T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

PASKAL ÜÇGENİ VE FİBONACCİ MATRİSLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Uğur KÖK

Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK

Tez danışmanı : Yrd. Doç. Dr. Serpil HALICI

Nisan 2009

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

PASKAL ÜÇGENİ VE FİBONACCİ MATRİSLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Uğur KÖK

Enstitü Anabilim Dalı	**:**	**Matematik**
Enstitü Bilim Dalı	**:**	**Matematik**

Bu tez .. / .. /2009 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Oybirliği ile kabul edilmiştir.

Yrd.Doç.Dr.Serpil Halıcı	Prof.Dr.Metin BAŞARIR	Prof.Dr.İbrahim OKUR
Jüri Başkanı	**Üye**	**Üye**

ÖNSÖZ

Bu çalışmada Paskal üçgeni ile Fibonacci sayıları arasındaki ilişki ve Fibonacci matrisleri üzerinde duruldu. Paskal üçgenindeki binom katsayılarından Fibonacci ve Lucas sayıları bulunmaya çalışıldı. Fibonacci matrisleri üzerinde çalışmalar yapıldı.

Tezin hazırlanmasının her aşamasında, yardımlarını esirgemeyen, değerli fikirlerinden yararlandığım, sayın hocam Yrd. Doç. Dr. Serpil HALICI'ya en içten teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

ŞEKİLLER LİSTESİ

ÖZET

Anahtar Kelimeler: Fibonacci ve Lucas sayıları, Paskal üçgeni, Binom katsayıları

Bu çalışmada, Fibonacci ve Lucas sayılarının Paskal üçgeni yardımıyla nasıl elde edildiği görüldü.

Birinci kısımda, Binom katsayıları yardımıyla Fibonacci ve Lucas sayıları elde edildi. Fibonacci ve Lucas sayıları ile Paskal tipi üçgenler arasında çeşitli bağıntılar elde edildi.

İkinci kısımda, Fibonacci ve Lucas sayıları ile elde edilen çeşitli matrisler üzerinde çalışıldı. Bu matrisler Fibonacci ve Lucas matrisleri olarak adlandırıldı.

Son olarak, Fibonacci ve Lucas sayıları ile matrisler arasında kapalı bir halka olduğu görüldü.

PASCAL TRİANGLES AND FİBONACCİ MATRİCES

SUMMARY

Key words: Fibonacci and Lucas numbers, Pascal's triangle, Binom coefficients

In this study, we have seen how Fibonacci and Lucas numbers can be generated from Pascal's triangle.

In the first part, Fibonacci and Lucas numbers were investigated by using the Binom coefficients. The various relations between Pascal type triangles and Fibonacci and Lucas numbers were then obtained.

In the second part, the various matrices were studied which are involving Fibonacci and Lucas numbers. These matrices are called Fibonacci and Lucas matrices.

In additon, it has been seen that, there is a close link between matrices, Fibonacci an Lucas numbers.

BÖLÜM 1.GİRİŞ PASKAL ÜÇGENİ

Bu bölümde çok iyi bilinen Paskal üçgeninden yararlanarak, Fibonacci sayılarının nasıl hesaplandığı çalışılacaktır. Önce Binom katsayıları, yani $(x+y)^n$ açılımı ile başlamak uygundur.

1.1. Binom Katsayıları: k ve n negatif olmayan tamsayılar olsun. $\binom{n}{k}$ Binom katsayısı; eğer $k \leq n$ ise;

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

şeklinde tanımlanır. $k \leq n$ olmaması durumunda ise 0'dır. Bu ifade $C(n,r)$ veya nCr ile de gösterilir.

Örnek olarak; $\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!(5-3)!} = 10$ verilebilir. Tanımda $k = 0$ olduğu düşünülürse,

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!(n-0)!} = \frac{n!}{1.n!} = 1$$

dir. Ayrıca $k = n$ iken;

$$\binom{n}{n} = \frac{n!}{n!(n-n)!} = \frac{n!}{n!.0!} = 1$$

dir.

Böylece, $\binom{n}{0} = 1 = \binom{n}{n}$ yazılabilir.

Teorem 1.1. n ve k negatif olmayan tamsayılar ve $k \leq n$ olsun. Bu durumda;

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

dır.

İspat: $\binom{n}{n-k} = \dfrac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \dfrac{n!}{(n-k)!k!} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$

dır.

Örnek olarak;

$$\binom{25}{20} = \binom{25}{25-20} = \binom{25}{5} = 53{,}130$$

olur. Aşağıdaki teorem, binom katsayılarının sağladığı önemli bir tekrarlı bağıntıyı ifade eder.

Teorem 1.2. (Paskal özdeşliği) n ve k pozitif tamsayılar, $k \leq n$ olsun. Bu durumda,

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

dır.

İspat: Eşitliğin sağ tarafının sol tarafına eşit olduğu kolayca gösterilebilir:

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!}$$

$$= \frac{k.(n-1)!}{k.(k-1)!(n-k)!} + \frac{(n-k).(n-1)!}{(n-k).(n-k-1)!k!}$$

$$=\frac{k.(n-1)!}{k!(n-k)!}+\frac{(n-k).(n-1)!}{k!(n-k)!}$$

$$=\frac{(n-1)![k+(n-k)]}{k!(n-k)!}=\frac{(n-1)!.n}{k!(n-k)!}$$

$$=\frac{n!}{k!(n-k)!}=\binom{n}{k}$$

1.2. Pascal Üçgeni: $0 \le k \le n$ olmak üzere, $\binom{n}{k}$ bir üçgen biçiminde dizilebilen binom katsayıları Paskal üçgenini oluşturur. Bu durum Şekil 1.1 ve Şekil 1.2'de gösterilmiştir.

$$\begin{array}{ccccccccccl}
 & & & & \binom{0}{0} & & & & & & \text{0. dizi} \\
 & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & & \text{1. dizi} \\
 & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & & \text{2. dizi} \\
 & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & & \text{3. dizi} \\
\binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & & \text{4. dizi} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & &
\end{array}$$

Şekil 1.1. Binom Katsayıları

1	0. dizi
1 1	1. dizi
1 2 1	2. dizi
1 3 3 1	3. dizi
1 4 6 4 1	4.dizi

Şekil 1.2. Pascal Üçgeni

Paskal üçgeninde birçok ilginç özellik vardır. Bunlardan bazıları şöyledir:

1- Her satır 1 ile başlar, 1 ile biter.

2- Paskal üçgeni, ortadan dikey çizgi çizildiğinde bu çizgiye göre simetriktir.

3- Her satırın iç kısmındaki her sayı, bir önceki satırda o sayının sağındaki vesolundaki sayıların toplamıdır.

4- Her satırdaki sayıların toplamı 2'nin tamsayı kuvvetidir.

Aşağıdaki teorem Binom katsayılarının $(x+y)^n$'nin, Binom açılımında nasıl kullanıldığını göstermektedir.

Teorem 1.3. (Binom Teoremi) x ve y herhangi reel sayılar ve n negatif olmayan herhangi bir tamsayı olsun. Bu durumda

$$(x+y)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} x^{n-r} y^r$$

dir.

İspat. $n=0$ olduğunda; sol taraf $=(x+y)^0 = 1$ ve sağ taraf

$$= \sum_{r=0}^{0} \binom{0}{r} x^{0-r} y^r = x^0 y^0 = 1\text{'dir.}$$

Böylece sol taraf = sağ taraf olur. Farz edelim ki, eşitlik $n \geq 0$ için doğru olsun. Yani,

$$(x+y)^n = \sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}x^{n-r}y^r$$

olsun. Buradan

$$(x+y)^{n+1} = (x+y)^n.(x+y)$$

olup,

$$= \left[\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}x^{n-r}y^r\right].(x+y)$$

$$= \sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}x^{n+1-r}y^r + \sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}x^{n-r}y^{r+1}$$

$$= \left[\binom{n}{0}x^{n+1} + \sum_{r=1}^{n}\binom{n}{r}x^{n+1-r}y^r\right] + \left[\sum_{r=0}^{n-1}\binom{n}{r}x^{n-r}y^{r+1} + \binom{n}{n}y^{n+1}\right]$$

$$= \binom{n+1}{0}x^{n+1} + \sum_{r=1}^{n}\binom{n}{r}x^{n+1-r}y^r + \sum_{r=1}^{n}\binom{n}{r-1}x^{n+1-r}y^r + \binom{n+1}{n+1}y^{n+1}$$

$$= \binom{n+1}{0}x^{n+1} + \sum_{r=1}^{n}\left[\binom{n}{r}+\binom{n}{r-1}\right]x^{n+1-r}y^r + \binom{n+1}{n+1}y^{n+1}$$

$$= \binom{n+1}{0}x^{n+1} + \sum_{r=1}^{n}\binom{n+1}{r}x^{n+1-r}y^r + \binom{n+1}{n+1}y^{n+1} .$$

olur.

Teorem 1.2. yardımıyla da

$$(x+y)^{n+1} = \sum_{r=0}^{n+1}\binom{n+1}{r}x^{n+1-r}y^r$$

olduğu görülebilir. Buna göre, tümevarımdan, formül $\forall\, n \geq 0$ tamsayıları için doğrudur.

Sonuç 1.1.

$$\bullet\,(1+x)^n = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^n \quad ve$$

$$\bullet\,(1-x)^n = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(-1)^n x^n$$

dir.

Sonuç 1.2.

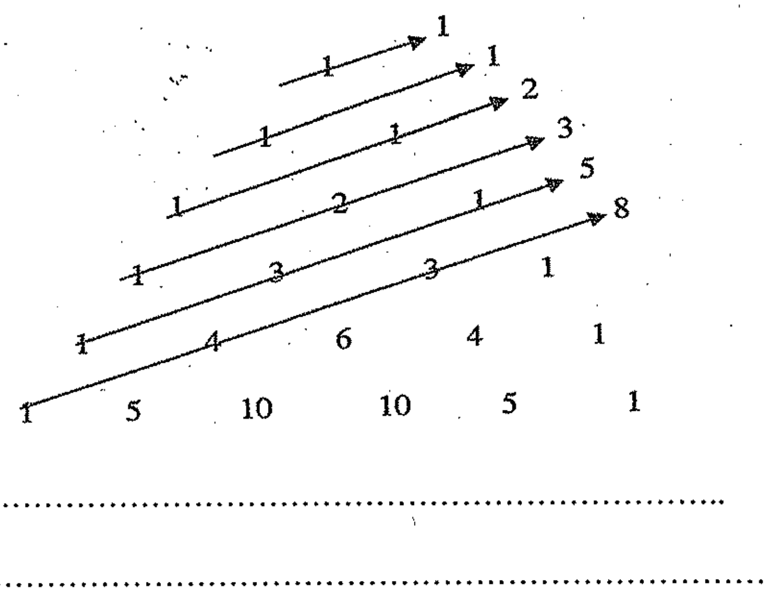
$$\sum\binom{n}{2i} = \sum\binom{n}{2i-1}$$

dir. Buna göre; tek Binom katsayılarının toplamı, çift Binom katsayılarının toplamına eşittir.

1.3. Fibonacci Sayıları

Paskal üçgeni ile Fibonacci sayılarının nasıl bir bağlantı olduğunu görmek için, düzenlenmiş özel bir üçgene başvurulur (Şekil 1.3).

Bu üçgende kuzeydoğu doğrultusu boyunca üçgen üzerindeki sayılar toplanırsa, bunların 1,1,2,3,5,8,... olduğu ve bu sayıların Fibonacci sayıları olduğu görülür.



Şekil 1. 3. Fibonacci sayıları

Teorem 1.4. (Lucas Formülü)

$$F_{n+1}=\sum_{i=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\binom{n-i}{i} \quad , \quad n\geq 0$$

dır.

İspat. $n=0$ olduğunda sağ taraf

$$\sum_{i=0}^{0}\binom{0-i}{i}=\binom{0}{0}=1$$

dir. Sol taraf; $F_{0+1}=F_1=1$ olduğu görülür.

Şimdi bu eşitlik, k' den küçük veya eşit bütün negatif olmayan tamsayılar için doğru olsun $(k\geq 0,\text{keyfi tamsayı})$.

$$F_{k+1}=\sum_{i=0}^{\left[\frac{k}{2}\right]}\binom{k-i}{i}$$

Paskal özdeşliğinden

$$\sum_{i=0}^{\left[\frac{(k+2)}{2}\right]}\binom{k+2-i}{i}=\sum_{i=0}^{\left[\frac{(k+2)}{2}\right]}\binom{k+1-i}{i-1}+\sum_{i=0}^{\left[\frac{(k+2)}{2}\right]}\binom{k+1-i}{i}$$

yazılabilir.

k çift sayı olsun. Bu durumda

$$\sum_{i=0}^{\left[\frac{(k+2)}{2}\right]}\binom{k+2-i}{i}=\sum_{i=0}^{\frac{k}{2}}\binom{k-j}{j}+\sum_{i=0}^{\frac{k}{2}}\binom{k+1-i}{i}+\binom{\frac{k}{2}}{\frac{k}{2}+1}$$

$$= \sum_{j=0}^{\left[\frac{(k+1)}{2}\right]} \binom{k-j}{j} + \sum_{i=0}^{\left[\frac{(k+1)}{2}\right]} \binom{k+1-i}{i} + 0$$

$$= F_k + F_{k+1}$$

$$= F_{k+2}$$

yazılabilir. Bu eşitlik, k tek sayı olduğunda da kolayca gösterilebilir:

$$\sum_{i=0}^{\left[\frac{(k+2)}{2}\right]} \binom{k+2-i}{i} = F_{k+2}$$

Matematiksel tümevarımdan bütün $n \geq 0$ tamsayıları için formülün tutarlı olduğu görülür. Örnek olarak

$$F_{n+1} = F_6 = \sum_{i=0}^{2} \binom{5-i}{i} = \binom{5}{0} + \binom{4}{1} + \binom{3}{2} = 1 + 4 + 3 = 8$$

$$F_7 = \sum_{i=0}^{3} \binom{6-i}{i} = \binom{6}{0} + \binom{5}{1} + \binom{4}{2} + \binom{3}{3} = 1 + 5 + 6 + 1 = 13$$

verilebilir.

