

**T.C.  
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**BLOCK-PULSE FONKSİYONLARINI KULLANARAK  
DOĞRUSAL ZAMANLA DEĞİŞMEYEN SİSTEMLERİN  
DURUM DEĞİŞKENLERİNİN KESTİRİMİ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**Elektrik-Elektronik Müh. Serap ÖNEN**

**Enstitü Anabilim Dalı : ELEKTRİK-ELEKTRONİK MÜH.**

**Enstitü Bilim Dalı : ELEKTRİK**

**Tez Danışmanı : Doç. Dr. Saadettin AKSOY**

**Ocak 2010**

T.C.  
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**BLOCK-PULSE FONKSİYONLARINI KULLANARAK  
DOĞRUSAL ZAMANLA DEĞİŞMEYEN SİSTEMLERİN  
DURUM DEĞİŞKENLERİNİN KESTİRİMİ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**Elektrik-Elektronik Müh. Serap ÖNEN**

**Enstitü Anabilim Dalı : ELEKTRİK-ELEKTRONİK MÜH.**

**Enstitü Bilim Dalı : ELEKTRİK**

**Bu tez 21 / 01 / 2010 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Oybirliği ile kabul edilmiştir.**

**Doç. Dr. Saadettin AKSOY**  
Jüri Başkanı



**Yrd. Doç. Dr. Ali Fuat BOZ**  
Jüri Üyesi



**Yrd. Doç. Dr. Mehmet BAYRAK**  
Jüri Üyesi



## **TEŞEKKÜR**

BaŐta, bu tez çalıŐmam sũresince bana her tũrlũ desteği veren ve gerekli yũnlendirmeleri yapan, bilgi ve deneyimi ile bana her zaman yol gũsteren ve tezime son Őekliini vermemde yardımcı olan değerli hocam Doç. Dr. Saadettin AKSOY'a çok teŐekkũr ederim.

Tez alıŐmamım içeriğinin zenginleŐtirilmesi yũksek lisans eğitimim sũresince bana emeği geçen diğer tũm Sakarya Őniversitesi Mũhendislik Fakũltesi Elektrik - Elektronik Mũhendislięi Bũlũmũ oğretim ũyelerine de teŐekkũrũ bir borç bilirim. Eęitimim konusunda her tũrlũ ũzveriyi gũsteren ve her zaman destek veren aileme ve sevgili eŐime...

## İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR.....	ii
İÇİNDEKİLER .....	iii
SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ.....	v
ŞEKİLLER LİSTESİ .....	vi
ÖZET.....	ix
SUMMARY.....	x
BÖLÜM 1.	
GİRİŞ.....	1
BÖLÜM 2.	
DOĞRUSAL ZAMANLA DEĞİŞMEYEN SİSTEMLERİN MATEMATİKSEL MODELLERİ .....	3
2.1. Giriş.....	3
2.2. Doğrusal Zamanla Değişmeyen Sistemlerin Matematiksel Modelleri.....	3
BÖLÜM 3.	
BLOCK PULSE FONKSİYONLARI.....	6
3.1. Block Pulse Fonksiyonları.....	6
BÖLÜM 4.	
GÖZLEMLEYİCİLER.....	11
4.1. Açık Çevrimli Gözlemleyiciler.....	11
4.2. Kapalı Çevrimli Gözlemleyiciler.....	13
4.2.1. Tam-mertebeli gözlemleyiciler.....	14
4.2.2. İndirgenmiş-mertebeli gözlemleyiciler.....	16

4.3. Ackermann formülü.....	21
4.4. Çok çıkışlı sistemler için kazanç matrisinin bulunması.....	23
BÖLÜM 5.	
BLOCK PULSE FONKSİYONLARI İLE KESTİRİM ALGORİTMASI.....	24
BÖLÜM 6.	
PROGRAMLAMA.....	27
BÖLÜM 7.	
UYGULAMALAR.....	29
7.1. Giriş.....	29
7.2. Uygulama 1.....	29
7.3. Uygulama 2.....	37
BÖLÜM 8.	
SONUÇLAR VE ÖNERİLER.....	44
KAYNAKLAR.....	45
ÖZGEÇMİŞ.....	46

## SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

$\hat{H}(s)$	: Sistemin transfer fonksiyonu
$A$	: Sistemin durum matrisi
$B$	: Sistemin giriş matrisi
$C$	: Sistemin çıkış matrisi
$G$	: Geri besleme matrisi
$\hat{x}(t)$	: Kestirim vektörü
$e(t)$	: Kestirim yanılığısı vektörü
$h$	: Adım aralığı
$m$	: Örnek sayısı

## ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 2.1.	Doğrusal zamanla değişmeyen bir sistemin genel blok gösterimi.	3
Şekil 2.2.	Doğrusal zamanla değişmeyen sistemlerin genel durum uzayı blok diyagramı.....	4
Şekil 2.3.	Çok giriş-çok çıkışlı doğrusal zamanla değişmeyen bir sistemin durum uzayı benzetim diyagramı.....	5
Şekil 2.4.	Çok giriş-çok çıkışlı doğrusal zamanla değişmeyen bir sistemin genel durum uzayı blok diyagramı.....	5
Şekil 3.1.	Block-pulse fonksiyonlarının grafiksel gösterimi.....	7
Şekil 4.1.	Açık çevrimli gözlemleyicinin benzetim diyagramı .....	11
Şekil 4.2.	Tam-mertebeli gözlemleyicinin benzetim diyagramı.....	14
Şekil 4.3.	İndirgenmiş-mertebeli gözlemleyiciye ilişkin blok gösterimi.....	16
Şekil 4.4.	İndirgenmiş-mertebeli gözlemleyici benzetim diyagramı ( türev terimi içerir ).....	18
Şekil 4.5.	İndirgenmiş-mertebeli gözlemleyici benzetim diyagramı (türevsel terim içermez ).....	20
Şekil 5.1.	Kestirim algoritmasına ilişkin benzetim diyagramı.....	24
Şekil 6.1.	Program akış diyagramı.....	28
Şekil 7.1.a	Uygulama 1, $X_1(t)$ durum değişkenine ilişkin analitik çözüm ve gözlemleyici ile elde edilen eğriler ( $h=0.01$ ).....	31
Şekil 7.1.b	Uygulama 1, $X_2(t)$ durum değişkenine ilişkin analitik çözüm ve gözlemleyici ile elde edilen eğriler ( $h=0.01$ ).....	31
Şekil 7.2.a	Uygulama 1, $X_1(t)$ durum değişkenine ilişkin gözlemleyici hatası eğrileri ( $h=0.01$ ).....	32
Şekil 7.2.b	Uygulama 1, $X_2(t)$ durum değişkenine ilişkin gözlemleyici hatası eğrileri ( $h=0.01$ ).....	32

Şekil 7.3.a	Uygulama 1, $X_1(t)$ durum değişkenine ilişkin analitik çözüm ve kestirim algoritması ile hesaplanan eğriler.....	33
Şekil 7.3.b	Uygulama 1, $X_2(t)$ durum değişkenine ilişkin analitik çözüm ve kestirim algoritması ile hesaplanan eğriler.....	33
Şekil 7.4.a	Uygulama 1, $X_1(t)$ durum değişkenine ilişkin kestirim hatası eğrileri.....	34
Şekil 7.4.b	Uygulama 1, $X_2(t)$ durum değişkenine ilişkin kestirim hatası eğrileri.....	34
Şekil 7.5.a	Uygulama 1, $X_1(t)$ durum değişkenine ilişkin $p=-30$ katlı özdeğer için gözlemleyici ve kestirici hatası eğrileri.....	35
Şekil 7.5.b	Uygulama 1, $X_2(t)$ durum değişkenine ilişkin $p=-30$ katlı özdeğer için gözlemleyici ve kestirici hatası eğrileri.....	35
Şekil 7.6.a	Uygulama 1, $X_1(t)$ durum değişkenine ilişkin değişik adım aralıkları için kestirim hatası eğrileri.....	36
Şekil 7.6.b	Uygulama 1, $X_2(t)$ durum değişkenine ilişkin değişik adım aralıkları için kestirim hatası eğrileri.....	36
Şekil 7.7.a	Uygulama 2, $X_1(t)$ durum değişkenine ilişkin benzetim ve gözlemleyici ile elde edilen eğriler ( $h=0.01$ ).....	38
Şekil 7.7.b	Uygulama 2, $X_2(t)$ durum değişkenine ilişkin benzetim ve gözlemleyici ile elde edilen eğriler ( $h=0.01$ ).....	38
Şekil 7.8.a	Uygulama 2, $X_1(t)$ durum değişkenine ilişkin gözlemleyici hatası eğrileri.....	39
Şekil 7.8.b	Uygulama 2, $X_2(t)$ durum değişkenine ilişkin gözlemleyici hatası eğrileri.....	39
Şekil 7.9.a	Uygulama 2, $X_1(t)$ durum değişkenine ilişkin benzetim ve kestirim algoritması ile hesaplanan eğriler ( $h=0.01$ ).....	40
Şekil 7.9.b	Uygulama 2, $X_2(t)$ durum değişkenine ilişkin benzetim ve kestirim algoritması ile hesaplanan eğriler ( $h=0.01$ ).....	40
Şekil 7.10.a	Uygulama 2, $X_1(t)$ durum değişkenine ilişkin kestirici hatası eğrileri.....	41
Şekil 7.10.b	Uygulama 2, $X_2(t)$ durum değişkenine ilişkin kestirici hatası eğrileri.....	41
Şekil 7.11.b	Uygulama 2, $X_2(t)$ durum değişkenine ilişkin $p=-30$ katlı özdeğer için gözlemleyici ve kestirici hatası eğrileri.....	42



Şekil 7.12.a	Uygulama 2, $X_1(t)$ durum değişkenine ilişkin değişik örnekleme sayıları için kestirim hatası eğrileri.....	43
Şekil 7.12.b	Uygulama 2, $X_2(t)$ durum değişkenine ilişkin değişik örnekleme sayıları için kestirim hatası eğrileri.....	43

## ÖZET

Anahtar Kelimeler: Doğrusal zamanla değişmeyen sistemler, Block-Pulse fonksiyonları, Matlab uygulamaları

Bu çalışmada, doğrusal zamanla değişmeyen çok giriş-çok çıkışlı sistemlerin sadece giriş ve çıkış bilgilerini kullanarak durum değişkenlerini kestirebilmek için farklı bir kestirim algoritması önerilmiştir. Önerilen algoritma Block-Pulse fonksiyonlarını ve bazı önemli özelliklerini kullanır.

Bu tez çalışmasında, 1. Bölümde Tez konusuyla ilgili giriş bölümüne, 2. Bölümde doğrusal zamanla değişmeyen sistemlerin matematiksel modellerine, 3. Bölümde Block-Pulse fonksiyonlarına, 4. Bölümde Gözlemleyicilere, 5. Bölümde Block-Pulse fonksiyonları ile kestirim yöntemine, 6. Bölümünde bilgisayar destekli çözüm için programlama algoritmasına, 7. Bölümde uygulamalara, 8. Bölümde sonuç ve önerilere yer verilmiştir.

Bu çalışma göstermiştir ki; Block-Pulse fonksiyonlarıyla yapılan kestirimde örnek alma sayısı arttıkça, kestirim yanılgısı küçülmektedir. Bununla beraber bu kestirim yönteminde basit yapıdaki yinelemeli bağıntılarla bilgisayar destekli çözüm kolayca yapılabilmektedir.

# **STATE VARIABLES ESTIMATION OF LINEAR TIME VARYING SYSTEMS BY USING BLOCK PULSE FUNCTIONS**

## **SUMMARY**

Keywords: Linear time invariant systems, block-pulse functions, Matlab applications.

In this study an algorithm to calculate the state variables in a multi input-multi output system is proposed using only input and output data. The proposed algorithm uses block-pulse functions and some of their important properties.

This thesis consists of the following sections: 1. Introduction, 2. Mathematical models of linear time invariant systems, 3. Block-pulse functions, 4. Observations, 5. Preventative methods using block-pulse functions, 6. Computer based solution for programming algorithm, 7. Applications, 8. Results and discussion.

In this study, it is shown that the estimation error decreases by increasing the sampling number in the Block-Pulse functions. Also, computer aided solution of this estimation method can be easily done using the simple recursive equations.

## BÖLÜM 1. GİRİŞ

Kutup yerleştirme ve değişik türden denetleyicilerin analiz ve tasarımında dizgenin dinamik davranışını belirleyen durum değişkenlerinin bilinmesi gerekir. Bununla birlikte adaptif denetim uygulamalarında dizge durum değişkenlerini kestirme oldukça önemli bir sorundur.

Matematikte sürekli bir fonksiyon ortogonal fonksiyon serileri ile temsil edilme yöntemleri bilinmektedir. Bunlardan en önemlileri Fourier serileri ve Walsh serileridir. Chen ve Hsiao Walsh fonksiyonları için bir işlem matrisi ile ilgili görüşlerini tanımladığından beri Walsh fonksiyonları ve ilgili Block-Pulse fonksiyon [4,5,6] uygulamaları araştırılmıştır. Bu işlem matris zaman domeninde integral alıcı, Laplace domeninde ise  $1/s$  olarak davranmaktadır. Benzer özellikler Block- Pulse fonksiyonları için de tanımlanabilir.

Bu çalışmada doğrusal zamanla değişmeyen sistemlerin durum değişkenlerini Block-Pulse fonksiyonu kullanarak yalnızca giriş ve çıkış ölçümlerini kullanarak hesaplayan bir kestirim algoritması önerilmiştir. Kestirim algoritması sistemin durum uzayı denklemlerini kullanır. Algoritmada Block-Pulse fonksiyonları için tanımlanan ileri integral alma işlem matrisi özelliğinin yanı sıra bazı özellikler kullanılmıştır.

Önerilen yöntem üç aşamadan oluşmuştur. Birinci aşamada sistemin durumunun gözlenebilir olup olmadığı test edilmekte, gözlenebiliyor ise, kestirim yanılığını kısa sürede sıfıra götürecek geri besleme kazanç matrisi uygun bir yöntem kullanılarak seçilir. İkinci aşamada durum eşitliklerinin her iki yanının integrali alındıktan sonra, belirlenmesi amaçlanan durum vektörleri ile bilinen denetim vektörünün (çözüm aralığında sürekli oldukları varsayımı ile) Block-Pulse fonksiyonları yaklaşıkları, bu tümlev eşitliklerinde yerleştirilir. Gerekli düzenlemeler sonucunda bağıntıların her iki yanındaki zaman bağımlı terimler sadeleştirilir.

Böylece; türevsel denklemler takımının çözümü, cebirsel denklemler takımı çözümüne indirgenir. Üçüncü aşamada bu cebirsel denklemler takımı, bilgisayar destekli çözüme uygun yinelemeli bir biçime sokulur. Bu yinelemeli bağıntılardan, bilinmeyen serisel açılım katsayıları kolayca hesaplanır.

Bu çalışmada önerilen kestirim algoritmasına ilişkin bilgisayar programı, MATLAB dili kullanılarak yazılmıştır. Algoritma değişik örneklere uygulanarak elde edilen kestirim sonuçlarının gerçek sonuçlar ile oldukça uyumlu olduğu gözlenmiştir.

## BÖLÜM 2. DOĞRUSAL ZAMANLA DEĞİŞMEYEN SİSTEMLERİN MATEMATİKSEL MODELLERİ

### 2.1 Giriş

Bu bölümde doğrusal zamanla değişmeyen sistemlerin matematiksel modelleriyle ilgili genel bilgi verilmektedir.

### 2.2 Çok Giriş-Çok Çıkışlı Doğrusal Zamanla Değişmeyen Sistemlerin Matematiksel Modelleri

Doğrusal zamanla değişmeyen bir sistemin genel blok gösterimi Şekil-2.1 ile verilebilir.



Şekil 2.1 Doğrusal zamanla değişmeyen bir sistemin genel blok gösterimi

r: sistemin giriş sayısı ve p: sistemin çıkış sayısı olmak üzere, sistemin transfer fonksiyonu aşağıdaki gibi verilebilir;

$$H(s) = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) & \dots & G_{1r}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) & \dots & G_{2r}(s) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ G_{p1}(s) & G_{p2}(s) & \dots & G_{pr}(s) \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

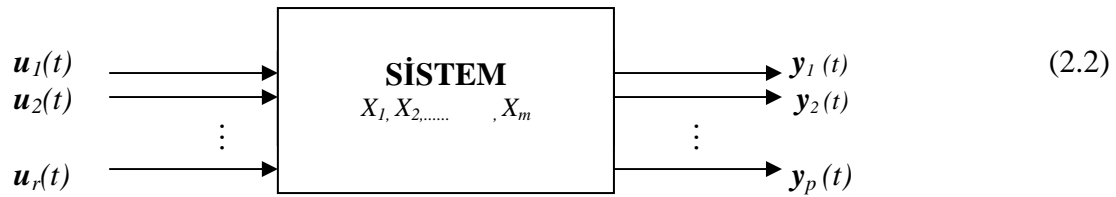
$$G_{i,j}(s) = \frac{Y_i(s)}{U_j(s)}, \quad i=1,2,\dots,p, \quad j=1,2,\dots,r \quad (2.2)$$

$$Y(s) = H(s) \cdot U(s) \quad (2.3)$$

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} \quad (2.4)$$

Doğrusal zamanla değişmeyen sistemlerin durum uzayı bloğu ise Şekil 2.2 ile verilebilir.

Burada  $x_1, x_2, \dots, x_n$  sistemin dinamik durum değişkenleridir.



