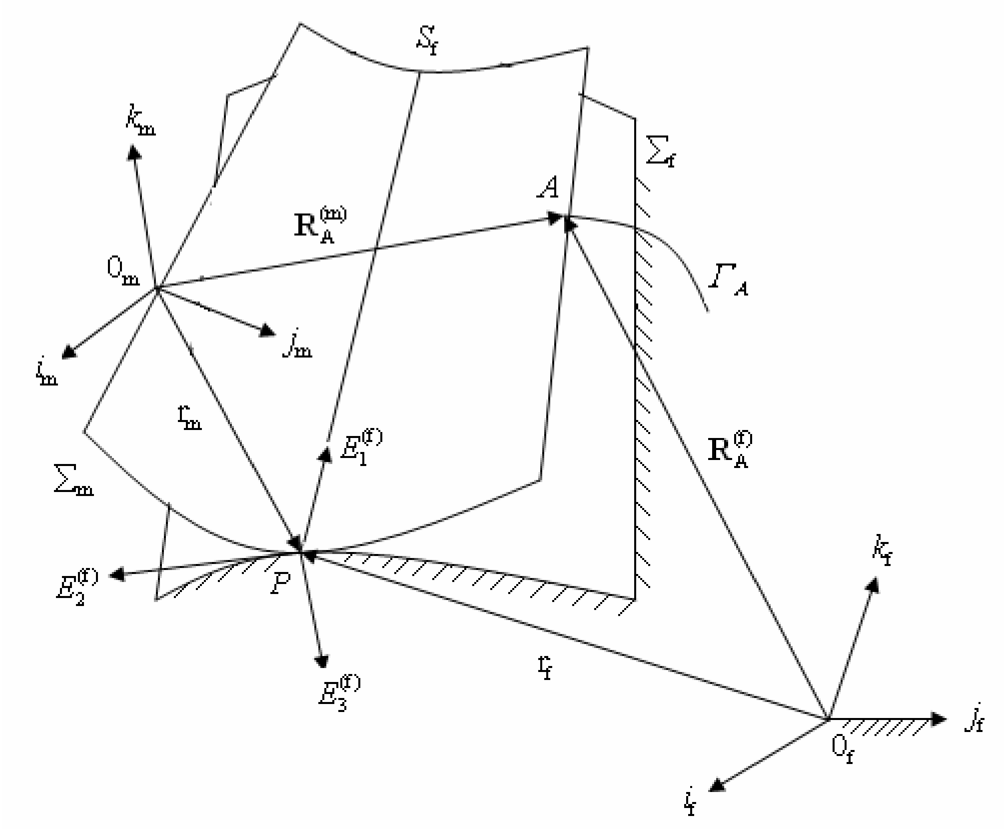
eşitlikleri bulunur. Bu eşitliklerin sağlanması durumunda A noktası sabit bir nokta olarak adlandırılır. Ayrıca (3.6) denklemi de bir regle yüzeye adjoint bir eğrinin sabit nokta koşulu olarak tanımlanır.

BÖLÜM 4. UZAYSAL HAREKETTE BİR NOKTA YÖRÜNGESİNİN TEMEL DENKLEMLERİ

İki katı cisim arasındaki izafi uzaysal hareket, bir aksoidin diğeri üzerinde ortak doğrultmanları boyunca kayması ve birinin diğeri etrafında dönmesi olarak düşünülebilir. İki aksoidden sabit aksoid Σ_{f}, hareketli aksoid Σ_{m} ile gösterilir. Σ_{m} ve Σ_{f} aksoidlerinin, sırasıyla, $o_{\mathrm{m}}-i_{\mathrm{m}}j_{\mathrm{m}}k_{\mathrm{m}}$ hareketli ve $o_{\mathrm{f}}-i_{\mathrm{f}}j_{\mathrm{f}}k_{\mathrm{f}}$ sabit referans çatısındaki standart vektörel denklemleri aşağıdaki gibidir.

$$\left.\begin{aligned} \Sigma_{\mathrm{m}} &: \mathbf{R}_{\mathrm{m}}\left(\sigma_{\mathrm{m}},\mu_{\mathrm{m}}\right)= \mathbf{r}_{\mathrm{m}}+\mu_{\mathrm{m}}\mathbf{S}_{\mathrm{m}} \\ \Sigma_{\mathrm{f}} &: \mathbf{R}_{\mathrm{f}}\left(\sigma_{\mathrm{f}},\mu_{\mathrm{f}}\right)=\mathbf{r}_{\mathrm{f}}+\mu_{\mathrm{f}}\mathbf{S}_{\mathrm{f}} \end{aligned}\right\} \tag{4.1}$$

Burada $\mathbf{r}_{\mathrm{m}}$ ve $\mathbf{r}_{\mathrm{f}}$, sırasıyla, Σ_{m} ve Σ_{f} nin striksiyon eğrilerinin vektörleridir. $\mathbf{S}_{\mathrm{m}}$ ve $\mathbf{S}_{\mathrm{f}}$, ani dönme ekseni (ISA) nin birim vektörleri ya da Σ_{m} ve Σ_{f} nin doğrultmanlarıdır. Ayrıca σ_{m} ve σ_{f}, sırasıyla, $\mathbf{S}_{\mathrm{m}}$ ve $\mathbf{S}_{\mathrm{f}}$ in küresel gösterge eğrisinin yay uzunluğudur. Σ_{m} ve Σ_{f} aksoidlerinin, sırasıyla, $\left\{\mathbf{r}_{\mathrm{m}},E_1^{(\mathrm{m})},E_2^{(\mathrm{m})},E_3^{(\mathrm{m})}\right\}$ ve $\left\{\mathbf{r}_{\mathrm{f}},E_1^{(\mathrm{f})},E_2^{(\mathrm{f})},E_3^{(\mathrm{f})}\right\}$ Frenet çatıları (3.2) denklemindeki koşulları sağlar ve Σ_{m} ve Σ_{f} in sırasıyla, $\alpha_{\mathrm{f}},\beta_{\mathrm{f}},\gamma_{\mathrm{f}}$ ve $\alpha_{\mathrm{m}},\beta_{\mathrm{m}},\gamma_{\mathrm{m}}$ yapı parametreleri (3.3) denklemi ile elde edilir.



Şekil 4. 1. A noktasının hareketli ve sabit cisme göre yörüngesi

Şimdi sabit aksoid Σ_{f} i orijinal bir regle yüzey olarak alalım ve sabit referans çatısı $o_{\mathrm{f}} - i_{\mathrm{f}} j_{\mathrm{f}} k_{\mathrm{f}}$ deki hareketli cisim Σ_{m} nin sabit bir A noktasının yörüngesi olarak inceleyelim. Herhangi bir anda A noktası, Σ_{f} nin $\mathbf{S}_{\mathrm{f}}\left(E_{\mathrm{f}}^{(\mathrm{f})}\right)$ doğrultmanına adjointtir. Böylece A noktasının yörüngesi, sabit aksoid Σ_{f} nin bir adjoint eğrisidir (Şekil 4.1). Γ_{A} nın vektörel denklemi:

$$\Gamma_{\mathrm{A}}: \ \mathbf{R}_{\mathrm{A}} = \mathbf{r}_{\mathrm{f}} + x_1 E_1^{(\mathrm{f})} + x_2 E_2^{(\mathrm{f})} + x_3 E_3^{(\mathrm{f})} \tag{4.2}$$

şeklindedir. Buradaki (x_1, x_2, x_3), $\left\{\mathbf{r}_{\mathrm{f}}, E_1^{(\mathrm{f})}, E_2^{(\mathrm{f})}, E_3^{(\mathrm{f})}\right\}$ Frenet çatısındaki A noktasının koordinatlarıdır. Eğer (3.3) denklemi gözönünde bulundurulursa $\mathbf{R}_{\mathrm{A}}$ nın Σ_{f} e göre birinci türevi

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\mathbf{R}_{\mathrm{A}}}{\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{f}}} &= \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}_{\mathrm{f}}}{\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{f}}} + \frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{f}}} E_1^{(\mathrm{f})} + x_1 \frac{\mathrm{d}E_1^{(\mathrm{f})}}{\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{f}}} + \frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{f}}} E_2^{(\mathrm{f})} + x_2 \frac{\mathrm{d}E_2^{(\mathrm{f})}}{\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{f}}} + \frac{\mathrm{d}x_3}{\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{f}}} E_3^{(\mathrm{f})} + x_3 \frac{\mathrm{d}E_3^{(\mathrm{f})}}{\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{f}}} \\
&= \left(\alpha_{\mathrm{f}} E_1^{(\mathrm{f})} + \gamma_{\mathrm{f}} E_3^{(\mathrm{f})}\right) + \frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{f}}} E_1^{(\mathrm{f})} + x_1 E_2^{(\mathrm{f})} + \frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{f}}} E_2^{(\mathrm{f})} + x_2\left(-E_1^{(\mathrm{f})} + \beta_{\mathrm{f}} E_3^{(\mathrm{f})}\right) \\
&\quad + \frac{\mathrm{d}x_3}{\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{f}}} E_3^{(\mathrm{f})} + x_3\left(-\beta_{\mathrm{f}} E_2^{(\mathrm{f})}\right) \\
&= \left(\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{f}}} + \alpha_{\mathrm{f}} - x_2\right) E_1^{(\mathrm{f})} + \left(\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{f}}} + x_1 - \beta_{\mathrm{f}} x_3\right) E_2^{(\mathrm{f})} + \left(\frac{\mathrm{d}x_3}{\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{f}}} + \gamma_{\mathrm{f}} + \beta_{\mathrm{f}} x_2\right) E_3^{(\mathrm{f})}
\end{aligned}
$$

$$
\frac{\mathrm{d}\mathbf{R}_{\mathrm{A}}}{\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{f}}} = \left(\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{f}}} - x_2 + \alpha_{\mathrm{f}}\right) E_1^{(\mathrm{f})} + \left(x_1 + \frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{f}}} - \beta_{\mathrm{f}} x_3\right) E_2^{(\mathrm{f})} + \left(\beta_{\mathrm{f}} x_2 + \frac{\mathrm{d}x_3}{\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{f}}} + \gamma_{\mathrm{f}}\right) E_3^{(\mathrm{f})} \tag{4.3}
$$

şeklinde elde edilir. Diğer yandan hareketli aksoid Σ_{m}, orijinal bir regle yüzey olarak alınır ve hareketli cismin sabit bir A noktasının $\Gamma_{\mathrm{A}}^{(\mathrm{m})}$ yörüngesi, $0_{\mathrm{m}} - i_{\mathrm{m}}\, j_{\mathrm{m}}\, k_{\mathrm{m}}$ hareketli referans çatısında incelenebilir. A noktası herhangi bir anda Σ_{m} nin doğrultmanına adjointtir. Bu yüzden $\Gamma_{\mathrm{A}}^{(\mathrm{m})}$ yolu Σ_{m} nin bir adjoint eğrisidir. $0_{\mathrm{m}} - i_{\mathrm{m}}\, j_{\mathrm{m}}\, k_{\mathrm{m}}$ de Γ_{A} nın vektörel denklemi

$$
\Gamma_{\mathrm{A}}^{(\mathrm{m})}: \ \mathbf{R}_{\mathrm{A}}^{(\mathrm{m})} = \mathbf{r}_{\mathrm{m}} + x_1 E_1^{(\mathrm{m})} + x_2 E_2^{(\mathrm{m})} + x_3 E_3^{(\mathrm{m})} \tag{4.4}
$$

dir. Burada (x_1, x_2, x_3), $\left\{\mathbf{r}_{\mathrm{m}}, E_1^{(\mathrm{m})}, E_2^{(\mathrm{m})}, E_3^{(\mathrm{m})}\right\}$ Frenet çatısındaki A noktasının koordinatlarıdır. Herhangi bir anda hareketli aksoid Σ_{m} ile sabit aksoid Σ_{f} temas eder ki $\gamma_{\mathrm{m}} = \gamma_{\mathrm{f}}$ ve $\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{m}} = \mathrm{d}\sigma_{\mathrm{f}}$ dir. Bu ifade eder ki iki Frenet çatısı çakışıktır. Buradan (4.2) ve (4.4) denklemlerindeki (x_1, x_2, x_3) ün aynı olduğu anlaşılır. Bu arada A noktası $0_{\mathrm{m}} - i_{\mathrm{m}}\, j_{\mathrm{m}}\, k_{\mathrm{m}}$ de sabit bir nokta olduğundan (3.6) denklemindeki sabit nokta koşuluna göre

$$
\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{m}}} = x_2 - \alpha_{\mathrm{m}}, \quad \frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{m}}} = -x_1 + \beta_{\mathrm{m}} x_3, \quad \frac{\mathrm{d}x_3}{\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{m}}} = -\beta_{\mathrm{m}} x_2 - \gamma_{\mathrm{m}} \tag{4.5}
$$

elde edilir. Bu ifade (4.3) denkleminde yerine konulursa

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\mathbf{R}_\mathrm{A}}{\mathrm{d}\sigma_\mathrm{f}} &= \left(x_2-\alpha_\mathrm{m}-x_2+\alpha_\mathrm{f}\right)E_1^{(\mathrm{f})}+\left(x_1+\beta_\mathrm{m}x_3-x_1-\beta_\mathrm{f}x_3\right)E_2^{(\mathrm{f})} \\ &\quad +\left(\beta_\mathrm{f}x_2-\gamma_\mathrm{m}-\beta_\mathrm{m}x_2+\gamma_\mathrm{f}E_3^{(\mathrm{f})}\right) \\ &= \left(\alpha_\mathrm{f}-\alpha_\mathrm{m}\right)E_1^{(\mathrm{f})}-\left(\beta_\mathrm{f}-\beta_\mathrm{m}\right)x_3E_2^{(\mathrm{f})} \\ &\quad +\left[\left(\beta_\mathrm{f}-\beta_\mathrm{m}\right)x_2+\left(\gamma_\mathrm{f}-\gamma_\mathrm{m}\right)\right]E_3^{(\mathrm{f})} \\ &= \alpha^*E_1^{(\mathrm{f})}-\beta^*x_3E_2^{(\mathrm{f})}+\left(\beta^*x_2+\gamma^*\right)E_3^{(\mathrm{f})}\end{aligned}$$

