T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

$5-$BOYUTLU UZAYLARDA BERTRAND EĞRİLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Abdullah İNALCIK

Enstitü Anabilim Dalı	**:**	**MATEMATİK**
Tez Danışmanı	**:**	**Yrd. Doç. Dr. Soley ERSOY**

Haziran 2010

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

5-BOYUTLU UZAYLARDA BERTRAND EĞRİLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Abdullah İnalcık

Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK

Bu tez 10/06/2010 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Oybirliği ile kabul edilmiştir.

Yrd. Doç. Dr. Soley ERSOY	Doç. Dr. Murat TOSUN	Yrd. Doç. Dr. Yılmaz GÜNEY
Jüri Başkanı	Üye	Üye

TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans danışmanlığımı üstlenip, bilgi ve tecrübesiyle destek veren, çalışmamın her safhasında yardımını esirgemeyen sayın hocam Yrd. Doç. Dr. Soley ERSOY'a şükran ve saygılarımı sunarım.

Desteğini her zaman yanımda hissettiğim sevgili aileme teşekkür ederim.

Bu çalışma SAÜ Bilimsel Araştırma Projeleri Komisyonu tarafından desteklenmiştir.

Abdullah İNALCIK

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

L^n	: $n-$boyutlu Lorentz uzayı
$\mathbb{R}^n$	: $n-$boyutlu Reel uzayı
E^n	: $n-$boyutlu Öklid uzayı
t_P	: P noktasındaki tanjant vektörü
t_i	: i-inci Frenet vektörü
M	: Topolojik manifold
$\chi(M)$	: M üstünde vektör alanları uzayı
α	: Diferensiyellenebilir eğri
k_i	: i-inci eğrilik fonksiyonu

ÖZET

Anahtar Kelimeler: Bertrand eğrisi, Öklid uzayı, Lorentz uzayı

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmıştır. İkinci bölümde Öklid ve Lorentz uzayında temel kavramlar tanıtılmış. Öklid ve Lorentz uzayında Bertrand eğrisinin tanımına ve ilgili teoremlerin ispatına yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde E^5, $5-$boyutlu Öklid uzayında Bertrand eğri tanımı verilip Bertrand eğri çiftleri için bir genel karakterizasyon elde edilmiştir. Ayrıca bu uzayda bazı özel Bertrand eğri çiftleri tanımlanarak karakterizasyonları elde edilmiştir.

Dördüncü bölüm bu çalışmanın orijinal kısmını oluşturmaktadır. $\mathbb{R}_1^5$, $5-$boyutlu Lorentz uzayında timelike Bertrand eğrisi tanımlanarak timelike Bertrand eğri çiftleri için bir genel karakterizasyon elde edilmiştir. Ayrıca bu uzayda bazı özel timelike Bertrand eğri çiftleri tanımlanarak karakterizasyonları elde edilmiştir.

Beşinci bölümde tüm çalışmanın geniş bir özeti yapılmış ve bundan sonra yapılacak araştırmalara yönelik öneride bulunulmuştur.

BERTRAND CURVE IN THE 5-DIMENSIONAL SPACES

SUMMARY

Key words: Bertrand curves, Euclid space, Lorentz space.

This thesis consists of five chapters. First chapter is devoted to the introduction. In the second chapter, some of the basic concepts are introduced in the Euclidean and Lorentzian space. The Bertrand curves and related theorems are defined in the Euclidean and Lorentzian space.

In the third chapter, Bertrand curves are defined in E^5, $5-$dimensional Euclidean space and a general characterization of Bertrand pairs is given. Furthermore, some special Bertrand curves are defined and the characterizations of these curves are obtained.

Fourth chapter is the original part of this study. In this chapter, timelike Bertrand curves are defined in $\mathbb{R}_1^5$, $5-$dimensional Lorentz space and a general characterization of timelike Bertrand pairs is established. Furthermore, some special timelike Bertrand curves are defined and the characterizations of these curves are found.

In fifth chapter of this thesis, a brief summary of the study is given and a suggestion is proposed for investigations in future.

BÖLÜM 1. GİRİŞ

Eğrilerin klasik diferensiyel geometrisinde J. Bertrand 3-boyutlu uzayda bir eğrinin asli normali ile bir diğer eğrinin asli normalini eğrilerin karşılıklı noktalarında çakışık kabul ederek bu tarz eğrileri çalışmıştır. Bu tür eğriler artık Bertrand eğrileri olarak adlandırılmaktadır. Bertrand eğrilerinin karakteristik özelliği eğrilik ve burulmasının lineer olmasıdır. Literatürde 3-boyutlu Öklid uzayında Bertrand eğrisi ve Schell, Mannheim teoremleri gibi ilgili teoremleri ile ilgili pek çok çalışma mevcuttur.

Öklid uzayında yapılan bu çalışmaların yanı sıra 3-boyutlu Minkowski (Lorentz) uzayında non-null Bertrand eğrileri ile ilgili [1] ve null Bertrand eğrileri ile ilgili [2] çalışmaları vardır.

$n-$boyutlu Öklid uzayında yüksek eğrilikli bir eğrinin asli normali ile bir diğer yüksek eğrilikli eğrinin asli normalini eğrilerin karşılıklı noktalarında çakışık kabul ederek E^n de Bertrand eğriler [3] yüksek lisans tezinde tanımlanmış ve iyi bilinen teoremler $n-$boyutlu uzaya genelleştirilmişlerdir. Ayrıca [4], [5], ve [6] çalışmalarında da $n-$boyutlu Öklid uzayında Bertrand eğrileri ile ilgili teoremler ispatlanmıştır.

[7] de $n-$boyutlu Lorentz uzayında Bertrand eğrilerinin tanımı, $n-$boyutlu Öklid uzayında iyi bilinen Bertrand eğri tanımıyla karşılaştırarak verilmiş benzer şekilde verilmiş, Schell ve Mannheim teoremleri Lorentz uzayında ispatlanmıştır.

Bu çalışmamıza temel teşkil edecek ana çalışma [8] olup bu çalışmada 5-boyutlu Öklid uzayında Bertrand eğrisinin tanımı alışılmışın dışında yaparak genelleştirilmiştir.5- boyutlu uzayda eğrilikleri sıfırdan farklı iki eğrinin yay uzunlukları arasında birebir ve örten bir bağıntı varsa ve bu eğrilerin Frenet 5 ayaklı çifti Öklid hareket gruplarına göre invaryant hacimler oluşturuyorsa bu eğri çiftine Bertrand eğri çifti olarak [8] de tanımlanmıştır.

Bu tanım göz önüne alınarak 5-boyutlu Lorentz uzayında timelike Bertrand eğri çifti tarafımızdan bu yüksek lisans tezinin 4. bölümünde tanımlanmış ve timelike Bertrand eğrileri karakterize edilmiştir.