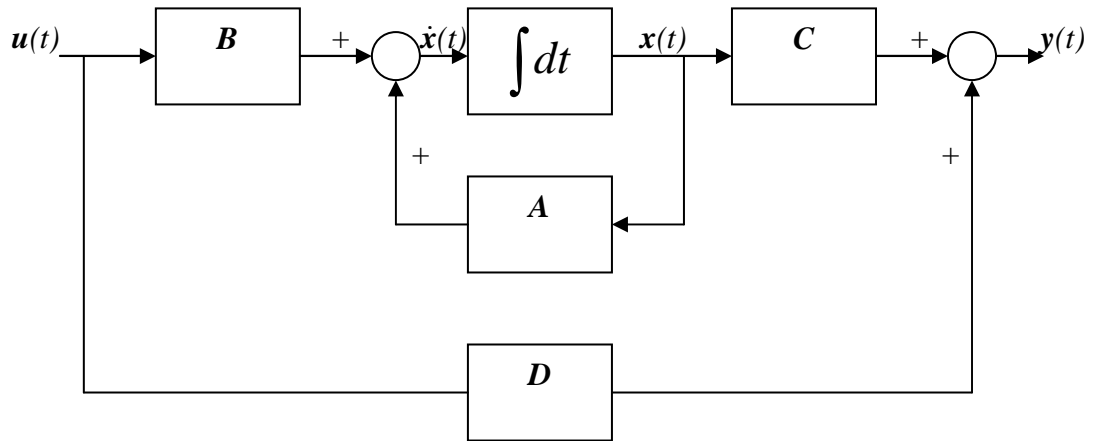
Şekil 2.2 Doğrusal zamanla değişmeyen sistemlerin genel durum uzayı blok diyagramı

Söz konusu bu durum uzayı gösterimi göz önüne alınarak durum uzayı matematiksel gösterim için aşağıdaki durum ve çıkış denklemleri yazılabilir.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad ; \text{ Durum denklemi} \quad (2.5.a)$$

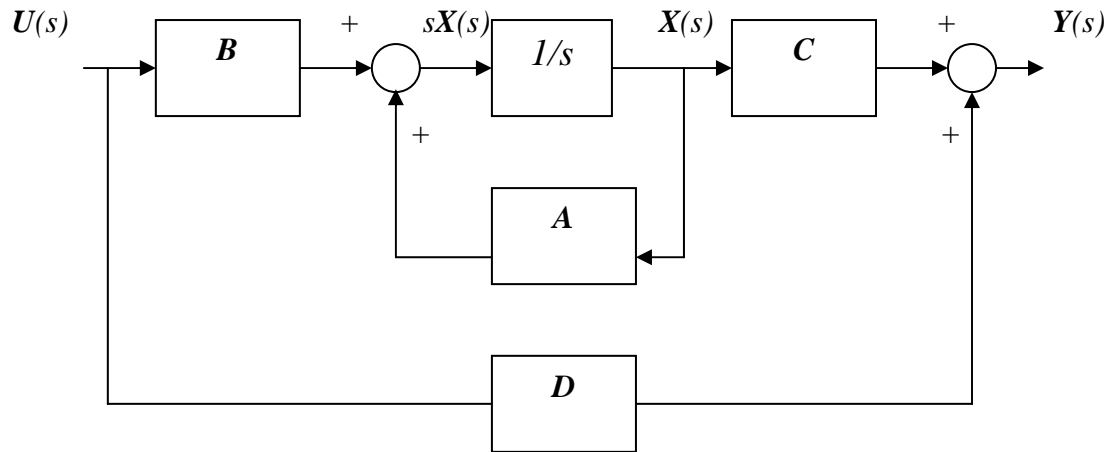
$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad ; \text{ Çıkış denklemi} \quad (2.5.b)$$

Burada  $A$ ;  $n \times n$  boyutlu durum matrisi,  $B$ ;  $n \times r$  boyutlu giriş matrisi,  $C$ ;  $p \times n$  boyutlu çıkış matrisi,  $D$  ise  $p \times r$  boyutlu geçiş matrisidir.  $u(t)$ ;  $r$  boyutlu giriş vektörü,  $y(t)$  ise  $p$  boyutlu çıkış vektörüdür. Bu bilgilerin ışığında doğrusal zamanla değişmeyen bir sistemin durum uzayı benzetim diyagramı Şekil 2.3 ile verilebilir.



Şekil 2.3 Çok giriş-çok çıkışlı doğrusal zamanla değişmeyen bir sistemin durum uzayı benzetim diyagramı

Söz konusu sistemin durum uzayı blok diyagramı ise şekil 2.4' de verilmiştir.



Şekil 2.4 Çok giriş-çok çıkışlı doğrusal zamanla değişmeyen bir sistemin genel durum uzayı blok diyagramı



## BÖLÜM 3. BLOCK PULSE FONKSİYONLARI

### 3.1. Block Pulse Fonksiyonları

Block- Pulse Fonksiyonları (BPF),  $t \in [0, T]$  zaman aralığında birim basamak işlevi olan  $H_k$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots, m$

$$H_k(t) = \begin{cases} 1 & (k-1)T/m \leq t < kT/m \\ 0 & \text{diğer} \end{cases} \quad (3.1)$$

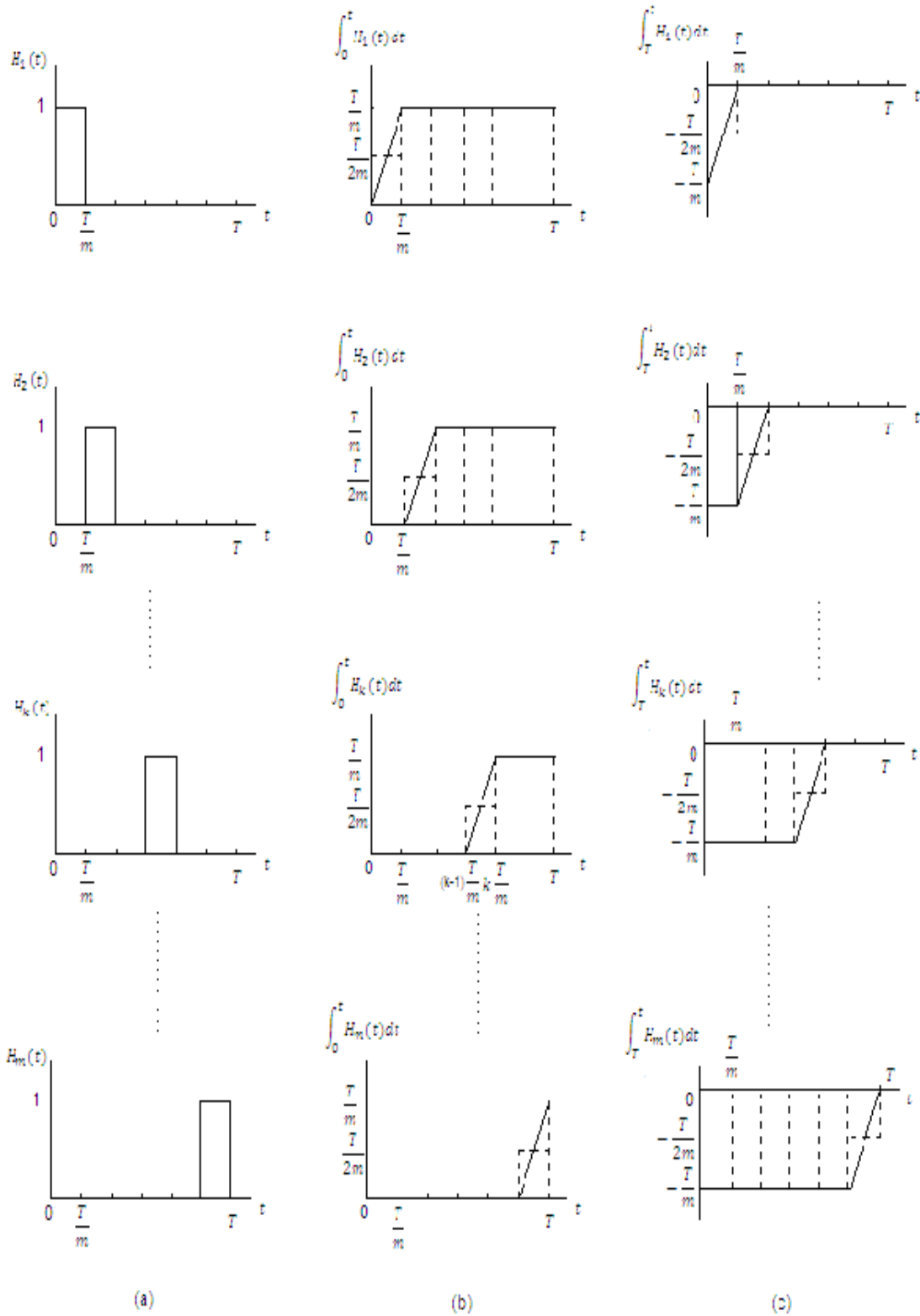
matematiksel ifadesiyle tanımlanabilir. Burada  $T$  örnekleme periyodu,  $m$  ise örnek sayısıdır. Şekil 3.1.a' da Block Pulse fonksiyonlarının grafiksel gösterimi verilmiştir.

$$H_k(t)H_l(t) = \begin{cases} H_k(t) & k = l \\ 0 & k \neq l \end{cases} \quad (3.2)$$

$$\int_0^T H_k(t)H_l(t)dt = \begin{cases} T/m & k = l \\ 0 & k \neq l \end{cases} \quad (3.3)$$

(3.3) ifadesi ile verilen ortogonallik özelliğinin grafiksel gösterimi ise Şekil 3.1.b de verilmiştir.  $[0, T]$  zaman aralığında integrallenebilir herhangi bir  $c(t)$  fonksiyonuna ilişkin BPF yaklaşıklık ifadesi, söz konusu ortogonallik özelliği göz önüne alınır;

$$c(t) \cong \sum_{k=1}^m c_k H_k(t) \quad (3.4)$$



Şekil 3.1.a.b.c. Block-Pulse fonksiyonlarının grafiksel gösterimi

olarak yazılabilir. Bu formülde  $c_k$ ;  $k$ .  $H_k(t)$  ise BPF'nu katsayısıdır. Eğer  $c(t)$  analitik olarak ifade edilebilirse  $c_k$ ;  $c(t)$  nin  $k$ . zaman aralığında ortalama değeri olarak tanımlanabilir. Söz konusu bu tanımlama aşağıdaki bağıntılar ile verilebilir.

$$c_k = \frac{m}{T} \int_0^t c(t) \cdot H_k(t) dt$$

$$c_k = \frac{m}{T} \int_{(k-1)T/m}^{kT/m} c(t) dt$$

$$c_k \cong \frac{1}{2} \{c(kT/m) + c[(k-1)T/m]\} \quad , \quad k=1,2,\dots,m \quad (3.5)$$

Buradaki  $m$  değeri ne kadar büyük olursa  $c(kT/m)$  ile  $c((k-1)T/m)$  arasındaki değer farkı o kadar az olacaktır. Buda  $c(t)$  fonksiyonu oluşturan  $c_k$  değerlerinin minimum hata ile  $c(t)$  fonksiyonunu oluşturmasını sağlayacaktır.  $m$  sayısının fazla büyük seçilmesi örnek sayısını arttıracığından sisteme fazla yük getirecektir. Bu sebepten dolayı seçilen  $m$  sayısı  $c(t)$  özelliğini kaybetmeyecek kadar büyüklükte seçilmesi yeterli olacaktır.

$c(t) = 1, (0 \leq t < 1)$  olması durumunda ;

$$c(t) = 1 = H_1(t) + H_2(t) + \dots + H_m(t) = \sum_{k=1}^m H_k(t) \quad (3.6)$$

olarak hesaplanabilir.

Şekil 3.1.b de gösterilen BPF integrali yaklaşık olarak aşağıdaki şekilde hesaplanır.

$$\int_0^t H_k(t) dt \cong \frac{T}{2m} H_k(t) + \frac{T}{m} \sum_{l=k+1}^m H_l(t) \quad (3.7)$$

Aynı şekilde BPF geriye doğru entegrali için ise;

$$\int_T^t H_k(t) dt \quad , \quad k=1,2,3,\dots,m$$

bağıntısı yazılabilir.

Şekil (3.1.c) de gösterilen integral yaklaşık olarak hesaplanırsa;

$$\int_T^t H_k(t) dt \cong -\frac{T}{m} \sum_{k=1}^{k-1} H_l(t) - \frac{T}{2m} H_k(t) \quad (3.8)$$

olarak hesaplanır.

Şekil 3.1.b ve Şekil 3.1.c deki denklemleri karşılaştırırsak;

$$\int_T^t H_k(t) dt = \int_0^t H_k(t) dt - \frac{T}{m} \quad (3.9)$$

sonucu elde edilir.

$[0, T]$  aralığında integrallenebilen bir  $d(t)$  fonksiyon için BPF yaklaşımı için ise

$$d(t) \cong \sum_{k=1}^m d_k H_k(t) \quad (3.10)$$

yazılabilir. Buradaki,  $d_k$ ;  $(k-1)T/m$  ile  $kT/m$  aralığında  $d(t)$  nin ortalama değeridir.

$c(t)$  ve  $d(t)$  fonksiyonlarının çarpımı ve bölümü için BPF yaklaşımları kullanılarak aşağıdaki bağıntılar yazılabilir.

$$\begin{aligned} c(t).d(t) &\cong \left[ \sum_{k=1}^m c_k H_k(t) \right] \left[ \sum_{l=1}^m d_l H_l(t) \right] \\ &\cong \sum_{k=1}^m c_k d_k H_k(t) \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} c(t)/d(t) &\cong \left[ \sum_{k=1}^m c_k H_k(t) \right] / \left[ \sum_{l=1}^m d_l H_l(t) \right] \\ &\cong \sum_{k=1}^m (c_k / d_k) H_k(t), \quad dk \neq 0 \end{aligned} \quad (3.12)$$

$\mathbf{C}(t) = [c_{ij}(t)]_{n \times m}$  ve  $\mathbf{D}(t) = [d_{ij}(t)]_{p \times r}$  matrislerinin bütün elemanları (0, T) aralığında integrallenebilir olduğu varsayımı ile aşağıdaki BPF yaklaşıklıkları yazılabilir.

$$c_{ij}(t) \cong \sum_{k=1}^m c_{ijk} H_k(t) \quad (3.13)$$

$$d_{ij}(t) \cong \sum_{k=1}^m d_{ijk} H_k(t) \quad (3.14)$$

elde edilir. Burada  $c_{ijk}$  ve  $d_{ijk}$  katsayıları  $c_{ij}(t)$  ve  $d_{ij}(t)$  nin  $[(k-1)T/m, kT/m]$  aralığında  $k$ . ortalama değerleridir. Söz konusu bu zamanla değişen  $\mathbf{C}(t)$  ve  $\mathbf{D}(t)$  matrislerinin BPF yaklaşıklıkları için aşağıdaki eşitlikler yazılabilir.

$$\mathbf{C}(t) = \begin{bmatrix} c_{11}(t) & c_{12}(t) & \dots & c_{1p}(t) \\ c_{21}(t) & c_{22}(t) & \dots & c_{2p}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1}(t) & c_{n2}(t) & \dots & c_{np}(t) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}(t) = [c_{ij}(t)]_{n \times p} = \sum_{k=1}^m \mathbf{C}_k H_k(t) \quad (3.15)$$

ve

$$\mathbf{D}(t) = \begin{bmatrix} d_{11}(t) & d_{12}(t) & \dots & d_{1r}(t) \\ d_{21}(t) & d_{22}(t) & \dots & d_{2r}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ d_{p1}(t) & d_{p2}(t) & \dots & d_{pr}(t) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D}(t) = [d_{ij}(t)]_{p \times r} = \sum_{k=1}^m \mathbf{D}_k H_k(t) \quad (3.16)$$

$$\mathbf{C}_k = \begin{bmatrix} c_{11k} & c_{12k} & \dots & c_{1pk} \\ c_{21k} & c_{22k} & \dots & c_{2pk} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1k} & c_{n2k} & \dots & c_{npk} \end{bmatrix} = [c_{ijk}]_{n \times p} \quad (k = 1, 2, \dots, m)$$

(3.17)

$$\mathbf{D}_k = \begin{bmatrix} d_{11k} & d_{12k} & \dots & d_{1rk} \\ d_{21k} & d_{22k} & \dots & d_{2rk} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ d_{p1k} & d_{p2k} & \dots & d_{prk} \end{bmatrix} = [d_{ijk}]_{p \times r} \quad (k = 1, 2, \dots, m)$$

(3.18)

$\mathbf{C}_k$  ve  $\mathbf{D}_k$  katsayı matrisleri;  $\mathbf{C}(t)$  ve  $\mathbf{D}(t)$  nin  $k$ . aralıktaki  $[(k-1)T/m, kT/m]$  aralığındaki ortalama değerler matrisleridir.

$\mathbf{C}^t(t)$ ,  $\mathbf{C}(t)\mathbf{D}(t)$  ve  $\mathbf{C}^{-1}(t)$  işlevlerine ilişkin BPF yaklaşık bağıntıları:

$$\mathbf{C}^t(t) \cong \left[ \sum_{k=1}^m \mathbf{C}_k \mathbf{H}_k(t) \right]^t = \sum_{k=1}^m \mathbf{C}_k^t \mathbf{H}_k(t)$$

(3.19)

$$\mathbf{C}(t)\mathbf{D}(t) \cong \left[ \sum_{k=1}^m \mathbf{C}_k \mathbf{H}_k(t) \right] \left[ \sum_{l=1}^m \mathbf{D}_l \mathbf{H}_l(t) \right] = \left[ \sum_{k=1}^m \mathbf{C}_k \mathbf{D}_k \mathbf{H}_k(t) \right]$$

(3.20)

$$\mathbf{C}^{-1}(t) \cong \left[ \sum_{k=1}^m \mathbf{C}_k \mathbf{H}_k(t) \right]^{-1} = \sum_{k=1}^m \mathbf{C}_k^{-1} \mathbf{H}_k(t)$$

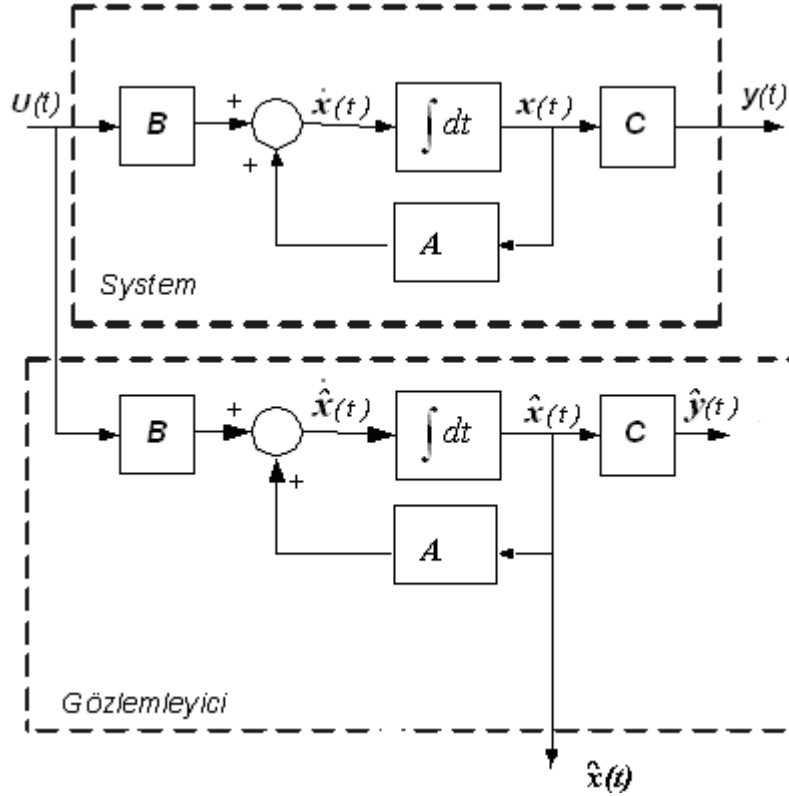
(3.21)

sonuçları elde edilir.