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{R}_\mathrm{A}}{\mathrm{d}\sigma_\mathrm{f}}=\alpha^*E_1^{(\mathrm{f})}+\beta^*\left(x_2E_3^{(\mathrm{f})}-x_3E_2^{(\mathrm{f})}\right) \tag{4.6}$$

elde edilir. Burada

$$\alpha^*=\alpha_\mathrm{f}-\alpha_\mathrm{m},\quad \beta^*=\beta_\mathrm{f}-\beta_\mathrm{m},\quad \gamma^*=\gamma_\mathrm{f}-\gamma_\mathrm{m}=0 \tag{4.7}$$

dir. $\alpha^*,\beta^*,\gamma^*$ parametreleri Σ_f ve Σ_m nin indirgenmiş yapı parametreleri olarak adlandırılır. Bunlar uzaysal hareketin ani invaryantlarıdır. $\mathrm{d}\sigma_\mathrm{m}=\mathrm{d}\sigma_\mathrm{f}=\mathrm{d}\sigma$ olduğundan $\mathrm{d}\sigma$ tarafından değiştirilebilir. Benzer şekilde

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\mathbf{R}_\mathrm{A}}{\mathrm{d}\sigma} &= \frac{\mathrm{d}\alpha^*}{\mathrm{d}\sigma}E_1^{(\mathrm{f})}+\alpha^*\frac{\mathrm{d}E_1^{(\mathrm{f})}}{\mathrm{d}\sigma_\mathrm{f}}+\frac{\mathrm{d}\beta^*}{\mathrm{d}\sigma}\left(x_2E_3^{(\mathrm{f})}-x_3E_2^{(\mathrm{f})}\right) \\ &\quad +\left(\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}\sigma_\mathrm{m}}E_3^{(\mathrm{f})}+x_2\frac{\mathrm{d}E_3^{(\mathrm{f})}}{\mathrm{d}\sigma_\mathrm{f}}-\frac{\mathrm{d}x_3}{\mathrm{d}\sigma_\mathrm{m}}E_2^{(\mathrm{f})}-\frac{\mathrm{d}E_2^{(\mathrm{f})}}{\mathrm{d}\sigma_\mathrm{f}}x_3\right)\beta^*\end{aligned}$$

eşitliğinde (3.3), (4.5) ve (4.7) denklemleri yerine konulursa $\mathbf{R}_\mathrm{A}$ nın σ ya göre ikinci türevi

$$\mathbf{R}_\mathrm{A}''=\left(\alpha^{*\prime}+\beta^*x_3\right)E_1^{(\mathrm{f})}+\left(\alpha^*-\beta^{*\prime}x_3-\beta^{*^2}x_2+\beta^*\gamma_\mathrm{m}\right)E_2^{(\mathrm{f})}+\left(\beta^{*\prime}x_2-\beta^*x_1-\beta^{*^2}x_3\right)E_3^{(\mathrm{f})} \tag{4.8}$$

olarak bulunur.

BÖLÜM 5. AKSOİDLERİN İNDİRGENMİŞ YAPI PARAMETRELERİNİN KİNEMATİK ANLAMLARI

Bölüm 4 de verilen α^*, β^*, γ^* yapı parametrelerinin kinematik anlamları, hız ve ivme yardımıyla incelenebilir. Ani dönme ekseninin tanımıyla hareketli cismin A noktasının hızı

$$\begin{aligned}
\omega E_1^{(f)} \times \mathbf{r} &= \begin{vmatrix} E_1^{(f)} & E_2^{(f)} & E_3^{(f)} \\ \omega & 0 & 0 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix} \\
&= -\omega x_3 E_2^{(f)} + \omega x_2 E_3^{(f)} \\
&= \omega\left(x_2 E_3^{(f)} - x_3 E_2^{(f)}\right)
\end{aligned}$$

ifadesinden

$$\mathbf{V}_{\mathrm{A}} = v\, E_1^{(f)} + \omega\, E_1^{(f)} \times \mathbf{r} = v\, E_1^{(f)} + \omega\left(x_2\, E_3^{(f)} - x_3\, E_2^{(f)}\right) \tag{5.1}$$

şeklinde bulunur. Burada v; Σ_{m}, Σ_{f} ve Σ_{m} nin ortak doğrultmanları boyunca kaydırıldığında açısal hız, ω ise Σ_{m}, Σ_{f} ve Σ_{m} nin ortak doğrultmanı etrafında döndürüldüğünde hareketli cismin dönme hızıdır. Burada, $\mathbf{r}$, Σ_{f} nin striksiyon noktasından A noktasına olan uzaklığın vektörüdür ve $\mathbf{r} = x_1\, E_1^{(f)} + x_2 E_2^{(f)} + x_3 E_3^{(f)}$ dir. Eğer (5.1) denkleminin t parametresine göre türevi alınırsa

$$\mathbf{a}_{\mathrm{A}}=\frac{\mathrm{d}\,\mathbf{V}_{\mathrm{A}}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}E_1^{(\mathrm{f})}+v\frac{\mathrm{d}E_1^{(\mathrm{f})}}{\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{f}}}\frac{\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{f}}}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}\left(x_2E_3^{(\mathrm{f})}-x_3E_2^{(\mathrm{f})}\right)+\omega\left(\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{m}}}\frac{\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{m}}}{\mathrm{d}t}E_3^{(\mathrm{f})}\right.$$
$$\left.+x_2\frac{\mathrm{d}E_3^{(\mathrm{f})}}{\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{f}}}\frac{\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{f}}}{\mathrm{d}t}-\frac{\mathrm{d}x_3}{\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{m}}}\frac{\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{m}}}{\mathrm{d}t}E_2^{(\mathrm{f})}-x_3\frac{\mathrm{d}E_2^{(\mathrm{f})}}{\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{f}}}\frac{\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{f}}}{\mathrm{d}t}\right)$$

elde edilir. Yukarıdaki denklemde (3.3) ve (4.5) denklemleri yerine yazılırsa, A noktasının ivme vektörel denklemi

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{a}_{\mathrm{A}}=\frac{\mathrm{d}\,\mathbf{V}_{\mathrm{A}}}{\mathrm{d}t}=\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}+\omega x_3\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t}\right)E_1^{(\mathrm{f})}+\left(v\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t}-x_3\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}+\omega\gamma_m\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t}-\omega\beta^*x_2\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t}\right)E_2^{(\mathrm{f})}\\+\left(x_2\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}-\omega x_1\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t}-\omega\beta^*x_3\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t}\right)E_3^{(\mathrm{f})}\end{aligned}\right\}\quad(5.2)$$

biçiminde elde edilir. Burada $\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$, $E_1^{(\mathrm{f})}$ (ISA) boyunca Σ_{m} ye bağlı Σ_{m} nin dönme ivmesi ve $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$, açısal ivmedir. Diğer yandan (4.2) denklemindeki $\mathbf{R}_{\mathrm{A}}$ nın t ye göre 1. ve 2. türevleri alınarak $\mathbf{V}_{\mathrm{A}}$ ve $\mathbf{a}_{\mathrm{A}}$ aşağıdaki gibi elde edilebilir.

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{V}_{\mathrm{A}}&=\frac{\mathrm{d}\,\mathbf{R}_{\mathrm{A}}}{\mathrm{d}t}=\mathbf{R}'_{\mathrm{A}}\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t}\\\mathbf{a}_{\mathrm{A}}&=\frac{\mathrm{d}\,\mathbf{V}_{\mathrm{A}}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2\,\mathbf{R}_{\mathrm{A}}}{\mathrm{d}t^2}=\mathbf{R}''_{\mathrm{A}}\left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t}\right)^2+\mathbf{R}'_{\mathrm{A}}\frac{\mathrm{d}^2\sigma}{\mathrm{d}t^2}\end{aligned}\right\}\quad(5.3)$$

Eğer (4.6) denklemi (5.3) denkleminde yerine konulursa ve (5.1) denklemi ile karşılaştırılırsa v, ω ve α^*, β^* arasında aşağıdaki şekilde bağıntı elde edilir.

$$\left.\begin{aligned}&\mathbf{V}=\alpha^*\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t},\quad\omega=\beta^*\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t}\\&\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\alpha^{*\prime}\left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t}\right)^2+\alpha^*\frac{\mathrm{d}^2\sigma}{\mathrm{d}t^2}\\&\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=\beta^{*\prime}\left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t}\right)^2+\beta^*\frac{\mathrm{d}^2\sigma}{\mathrm{d}t^2}\end{aligned}\right\}\quad(5.4)$$

Burada (5.4) denklemi α^* ve β^* ın kinematik anlamlarını ortaya koyar ve onlar uzaysal hareketin invaryantlarıdır [9].

BÖLÜM 6. HAREKETLİ CİSİMDEKİ ÖZEL KİNEMATİK ANLAMLI NOKTALAR

Bu bölümde hız ve ivmeye özel değerler vererek hareketli cisimde bazı karakteristik özelliklere sahip noktaları elde edelim.

6. 1. İvme Merkezi

$\left\{\mathbf{r}_{\mathrm{f}}, E_1^{(\mathrm{f})}, E_2^{(\mathrm{f})}, E_3^{(\mathrm{f})}\right\}$ Frenet çatısındaki ivme merkezinin koordinatları, (5.2) ve (5.3) denklemlerini sıfıra eşitleyerek bulunabilir. Böylece

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_{\mathrm{A}} = &\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \omega x_3 \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t}\right) E_1^{(\mathrm{f})} + \left(v \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t} - x_3 \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} + \omega \gamma_{\mathrm{m}} \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t} - \omega\beta^* x_2 \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t}\right) E_2^{(\mathrm{f})} \\ &+ \left(\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} x_2 - \omega x_1 \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t} - \omega \beta^* x_3 \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t}\right) E_3^{(\mathrm{f})} = 0\end{aligned}$$

denkleminden

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \omega x_3 \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t} = 0 \\ &v \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} - x_3 \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} + \omega\gamma_{\mathrm{m}} \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t} - \omega\beta^* x_2 \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t} = 0 \\ &\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} x_2 - \omega x_1 \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t} - \omega\beta^* x_3 \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t} = 0\end{aligned}$$

ve

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \left\{ \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}\left[v\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t} + \omega\gamma_{\mathrm{m}}\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\left(\omega\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t}\right)^{-1} \right] \Big/ \left(\omega\beta^*\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t}\right) + \beta^*\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \right\} \Big/ \left(\omega\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t}\right) \\ x_2 &= \left[v\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t} + \omega\gamma_{\mathrm{m}}\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}\left(\omega\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t}\right)^{-1} \right] \Big/ \left(\omega\beta^*\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t}\right) \\ x_3 &= -\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\left(\omega\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t}\right)^{-1} \end{aligned}\right\} \tag{6.1}$$

bulunur. Herhangi bir anda Σ_{f} nin Frenet çatısı ile Σ_{m} nin Frenet çatısı çakışıktır. Bundan dolayı bulunan (x_1, x_2, x_3) aynı zamandaki Σ_{m} nin Frenet çatısındaki ivme merkezinin koordinatlarıdır.

6. 2. İnfleksiyon Yüzeyi

İnfleksiyon noktaları $\mathbf{a}_{\mathrm{A}} \times \mathbf{V}_{\mathrm{A}} = 0$ ile belirlenebilir. (4.6) ve (4.8) denklemleri (5.3) denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_A = &\left[\left(\alpha^{*\prime} + \beta^* x_3\right)\left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \alpha^*\frac{\mathrm{d}^2\sigma}{\mathrm{d}t^2} \right] E_1^{(\mathrm{f})} + \left[\left(\alpha^* - x_3\beta^{*\prime} - \beta^{*2}x_2 + \beta^*\gamma_{\mathrm{m}}\right)\left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t}\right)^2 - x_3\beta^*\frac{\mathrm{d}^2\sigma}{\mathrm{d}t^2} \right] E_2^{(\mathrm{f})} \\ &+ \left[\left(x_2\beta^{*\prime} - \beta^* x_1 - \beta^{*2}x_3\right)\left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \beta^* x_2\frac{\mathrm{d}^2\sigma}{\mathrm{d}t^2} \right] E_3^{(\mathrm{f})} \end{aligned}$$

$$\mathbf{V}_A = \mathbf{R}'_A\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t} = \left(\alpha^* E_1^{(\mathrm{f})} - \beta^* x_3 E_2^{(\mathrm{f})} + \beta^* x_2 E_3^{(\mathrm{f})}\right)\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t}$$

elde edilir. Determinant alınırken bir satırın veya sütunun katını almak determinantın değerini değiştirmeyeceğinden $\mathbf{V}_A = \mathbf{R}'_A = \alpha^* E_1^{(\mathrm{f})} - \beta^* x_3 E_2^{(\mathrm{f})} + \beta^* x_2 E_3^{(\mathrm{f})}$ alınabilir.