BÖLÜM 2. TEMEL KAVRAMLAR

2. 1. Öklid Uzayında Temel Kavramlar

Tanım 2.1.1. Boş olmayan bir cümle *A* ve bir *K* cismi üzerinde vektör uzayı *V* olsun. Aşağıdaki önermeleri doğrulayan bir

$$f : A \times A \to V$$

fonksiyonu varsa *A* ya *V* ile birleştirilmiş bir afin uzay denir:

$A1) \forall P, Q, R \in A$ için $f(P,Q) + f(Q,R) = f(P,R)$

$A2) \forall P \in A$ ve $\forall \alpha \in V$ için $f(P,Q) = \alpha$ olacak şekilde bir tek $Q \in A$ noktası vardır [9].

Tanım 2.1.2. *V* bir vektör uzayı ve *A* da *V* ile birleşen bir afin uzay olsun. $P_0, P_1, ..., P_n \in A$ noktaları için $\overrightarrow{P_0P_1}, ..., \overrightarrow{P_0P_r} \in V$ vektörlerinin $\left\{\overrightarrow{P_0P_1}, ..., \overrightarrow{P_0P_r}\right\}$ sistemi V nin bir bazı ise

$$\{P_0, P_1, ..., P_n\}$$

nokta $(n+1)$-lisine, *A* afin uzayının bir afin çatısı denir. Burada P_0 noktasına çatının başlangıç noktası, P_i, $1 \le i \le n$, noktalarına da çatının birim noktaları denir. Eğer $boy\, V = n$ ise *A* ya *n*-boyutlu bir afin uzay denir [9].

Tanım 2.1.3. *A*, *V* vektör uzayı ile birleştirilmiş bir afin uzay ve $\{P_0, P_1, ..., P_n\}$ de *A* da bir afin çatı olsun. Bu taktirde

$$\overrightarrow{P_0P} = \sum_{i=1}^{n} a_i \overrightarrow{P_0P_i}, \forall P \in A$$

yazılabilir.

$$\begin{aligned} &x_i : A \to \mathbb{R} \\ &\quad P \to x_i(P_i) = a_i, 1 \le i \le n \end{aligned}$$

fonksiyonları yardımıyla tanımlanan

$$\{x_1(P), x_2(P), ..., x_n(P)\}$$

n-lisine $P \in A$ noktasının afin koordinatları, bu afin koordinatları tanımlamak için kullanılan

$$\{x_0, x_1, ..., x_n\}$$

sistemine de afin koordinat sistemi denir [9].

Tanım 2.1.4. *A*, *V* vektör uzayı ile birleştirilmiş bir afin uzay olsun. Eğer *V* bir iç çarpım uzayı ise *A* ya Öklid uzayı denir ve E ile gösterilir. *n*-boyutlu Öklid uzay da E^n ile gösterilir [9].

Tanım 2.1.5. E^n, *n*-boyutlu Öklid uzayında bir nokta *X* olsun. E^n de bir afin koordinat sistemine göre *X* noktasının koordinatları $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ olmak üzere

$$x_i : E^n \to \mathbb{R},\ 1 \le i \le n$$

bileşenine E^n in i -inci koordinat fonksiyonu denir. $\mathbb{R}^n$ standart reel vektör uzayı olmak üzere $\mathbb{R}^n$ de

$$\langle , \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

Öklid çarpımı

$$\forall X, Y \in \mathbb{R}, X = (x_1, x_2, ..., x_n), Y = (y_1, y_2, ..., y_n)$$

için

$$\langle , \rangle (X, Y) = \langle X, Y \rangle = \sum_{I=1}^{n} x_i y_i$$

biçiminde tanımlanır. Bu iç çarpıma standart iç çarpım veya Öklid iç çarpım denir [9].

Tanım 2.1.6. E^n, *n*-boyutlu Öklid uzay olsun. $P_0, P_1, ..., P_n \in E^n$ için $\{\overrightarrow{P_0 P_1}, ..., \overrightarrow{P_0 P_r}\}$ vektör cümlesi E^n ile birleşen *V* vektör uzayının bir ortonormal bazı ise,

$$\{P_0, P_1, ..., P_n\}$$

nokta $(n+1)$-lisine, E^n de bir Öklid çatı veya dik çatı denir [9].

Tanım 2.1.7. E^n, *n*-boyutlu Öklid uzayı ve $\{P_0, P_1, ..., P_n\}$ de E^n de bir dik çatı olsun. E^n aynı zamanda bir afin uzay olduğundan $\{P_0, P_1, ..., P_n\}$ dik çatısına karşılık gelen bir $\{x_0, x_1, ..., x_n\}$ afin koordinat sistemi vardır. E^n de bu şekilde tanımlı bir koordinat sistemine Öklid koordinat sistemi veya dik koordinat sistemi denir [9].

Tanım 2.1.8. E^n Öklid uzayında $\alpha_i = \overrightarrow{P_0 P_i}$, $1 \le i \le r$, vektörleri lineer bağımsız olmak üzere $P_0, P_1, ..., P_n \in E^n$ noktalarını sabit alınsın. Bu halde $n+1$ nokta E^n den seçilmiş lineer bağımsız noktalar olurlar.

$$P=\left\{X\in E^n \mid \overrightarrow{P_0X}=\sum_{i=1}^{n} t_i\overrightarrow{P_0P_i},\ 0\leq i\leq n\right\}$$

E^n de köşeleri $P_0,P_1,...,P_n$ olan n-boyutlu bir paralelyüzlüdür. Bu paralelyüzlü kısaca

$$P=\left(P_0,P_1,...,P_n\right)$$

şeklinde gösterilir. n üzerinde tümevarım metodu ile n-boyutlu hacim

$$V_r\left(P_0,P_1,...,P_r\right)$$

ile tanımlanır.

$n=1$ için 1-boyutlu hacim

$$V_1\left(P_0,P_1\right)=\left\|\overrightarrow{P_0P_1}\right\|$$

dır. $r=2$ için 2-boyutlu hacim $V_2\left(P_0,P_1,P_2\right)$ ile gösterilir ve şu şekilde tanımlanır:

P_2 noktasının 1-boyutlu $F=Sp\left\{P_0,P_1\right\}$ alt uzayına olan uzaklığı h ile gösterilirse h yükseklik olarak kabul edilebilir ve

$$V_2\left(P_0,P_1,P_2\right)=hV_1\left(P_0,P_1\right)$$

olur. Bu şekilde devam ederek

$$V_{n-1}\left(P_0,P_1,...,P_{n-1}\right)$$

tanımlanmış olsun. O zaman P_n noktasının $\left(n-1\right)$-boyutlu $F=Sp\left\{P_0,P_1,...,P_{n-1}\right\}$ alt uzayına olan uzaklığı $h=d\left(P_n,F\right)$ ile gösterilirse n-boyutlu hacim adı verilen $V_n\left(P_0,P_1,...,P_r\right)$ hacmi

$$V_n\left(P_0,P_1,...,P_n\right)=hV_{n-1}\left(P_0,P_1,...,P_{n-1}\right)$$

olarak tanımlanmış olur. Burada $V_n\left(P_0,P_1,...,P_n\right)$ hacmi $P_0,P_1,...,P_n$ köşe noktalarının sırasından bağımsızdır [10].