## BÖLÜM 4. GÖZLEMLEYİCİLER

### 4.1. Açık Çevrimli Gözlemleyiciler

Açık çevrimli gözlemleyiciler, sadece giriş büyüklüklerini kullanarak durumları kestirilecek olan dinamik sistemlerin durum denklemlerinin çözümüne dayanır. Şekil 4.1 'de açık çevrimli bir gözlemleyiciye ilişkin benzetim diyagramı verilmiştir.



Şekil 4.1. Açık çevrimli gözlemleyicinin benzetim diyagramı

Benzetim diyagramından dinamik sisteme ilişkin durum denklemleri

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (4.1)$$

eşitliği ile verilebilir.

Açık çevrim gözlemleyiciye ilişkin durum denklemleri ise

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (4.2)$$

biçiminde yazılabilir. Gözlemleyici hata dinamiğine ilişkin türevsel eşitlik ise

$$\begin{aligned} \mathbf{e}(t) &= \mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t) \\ \dot{\mathbf{e}}(t) &= \dot{\mathbf{x}}(t) - \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) \\ \dot{\mathbf{e}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) - \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \dot{\mathbf{e}}(t) &= \mathbf{A}(\mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t)) \\ \dot{\mathbf{e}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{e}(t) \end{aligned} \quad (4.3)$$

olarak elde edilir.

Denklem (4.3) ile verilen gözlemleyici hata dinamiğinin özdeğerlerinin  $\mathbf{A}$  matrisinin özdeğerleri olduğu açıkça görülmektedir. Sonuç olarak, (4.3) türevsel eşitliğinde  $t \rightarrow \infty$  iken  $\mathbf{e}(t) \rightarrow 0$  olabilmesi için  $\mathbf{A}$  matrisinin özdeğerlerinin gerçel kısımları negatif işaretli (yani sistemin kutuplarının tümü sol yarı s düzleminde) olmalıdır. Bir başka ifade ile açık çevrimli gözlemleyicilerin gerçek çözüme yakınsayabilmesi için orjinal sistem kararlı olmalıdır.

Açık çevrimli gözlemleyicide  $\mathbf{x}(0)$  bilgisinde  $\varepsilon$  gibi küçük bir hata olduğunu kabul edelim.

$$\begin{aligned} |\varepsilon| &\ll |\mathbf{x}(0)| \text{ olmak üzere,} \\ \hat{\mathbf{x}}(0) &= \mathbf{x}(0) + \varepsilon \end{aligned} \quad (4.4)$$



$$e(0) = x(0) - \hat{x}(0) \quad (4.5)$$

$$e(0) = -\varepsilon \quad (4.6)$$

Bu durumda hata dinamiği denkleminin çözümü aşağıdaki gibi elde edilir.

$$e(t) = -\varepsilon e^{At} \quad (4.7)$$

Görüldüğü gibi, açık çevrimli gözlemleyicilerde ilk değerlerin seçiminde yapılan küçük bir hata zamanla artmaktadır. Ayrıca (4.3) denklemi ile verilen hata dinamiğini kontrol etmemizi sağlayacak herhangi bir araç yoktur. Bu nedenlerle açık çevrimli gözlemleyiciler pratikte pek kullanılmaz.

#### 4.2. Kapalı Çevrimli Gözlemleyiciler

Kapalı çevrimli gözlemleyiciler dinamik sistemin giriş büyüklükleri ile birlikte çıkış ölçümlerini de kullandığından, keyfi bir  $G$  kazanç matrisi ile gözlemleyici dinamiğinin özdeğerleri keyfi olarak seçilebilir. Söz konusu bu keyfi seçim için sistemin durum gözlenebilir olması gerekir.

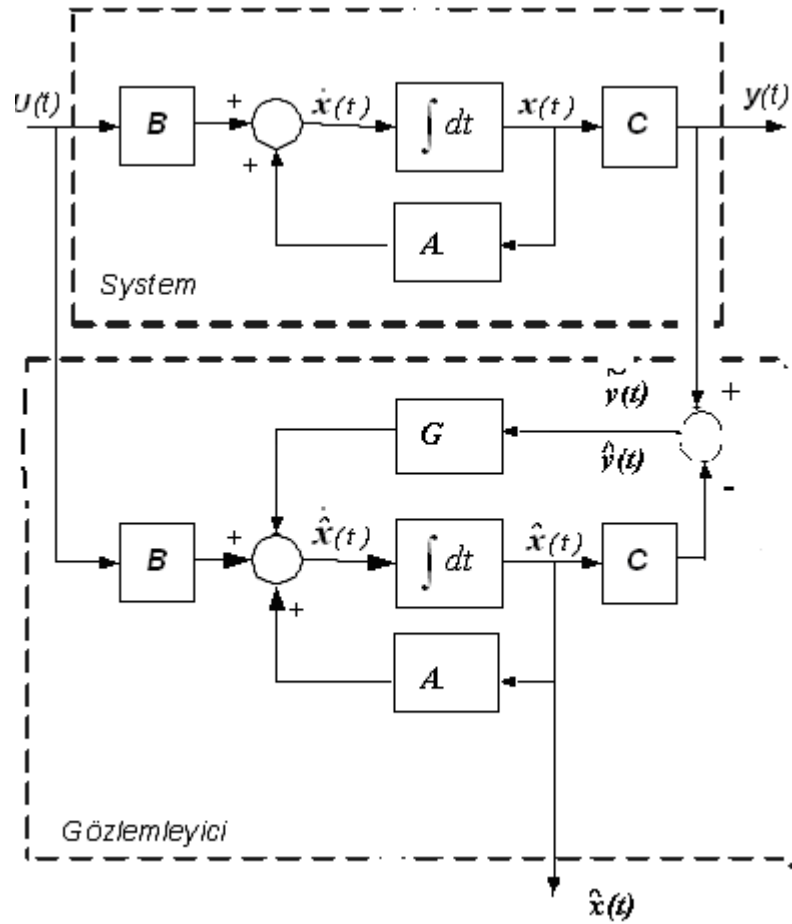
Kapalı çevrimli gözlemleyiciler, tam-mertebeli gözlemleyiciler (full order observers) ve indirgenmiş-mertebeli gözlemleyiciler (reduced order observers) olmak üzere iki türde gerçekleştirilebilir. Tam-mertebeli gözlemleyiciler ölçülemeyen durum değişkenlerinin yanı sıra ölçülebilen durum değişkenlerini de kestirdiğinden, gözlemleyici mertebesi yüksek olacaktır. Dolayısıyla gözlemleyicinin yürütülmesinde kullanılacak olan işlem sayısı fazla olacaktır.

İndirgenmiş mertebeli gözlemleyicilerde ise yalnızca ölçülemeyen durum değişkenleri kestirildiğinden gözlemleyici mertebesi ve gözlemleyicinin yürütülmesinde kullanılan işlem sayısı minimumdur.

Tam-mertebeli ve indirgenmiş-mertebeli gözlemleyicileri ayrı ayrı incelemek faydalı olacaktır.

#### 4.2.1. Tam-mertebeli gözlemleyiciler

Tam-mertebeli gözlemleyici olarak D.G. Luenberge tarafından sunulan kapalı çevrim gözlemleyicinin benzetim diyagramı Şekil 4.2 'de verilmiştir:



Şekil 4.2. Tam-mertebeli gözlemleyicinin benzetim diyagramı

Şekil 4.2 'den dinamik sisteme ilişkin durum ve çıkış denklemleri;

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (4.8)$$

$$y(t) = Cx(t) \quad (4.9)$$

ve gözlemleyiciye ilişkin durum denklemleri;

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + G[y(t) - \hat{y}(t)] \quad (4.10)$$

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + G[y(t) - C\hat{x}(t)] \quad (4.11)$$

$$\dot{\hat{x}}(t) = (A - GC)\hat{x}(t) + Bu(t) + Gy(t) \quad (4.12)$$

eşitlikleri ile verilebilir.

Bu durumda tam-mertebeli gözlemleyici için standart formda durum uzayı modeli aşağıdaki denklemlerle ifade edilebilir:

$$\dot{\hat{x}}(t) = (A - GC)\hat{x}(t) + \begin{bmatrix} B \\ G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

$$\hat{y}(t) = C\hat{x}(t) \quad (4.14)$$

Gözlemleyicinin hata dinamiğine ilişkin türevsel eşitlik için aşağıdaki bağıntıları yazalım:

$$\dot{x}(t) - \dot{\hat{x}}(t) = Ax(t) + Bu(t) - A\hat{x}(t) - Bu(t) - G[y(t) - C\hat{x}(t)] \quad (4.15)$$

$$\dot{x}(t) - \dot{\hat{x}}(t) = Ax(t) - A\hat{x}(t) - G[Cx(t) - C\hat{x}(t)] \quad (4.16)$$

$$\dot{x}(t) - \dot{\hat{x}}(t) = (A - GC)(x(t) - \hat{x}(t)) \quad (4.17)$$

(4.17) 'de  $e(t) = (x(t) - \hat{x}(t))$  ve  $\dot{e}(t) = (\dot{x}(t) - \dot{\hat{x}}(t))$  eşitliklerini yerleştirirsek gözlemleyici hata dinamiği türevsel eşitliği;

$$\dot{e}(t) = (A - GC)e(t) \quad (4.18)$$

olarak elde edilir. (4.18) denkleminde, gözlemleyici hata dinamiğinin  $(A - GC)$  matrisinin özdeğerleri tarafından belirleneceği aşikardır. Eğer  $(A - GC)$  matrisinin özdeğerlerinin gerçel bileşenlerinin tümü negatif işaretli ise, gözlemleyici durum değişkenleri  $\hat{x}(t)$ ,  $t \rightarrow \infty$  için gerçek çözüm  $x(t)$  'e yakınsayacaktır.

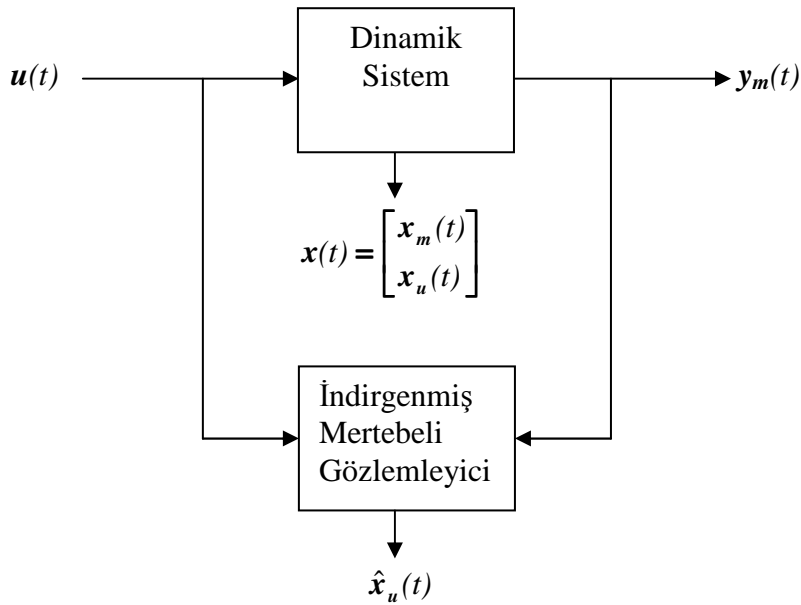
$(A - GC)$ 'nin özdeğerlerini keyfi olarak yerleştirmemizi sağlayacak  $G$  matrisinin seçilebilmesi için gerek ve yeter koşul, sistemin durum gözlemlenebilir olmasıdır. Durum gözlemlenebilirlik için gerek ve yeter koşul ise aşağıdaki ifade ile verilen  $nr \times n$

boyutlu  $Q_0$  gözlenebilirlik matrisinden  $n$  adet doğrusal bağımsız satır seçilebilmesidir. Burada  $n$  değeri, gözlemleyici durum uzayı modelinin boyutudur.

$$Q_0 = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ C(A)^2 \\ \vdots \\ C(A)^{n-1} \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

#### 4.2.2. İndirgenmiş-mertebeli gözlemleyiciler

Şekil 4.3 'de indirgenmiş-mertebeli gözlemleyiciye ilişkin blok gösterimi verilmiştir:



Şekil 4.3. İndirgenmiş-mertebeli gözlemleyiciye ilişkin blok gösterimi

Dinamik sisteme ilişkin durum ve çıkış denklemlerini aşağıdaki eşitlikler ile yazılabilir:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_m(t) \\ \dot{x}_u(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{mm} & A_{mu} \\ A_{um} & A_{uu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_m(t) \\ x_u(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_m \\ B_u \end{bmatrix} u(t) \quad (4.20)$$

$$\mathbf{y}_m(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_m(t) \\ \mathbf{x}_u(t) \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

Burada  $\mathbf{x}(t)$  (n-r) boyutlu ölçülebilen durum vektör bileşeni,  $\mathbf{x}_u$  ölçülemeyen durum vektör bileşeni,  $\mathbf{u}(t)$  m boyutlu giriş vektörü,  $\mathbf{y}_m(t)$  r boyutlu çıkış vektörüdür.  $\mathbf{A}_{mm}$  (m x m) boyutlu,  $\mathbf{A}_{mu}$  (m x r) boyutlu,  $\mathbf{A}_{um}$  (r x m) boyutlu ve  $\mathbf{A}_{uu}$  (r x r) boyutlu alt matrislerdir. Görüldüğü gibi, sistemin r adet durum değişkeni  $\mathbf{y}_m(t)$  çıkışından ölçülememektedir. Dolayısıyla kestirim gereklidir.

(4.21) denkleminde elde edilen  $\mathbf{x}_m(t) = \mathbf{y}_m(t)$  ve  $\dot{\mathbf{x}}_m(t) = \dot{\mathbf{y}}_m(t)$  eşitliklerini (4.20) eşitliğinin ölçülebilen durum değişkenlerine ilişkin bileşeninde yerleştirilirse

$$\dot{\mathbf{y}}_m(t) = \mathbf{A}_{mm} \mathbf{y}_m(t) + \mathbf{A}_{mu} \mathbf{x}_u(t) + \mathbf{B}_m \mathbf{u}(t) \quad (4.22)$$

elde edilir. (4.22) eşitliğinden

$$\mathbf{y}_u(t) = \mathbf{A}_{mu} \mathbf{x}_u(t) = \dot{\mathbf{y}}_m(t) - \mathbf{A}_{mm} \mathbf{y}_m(t) - \mathbf{B}_m \mathbf{u}(t) \quad (4.23)$$

yazılabilir. (4.23) bağıntısını, (4.20) 'deki ölçülemeyen durum değişkenine ilişkin bileşende yerleştirilirse, indirgenmiş gözlemleyiciye ilişkin durum ve çıkış denklemleri aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\mathbf{x}}}_u(t) &= \mathbf{A}_{uu} \hat{\mathbf{x}}_u(t) + \mathbf{A}_{um} \mathbf{x}_m(t) + \mathbf{B}_u \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}_u(t) &= \mathbf{A}_{mu} \hat{\mathbf{x}}_u(t) \end{aligned} \quad (4.24)$$

(4.24) bağıntısı ile indirgenmiş gözlemleyiciye ilişkin gözlemleyici denklemi

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}_u(t) = \mathbf{A}_{uu} \hat{\mathbf{x}}_u(t) + \mathbf{A}_{um} \mathbf{y}_m(t) + \mathbf{B}_u \mathbf{u}(t) + \mathbf{G}_u [\mathbf{y}_u(t) - \mathbf{A}_{mu} \hat{\mathbf{x}}_u(t)] \quad (4.25)$$

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}_u(t) = (\mathbf{A}_{uu} - \mathbf{G}_u \mathbf{A}_{mu}) \hat{\mathbf{x}}_u(t) + \mathbf{A}_{um} \mathbf{y}_m(t) + \mathbf{B}_u \mathbf{u}(t) + \mathbf{G}_u \mathbf{y}_u(t) \quad (4.26)$$

biçiminde düzenlenebilir. Burada  $\mathbf{G}_u$ , (n x r) boyutlu kazanç matrisidir.