Böylece

$$\mathbf{a}_A \times \mathbf{V}_A = \begin{vmatrix} E_1^{(\mathrm{f})} & E_2^{(\mathrm{f})} & E_3^{(\mathrm{f})} \\ \alpha^* & -\beta^* x_3 & \beta^* x_2 \\ \left(\alpha^{*\prime} + \beta^* x_3\right)\left(\dfrac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \alpha^* \dfrac{\mathrm{d}^2\sigma}{\mathrm{d}t^2} & \left(\alpha^* - x_3\beta^{*\prime} - \beta^{*2} x_2 + \beta^* \gamma_{\mathrm{m}}\right)\left(\dfrac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t}\right)^2 - x_3\beta^* \dfrac{\mathrm{d}^2\sigma}{\mathrm{d}t^2} & \left(x_2\beta^{*\prime} - \beta^* x_1 - \beta^{*2} x_3\right)\left(\dfrac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t}\right)^2 + x_2\beta^* \dfrac{\mathrm{d}^2\sigma}{\mathrm{d}t^2} \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= \left\{ -\beta^* \left[x_2 x_3 \beta^{*\prime} \left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t}\right)^2 - x_1 x_3 \beta^* \left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t}\right)^2 - x_3^{\,2} \beta^{*2} \left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t}\right)^2 + x_2 x_3 \beta^* \frac{\mathrm{d}^2\sigma}{\mathrm{d}t^2} + x_2 \alpha^* \left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t}\right)^2 - x_2 x_3 \beta^{*\prime} \left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t}\right)^2 - x_2^{\,2} \beta^{*2} \left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t}\right)^2 + x_2 \gamma_m \beta^* \left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t}\right)^2 - x_2 x_3 \beta^* \frac{\mathrm{d}^2\sigma}{\mathrm{d}t^2} \right. \right\} E_1^{(\mathrm{f})} \\ &+ \left\{ x_2 \alpha^* \beta^{*\prime} \left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t}\right)^2 - x_1 \alpha^* \beta^* \left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t}\right)^2 - x_3 \alpha^* \beta^{*2} \left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t}\right)^2 + x_2 \alpha^* \beta^* \frac{\mathrm{d}^2\sigma}{\mathrm{d}t^2} - x_2 \alpha^{*\prime} \beta^* \left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t}\right)^2 - x_2 x_3 \beta^{*2} \left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t}\right)^2 - x_2 \alpha^* \beta^* \frac{\mathrm{d}^2\sigma}{\mathrm{d}t^2} \right\} E_2^{(\mathrm{f})} \\ &+ \left\{ \alpha^{*2} \left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t}\right)^2 - x_3 \alpha^* \beta^{*\prime} \left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t}\right)^2 - x_2 \alpha^* \beta^{*2} \left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \alpha^* \beta^* \gamma_{\mathrm{m}} \left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t}\right)^2 - x_3 \alpha^* \beta^* \frac{\mathrm{d}^2\sigma}{\mathrm{d}t^2} + x_3 \alpha^{*\prime} \beta^* \left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t}\right)^2 + x_3^{\,2} \beta^{*2} \left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t}\right)^2 + x_3 \alpha^* \beta^* \frac{\mathrm{d}^2\sigma}{\mathrm{d}t^2} \right\} E_3^{(\mathrm{f})} = 0 \end{aligned}$$

denkleminde gerekli düzeltmeler yapılırsa

$$\left.\begin{aligned} \alpha^*\left(\alpha^*+\beta^*\gamma_{\mathrm{m}}\right)+\left(\beta^*\alpha^{*\prime}-\alpha^*\beta^{*\prime}\right)x_3+\beta^{*2}\left(x_3^{\,2}-\alpha^*x_2\right)=0 \\ \alpha^*\beta^*x_1+\left(\beta^*\alpha^{*\prime}-\alpha^*\beta^{*\prime}\right)x_2+\alpha^*\beta^{*2}x_3+\beta^{*2}x_2x_3=0 \\ -\left(\alpha^*+\beta^*\gamma_{\mathrm{m}}\right)x_2+\beta^*x_1x_2+\beta^{*2}\left(x_2^{\,2}+x_3^{\,2}\right)=0 \end{aligned}\right\} \tag{6.2}$$

bulunur. Bu üç denklemde sadece bir uzay eğrisinde kesişen üç yüzey ya da iki bağımsız denklem bulunmaktadır.

6. 3. Bresse Hiperbolü

Hareketli cisimdeki bir Bresse Hiperbolü, $\left\langle \mathbf{a}_A, \mathbf{V}_A \right\rangle = 0$ ile belirlenebilir. (5.1) ve (5.2) denklemleri

$$\begin{aligned} \left\langle \mathbf{a}_A, \mathbf{V}_A \right\rangle = {} & v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}+v\omega x_3\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t}-v\omega x_3\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t}+\omega x_3^{\,2}\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}-\omega^2x_3\gamma_{\mathrm{m}}\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t}+\omega^2x_2x_3\beta^*\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t} \\ & +\omega x_2^{\,2}\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}-\omega^2x_1x_2\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t}-\omega^2x_2x_3\beta^*\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t}=0 \end{aligned}$$

denkleminde yerine yazılırsa $\left\{\mathbf{r}_{\mathrm{m}}, E_1^{(\mathrm{m})}, E_2^{(\mathrm{m})}, E_3^{(\mathrm{m})}\right\}$ Frenet çatısındaki Bresse hiperbolü aşağıdaki gibi bulunur.

$$v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}-x_3\omega^2\gamma_{\mathrm{m}}\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t}-x_1x_2\omega^2\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t}+\omega\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}\left(x_2^{\,2}+x_3^{\,2}\right)=0 \tag{6.3}$$

Özellikle Σ_{m} nin α_{m}, γ_{m} ve Σ_{f} nin α_{f}, γ_{f} parametreleri sıfırsa Σ_{m} hareketli cismi küresel harekettedir. Buna göre (6.1) ve (6.3) denklemleri aşağıdaki gibi değişir.

a) $\alpha^* = \alpha_{\mathrm{m}} - \alpha_{\mathrm{f}}$ olduğundan $\alpha^* = 0$ ve $\alpha^{*\prime} = 0$ dır.

b) $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \alpha^{*\prime}\left(\dfrac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \alpha^* \dfrac{\mathrm{d}^2\sigma}{\mathrm{d}t^2}$ olduğundan $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 0$ ve $v = \alpha^* \dfrac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t}$ olduğundan $v = 0$ dır.

Böylece

İvme merkezi: $x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0$

İnfleksiyon noktaları: $x_2 = 0,\ x_3 = 0$

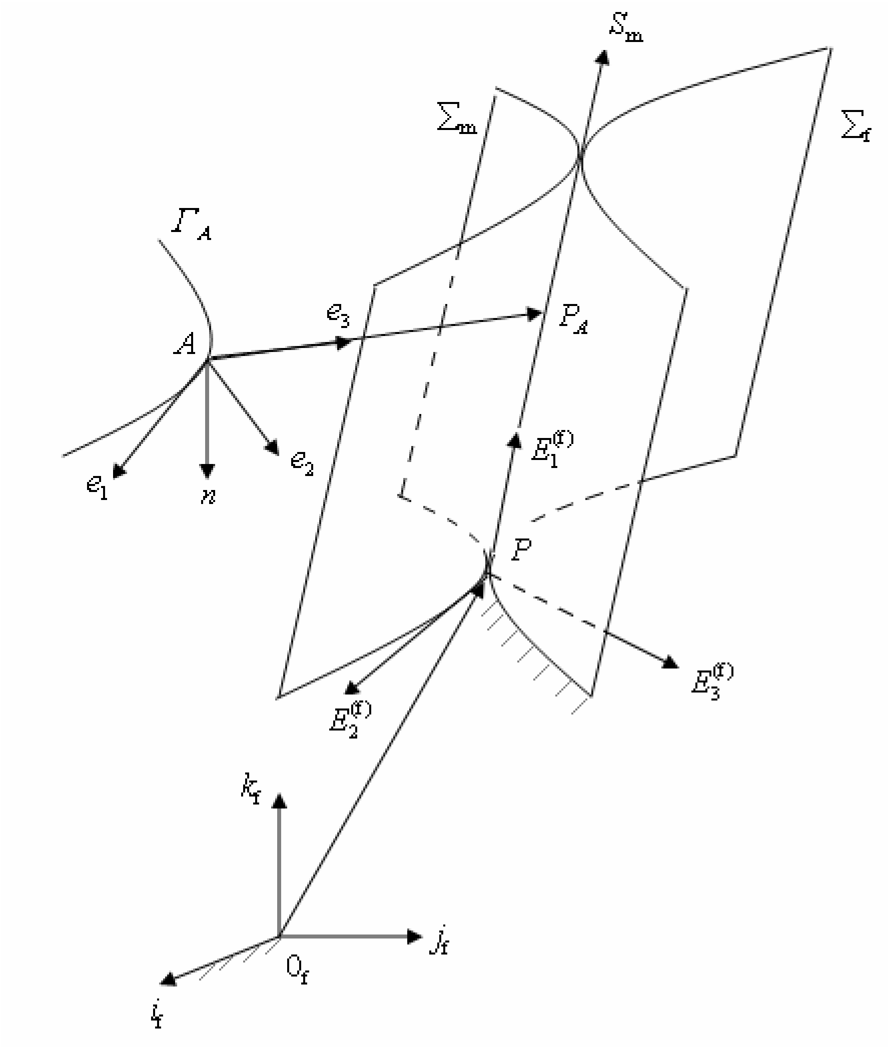
Bresse hiperbolü: $\omega x_1 x_2 \dfrac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t} + \left(x_2{}^2 + x_3{}^2\right)\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = 0$ bulunur.

BÖLÜM 7. UZAYSAL HAREKETTE BİR NOKTA YÖRÜNGESİNİN ANİ ÖZELLİKLERİ

Σ_{m}, Σ_{f} üzerinde kayarken ve *ISA* etrafında yuvarlanırken $0_{\mathrm{f}} - i_{\mathrm{f}}\, j_{\mathrm{f}}\, k_{\mathrm{f}}$ sabit referans çatısındaki yörünge eğrilerinin özellikleri, Σ_{m} nin noktaları tarafından belirlenir. Bir nokta yörüngesinin ani geometrik özellikleri hareketli çatı yoluyla ele alınır [7].

7. 1. Uzaysal Hareketteki Bir Nokta Yörüngesinin Hareketli Çatısı

Bir nokta yörüngesinin geometrik özelliklerini incelemek için A noktasının $0_{\mathrm{f}} - i_{\mathrm{f}}\, j_{\mathrm{f}}\, k_{\mathrm{f}}$ sabit çatısındaki Γ_{A} yörüngesinin bir $\{\mathbf{R}_A,\ e_1,\ e_2,\ e_3\}$ hareketli çatısını kuralım. Hareketli çatının orijini Γ_{A} üzerindeki A noktasındadır. e_1, A noktasında Γ_{A} nın teğetidir. $\dfrac{\mathrm{d}\mathbf{R}_{\mathrm{A}}}{\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{f}}} = \alpha^* E_1^{(\mathrm{f})} + \beta^* \left(x_2 E_3^{(\mathrm{f})} - x_3 E_2^{(\mathrm{f})} \right)$ denklemi ile bir tek $\overline{AP_A}$ normal doğrusu bulunur ki bu doğru ani dönme ekseninden geçer ve $E_1^{(\mathrm{f})}$ e diktir. Bu doğru hareketli çatının e_3 üçüncü ekseni olarak alınır ki $\overline{AP_A}$ doğrusunun birim vektörüdür (Şekil 7.1).



Şekil 7.1. Uzaysal harekette bir nokta yörüngesinin hareketli çatısı

$\{\mathbf{R}_A,\ e_1,\ e_2,\ e_3\}$ hareketli çatısı aşağıdaki şekilde elde edilebilir.

$$e_1 = \frac{\mathbf{R}'_{\mathrm{A}}}{\left\|\mathbf{R}'_{\mathrm{A}}\right\|} = \frac{\alpha^* E_1^{(\mathrm{f})} - \beta^* x_3 E_2^{(\mathrm{f})} + \beta^* x_2 E_3^{(\mathrm{f})}}{\sqrt{\alpha^{*2} + \beta^{*2} x_3^{\,2} + \beta^{*2} x_2^{\,2}}} = \frac{\alpha^* E_1^{(\mathrm{f})} - \beta^* x_3 E_2^{(\mathrm{f})} + \beta^* x_2 E_3^{(\mathrm{f})}}{\sqrt{\alpha^{*2} + \beta^{*2}\left(x_2^{\,2} + x_3^{\,2}\right)}}$$

$$e_1 = \frac{\alpha^* E_1^{(\mathrm{f})} - \beta^* x_3 E_2^{(\mathrm{f})} + \beta^* x_2 E_3^{(\mathrm{f})}}{R}$$

$$e_3 = \frac{\mathbf{R}'_{\mathrm{A}} \times E_1^{(\mathrm{f})}}{\left\| \mathbf{R}'_{\mathrm{A}} \times E_1^{(\mathrm{f})} \right\|} = \frac{\alpha^* \left(E_1^{(\mathrm{f})} \times E_1^{(\mathrm{f})} \right) - x_3 \beta^* \left(E_2^{(\mathrm{f})} \times E_1^{(\mathrm{f})} \right) + x_2 \beta^* \left(E_3^{(\mathrm{f})} \times E_1^{(\mathrm{f})} \right)}{\sqrt{\beta^{*2} {x_3}^2 + \beta^{*2} {x_2}^2}}$$

$$e_3 = \frac{x_2}{r} E_2^{(\mathrm{f})} + \frac{x_3}{r} E_3^{(\mathrm{f})}$$

ve

$$e_2 = e_1 \times e_3 = \begin{vmatrix} E_1^{(\mathrm{f})} & \mathrm{E}_2^{(\mathrm{f})} & E_3^{(\mathrm{f})} \\ \frac{\alpha^*}{R} & -\frac{\beta^* x_3}{r} & \beta^* x_2 \\ 0 & \frac{x_2}{r} & \frac{x_3}{r} \end{vmatrix}$$

$$= \left(-\frac{\beta^* {x_3}^2}{Rr} - \frac{\beta^* {x_2}^2}{Rr} \right) E_1^{(\mathrm{f})} - \left(\frac{\alpha^* x_3}{Rr} - 0 \right) E_2^{(\mathrm{f})} + \left(\frac{\alpha^* x_2}{Rr} - 0 \right) E_3^{(\mathrm{f})}$$

$$= -\frac{\beta^* \left({x_2}^2 + {x_3}^2 \right)}{Rr} - E_1^{(\mathrm{f})} - \frac{\alpha^* x_3}{Rr} E_2^{(\mathrm{f})} + \frac{\alpha^* x_2}{Rr} E_3^{(\mathrm{f})}$$

$$e_2 = -\frac{\beta^* r^2}{Rr} E_1^{(\mathrm{f})} - \frac{\alpha^* x_3}{Rr} E_2^{(\mathrm{f})} + \frac{\alpha^* x_2}{Rr} E_3^{(\mathrm{f})}$$

olarak bulunur. O halde

$$\left.\begin{aligned} e_1 &= \frac{\mathbf{R}'_A}{\left\| \mathbf{R}'_A \right\|} = \frac{\alpha^*}{R} E_1^{(\mathrm{f})} + \beta^* \left(\frac{x_2}{R} E_3^{(\mathrm{f})} - \frac{x_3}{R} E_2^{(\mathrm{f})} \right) \\ e_2 &= e_1 \times e_3 = -\frac{\beta^* r^2}{Rr} E_1^{(\mathrm{f})} + \alpha^* \left(\frac{x_2}{Rr} E_3^{(\mathrm{f})} - \frac{x_3}{Rr} E_2^{(\mathrm{f})} \right) \\ e_3 &= \frac{\mathbf{R}'_{\mathrm{A}} \times E_1^{(\mathrm{f})}}{\left\| \mathbf{R}'_A \times E_1^{(\mathrm{f})} \right\|} = \frac{x_2}{r} E_2^{(\mathrm{f})} + \frac{x_3}{r} E_3^{(\mathrm{f})} \end{aligned} \right\} \tag{7.1}$$

dır. Burada

$$R=\left(\alpha^{*^2}+\beta^{*^2}r^2\right)^{\frac{1}{2}} \text{ ve } \qquad r=\left(x_2^{\,2}+x_3^{\,2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

dır. Γ_{A} nın s yay uzunluğu

$$s=\int\left\|\mathbf{R}'_A\right\|\mathrm{d}\sigma=\int\sqrt{\alpha^{*^2}+\beta^{*^2}r^2}\,\mathrm{d}\sigma=\int R\mathrm{d}\sigma$$

olduğundan yay uzunluğunun diferensiyeli

$$\mathrm{d}s=R\mathrm{d}\sigma \tag{7.2}$$

dır.