Binom teoremi, Binet ve Lucas formülleri bir düzen içinde ardarda Fibonacci ve Lucas özdeşliklerini türetmek için kullanılabilir. Daha genel olarak aşağıdaki özdeşlik yazılabilir.

Teorem 1.5. (Lucas Özdeşliği)

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} F_i = F_{2n} \qquad , \qquad n \geq 0$$

dir.

İspat. Binet formülünden; (not: $F_i = \dfrac{\alpha^i - \beta^i}{\alpha - \beta}$)

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} F_i = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \left(\frac{\alpha^i - \beta^i}{\alpha - \beta} \right)$$

$$= \frac{1}{\alpha-\beta}\left[\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\alpha^{i} - \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\beta^{i}\right]$$

ve Sonuç 1.1'den yararlanılarak

$$= \frac{(1+\alpha)^{n}-(1+\beta)^{n}}{\alpha-\beta} \qquad (\alpha^{2}=1+\alpha,\ \beta^{2}=1+\beta)$$

$$= \frac{\alpha^{2n}-\beta^{2n}}{\alpha-\beta}$$

$$= F_{2n}$$

bulunur. Lucas sayıları için benzer bir iddia daha vardır:

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}L_{i} = L_{2n} \qquad (n \geq 0)$$

İspat. $L_{n} = \alpha^{n} + \beta^{n} \Rightarrow \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}L_{i} = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(\alpha^{i}+\beta^{i})$

$$= \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\alpha^{i} + \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\beta^{i}$$

$$= (1+\alpha)^{n} + (1+\beta)^{n}$$

$$= \alpha^{2n} + \beta^{2n}$$

$$= L_{2n}$$

Örnek olarak

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{4}{i}L_{i} = \binom{4}{0}L_{0} + \binom{4}{1}L_{1} + \binom{4}{2}L_{2} + \binom{4}{3}L_{3} + \binom{4}{4}L_{4}$$

$$= 2 + 4 + 18 + 16 + 7 = 47 = L_{8}$$

yazılabilir.

1.4. Satranç Üzerindeki Kalenin Fibonacci Yolları

1970'te Edward T. Frankel, Fibonacci sayılarının boş bir satranç üzerinde kalenin bir köşeden karşıki köşeye farklı yol sayısının sayılmasından elde edilebileceğini gösterdi.

Bunu görmek için, Paskal üçgeninin ilk 8 satırı (0'dan 7'ye) düşünülsün.

Şerit içindeki kısmın Paskal üçgeninin 3. satırı olduğu açıktır. Satırlar i, sütunlar j olmak üzere,

i \ j	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	2	3	4	5	6	7	8
2	1	3	6	10	15	21	28	36
3	1	4	10	20	35	56	84	120
4	1	5	15	35	70	126	210	330
5	1	6	21	56	126	252	462	792
6	1	7	28	84	210	462	924	1716
7	1	8	36	120	330	792	1716	3432

Şekil 1.4. Satranç üzerinde kalenin Fibonacci yolları

$$A(i,j) = A(i,j-1) + A(i-1,j)$$

dir. Buradan

$$A(6,5) = A(6,4) + A(5,5) \quad , \quad 462 = 210 + 252$$

$$A(7,6) = A(7,5) + A(6,6) \quad , \quad 1716 = 792 + 924$$

sonucu elde edilir.

j	0	1	2	3	4	5	6	7
0	$\binom{0}{0}$	$\binom{1}{0}$	$\binom{2}{0}$	$\binom{3}{0}$	$\binom{4}{0}$	$\binom{5}{0}$	$\binom{6}{0}$	$\binom{7}{0}$
1	$\binom{1}{1}$	$\binom{1}{1}$	$\binom{2}{1}$	$\binom{3}{1}$	$\binom{4}{1}$	$\binom{5}{1}$	$\binom{6}{1}$	$\binom{7}{1}$
2	$\binom{2}{2}$	$\binom{3}{2}$	$\binom{4}{2}$	$\binom{5}{2}$	$\binom{6}{2}$	$\binom{7}{2}$	$\binom{8}{2}$	$\binom{9}{2}$
3	$\binom{3}{3}$	$\binom{4}{3}$	$\binom{5}{3}$	$\binom{6}{3}$	$\binom{7}{3}$	$\binom{8}{3}$	$\binom{9}{3}$	$\binom{10}{3}$
4	$\binom{4}{4}$	$\binom{5}{4}$	$\binom{6}{4}$	$\binom{7}{4}$	$\binom{8}{4}$	$\binom{9}{4}$	$\binom{10}{4}$	$\binom{11}{4}$
5	$\binom{5}{5}$	$\binom{6}{5}$	$\binom{7}{5}$	$\binom{8}{5}$	$\binom{9}{5}$	$\binom{10}{5}$	$\binom{11}{5}$	$\binom{12}{5}$
6	$\binom{6}{6}$	$\binom{7}{6}$	$\binom{8}{6}$	$\binom{9}{6}$	$\binom{10}{6}$	$\binom{11}{6}$	$\binom{12}{6}$	$\binom{13}{6}$
7	$\binom{7}{7}$	$\binom{8}{7}$	$\binom{9}{7}$	$\binom{10}{7}$	$\binom{11}{7}$	$\binom{12}{7}$	$\binom{13}{7}$	$\binom{14}{7}$

Şekil 1.5. Satranç üzerinde kalenin Fibonacci yollarının binom katsayıları ile gösterimi

1	1	1					
1	2	3	3				
	2	5	8	8			
		5	13	21	21		
			13	34	55	55	
				34	89	144	144
					89	233	377
						233	610

Şekil 1.6. Kalenin yolları üzerindeki Fibonacci sayıları

F_1	F_2	F_2					
F_1	F_3	F_4	F_4				
	F_3	F_5	F_6	F_6			
		F_5	F_7	F_8	F_8		
			F_7	F_9	F_{10}	F_{10}	
				F_9	F_{11}	F_{12}	F_{12}
					F_{11}	F_{13}	F_{14}
						F_{13}	F_{15}

Şekil 1.7. Kalenin yolları üzerindeki Fibonacci sayıları

Bir kale, bir oyun tahtası üzerinde ya yatay ya da dikey olarak hareket eder. Fakat aynı hareketi iki yönde de yapamaz. Varsayalım ki, yatay olarak sağa dikey olarak aşağıya hareket etsin. İyi bilinir ki, Şekil 1,4'teki her giriş üst sol köşeden bu hücreye bir karenin hareket sayısını belirtir.

Örneğin; $A(2,1)=3$ şunu ima eder; $(0,0)$ durumundan $(2,1)$ durumuna hareket edebilen kalenin 3 farklı yolu vardır. Bunlar $(1R,1D)$, $(1D,1R)$ ve $(2D,1R)$ 'dir.

Kalenin üst sol köşeden $(7,7)$ alt sağ köşesine mümkün hareketlerinin sayısı 3432'dir. Kombinatöriyel gösterim kullanarak Şekil 1.5'te gösterildiği gibi Şekil 1.4 teki sırayı tekrar yazabiliriz.

Şekil 1.6, üst sol köşeden kalenin hareketlerinin sayısını gösterir ki; bu hareketler yatay ve dikey çizgilerle sınırlıdır. Bu banttaki tüm girişler Fibonacci sayısıdır. Bu bant 4 Fibonacci sayısından oluşmuştur. Sıra, üst sol tepede 1 ile başlar. Her bir giriş, kendisinin hemen üstündeki ve hemen solundaki girişlerin toplamıdır.

Şekil 1.7 Fibonacci gösterimini kullanarak aynı sırayı temsil etmektedir. 1.5 ve 1.7 şekillerinden anlaşılan o ki, $(0,0)$ durumundan $(7,7)$ durumuna kalenin $F_{15}=610$ muhtemel hareketi vardır. Daha genel olarak; $n \times n$ lik bir düzenekte kale, üst sol köşeden alt sağ köşeye F_{2n-1} kısıtlı harekete sahiptir.

BÖLÜM 2. PASKAL TİPİ ÜÇGENLER

Paskal üçgeninden, Fibonacci sayılarının nasıl üretildiği 1. bölümde gösterilmiştir. Bu bölümde Paskal tipi özelliklere sahip benzer üçgenlerden Lucas ve Fibonacci sayılarının nasıl bulunduğu incelenecektir.

2.1. n. Kuvvetlerin Toplamı

r ve $s, x^2 - px - q = 0$ quadratik denkleminin çözümleri olsun.

$$r = \frac{p+\sqrt{p^2+4q}}{2} \qquad ,s = \frac{p-\sqrt{p^2+4q}}{2}$$

Böylece,

$$r + s = p \text{ ve } r.s = -q$$

dur. Dolayısıyla;

$$r^2 + s^2 = (r+s)^2 - 2rs = p^2 + 2q$$

ve

$$r^3 + s^3 = (r+s)^3 - 3rs(r+s) = p^3 + 3pq$$

dur. Benzer şekilde devam edilirse, $r^n + s^n$ toplamlarının değerleri hesaplanabilir.

$$\begin{aligned}
&r + s = p \\
&r^2 + s^2 = p^2 + 2q \\
&r^3 + s^3 = p^3 + 3pq \\
&r^4 + s^4 = p^4 + 4p^2q + 2q^2 \\
&r^5 + s^5 = p^5 + 5p^3q + 5pq^2 \\
&r^6 + s^6 = p^6 + 6p^4q + 9p^2q^2 + 2q^3 \\
&r^7 + s^7 = p^7 + 7p^5q + 14p^3q^2 + 7pq^3
\end{aligned}$$

Daha genel olarak, Draim ve Bicknell matematiksel tümevarımı kullanarak

$$r^n + s^n = \sum_{0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} A(n,i)p^{n-2i}q^i \tag{2.1}$$

$$A(n,i) = 2.\binom{n-i}{i} - \binom{n-i-1}{i}$$

olduğunu gösterdiler.

Paskal özdeşliği kullanılarak, $A(n,i)$ için formül basitleştirilebilir:

$$\begin{aligned} A(n,i) &= \binom{n-i}{i} + \left[\binom{n-i}{i} - \binom{n-i-1}{i}\right] \\ &= \binom{n-i}{i} + \binom{n-i-1}{i-1} \\ &= \binom{n-i}{i} + \frac{i}{n-1}\binom{n-i-1}{i-1} \\ &= \binom{n-i}{i}\cdot\left(1+\frac{i}{n-1}\right) \\ &= \frac{n}{n-i}\binom{n-i}{i} \end{aligned} \tag{2.2}$$

Böylece (2.1) formülü yeniden yazılabilir:

$$r^n + s^n = \sum_{0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} A(n,i)p^{n-2i}q^i \tag{2.3}$$

$$A(n,i) = \frac{n}{n-i}\binom{n-i}{i} \quad , \quad 0 \le i \le \left[\frac{n}{2}\right]$$

$A(n,i)$'nin çeşitli değerleri, Tablo 2.1'de gösterildiği gibi Paskal tipi bir üçgene yerleştirilebilir.

Tablo 2.1. Lucas sayıları

n \ i	0	1	2	3	4	5	Satır toplamı
1	1						1
2	1	2					3
3	1	3					4
4	1	4	2				7
5	1	5	5				11
6	1	6	9	2			18
7	1	7	14	7			29
8	1	8	20	16	2		47
9	1	9	27	30	9		76
10	1	10	35	50	25	2	123

$i=0 \quad , \quad n=1 \Rightarrow A(n,i)=1$

$i=1 \quad , \quad n=2 \Rightarrow A(n,i)=\dfrac{n}{n-i}\cdot\dbinom{n-i}{i}=\dfrac{2}{1}\cdot\dbinom{1}{1}=2$

$i=2 \quad , \quad n=6 \Rightarrow A(n,i)=\dfrac{6}{4}\cdot\dbinom{4}{2}=9$

Özellikle , r ve s ; $x^2=x+1$ denkleminin çözümleri olsunlar. $r=\alpha$ ve $s=\beta$ için Denklem (2.3)

$$L_n=\sum_{i=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} A(n,i) \tag{2.4}$$

formülünü verir. (2.2) denklemi kullanılarak,

$$L_n=\sum_{i=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{n}{n-i}\cdot\binom{n-i}{i} \tag{2.5}$$

formülü yeniden yazılabilir.

Örnek olarak

$$\sum_{0}^{2}\frac{5}{5-i}\cdot\binom{5-i}{i}=\frac{5}{5}\cdot\binom{5}{0}+\frac{5}{4}\cdot\binom{4}{1}+\frac{5}{3}\cdot\binom{3}{2}=1+5+5=11=L_5$$

yazılabilir.

Tablo (2.1)'deki üçgensel düzen aşağıdaki ilginç özellikleri sağlar.

1- $A(n,0)=1$' den dolayı her satır 1 ile başlar.

2- $A(n,i)$;

$$A(n,i)=A(n-1,i)+A(n-2,i-1) \tag{2.6}$$

bağıntısını oluşturur.

Eğer $n \geq 3$ ise, her $A(n,i)$ girdisi, bir üst satırdaki girdi ve onun üstündeki satırın solundaki girdinin toplamı ile elde edilir. Örnek olarak tablodaki oklara bakılabilir.

1- Eğer $i > \left[\frac{n}{2}\right]$ ise, $A(n,i)=0$ dır.

2- Eğer n çift ise,

1) $n.$ satırın sonu 2'dir.

2) $n.$ satır ve $(n+1)$. satır girdilerinin aynı numaralarını kapsar.