İndirgenmiş-mertebeli gözlemleyicinin hata dinamiği ise;

$$\mathbf{e}_u(t) = \mathbf{x}_u(t) - \hat{\mathbf{x}}_u(t) \quad (4.27)$$

$$\dot{\mathbf{e}}_u(t) = \dot{\mathbf{x}}_u(t) - \dot{\hat{\mathbf{x}}}_u(t) = \mathbf{A}_{uu} \mathbf{x}_u(t) + \mathbf{A}_{um} \mathbf{x}_m(t) + \mathbf{B}_m \mathbf{u}(t) - \mathbf{A}_{uu} \hat{\mathbf{x}}_u(t) - \mathbf{A}_{um} \mathbf{y}_m(t) - \mathbf{B}_u \mathbf{u}(t) + \mathbf{G}_u [\mathbf{y}_u(t) - \mathbf{A}_{mu} \hat{\mathbf{x}}_u(t)] \quad (4.28)$$

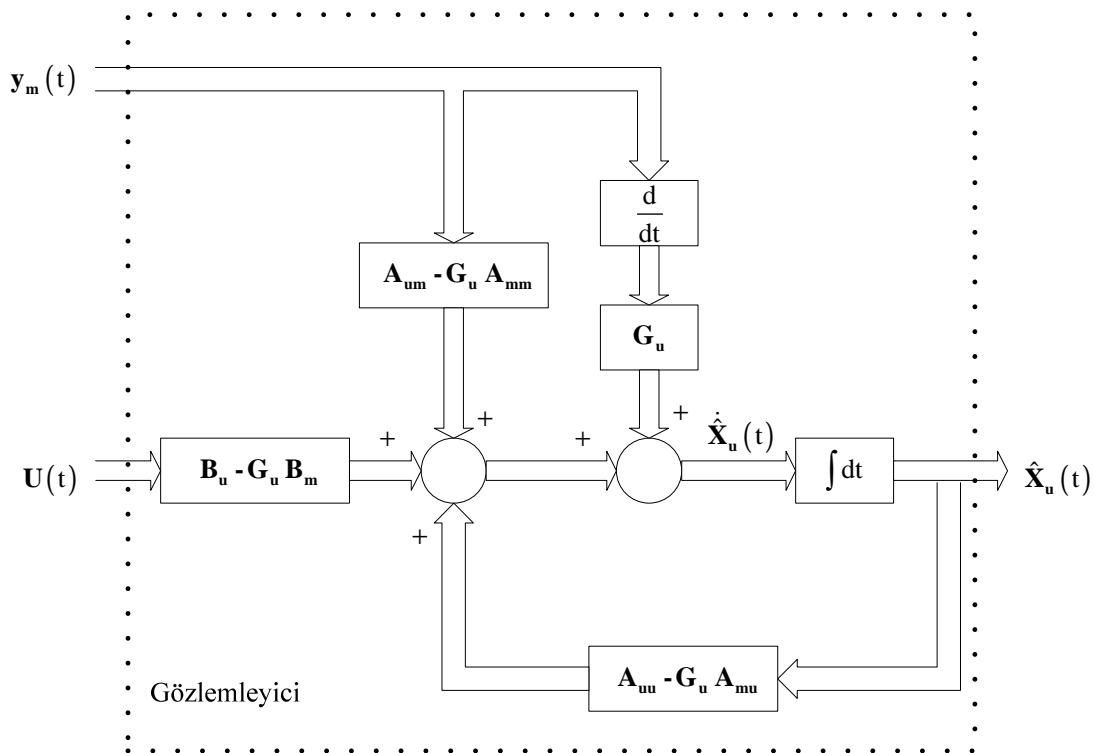
$$\dot{\mathbf{e}}_u(t) = \mathbf{A}_{uu} (\mathbf{x}_u(t) - \hat{\mathbf{x}}_u(t)) \mathbf{e}_u(t) - \mathbf{G}_u \mathbf{A}_{mu} [\mathbf{x}_u(t) - \hat{\mathbf{x}}_u(t)] \quad (4.29)$$

$$\dot{\mathbf{e}}_u(t) = (\mathbf{A}_{uu} - \mathbf{G}_u \mathbf{A}_{mu}) \mathbf{e}_u(t) \quad (4.30)$$

İndirgenmiş-mertebeli gözlemleyiciye ilişkin (4.26) eşitliğinde;

$$\mathbf{y}_u(t) = \dot{\mathbf{y}}_m(t) - \mathbf{A}_{mm} \mathbf{y}_m(t) - \mathbf{B}_m \mathbf{u}(t) \quad (4.31)$$

yerleştirilirse, aşağıdaki gibi türevsel terimli benzetim diyagramı elde edilir:



Şekil 4.4. İndirgenmiş-mertebeli gözlemleyici benzetim diyagramı ( türev terimi içerir )

Şekil 4.4 'te görüldüğü gibi, diyagramda  $\dot{y}_m(t)$  türev terimi söz konusudur. Gürültüden dolayı  $\dot{y}_m(t)$  terimini elde etmek oldukça zor olduğundan uygun bir dönüşüm ile türevsel terim kaldırılabilir. Bu amaçla (4.26) denkleminde;

$$\hat{x}_u(t) = \theta(t) + G_u y_m(t) \quad (4.32)$$

dönüşümü yapıp  $y_m(t)$  yerine (4.31) ifadesi yerleştirilirse;

$$\dot{\hat{x}}_u(t) = \theta(t) + G_u \dot{y}_m(t) = (A_{uu} - G_u A_{mu})(\theta(t) + G_u y_m(t)) + A_{um} y_m(t) + B_u u(t) + G_u (\dot{y}_m(t) - A_{mm} y_m(t) - B_m u(t)) \quad (4.33)$$

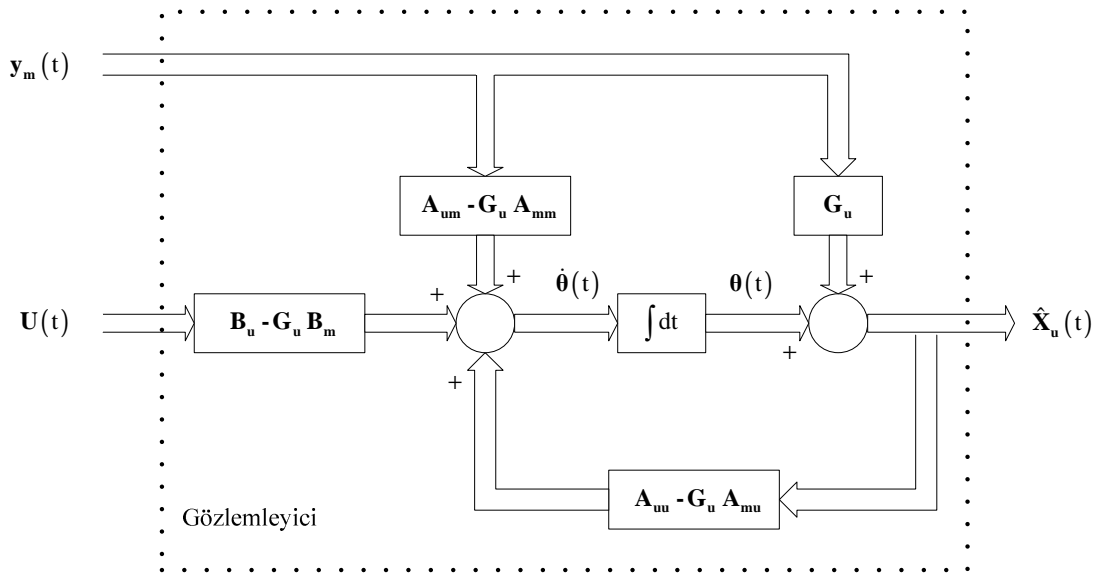
$$\dot{\theta}(t) = (A_{uu} - G_u A_{mu})\theta(t) + A_{uu} G_u y_m(t) - G_u A_{mu} G_u y_m(t) + A_{um} y_m(t) + B_u u(t) - G_u A_{mu} y_m(t) - G_u B_m u(t) \quad (4.34)$$

$$\dot{\theta}(t) = (A_{uu} - G_u A_{mu})\theta(t) + (A_{uu} G_u - G_u A_{mu} G_u + A_{um} + -G_u A_{mu}) y_m(t) + (B_u - G_u B_m) u(t) \quad (4.35)$$

Sonuç olarak;

$$\begin{aligned} \hat{x}_m(t) &= x_m(t) = y_m(t) \\ \hat{x}_u(t) &= \theta(t) + G_u y_m(t) \end{aligned} \quad (4.36)$$

denklemlerini ve (4.35) eşitliğini kullanarak türev terimi içermeyen aşağıdaki indirgenmiş-mertebeli gözlemleyici benzetim diyagramı çizilebilir:



Şekil 4.5. İndirgenmiş-mertebeli gözlemleyici benzetim diyagramı ( türevsel terim içermez )

(4.35) ve (4.36) denklemlerinden faydalanarak Şekil 4.5 'teki gibi verilen indirgenmiş-mertebeli gözlemleyici için durum ve çıkış denklemlerini aşağıdaki gibi yeniden yazabiliriz:

$$\dot{\theta}(t) = (A_{uu} - G_u A_{mu})\theta(t) + [(B_u - G_u B_m) : ((A_{uu} - G_u A_{mu})G_u + A_{um} + -G_u A_{mu})] \begin{bmatrix} u(t) \\ y_m(t) \end{bmatrix} \quad (4.37)$$

$$\hat{x}_u(t) = [I\theta(t) + [0] : G_u] \begin{bmatrix} u(t) \\ y_m(t) \end{bmatrix} \quad (4.38)$$

İndirgenmiş-mertebeli gözlemleyici dinamiğinin özdeğerlerinin yani  $(A_{uu} - G_u A_{mu})$  'nin özdeğerlerinin durum gözlenebilir olması gerekir. Bunun için gerek ve yeter koşul aşağıdaki ifade ile verilen  $nr \times n$  boyutlu  $Q_0$  gözlenebilirlik matrisinin tam rank olmasıdır. Burada n değeri, gözlemleyici durum uzayı modelinin boyutudur.



$$Q_0 = \begin{bmatrix} A_{mu} \\ A_{mu} A_{uu} \\ A_{mu} (A_{uu})^2 \\ \vdots \\ A_{mu} (A_{uu})^{n-1} \end{bmatrix} \quad (4.39)$$

Not: Eğer  $(C, A)$  gözlenebilir ise,  $(A_{mu}, A_{uu})$  da gözlenebilirdir.

### 4.3. Ackermann Formülü:

Kapalı çevrimli gözlemleyici tasarlamak aslında  $G$  kazanç matrisini bulmak anlamına gelir. Bunu başarmak için literatürde birkaç yöntem geliştirilmiştir. Bu çalışmada en yaygın olan yöntemi tam-mertebeli gözlemleyici denklemleri için sunacağız. Tablo 4.1'de verilen karşılıklar kullanılarak indirgenmiş-mertebe gözlemleyici için de yöntem rahatlıkla uygulanabilir.

Durum gözlemlenebilir bir sistem için gözlemleyicinin kutuplarını  $(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$  noktalarına yerleştirmek isteyelim. Bu durumda arzu edilen karakteristik denklem:

$$\varphi(s) = (s - \mu_1)(s - \mu_2) \dots (s - \mu_n) \quad (4.40)$$

$$\varphi(s) = (s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1} s + \alpha_n = 0 \quad (4.41)$$

Cayley-Hamilton teoremine göre sistemin durum matrisi  $\tilde{A}$  kendi karakteristik denklemini sağlar.

$$\varphi(\tilde{A}) = (\tilde{A}^n + \alpha_1 \tilde{A}^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1} \tilde{A} + \alpha_n = 0 \quad (4.42)$$

Tam-mertebeli gözlemleyici için  $\tilde{A} = A - GC$  olduğunu hatırlayalım. Bu ifade (4.42) denkleminde yerine yazılırsa;

$$\varphi(A) = \left[ \alpha_{n-1}G + \alpha_{n-2}G\tilde{A} + \dots + G\tilde{A}^{n-1} \ : \ \dots \ : \ (\alpha_1G + G\tilde{A} \ : \ G) \right] \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ C(A)^{n-1} \end{bmatrix} \quad (4.43)$$

elde edilir.

Durum gözlenebilir bir sistem için gözlenebilirlik matrisinin tersi vardır.

Bu durumda;

$$\varphi(A) \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ C(A)^{n-1} \end{bmatrix}^{-1} = \left[ \alpha_{n-1}G + \alpha_{n-2}G\tilde{A} + \dots + G\tilde{A}^{n-1} \ : \ \dots \ : \ (\alpha_1G + G\tilde{A} \ : \ G) \right] \quad (4.44)$$

yazılabilir.

Son eşitliğin her iki tarafını  $[\mathbf{0} \ \mathbf{0} \ \dots \ \mathbf{1}]^t$  vektörü ile çarparsak;

$$\varphi(A) \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ C(A)^{n-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{1} \end{bmatrix} = \left[ \alpha_{n-1}G + \alpha_{n-2}G\tilde{A} + \dots + G\tilde{A}^{n-1} \ : \ \dots \ : \ (\alpha_1G + G\tilde{A} \ : \ G) \right] \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{1} \end{bmatrix} \quad (4.45)$$

kazanç matrisinin formülü aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$G = \varphi(A) \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ C(A)^{n-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{1} \end{bmatrix} \rightarrow G = \varphi(A) * Q_0^{-1} * \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{1} \end{bmatrix}_{nx1} \quad (4.46)$$

Bir gözlemleyici için  $G$  tek değildir. Arzu edilen farklı özdeğerlere göre  $G$  de farklı olur. Gözlemleyici tasarlarırken birden fazla  $G$  elde edilir. Benzetimde her bir  $G$  için sistem performansı incelenir. Pratikte  $G$  matrisinin seçimi, hızlı cevap ile bozucu ve gürültülere karşı hassasiyet arasında bir denge sağlanacak şekilde yapılmalıdır.

#### 4.4. Çok Çıkışlı Sistemler İçin Kazanç Matrisinin Bulunması:

$r$  adet çıkışa sahip dinamik bir sistem için  $G$  dinamik geri besleme kazanç matrisi  $n \times r$  boyutludur. Çözüm için farklı yaklaşımlar söz konusudur.  $A$  durum matrisinin cyclic (devirli) olması [16] durumunda söz konusu geri besleme kazanç matrisi

$$G_{n \times r} = N_{n \times 1} * R_{1 \times r} \quad (4.47)$$

biçiminde iki vektör çarpımı olarak yazılabilir. Burada  $R$  keyfi seçilerek,  $N$  vektörü tek çıkışlı sistemler için Bass Gura, Ackermann vb. gibi yöntemlerden biri kullanılarak hesaplanır. Şimdi (4.47) ile verilen ifade geri beslemeli sistemdeki  $(A - GC)$  'de yerleştirilirse;

$$(A - GC) \rightarrow (A - NRC) \quad (4.48)$$

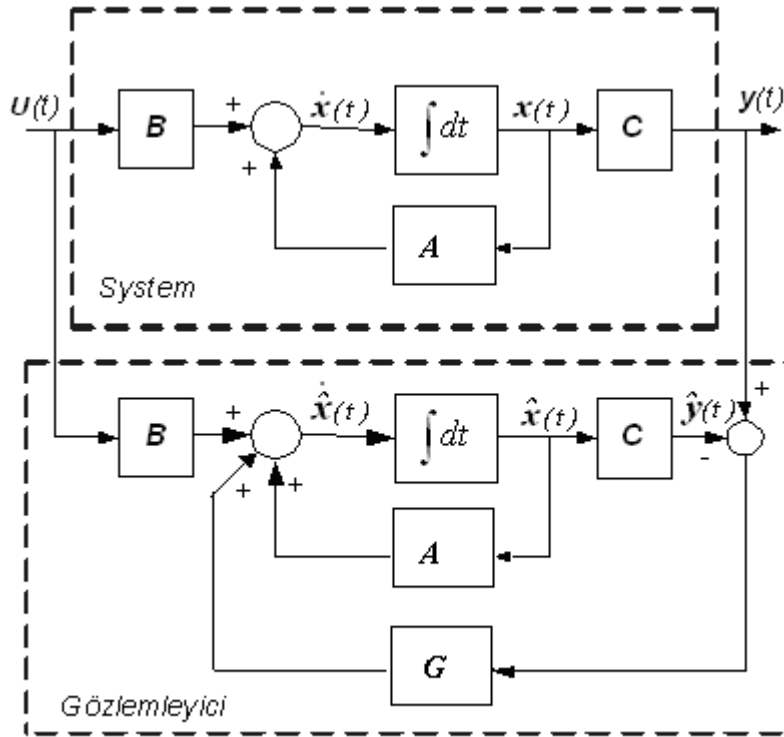
$$C_m = RC \quad (4.49)$$

$$(A - GC) \rightarrow (A - NC_m) \quad (4.50)$$

elde edilir. Nitekim  $C$  matrisi yerine  $C_m$ ,  $G$  yerine de  $N$  yerleştirilip seçilen uygun bir tasarım metodu ile  $N$  vektörü hesaplanır. Hesaplanan  $N$  vektörü (4.47) 'de yerleştirilerek amaçlanan  $G$  kazanç matrisi hesaplanmış olur.

## BÖLÜM 5. BLOCK PULSE FONKSİYONLARI İLE KESTİRİM ALGORİTMASI

Amaçlanan kestirim algoritması bir tür durum gözlemleyici olup Şekil 5.1 deki benzetim diyagramı ile verilmiştir.



Şekil 5.1. Kestirim algoritmasına ilişkin benzetim diyagramı

Şekil 5.1'den  $A, B$  ve  $C$  sırasıyla sistemin  $n \times n$  boyutlu durum ,  $n \times r$  boyutlu giriş ve  $p \times n$  boyutlu çıkış matrisleri olmak üzere; kestirici (gözlemleyici) için durum denklem aşağıdaki eşitlikler ile verilebilir.

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + G[y(t) - C\hat{x}(t)]$$

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + Gy(t) - GC\hat{x}(t)$$

$$\dot{\hat{x}}(t) = (A - GC)\hat{x}(t) + Bu(t) + Gy(t) \quad (5.1)$$

(5.1) eşitliğinde  $(A - GC) = M$  dönüşümünü yerleştirirsek,

$$\dot{\hat{x}}(t) = M\hat{x}(t) + Bu(t) + Gy(t) \quad (5.2)$$

elde edilir.

Burada  $G$  geri besleme matrisi olup yalnızca  $x(0) \neq \hat{x}(0)$  için etkindir ve kestirim hatasını kısa sürede sıfıra götürecektir biçimde seçilmelidir.

(5.2) gözlemleyici durum denkleminde sadece  $\hat{x}(t)$  kestirim vektörü bilinmemektedir.

(5.2) eşitliğinin her iki yanını ayrı ayrı integralenirse,

$$\hat{x}_I(t) - \hat{x}_0 = \int_0^t M\hat{x}(\tau) d\tau + \int_0^t Bu(\tau) d\tau + \int_0^t Gy(\tau) d\tau \quad (5.3)$$

elde edilir.

Bölüm 3' deki (3.4) eşitliği gözönüne alınarak, elde edilen yaklaşık bağıntıları (5.3)' de yerleştirilirse;

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^m \hat{x}_k H_k(t) - \sum_{k=1}^m \hat{x}_0 H_k(t) &= \int_0^t G \left[ \sum_{k=1}^m \hat{x}_k H_k(\tau) \right] d\tau + \int_0^t B \left[ \sum_{k=1}^m u_k H_k(\tau) \right] d\tau \\ &+ \int_0^t G \left[ \sum_{k=1}^m y_k H_k(\tau) \right] d\tau \end{aligned} \quad (5.4)$$

elde edilir.