Böylece $\{\mathbf{R}_A,\ e_1,\ e_2,\ e_3\}$ hareketli çatısının diferensiyel formüllerini bulalım.

$\dfrac{\mathrm{d}e_1}{\mathrm{d}s}=ae_1+be_2+ce_3$ şeklinde yazılabilir. Böylece,

$$\left\langle e_1,e_1\right\rangle=1 \text{ ise } \left\langle\frac{\mathrm{d}e_1}{\mathrm{d}s},e_1\right\rangle+\left\langle e_1,\frac{\mathrm{d}e_1}{\mathrm{d}s}\right\rangle=0\Rightarrow 2\left\langle\frac{\mathrm{d}e_1}{\mathrm{d}s},e_1\right\rangle=0\Rightarrow\left\langle\frac{\mathrm{d}e_1}{\mathrm{d}s},e_1\right\rangle=a=0$$

$$\left\langle e_1,e_2\right\rangle=0 \text{ ise } \left\langle\frac{\mathrm{d}e_1}{\mathrm{d}s},e_2\right\rangle+\left\langle e_1,\frac{\mathrm{d}e_2}{\mathrm{d}s}\right\rangle=0\Rightarrow\left\langle\frac{\mathrm{d}e_1}{\mathrm{d}s},e_2\right\rangle=-\left\langle e_1,\frac{\mathrm{d}e_2}{\mathrm{d}s}\right\rangle=b=k_n$$

$$\langle e_1,e_3\rangle = 0 \text{ ise } \left\langle \frac{\mathrm{d}e_1}{\mathrm{d}s},e_3\right\rangle + \left\langle e_1,\frac{\mathrm{d}e_3}{\mathrm{d}s}\right\rangle = 0 \Rightarrow \left\langle \frac{\mathrm{d}e_1}{\mathrm{d}s},e_3\right\rangle = -\left\langle e_1,\frac{\mathrm{d}e_3}{\mathrm{d}s}\right\rangle = c = k_g$$

dir. Üstteki son üç eşitlik gözönüne alınırsa $\frac{\mathrm{d}e_1}{\mathrm{d}s} = k_n e_2 + k_g e_3$ olduğu açıktır.

Benzer şekilde $\frac{\mathrm{d}e_2}{\mathrm{d}s} = de_1 + ee_2 + fe_3$ olmak üzere

$$\langle e_2,e_1\rangle = 0 \quad \left\langle \frac{\mathrm{d}e_2}{\mathrm{d}s},e_1\right\rangle + \left\langle e_2,\frac{\mathrm{d}e_1}{\mathrm{d}s}\right\rangle = 0 \Rightarrow \left\langle \frac{\mathrm{d}e_2}{\mathrm{d}s},e_1\right\rangle = -\left\langle e_2,\frac{\mathrm{d}e_1}{\mathrm{d}s}\right\rangle = d = -k_n$$

$$\langle e_2,e_2\rangle = 1 \quad \left\langle \frac{\mathrm{d}e_2}{\mathrm{d}s},e_2\right\rangle + \left\langle e_2,\frac{\mathrm{d}e_2}{\mathrm{d}s}\right\rangle = 0 \Rightarrow 2\left\langle \frac{\mathrm{d}e_2}{\mathrm{d}s},e_2\right\rangle = 0 \Rightarrow \left\langle \frac{\mathrm{d}e_2}{\mathrm{d}s},e_2\right\rangle = e = 0$$

$$\langle e_2,e_3\rangle = 0 \text{ ise } \left\langle \frac{\mathrm{d}e_2}{\mathrm{d}s},e_3\right\rangle + \left\langle e_2,\frac{\mathrm{d}e_3}{\mathrm{d}s}\right\rangle = 0 \Rightarrow \left\langle \frac{\mathrm{d}e_2}{\mathrm{d}s},e_3\right\rangle = -\left\langle e_2,\frac{\mathrm{d}e_3}{\mathrm{d}s}\right\rangle = f = \tau_g$$

denklemlerinden $\frac{\mathrm{d}e_2}{\mathrm{d}s} = -k_n e_1 + \tau_g e_3$ elde edilir.

Son olarak $\frac{\mathrm{d}e_3}{\mathrm{d}s} = ge_1 + he_2 + me_3$ denklemini gözönünde bulunduralım.

$$\langle e_3,e_1\rangle = 0 \text{ ise } \left\langle \frac{\mathrm{d}e_3}{\mathrm{d}s},e_1\right\rangle + \left\langle e_3,\frac{\mathrm{d}e_1}{\mathrm{d}s}\right\rangle = 0 \Rightarrow \left\langle \frac{\mathrm{d}e_3}{\mathrm{d}s},e_1\right\rangle = -\left\langle e_3,\frac{\mathrm{d}e_1}{\mathrm{d}s}\right\rangle = g = -k_g$$

$$\langle e_3,e_2\rangle = 0 \text{ ise } \left\langle \frac{\mathrm{d}e_3}{\mathrm{d}s},e_2\right\rangle + \left\langle e_3,\frac{\mathrm{d}e_2}{\mathrm{d}s}\right\rangle = 0 \Rightarrow \left\langle \frac{\mathrm{d}e_3}{\mathrm{d}s},e_2\right\rangle = -\left\langle e_3,\frac{\mathrm{d}e_2}{\mathrm{d}s}\right\rangle = h = -\tau_g$$

$$\langle e_3,e_3\rangle = 1 \text{ ise } \left\langle \frac{\mathrm{d}e_3}{\mathrm{d}s},e_3\right\rangle + \left\langle e_3,\frac{\mathrm{d}e_3}{\mathrm{d}s}\right\rangle = 0 \Rightarrow 2\left\langle \frac{\mathrm{d}e_3}{\mathrm{d}s},e_3\right\rangle = 0 \Rightarrow \left\langle \frac{\mathrm{d}e_3}{\mathrm{d}s},e_3\right\rangle = m = 0$$

denklemlerinden $\frac{\mathrm{d}e_3}{\mathrm{d}s} = -k_g e_1 - \tau_g e_2$ elde edilir. Böylece

$$\left.\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}e_1}{\mathrm{d}s} &= k_n e_2 + k_g e_3 \\ \frac{\mathrm{d}e_2}{\mathrm{d}s} &= -k_n e_1 + \tau_g e_3 \\ \frac{\mathrm{d}e_3}{\mathrm{d}s} &= -k_g e_1 - \tau_g e_2 \end{aligned}\right\} \tag{7.3}$$

yazılabilir.

Burada k_n, k_g ve τ_g sırasıyla normal eğrilik, geodezik eğrilik ve geodezik torsion olarak adlandırılır. $k^2 = kn^2 + kg^2$ olup k, A noktasında Γ_A nın eğriliğidir ve k_g, $\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{R}_A}{\mathrm{d}s^2}$ nin e_3 yönündeki bileşeni iken k_n, $\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{R}_A}{\mathrm{d}s^2}$ nin normal bileşenidir. (7.1) ve (7.3) denklemleri birleştirilirse k_n, k_g ve τ_g aşağıdaki gibi bulunur.

$$\frac{\mathrm{d}e_1}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}e_1}{\mathrm{d}\sigma}\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}s}$$

$$\frac{\mathrm{d}e_1}{\mathrm{d}s} = \left\{ \frac{\left(\frac{\mathrm{d}\alpha^*}{\mathrm{d}\sigma} E_1^{(\mathrm{f})} + \alpha^* \frac{\mathrm{d}E_1^{(\mathrm{f})}}{\mathrm{d}\sigma_\mathrm{f}} - \frac{\mathrm{d}\beta^*}{\mathrm{d}\sigma} x_3 E_2^{(\mathrm{f})} - \beta^* \frac{\mathrm{d}x_3}{\mathrm{d}\sigma_\mathrm{m}} E_2^{(\mathrm{f})} - \beta^* x_3 \frac{\mathrm{d}E_2^{(\mathrm{f})}}{\mathrm{d}\sigma_\mathrm{f}} + \frac{\mathrm{d}\beta^*}{\mathrm{d}\sigma} x_2 E_3^{(\mathrm{f})} \right.}{R^2} \right.$$

$$\left. + \frac{\left. \beta^* \frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}\sigma_\mathrm{m}} E_3^{(\mathrm{f})} + \beta^* x_2 \frac{\mathrm{d}E_3^{(\mathrm{f})}}{\mathrm{d}\sigma_\mathrm{f}} \right) R - \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\sigma}\left(\alpha^* E_1^{(\mathrm{f})} - \beta^* x_3 E_2^{(\mathrm{f})} + \beta^* x_2 E_3^{(\mathrm{f})} \right)}{R^2} \right\} \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}s}$$

olduğundan (3.3), (4.5), (4.7) ve (7.2) denklemleri burada yerlerine yazılırsa

$$\frac{\mathrm{d}e_1}{\mathrm{d}s}=\left(\frac{\alpha^{*\prime}}{R^2}+\frac{\beta^* x_3}{R^2}-\frac{\alpha^{*2}\alpha^{*\prime}}{R^4}-\frac{\alpha^*\beta^*\beta^{*\prime}r^2}{R^4}+\frac{\alpha^*{\beta^*}^2 x_1x_2}{R^4}+\frac{\alpha^*{\beta^*}^2 x_3\gamma_{\mathrm{m}}}{R^4}\right)E_1^{(\mathrm{f})}$$
$$+\left(\frac{\alpha^*}{R^2}-\frac{\beta^{*\prime}x_3}{R^2}+\frac{{\beta^*}^2x_2}{R^2}+\frac{\beta^*\gamma_{\mathrm{m}}}{R^2}+\frac{\alpha^*\alpha^{*\prime}\beta^*x_3}{R^4}+\frac{{\beta^*}^2\beta^{*\prime}x_3r^2}{R^4}-\frac{{\beta^*}^3x_1x_2x_3}{R^4}-\frac{{\beta^*}^3{x_3}^2\gamma_{\mathrm{m}}}{R^4}\right)E_2^{(\mathrm{f})}$$
$$+\left(\frac{\beta^{*\prime}x_2}{R^2}-\frac{\beta^*x_1}{R^2}-\frac{{\beta^*}^2x_3}{R^2}-\frac{\alpha^*\alpha^{*\prime}\beta^*x_2}{R^4}-\frac{{\beta^*}^2\beta^{*\prime}x_2r^2}{R^4}+\frac{{\beta^*}^3x_1{x_2}^2}{R^4}+\frac{{\beta^*}^3x_2x_3\gamma_{\mathrm{m}}}{R^4}\right)E_3^{(\mathrm{f})}$$

bulunur. Buradan

$$k_n=\left\langle\frac{\mathrm{d}e_1}{\mathrm{d}s},e_2\right\rangle=-\frac{r^2}{R^3\,r}\left(\beta^*\alpha^{*\prime}-\alpha^*\beta^{*\prime}+{\beta^*}^2x_3\right)-\frac{\alpha^*}{R^3\,r}\left(\alpha^*x_3+\beta^*\gamma_{\mathrm{m}}x_3+\beta^*x_1x_2\right)$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$\frac{\mathrm{d}e_3}{\mathrm{d}s}=-\frac{x_2}{Rr}E_1^{(\mathrm{f})}+\left(-\frac{x_1}{Rr}-\frac{\beta^*x_3}{Rr}+\frac{x_1{x_2}^2}{Rr^3}+\frac{x_2x_3\gamma_{\mathrm{m}}}{Rr^3}\right)E_2^{(\mathrm{f})}$$
$$+\left(\frac{\beta^*x_2}{Rr}-\frac{\gamma_{\mathrm{m}}}{Rr}+\frac{x_1x_2x_3}{Rr^3}+\frac{{x_3}^2\gamma_{\mathrm{m}}}{Rr^3}\right)E_3^{(\mathrm{f})}$$

olduğundan k_g ve τ_g

$$k_{\mathrm{g}}=-\left\langle\frac{\mathrm{d}e_3}{\mathrm{d}s},e_1\right\rangle=\frac{-\alpha^*x_2+{\beta^*}^2r^2+\beta^*\left(x_1x_3-x_2\gamma_{\mathrm{m}}\right)}{R^2\,r}$$
$$\tau_{\mathrm{g}}=-\left\langle\frac{\mathrm{d}e_3}{\mathrm{d}s},e_2\right\rangle=\frac{\beta^*}{R^2}\left(x_2+\alpha^*\right)+\frac{\alpha^*}{R^2r^2}\left(x_1x_3-x_2\gamma_{\mathrm{m}}\right)$$

şeklinde elde edilir. Sonuç olarak

$$\left.\begin{aligned}
k_n &= \left\langle \frac{\mathrm{d}e_1}{\mathrm{d}s}, e_2 \right\rangle = -\frac{r^2}{R^3\, r}\left(\beta^*\alpha^{*\prime} - \alpha^*\beta^{*\prime} + \beta^{*^2} x_3\right) - \frac{\alpha^*}{R^3\, r}\left(\alpha^* x_3 + \beta^*\gamma_{\mathrm{m}} x_3 + \beta^* x_1 x_2\right) \\
k_{\mathrm{g}} &= -\left\langle \frac{\mathrm{d}e_3}{\mathrm{d}s}, e_1 \right\rangle = \frac{-\alpha^* x_2 + \beta^{*^2} r^2 + \beta^*\left(x_1 x_3 - x_2\gamma_{\mathrm{m}}\right)}{R^2\, r} \\
\tau_{\mathrm{g}} &= -\left\langle \frac{\mathrm{d}e_3}{\mathrm{d}s}, e_2 \right\rangle = -\frac{\beta^*}{R^2}\left(x_2 + \alpha^*\right) - \frac{\alpha^*}{R^2 r^2}\left(x_1 x_3 - x_2\gamma_{\mathrm{m}}\right)
\end{aligned}\right\} \quad (7.4)$$

dir.