Tanım 2.1.9. E_1^n, E_2^n sırası ile , V_1, V_2 *n*- boyutlu iç çarpım uzaylarıyla birleşen birer Öklid uzay olsunlar. Bir

$$f : E_1^n \to E_2^n$$

afin dönüşümü $\forall \alpha, \beta \in V_1$ için

$$\langle \psi(\alpha), \psi(\beta) \rangle = \langle \alpha, \beta \rangle$$

olacak şekilde bir

$$\psi : V_1 \to V_2$$

lineer dönüşümü ile birleşiyorsa *f* ye bir izometri denir [10].

Teorem 2.1.1. E^n bir Öklid uzayı ve E^n de iki dik koordinat sistemi $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ ve $\{y_1, y_2, ..., y_n\}$ ise $A = [a_{ij}] \in R_n^n$ bir ortogonal matris olmak üzere

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ . \\ . \\ . \\ y_n \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & . & . & . & a_{1n} & c_1 \\ . & . & & & . & . \\ . & & . & & . & . \\ . & & & . & . & . \\ a_{n1} & . & . & . & a_{nn} & c_n \\ 0 & . & . & . & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \\ 1 \end{bmatrix}$$

dır [10].

Teorem 2.1.2. Bir $f : E_1^n \to E_2^n$ dönüşümü izometri ise,

i. $\forall A, B \in E_1^n$ için $d(f(A), f(B)) = d(A, B)$ dir.

ii. f birebir ve üzerinedir.

iii. E_1^n, E_2^n Öklid uzaylarındaki dik koordinat sistemleri sırasıyla, $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ ve $\{y_1, y_2, ..., y_n\}$ ise f izometrisi, $A = \left[a_{ij}\right] \in O(n)$ olmak üzere

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \\ 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{f} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ . \\ . \\ . \\ y_n \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2n} & c_2 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & . & . & . & a_{nn} & c_n \\ 0 & 0 & . & . & . & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \\ 1 \end{bmatrix}$$

biçiminde ifade edilebilir [10].

İspat.

i. *f* uzaklığı korur**:** E_1^n ve E_2^n Öklid uzayları ile birleşen iç çarpım uzayları, sırasıyla, V_1 ve V_2 olsun.

$$f : E_1^n \to E_2^n$$

izometri olduğundan *f* ye karşılık gelen öyle bir

$$\psi : V_1 \to V_2$$

lineer dönüşümü vardır ki, $\forall \alpha, \beta \in V_1$ için

$$\langle \psi(\alpha), \psi(\beta) \rangle = \langle \alpha, \beta \rangle$$

dır. Böylece

$$\|\psi(\alpha)\| = \|\alpha\|$$

dır. $\forall A, B \in E_1^n$ nokta çiftine bir $\overrightarrow{AB} \in V_1$ vektörü karşılık gelir.

$$d(A, B) = \left\|\overrightarrow{AB}\right\|$$

ve *f* izometri olduğundan

$$\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \left\|\psi\left(\overrightarrow{AB}\right)\right\|$$

dır. Diğer taraftan

$$\psi\left(\overrightarrow{AB}\right) = \overrightarrow{f(A)\,f(B)}$$

olduğunu biliyoruz. O halde

$$\begin{aligned} d(A,B) &= \left\|\overrightarrow{AB}\right\| \\ &= \left\|\psi\left(\overrightarrow{AB}\right)\right\| \\ &= \left\|\overrightarrow{f(A)\,f(B)}\right\| \\ &= d\left(f(A), f(B)\right) \end{aligned}$$

dir.

ii. $f(A) = f(B) \in E_2^n \Rightarrow A = B \in E_1^n$ olduğunu göstereceğiz.

$$f(A) = f(B) \Rightarrow \overrightarrow{f(A)\,f(B)} = \vec{O} \in V_2$$

ve

$$\left\|\overrightarrow{f(A)\,f(B)}\right\| = \left\|\vec{O}\right\| = 0$$

dır. Ayrıca

$$\left\|\overrightarrow{f(A)\,f(B)}\right\| = \left\|\psi\left(\overrightarrow{AB}\right)\right\| = 0$$

olur.

$$\left\|\psi\left(\overrightarrow{AB}\right)\right\| = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| = 0$$

olduğundan

$$\left\| \overrightarrow{AB} \right\| = 0$$

olur. İç çarpım pozitif tanımlı olmasından

$$\left\| \overrightarrow{AB} \right\| = 0 \Rightarrow \overrightarrow{AB} = 0 \Rightarrow A = B$$

olur. Bu ifade eder ki *f* birebirdir.

***f* örtendir:** $\forall B \in E_2^n$ noktası için $f(A) = B$ olacak şekilde bir $\forall A \in E_1^n$ noktasının var olduğunu göstereceğiz. Bir $\forall P \in E_1^n$ noktası alalım, $f(P) \in E_2^n$ olur. $\forall \alpha \in V_1$ olmak üzere

$$\psi(\alpha) = \overrightarrow{f(P)B} \in V_2$$

dır. Bu demektir ki $\overrightarrow{PA} = \alpha$ olacak şekilde öyle bir $A \in E_1^n$ noktası vardır ki

$$\overrightarrow{f(A)f(B)} = f(A)B$$

dır, bu da

$$f(A) = B$$

olması demektir. O halde *f* örtendir.

iii. E_1^n de bir dik çatı $\{P_0, P_1, ..., P_n\}$ ve bu çatıya karşılık gelen koordinat sistemi $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ olsun. Buradan

$$\left\langle \overrightarrow{f(P_0)f(P_i)}, \overrightarrow{f(P_0)f(P_j)} \right\rangle = \left\langle \psi\left(\overrightarrow{P_0P_i}\right), \psi\left(\overrightarrow{P_0P_j}\right) \right\rangle = \left\langle \overrightarrow{P_0P_i}, \overrightarrow{P_0P_j} \right\rangle = \delta_{ij}$$

olduğundan $\{ f(P_0), f(P_1), ..., f(P_n) \}$ çatısı da E_2^n de bir dik çatıdır. E_2^n de bu dik çatıya karşılık gelen koordinat sistemi $\{y_1, y_2, ..., y_n\}$ olsun. E_1^n de koordinatları $\left[x_{ij} \right]$ olan bir nokta *X* olsun.