Yine bölüm 3' deki  $\int_0^t H_k(t) dt$  integral bağıntısı için (3.7) eşitliği ile verilen yaklaşık

bağıntısı (5.4) ifadesinde yerleştirilip gerekli düzenlemeler yapılsa;

$$\sum_{k=1}^m (\hat{x}_k - \hat{x}_0) H_k(t) = \frac{T}{m} \sum_{k=1}^m (M\hat{x}_k + Bu_k + Gy_k) + \left[ \frac{1}{2} H_k(t) + \sum_{l=k+1}^{k-1} H_l(t) \right] \quad (5.5)$$

elde edilir.

(5.5) eşitliğinin her iki yanı için  $\mathbf{H}_k(t)$ 'nin katsayılarının eşitliğinden aşağıdaki bağıntılar elde edilir;

$$\hat{\mathbf{x}}_1 - \hat{\mathbf{x}}_0 = \frac{T}{2m}(\mathbf{M}\hat{\mathbf{x}}_1 + \mathbf{B}\mathbf{u}_1 + \mathbf{G}\mathbf{y}_1) \quad (5.6)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_k - \hat{\mathbf{x}}_0 = \frac{T}{2m}(\mathbf{M}\hat{\mathbf{x}}_k + \mathbf{B}\mathbf{u}_k + \mathbf{G}\mathbf{y}_k) + \frac{T}{m} \sum_{l=1}^{k-1} (\mathbf{M}\hat{\mathbf{x}}_l + \mathbf{B}\mathbf{u}_l + \mathbf{G}\mathbf{y}_l) \quad (5.7)$$

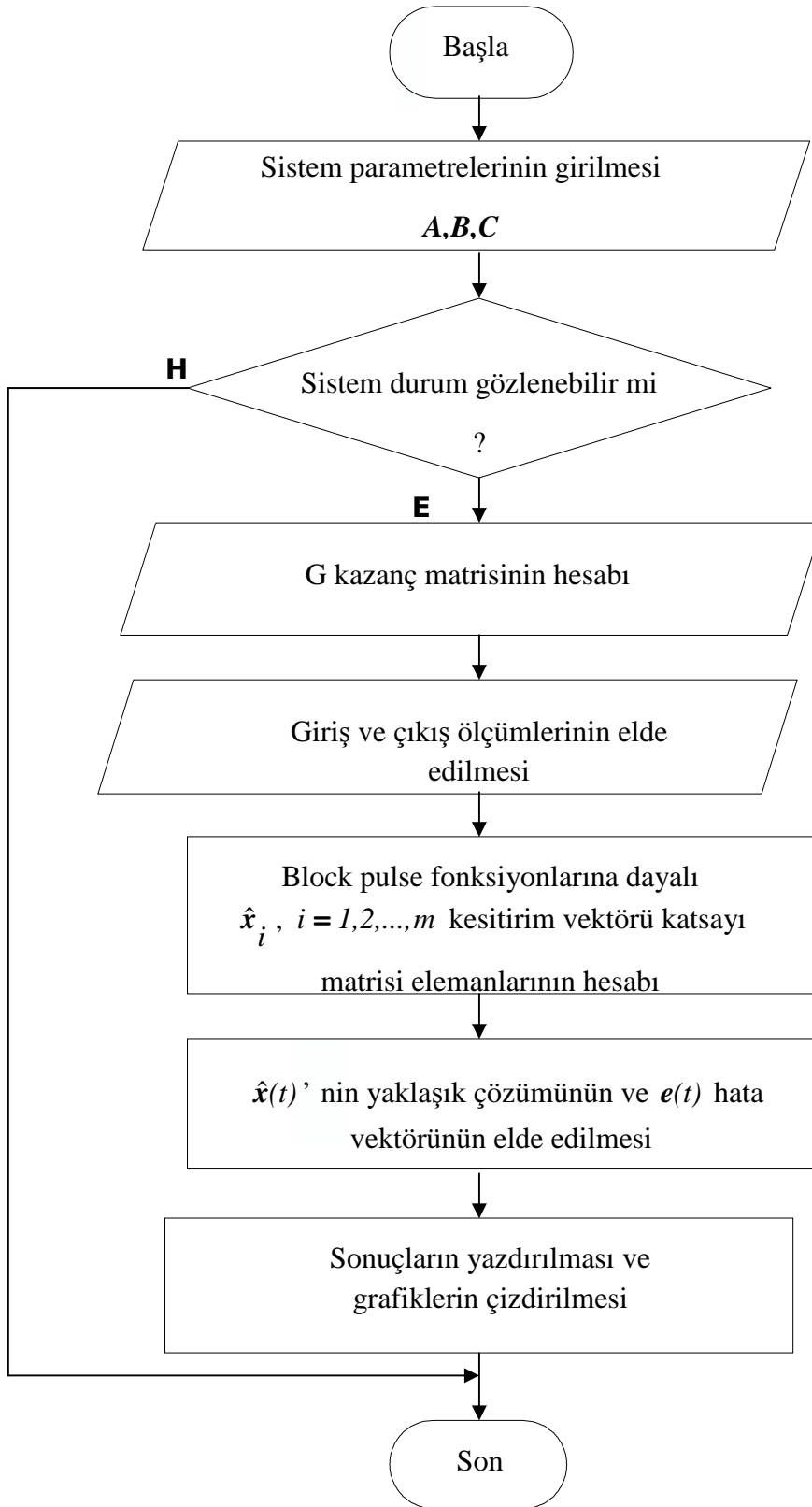
Sonuç olarak  $\hat{\mathbf{x}}(t)$ 'nin yaklaşık çözümüne ilişkin aşağıdaki yinelemeli bağıntılar elde edilir.

$$\hat{\mathbf{x}}_1 = \left[ \mathbf{I}_n - \frac{T}{2m} \mathbf{M} \right]^{-1} \left[ \hat{\mathbf{x}}_0 + \frac{T}{2m} \mathbf{B}\mathbf{u}_1 + \frac{T}{2m} \mathbf{G}\mathbf{y}_1 \right] \quad (5.8)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1} = \left[ \mathbf{I}_n - \frac{T}{2m} \mathbf{M} \right]^{-1} \left[ \left( \mathbf{I}_n - \frac{T}{2m} \mathbf{M} \right) \hat{\mathbf{x}}_k + \frac{T}{2m} (\mathbf{B}\mathbf{u}_k + \mathbf{B}\mathbf{u}_{k+1} + \mathbf{G}\mathbf{y}_k + \mathbf{G}\mathbf{y}_{k+1}) \right] \quad (5.9)$$

## **BÖLÜM 6. PROGRAMLAMA**

Bu tez çalışmasında, doğrusal zamanla değişmeyen çok giriş/çok çıkışlı dinamik sistemlerin durum değişkenlerinin kestirimine ilişkin  $\hat{x}(t)$  kestirim vektörünün ve  $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$  kestirim hatasının yaklaşık çözümleri için block-pulse fonksiyonlarına dayalı bir algoritma önerilmiştir. Önerilen algoritmaya ilişkin yinelemeli formdaki matematiksel eşitlikleri bölüm 5 de (5.8) ve (5.9) eşitlikleri ile verilmiştir. Bu bölümde söz konusu kestirim algoritmasına ilişkin program akış diyagramı 6.1’de verilmiştir.



Şekil 6.1. Program akış diyagramı



## BÖLÜM 7. UYGULAMALAR

### 7.1. Giriş

Tezde geliştirilen algoritma bölüm 6'daki program akış diyagramı göz önüne alınarak yazılan Matlab programı kullanılarak değişik örneklere uygulandı. Kestirim algoritması ile elde edilen sonuçlar ile gerçek sonuçlar karşılaştırıldı.

### 7.2. Uygulama 1

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t)$$

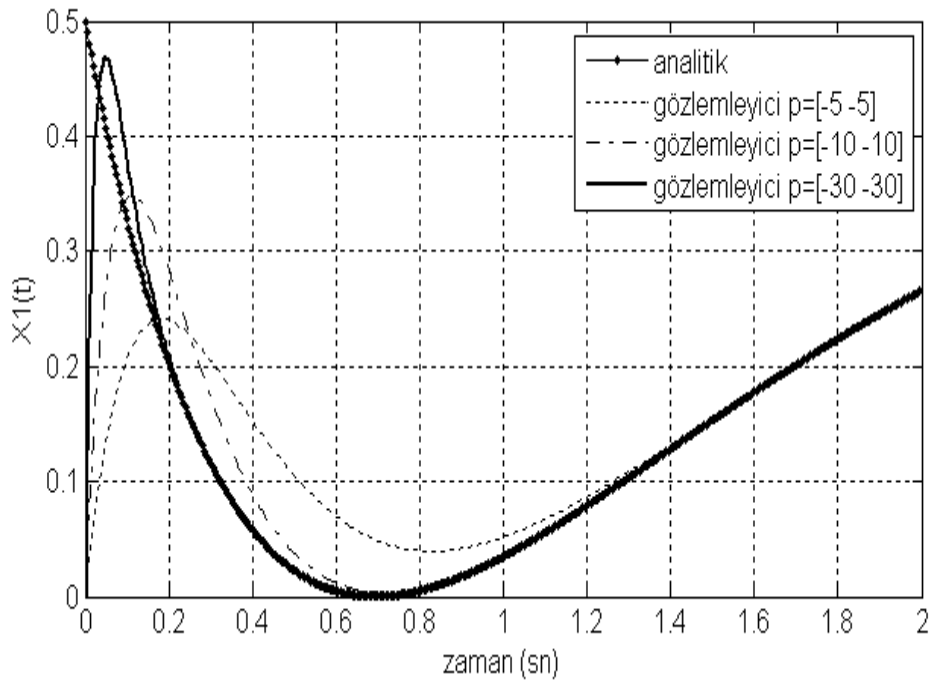
$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{c}\mathbf{x}(t)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 0,5 \\ -0,5 \end{bmatrix}$$

Yukarıdaki durum uzayı denklemleri ile verilen tek giriş tek çıkışlı dinamik sisteme ilişkin analitik çözüm ve gözlemleyici ile elde edilen durum değişkenlerinin ve gözlemleyici hatasının zamana göre değişim eğrileri  $-5$ ,  $-10$ ,  $-30$  katlı gözlemleyici özdeğerleri için şekil 7.1 ve 7.2' de ayrı ayrı çizilmiştir. Eğrilerden gözlemleyici özdeğerleri sol yarı s düzleminde orjinden uzaklaştıkça kestirim hatasının daha kısa sürede sifıra yakınsadığı açıkça görülmektedir.

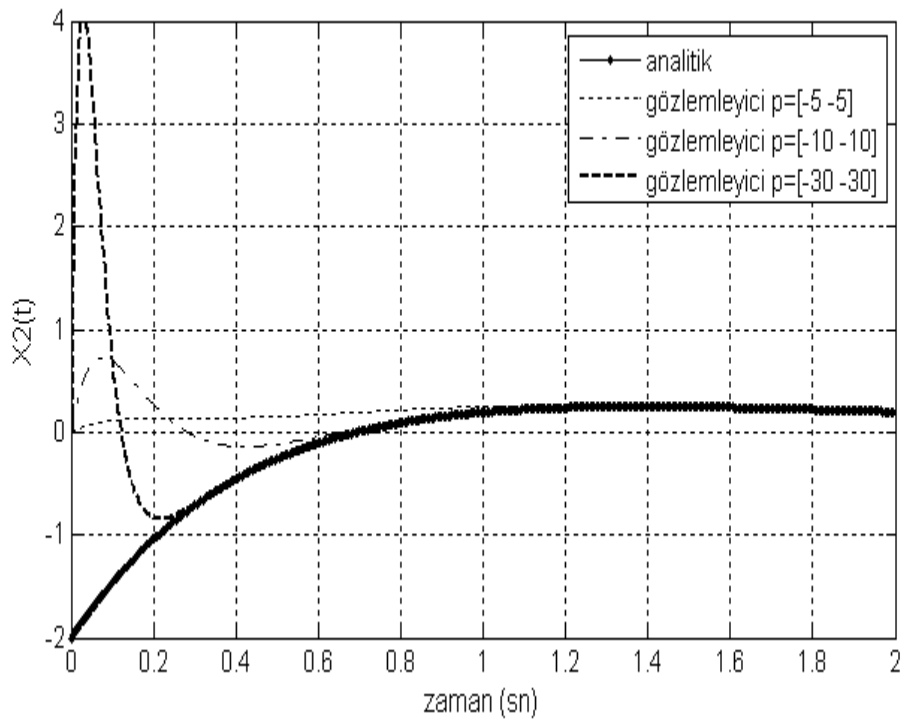
Aynı sisteme ilişkin analitik çözüm ve geliştirilen kestirim algoritması ile elde edilen durum değişkenlerinin ve kestirim hatasının zamana göre değişim eğrileri ise aynı katlı gözlemleyici özdeğerleri için şekil 7.3 ve 7.4' de verilmiştir. Şekillerdekestirim

eğrilerinin analitik çözüm eğrilerini gözlemleyici sonuçlarına oldukça yakın olarak izlediği görülmektedir. Nitekim 7.5' de -30 katlı özdeğeri için verilen gözlemleyici ve kestirim hatası eğrilerinden bu durum açıkça görülmektedir. Şekil 7.6' da değişik adım aralıkları için kestirici hatası eğrileri verilmiştir. Eğrilerden adım aralığı  $m$  arttırıldıkça kestirim hatasının küçüldüğü görülmektedir. Gözlemleyici benzetiminde adım aralığı  $h=0.01$  olarak seçilmiştir.



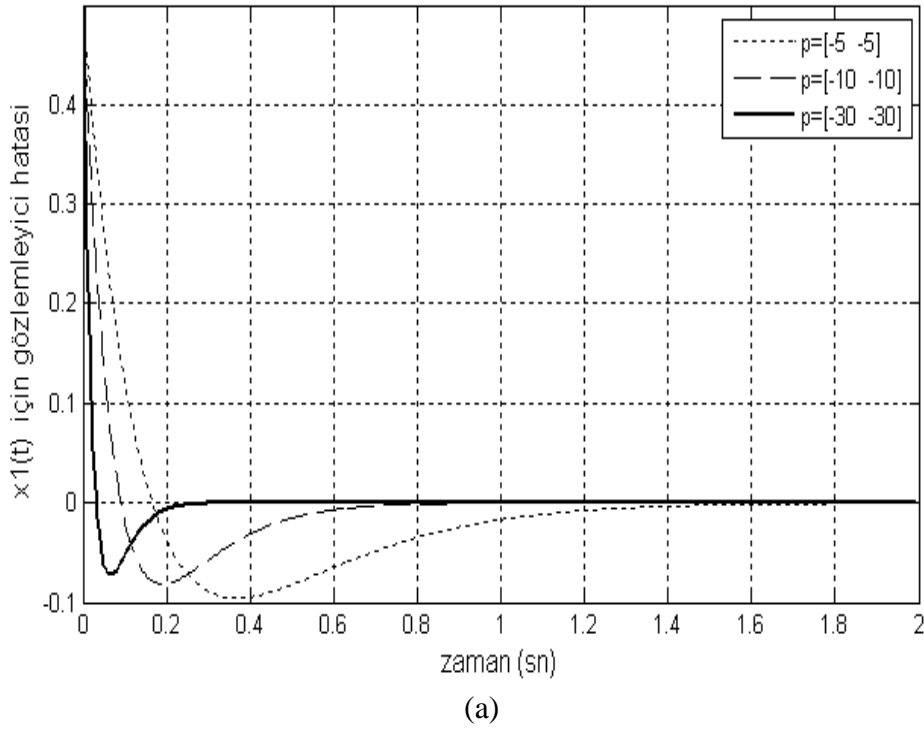
(a)

Şekil 7.1.a: Uygulama 1,  $X_1(t)$  durum değişkenine ilişkin analitik çözüm ve gözlemleyici ile elde edilen eğriler ( $h=0.01$ )

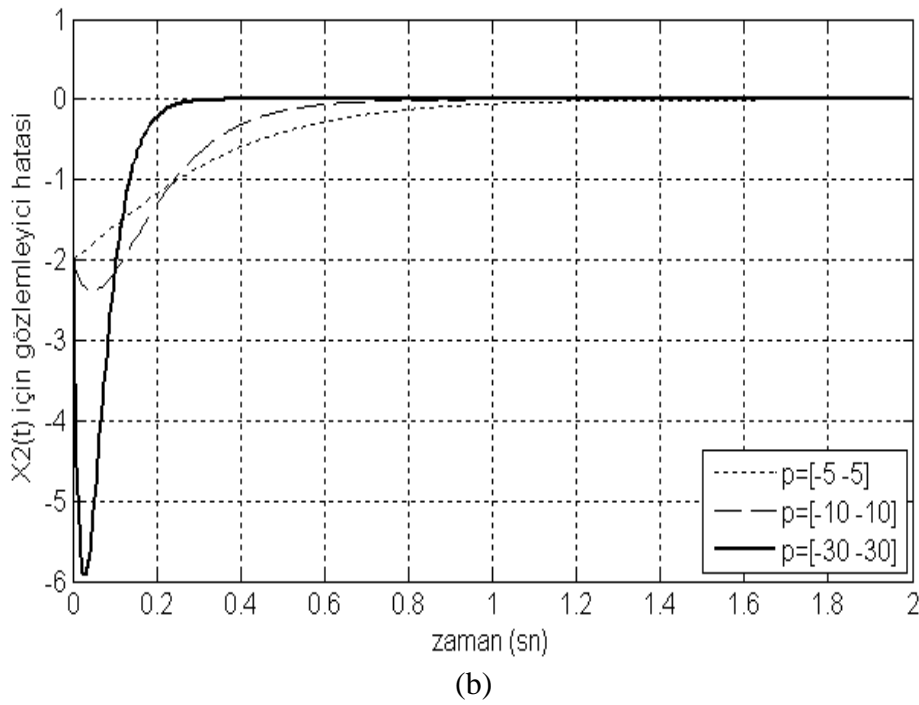


(b)