7.2. Uzaysal Harekette Bir Nokta Yörüngesinin Euler-Savary Analoğu ve Geodezik Euler-Savary Analoğu.

7.2.1. Bir nokta yörüngesinin geodezik Euler-Savary analoğu

Bir Γ_{A} nokta yörüngesinin özelliklerini belirtmek için (7.4) denkleminde bazı değişiklikler yapılırsa yani:

$$\left.\begin{aligned}
D_g &= \frac{\left[\beta^{*^2} x_1^{\,2} + \left(\alpha^* + \beta^*\gamma_{\mathrm{m}}\right)^2\right]^{1/2}}{\beta^{*^2}} \\
\sin\theta_g &= \frac{\beta^* x_1}{D_g},\ \sin\theta = \frac{x_3}{r}
\end{aligned}\right\} \quad (7.5)$$

alınırsa (7.4) denkleminin ikinci ifadesi

$$k_g = \frac{-\alpha^* x^2 + \beta^{*^2} r^2 + \beta^* x_1 x_3 - \beta^* x_2 \gamma_{\mathrm{m}}}{R^2 r}$$

$$= \frac{-\alpha^* x_2 + \beta^{*^2} r^2 + \beta^* x_1 x_3 - \beta^* x_2 \gamma_{\mathrm{m}}}{\left(\beta^{*^2} r^2 + \alpha^{*^2}\right) r}$$

şeklini alır. Pay ve payda $\beta^{*2} r$ ye bölünürse:

$$k_g = \frac{r - \left[\dfrac{\alpha^* x_2}{\beta^{*^2} r} + \dfrac{\beta^* x_2 \gamma_{\mathrm{m}}}{\beta^{*^2} r} - \dfrac{\beta^* x_1 x_3}{\beta^{*^2} r}\right]}{r^2 + \left(\alpha^* / \beta^*\right)^2}$$

bulunur. Burada $\sin\theta = \dfrac{x_3}{r}$, $\cos\theta = \dfrac{x_2}{r}$ dönüşümü yapılırsa:

$$k_g = \frac{r - \left[\cos\theta \sqrt{\dfrac{\left(\alpha^* + \beta^* \gamma_{\mathrm{m}}\right)^2}{\beta^{*^4}}} - \sin\theta \sqrt{\dfrac{\beta^{*^2} x_1^{\,2}}{\beta^{*^4}}}\right]}{r^2 + \left(\alpha^* / \beta^*\right)^2}$$

ifadesi elde edilir. Burada pay $\dfrac{D_g}{D_g}$ ile çarpılıp gerekli düzeltmeler yapılarak

$$k_g = \frac{r - D_g \cos\left(\theta + \theta_g\right)}{r^2 + \left(\alpha^* / \beta^*\right)^2} \tag{7.6}$$

bulunur. k_g geodezik eğrilik ρ_g geodezik yarıçap ile değiştirilirse, yukarıdaki denklemi

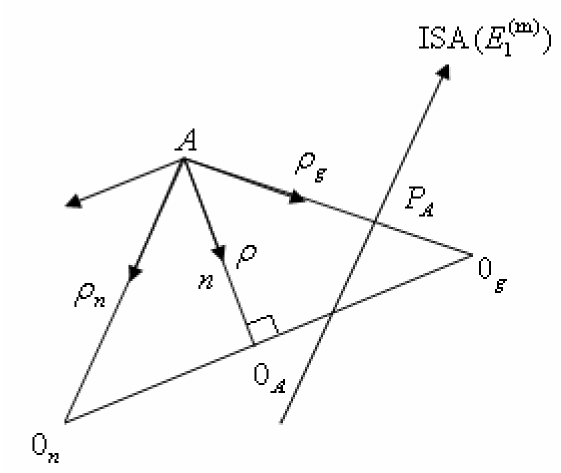
$$\rho_g\left[r - D_g\cos\left(\theta+\theta_g\right)\right] = r^2 + \left(\alpha^*/\beta^*\right)^2 \tag{7.7}$$

ya da

$$\frac{1}{r}+\frac{1}{\left(\rho_g - r\right)} = \frac{\rho_g}{\left(\alpha^*/\beta^*\right)^2 + \rho_g D_g\cos\left(\theta+\theta_g\right)} \tag{7.8}$$

şeklinde buluruz.

(7.6) ve (7.8) denklemleri geodezik Euler-Savary analoğu olarak adlandırılır. Çünkü onlar, düzlemsel hareketteki Euler-Savary formülüyle benzerlik göstermektedir. Bu arada, Γ_{A} nın n asli normali genel halde, ani dönme ekseni ile kesişmez. Fakat o düzlemsel hareket yapar. A noktasındaki Γ_{A} nın eğrilik merkezi O_A dır (Şekil 7.2).



Şekil 7. 2. A noktasındaki Γ_{A} nın eğrilik merkezi

Eğer hareketli cismin A noktası tarafından çizilen Γ_{A} yörünge eğrisinin k_g geodezik eğriliği sıfırsa, A noktası geodezik infleksiyon noktası olarak adlandırılır. Bu anda hareketli cisimdeki geodezik infleksiyon noktalarının tamamı

$$k_g = \frac{r - D_g \cos(\theta + \theta g)}{r^2 + \left(\alpha^* / \beta^*\right)^2} = 0$$

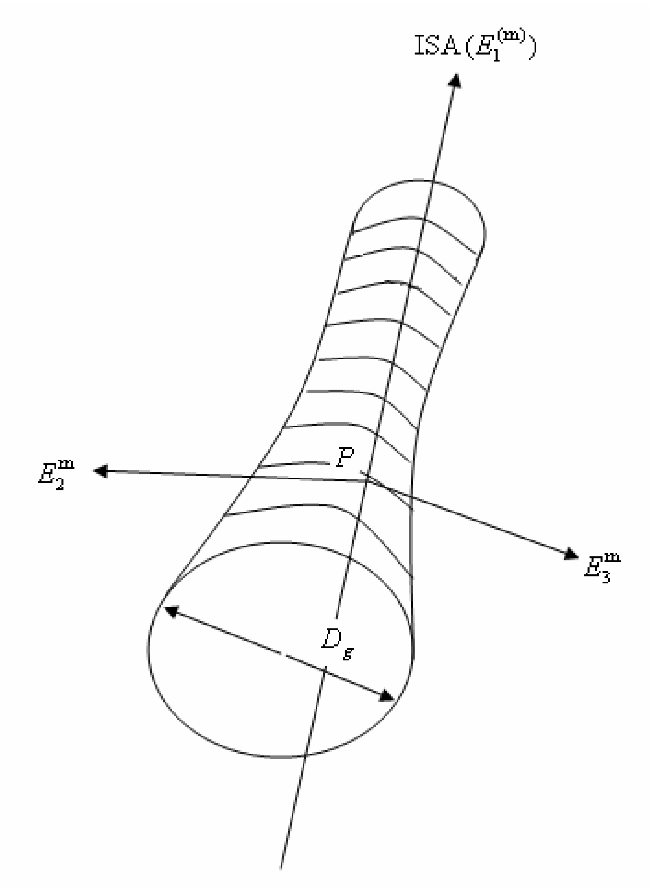
ve

$$r - D_g \cos(\theta + \theta g) = 0 \tag{7.9}$$

denklemi tarafından belirlenen bir yüzey üzerindedir. Bu yüzey geodezik infleksiyon yüzeyi olarak tanımlanır. (7.5) denklemindeki D_g ve θ_g, x_1 in verilen bir değeri için sabittir. Böylece (7.9) denklemi $E_1^{(\mathrm{f})}$ nin ekseni boyunca geçen bir çember denklemidir ve $E_1^{(\mathrm{f})}$ ye dik olan $\left(E_2^{(\mathrm{f})}, E_3^{(\mathrm{f})}\right)$ düzlemi üzerindedir. Bu çember geodezik infleksiyon çemberi olarak adlandırılır. $(-\infty, +\infty)$ aralığındaki x_1 değerlerini ya da $E_1^{(\mathrm{f})}$ nin eksenindeki konumlar göz önüne alınarak (7.9) denklemine geodezik infleksiyon çemberinin bir ailesinin denklemi olarak bakılabilir. Ya da geodezik infleksiyon yüzeyi (7.9 denklemi), (Şekil 7.3) de gösterilen geodezik infleksiyon çemberlerinin bir ailesini kapsar. Geodezik infleksiyon yüzeyinin iki ek özelliği aşağıdaki gibi verilebilir:

1) Geodezik infleksiyon çemberinin merkezi, striksiyon noktasında, Σ_{m} hareketli aksoidinin normali üzerinde bulunmaktadır.

2) $\alpha^* + \beta^*\gamma_m = 0$ olduğunda geodezik infleksiyon yüzeyi tepesi Σ_m nın striksiyon noktasında olan bir konidir.



Şekil 7. 3. Geodezik infleksiyon yüzeyi

7.2.2. Bir nokta yörüngesinin Euler-Savary analoğu

$E_1^{(f)}$, e_3 e dik ve $k^2 = k_n^{\ 2} + k_g^{\ 2}$ olduğundan uzaysal harekette bir nokta yörüngesi için bu anda k_n=0 ise ancak ve ancak $k = k_g$ dir. Buna göre

$$k_n = \frac{r^2}{R^3 r}\left(\beta^*\alpha^{*\prime} - \alpha^*\beta^{*\prime} + \beta^{*^2} x_3\right) + \frac{\alpha^*}{R^3 r}\left(\alpha^* x_3 + \beta^*\gamma_m x_3 + \beta^* x_1 x_2\right) = 0$$

olduğundan

$$r^2\left(\beta^*\alpha^{*\prime}-\alpha^*\beta^{*\prime}+\beta^{*^2}x_3\right)+\alpha^*\left(\alpha^*x_3+\beta^*\gamma_{\mathrm{m}}x_3+\beta^*x_1x_2\right)=0$$

dır. Ayrıca $k^2=k_n{}^2+k_g{}^2$ ve $k_n=0$ ise $k^2=k_g{}^2$ olup $k=k_g$ dir. Böylece

$$k=\frac{-\alpha^*x_2+\beta^{*^2}r^2+\beta^*x_1x_3-\beta^*x_2\gamma_{\mathrm{m}}}{R^2r}$$

elde edilir. Sonuç olarak (7.4) denkleminin ilk iki ifadesi aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$r^2\left(\beta^*\alpha^{*\prime}-\alpha^*\beta^{*\prime}+\beta^{*^2}x_3\right)+\alpha^*\left(\alpha^*x_3+\beta^*\gamma_{\mathrm{m}}x_3+\beta^*x_1x_2\right)=0$$

$$k=\frac{-\alpha^*x_2+\beta^{*^2}r^2+\beta^*x_1x_3-\beta^*x_2\gamma_{\mathrm{m}}}{R^2r}$$

Bu eşitliğin birinci ifadesi düzenlenip (7.5) denklemi göz önüne alınırsa

$$r\left[r\left(\alpha^*/\beta^*\right)'+r^2\sin\theta+\alpha^*D_{\mathrm{g}}\sin\left(\theta+\theta_{\mathrm{g}}\right)\right]=0 \tag{7.10}$$

bulunur. Ayrıca $k_n=0$ dan $k=k_g$ olup

$$k=\frac{r-D_{\mathrm{g}}\cos\left(\theta+\theta_{\mathrm{g}}\right)}{r^2+\left(\alpha^*/\beta^*\right)^2} \tag{7.11}$$

elde edilir. k eğriliği, ρ eğrilik yarıçapı ile değiştirilirse, yukarıdaki denklemi,

$$\rho\left[r - D_g \cos\left(\theta + \theta_g\right)\right] = r^2 + \left(\alpha^* / \beta^*\right)^2 \tag{7.12}$$

ya da

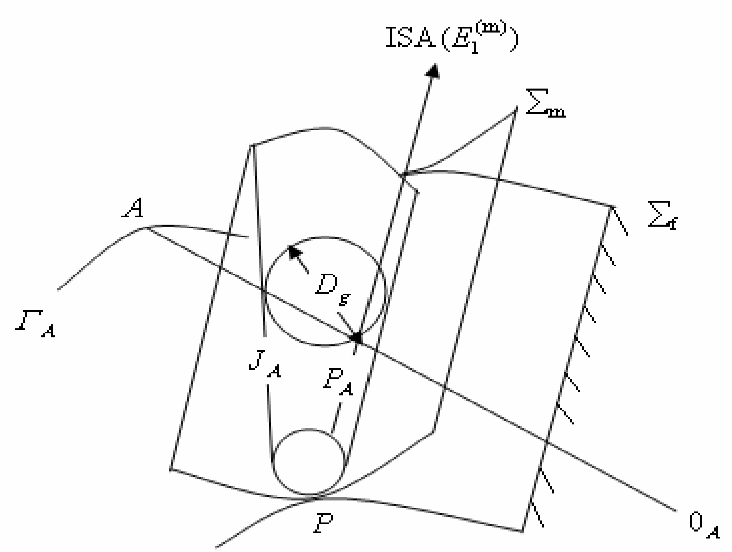
$$\frac{1}{r} - \frac{1}{\rho - r} = \frac{\rho}{\left(\alpha^* / \beta^*\right)^2 + \rho D_g \cos\left(\theta + \theta_g\right)} \tag{7.13}$$

şeklinde buluruz.

(7.11) ve (7.13) denklemleri uzaysal harekette bir nokta yörüngesinin Euler-Savary analoğu olarak adlandırılır. (7.12) denklemi

$$\overline{A0_{\mathrm{A}}}\,\overline{AJ_{\mathrm{A}}} = \overline{AP_{\mathrm{A}}^2} + \left(\alpha^* / \beta^*\right)^2 \tag{7.14}$$

şeklinde de ifade edilebilir. Burada A hareketli cisim üzerindeki iz noktasıdır. 0_{A}, Γ_{A} yörüngesinin eğrilik merkezi ve $\overline{A0_{\mathrm{A}}}$, ρ eğrilik yarıçapıdır. Geodezik infleksiyon çemberi ve Γ_{A} nın n asli normalinin kesişme noktası J_A iken P_A, ISA ile Γ_{A} nın n asli normalinin kesişme noktasıdır. Geodezik infleksiyon çemberi, $A\left(x_1, x_2, x_3\right)$ noktasından geçer ve $E_1^{(\mathrm{f})}$ nin eksenine dik düzlem üzerindedir (Şekil 7.4). A noktası hareketli cisimde herhangi bir nokta değildir. Geodezik Euler-Savary analoğunu sağlayana dek bir yörünge çizen bu nokta bir anda hareketli cisimdeki (7.10) denklemi ile tanımlanan yüzey üzerindedir. Başka bir deyişle uzaysal harekette herhangi bir nokta yörüngesi için geodezik Euler-Savary analoğu bulunmaktadır. Fakat bazı nokta yörüngeler için Euler-Savary analoğu vardır.