O zaman

$$\overrightarrow{P_0X} = \sum_{i=1}^{n} x_i \overrightarrow{P_0P_i}$$

ve buradan ψ lineer olduğundan

$$\psi\left(\overrightarrow{P_0X}\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i \psi\left(\overrightarrow{P_0P_i}\right)$$

ve ya

$$\overrightarrow{f(P_0)\, f(X)} = \sum_{i=1}^{n} x_i \overrightarrow{f(P_0)\, f(X)}$$

bulunur. Bu demektir ki $\{f(P_0), f(P_1),..., f(P_n)\}$ dik çatısının belirttiği koordinat sistemine göre $f(X)$ noktasını koordinatları $[x_i]$ dır. O halde E_2^n de bir diğer dik koordinat sistemi $\{x_1, x_2,..., x_n\}$ dır. Böylece Teorem2.1.1 gereğince bu iki dik koordinat sistemi arasında ispatı istenen bağıntı vardır [10].

Tanım 2.1.10. $I \subseteq \mathbb{R}$ bir ve açık aralık ve

$$\alpha : I \to E^n$$
$$t \to \alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), ..., \alpha_n(t))$$

diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Bu taktirde $\alpha(I) \subset E^n$ alt cümlesine E^n de (I, α) koordinat komşuluğu ile verilen bir eğri denir. $I \subseteq \mathbb{R}$ aralığına α eğrisinin parametre aralığı ve $t \in I$ değişkenine de α eğrisinin parametresi denir [9].

Tanım 2.1.11. M bir C^∞ manifold ve

$$\alpha : I \to M$$

diferansiyellenebilir bir eğri olsun. $t_0 \in I$ olmak üzere $P = \alpha(t_0)$ noktası için

$$V_p : C^\infty(M, R) \to R$$

$$f \to V_P[f] = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}|_P \, t_i$$

şeklinde tanımlı V_P fonksiyonuna α eğrisinin $\alpha(t_0)$ noktasındaki tanjant vektörü denir [11].

Tanım 2.1.12. $M \subset E^n$ olmak üzere

$$X : M \to \underset{P\in M}{U} T_M(P)$$

dönüşümü için

$$\pi \circ X = I : M \to M$$

olacak şekilde

$$\pi : \underset{P\in M}{U} T_M(P) \to M$$

dönüşümü mevcut ise X e M üstünde bir vektör alanı denir ve M üzerinde kivektör alanları uzayı $\chi(M)$ ile gösterilir [9].

Tanım 2.1.13. M, E^n de (I,α) koordinat komşuluğu ile verilen bir eğri ve

$$\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), ..., \alpha_n(t))$$

olsun. Bu taktirde

$$\left.\frac{d\alpha}{dt}\right|_{\alpha(t)} = \alpha'(t)\Big|_{\alpha(t)} = \left(\left.\frac{d\alpha_1}{dt}\right|_{\alpha(t)}, \left.\frac{d\alpha_2}{dt}\right|_{\alpha(t)}, ..., \left.\frac{d\alpha_n}{dt}\right|_{\alpha(t)} \right)$$

tanjant vektörüne, M eğrisinin $\alpha(t)$ noktasındaki, hız vektörü denir [9].

Tanım 2.1.14. $M \subset E^n$ eğrisi (I,α) koordinat komşuluğu ile verilsin.

$$\|\alpha'\| : I \to E^n$$
$$t \to \|\alpha'\|(t) = \|\alpha'(t)\|$$

şeklinde tanımlı $\|\alpha'\|$ fonksiyonuna M eğrisinin (I,α) koordinat komşuluğuna göre skalar hız fonksiyonu, $\|\alpha'(t)\|$ reel sayısına da M nin $\alpha(t)$ noktasındaki skalar hızı denir. Eğer

$$\|\alpha'(t)\| = 1$$

ise M eğrisine birim hızlı eğri ve bu halde $t \in I$ parametresine de eğrinin yay parametresi denir [9].

Tanım 2.1.15. $M \subset E^n$ eğrisi (I,α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $a,b \in I$ olmak üzere,

$$\int_a^b \|\alpha'(t)\| dt$$

reel sayısına M eğrisinin $\alpha(a)$ ve $\alpha(b)$ noktaları arasındaki yay-uzunluğu denir [9].

Tanım 2.1.16. $M \subset E^n$ eğrisi (I,α) koordinat komşuluğuyla verilsin. Bu durumda

$$\psi = \left\{\alpha', \alpha'', \ldots, \alpha^{(r)}\right\}$$

sistemi lineer bağımsız ve $\forall \alpha^{(k)}, k > r$ için $\forall \alpha^{(k)} \in Sp\{\psi\}$ olmak üzere ψ den elde edilen $\{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$ ortonormal eğrisine M eğrisinin Serret-Frenet *r*-ayaklı alanı ve $p \in M$ için $\{t_1(p), t_2(p), \ldots, t_n(p)\}$ ye ise $p \in M$ noktasındaki Serret-Frenet *n*-ayaklısı denir.Her bir t_i $(1 \le i \le r)$ Serret-Frenet vektörü denir [9].

Tanım 2.1.17. $M \subset E^n$ eğrisi (I,α) koordinat komşuluğuyla verilsin. $s \in I$ ya karşılık gelen $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet *r*-ayaklısı $\{t_1(s), t_2(s), ..., t_n(s)\}$ olsun. Buna göre

$$\begin{aligned} &k_i : I \to \mathbb{R} \\ &\quad s \to k_i(s) = \langle t_i'(s), t_{i+1}(s) \rangle \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı k_i fonksiyonuna *M* eğrisinin *i*-inci eğrilik fonksiyonu ve $s \in I$ için $k_i(s)$ reel satısına da $\alpha(s)$ noktasında *M* nin *i*-inci eğriliği denir [9].

Teorem 2.1.3. $M \subset E^n$ eğrisi (I,α) koordinat komşuluğuyla verilen *s* yay-parametreli bir eğri olsun. *M* nin $\alpha(s)$ noktasındaki *i*-inci eğriliği $k_i(s)$ ve Serret-Frenet *n*-ayaklısı da $\{t_1(s), t_2(s), ..., t_n(s)\}$ olsun. Bu taktirde

$$\begin{aligned} t_1' &= k_1(s) t_2(s) \\ t_i' &= -k_{i-1}(s) t_{i-1}(s) + k_i(s) t_{i+1}(s), \ 1 < i < n-1 \\ t_n' &= -k_{n-1}(s) t_{n-1}(s) \end{aligned} \tag{1.1}$$

bağıntıları sağlanır [9].