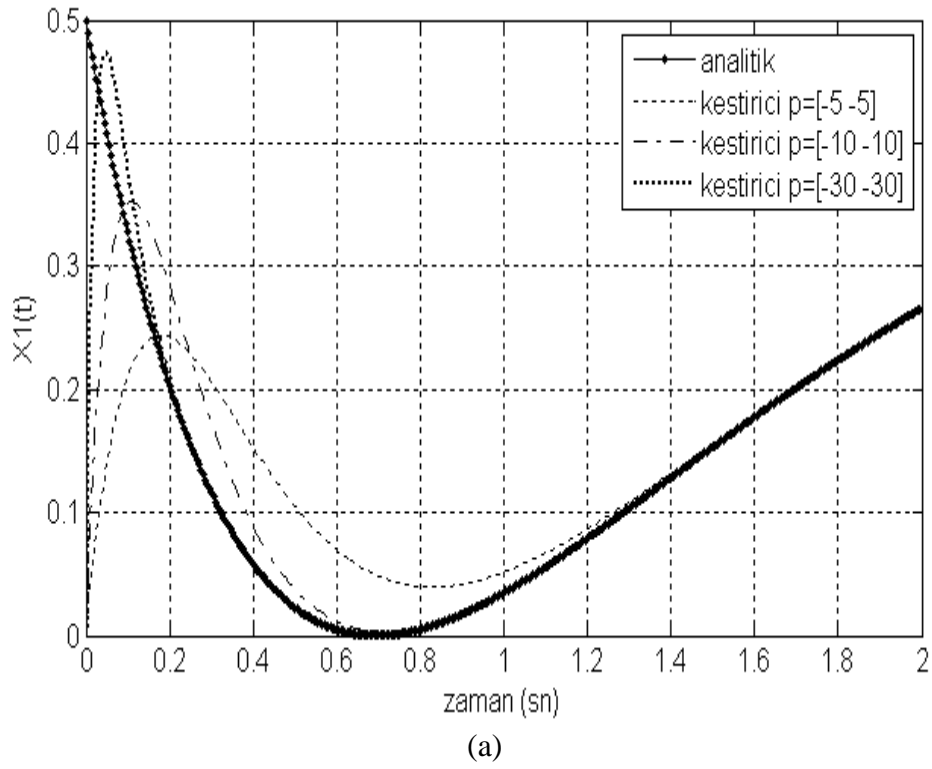
Şekil 7.1.b: Uygulama 1,  $X_2(t)$  durum değişkenine ilişkin analitik çözüm ve gözlemleyici ile elde edilen eğriler ( $h=0.01$ )



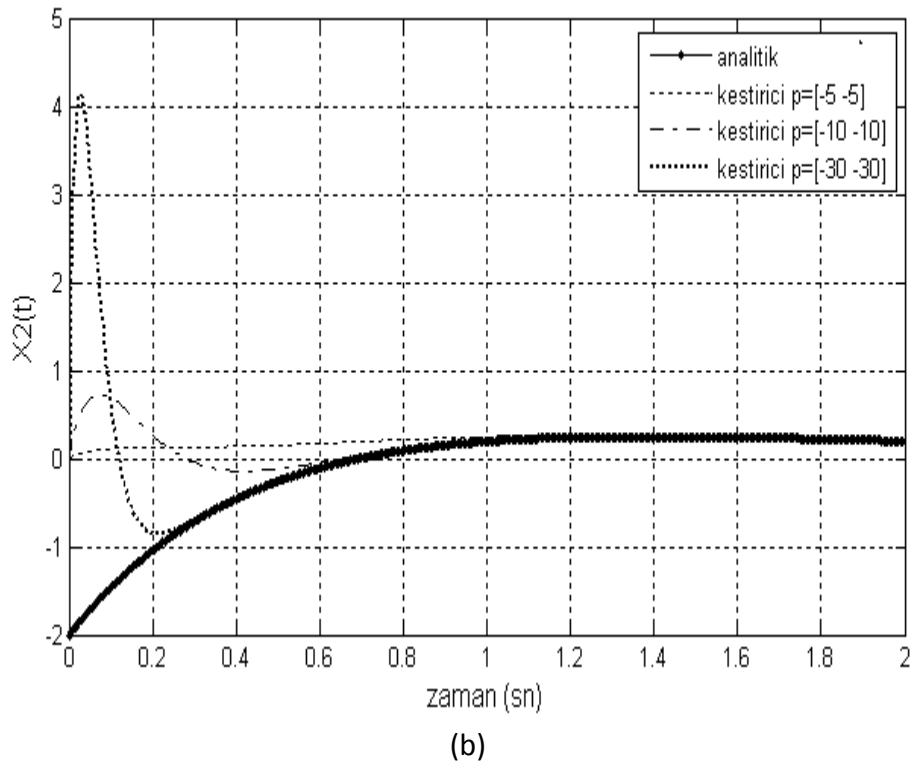
Şekil 7.2.a: Uygulama 1,  $X_1(t)$  durum değişkenine ilişkin gözlemleyici hatası eğrileri ( $h=0.01$ )



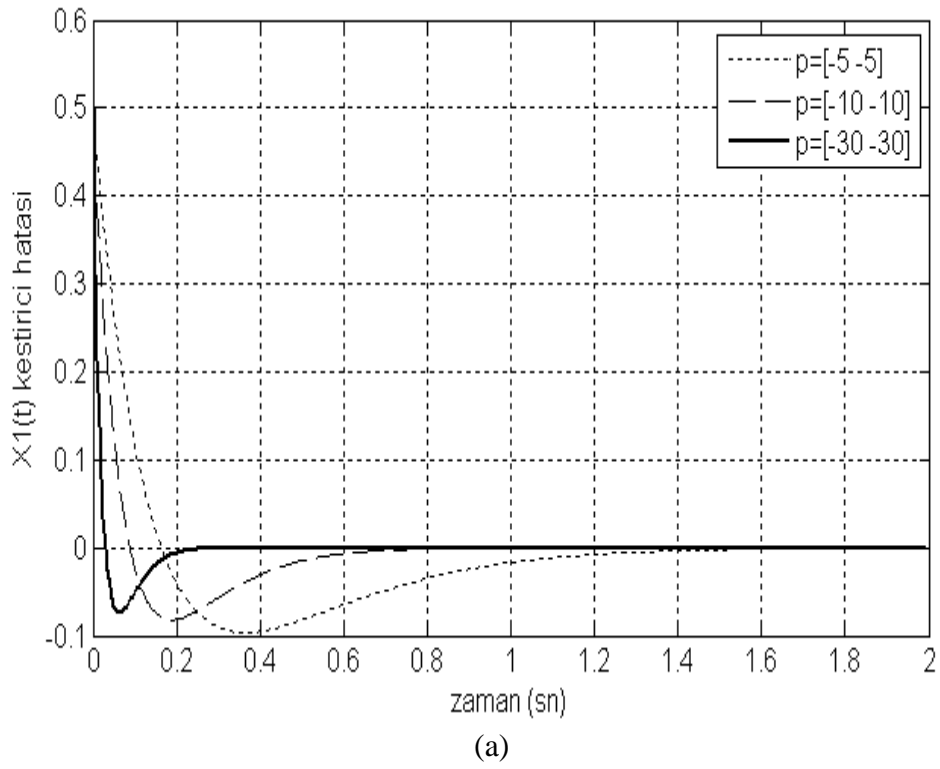
Şekil 7.2.b: Uygulama 1,  $X_2(t)$  durum değişkenine ilişkin gözlemleyici hatası eğrileri ( $h=0.01$ )



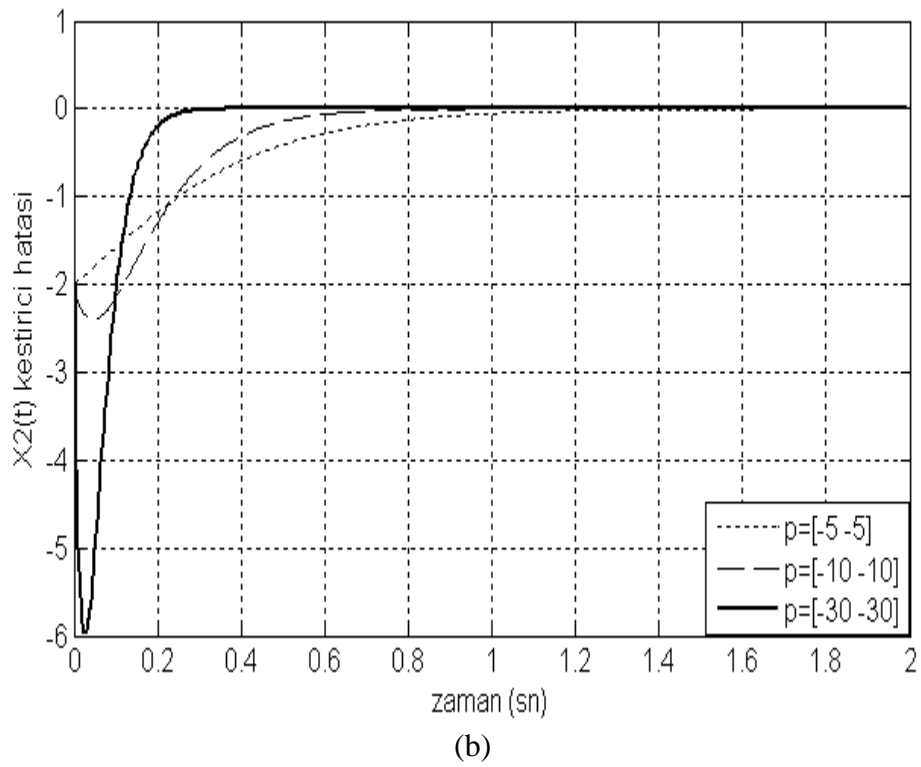
Şekil 7.3.a: Uygulama 1,  $X_1(t)$  durum değişkenine ilişkin analitik çözüm ve kestirim algoritması ile hesaplanan eğriler



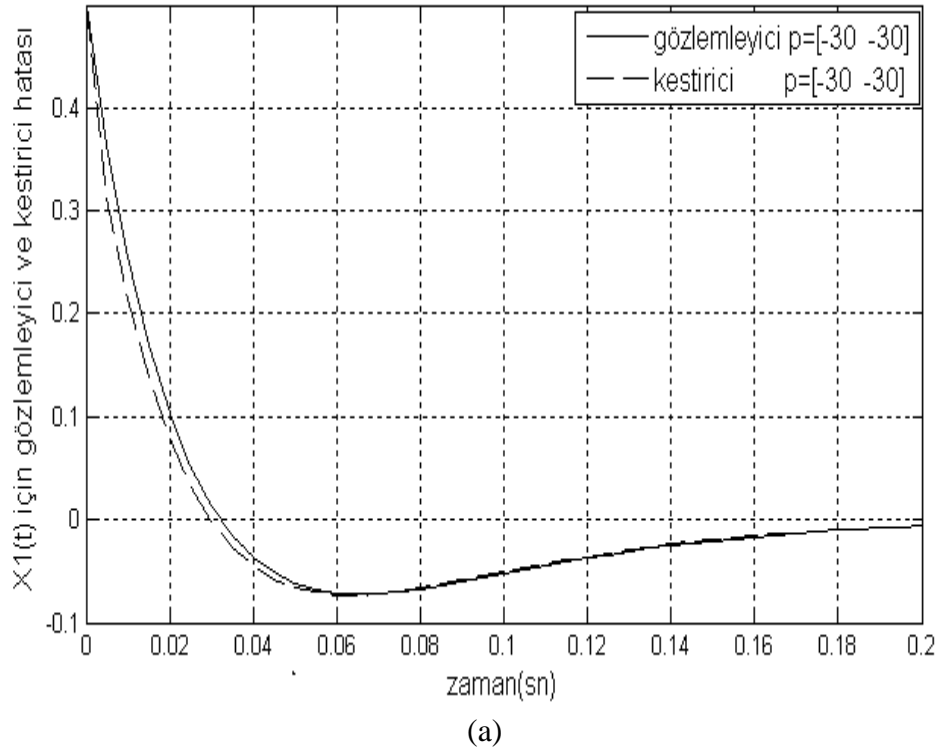
Şekil 7.3.b: Uygulama 1,  $X_2(t)$  durum değişkenine ilişkin analitik çözüm ve kestirim algoritması ile hesaplanan eğriler



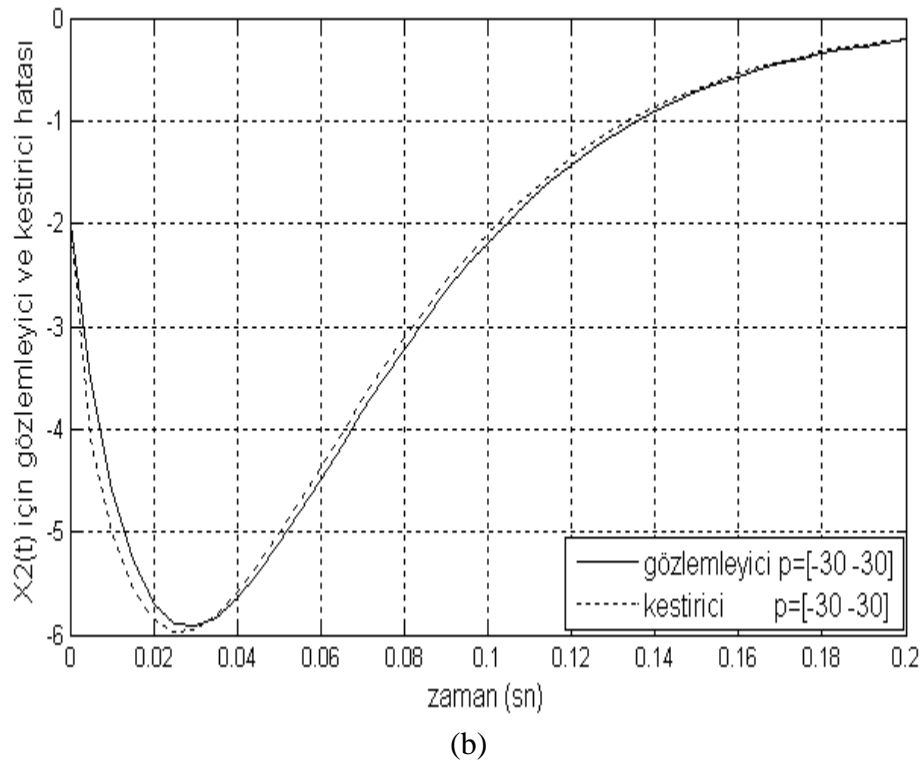
Şekil 7.4.a: Uygulama 1,  $X_1(t)$  durum değişkenine ilişkin kestirim hatası eğrileri



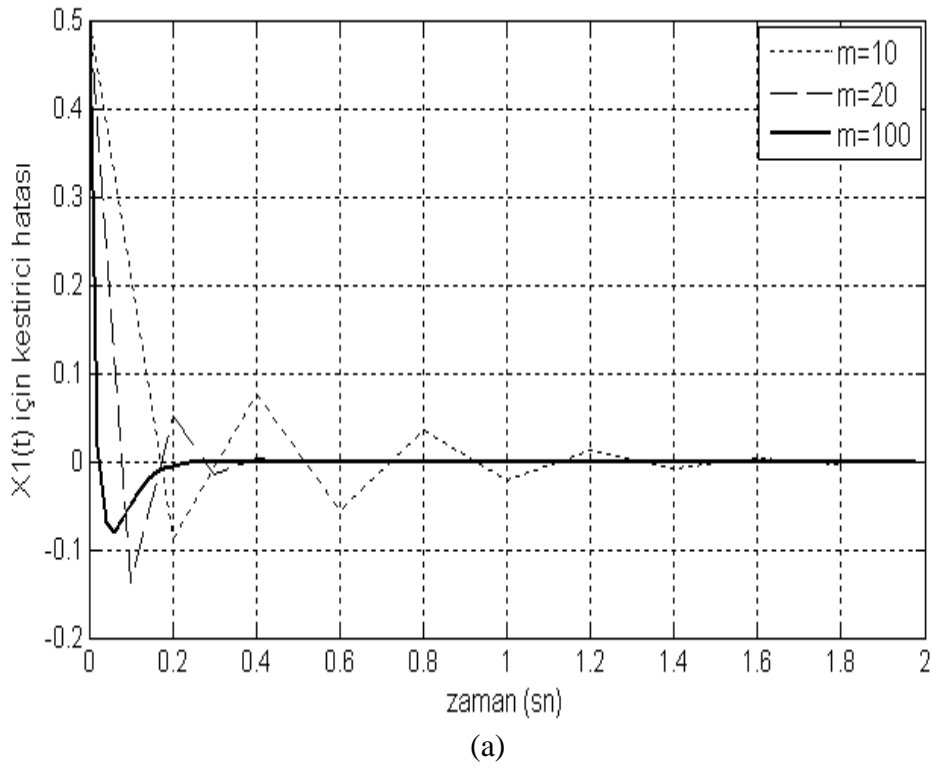
Şekil 7.4.b: Uygulama 1,  $X_2(t)$  durum değişkenine ilişkin kestirim hatası eğrileri



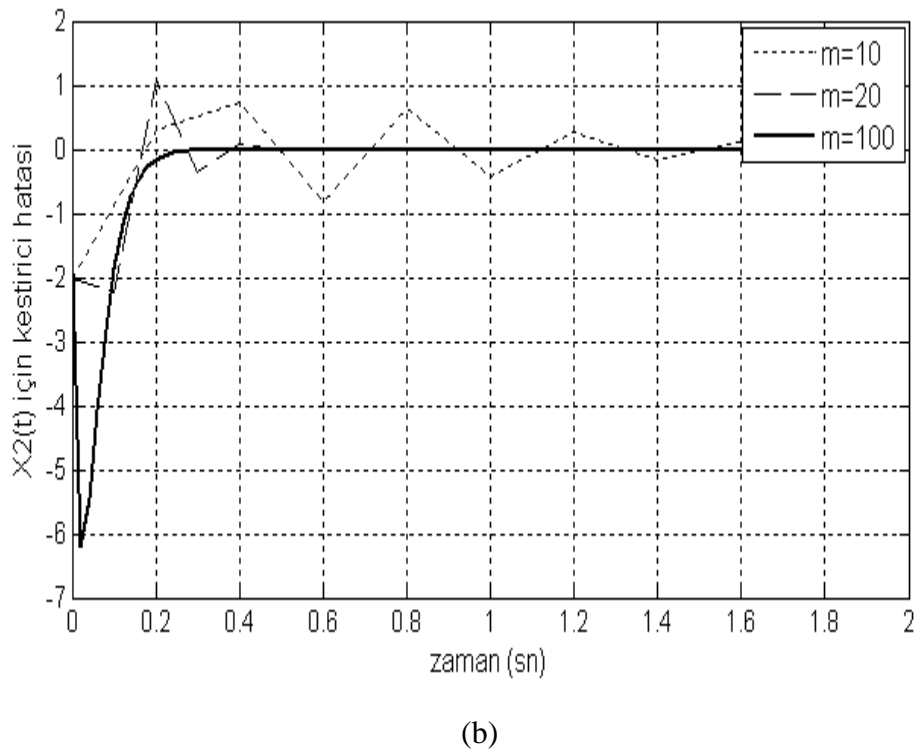
Şekil 7.5.a: Uygulama 1,  $X_1(t)$  durum değişkenine ilişkin  $p=-30$  katlı özdeğer için gözlemleyici ve kestirici hatası eğriler