1- Eğer n tek ise,

1) $n.$ satırın sonu n'dir.

2) $n+1$. satır $n.$ satırdan bir fazla girdiyi kapsar.

Bu sonuçlar kolayca ispatlanabilir. Örnek olarak, n tek olsun.

$$\begin{aligned}
A\left(n,\left[\frac{n}{2}\right]\right) &= A\left(n,\frac{n-1}{2}\right) \\
&= \frac{2n}{n+1}\cdot\begin{pmatrix}\frac{(n+1)}{2} \\ \frac{(n-1)}{2}\end{pmatrix} \\
&= \frac{2n}{n+1}\cdot\frac{\left(\frac{(n+1)}{2}\right)!}{\left(\frac{(n-1)}{2}\right)!} = \frac{2n}{n+1}\cdot\frac{n+1}{2} = n
\end{aligned}$$

n tek olduğunda,

$$\left[\frac{(n+1)}{2}\right]=\frac{(n+1)}{2}=\frac{(n-1)}{2}+1=\left[\frac{n}{2}\right]+1$$

dir. Böylece $n+1$. satır, n. satırdan bir fazla girdiyi kapsar.

2.2. L_n İçin Alternatif Bir Formül

Önceki tartışma L_n için alterne formül formunda muhteşem bir bölünen verir. $\Delta=\sqrt{p^2 4q}$ olsun. $2r=p+\Delta$ ve $2s=p-\Delta$ olur. Böylece;

$$(2r)^n=(p+\Delta)^n=\sum_0^n\binom{n}{i}p^{n-i}\Delta^i$$

$$(2s)^n=(p-\Delta)^n=\sum_0^n\binom{n}{i}p^{n-i}(-\Delta)^i$$

$$(2r)^n+(2s)^n=2\cdot\sum_{i\,\text{çift}}\binom{n}{i}p^{n-i}\Delta^i$$

$$2^n\cdot\left[(r)^n+(s)^n\right]=2\cdot\sum_0^{\left[\frac{n}{2}\right]}\binom{n}{2i}p^{n-2i}\Delta^{2i}$$

$$2^{n-1}\cdot\left[(r)^n+(s)^n\right]=\sum_0^{\left[\frac{n}{2}\right]}\binom{n}{2i}p^{n-2i}\Delta^{2i}$$

olur.

Özellikle, $p=1=q$ olsun. Buradan $\Delta=\sqrt{5}$ olur ve

$$L_n=\frac{1}{2^{n-1}}\sum_0^{\left[\frac{n}{2}\right]}\binom{n}{2i}\cdot 5^i \tag{2.7}$$

formülünü verir. Örnek olarak,

$$L_5 = \frac{1}{2^4}\sum_{0}^{2}\binom{5}{2i}\cdot 5^i$$

$$= \frac{1}{2^4}\left[\binom{5}{0}+\binom{5}{2}\cdot 5+\binom{5}{4}\cdot 5^2\right] = \frac{1}{16}\cdot(1+50+125) = 11$$

yazılabilir.

2.3. n. Kuvvetlerin Farkı

Bu kısımda da r ve s'nin n. kuvvetlerinin farkı incelenecektir.

$$r - s = \frac{(p+\Delta)}{2} - \frac{(p-\Delta)}{2} = \Delta$$

$$r^2 - s^2 = \left[\frac{(p+\Delta)}{2}\right]^2 - \left[\frac{(p-\Delta)}{2}\right]^2 = p\Delta$$

Benzer şekilde devam edilirse,

$$\begin{aligned}
r - s &= \Delta \\
r^2 - s^2 &= p\Delta \\
r^3 - s^3 &= (p^2 + q)\Delta \\
r^4 - s^4 &= (p^3 + 2pq)\Delta \\
r^5 - s^5 &= (p^4 + 3p^2q + q^2)\Delta \\
r^6 - s^6 &= (p^5 + 4p^3q + 3pq^2)\Delta \\
r^7 - s^7 &= (p^6 + 5p^4q + 6p^2q^2 + q^3)\Delta
\end{aligned}$$

elde edilir.

Daha genel olarak,

$$r^n - s^n = \Delta\sum_{0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\binom{n-i-1}{i}p^{n-2i}q^i \qquad (2.8)$$

yazılabilir.

$$B(n,i) = \binom{n-i-1}{i} \quad , \quad 0 \le i \le \left[\frac{(n-1)}{2}\right]$$

katsayıları, üçgensel bir sıra içinde düzenlenebilir. Bu, Tablo 2.2'de gösterilmiştir.

Tablo 2.2, birkaç önemli özelliği sağlar

1- $B(n,i)$ tekrarlı bağıntısı;

$$B(n,i) = B(n-1,i) + B(n-2,i-1)$$

olarak hesaplanabilir.

$$B(n-1,i) + B(n-2,i-1) = \binom{n-i-1}{i} + \binom{n-i-2}{i} = \binom{n-i-1}{i} = B(n,i)$$

2- $B(n,0) = 1$ den her satır 1 ile başlar.

3- Eğer n tek ise, n. satırın sonu 1'dir. Dolayısıyla,

$$B\left(n, \left[\frac{(n-1)}{2}\right]\right) = B\left(n, \frac{(n-1)}{2}\right) = \begin{pmatrix} \frac{(n-1)}{2} \\ \frac{(n-1)}{2} \end{pmatrix} = 1$$

dir.

4- Kabul edelim ki n tek olsun.

$$\left[\frac{(n-1)}{2}\right] = \frac{(n-1)}{2} = \left[\frac{n}{2}\right]$$

olduğundan; n. satır ve $n+1$. satır girdilerin aynı numaralarını kapsar.

5- Kabul edelim ki n çift olsun. n. satırın sonu $\frac{n}{2}$ ve $n+1$. satır n. satırdan bir fazla girdiyi kapsar.

6- $n \geq 5$ için, $B(n,3) = \binom{n-3}{i}$ sütun 2'deki üçgensel numaraları verir.

7- $B(n,4) = \binom{n-4}{i}$ sütun 3'teki tetrahedral numaraları verir.

Kabul edelim ki $p = 1 = q$ olsun. $r = \alpha, s = \beta$ ve $\Delta = \sqrt{5}$ ise denklem (2.8) F_n için birleşik formül verir.

$$F_n = \sum_{0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \binom{n-i-1}{i} \tag{2.9}$$

Bu formül yardımıyla Tablo (2.2)'deki n. satırın elemanlarının toplamı hesaplanabilir.

Tablo 2.2

$n \backslash i$	0	1	2	3	4	5	Satır Toplamı	
1	1						1	
2	1						1	
3	1	1					2	Pozitif Tamsayılar
4	1	2					3	
5	1	3	1				5	Üçgensel Numaralar
6	1	4	3				8	
7	1	5	6	1			13	Tetrahedral Numaralar
8	1	6	10	4			21	
9	1	7	15	10	1		34	
10	1	8	21	20	5		55	
							F_n	

2.4. F_n İçin Alternatif Bir Formül

Denklem 2.1 ve 2.8 'den

$$(2r)^n - (2s)^n = 2 \cdot \sum_{i\ tek} \binom{n}{i} p^{n-i} \Delta^i$$

$$2^n (r^n - s^n) = 2 \cdot \sum_{0}^{\left[\frac{(n-1)}{2}\right]} \binom{n}{2i+1} p^{n-2i-1} \Delta^{2i+1}$$

$$r^n - s^n = \frac{1}{2^{n-1}} \cdot \sum_{0}^{\left[\frac{(n-1)}{2}\right]} \binom{n}{2i+1} p^{n-2i-1} \Delta^{2i+1}$$

elde edilir. Özellikle, $p = 1 = q$ olsun. $\Delta = \sqrt{5}$ 'ten F_n için başka bir birleşik formül elde edilir:

$$F_n = \frac{1}{2^{n-1}} \cdot \sum_{0}^{\left[\frac{(n-1)}{2}\right]} \binom{n}{2i+1} \cdot 5^i \tag{2.10}$$

Örnek olarak,

$$\begin{aligned} F_6 &= \frac{1}{2^5} \cdot \sum_{0}^{2} \binom{6}{2i+1} \cdot 5^i \\ &= \frac{1}{2^5} \cdot \left[\binom{6}{1} + \binom{6}{3} \cdot 5 + \binom{6}{5} \cdot 5^2 \right] = \frac{1}{32} \cdot (6 + 100 + 150) = 8 \end{aligned}$$

verilebilir.

2.5. Lucas Üçgeni

$f_n(x, y) = (x + y)^{n-1} \cdot (x + 2y)$ polinomal genişlemesindeki katsayıları araştıralım. İlk altı açılım,

$$\begin{aligned} f_1(x,y) &= x + 2y \\ f_2(x,y) &= x^2 + 3xy + 2y^2 \\ f_3(x,y) &= x^3 + 4x^2y + 5xy^2 + 2y^3 \\ f_4(x,y) &= x^4 + 5x^3y + 9x^2y^2 + 7xy^3 + 2y^4 \\ f_5(x,y) &= x^5 + 6x^4y + 14x^3y^2 + 16x^2y^3 + 9xy^4 + 2y^5 \\ f_6(x,y) &= x^6 + 7x^5y + 20x^4y^2 + 30x^3y^3 + 25x^2y^4 + 11xy^5 + 2y^6 \end{aligned}$$

şeklindedir.

Bu açılımlar doğrulanabilir. Bu polinomların çeşitli katsayıları üçgensel bir düzen içinde yerleştirilebilir. Bu düzenleme ile şekil 2.1 elde edilir ve bu şekil Lucas üçgeni olarak adlandırılır. Her satır 1 ile başlar 2 ile biter.

$i \backslash j$	0	1	2	3	4	5	6
1	1	2					
2	1	3	2				
3	1	4 →	5 ↓	2			
4	1	5	9	7	2		
5	1	6	14	16	9	2	
6	1	7	20	30	25	11	2

Şekil: 2.1. Lucas Üçgeni

$f_n(1,1) = 3.2^{n-1}$'den, $n \geq 1$ için $n.$ satırdaki sayıların toplamı 3.2^{n-1}'dir.

$C(n,j), n \geq 1$ ve $j \geq 0$ için $n.$ satır ve $j.$ sütundaki girdiyi belirtsin. $C(n,j)$ için aşağıdaki gibi açık bir formül bulunabilir.

$$(x+y)^{i-1} = \sum_{0}^{i-1} \binom{i-1}{j} x^{i-j-1} y^j$$

$$\begin{aligned} f_i(x,y) &= (x+y)^{i-1}(x+2y) \\ &= \left[\sum_{0}^{i-1} \binom{i-1}{j} x^{i-j-1} y^j \right] \cdot (x+2y) \end{aligned}$$

Paskal özdeşliğinden; $C(n,j) = x^{n-j}y^j$'nin katsayısı

$$\begin{aligned} &= \binom{n-1}{j} + 2\binom{n-1}{j-1} \\ &= \binom{n}{j} + \binom{n-1}{j-1} \end{aligned} \qquad (2.11)$$

elde edilir. Örnek olarak;

$$C(6,3) = \binom{6}{3} + \binom{5}{2} = 20 + 10 = 30$$

dur.

Şekil 2.1'deki üçgensel düzen üç ilave özellik sağlar:

- $\sum_{k=1}^{n} C(k,j) = C(n+1, j+1)$

- $\sum_{k=1}^{n} C(k,1) = C(n+1,2)$

- $C(n,n-2) = (n-1)^2 \quad , \quad n \geq 2$

2.6. $C(n,j)$ İçin Tekrarlı Bir Tanım

Formül 2.11 kullanılarak, $C(n,j)$'nin aşağıdaki tekrarlı tanımı sağladığı kolayca doğrulanabilir:

$$C(n,0) = 1 \quad , \quad C(1,1) = 2$$
$$C(n,j) = C(n-1, j-1) + C(n-1, j) \quad , \quad (n, j \geq 1)$$

Bu tekrarlı bağıntı Paskal özdeşliğine benzer. Yani; $C(n,j)$, tam yukarısındaki $C(n-1,j)$ ve solundaki $C(n-1,j-1)$ elemanlarının toplamı ile elde edilir. $C(n,n) = 1$ olduğuna dikkat etmek gerekir.

Örnek olarak

$$C(4,2) = 14 = 5 + 9 = C(3,1) + C(3,2)$$

verilebilir.

Paskal üçgeninin n. ve $n-1$. satırlarından her $C(n,j)$ terimi elde edilebilir. $n-1$. satırın elemanları bir basamak sağa kaydırılır ve n. satırın elemanları ile alt alta yazılarak toplanır. Bu da n. satırın $C(n,j)$ elemanları verir. Bu algoritma $n = 4$ aşağıda örneklenmiştir.

Paskal üçgeninin 3. satırı $\longrightarrow$		1	3	3	1	
Paskal üçgeninin 4. satırı $\longrightarrow$	+1	4	6	4	1	
Şekil 2.1'in 4. satırı $\longrightarrow$	1	5	9	7	1	

Şekil 2.1'in köşegenleri üzerindeki elemanları topladığımızı farz edelim.

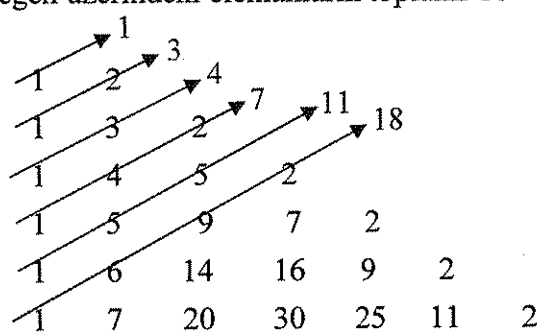
Şekil 2.2'den toplamların Lucas sayıları olduğu görülür. Bu sonuç rastlantı değildir.