Şekil 7.4. Geodezik infleksiyon çemberi

$k_n = 0$ ve $k_g = 0$ ise hareketli cisimdeki A noktası, (7.10) denklemi ile tanımlanan yüzey ve geodezik infleksiyon yüzeyinin kesişim eğrisi üzerinde olmalıdır. $k^2 = k_n^{\,2} + k_g^{\,2}$ olduğundan bu anda bu nokta infleksiyon noktasıdır. (7.10) ve (7.11) denklemleri birleştirilir ve çözülürse

$$k = \frac{-\alpha^* x_2 + \beta^{*^2} r^2 + \beta^* \left(x_1 x_3 - x_2 \gamma_{\mathrm{m}}\right)}{r^2 + \left(\alpha^* / \beta^*\right)^2} = 0$$

ve

$$-\alpha^* x_2 + \beta^{*^2} r^2 + \beta^* \left(x_1 x_3 - x_2 \gamma_{\mathrm{m}}\right) = 0$$

elde edilir. Buradan

$$-\left(\alpha^* + \beta^*\gamma_{\mathrm{m}}\right)x_2 + \beta^* x_1 x_3 + \beta^{*^2}\left(x_2^{\ 2} + x_3^{\ 2}\right) = 0$$

bulunur. Bu son denklem (6.2) denkleminin 3. ifadesi ile aynıdır. Benzer şekilde

$$\begin{aligned} \alpha^*\left(\alpha^* + \beta^*\gamma_{\mathrm{m}}\right) + \left(\beta^*\alpha^{*\prime} - \alpha^*\beta^{*\prime}\right)x_3 - \beta^{*^2}\left(\alpha^* x_2 - x_3^{\ 2}\right) = 0 \\ \alpha^*\beta^* x_1 + \left(\beta^*\alpha^{*\prime} - \alpha^*\beta^{*\prime}\right)x_2 + \alpha^*\beta^{*^2} x_3 + \beta^{*^2} x_2 x_3 = 0 \end{aligned}$$

ifadeleri de elde edilir. Bu ifadeler (6.2) denkleminin 1. ve 2. ifadesi ile aynıdır. Sonuç olarak infleksiyon noktalarından oluşan eğrinin denklemi, (6.2) denklemi ile aynı olur.

BÖLÜM 8. KÜRESEL HAREKETTE BİR NOKTA YÖRÜNGESİNİN ANİ GEOMETRİK ÖZELLİKLERİ

Eğer aksoidler $(\alpha_{\mathrm{f}} = \alpha_{\mathrm{m}} = 0, \quad \gamma_{\mathrm{f}} = \gamma_{\mathrm{m}} = 0)$ konileriyse katı bir cismin uzaysal hareketi küresel harekettir [10]. Küresel hareketteki bir $\mathit{\Gamma}_{\mathrm{A}}$ nokta yörüngesinin vektörel denklemi, (4.2) denklemi gibi yazılabilir. Böylece

$$\mathit{\Gamma}_{\mathrm{A}}: \ \mathbf{R}_{\mathrm{A}} = \mathbf{r}_{\mathrm{f}} + x_1 E_1^{(\mathrm{f})} + x_2 E_2^{(\mathrm{f})} + x_3 E_3^{(\mathrm{f})}$$

dir ve $\mathit{\Gamma}_{\mathrm{A}}$ nın σ ya göre 1. türevi

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{R}_{\mathrm{A}}}{\mathrm{d}\sigma} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}_{\mathrm{f}}}{\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{f}}} + \frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{m}}} E_1^{(\mathrm{f})} + x_1 E_2^{(\mathrm{f})} + \frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{m}}} E_2^{(\mathrm{f})} + x_2(-E_1^{(\mathrm{f})} + \beta_{\mathrm{f}} E_3^{(\mathrm{f})}) + \frac{\mathrm{d}x_3}{\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{m}}} E_3^{(\mathrm{f})} - x_3 \beta_{\mathrm{f}} E_2^{(\mathrm{f})}$$

dir. Bu eşitlik (4.5) ve (4.7) denklemleri ile birleştirilirse

$$\mathbf{R}'_{\mathrm{A}} = \beta^* \left(x_2 E_3^{(\mathrm{f})} - x_3 E_2^{(\mathrm{f})} \right) \tag{8.1}$$

bulunur. $\mathit{\Gamma}_{\mathrm{A}}$ eğrisinin geometrik özelliklerini göstermek için, küresel hareketteki $\mathit{\Gamma}_{\mathrm{A}}$ nokta yörüngesinin $\{\mathbf{R}_{\mathrm{A}}, e_1, e_2, e_3\}$ hareketli çatısı yeniden tanımlanabilir.

O halde

$$e_1 = \frac{\mathbf{R}'_{\mathrm{A}}}{\left\|\mathbf{R}'_{\mathrm{A}}\right\|} = \frac{\beta^* x_2}{\beta^* r} E_3^{(\mathrm{f})} - \frac{\beta^* x_3}{\beta^* r} E_2^{(\mathrm{f})}$$

$$e_1 = \frac{x_2}{r} E_3^{(\mathrm{f})} - \frac{x_3}{r} E_2^{(\mathrm{f})}$$

dir. (8.1) denkleminin σ ya göre diferensiyeli alınırsa

$$\mathbf{R}'_{\mathrm{A}} = \beta^* x_3 E_1^{(\mathrm{f})} - \beta^{*\prime} x_3 E_2^{(\mathrm{f})} + \left(\beta^{*\prime} x_2 - \beta^* x_1\right) E_3^{(\mathrm{f})}$$

bulunur. Buradan

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}'_A \times \mathbf{R}''_A &= \beta^{*^2} x_2 x_3 \left(E_3^{(\mathrm{f})} \times E_1^{(\mathrm{f})}\right) - \beta^* \beta^{*\prime} x_2 x_3 \left(E_3^{(\mathrm{f})} \times E_2^{(\mathrm{f})}\right) - \beta^{*^2} x_3^2 \left(E_2^{(\mathrm{f})} \times E_1^{(\mathrm{f})}\right) \\
&\quad - \beta^* \beta^{*\prime} x_2 x_3 \left(E_2^{(\mathrm{f})} \times E_3^{(\mathrm{f})}\right) - \beta^{*^2} x_1 x_3 \left(E_2^{(\mathrm{f})} \times E_3^{(\mathrm{f})}\right) \\
&= \beta^{*^2} x_1 x_3 E_1^{(\mathrm{f})} - \beta^{*^2} x_2 x_3 E_2^{(\mathrm{f})} - \beta^{*^2} x_3^2 E_3^{(\mathrm{f})}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left\|\mathbf{R}'_A \times \mathbf{R}''_A\right\| &= \sqrt{\beta^{*^4} x_1^2 x_3^2 - \beta^{*^4} x_2^2 x_3^2 - \beta^{*^4} x_3^4} \\
&= \sqrt{\beta^{*^4} x_3^2 \underbrace{\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right)}_{R_s^2}} \\
&= \beta^{*^2} x_3 R_s
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu son denklemler $e_2 = \dfrac{\mathbf{R}'_{\mathrm{A}} \times \mathbf{R}''_{\mathrm{A}}}{\left\|\mathbf{R}'_{\mathrm{A}} \times \mathbf{R}''_{\mathrm{A}}\right\|}$ denkleminde yerine yazılırsa

$$e_2 = \frac{x_1}{R_s} E_1^{(\mathrm{f})} + \frac{x_2}{R_s} E_2^{(\mathrm{f})} + \frac{x_3}{R_s} E_3^{(\mathrm{f})}$$

elde edilir. Şimdi e_3 ü bulalım:

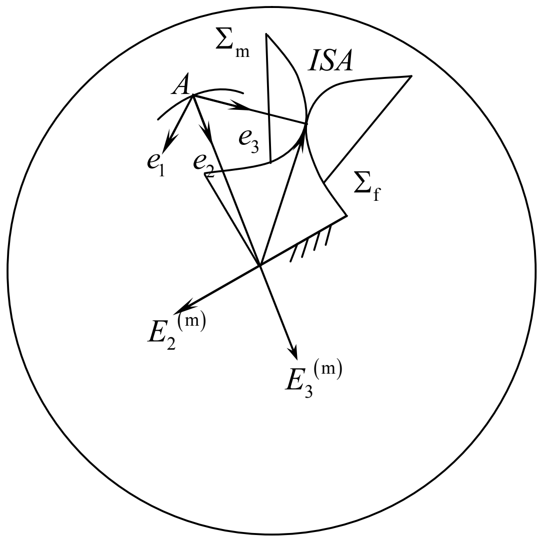
$$
\begin{aligned}
e_3 &= e_1 \times e_2 \\
&= \frac{x_1 x_2}{R_s r}\left(E_3^{(\mathrm{f})} \times E_1^{(\mathrm{f})}\right) + \frac{x_2{}^2}{R_s r}\left(E_3^{(\mathrm{f})} \times E_2^{(\mathrm{f})}\right) - \frac{x_1 x_3}{R_s r}\left(E_2^{(\mathrm{f})} \times E_1^{(\mathrm{f})}\right) - \frac{x_3{}^2}{R_s r}\left(E_2^{(\mathrm{f})} \times E_3^{(\mathrm{f})}\right) \\
&= \frac{-r^2}{R_s r} E_1^{(\mathrm{f})} + \frac{x_1 x_2}{R_s r} E_2^{(\mathrm{f})} - \frac{x_1 x_3}{R_s r} E_3^{(\mathrm{f})}
\end{aligned}
$$

dir. Sonuç olarak

$$
\begin{aligned}
e_1 &= \frac{x_2}{r} E_3^{(\mathrm{f})} - \frac{x_3}{r} E_2^{(\mathrm{f})} \\
e_2 &= \frac{x_1}{R_s} E_1^{(\mathrm{f})} + \frac{x_2}{R_s} E_2^{(\mathrm{f})} + \frac{x_3}{R_s} E_3^{(\mathrm{f})} \\
e_3 &= \frac{-r^2}{R_s r} E_1^{(\mathrm{f})} + \frac{x_1 x_2}{R_s r} E_2^{(\mathrm{f})} - \frac{x_1 x_3}{R_s r} E_3^{(\mathrm{f})}
\end{aligned}
\tag{8.2}
$$

dir. Burada $R_s = \left(x_1{}^2 + x_2{}^2 + x_3{}^2\right)^{1/2}$ ve $r = \left(x_2{}^2 + x_3{}^2\right)^{1/2}$ dir.

Hareketli çatıda e_2 nin ekseni, aksoidlerin striksiyon noktasına ya da yarıçap R_s ile kürenin merkezine yönelir (Şekil 8.1).



Şekil 8. 1. Küresel harekette A noktasının yörüngesi

Γ_A nın $\mathrm{d}s$ yay uzunluğu $s=\int\|\mathbf{R}'_A\|\mathrm{d}\sigma$ ve $\mathrm{d}s=\beta^* r\mathrm{d}\sigma$ dır. (7.3) ve (7.4) denklemleri gözönüne alınarak k_n normal eğriliği, k_g geodezik eğrilik ve τ_g geodezik torsion aşağıdaki gibi elde edilirler.

$$\frac{\mathrm{d}e_1}{\mathrm{d}s}=\frac{\mathrm{d}e_1}{\mathrm{d}\sigma}\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}s}$$

$$=\frac{\left(\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}\sigma_m}E_3^{(f)}+x_2\frac{\mathrm{d}E_3^{(f)}}{\mathrm{d}\sigma_f}-\frac{\mathrm{d}x_3}{\mathrm{d}\sigma_m}E_2^{(f)}-x_3\frac{\mathrm{d}E_3^{(f)}}{\mathrm{d}\sigma_f}\right).r-\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\sigma}\left(x_2E_3^{(f)}-x_3E_2^{(f)}\right)}{r^2}\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}s}$$

dir. Son denklem, (3.3) ve (4.5) denklemleri göz önüne alınırsa

$$\frac{\mathrm{d}e_1}{\mathrm{d}s}=\frac{x_3}{\beta^* r^2}E_1^{(\mathrm{f})}+\left(-\frac{x_2}{r^2}-\frac{x_1x_2x_3}{r^4}\right)E_2^{(\mathrm{f})}+\left(-\frac{x_1}{\beta^* r^2}-\frac{x_3}{r^2}+\frac{x_1x_2^{\,2}}{r^4}\right)E_3^{(\mathrm{f})}$$

bulunur. Buradan

$$k_n=\left\langle\frac{\mathrm{d}e_1}{\mathrm{d}s},e_2\right\rangle=\frac{1}{R_s}$$

ve

$$k_g=\left\langle\frac{\mathrm{d}e_1}{\mathrm{d}s},e_3\right\rangle=-\frac{R_s^{\,2}x_3+\beta^{*}r^2x_1}{\beta^{*}R_s r^3}$$

dır. Şimdi τ_g yi hesaplayalım.

$$\frac{\mathrm{d}e_2}{\mathrm{d}s}=\frac{\mathrm{d}e_2}{\mathrm{d}\sigma}\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}s}$$

$$=\left[\frac{\left(-\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}\sigma_\mathrm{m}}E_1^{(\mathrm{f})}-x_1\frac{\mathrm{d}E_1^{(\mathrm{f})}}{\mathrm{d}\sigma_\mathrm{f}}-\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}\sigma_\mathrm{m}}E_2^{(\mathrm{f})}-x_2\frac{\mathrm{d}E_2^{(\mathrm{f})}}{\mathrm{d}\sigma_\mathrm{f}}-\frac{\mathrm{d}x_3}{\mathrm{d}\sigma_\mathrm{m}}E_3^{(\mathrm{f})}-x_3\frac{\mathrm{d}E_3}{\mathrm{d}\sigma_\mathrm{f}}\right)R_s}{R_s^{\,2}}\right.$$

$$\left.-\frac{\frac{R_s}{\mathrm{d}\sigma}\left(-x_1E_1-x_2E_2-x_3E_3\right)}{R_s^{\,2}}\right]\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}s}$$

dir. Son denklem, (3.3) ve (4.5) denklemleri göz önüne alınırsa

$$\frac{\mathrm{d}e_2}{\mathrm{d}s} = 0 \text{ ve } \tau_g = \left\langle \frac{\mathrm{d}e_2}{\mathrm{d}s}, e_3 \right\rangle = 0$$

bulunur. Sonuç olarak

$$k_n = \frac{1}{R_s}, \quad k_g = \frac{R_s{}^2 x_3 + \beta^* r^2 x_1}{R_s \beta^* r^3}, \quad \tau_g = 0 \tag{8.3}$$

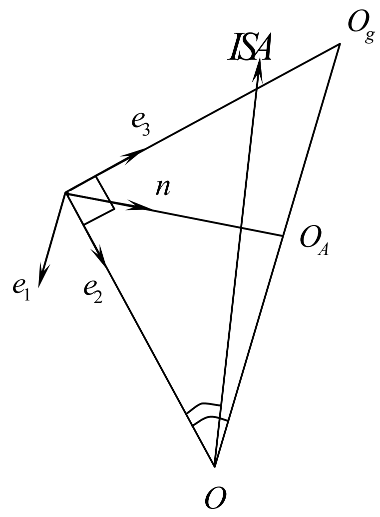
Buna göre A noktasındaki Γ_{A} nın k eğriliği

$$k = \left(k_{\mathrm{n}}^2 + k_{\mathrm{g}}^2\right)^{1/2} = \left\{ \left(\frac{R_s x_3}{\beta^* r^3} + \frac{x_1}{R_s r} \right)^2 + \frac{1}{R_s{}^2} \right\}^{1/2} \tag{8.4}$$

dir. $\mathbf{R_A}$ (ya da e_2) $\overline{OO_g}$ doğrusu ile bir δ açısı oluştururken bu anda Γ_A nın eğrilik merkezi O_A dadır. Geodezik eğrilik merkezi O_g ve

$$ctg\,\delta = \frac{\rho_n}{\rho_g} = \frac{k_g}{k_n} = k_g R_s \tag{8.5}$$

dir (Şekil 8.2).