Şekil 7.5.b: Uygulama 1,  $X_2(t)$  durum değişkenine ilişkin  $p=-30$  katlı özdeğer için gözlemleyici ve kestirici hatası eğrileri



Şekil 7.6.a: Uygulama 1,  $X_1(t)$  durum değişkenine ilişkin değişik adım aralıkları için kestirim hatası eğrileri



Şekil 7.6.b: Uygulama 1,  $X_2(t)$  durum değişkenine ilişkin değişik adım aralıkları için kestirim hatası eğrileri



### 7.3. Uygulama 2

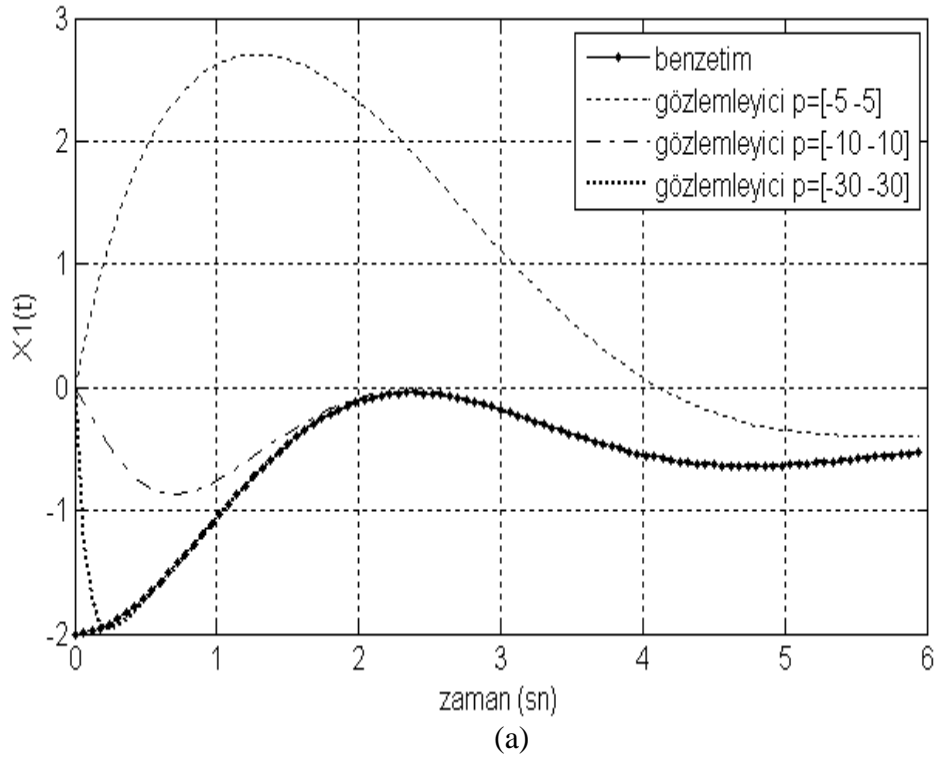
$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t)$$

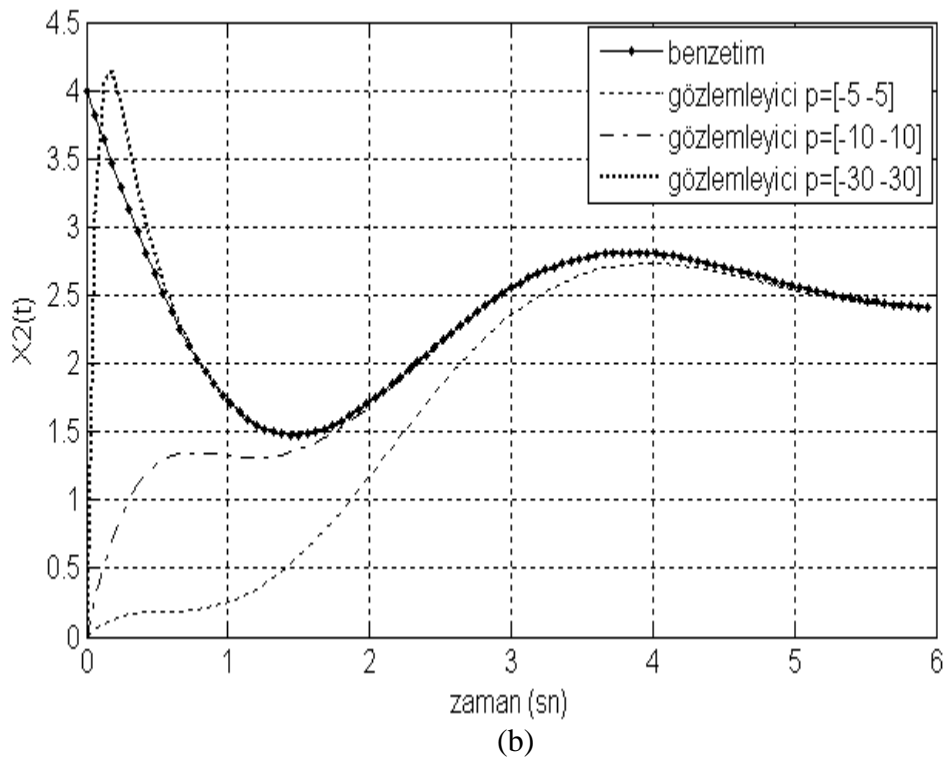
$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad x(0) = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Yukarıdaki durum uzayı denklemleri ile verilen çok giriş çok çıkışlı dinamik sisteme ilişkin benzetim çözüm ve gözlemleyici ile elde edilen durum değişkenlerinin ve gözlemleyici hatasının zamana göre değişim eğrileri  $-5$ ,  $-10$ ,  $-30$  katlı gözlemleyici özdeğerleri için şekil 7.7 ve 7.8' de ayrı ayrı çizilmiştir. Eğrilerden gözlemleyici özdeğerleri sol yarı s düzleminde orjinden uzaklaştıkça kestirim hatasının daha kısa sürede sifıra yakınsadığı açıkça görülmektedir.

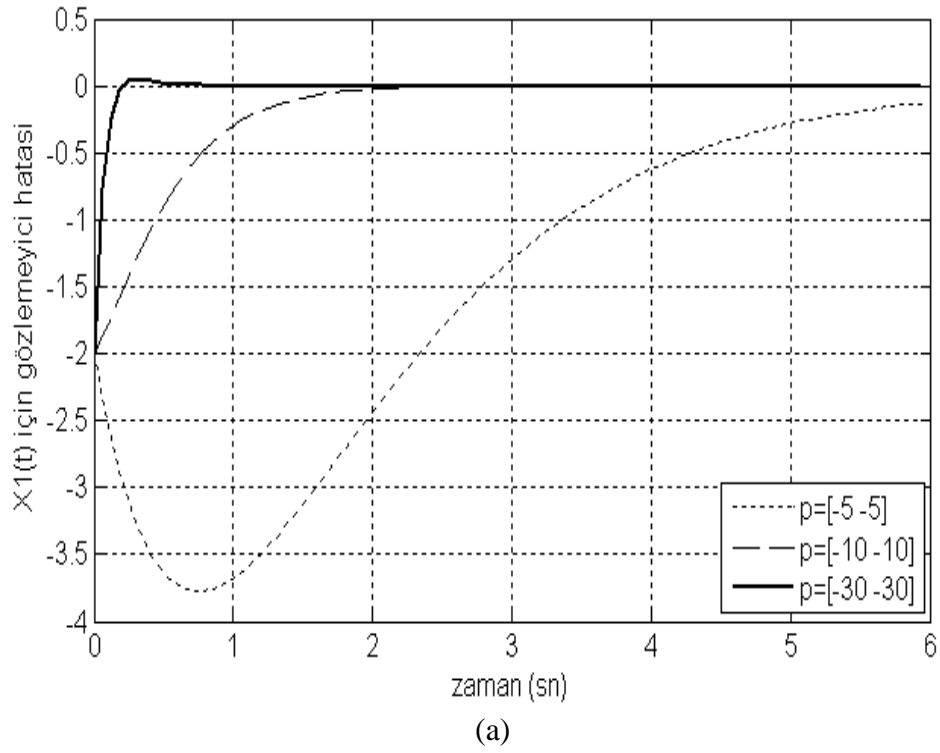
Aynı sisteme ilişkin benzetim çözüm ve geliştirilen kestirim algoritması ile elde edilen durum değişkenlerinin ve kestirim hatasının zamana göre değişim eğrileri ise aynı katlı gözlemleyici özdeğerleri için şekil 7.9 ve 7.10' de verilmiştir. Şekillerden kestirim eğrilerinin benzetim çözüm eğrilerini gözlemleyici sonuçlarına oldukça yakın olarak izlediği görülmektedir. Nitekim 7.11' de  $-30$  katlı özdeğeri için verilen gözlemleyici ve kestirim hatası eğrilerinden bu durum açıkça görülmektedir. Şekil 7.12' de değişik adım aralıkları için kestirici hatası eğrileri verilmiştir. Eğrilerden adım aralığı  $m$  arttırıldıkça kestirim hatasının küçüldüğü görülmektedir. Gözlemleyici benzetiminde adım aralığı  $h=0.01$  olarak seçilmiştir.



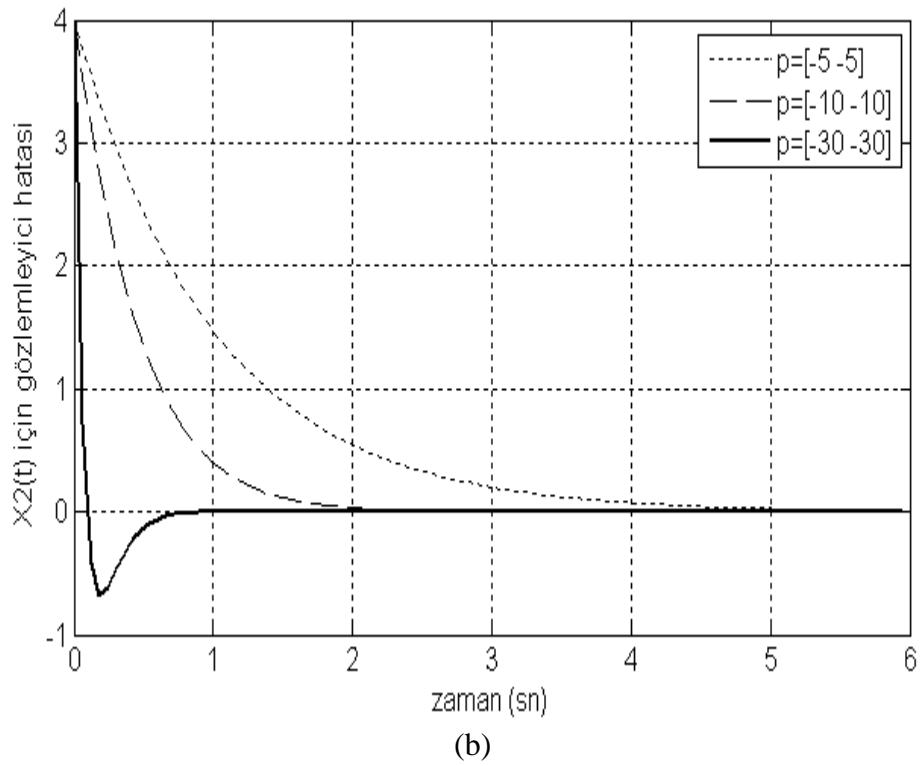
Şekil 7.7.a: Uygulama 2,  $X_1(t)$  durum değişkenine ilişkin benzetim ve gözlemleyici ile elde edilen eğriler ( $h=0.01$ )



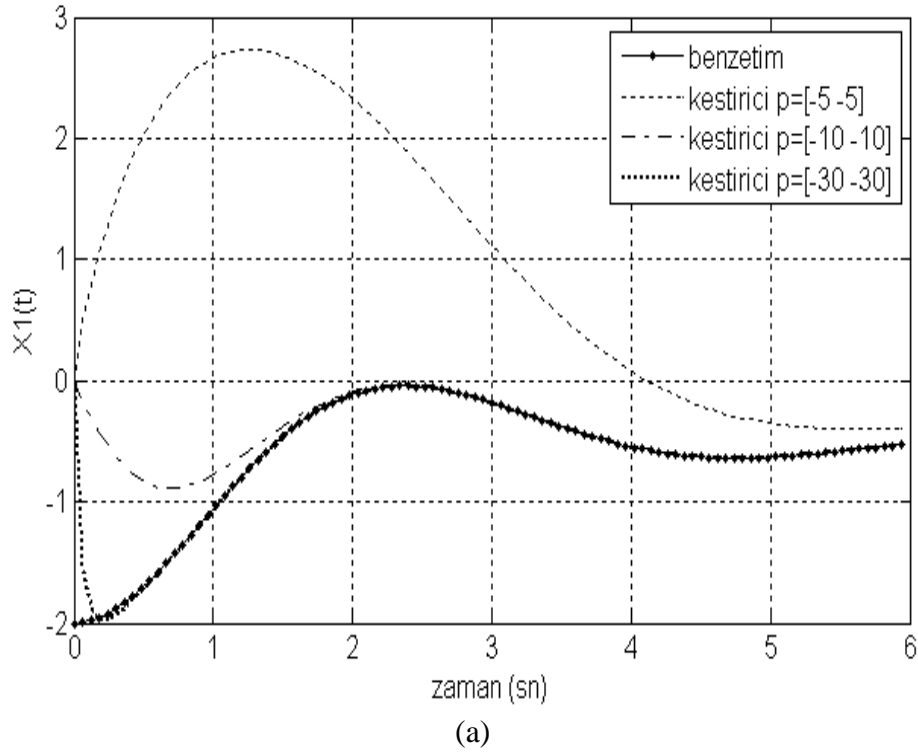
Şekil 7.7.b: Uygulama 2,  $X_2(t)$  durum değişkenine ilişkin benzetim ve gözlemleyici ile elde edilen eğriler ( $h=0.01$ )



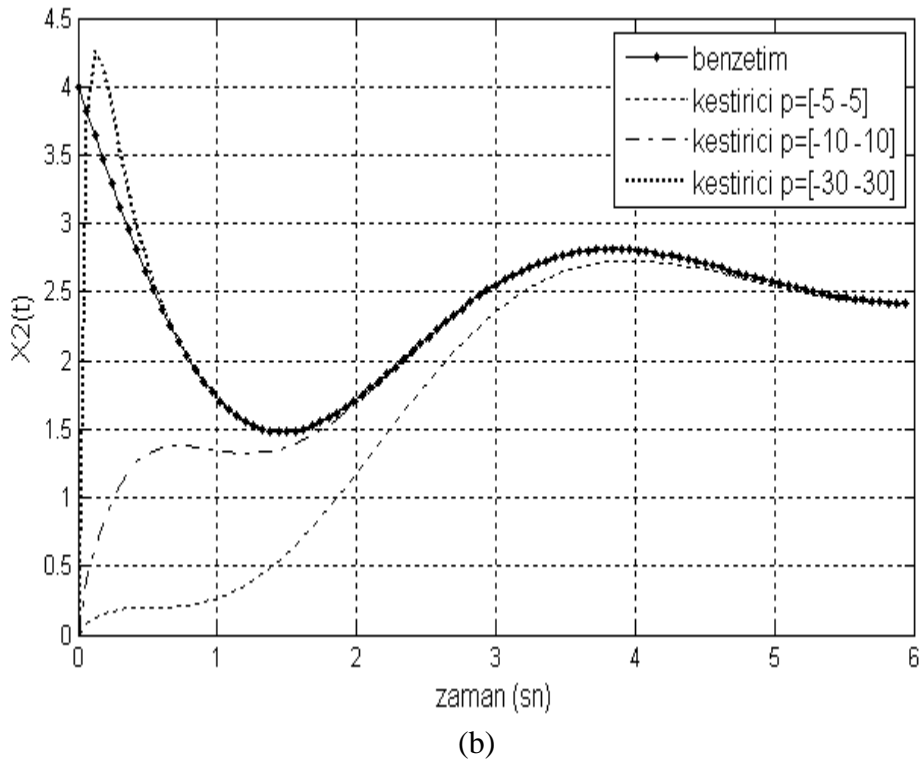
Şekil 7.8.a: Uygulama 2,  $X_1(t)$  durum değişkenine ilişkin gözlemleyici hatası eğrileri