Bunun doğruluğu için; n. köşegen üzerindeki elemanların toplamı

$$\begin{aligned}\sum_{0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} C(n-j,j) &= \sum_{0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\binom{n-j}{j} + \sum_{0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\binom{n-j-1}{j-1} \\ &= \sum_{0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\binom{n-j}{j} + \sum_{0}^{\left[\frac{(n-2)}{2}\right]}\binom{n-j-2}{j} \\ &= F_{n+1} + F_{n-1} \\ &= L_n\end{aligned}$$

ile verilir.

Örnek olarak 6. köşegen üzerindeki elemanların toplamı $18 = L_6$ 'dır.



Lucas sayıları

Şekil 2.1 deki Lucas üçgenini sağa doğru dikey olarak döndürülürse ve elemanları metnin sol kenarına kaydırılırsa, aşağıdaki şekil elde edilir.

$n \backslash j$	0	1	2	3	4	5	6
1	2	1					
2	2	3	1				
3	2	5	4	1			
4	2	7	9	5	1		
5	2	9	16	14	6	1	
6	2	11	25	30	20	7	1

Şekil 2. 2 Lucas Üçgeninin bir yansıması

$D(n, j)$, bu sıralanışta n. satır ve j. sütunun kesişimindeki elemanı göstersin.

$$D(1,0) = 2 \quad , \quad D(1,1) = 1$$

ve

$$D(n,j)=D(n-1,j-1)+D(n-1,j) \quad , \quad n\geq 2$$

dir.

Bu $C(n,j)$ ile hesaplanan tekrarlı Fibonacci bağıntısına benzer. Şekil 2.3 Lucas üçgeninin bir yansıması olduğundan;

$$\begin{aligned} D(n,j)=C(n,n-j) &= \binom{n}{n-j}+\binom{n-1}{n-j-1} \\ &= \binom{n}{j}+\binom{n-1}{j} \end{aligned}$$

dir.

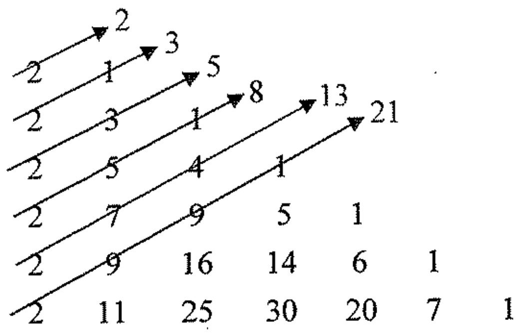
Dolayısıyla, şekil 2.3 'ün her satırını Paskal üçgeninin $n.$ ve $n-1.$ satırlarını (her ikisi de sola hizalı) toplayarak elde edilebilir. Algoritmanın ispatı aşağıdaki gibidir.

Paskal üçgeninin 3. satırı $\longrightarrow$		1	3	3	1	
Paskal üçgeninin 4. satırı $\longrightarrow$	+	1	4	6	4	1
Şekil 2.3'ün 4. satırı $\longrightarrow$		2	7	9	5	1

Şekil 2.3'teki düzen çok ilginç bir özellik sağlar. Her köşegen üzerindekielemanlar toplanırsa, her toplamın Fibonacci sayısı olduğu görülür. Bu aşikârdır çünkü,

$$\begin{aligned} \sum_{0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} D(n-j,j) &= \sum_{0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}\binom{n-j}{j}+\sum_{0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}\binom{n-j-1}{j} \\ &= F_{n+1}+F_{n} \\ &= F_{n+2} \end{aligned}$$

dir.



Şekil 2. 3 Fibonacci sayıları

Şekil 2.3'teki düzen, üç ilave özellik sağlar:

1- $\sum_{k=1}^{n} D(k,j) = D(n+1, j+1)$

2- $D(n,2) = (n-1)^2 \quad , \quad n \geq 2$

3- $\sum_{k=1}^{n} D(k,1) = n^2$

Öyle bir halka kuralım ki, j. elemanlar ile Lucas üçgeninin j. sütununu aşağıya kaydıralım. Şekil 2.5'teki sıralama sonucu göstermektedir. $E(n,j)$ bu sıralamanın n. satır ve j. sütunundaki elemanı göstersin.

$$0 \leq j \leq \left[\frac{n}{2}\right] \text{ iken; } E(n,j) = A(n-j,j)$$

$$E(n,j);$$
$$E(n,j) = E(n-1,j) + E(n-2,j-1)$$

tekrarlı bağıntısını sağlar.

2.7. Lucas Sayılarının Kuvvetleri

1970 yılında Harlan L. Umansky, Lucas sayılarının kuvvetleri için aşağıdaki formülleri geliştirmiştir.

$$L_n^1 = L_n$$
$$L_n^2 = L_{2n} + 2.(-1)^n$$
$$L_n^3 = L_{3n} + 3.(-1)^n L_n$$
$$L_n^4 = L_{4n} + 4.(-1)^n L_n^2 - 2$$
$$L_n^5 = L_{5n} + 5.(-1)^n L_n^3 - 5L_n$$
$$L_n^6 = L_{6n} + 6.(-1)^n L_n^4 - 9L_n^2 + 2.(-1)^n$$
$$L_n^7 = L_{7n} + 7.(-1)^n L_n^5 - 14L_n^3 + 7.(-1)^n L_n$$
$$L_n^8 = L_{8n} + 8.(-1)^n L_n^6 - 20L_n^4 + 16.(-1)^n L_n^2 - 2$$

Birkaç ay sonra Hoggat, çeşitli Lucas sayılarının katsayılarının tam değerlerinin ve onların kuvvetlerinin, Şekil 2.5'teki üçgensel sıralamadaki girdiler ile aynı olduğunu göstermiştir.

Teorem 2.1.(Hoggat,1970)

$$L_n^m = L_{mn} + \sum_{j=1}^{\left[\frac{m}{2}\right]} E(m,j)\cdot(-1)^{nj+j-1}\cdot L_n^{m-2j}$$

dir.

İspat. Matematiksel tümevarımdan formül;

$m=1$ olduğunda toplam sıfır olduğundan kolayca doğrudur. Kabul edelim ki $k \le m$ iken, bütün $k>0$ tamsayıları için doğru olsun:

$$L_n^k = L_{kn} + \sum_{j=1}^{\left[\frac{k}{2}\right]} E(k,j)\cdot(-1)^{nj+j-1} L_n^{k-2j}$$

Buradan

$$L_n^{m+1} = L_n \cdot L_{mn} + \sum_{j=1}^{\left[\frac{m}{2}\right]} E(m,j)\cdot(-1)^{nj+j-1} L_n^{m-2j+1}$$

dir. Fakat

$$L_n \cdot L_{mn} = L_{(m+1)n} + (-1)^n L_{(m-1)n}$$

yani,

$$L_n^{m+1} = L_{(m+1)n} + (-1)^n L_{(m-1)n} + \sum_{j=1}^{\left[\frac{m}{2}\right]} E(m,j)\cdot(-1)^{nj+j-1} L_n^{m-2j+1} \tag{2.12}$$

dir.

Tümevarımdan dolayı,

$$L_{(m-1)n} = L_n^{m-1} - \sum_{j=1}^{\left[\frac{(m-1)}{2}\right]} E(m-1,j)\cdot(-1)^{nj+j-1} L_n^{m-2j-1}$$

$$(-1)^n L_{(m-1)n} = (-1)^n L_n^{m-1} - \sum_{j=1}^{\left[\frac{(m-1}{2}\right]} E(m-1,j)\cdot(-1)^{n\cdot(j+1)+(j+1)-1} L_n^{m-2j-1}$$

$j+1=r$ olsun. Buradan

$$(-1)^n L_{(m-1)n} = (-1)^n L_n^{m-1} - \sum_{j=1}^{\left[\frac{(m-1}{2}\right]} E(m-1,r-1)\cdot(-1)^{n\cdot r+r-1} L_n^{m-2r+1}$$

olur. Sonra denklem (2.12)'den,

$$L_n^{m+1} = L_{(m+1)n} + (-1)^n L_n^{m-1} + \sum_{r=2n}^{\left[\frac{(m+1)}{2}\right]} E(m-1,r-1)\cdot(-1)^{nr+r-1} L_n^{m-2r+1}$$

$$+\sum_{r=2}^{\left[\frac{m}{2}\right]} E(m,r)\cdot(-1)^{nr+r-1} L_n^{m-2r+1} \tag{2.13}$$

olur.

j	0	1	2	3	4	5	6
1	1						
2	1	2					
3	1	3					
4	1	4	2				
5	1	5	5				
6	1	6	9	2			
7	1	7	14	7			
8	1	8	20	16	2		

$m = 2t$ olduğunu varsayalım.

$$\left[\frac{m}{2}\right] = \left[\frac{(m+1)}{2}\right] \quad , \quad E(2t,t) = 2$$

$$E(2t-1,t-1) = 2t-1$$

$$E(2t+1,t+1) = 2t+1$$

olur.

Diğer bir yolla, $m = 2t+1$ olsun.

$$\left[\frac{m}{2}\right] + 1 = \left[\frac{(m+1)}{2}\right] = t+1$$

$E(2t+1,t+1 = 0$ ve $E(2t,t) = 2$;

Buradan; $E(2t+2,t+1) = 2$ olur.

Denklem 2.13'ten;

$$L_n^{m+1} = L_{(m+1)n} + \sum_{r=1}^{\left[\frac{(m+1)}{2}\right]} E(m+1,r)\cdot(-1)^{nr+r-1} L_n^{m-2r+1}$$

olur. Dolayısıyla, tümevarımdan formül her $n \geq 1$ için tutarlıdır.

BÖLÜM 3. FİBONACCİ MATRİSLERİ

Matrislere başvurulursa, Fibonacci ve Lucas teorileri mükemmel bölünenler verir.

3.1. Q Matrisi

Matrislerin özelliklerini kullanarak, Fibonacci sayıları ve matrisler arasında kapalı bir halka olduğu kanıtlanabilir.

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

matrisi dikkate alınsın.

Bu matris Q matrisi olarak adlandırılır. $|Q| = -1$ olduğuna dikkat ediniz.

Ayrıca,

$$Q^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad , Q^3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

dır. Benzer şekilde;

$$Q^4 = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

dir.

Buradan bir modelin meydana çıktığı görülebilir. Daha genel olarak aşağıdaki ilgi çekici sonuç elde edilir.

Teorem 3.1. $n \geq 1$ olsun. Bu durumda

$$Q^n = \begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix}$$

dir.

İspat. Tümevarım yardımıyla doğruluğu görülebilir.

$n=1$ için;

$$Q^1=\begin{bmatrix} F_2 & F_1 \\ F_1 & F_0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}=Q$$

sonuç doğrudur. Şimdi, keyfi k pozitif tamsayısı için doğru olduğunu kabul edelim.

$$Q^k=\begin{bmatrix} F_{k+1} & F_k \\ F_k & F_{k-1} \end{bmatrix}$$

Buradan

$$Q^{k+1}=Q^k\cdot Q^1=\begin{bmatrix} F_{k+1} & F_k \\ F_k & F_{k-1} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} F_{k+1}+F_k & F_{k+1} \\ F_k+F_{k-1} & F_k \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} F_{k+2} & F_{k+1} \\ F_{k+1} & F_k \end{bmatrix}$$

elde edilir.

3.2. Cassini'nin Düzenlenmiş Formülü

Teorem 3.1, Cassini formülünün değişik bir ispatını sağlar.

Sonuç 3.1. $n\geq 1$ olsun. Bu durumda,

$$F_{n-1}F_{n+1}-F_n^2=(-1)^n$$

dir.

İspat. $|Q|=-1$'dir. O halde, $|Q^n|=(-1)^n$ dir. Fakat Teorem 3.1'den;

$$|Q^n|=F_{n+1}F_{n-1}-F_n^2$$

dir. Buradan,

$$F_{n+1}F_{n-1}-F_n^2=(-1)^n$$

dir.

Örnek olarak,

$$Q^4 = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \left|Q^4\right| = 2\cdot 5 - 3\cdot 3 = F_3F_5 - F_4^2 = 1 = (-1)^4$$

verilebilir.

Sonuç 3.2.

$$F_{m+n+1} = F_{m+1}F_{n+1} + F_mF_n \qquad (3.1)$$

$$F_{m+n} = F_{m+1}F_n + F_mF_{n-1} \qquad (3.2)$$
$$F_{m+n} = F_mF_{n+1} + F_{m-1}F_n \qquad (3.3)$$
$$F_{m+n-1} = F_mF_n + F_{m-1}F_{n-1} \qquad (3.4)$$

dir.

İspat. $Q^m \cdot Q^n = Q^{m+n}$'den;

$$\begin{bmatrix} F_{m+1} & F_m \\ F_m & F_{m-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{m+n+1} & F_{m+n} \\ F_{m+n} & F_{m+n-1} \end{bmatrix}$$

elde edilir. Şöyle ki;

$$\begin{bmatrix} F_{m+1}F_{n+1} + F_mF_n & F_{m+1}F_n + F_mF_{n-1} \\ F_mF_{n+1} + F_{m-1}F_n & F_mF_n + F_{m-1}F_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{m+n+1} & F_{m+n} \\ F_{m+n} & F_{m+n-1} \end{bmatrix}$$

olur. Özellikle $m = n$ olsun. Bu durumda 3.1 özdeşliği;

$$F_{n+1}^2 + F_n^2 = F_{2n+1}$$

formülünü verir.

3.2 özdeşliği,($F_{m+n} = F_{m+1}F_n + F_mF_{n-1}$)

$$F_{2n} = F_{n+1}F_n + F_nF_{n-1} = F_n(F_{n+1} + F_{n-1})$$

yardımıyla,

$$F_{2n} = F_nL_n$$

formülünü verir.