Şekil 8. 2. Geodezik eğrilik merkezi

Küresel hareketteki Σ_{m} hareketli aksoide adjoint bir eğrinin sabit nokta koşulu (4.5) denkleminde $\alpha_{\mathrm{m}} = 0$ ve $\gamma_{\mathrm{m}} = 0$ alınarak aşağıdaki gibi bulunabilir.

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{m}}} = x_2, \quad \frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{m}}} = x_1 + \beta_{\mathrm{m}} x_3, \quad \frac{\mathrm{d}x_3}{\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{m}}} = -\beta_{\mathrm{m}} x_2$$

olduğundan (8.3) denkleminin σ ya göre diferensiyeli alınıp sabit nokta koşulu ile birleştirilirse

$$k_g' = \frac{R_s}{\beta^{*^2} r^5} \left\{ \beta^* x_2 \left[3x_1 x_3 - \left(\beta_{\mathrm{m}} - \beta^* \right) r^2 \right] - r^2 x_3 \beta^{*\prime} \right\}$$

bulunur. Küresel hareketteki durağan eğriliğin kübü $k' = k_g' = 0$ ile elde edilir. Böylece

$$k_g' = \frac{-\beta^*\beta_{\mathrm{m}}R_s x_2 r^2 - \beta^{*\prime}R_s x_3 r^2 + 3\beta^* R_s x_1 x_2 x_3 + \beta^{*^2}R_s x_2 r^2}{\beta^{*^2} r^5} = 0$$

ve

$$\frac{x_1}{r} = \frac{\left(\beta_{\mathrm{m}} - \beta^*\right) r}{3x_3} + \frac{\beta^{*\prime} r}{3\beta^* x_2}$$

bulunur. Burada düzlemsel harekete göre bir birleşmiş form elde etmek için

$$x_2 = r\cos\theta, \quad x_3 = r\sin\theta, \quad x_1 = R_s\cos\phi \tag{8.6}$$

alınırsa durağan eğriliğin kübü

$$ctg\ \phi = \frac{1}{M\sin\theta} - \frac{1}{N\cos\theta} = 0 \tag{8.7}$$

elde edilir. Burada

$$\frac{1}{M} = \frac{\beta_{\mathrm{m}} - \beta^*}{3}, \quad \frac{1}{N} = \frac{\beta^{*'}}{3\beta^*} \tag{8.8}$$

alınmıştır. Hareketli cisimdeki noktalar, (bu noktaların $o_{\mathrm{f}} - i_{\mathrm{f}} j_{\mathrm{f}} k_{\mathrm{f}}$ sabit çatısındaki yörüngeleri $k' = 0$ ve $k'' = 0$ ya da $k_g' = 0$ ve $k_g'' = 0$ ile belirlenebilir)

(8.7) denklemi ve onun σ'ya göre diferensiyeli ile belirlenebilir. O halde (8.7) denkleminin σ ya göre diferensiyeli alınırsa

$$\frac{\dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}\sigma}r-\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\sigma}x_1}{r^2}-\frac{\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\sigma}Mx_3-\left(M'x_3+M\dfrac{\mathrm{d}x_3}{\mathrm{d}\sigma}\right)r}{M^2x_3^{\ 2}}-\frac{\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\sigma}Nx_2-\left(N'x_2+N\dfrac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}\sigma}\right)r}{N^2x_2^{\ 2}}=0$$

bulunur. Bu denklem (8.6) ve (8.8) denklemleri ile birleştirilip gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\left(1+tg^2\theta\right)\left[\frac{2-\beta_{\mathrm{m}}M}{M^2}+\frac{M'N+3M}{M^2N}tg\theta+\frac{1+N'}{N^2}tg^2\theta+\frac{\beta_{\mathrm{m}}M-1}{MN}tg^3\theta-\frac{1}{N^2}tg^4\theta\right]+tg^2\theta=0 \quad (8.9)$$

elde edilir. Bu altıncı dereceden bir denklem olduğundan eğer M, N, β_{m} ve bunların birinci türevleri verilirse en fazla altı reel kökleri olur. Bu altı reel kök, Burmester'ın noktaları olarak adlandırılır. Bu yüzden hareketli bir cisimde herhangi bir anda altı Burmester'ın noktası bulunur. Bu altı Burmester'ın noktasından her bir noktanın yolu sabit çatıdaki beş küçük konumda bulunan çemberin üzerinde olacaktır. Burmester'ın noktalarının hepsi (8.7) ve (8.9) denklemleri ile belirlenebilir.

BÖLÜM 9. SONUÇLAR

Yeni yaklaşım (Bir regle yüzeye adjoint bir eğri), uzaysal hareketin kinematik geometrisini incelemek konusunda yararlı ve etkili olmuştur. Bir nokta yörüngesi, hareketli aksoid ve sabit aksoid arasındaki ilişki sabit nokta koşuluyla gösterilmiştir. Bu yaklaşıma dayanarak uzaysal hareketteki yapı parametrelerinin kinematik anlamları açıklanmıştır. Bir nokta yörüngesinin geometrik özellikleri incelenmiş, geodezik Euler-Savary analoğu elde edilmiştir. Küresel hareket, uzaysal hareketin bir özel hali olarak alınmıştır. Küresel harekette bir nokta yörüngesi tartışılmış ve durağan eğriliğin kübik eğriliği elde edilmiştir. Son olarak hareketli cisimdeki Burmester noktaları konumlandırılmıştır.

KAYNAKLAR

[1] BOKELBERG, E. H., HUNT, K. H. and RIDLEY, P. R., Mechanism and Machine Theory, 1992, 27, 1.

[2] CHIANG, C.H., Kinematics of Spherical Mechanisms, Cambridge University Press, Cambridge, 1988.

[3] HACISALİHOĞLU, H. H., Diferensiyel Geometri, cilt 1 ve 2, 203-221 Ankara Üniversitesi, Fen-Edeb. Fakültesi, 1983

[4] HUNT, K. H., Kinematic Geometry of Mechanisms, Oxford University Press, 1978.

[5] MCCARTHY, J. and ROTH, B., ASME Journal of Mechanical Design, 1982, 104, 39.

[6] RIDLEY, P. R., HUNT, K. H. and BOKELBERG, Mechanism and Machine Theory, 1992, 27, 17.

[7] SASAKI, S., Differential Geometry, Kyolitsu Press, Tokyo, 1976.

[8] WANG D. and XIAO D., Mechanism and Machine Theory 1993, 28(5), 671.

[9] WANG D., Kinematic Differential Geometry of Mechanisms, Doctoral dissertation, Dalian University of Technology, Dalian, March,1995.

[10] WANG D., LIU J., XIAO D., Geometrical characteristics of some typical spatial constraints, Mechanism and Machine Theory (submitted).

[11] WANG D., LIU J., XIAO D., Kinematic Differential Geometry of a Rigid Body in Spatial Motion-I. A New Adjoint Approach and Instantaneous Properties of a Point Trajectory in Spatial Kinematics, Mech. Mach. Theory Vol. 32, No: 4, pp. 419-432, 1997.

EKLER

Ek-A Uzaysal Hareketteki Aksoidlerin Geometrik Özellikleri

Ani dönme ekseni ISA herhangi bir anda Σ_{m} ve Σ_{f} için ortak bir doğrultmandır. O halde

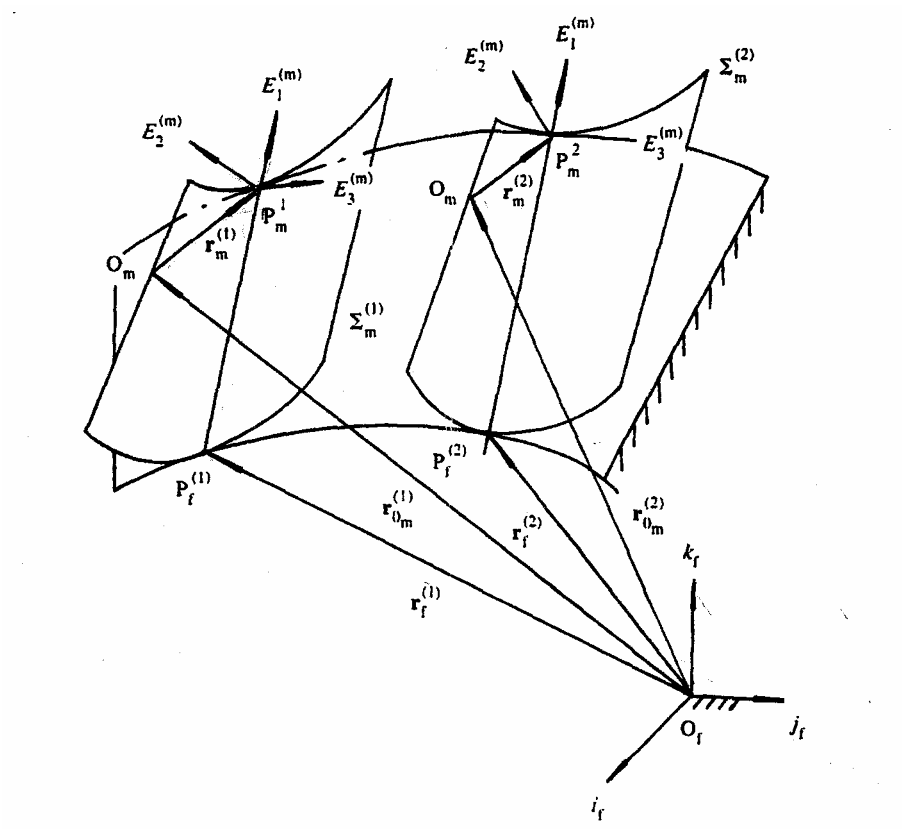
$$E_1^{(\mathrm{m})} = E_1^{(\mathrm{f})} \tag{A1}$$

alabiliriz. Σ_{f} ve Σ_{m} nin Frenet çatısının orijini, sırasıyla, P_{f} ve P_m noktalarındadır (ya da Σ_{f} ve Σ_m nin striksiyon noktalarındadır) ve

$$P_{\mathrm{m}}P_{\mathrm{f}} = h \qquad \mathbf{r}_{o\mathrm{m}} + \mathbf{r}_{\mathrm{m}} - \mathbf{r}_{\mathrm{f}} = hE_1^{(\mathrm{f})} \tag{A2}$$

dir. Burada

$\mathbf{r}_{o\mathrm{m}}$, $o_{\mathrm{f}} - i_{\mathrm{f}}j_{\mathrm{f}}k_{\mathrm{f}}$ sabit referans çatısının orijininden $o_{\mathrm{m}} - i_{\mathrm{m}}j_{\mathrm{m}}k_{\mathrm{m}}$ hareketli referans çatısının orijinine olan vektördür. $\mathbf{r}_{\mathrm{f}}$, $o_{\mathrm{f}} - i_{\mathrm{f}}j_{\mathrm{f}}k_{\mathrm{f}}$ sabit referans çatısının orijininden Σ_{f} nin Frenet çatısının (striksiyon noktasına) orijinine olan vektördür.



Şekil A.1 Uzaysal hareketteki aksoidlerin hareketi

$\mathbf{r}_{\mathrm{m}}$, $o_{\mathrm{m}} - i_{\mathrm{m}} j_{\mathrm{m}} k_{\mathrm{m}}$ hareketli referans çatısının orijininden Σ_{m} nin Frenet çatısının orijinine (ya da striksiyon noktasına) olan vektörüdür. Σ_{f} e bağlı Σ_{m} nin uzaysal hareketi $E_1^{(\mathrm{f})}$ boyunca kayması ve $E_1^{(\mathrm{f})}$ etrafında dönmesi ile ifade edilebilir. Yani

$$\left.\begin{aligned} W &= \omega E_1^{(\mathrm{m})} = \omega E_1^{(\mathrm{f})} \\ V &= v E_1^{(\mathrm{m})} = v E_1^{(\mathrm{f})} \end{aligned}\right\} \tag{A3}$$

Burada ω, Σ_{m} nin Σ_{f} e bağlı açısal dönme hızıdır. v ise Σ_{m} nin Σ_{f} e bağlı kayma (öteleme) hızıdır.

Biz, Σ_{m} ve Σ_{f} nin iki Frenet çatısının hareketi yoluyla Σ_{f} ve Σ_{m} nin geometrik özelliklerini bulabiliriz. Herhengi bir anda ISA değişkeni boyunca Σ_{f} sabit aksoidi ile Σ_{m} hareketli aksoidi temas edeceğinden Σ_{f} ve Σ_{m} nin iki Frenet çatısı ISA nın konumuyla değişir.

Σ_{m} nin Frenet çatısı bir katı hareket ve geometrik hareket yapar. Bu iki hareket bir dönme ve bir ötelemenin birleşimidir. Σ_{m} nin Frenet çatısının hareketi biri öteleme diğeri dönme olmak üzere iki parçaya ayrılabilir.