Tanım 2.1.18. (1.1) formüllerine Serret-Frenet formülleri denir. Bu formüller matris formunda yazılırsa

$$\begin{bmatrix} t_1' \\ t_2' \\ t_3' \\ . \\ . \\ . \\ . \\ t_n' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ -k_1 & 0 & k_2 & 0 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & -k_2 & 0 & k_3 & 0 & 0 & . & 0 \\ . & & & . & & & & . \\ . & & & & . & & & . \\ . & & & & & . & & 0 \\ 0 & . & . & . & 0 & -k_{n-2} & 0 & k_{n-1} \\ 0 & . & . & . & . & 0 & -k_{n-1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ . \\ . \\ . \\ . \\ t_n \end{bmatrix}$$

olarak verilir.

n=5 özel halinde Serret-Frenet formülleri

$$
\begin{aligned}
&t_1' = k_1(s)t_2(s) \\
&t_i' = -k_{i-1}(s)t_{i-1}(s) + k_i(s)t_{i+1}(s),\ 1 < i < 4 \\
&t_5' = -k_4(s)t_4(s)
\end{aligned}
$$

dır. Böylece matris formunda

$$
\begin{bmatrix} t_1' \\ t_2' \\ t_3' \\ t_4' \\ t_5' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & 0 & 0 & 0 \\ -k_1 & 0 & k_2 & 0 & 0 \\ 0 & -k_2 & 0 & k_3 & 0 \\ 0 & 0 & -k_3 & 0 & k_4 \\ 0 & 0 & 0 & -k_4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ t_4 \\ t_5 \end{bmatrix}
$$

dır [9].

Tanım 2.1.19. $M, N \subset E^n$ eğrileri, sırasıyla, (I,α) ve (I,β) koordinat komşulukları ile verilsin. $s, s^* \in I$ y karşılık gelen $\alpha(s) \in M$ ve $\beta(s^*) \in N$ noktalarında M ve N nin

$$
\{t_1(s), t_2(s), ..., t_n(s)\},\ \{t_1^*(s^*), t_2^*(s^*), ..., t_n^*(s^*)\}
$$

Serret-Frenet n-ayaklıları verildiğinde $\forall s, s^* \in I$ için

$$
\{t_2(s), t_2^*(s^*)\}
$$

lineer bağımlı ise (M, N) eğri 2-lisine Bertrand çifti denir [9].

Teorem 2.1.4. (M, N) Bertrand çifti verilsin. M ve N sırasıyla (I,α) ve (I,β) koordinat komşulukları verildiğine göre $\forall s, s^* \in I$ için

$$
d\left(\alpha(s), \beta(s^*)\right) = sabit
$$

dir [9].

İspat: $\beta\left(s^*\right)=\alpha(s)+\lambda(s)t_2(s)$ yazılabilir. Burada sırasıyla $\alpha(s)\in M$ ve $\beta\left(s^*\right)\in N$ Serret-Frenet n-ayaklıları $\left\{t_1^*\left(s^*\right),t_2^*\left(s^*\right),...,t_n^*\left(s^*\right)\right\}$, $\left\{t_1(s),t_2(s),...,t_n(s)\right\}$ ile gösterilmiş olsun. Buna göre *M* nin yay parametresi *s*, *N* nin yay parametresi s^* ile gösterilmek üzere $\beta\left(s^*\right)=\alpha(s)+\lambda(s)t_2(s)$ ifadesinin *s* e göre diferensiyeli alınarak

$$\frac{ds^*}{ds}t_1^*\left(s^*\right)=\left(1-\lambda(s)k_1(s)\right)t_1(s)+\lambda'(s)t_2(s)+\lambda(s)k_2(s)t_3(s)$$

elde edilir. $\left\{t_2(s),t_2^*\left(s^*\right)\right\}$ lineer bağımlı olduğundan

$$\left\langle t_2(s),t_1^*\left(s^*\right)\right\rangle=0$$

dır. $\frac{ds^*}{ds}t_1^*\left(s^*\right)=\left(1-\lambda(s)k_1(s)\right)t_1(s)+\lambda'(s)t_2(s)+\lambda(s)k_2(s)t_3(s)$ nin her iki tarafını $t_2(s)$ ile iç çarparsak

$$\lambda'(s)=0\Rightarrow\lambda(s)=sabit,\ \forall s\in I$$

bulunur. $\forall s\in I$ için

$$d\left(\alpha(s),\beta\left(s^*\right)\right)=\left\|\beta\left(s^*\right)-\alpha(s)\right\|=\left\|\lambda t_2(s)\right\|=|\lambda|=sabit$$

elde edilir [9].

Teorem 2.1.5. E^n de Bertrand eğrilerinin tanjant vektörleri arasındaki açı sabittir [3].

İspat: $t_1^*\perp t_2$ dı**r.** $t_1^*\in Sp\left\{t_1,t_3,t_4,...,t_n\right\}$ olduğundan dolayı $t_1^*=\sum\limits_{\substack{i=1\\(i\neq 2)}}^{n}\mu_i t_i$ ve $\left\langle t_1^*,t_1\right\rangle=\mu_1$ dır.

$$\frac{dt_1^*}{ds}=\sum_{\substack{i=1\\(i\neq 2)}}^{n}\frac{d\mu_i}{ds}t_i+\mu_1t_1'+\mu_3t_3'+...+\mu_nt_n' \tag{1.2}$$

dır. Teorem 2.13 den $\frac{dt_1^*}{ds^*}=k_1^*t_2^*$ dır. Dolayısıyla $\frac{dt_1^*}{ds^*}$, t_2^* ve $\frac{dt_1^*}{ds^*}$, t_2 paraleldir. (1.2) denkleminden

$$\frac{dt_1^*}{ds}=\frac{d\mu_1}{ds}t_1+\left(\mu_1k_1-\mu_3k_3\right)t_2+...$$

bulunur. $\frac{dt_1^*}{ds^*}$ ile t_2 aynı doğrultuda olmaları için $\left(\mu_1k_1-\mu_3k_3\right)t_2\neq 0$ olup diğer tüm katsayılar 0 olmalıdır. Buradan da $\frac{d\mu_1}{ds}=0\Rightarrow\mu_1=sabit$ olur. t_1 ile t_1^* arasındaki açı θ ise

$$\cos\theta=\frac{\left\langle t_1,t_1^*\right\rangle}{\left\|t_1\right\|\left\|t_1^*\right\|}=\mu_1=sabit$$

olur. Benzer şekilde devam ederek her tanjant vektör arasındaki açı sabit olduğu görülür.

2. 2. Lorentz Uzayında Temel Kavramlar

Tanım 2.2.1. V, sonlu boyutlu reel vektör uzayı olmak üzere,

$$\left\langle\ ,\ \right\rangle : V\times V\rightarrow\mathbb{R}$$

2-lineer fonksiyonu her $\vec{v},\vec{w}\in V$ için $\left\langle\vec{v},\vec{w}\right\rangle=\left\langle\vec{w},\vec{v}\right\rangle$ özeliğini sağlıyor ise, $\left\langle\ ,\ \right\rangle$ ye V üzerinde bir simetrik 2-lineer form denir [12].