Sonuç 3.3. $F_{m+1}L_n + F_mL_{n-1} = L_{m+n}$ 'dir. (3.5)

İspat. 3.1 özdeşliğinde n yerine $n+1$ yazılıp 3.2 özdeşliği ile toplanırsa,

$$
\begin{array}{rl}
 & F_{m+1}F_{n+2} + F_mF_{n+1} = F_{m+n+2} \\
+ & F_{m+1}F_n \quad + F_mF_{n-1} = F_{m+n} \\
\hline
\end{array}
$$

$$F_{m+1}(F_{n+2} + F_n) + F_m(F_{n+1} + F_{n-1}) = F_{m+n+2} + F_{m+n}$$
$$F_{m+1}L_{n+1} + F_mL_n = L_{m+n+1}$$

elde edilir. Burada n yerine $n-1$ yazılırsa,

$$L_{m+n} = F_{m+1} \cdot L_n + F_m \cdot L_{n-1}$$

elde edilir.

Fibonacci ve Lucas sayılarının her ikisinin de halkalardan sağlandığını göstermek için 3.2 ve 3.3 özdeşlikleri kullanılabilir. Bunu göstermek için her iki özdeşlik toplanırsa,

$$F_m(F_{n-1} + F_{n+1}) + F_n(F_{m-1} + F_{m+1}) = 2F_{m+n}$$

olur. Buradan,

$$F_mL_n + F_nL_m = 2F_{m+n}$$

olur.

L_{m+n} için benzer bir formül,

$$2L_{m+n} = L_mL_n + 5F_mF_n$$

dir.

Sonuç 3.4.

$$2F_{m+n} = F_mL_n + F_nL_m \qquad (3.6)$$

$$2L_{m+n} = L_mL_n + 5F_mF_n \qquad (3.7)$$

3.3. m Matrisi

Q matrisinin yerine, ona çok benzeyen M matrisini dikkate alalım.

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

matrisi M matrisi olarak adlandırılır. Matematiksel tümevarımdan; her $n \geq 1$ için

$$M^n = \begin{bmatrix} F_{2n-1} & F_{2n} \\ F_{2n} & F_{2n+1} \end{bmatrix}$$

olduğu gösterilebilir.

İspat. $n = 1$ için;

$$M^1 = \begin{bmatrix} F_1 & F_2 \\ F_2 & F_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = M$$

dir.

Şimdi, $k \geq 0$ keyfi tamsayısı için doğru olduğunu kabul edelim:

$$M^k = \begin{bmatrix} F_{2k-1} & F_{2k} \\ F_{2k} & F_{2k+1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} M^{k+1} = M^k \cdot M^1 &= \begin{bmatrix} F_{2k-1} & F_{2k} \\ F_{2k} & F_{2k+1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_1 & F_2 \\ F_2 & F_3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} F_{2k-1}F_1 + F_{2k}F_2 & F_{2k-1}F_2 + F_{2k}F_3 \\ F_{2k}F_1 + F_{2k+1}F_2 & F_{2k}F_2 + F_{2k+1}F_3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} F_{2k+1} & F_{2k+2} \\ F_{2k+2} & F_{2k+3} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Bu durumda,

$$\frac{M^n}{F_{2n-1}} = \begin{bmatrix} 1 & \dfrac{F_{2n}}{F_{2n-1}} \\ \dfrac{F_{2n}}{F_{2n-1}} & \dfrac{F_{2n+1}}{F_{2n-1}} \end{bmatrix}$$

$$\lim_{k\to\infty}\frac{F_k}{F_{k-1}}=\alpha \text{ denilirse}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{M^n}{F_{2n-1}}=\begin{bmatrix}1 & \alpha\\ \alpha & \alpha^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & \alpha\\ \alpha & 1+\alpha\end{bmatrix}$$

olur.

$\left\{\dfrac{M^n}{F_{2n-1}}\right\}$ Fibonacci matrislerinin dizisi, $\begin{bmatrix}1 & \alpha\\ \alpha & 1+\alpha\end{bmatrix}$ matrisine yakınsar.

Benzer şekilde $\left\{\dfrac{Q^n}{F_{2n-1}}\right\}$ dizisi; $\begin{bmatrix}1+\alpha & \alpha\\ \alpha & 1\end{bmatrix}$ matrisine yakınsar.

3.4. Karakteristik Denklem

$A=(a_{ij})_{n\times n}$ ve I 'da $n\times n$ tipinde birim matris olsun.

$|A-xI|=0$ denklemine A matrisinin karakteristik denklemi denir. Bu denklemin köklerine A matrisinin karakteristik kökleri denir.

Q^n matrisinin karakteristik köklerinin determinantından, onun karakteristik denklemini araştıralım:

$$\begin{aligned}|Q^n-xI| &= \begin{vmatrix}F_{n+1}-x & F_n\\ F_n & F_{n-1}-x\end{vmatrix}\\ &=(F_{n+1}-x)\cdot(F_{n-1}-x)-F_n^2\\ &=x^2-(F_{n+1}+F_{n-1})x+F_{n-1}F_{n+1}-F_n^2\\ &=x^2-L_nx+(-1)^n\end{aligned}$$

Bu karakteristik denklem

$$x^2-L_nx+(-1)^n=0 \qquad (3.8)$$

şeklindedir.

Quadratik formülü kullanarak, karakteristik köklere ulaşılabilir:

$$x=\frac{L_n\mp\sqrt{L_n^2-4\cdot(-1)^n}}{2}$$

Fakat , $L_n^2 - 4\cdot(-1)^n = 5F_n^2$ 'dir.

O halde

$$x = \frac{L_n \mp \sqrt{5}F_n}{2}$$

olur.

$$\alpha^n - \beta^n = \sqrt{5}F_n \text{ ve } \alpha^n + \beta^n = L_n \text{ olduğundan,}$$

$$\alpha^n = \frac{L_n + \sqrt{5}F_n}{2} \text{ ve } \beta^n = \frac{L_n - \sqrt{5}F_n}{2}$$

elde edilir.

Teorem 3.2. Q^n ' nin karakteristik kökleri α^n ve β^n 'dir.

Sonuç 3.5. Q ' nun karakteristik kökleri α ve β 'dır.

$n=1$ olduğunda $x^2 - x - 1 = 0$, Q ' nun karakteristik kökleri olur. Meşhur Cayley Hamilton teoremine göre, her karesel matris kendi karakteristik denklemini sağlar. O halde,

$$Q^2 - Q - I = 0$$

yazılabilir.

3. 5. R Matrisi

Q matrisinin benzeri olan R matrisini inceleyelim:

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$L_{n+1} = F_{n+1} + 2F_n \quad , \quad L_n = 2F_{n+1} - F_n$$
$$5F_{n+1} = L_{n+1} + 2L_n \quad , \quad 5F_n = 2L_{n+1} - L_n$$

formülleri kullanılarak,

$$R\cdot Q^n=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & -1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}F_{n+1} & F_n\\ F_n & F_{n-1}\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}F_{n+1}+2F_n & F_n+2F_{n-1}\\ 2F_{n+1}-F_n & 2F_n-F_{n-1}\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}L_{n+1} & L_n\\ L_n & L_{n-1}\end{bmatrix}$$

Her iki tarafın determinantı alınırsa,

$$\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & -1\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}F_{n+1} & F_n\\ F_n & F_{n-1}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}L_{n+1} & L_n\\ L_n & L_{n-1}\end{vmatrix}$$

elde edilir. Buradan

$$L_{n+1}L_{n-1}-L_n^2=(-5)\cdot(F_{n+1}F_{n-1}-F_n^2)=5\cdot(-1)^{n+1}$$

elde edilir.

O halde,

$$L_{n+1}L_{n-1}-L_n^2=5\cdot(-1)^{n+1} \qquad (3.9)$$

dir.

3. 6. Cassini Formülü Ve Cramer Kuralı

Bu kısımda; 2×2'lik lineer sistemler için Cramer kuralı kullanılarak Cassini formülünün nasıl elde edileceği gösterilecektir:

$$\begin{aligned}ax+by&=e\\ cx+dy&=f\end{aligned}$$

2×2'lik lineer sistemin bir tek çözümü vardır ancak ve ancak $ad-bc\neq 0$'dır. Bu çözüm

$$x=\frac{\begin{vmatrix}e & b\\ f & d\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}}\quad,\quad y=\frac{\begin{vmatrix}a & e\\ c & f\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}}$$

ile verilir.

Özellikle;

$$F_n x + F_{n-1} y = F_{n+1}$$
$$F_{n+1} x + F_n y = F_{n+2}$$

sistemi göz önüne alınsın.

Fibonacci tekrarlı bağıntısı nedeniyle $(F_k, F_{k+1}) = 1$'den, $x = y = 1$ bu sistemin tek çözümüdür. Cramer kuralından,

$$y = \frac{\begin{vmatrix} F_n & F_{n+1} \\ F_{n+1} & F_{n+2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_n & F_{n-1} \\ F_{n+1} & F_n \end{vmatrix}} = 1$$

dir. Buradan

$$F_n F_{n+2} - F_{n+1}^2 = F_n^2 - F_{n-1} F_{n+1}$$

ya da

$$F_n F_{n+2} - F_{n+1}^2 = -(F_{n-1} F_{n+1} - F_n^2)$$

dir.

$p_n = F_{n-1} F_{n+1} - F_n^2$ olsun. Bu denklem, $p_n = -p_{n-1}$ tekrarlı bağıntısını verir.

Bu tekrarlı bağıntıdan; $p_n = (-1)^n$ elde edilir. Buradan

$$F_{n-1} F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n \quad , \quad n \geq 1$$

elde edilir.

Şimdi, komşu Fibonacci ve Lucas sayıları tarafından biçimlendirilen vektörlere dönelim.

3.7. Fibonacci ve Lucas Vektörleri

$U_n = (F_{n+1}, F_n)$ ve $V_n = (L_{n+1}, L_n)$ vektörleri göz önüne alınsın.

Bu vektörlerin boyları;

$$|U_n| = F_{n+1}^2 + F_n^2 = F_{2n+1}$$

ve

$$\begin{aligned}|V_n| &= L_{n+1}^2 + L_n^2 \\ &= \left[5F_{n+1}^2 + 4\cdot(-1)^{n+1}\right] + \left[5F_n^2 + 4\cdot(-1)^n\right] \\ &= 5\cdot(F_n^2 + F_{n+1}^2) \\ &= 5F_{2n+1}\end{aligned}$$

ile verilir. Bu vektörlerin yönleri ise,

$$\tan\theta = \frac{F_n}{F_{n+1}} \text{ ve } \tan\theta' = \frac{L_n}{L_{n+1}}$$

ile verilir. Daha sonra,

$$\frac{F_n}{F_{n+1}} \cong \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{1}{\alpha} \text{ ve } \frac{L_n}{L_{n+1}} \cong \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{1}{\alpha}$$

olduğu gösterilecektir.

$$U_0 Q^{n+1} = (1,0)\begin{bmatrix} F_{n+2} & F_{n+1} \\ F_{n+1} & F_n \end{bmatrix} = (F_{n+2}, F_{n+1}) = U_{n+1} = U_n Q$$

olduğuna dikkat ediniz.

Benzer şekilde,

$$V_0 Q^{n+1} = V_{n+1} = V_n Q$$

dur.

Ayrıca 3.1 ve 3.2 özdeşlikleri kullanılarak;

$$\begin{aligned}U_m Q^n &= (F_{m+1}, F_m)\cdot\begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} F_{m+1}F_{n+1} + F_m F_n \\ F_{m+1}F_n + F_m F_{n-1} \end{bmatrix} = (F_{m+n+1}, F_{m+n}) \\ &= U_{m+n+1}\end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde,

$$V_m Q^n = V_{m+n+1}$$

dir. Şimdi R matrisine geri dönülsün.

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$|R| = -5 \neq 0$ olduğuna dikkat ediniz. Böylece R tersinirdir ve

$$R^{-1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

dir.

$$\begin{aligned} V_n R &= (L_{n+1}, L_n)\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \\ &= (L_{n+1} + 2L_n, 2L_{n+1} - L_n) \\ &= (5F_{n+1}, 5F_n) \\ &= 5U_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_n &= (5U_n)R^{-1} = 5(U_n R^{-1}) \\ &= 5 \cdot \frac{1}{5}(F_{n+1}, F_n)\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \\ &= (F_{n+1} + 2F_n, 2F_{n+1} - F_n) = (L_{n+1}, L_n) \end{aligned}$$

Benzer şekilde,

$$U_n R = V_n \text{ ve } U_n = R^{-1} V_n$$

dir.

R' nin sıfırdan farklı herhangi bir $U = (x, y)$ vektörü üzerindeki etkisi nedir? Bunu belirlemek için şunu inceleyelim:

$$\begin{aligned} UR &= (x, y)\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = (x + 2y, 2x - y) \\ |UR|^2 &= (x + 2y)^2 + (2x - y)^2 \\ &= 5(x^2 + y^2) \\ &= 5|U|^2 \end{aligned}$$

Buradan, R Fibonacci matrisi, sıfırdan farklı her vektörü $\sqrt{5}$' in bir çarpanı kadar büyütür. R' nin U vektörünün eğimi üzerindeki etkisini bulmak için, U ve UR vektörlerinin x ekseni ile yaptığı dar açıların sırasıyla θ ve θ' olduğu düşünülsün:

$$\tan\theta = \frac{y}{x} \text{ ve } \tan\theta' = \frac{2x-y}{x+2y}$$

$$\begin{aligned}
\tan(\theta+\theta') &= \frac{\tan\theta+\tan\theta'}{1-\tan\theta\tan\theta'} \\
&= \frac{\dfrac{(y)}{(x)}+\dfrac{(2x-y)}{(x+2y)}}{1-\dfrac{(y)}{(x)}\cdot\dfrac{(2x-y)}{(x+2y)}} = \frac{y(x+2y)+x(2x-y)}{x(x+2y)-y(2x-y)} \\
&= \frac{2(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = 2
\end{aligned}$$

U ve UR vektörleri arasındaki açı 2γ olsun. O zaman,

$$\theta+\lambda = \theta'-\gamma$$

olur. Böylece,

$$2\gamma = \theta+\theta'$$

elde edilir.