1) Öteleme

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}_{om}}{\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{f}}}+\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}_{\mathrm{m}}}{\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{f}}}=\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}_{om}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{f}}}+\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}_{\mathrm{m}}}{\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{m}}}\frac{\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{m}}}{\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{f}}}$$

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}_{om}}{\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{f}}}+\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}_{\mathrm{m}}}{\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{f}}}=\frac{vE_1^{(\mathrm{m})}\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{f}}}+\frac{\left(\alpha_{\mathrm{m}}E_1^{(\mathrm{m})}+\gamma_{\mathrm{m}}E_3^{(\mathrm{m})}\right)\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{m}}}{\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{f}}}$$

$$\mathrm{d}\mathbf{r}_{om}+\mathrm{d}\mathbf{r}_{\mathrm{m}}=vE_1^{(\mathrm{m})}\mathrm{d}t+\left(\alpha_{\mathrm{m}}E_1^{(\mathrm{m})}+\gamma_{\mathrm{m}}E_3^{(\mathrm{m})}\right)\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{m}}$$

2) Dönme

$$\frac{\mathrm{d}E_1^{(\mathrm{m})}}{\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{m}}}+\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}_{om}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{m}}}=E_2^{(\mathrm{m})}\frac{\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{m}}}{\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{m}}}+\frac{W\times E_1^{(\mathrm{m})}}{\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{m}}}\mathrm{d}t$$

$$\mathrm{d}E_1^{(\mathrm{m})}+\mathrm{d}\mathbf{r}_{om}\mathrm{d}t=E_2^{(\mathrm{m})}\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{m}}+W\times E_1^{(\mathrm{m})}\mathrm{d}t=E_2^{(\mathrm{m})}\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{m}}$$

$$\mathrm{d}E_1^{(\mathrm{m})}+W\times E_1^{(\mathrm{m})}\mathrm{d}t=E_2^{(\mathrm{m})}\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{m}}$$

Buradan

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}\mathbf{r}_{om} + \mathrm{d}\mathbf{r}_{\mathrm{m}} &= vE_1^{(\mathrm{m})}\mathrm{d}t + \left(\alpha_{\mathrm{m}} E_1^{(\mathrm{m})} + \gamma_{\mathrm{m}} E_3^{(\mathrm{m})}\right)\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{m}} \\
\mathrm{d}E_1^{(\mathrm{m})} + W \times E_1^{(\mathrm{m})}\mathrm{d}t &= E_2^{(\mathrm{m})}\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{m}}
\end{aligned}
\tag{A4}
$$

denklemi elde edilir. Σ_{f} nin Frenet çatısı ise bir geometrik harekete sahiptir. Σ_{f} nin Frenet çatısının hareketi aşağıdaki gibi iki parçaya ayrılabilir.

1) Öteleme

$$
\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}_{\mathrm{f}}}{\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{f}}} = \left(\alpha_{\mathrm{f}} E_1^{(\mathrm{f})} + \gamma_{\mathrm{f}} E_3^{(\mathrm{f})}\right) \qquad \mathrm{d}\mathbf{r}_{\mathrm{f}} = \left(\alpha_{\mathrm{f}} E_1^{(\mathrm{f})} + \gamma_{\mathrm{f}} E_3^{(\mathrm{f})}\right)\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{f}}
$$

2) Dönme

$$
\frac{\mathrm{d}E_1^{(\mathrm{f})}}{\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{f}}} = E_2^{(\mathrm{f})} \qquad \mathrm{d}E_1^{(\mathrm{f})} = E_2^{(\mathrm{f})}\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{f}}
$$

Buradan

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}\mathbf{r}_{\mathrm{f}} &= \left(\alpha_{\mathrm{f}} E_1^{(\mathrm{f})} + \gamma_{\mathrm{f}} E_3^{(\mathrm{f})}\right)\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{f}} \\
\mathrm{d}E_1^{(\mathrm{f})} &= E_2^{(\mathrm{f})}\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{f}}
\end{aligned}
\tag{A5}
$$

denklemi elde edilir.

(A1) ve (A2) denklemlerinin diferensiyeli alınırsa

$$\frac{\mathrm{d}E_1^{(\mathrm{m})}}{\mathrm{d}\sigma_\mathrm{m}}\frac{\mathrm{d}\sigma_\mathrm{m}}{\mathrm{d}\sigma_\mathrm{f}}=\frac{\mathrm{d}E_1^{(\mathrm{f})}}{\mathrm{d}\sigma_\mathrm{f}}\frac{\mathrm{d}\sigma_\mathrm{f}}{\mathrm{d}\sigma_\mathrm{f}}$$

$$\frac{E_2^{(\mathrm{m})}\mathrm{d}\sigma_\mathrm{m}}{\mathrm{d}\sigma_\mathrm{f}}=\frac{E_2^{(\mathrm{f})}\mathrm{d}\sigma_\mathrm{f}}{\mathrm{d}\sigma_f}$$

$$E_2^{(\mathrm{m})}\mathrm{d}\sigma_\mathrm{m}=E_2^{(\mathrm{f})}\mathrm{d}\sigma_\mathrm{f}$$

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}_{om}}{\mathrm{d}\sigma_\mathrm{f}}+\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}_\mathrm{m}}{\mathrm{d}\sigma_\mathrm{f}}-\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}_\mathrm{f}}{\mathrm{d}\sigma_\mathrm{f}}=\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}\sigma_\mathrm{f}}E_1^{(\mathrm{f})}+h\frac{\mathrm{d}E_1^{(\mathrm{f})}}{\mathrm{d}\sigma_\mathrm{f}}$$

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}_{om}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\sigma_\mathrm{f}}+\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}_\mathrm{m}}{\mathrm{d}\sigma_\mathrm{m}}\frac{\mathrm{d}\sigma_\mathrm{m}}{\mathrm{d}\sigma_\mathrm{f}}-\left(\alpha_\mathrm{f}E_1^{(\mathrm{f})}+\gamma_\mathrm{f}E_3^{(\mathrm{f})}\right)=\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}\sigma_\mathrm{f}}E_1^{(\mathrm{f})}+h\frac{\mathrm{d}E_1^{(\mathrm{f})}}{\mathrm{d}\sigma_\mathrm{f}}$$

$$\frac{vE_1^{(\mathrm{m})}\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\sigma_\mathrm{f}}+\frac{\left(\alpha_\mathrm{m}E_1^{(\mathrm{m})}+\gamma_\mathrm{m}E_3^{(\mathrm{m})}\right)\mathrm{d}\sigma_\mathrm{m}}{\mathrm{d}\sigma_\mathrm{f}}-\frac{\left(\alpha_\mathrm{f}E_1^{(\mathrm{f})}+\gamma_\mathrm{f}E_3^{(\mathrm{f})}\right)\mathrm{d}\sigma_\mathrm{f}}{\mathrm{d}\sigma_\mathrm{f}}=\frac{\mathrm{d}hE_1^{(\mathrm{f})}}{\mathrm{d}\sigma_\mathrm{f}}+\frac{h\mathrm{d}E_1^{(\mathrm{f})}}{\mathrm{d}\sigma_\mathrm{f}}\frac{\mathrm{d}\sigma_\mathrm{f}}{\mathrm{d}\sigma_\mathrm{f}}$$

$$vE_1^{(\mathrm{m})}\mathrm{d}t+\left(\alpha_\mathrm{m}E_1^{(\mathrm{m})}+\gamma_\mathrm{m}E_3^{(\mathrm{m})}\right)\mathrm{d}\sigma_\mathrm{m}-\left(\alpha_\mathrm{f}E_1^{(\mathrm{f})}+\gamma_\mathrm{f}E_3^{(\mathrm{f})}\right)\mathrm{d}\sigma_\mathrm{f}=\mathrm{d}hE_1^{(\mathrm{f})}+hE_2^{(\mathrm{f})}\mathrm{d}\sigma_\mathrm{f}$$

bulunur. Bu iki denklem aşağıdaki gibi düzenlenirse

$$E_2^{(\mathrm{m})}\mathrm{d}\sigma_\mathrm{m}=E_2^{(\mathrm{f})}\mathrm{d}\sigma_\mathrm{f}$$

$$E_1^{(\mathrm{m})}\left(\alpha_\mathrm{m}\mathrm{d}\sigma_\mathrm{m}-\alpha_\mathrm{f}\mathrm{d}\sigma_\mathrm{f}\right)+E_3^{(\mathrm{m})}\gamma_\mathrm{m}\mathrm{d}\sigma_\mathrm{m}-E_3^{(\mathrm{f})}\gamma_\mathrm{f}\mathrm{d}\sigma_\mathrm{f}+vE_1^{(\mathrm{m})}\mathrm{d}t=hE_2^{(\mathrm{f})}\mathrm{d}\sigma_\mathrm{f}+E_1^{(\mathrm{f})}\mathrm{d}h$$

bulunur. Bu denklemin 1. ifadesi ile (A4) ve (A5) denklemlerinin 2. ifadelerini karşılaştırırsak, $\mathrm{d}E_1^{(\mathrm{f})}=\mathrm{d}E_1^{(\mathrm{m})}$ elde edilir. Buda $E_1^{(\mathrm{m})}$ nin mutlak sonsuz küçük dönmesi ile $E_1^{(\mathrm{f})}$ nin kinin aynı olması anlamına gelir. Yukarıdaki denklemin ikinci ifadesi de $E_1^{(\mathrm{m})}$ ile $E_1^{(\mathrm{f})}$ nin sonsuz küçük ötelemeleri arasındaki farkı tanımlar. Ayrıca yukarıdaki denklemin 1. ifadesinden

$$E_2^{(\mathrm{m})} = E_2^{(\mathrm{f})}$$

$$\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{m}} = \mathrm{d}\sigma_{\mathrm{f}} \text{ ya da } \sigma_{\mathrm{m}} = \sigma_{\mathrm{f}} + c_o$$

bulunur. (A1) den $E_1^{(\mathrm{m})} = E_1^{(\mathrm{f})}$ idi. Yukarıda da $E_2^{(\mathrm{m})} = E_2^{(\mathrm{f})}$ olduğuna göre

$$\begin{aligned} E_3^{(\mathrm{m})} &= E_1^{(\mathrm{m})} \times E_2^{(\mathrm{m})} \\ &= E_1^{(\mathrm{f})} \times E_2^{(\mathrm{f})} \\ &= E_3^{(\mathrm{f})} \end{aligned}$$

bulunur. Buna göre Σ_{m} ve Σ_{f} nin Frenet çatıları çakışıktır, dolayısıyla striksiyon noktaları da çakışıktır. O halde $h = 0$ dır. Bu bulduklarımızı yukarıdaki denklemde yerine yazarsak

$$E_1^{(\mathrm{m})}\left(\alpha_{\mathrm{m}}\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{m}} - \alpha_{\mathrm{f}}\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{f}}\right) + E_3^{(\mathrm{m})}\gamma_{\mathrm{m}}\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{m}} - E_3^{(\mathrm{f})}\gamma_{\mathrm{f}}\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{f}} + vE_1^{(\mathrm{m})}\mathrm{d}t = hE_2^{(\mathrm{f})}\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{f}} + E_1^{(\mathrm{f})}\mathrm{d}h$$
$$E_1^{(\mathrm{m})}\left(\alpha_{\mathrm{m}} - \alpha_{\mathrm{f}}\right)\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{m}} + E_3^{(\mathrm{m})}\left(\gamma_{\mathrm{m}} - \gamma_{\mathrm{f}}\right)\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{m}} + vE_1^{(\mathrm{m})}\mathrm{d}t = 0$$

elde edilir.

$-\alpha^*\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{m}} = -v\mathrm{d}t$ denklemi yukarıdaki denklemde yerine yazılırsa

$$E_1^{(\mathrm{m})}\left(-\alpha^*\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{m}}\right) + E_3^{(\mathrm{m})}\left(\gamma_{\mathrm{m}} - \gamma_{\mathrm{f}}\right)\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{m}} + vE_1^{(\mathrm{m})}\mathrm{d}t = 0$$

$$-vE_1^{(\mathrm{m})}\mathrm{d}t + E_3^{(\mathrm{m})}\left(\gamma_{\mathrm{m}} - \gamma_{\mathrm{f}}\right)\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{m}} + vE_1^{(\mathrm{m})}\mathrm{d}t = 0$$

$$E_3^{(\mathrm{m})}\left(\gamma_{\mathrm{m}} - \gamma_{\mathrm{f}}\right)\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{m}} = 0 \text{ dan}$$

$$\gamma_{\mathrm{m}} - \gamma_{\mathrm{f}} = 0 \text{ dolayısıyla } \gamma_{\mathrm{m}} = \gamma_{\mathrm{f}}$$

bulunur. Böylece bu denklemlerden

$$E_1^{(\mathrm{m})} = E_1^{(\mathrm{f})} \qquad i = 1,2,3$$

$$\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{m}} = \mathrm{d}\sigma_{\mathrm{f}} \text{ ya da } \sigma_{\mathrm{m}} = \sigma_{\mathrm{f}} + c_o$$

$$\gamma_{\mathrm{m}} = \gamma_{\mathrm{f}} \quad , \quad h = 0$$

$$\left(\alpha_{\mathrm{f}} - \alpha_{\mathrm{m}}\right)\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{f}} + v\mathrm{d}t = \mathrm{d}h$$

elde edilir.

ÖZGEÇMİŞ

Ebru IŞIK, 14.08.1978 tarihinde Antalya'da doğdu. İlköğrenimini Antalya'da Gazi Mustafa Kemal İlkokulunda, ortaöğrenimini Antalya Lisesinde tamamladı. 1995 yılında On Dokuz Mayıs Üniversitesi Eğitim Fakültesi Matematik Öğretmenliği bölümünde başladığı lisans eğitimini 1999 yılında tamamladı. 1999–2003 öğretim yılları arasında Sakarya'nın Ferizli ilçesinde Şehit Hacı Uzun İlköğretim Okulunda, 2003–2007 yılları arasında Sakarya Erenler 50. Yıl İlköğretim Okulunda, 2007 yılında Sakarya Ozanlar Şehit Mustafa Özen İlköğretim Okulunda Matematik Öğretmeni olarak görev yaptı. Eylül 2006'da Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünde Matematik Anabilim Dalında yüksek lisans öğrenimine başladı. Halen, Sakarya İl Milli Eğitim Müdürlüğü İstatistik bölümünde görevlendirme ile çalışmaktadır. Ebru IŞIK evli ve iki çocuk annesidir.