Tanım 2.2.2. V, vektör uzayı üzerinde bir simetrik 2-lineer form $\langle\ ,\ \rangle$ olsun. Bu takdirde,

i) $\forall \vec{v} \in V$, $\vec{v} \neq 0$ için $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle > 0$ ise $\langle\ ,\ \rangle$ 2-lineer formu pozitif tanımlı,

ii) $\forall \vec{v} \in V$, $\vec{v} \neq 0$ için $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle < 0$ ise $\langle\ ,\ \rangle$ 2-lineer formu negatif tanımlı,

iii) $\forall \vec{v} \in V$, $\vec{v} \neq 0$ için $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle \geq 0$ ise $\langle\ ,\ \rangle$ 2-lineer formu yarı-pozitif tanımlı,

iv) $\forall \vec{v} \in V$, $\vec{v} \neq 0$ için $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle \leq 0$ ise $\langle\ ,\ \rangle$ 2-lineer formu yarı-negatif tanımlı,

v) $\forall \vec{w} \in V$ için $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = 0$ için $\vec{v} = \vec{0}$ oluyorsa $\langle\ ,\ \rangle$ 2-lineer formuna nondejenere, aksi halde dejenere adı verilir [12].

Tanım 2.2.3. $\langle\ ,\ \rangle$, V üzerinde simetrik 2-lineer form ve W da V nin bir altuzayı olsun. $\langle\ ,\ \rangle$ nin W üzerinde kısıtlanmışı $\langle\ ,\ \rangle|_W$ olmak üzere,

$$\langle\ ,\ \rangle|_W : W \times W \to \mathbb{R}$$

negatif tanımlı olacak şekilde en büyük boyutlu W altuzayının boyutuna, $\langle\ ,\ \rangle$ simetrik 2-lineer formun indeksi denir. Eğer $\langle\ ,\ \rangle$ nin indeksi ν ise $0 \leq \nu \leq \text{boy}V$ dir [12].

Tanım 2.2.4. $\mathbb{R}^n$, $n-$boyutlu Öklid uzayı verilsin. $0 \leq \nu \leq n$ olmak üzere,

$$\langle \vec{X}, \vec{Y} \rangle = -\sum_{i=1}^{\nu} x_i y_i + \sum_{j=\nu+1}^{n} x_j y_j$$

şeklinde bir metrik tensör tanımlanırsa, seçilen uzay yarı-Öklid uzayı olarak isimlendirilir ve $\mathbb{R}^n_\nu$ ile gösterilir. Özel olarak $\nu = 1$, $n \geq 2$ durumunda ise $\mathbb{R}^n_1$, $n-$ boyutlu Lorentz uzayı adını alır. Metrik tensör ise Lorentz metriği olarak adlandırılır [12].

Tanım 2.2.5. $\vec{X}=\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right)\in\mathbb{R}_1^n$ olsun. Eğer

i) $\left\langle \vec{X},\vec{X}\right\rangle<0$ ise $\vec{X}$ e timelike vektör,

ii) $\left\langle \vec{X},\vec{X}\right\rangle>0$ veya $\vec{X}=\vec{0}$ ise $\vec{X}$ e spacelike vektör,

iii) $\left\langle \vec{X},\vec{X}\right\rangle=0$ ve $\vec{X}\neq\vec{0}$ ise $\vec{X}$ e null (lightlike) vektör adı verilir [12].

Tanım 2.2.6. $\mathbb{R}_1^n$, $n-$boyutlu Lorentz uzayı olsun. $\forall\vec{X},\,\vec{Y}\in\mathbb{R}_1^n$ için

$$\left\langle \vec{X},\vec{Y}\right\rangle=0$$

ise $\vec{X}$ ve $\vec{Y}$ vektörleri Lorentz anlamda diktirler denir [12].

Tanım 2.2.7. $\mathbb{R}_1^n$, $n-$boyutlu Lorentz uzayının bütün timelike vektörlerin cümlesi τ olsun. Böylece $\forall\vec{U}\in\tau$ için

$$C\left(\vec{U}\right)=\left\{\vec{X}\in\tau\;\middle|\;\left\langle \vec{U},\vec{X}\right\rangle<0\right\}$$

biçiminde tanımlanan $C\left(\vec{U}\right)$ cümlesine $\vec{U}$ yu içeren $\mathbb{R}_1^n$ nin bir time-konisi denir [12].

Tanım 2.2.8. $\vec{X}=\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right)\in\mathbb{R}_1^n$ için $\vec{X}$ vektörünün normu

$$\left\|\vec{X}\right\|=\sqrt{\left|\left\langle \vec{X},\vec{X}\right\rangle\right|}$$

ile tanımlanır [12].

Teorem 2.2.1. $\vec{X}=\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right)\in\mathbb{R}_1^n$ olsun. Bu takdirde

i) $\left\|\vec{X}\right\| > 0$ dır,

ii) $\left\|\vec{X}\right\| = 0 \Leftrightarrow \vec{X}$ bir null vektördür,

iii) $\vec{X}$ bir timelike vektör ise, $\left\|\vec{X}\right\|^2 = -\left\langle \vec{X}, \vec{X} \right\rangle$ dir,

iv) $\vec{X}$ bir spacelike vektör ise, $\left\|\vec{X}\right\|^2 = \left\langle \vec{X}, \vec{X} \right\rangle$ dir [12].

Tanım 2.2.9. $\left(V, \langle\ ,\ \rangle\right)$ bir Lorentz uzayı olsun. $W \subset V$ altuzayı göz önüne alınırsa

i) $\langle\ ,\ \rangle\big|_W : W \times W \to \mathbb{R}$, pozitif ise, W ya spacelike altuzay,

ii) $\langle\ ,\ \rangle\big|_W : W \times W \to \mathbb{R}$, 1-indeksli ve nondejenere ise, W ya timelike altuzay,

iii) $\langle\ ,\ \rangle\big|_W : W \times W \to \mathbb{R}$, dejenere ise, W ya lightlike altuzay denir [12].

Tanım 2.2.10. $\alpha \subset \mathbb{R}_1^n$ Lorentz uzayında bir eğri olsun. α eğrisinin hız vektörü α' olmak üzere;

i. $\langle \alpha', \alpha' \rangle < 0$ ise, α timelike eğri,

ii. $\langle \alpha', \alpha' \rangle > 0$ ise, α spacelike eğri,

iii. $\langle \alpha', \alpha' \rangle = 0$ ise, α null eğri,

olarak adlandırılır [13].

Tanım 2.2.11. $\alpha \subset \mathbb{R}_1^n$ eğrisi için $s \in I$ ya karşılık gelen Serret-Frenet *n*-ayaklısı $\left\{t_1(s), t_2(s), ..., t_n(s)\right\}$ olmak üzere

$$k_i : I \to \mathbb{R}$$
$$s \to k_i(s) = \left\langle t_i'(s), t_{i+1}(s) \right\rangle$$

şeklinde tanımlı k_i fonksiyonuna α eğrisinin *i*-inci eğrilik fonksiyonu ve $k_i(s)$ reel sayısına $\alpha(s)$ noktasındaki *i*-inci eğriliği denir [13].