$\tan 2\gamma = \dfrac{2\tan\gamma}{1-\tan^2\gamma}$ formülünden; $\dfrac{2\tan\gamma}{1-\tan^2\gamma} = 2$ elde edilir.

Buradan,

$$\tan^2\gamma+\tan\gamma-1=0$$

olur.

$$\tan\gamma = \frac{-1\mp\sqrt{5}}{2}$$

dir. Dolayısıyla,

$2\gamma = \tan^{-1} 2 \cong 63{,}43^\circ$ ise $\gamma \cong 31{,}7175^\circ$

dir. Böylece,

$$\tan\gamma = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = -\beta$$

dır.

Teorem 3. 3. (Hoggat ve Ruggles) R matrisi, sıfırdan farklı bir $U=(x,y)$ vektörünü, $|UR| = \sqrt{5}|U|$ olan UR vektörüne dönüştürür ve $(\alpha x, x)$ biçimindeki vektör ile $-\beta$ eğimi arasındaki açıyı iki eşit parçaya böler.

Sonuç 3. 6. R matrisi, U_n vektörünü V_n vektörüne, V_n vektörünü $\sqrt{5}U_n$ vektörüne dönüştürür.

3. 8. İlgi Çekici Bir Fibonacci Matrisi

$\sum_{\substack{i,j,k>0 \\ i+j+k=m}} F_i F_j F_k$ toplamı belirlensin.

Çözüm; aşağıdaki sonsuz boyutlu Fibonacci matrisini sağlar:

$$H = \begin{bmatrix} H_{0,n} \\ H_{1,n} \\ \vdots \\ H_{m,n} \\ \vdots \end{bmatrix}$$

Her bir $h_{i,j}$ elemanı aşağıdaki gibi tanımlansın:

$h_{0,j} = 0$ eğer $j \geq 0$ ise;

$h_{j,j} = 1$ eğer $j \geq 1$ ise;

$h_{i,j} = 0$ eğer $i > j$ ise;

$$h_{i,j} = h_{i,j-2} + h_{i,j-1} + h_{i-1,j-1} \quad \text{eğer } i \geq 1 \text{ ve } j \geq 2 \text{ ise} \tag{3.10}$$

Örnek olarak,

$$\begin{aligned} h_{2,5} &= h_{2,3} + h_{2,4} + h_{1,4} \\ &= (h_{2,1} + h_{2,2} + h_{1,2}) + (h_{2,2} + h_{2,3} + h_{1,3}) + F_4 \\ &= (0 + 1 + F_2) + [1 + (h_{2,1} + h_{2,2} + h_{1,2}) + F_3] + F_4 \end{aligned}$$

(3.10) tekrarlı bağıntısından

$$\begin{aligned} h_{1,j} &= h_{1,j-2} + h_{1,j-1} + h_{0,j-1} \\ &= h_{1,j-2} + h_{1,j-1} \end{aligned} \quad , \qquad h_{1,0} = 0 \quad , \quad h_{1,1} = 1$$

dir. Dolayısıyla; $h_{1,n} = F_n$ elde edilir. Böylece;

$$h_{2,5} = 2 + [1 + (0 + 1 + F_2) + 2] + 3 = 10$$

elde edilir.

Her $j > 0$ için $h_{0,j} = 0$ koşulu; H matrisinin en üst satırının sıfırlardan oluştuğunu belirtir. $h_{i,i} = 1$' in anlamı; ana köşegen üzerindeki her elemanın 1 olmasıdır. $i > j$ için $h_{i,j} = 0$' ın anlamı; H matrisi üst üçgensel matristir öyle ki, ana köşegenin altındaki her eleman sıfırdır.

(3.10) tekrarlı bağıntısı, her $h_{i,j}$ elemanının, aynı satırdaki $h_{i,j-1}$ ve iki önceki $h_{i,j-2}$ elemanı ve $h_{i,j-1}$'in tam yukarısındaki $h_{i-1,j-1}$ elemanlarının $(i \geq 1, j \geq 2)$ toplamından elde edildiğini belirtir.

Bu apaçık ileri sürülen bilgileri kullanarak, H 'nin çeşitli elemanları belirlenebilir

$$
H = \begin{array}{c|ccccccccccc}
i \backslash j & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & \cdots & \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 3 & 5 & 8 & 13 & 21 & 34 & 55 \quad \leftarrow F_n \\
2 & 0 & 0 & 1 & 2 & 5 & 10 & 20 & 38 & 71 & 130 & 235 \\
3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 9 & 22 & 51 & 111 & 233 & 474 \\
4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 14 & 40 & 105 & 255 & 593 \\
5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 15 & 56 & 176 & 487 & 918 \\
 & & & & & & & \vdots & & & &
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
h_{3,6} &= h_{3,5} + h_{3,4} + h_{2,5} \\
&= 9 + 3 + 10 = 22
\end{aligned}
$$

olduğuna dikkat ediniz. Ayrıca,

$$
\begin{aligned}
h_{2,7} &= 38 \\
&= 1\cdot 8 + 1\cdot 5 + 2\cdot 3 + 3\cdot 2 + 5\cdot 1 + 8\cdot 1 \\
&= F_1 h_{1,6} + F_2 h_{1,5} + F_3 h_{1,4} + F_4 h_{1,3} + F_5 h_{1,2} + F_6 h_{1,1} \\
&= \sum_{j=1}^{7} F_j h_{1,7-j} = \sum_{j=1}^{7} F_j F_{7-j} \\
&= \sum_{\substack{j,k\geq 1 \\ j+k=7}} F_j F_k
\end{aligned}
$$

dır.Daha genel olarak aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.4.

$$
h_{2,n} = \sum_{\substack{j,k\geq 1 \\ j+k=n}} F_j F_k
$$

dır.

İspat. Tümevarımdan, $n = 1$ için;

sol taraf$= h_{2,1} = 0$

sağ taraf$= \sum_{\substack{j,k\geq 1 \\ j+k=1}} F_j F_k = 0$

O halde $n=1$ için doğrudur.

Kabul edelim ki, $m \geq 2$ olmak üzere m'den küçük bütün pozitif tamsayılar için doğru olsun:

$$h_{2,m} = \sum_{\substack{j,k\geq 1 \\ j+k=m}} F_j F_k$$

Buradan

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{j,k\geq 1 \\ j+k=m+1}} F_j F_k &= \sum_{j=1}^{m} F_j F_{m+1-j} \\
&= \sum_{j=1}^{m} F_j (F_{m-j} + F_{m-j-1}) \\
&= \sum_{j=1}^{m} F_j F_{m-j} + \sum_{j=1}^{m} F_j F_{m-j-1} \\
&= \sum_{j=1}^{m} F_j F_{m-j} + \sum_{j=1}^{m-1} F_j F_{m-1-j} + F_m F_{-1} \\
&= h_{2,m} + h_{2,m-1} + F_m \\
&= h_{2,m} + h_{2,m-1} + h_{1,m} \\
&= h_{2,m+1}
\end{aligned}$$

elde edilir.

$h_{1,k} = F_k$' dan,bu teorem aşağıdaki sonucu verir.

Sonuç 3.7.

$$h_{2,n} = \sum_{i=1}^{n} F_i h_{1,n-i}$$

dir.

Her $h_{2,n}$ elemanı; $h_{1,n-1}, h_{1,n-2}, \ldots, h_{1,1}$ elemanları ile $F_1, F_2, \ldots, F_{n-1}$ sayılarının sırasıyla çarpılıp, toplanmasından elde edilebilir($h_{1,0}=0$ olduğunu hatırlayın). Bu sonuca karşılık olarak, H matrisinin 3. satırı için benzer bir teorem verilebilir.

Teorem 3.5.

$$h_{3,n} = \sum_{i=1}^{n} F_i h_{2,n-i}$$

dir.

Bu teoremden, her $h_{3,n}$ elemanı, $h_{2,n-1}, h_{2,n-2}, \ldots, h_{2,1}$ elemanları ile $F_1, F_2, \ldots, F_{n-1}$ sayılarının sırasıyla çarpılıp toplanmasından elde edilebilir.

Örnek olarak;

$$\begin{aligned} h_{3,n} &= \sum_{1}^{7} F_1 h_{2,7-i} \\ &= F_1 h_{2,6} + F_2 h_{2,5} + F_3 h_{2,4} + F_4 h_{2,3} + F_5 h_{2,2} + F_6 h_{2,1} \\ &= 1\cdot 20 + 1\cdot 10 + 2\cdot 5 + 3\cdot 2 + 5\cdot 1 + 8\cdot 0 \\ &= 51 \end{aligned}$$

verilebilir.

Aşağıdaki sonuç, ilk önerilen problemin cevabını sağlar.

Sonuç 3.8.

$$h_{3,n} = \sum_{\substack{i,j,k\geq 1 \\ i+j+k=n}} F_i F_j F_k$$

dır.

İspat. Teorem 3.5'ten,

$$\begin{aligned} h_{3,n} &= \sum_{i=1}^{n} F_i h_{2,n-i} \\ &= \sum_{i=1}^{n} F_i \Big(\sum_{\substack{j,k\geq 1 \\ j+k=n-1}} F_j F_k \Big) \\ &= \sum_{\substack{i,j,k\geq 1 \\ i+j+k=n}} F_i F_j F_k \end{aligned}$$

dır.

Örnek olarak,

$$\begin{aligned}
h_{3,5} &= \sum_{\substack{i,j,k\geq 1\\ i+j+k=5}} F_i F_j F_k \\
&= F_1 \sum_{\substack{j,k\geq 1\\ j+k=4}} F_j F_k + F_2 \sum_{\substack{j,k\geq 1\\ j+k=3}} F_j F_k + F_3 \sum_{\substack{j,k\geq 1\\ j+k=2}} F_j F_k \\
&= F_1(F_1F_3 + F_2F_2 + F_3F_1) + F_2(F_1F_2 + F_2F_1) + F_3(F_1F_1) \\
&= 1\cdot(1\cdot 2 + 1\cdot 1 + 2\cdot 1) + 1\cdot(1\cdot 1 + 1\cdot 1) + 2\cdot(1\cdot 1) \\
&= 9
\end{aligned}$$

verilebilir.

Aslında, sonuç 3.7 ve sonuç 3.8 aşağıdaki gibi genelleştirilebilir.

Teorem 3.6.(Libis)

$$h_{m,n} = \sum_{i=1}^{n} F_i h_{m-1,n-i} \qquad m \geq 2$$

dir.

3. 9. $h_{2,n}$ Ve $h_{3,n}$ İçin Açık Formüller

$h_{2,n}$ ve $h_{3,n}$ için açık formüller bir E operatörü tanımlanarak verilecektir.

$Eh_{m,n} = h_{m,n+1}$ olsun.

Buradan,

$$\begin{aligned}
E^2 h_{m,n} &= Eh_{m,n+1} = h_{m,n+2} \\
(E^2 - E - 1)h_{m,n} &= h_{m,n+2} - h_{m,n+1} - h_{m,n} \\
&= h_{m-1,n+1} \qquad (denklem\ 3.10'dan)
\end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla,

$$(E^2 - E - 1)^m h_{m,n} = 0$$

dır.

Bu yol takip edilirse,

$$h_{2,n} = (an+b)F_n + (cn+d)F_{n-1} \tag{3.11}$$

ve

$$h_{3,n} = (an^2+bn+c)F_n + (dn^2+en+f)F_{n-1}$$

biçiminde olmalıdır (a,b,c,d,e,f kararlı sabitler).

$h_{2,1}=0$, $h_{2,2}=1$, $h_{2,3}=2$ ve $h_{2,4}=5$ 'den, Denklem 3.11

$$a+b=0 \qquad 2a+b+2c+d=1$$
$$6a+2b+3c+d=2 \qquad 12a+3b+8c+2d=5$$

lineer sistemini verir. Sistem çözüldüğünde;

$$a=\frac{1}{5}=-b \ , \ c=\frac{2}{5} \ \text{ ve } \ d=0$$

elde edilir. Buradan,

$$h_{2,n}=\frac{(n-1)F_n+2nF_{n-1}}{5} \tag{3.12}$$

olur. Örneğin,

$$h_{2,7}=\frac{6F_7+14F_6}{5}=\frac{6\cdot 13+14\cdot 8}{5}=38$$

dir. Benzer şekilde,

$$h_{3,n}=\frac{(5n^2-3n-2)F_n-6nF_{n-1}}{50} \tag{3.13}$$

dir. Örneğin,

$$h_{3,5}=\frac{(5\cdot 5^2-3\cdot 5-2)F_5-6\cdot 5F_4}{50}=\frac{108\cdot 5-30\cdot 3}{50}=9$$

dur.

$h_{2,n}$ ve $h_{3,n}$ tamsayılar olduğundan,

$$(n-1)F_n + 2nF_{n-1} \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\,5)$$
$$(5n^2 - 3n - 2)F_n \equiv 6nF_{n-1} \ (\mathrm{mod}\,50)$$

dir.