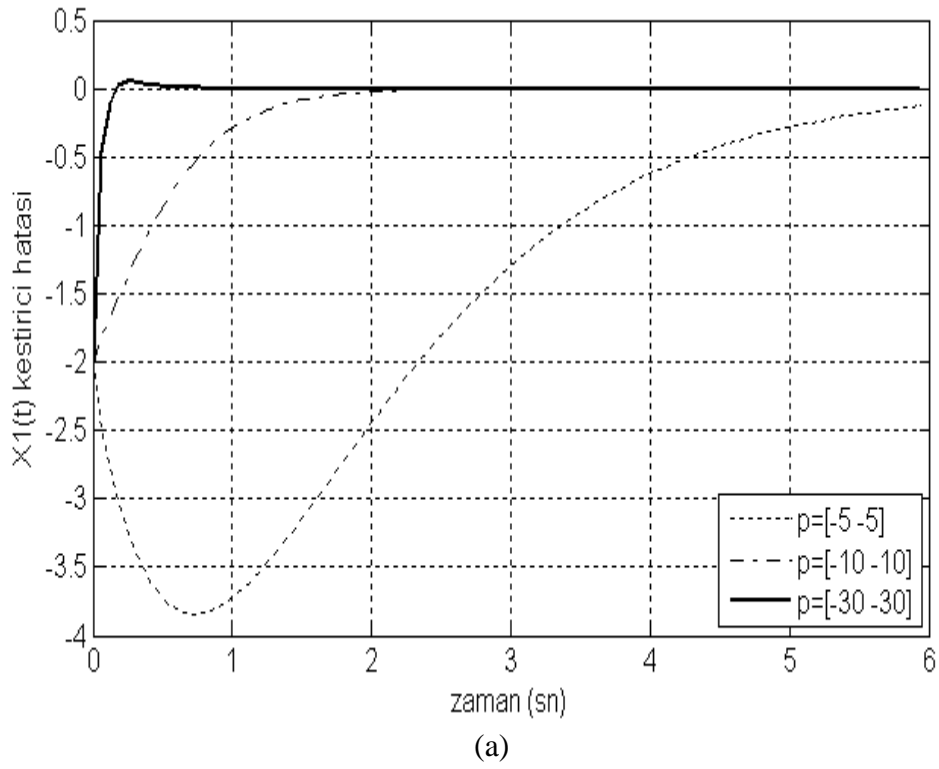
Şekil 7.8.b: Uygulama 2,  $X_2(t)$  durum değişkenine ilişkin gözlemleyici hatası eğrileri



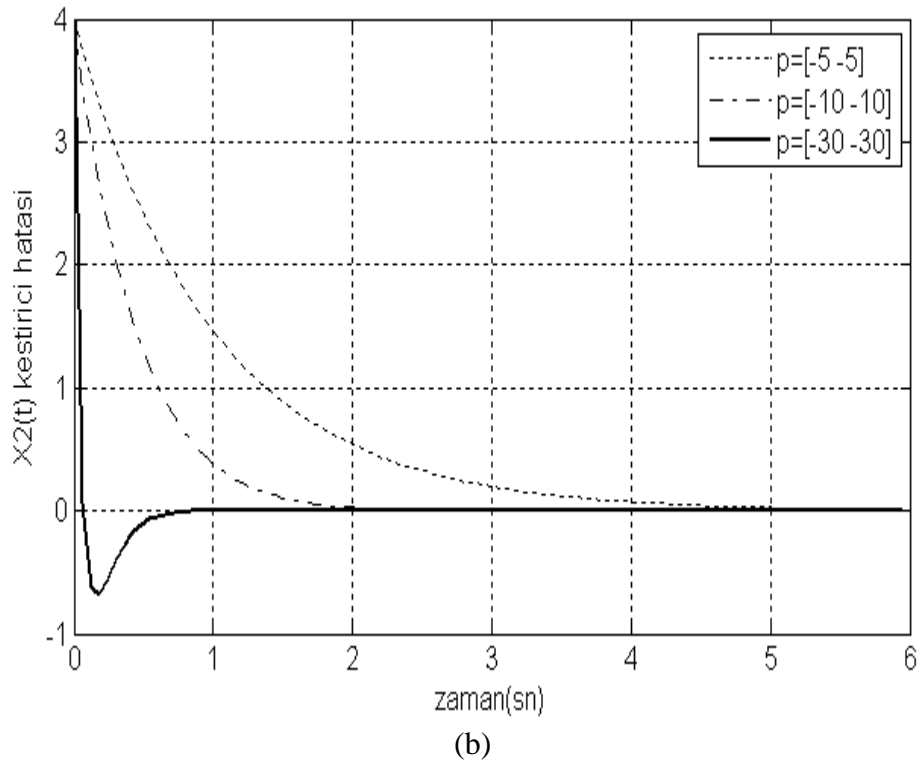
Şekil 7.9.a: Uygulama 2,  $X_1(t)$  durum değişkenine ilişkin benzetim ve kestirim algoritması ile hesaplanan eğriler ( $h=0.01$ )



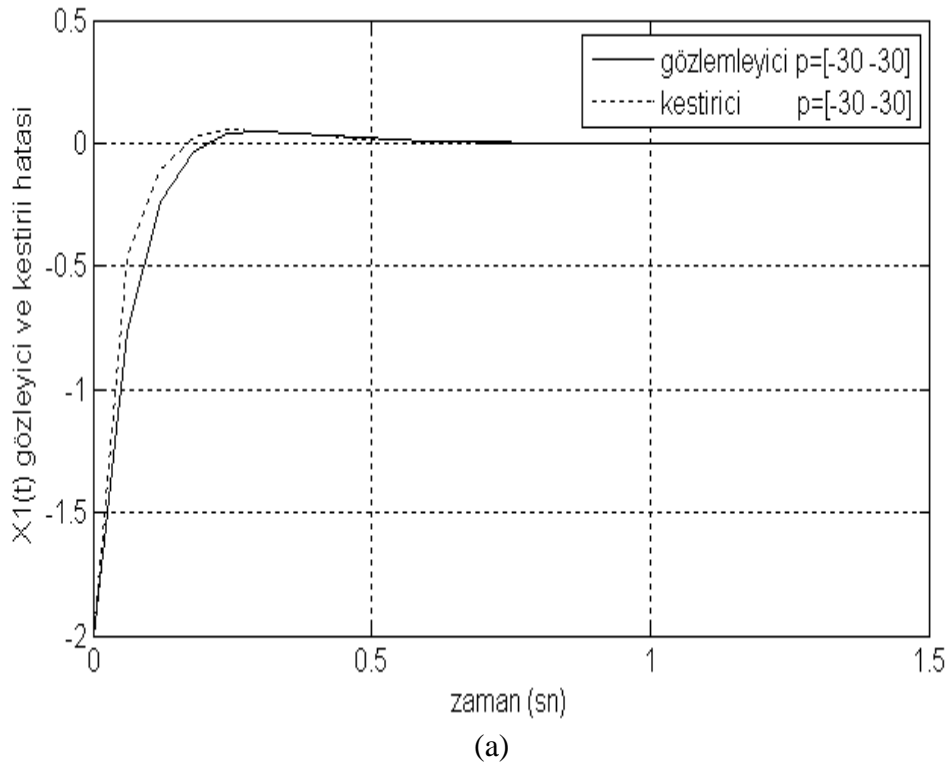
Şekil 7.9.b: Uygulama 2,  $X_2(t)$  durum değişkenine ilişkin benzetim ve kestirim algoritması ile hesaplanan eğriler ( $h=0.01$ )



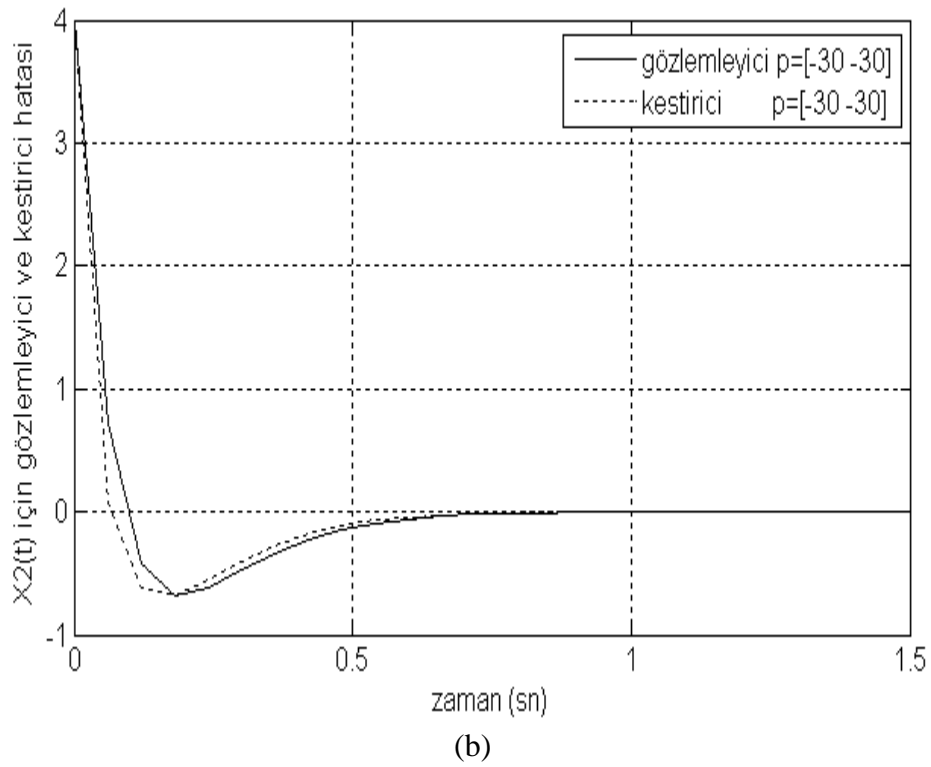
Şekil 7.10.a: Uygulama 2,  $X_1(t)$  durum değişkenine ilişkin kestirici hatası eğrileri



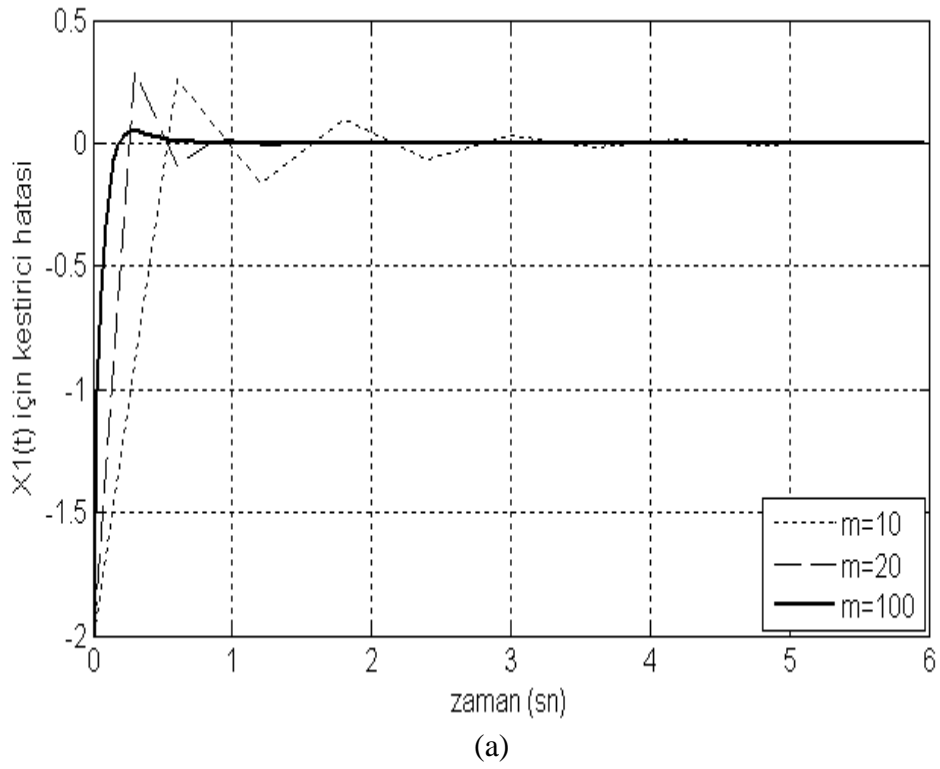
Şekil 7.10.b: Uygulama 2,  $X_2(t)$  durum değişkenine ilişkin kestirici hatası eğrileri



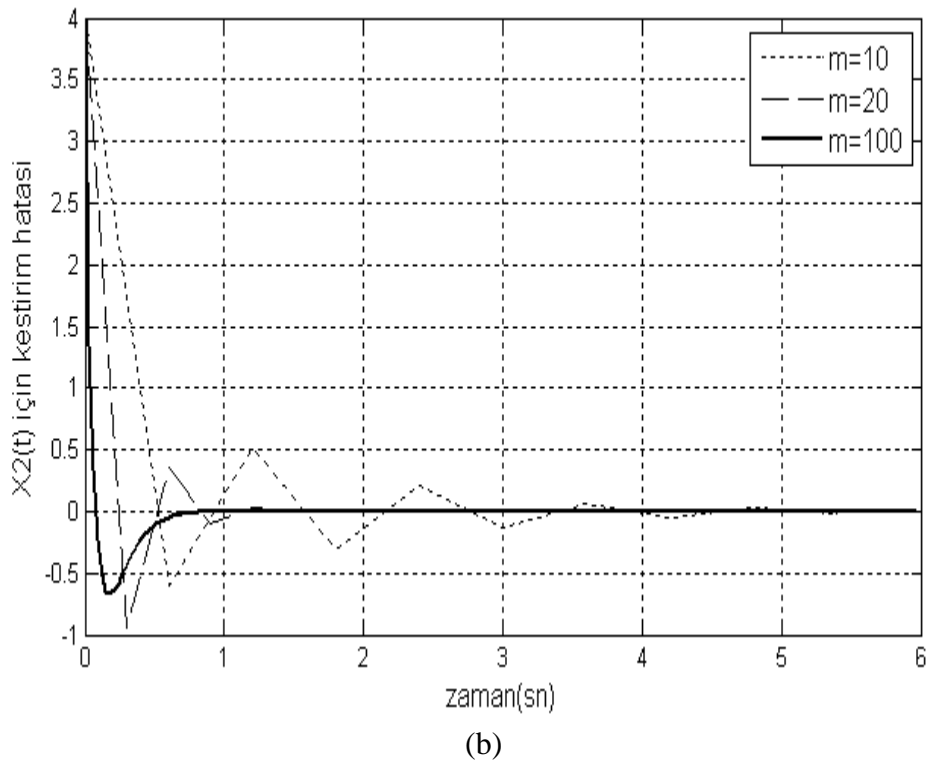
Şekil 7.11.a: Uygulama 2,  $X_1(t)$  durum değişkenine ilişkin  $p=-30$  katlı özdeğer için gözlemleyici ve kestirici hatası eğrileri



Şekil 7.11.b: Uygulama 2,  $X_2(t)$  durum değişkenine ilişkin  $p=-30$  katlı özdeğer için gözlemleyici ve kestirici hatası eğrileri



Şekil 7.12.a: Uygulama 2,  $X_1(t)$  durum değişkenine ilişkin değişik örnekleme sayıları için kestirim hatası eğrileri



Şekil 7.12.b: Uygulama 2,  $X_2(t)$  durum değişkenine ilişkin değişik örnekleme sayıları için kestirim hatası eğrileri

## BÖLÜM 8. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, doğrusal zamanla değişmeyen çok giriş-çok çıkışlı sistemlerin sadece giriş ve çıkış bilgilerini kullanarak durum değişkenlerini kestirebilmek için farklı bir kestirim algoritması önerilmiştir. Önerilen algoritma Block-Pulse fonksiyonlarını ve bazı önemli özelliklerini kullanır.

Önerilen yöntemde serinin kullanılan 'm' adım sayısı arttıkça kestirim yanılığı küçülmekte ve gerçek durum değişkenleri daha kısa sürede yakalanmaktadır. Oysa gözlemleyicilerin sayısal çözümünde adım aralığı gereğinden fazla küçültüldüğünde yuvarlatma hataları ortaya çıkabilmektedir.

Taylor ,Chebyshev, Wals gibi ortogonal serisel yaklaşıklığı ile elde edilen çözüm aralığı  $t \in [0,1]$  için geçerli olmasına karşın, önerilen yöntemde çözüm aralığının  $t \in [0,\infty]$  aralığında seçilebilmesi, algoritmanın önemli bir üstünlüğüdür. Ayrıca önerilen kestirim algoritmasında basit yapıdaki yinelemeli bağıntılar kullanılmaktadır. Böylece kestirim için gerekli hesaplama süresi küçülmektedir.



## KAYNAKLAR

- [1] BRASCH, F.M., and PEARSON, J.B., “Pole Placement Using Dynamic Compensators”, IEEE Trans. Automatic Control, AC-15, pp. 34-43, 1970
- [2] PHILIPS, Y.A., “Controller Design of Systems with Multicate Noise”, IEEE Trans. On. Aut. Cont., Vol.2, AC-30, No. 10,1985
- [3] ASTRÖM, K.J., and WITTERMARK, B., “Adaptive Control”, Addison-Wesley Pub.Inc., USA, 1989
- [4] NING-SHOW HSU and BING CHENG., “Analysis and optimal control of time-varying linear systems via Block-pulse functions” , Int. J. Control, 1981, Vol.33, No.6, 1107-1122
- [5] C.P. KWONG and C.F. CHEN., “Linear feedback system identification via Block-pulse functions”, Int. J. Systems SCI, 1981, Vol.12, No.5,635-642
- [6] BING CHENG and NING-SHOW HSU., “Analysis and parameter estimation of bilinear systems via Block-pulse functions”, Int.J. Control, 1982, Vol.36, No.1,53-65
- [7] KAILATH, T., “Linear Systems”, Prentice-Hall Inc., 1980
- [8] ABRAMOWITZ, M., and STEGUN, I.A., “Handbook of Mathematical Functions”, National Bureau of Standards, p.355, 1964
- [9] SANSONE, G, “Orthogonal Functions” New York : Interscience, 1959
- [10] GRADSHTEYN, I.S., and RYZHIK, I.W, “Table of Integrals, Series and Products” New York: Academic Press, 1965
- [11] HSIAO, C.H., and CHEN, C.F., 19, “Comput. Elect. Eng., 6, 279”,1980
- [12] UĞUR, A. ve CEMALETTİN, K., ‘Matlab ve Mühendislik Uygulamaları’, Alfa yayınları, 2003

## **ÖZGEÇMİŞ**

Serap ÖNEN, 22.09.1977 de İzmit' de doğdu. İlk, orta ve lise eğitimini İzmit'te tamamladı. 1995 yılında Atatürk Lisesi, Fen Bilimleri bölümünden mezun oldu. 1996 yılında başladığı Sakarya Üniversitesi, Elektrik-Elektronik Mühendisliği bölümünü 2000 yılında bitirdi. 2001 – 2005 yılları arasında SEW-EURODRIVE' da, 2005-2009 yılları arasında SCA-SCHUCKER' de mühendis olarak çalıştı. Şu anda Ford Otosan' da Bakım mühendisi olarak görev yapmaktadır.