Teorem 2.2.1. $M \subset \mathbb{R}_1^n$ eğrisi $s \in I$ yay-parametreli bir timelike eğri olsun. M eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki *i*-inci eğriliği $k_i(s)$ ve Serret-Frenet *n*-ayaklısı da $\{t_1(s), t_2(s), ..., t_n(s)\}$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} t_1' &= \varepsilon_0 k_1(s) t_2(s) \\ t_i' &= -\varepsilon_0 k_{i-1}(s) t_{i-1}(s) + \varepsilon_0 k_i(s) t_{i+1}(s), 1 < i < r \\ t_n' &= -\varepsilon_0 k_{n-1}(s) t_{n-1}(s) \end{aligned}$$

(2.1)

dır. Burada

$$\varepsilon_0 = \begin{cases} -1, & \text{Timelike} \\ 1, & \text{Spacelike} \end{cases}$$

dır. $\{t_1(s), t_2(s), ..., t_n(s)\}$ Serret-Frenet *n*-ayaklısının $t_i(s)$ Serret-Frenet vektörlerinin eğri boyunca kovaryant türevleri matrissel formda

$$\begin{bmatrix} t_1' \\ t_2' \\ t_3' \\ . \\ . \\ . \\ . \\ t_n' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon_0 k_1 & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ -\varepsilon_0 k_1 & 0 & \varepsilon_0 k_2 & 0 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & -\varepsilon_0 k_2 & 0 & \varepsilon_0 k_3 & 0 & 0 & . & 0 \\ . & & & . & & & & . \\ . & & & & . & & & . \\ . & & & & & & . & 0 \\ 0 & . & . & . & 0 & -\varepsilon_0 k_{n-2} & 0 & \varepsilon_0 k_{n-1} \\ 0 & . & . & . & . & 0 & -\varepsilon_0 k_{n-1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ . \\ . \\ . \\ . \\ t_n \end{bmatrix}$$

dır ve *n*=5 özel durumunda

$$\begin{bmatrix} t_1' \\ t_2' \\ t_3' \\ t_4' \\ t_5' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon_0 k_1 & 0 & 0 & 0 \\ -\varepsilon_0 k_1 & 0 & \varepsilon_0 k_2 & 0 & 0 \\ 0 & -\varepsilon_0 k_2 & 0 & \varepsilon_0 k_3 & 0 \\ 0 & 0 & -\varepsilon_0 k_3 & 0 & \varepsilon_0 k_4 \\ 0 & 0 & 0 & -\varepsilon_0 k_4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ t_4 \\ t_5 \end{bmatrix}$$

dır [13].

Teorem 2.2.2 $M \subset \mathbb{R}_1^n$ timelike eğrisi (I,α) koordinat komşuluğuyla verilsin. $s \in I$ yay-parametresi olmak üzere, $\alpha(s)$ noktasında Serret-Frenet n-ayaklısı $\{t_1(s), t_2(s), ..., t_n(s)\}$ ve

$$E_i(s) = \alpha^{(i)}(s) - \sum_{j<i} \langle \alpha^{(i)}(s), t_j(s) \rangle t_j(s), \quad 1 \le i < n$$

ise

$$k_i = \varepsilon_{i+1} \frac{\|E_{i+1}(s)\|}{\|E_i(s)\|}$$

dır. Burada ε_{i+1}, E_{i+1} vektörünün işaretidir [13].

Teorem 2.2.3. $M \subset \mathbb{R}_1^n$ timelike eğrisi (J,β) koordinat komşuluğuyla verilsin. $h \in I$ yay-parametresi olmak üzere, $\beta(h)$ noktasındaki Serret-Frenet n-ayaklısı

$$\{t_1(h), t_2(h), ..., t_n(h)\}$$

ve

$$F_i(t) = \beta^{(i)}(h) - \sum_{j<i} \langle \beta^{(i)}(h), t_j(h) \rangle t_j(h), \quad 1 \le i < r$$

olmak üzere, i-inci $k_i(h)$ eğriliği için

$$k_i(h) = \varepsilon_{i+1} \frac{\|F_{i+1}(h)\|}{\|F_i(h)\| \|F_i(h)\|}, \quad 1 < i < n$$

dir [13].

Tanım 2.1.12 $\mathbb{R}_1^n$, n-boyutlu Lorentz uzayı $M, N \subset \mathbb{R}_1^n$ de, sırası ile, (I,α) ve (I,β) koordinat komşulukları ile verilen iki eğri olsun. M ve N nin $s \in I$ ya karşılık gelen $\alpha(s) \in M$ ve $\beta(s) \in N$ noktalarındaki Serret-Frenet n-ayaklıları

$$\{t_1(s), t_2(s), ..., t_n(s)\} \text{ ve } \{t_1^*(s), t_2^*(s), ..., t_n^*(s)\}$$

olmak üzere $\forall s \in I$ için

$$\{t_2, t_2^*\}$$

lineer bağımlı ise (M,N) eğri 2-lisine L^n de Bertrand eğri çifti denir [13].

BÖLÜM 3. 5-BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA BERTRAND EĞRİ ÇİFTLERİ

3.1. 5-Boyutlu Öklid Uzayında Bertrand Eğri Çiftleri

E^5, 5-boyutlu Öklid uzayında r ve r^*, sırasıyla, s ve s^* yay parametresine sahip eğriler olsun ve bu eğriler

$$r = r(s) \text{ ve } r^* = r^*\left(s^*\right) \tag{3.1}$$

parametrizasyonu ile verilsin. r ve r^* eğrilerinin Frenet vektörleri, sırasıyla, t_i ve t_i^* , $1 \le i \le 5$, olmak üzere t_1 ve t_1^* birim teğet vektör alanlarıdır. Ayrıca (3.1) denklemi ile verilen eğrilerin, sırasıyla, k_ν ve k_ν^*, $1 \le \nu \le 4$, eğrilikleri için

$$k_1 k_2 k_3 k_4 k_1^* k_2^* k_3^* k_4^* \neq 0 \tag{3.2}$$

olsun.

Bu koşullar altında (3.1) ile verilen eğri çiftinin Bertrand eğrisi olması ile ilgili aşağıdaki tanım verilebilir.

Tanım 3.1.1. Bir $r\left(r : I \to E^5\right)$ eğrisi ve bir diğer $r^*\left(r^* : I^* \to E^5\right)$ eğrisi için

$$\begin{aligned} f &: I \to I^* \\ &s \to s^* = f(s), \; \frac{ds^*}{ds} \neq 0 \end{aligned}$$

birebir dönüşümü var ve bu dönüşüm altında Frenet 5-ayaklı çifti Öklid hareket gruplarına göre invaryant hacimler oluşturuyorsa $r = r(s)$ eğrisine Bertrand eğrisi,

$r^* = r^*\left(s^*\right)$ eğrisine r eğrisinin Bertrand eşleniği denir. Ayrıca, $\left(r, r^*\right)$ eğri çiftine de Bertrand eğri çifti denir [8].