3.10. Sonsuz Boyutlu Bir Lucas Matrisi

L_n Lucas sayıları için yapılan benzer bir çalışma bazı ilginç bölünenler verir. Bunu görmek için, sonsuz boyutlu $K = (k_{i,j})$ matrisini göz önüne alınsın. Her $k_{i,j}$ tekrarlı elemanı $i, j \geq 0$ için aşağıdaki gibi tanımlansın:

(1) $k_{0,j} = 0$
(2) $k_{1,1} = 1$
(3) $k_{j,j-1} = 2\,,\ j \geq 1$
(4) $k_{i,j} = 0 \quad , \quad j < i-1 \ \ ise$
(5) $k_{i,j} = k_{i,j-2} + k_{i,j-1} + k_{i-1,j-1} \quad , \quad i \geq 1 \ ve \ j \geq 2$

(1) şartı; 0. satırın sıfırlardan meydana geldiğini gösterir. (2) ve (3) şartları, satır 1' deki ilk iki elemanın 2 ve 1 olduğunu gösterir. (3) şartından, asıl köşegenin altındaki köşegenin elemanlarının 2 olduğu anlaşılır. (4) şartından, bu köşegenin altındaki her elemanın sıfır olduğu anlaşılır. (5) şartını kullanarak K'nın geriye kalan elemanları hesaplanabilir.

$k_{i,j}$ elemanı; iki önceki $k_{i,j-1}$ ve $k_{i,j-2}$ elemanları ile $k_{i,j-1}$ elemanının üstündeki $k_{i-1,j-1}$ elemanının toplamından elde edilir.

$K =$

$i \backslash j$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	…	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		
1	2	1	3	4	7	11	18	29	47		← Lucas sayıları
2	0	2	3	8	15	30	56	104	189		
3	0	0	2	5	15	35	80	171	355		
4	0	0	0	2	7	24	66	170	407		
5	0	0	0	0	2	9	35	110	315		
6	0	0	0	0	0	2	11	48	169		
⋮											

Tekrarlı formülü kullanarak,

$$\begin{aligned} k_{1,n} &= k_{1,n-2} + k_{1,n-1} + k_{0,n-2} \\ &= k_{1,n-2} + k_{1,n-1} + 0 \\ &= k_{1,n-2} + k_{1,n-1} \end{aligned}$$

öyle ki; $k_{1,0} = 2$ ve $k_{1,1} = 1$ ' dir. Buradan; $k_{1,n} = L_n$ elde edilir. Böylece 1. satırın elemanlarının Lucas sayıları olduğu aşikârdır. Burada ilginç bir gözlem vardır:

$$\begin{aligned} k_{2,7} &= 104 \\ &= 1\cdot 18 + 1\cdot 11 + 2\cdot 7 + 3\cdot 4 + 5\cdot 3 + 8\cdot 1 + 13\cdot 2 \\ &= \sum_{1}^{7} F_j k_{1,7-j} \\ &= \sum_{\substack{j,k\geq 0 \\ j+k=7}} F_j L_k \end{aligned}$$

Daha genel olarak aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.7. (Koshy)

$$k_{2,n} = \sum_{\substack{j,k\geq 0 \\ j+k=n}} F_j L_k \qquad (3.14)$$

dir.

İspat. $n = 0$ olduğunda, her iki taraf 0 olduğundan sonuç doğrudur. m 'den küçük negatif olmayan her tamsayı için doğru olduğu kabul edilsin:

$$k_{2,m} = \sum_{\substack{j,k\geq 0 \\ j+k=m}} F_j L_k$$

Buradan,

$$
\begin{aligned}
\sum_{\substack{j,k\geq 0\\ j+k=m+1}} F_j L_k &= \sum_{j=0}^{m+1} F_j L_{m+1-j} \\
&= \sum_{0}^{m} F_j (L_{m-j} + L_{m-j-1}) + F_{m+1} L_0 \\
&= \sum_{0}^{m} F_j L_{m-j} + \sum_{0}^{m} F_j L_{m-j-1} + F_{m+1} L_0 \\
&= \sum_{0}^{m} F_j L_{m-j} + \sum_{0}^{m-1} F_j L_{m-j-1} + F_m L_{-1} + F_{m+1} L_0 \\
&= k_{2,m} + k_{2,m-1} + 2F_{m+1} - F_m \qquad (2F_{m+1} - F_m = L_n \ , \ L_n = k_{1,m}) \\
&= k_{2,m} + k_{2,m-1} + k_{1,m} \\
&= k_{2,m+1}
\end{aligned}
$$

bulunur. O halde formül her $n \geq 0$ için doğrudur. $k_{1,n} = L_n$' den; (3.14) formülü yeniden yazılabilir:

$$
k_{2,n} = \sum_{\substack{j,t\geq 0\\ j+t=n}} F_j k_{1,t} \tag{3.15}
$$

Teorem 3.7 yardımıyla,

$$
k_{3,n} = \sum_{0}^{n} F_i k_{2,n-i} = \sum_{\substack{i,j,k\geq 0\\ i+j+k=n}} F_i F_j L_k \tag{3.16}
$$

olduğu kanıtlanabilir.

Örneğin,

$$
\begin{aligned}
k_{3,5} &= F_0 k_{2,5} + F_1 k_{2,4} + F_2 k_{2,3} + F_3 k_{2,2} + F_4 k_{2,1} + F_5 k_{2,0} \\
&= 0\cdot 30 + 1\cdot 15 + 1\cdot 8 + 2\cdot 3 + 3\cdot 2 + 5\cdot 0 \\
&= 35
\end{aligned}
$$

olur.

Teorem 3.8. (Koshy)

$$
k_{m,n} = \sum_{i=0}^{n} F_i k_{m-1,n-i} \qquad m \geq 2 \tag{3.17}
$$

dir.

İspat. Bütün m 'ler için doğru olduğu kabul edilsin.

$k_{m,0} = 0 = \sum_{0}^{0} F_i k_{m-1,-i}$ olduğundan $n = 0$ için doğrudur.

$n = 1$ olduğunda, sol taraf $k_{m,1}$ ve;

sağ taraf $= \sum_{0}^{1} F_i k_{m-1,1-i} = F_0 k_{m-1,1} + F_1 k_{m-1,0} == 0 + k_{m-1,0} = k_{m-1,0}$'dır.

$i > 2$ için;

$k_{2,1} = 2 = k_{1,0}$ ve $k_{i,1} = 0 = k_{i-1,0}$ olduğundan, $m \geq 2$ için; $k_{m,1} = k_{m-1,0}$' dır.

$\forall t \geq 2$ olmak üzere bütün t tamsayıları için doğru olduğu kabul edilsin.

$$k_{m,t} = \sum_{i=0}^{t} F_i k_{m-1,t-i}$$

Buradan

$$\begin{aligned}
\sum_{0}^{t+1} F_j k_{m-1,t+1-i} &= \sum_{0}^{t+1} F_i (k_{m-1,t-i-1} + k_{m-1,t-i} + k_{m-2,t-i}) \\
&= \sum_{0}^{t+1} F_i k_{m-1,t-i-1} + \sum_{0}^{t+1} F_i k_{m-1,t-i} + \sum_{0}^{t+1} F_i k_{m-2,t-i} \\
&= \sum_{0}^{t-1} F_i k_{m-1,t-i-1} + \sum_{0}^{t} F_i k_{m-1,t-i} + \sum_{0}^{t} F_i k_{m-2,t-i} \\
&= k_{m,t-1} + k_{m,t} + k_{m-1,t} \\
&= k_{m,t+1}
\end{aligned}$$

elde edilir. O halde formül $\forall n \geq 0$ için doğrudur.

Diğer taraftan, denklem (3.17)'nin her $n \geq 0$ için doğru olduğu kabul edilsin. $\forall m \geq 2$ için doğru olduğunu kanıtlayalım.

Denklem (3.14) yardımıyla $m = 2$ için; denklem (3.16) yardımıyla $m = 3$ için doğrulukları görülür.

$\forall t \geq 2$ olmak üzere t' den küçük bütün tamsayılar için doğru olduğu kabul edilsin:

$$k_{t,n} = \sum_{0}^{n} F_i k_{t-1,n-i}$$

Buradan

$$\begin{aligned}
\sum_{0}^{n} F_i k_{t,n-i} &= \sum_{0}^{n} F_i (k_{t,n-i-2} + k_{t,n-1-i} + k_{t-1,n-1-i}) \\
&= \sum_{0}^{n} F_i k_{t,n-i-2} + \sum_{0}^{n} F_i k_{t,n-1-i} + \sum_{0}^{n} F_i k_{t-1,n-1-i} \\
&= \sum_{0}^{n-2} F_i k_{t,n-i-2} + \sum_{0}^{n-1} F_i k_{t,n-1-i} + \sum_{0}^{n-1} F_i k_{t-1,n-1-i} \\
&= k_{t+1,n-2} + k_{t+1,n-1} + k_{t,n-1} \\
&= k_{t+1,n}
\end{aligned}$$

elde edilir. O halde sonuç, $m \geq 2$ için de doğrudur.

Örneğin,

$$\begin{aligned}
k_{4,5} &= \sum_{0}^{5} F_i k_{3,5-i} = \sum_{1}^{4} F_i k_{3,5-i} \\
&= F_1 k_{3,4} + F_2 k_{3,3} + F_3 k_{3,2} + F_4 k3{,}1 = 15 + 5 + 4 + 0 = 24
\end{aligned}$$

elde edilir.

3.11. $k_{2,n}$ Ve $k_{3,n}$ İçin Açık Formüller

K matrisinin 2. satırı ilginç bir model barındırır.

$$\begin{aligned}
k_{2,0} &= 0 = 1 \cdot 0 \\
k_{2,1} &= 2 = 2 \cdot 1 \\
k_{2,2} &= 3 = 3 \cdot 1 \\
k_{2,3} &= 8 = 4 \cdot 2 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Böylece; $k_{2,n} = (n+1)F_n$ olduğu görülür.

Teorem 3.9.(Koshy)

$$k_{2,n} = (n+1)F_n \qquad (3.18)$$

dir.

İspat. $k_{2,0} = 0 = (0+1)F_0$ olduğundan $n = 0$ için doğrudur.

$t \geq 0$ için; t' den küçük bütün tamsayılar için doğru olduğu kabul edilsin.

Buradan

$$\begin{aligned}(t+2)F_{t+1} &= (t+2)(F_t + F_{t-1}) \\ &= tF_{t-1} + (t+1)F_t + F_t + 2F_{t-1}\end{aligned}$$

elde edilir.

Fakat $F_t + 2F_{t-1} = F_{t+1} + F_{t-1} = L_t$ olduğundan,

$$\begin{aligned}(t+2)F_{t+1} &= (t+2)(F_t + F_{t-1}) \\ &= tF_{t-1} + (t+1)F_t + L_t \\ &= k_{2,t-1} + k_{2,t} + k_{1,t} \\ &= k_{2,t+1}\end{aligned}$$

Buradan, formülün bütün $n \geq 0$ sayıları için doğru olduğu görülür.

$k_{2,n}$; $(an+b)F_n + (cn+d)F_{n-1}$ formunda kabul edilirse, 3.18 formülü yeniden kurulabilir. Buradan,

$$k_{2,n} = (n+1)F_n = \sum_{0}^{n} F_j L_{n-j} \tag{3.19}$$

elde edilir.

Aynı şekilde; $k_{3,n}$; $(an^2 + bn + c)F_n + (dn^2 + en + f)F_{n-1}$ formunda olmalıdır.

$k_{3,0}$'dan $k_{3,5}$'e kadar olan değerler kullanılırsa;

$$a = \frac{1}{10} = b \quad , \quad c = -\frac{1}{5} = -d \quad , \quad e = \frac{2}{5} \quad \text{ve} \quad f = 0$$

olduğu görülür.

$$k_{3,n} = \frac{(n^2 + n - 2)F_n + 2n(n+2)F_{n-1}}{10}$$

$F_n + 2F_{n-1} = L_n$ bağıntısı kullanılarak tekrar yazılırsa,

$$k_{3,n} = \frac{(n+2)(nL_n - F_n)}{10} \tag{3.20}$$

elde edilir.

Örnek olarak;

$$k_{3,7} = \frac{9(7L_7 - F_7)}{10} = \frac{9(7 \cdot 29 - 13)}{10} = 171$$

verilebilir.

Denklem 3.20'den $(n+2)(nL_n - F_n) \equiv 0 \pmod{10}$ olduğu açıktır.

Daha genel olarak, $(1),(4),(5)$ şartları kullanılarak ve iki yeni şarta dayanarak yeni bir G matrisi inşa edilebilir:

$$\begin{array}{ll} (2') & G_{1,1} = a \\ (3') & G_{1,2} = b \end{array}$$

Burada a ve b keyfi tamsayılar, $G_{1,0} = b - a$'dır.

$$G = \begin{array}{c|cccccccc} i \backslash j & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \cdots \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 1 & b-a & a & b & a+b & a+2b & 2a+3b & 3a+5b & \leftarrow GFN_S \\ 2 & 0 & b-a & b & 3b-a & 5b & 10b & 2a+18b & \\ 3 & 0 & 0 & b-a & 2b-a & 6b-3a & 13b-4a & 29b-7a & \\ \vdots & & & & & & & & \end{array}$$

G matrisinin 1. satırı Genelleştirilmiş Fibonacci sayılarıdır (GFN_S).

$a = 1 = b$ olduğunda $G_n = F_n$ ve $a = 1, b = 3$ olduğunda $G_n = L_n$ olur.

Teorem 3.10.(Koshy)

$$G_{m,n} = \sum_{i=0}^{n} F_i G_{m-1,n-i} \qquad m \geq 2 \qquad (3.21)$$

dir.

Örnek olarak,

$$
\begin{aligned}
G_{3,5} &= \sum_{0}^{5} F_i G_{2,5-i} = \sum_{1}^{4} F_i G_{2,5-i} \\
&= F_1 G_{2,4} + F_2 G_{2,3} + F_3 G_{2,2} + F_4 G_{2,1} \\
&= 5b + (3b - a) + 2b + 3(b - a) \\
&= 13b - 4a
\end{aligned}
$$

verilebilir.

Özellikle, $m = 2$ ve $m = 3$ olduğunda (3.21) formülü

$$G_{2,n} = \sum_{0}^{n} F_i G_{1,n-i} = \sum_{0}^{n} F_i G_{n-i}$$

ve

$$G_{3,n} = \sum_{0}^{n} F_i G_{2,n-i} = \sum_{\substack{i,j,k \geq 0 \\ i+j+k=n}} F_i F_j G_k$$

bağıntılarını verir.

3.12. Lambda Fonksiyonu

$A = (a_{ij})_{n\times n}$ ve $A^* = (a_{ij} + 1)_{n\times n}$ olsun.

Buradan, A matrisinin her elemanına 1 eklenerek A^*' ın elde edildiği görülür.

$$\lambda(A) = |A^*| - |A|$$

Örnek olarak,

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

olsun.

Buradan,

$$A^{*} = \begin{bmatrix} a+1 & b+1 \\ c+1 & d+1 \end{bmatrix}$$

$$\left|A^{*}\right| = \begin{vmatrix} a+1 & b+1 \\ c+1 & d+1 \end{vmatrix} = (a+1)(d+1) - (b+1)(c+1)$$

$$= (ad - bc) + (a + d - b - c)$$

$$\lambda(A) = a + d - b - c$$

elde edilir. A 'nın her elemanına sürekli bir k elemanını ekleyelim. Böylece

$$\left|A^{*}\right| = \begin{vmatrix} a+k & b+k \\ c+k & d+k \end{vmatrix}$$

$$= (ad - bc) + k(a + d - b - c)$$

$$\left|A^{*}\right| = |A| + k\lambda(A)$$

elde edilir. Özellikle $A = Q^{n}$ olsun. Buradan; $\left|(Q^{n})^{*}\right| = \left|Q^{n}\right| + k\lambda(Q^{n})$ olur.

Fakat $\lambda(Q^{n}) = F_{n+1} + F_{n-1} - 2F_{n} = F_{n-1} - F_{n-2} = F_{n-3}$ olur. Dolayısıyla Cassini formülünden,

$$\left|(Q^{n})^{*}\right| = (-1)^{n} + kF_{n-3}$$

elde edilir. Şimdi $k = F_{n}$ olsun. Buradan

$$\begin{vmatrix} F_{n+1} + F_{n} & F_{n} + F_{n} \\ F_{n} + F_{n} & F_{n-1} + F_{n} \end{vmatrix} = (-1)^{n} + F_{n}F_{n-3}$$

yani,

$$\begin{vmatrix} F_{n+2} & 2F_{n} \\ 2F_{n} & F_{n+1} \end{vmatrix} = (-1)^{n} + F_{n}F_{n-3}$$

elde edilir.

Böylece,

$$4F_n^2 = F_{n+2}F_{n+1} - F_nF_{n-3} + (-1)^{n+1} \qquad (3.22)$$

özdeşliği elde edilir.

3.13. p Matrisi

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Fibonacci matrisini ele alarak bu matrisin kuvvetleri üzerinde durulursa,

$$P^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \qquad P^3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 4 & 7 & 12 \\ 4 & 6 & 9 \end{bmatrix} \qquad P^4 = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 9 \\ 12 & 19 & 30 \\ 9 & 15 & 25 \end{bmatrix}$$

elde edilir.Sonuç olarak;

$$P = \begin{bmatrix} F_0^2 & F_0F_1 & F_1^2 \\ 2F_0F_1 & F_2^2 - F_0F_1 & 2F_1F_2 \\ F_1^2 & F_1F_2 & F_2^2 \end{bmatrix} \qquad P^2 = \begin{bmatrix} F_1^2 & F_1F_2 & F_2^2 \\ 2F_1F_2 & F_3^2 - F_1F_2 & 2F_2F_3 \\ F_2^2 & F_2F_3 & F_3^2 \end{bmatrix}$$

$$P^3 = \begin{bmatrix} F_2^2 & F_2F_3 & F_3^2 \\ 2F_2F_3 & F_4^2 - F_2F_3 & 2F_3F_4 \\ F_3^2 & F_3F_4 & F_4^2 \end{bmatrix}$$

ve böyle devam eder.

Tümevarımdan;

$$P^n = \begin{bmatrix} F_{n-1}^2 & F_{n-1}F_n & F_n^2 \\ 2F_{n-1}F_n & F_{n+1}^2 - F_{n-1}F_n & 2F_nF_{n+1} \\ F_n^2 & F_nF_{n+1} & F_{n+1}^2 \end{bmatrix}$$

olduğu görülebilir.

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

olsun. Buradan,

$$\lambda(A) = \begin{vmatrix} a+e-b-d & b+f-c-e \\ d+h-g-e & e+i-h-f \end{vmatrix}$$

elde edilir.

Özel olarak $A = P^n$ alınsın. Buradan,

$$\lambda(P^n) = \begin{vmatrix} F_{n-1}^2 + F_{n+1}^2 - 4F_{n-1}F_n & 2F_{n-1}F_n + 2F_nF_{n+1} - F_n^2 - F_{n+1}^2 \\ 3F_{n-1}F_n + F_nF_{n+1} - F_n^2 - F_{n+1}^2 & 2F_{n+1}^2 - 3F_{n-1}F_n - F_nF_{n-1} \end{vmatrix}$$

olur. Sonuç olarak,

$$\begin{aligned} 2F_{n-1}F_n + 2F_nF_{n+1} - F_n^2 - F_{n+1}^2 &= 2F_n(F_{n-1} + F_{n+1}) - (F_n^2 + F_{n+1}^2) \\ &= 2F_nL_n - F_{2n+1} \\ &= 2F_{2n} - F_{2n+1} \\ &= F_{2n} - (F_{2n+1} - F_{2n}) \\ &= F_{2n} - F_{2n-1} \\ &= F_{2n-2} \end{aligned}$$

elde edilir.

$\lambda(P^n)$ ' nin diğer ifadeleri benzer yolla basitleştirilebilir. Son determinant;

$$\begin{aligned} \lambda(P^n) &= \begin{vmatrix} F_{2n-3} & F_{2n-2} \\ -F_{n-2}^2 & (-1)^n - F_{n-2}F_{n-1} \end{vmatrix} \\ &= F_{2n-3}[(-1)^n - F_{n-2}F_{n-1}] + F_{n-2}^2F_{2n-2} \\ &= (-1)^n(F_{n-1}^2 - F_{n-3}F_{n-2}) \\ &= (-1)^n \qquad (P^{n-2}\text{'nin merkezdeki elemanı}) \end{aligned}$$

BÖLÜM 4. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu bölümde nxn tipindeki paskal matrisinin nasıl elde edildiği incelenecektir. nxn tipindeki Paskal matrisi Paskal üçgeninin n. satırından elde edilir ve satırların sağ üst kısımları sıfırlardan oluşur. nxn tipindeki Paskal matrisi;

$$P_{ij} = \begin{cases} \binom{i-1}{j-1} & , \quad i \geq j \\ 0 & , \quad \textit{farklı hallerde} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır.

Buradan ilk 4 Paskal matrisi

$$(1) \quad , \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

şeklindedir. Bu matrislerin tersleri de açık olarak hesaplanabilir.

Özel olarak $n = 4$ için;

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

şeklindedir. Benzer şekilde sıfırdan farklı her bir eleman için Paskal matrisinin tersinin elde edilebileceği görülmektedir.

Teorem 4.1. nxn tipindeki Q matrisi,

$$Q=\begin{cases}(-1)^{i-j}\binom{i-1}{j-1}, & i\geq j\\ 0 & , \textit{farklı hallerde}\end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Buradan $P^{-1}=Q$ elde edilir.

İspat. $(PQ)_{ij}=\begin{cases}0, & i<j\\ 1, & i=j\end{cases}$ olduğu açıktır. Bu nedenle , $(PQ)_{ij}=0$, ($i>j$) olduğunu göstermek yeterlidir.

$i>j$ olduğunu kabul edelim ve $i=j+l$ ($l>0$) yazalım. Buradan

$$(PQ)_{ij}=\sum_{k=0}^{l}P_{j+l,j+k}Q_{j+k,j}=\sum_{k=0}^{l}\binom{j+l-1}{j+k-1}\binom{j+k-1}{j-1}(-1)^k$$

$$=\sum_{k=0}^{l}\frac{(j+l-1)!}{(l-k)!(j-1)!k!}(-1)^k=\frac{(j+l-1)!}{(j-1)!l!}\sum_{k=0}^{l}\frac{l!}{(l-k)!k!}(-1)^k$$

$$=\binom{j+l-1}{j-1}\sum_{k=0}^{l}\binom{l}{k}(-1)^k=\binom{i-1}{j-1}(1-1)^l=0$$

elde edilir. Sıfırdan farklı herhangi x ve y reel sayılar olmak üzere $(x+y)^l$ 'nin açılımı için binom teoremi aşağıdaki formülü verir.

$$P[x]=\begin{cases}x^{l-j}\binom{i-1}{j-1}, & l>j\\ 0 & , \textit{farklı hallerde}\end{cases}$$

$P[0]$ özdeşlik matrisidir.

$0^0=1$ olduğu kabul edilirse , $P[0]$ özdeşlik matrisini verir. Ayrıca $P[1]=P$ ve Teorem 4.1. den $P[-1]=P^{-1}$ olur. Örnek olarak ;,

$$P[x]=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ x & 1 & 0 & 0\\ x^2 & 2x & 1 & 0\\ x^3 & 3x^2 & 3x & 1\end{pmatrix}$$

verilebilir.

Teorem 4.2. Herhangi x ve y reel sayıları için,

$$P[x].P[y] = P[x+y]$$

dir.

İspat. Eğer $x=0$ veya $y=0$ ise, iddia önemsizdir. Eğer ne x ne de y sıfır değilse ispat Teorem 4.1.' in ispatı gibidir.

Sonuç 4.1. Herhangi bir j ve k $(k \neq 0)$ tamsayıları için;

a-) $P^j = P[j]$

b-) $\left(P\left[\dfrac{j}{k}\right]\right)^k = P^j$

İspat. $P[1]=P$ ve $P[0]$ özdeşlik matrisini hatırlayalım. j üzerinden tümevarım kullanalım. $P[j]=P^j$, $j \geq 0$ olsun.

Buradan ; $P[-1]=P^{-1}$ elde edilir. Benzer şekilde , $|j|$ üzerinden tümevarım kullanılırsa $P[j]=P$, $j<0$ olduğu gösterilir.

Daha genel olarak, teorem 4.2. ve (a) , $\left(P\left[\dfrac{j}{k}\right]\right)^k = P[j] = P^j$ olduğunu gösterir.

Herhangi x tamsayısı için , P nin x – inci kuvvetleri gösterilebilir.

Örnek olarak $n=4$ için , P nin karekökü ve küp kökü verilebilir.

$$P\left[\frac{1}{2}\right] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{4} & \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad P\left[\frac{1}{3}\right] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{9} & \frac{2}{3} & 1 & 0 \\ \frac{1}{27} & \frac{1}{3} & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

KAYNAKLAR

[1] KOSHY, T., " Fibonacci and Lucas Numbers with Applications", A Wiley-İnterscience Publications, New York 2001

[2] TAŞÇI, D., KILIÇ, E., "On the order-k generalized Lucas numbers", Appl. Math. Comput.155 (2004)

[3] ER, M. C., Sums of Fibonacci numbers by matrix methods, Fibonacci Quart.22 (3) (1984)

[4] VAJDA, S., Fibonacci and Lucas Numbers and the Golden Section, Chichster, Brisbane, Toronto, New York, 1989 Jersey, (1992)

[6] VOROBİEV, N., "Fibonacci Numbers", Basel, Boston, Berlin (1992)

[7] LORENTZEN, L., WAADELAND, H., "Continued Fractions with applications", Amsterdam, London (1992)

ÖZGEÇMİŞ

Uğur KÖK 19.10.1983 yılında Sakarya'da doğdu. İlköğretimini Sakarya'da tamamladı. 2002 yılında başladığı Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünü 2006 yılında tamamladı.

2006 yılında Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Bölümünde yüksek lisans öğrenciliğine başladı. 2006 yılında Sakarya'nın Karasu ilçesinde özel bir dershanede Matematik öğretmeni olarak işe başladı. Şu an hala aynı dershanede görev yapmaktadır.

PASCAL TRİANGLES AND FİBONACCİ MATRİCES

Uğur KÖK

SUMMARY

Key words: Fibonacci and Lucas numbers, Pascal's triangle, Binom coefficients

In this study, we have seen how Fibonacci and Lucas numbers can be generated from Pascal's triangle.

In the first part, Fibonacci and Lucas numbers were investigated by using the Binom coefficients. The various relations between Pascal type triangles and Fibonacci and Lucas numbers were then obtained.

In the second part, the various matrices were studied which are involving Fibonacci and Lucas numbers. These matrices are called Fibonacci and Lucas matrices.

In additon, it has been seen that, there is a close link between matrices, Fibonacci an Lucas numbers.

PASKAL ÜÇGENİ VE FİBONACCİ MATRİSLERİ

Uğur KÖK

ÖZET

Anahtar Kelimeler: Fibonacci ve Lucas sayıları, Paskal üçgeni, Binom katsayıları

Bu çalışmada, Fibonacci ve Lucas sayılarının Paskal üçgeni yardımıyla nasıl elde edildiği görüldü.

Birinci kısımda, Binom katsayıları yardımıyla Fibonacci ve Lucas sayıları elde edildi. Fibonacci ve Lucas sayıları ile Paskal tipi üçgenler arasında çeşitli bağıntılar elde edildi.

İkinci kısımda, Fibonacci ve Lucas sayıları ile elde edilen çeşitli matrisler üzerinde çalışıldı. Bu matrisler Fibonacci ve Lucas matrisleri olarak adlandırıldı.

Son olarak, Fibonacci ve Lucas sayıları ile matrisler arasında kapalı bir halka olduğu görüldü.