Teorem 3.1.1. Eğer r ve r^* eğrileri Bertrand çifti ise bu takdirde $\mu_i, a_i, b_i, c_i, d_i, e_i$ sabitler ve $\varphi_i = \varphi_i(s) \neq 0 \ (1 \leq i \leq 5)$ olmak üzere, eğriler arasında

$$r^* = r + \sum_{i=1}^{5} \mu_i t_i \tag{3.3}$$

bağıntısı vardır, öyle ki burada

$$\lambda_1 t_1^* = \sum_{i=1}^{5} a_i t_i \,,\ \lambda_1^2 = \sum_{i=1}^{5} a_i^2 \,, \tag{3.4$_1$}$$

$$\lambda_2 t_2^* = \sum_{i=1}^{5} b_i t_i \,,\ \lambda_2^2 = \sum_{i=1}^{5} b_i^2 \,, \tag{3.4$_2$}$$

$$\lambda_3 t_3^* = \sum_{i=1}^{5} c_i t_i \,,\ \lambda_3^2 = \sum_{i=1}^{5} c_i^2 \,, \tag{3.4$_3$}$$

$$\lambda_4 t_4^* = \sum_{i=1}^{5} d_i t_i \,,\ \lambda_4^2 = \sum_{i=1}^{5} d_i^2 \,, \tag{3.4$_4$}$$

$$\lambda_5 t_5^* = \sum_{i=1}^{5} e_i t_i \,,\ \lambda_5^2 = \sum_{i=1}^{5} e_i^2 \tag{3.4$_5$}$$

dır ve $2 \leq h \leq 4$ için

$$a_1\varphi_1 = 1 - \mu_2 k_1, \quad a_h\varphi_1 = \mu_{h\text{-}1}k_{h\text{-}1} - \mu_{h+1}k_h, \quad a_5\varphi_1 = \mu_4 k_4\,, \tag{3.5$_1$-3.5$_5$}$$

$$b_1\varphi_2 = -a_2 k_1, \quad b_2\varphi_2 = a_{h\text{-}1}k_{h\text{-}1} - a_{h+1}k_h, \quad b_5\varphi_2 = a_4 k_4, \tag{3.6$_1$-3.6$_5$}$$

$$\begin{aligned} &c_1\varphi_3 = -b_2 k_1 + a_1\left(\frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2}\right)\varphi_2, \\ &c_h\varphi_3 = b_{h\text{-}1}k_{h\text{-}1} - b_{h+1}k_h + a_h\left(\frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2}\right)\varphi_2, \quad c_5\varphi_3 = b_4 k_4 + a_5\left(\frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2}\right)\varphi_2, \end{aligned} \tag{3.7$_1$-3.7$_5$}$$

$$d_1\varphi_4 = -c_2k_1 + b_1\left(\frac{\lambda_3^2}{\lambda_2^2}\right)\varphi_3,$$

$$d_h\varphi_4 = c_{h\text{-}1}k_{h\text{-}1} - c_{h+1}k_h + b_h\left(\frac{\lambda_3^2}{\lambda_2^2}\right)\varphi_3, \quad d_5\varphi_4 = c_4k_4 + b_5\left(\frac{\lambda_3^2}{\lambda_2^2}\right)\varphi_3, \qquad (3.8_1\text{-}3.8_5)$$

$$e_1\varphi_5 = -d_2k_1 + c_1\left(\frac{\lambda_4^2}{\lambda_3^2}\right)\varphi_2,$$

$$e_h\varphi_5 = d_{h\text{-}1}k_{h\text{-}1} - d_{h+1}k_h + c_h\left(\frac{\lambda_4^2}{\lambda_3^2}\right)\varphi_4, \ e_5\varphi_5 = d_4k_4 + c_5\left(\frac{\lambda_4^2}{\lambda_3^2}\right)\varphi_4 \qquad (3.9_1\text{-}3.9_5)$$

dır. Ayrıca, r^* eğrisinin yay parametresi

$$s^* = \lambda_1\int\varphi_1 ds \qquad (3.10)$$

dır ve $1 \le \nu \le 4$ için r^* eğrisinin ν. inci eğriliği

$$k_\nu^* = \frac{\lambda_{\nu+1}\varphi_{\nu+1}}{\lambda_\nu\lambda_1\varphi_1} \qquad (3.11)$$

dır [8].

İspat: r ve r^* eğrilerinin Frenet 5-ayaklılar çifti Öklid hareket gruplarına göre invaryant hacimler oluşturduğundan t_i ve t_i^*, $1 \le i \le 5$, birim vektörleri arasında

$$t_j^* = \sum_{i=1}^{5}\gamma_{ji}t_i\ , \quad 1 \le j \le 5 \qquad (3.12)$$

bağıntısı vardır öyle ki burada γ_{ji} sabittir ve (γ_{ji}) bir ortagonal matristir.

(3.1) denklemi ile verilen eğri çifti için Frenet Formülleri aşağıdaki gibidir;

$$\frac{dr}{ds} = t_1, \quad \frac{dt_1}{ds} = k_1t_2, \quad \frac{dt_h}{ds} = -k_{h-1}t_{h-1} + k_ht_{h+1}, \quad \frac{dt_5}{ds} = -k_4t_4 \qquad (3.13)$$

$$\frac{dr^*}{ds^*} = t_1^*, \quad \frac{dt_1^*}{ds^*} = k_1^*t_2^*, \quad \frac{dt_h^*}{ds^*} = -k_{h-1}^*t_{h-1}^* + k_h^*t_{h+1}^*, \quad \frac{dt_5^*}{ds^*} = -k_4^*t_4^* \qquad (3.14)$$

İlk olarak s ile s^* arasındaki bağıntısını elde etmek için (3.3) bağıntısının s yay parametresine göre türevi alınırsa

$$\frac{dr^*}{ds} = r' + \sum_{i=1}^{5} \mu_i t_i'$$

elde edilir. Burada (3.13) ve (3.14) denklemleri yerine yazılırsa

$$\frac{ds^*}{ds}\frac{dr^*}{ds^*} = t_1 + \mu_1 k_1 t_2 + \mu_2(-k_1 t_1 + k_2 t_3) + \mu_3(-k_2 t_2 + k_3 t_3) + \mu_4(-k_3 t_3 + k_4 t_5) + \mu_5(-k_4 t_4)$$

bulunur. Gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\frac{ds^*}{ds} t_1^* = (1-\mu_2 k_1)t_1 + (\mu_1 k_1 - \mu_3 k_2)t_2 + (\mu_2 k_2 - \mu_4 k_3)t_3 + (\mu_3 k_3 - \mu_5 k_4)t_4 + \mu_4 k_4 t_5$$

elde edilir. Burada kısalığın hatırı için

$$\begin{aligned} &a_1 = \frac{(1-\mu_2 k_1)}{\varphi_1},\ a_2 = \frac{(\mu_1 k_1 - \mu_3 k_2)}{\varphi_1},\ a_3 = \frac{(\mu_2 k_2 - \mu_4 k_3)}{\varphi_1}, \\ &a_4 = \frac{(\mu_3 k_3 - \mu_5 k_4)}{\varphi_1},\ a_5 = \frac{\mu_4 k_4}{\varphi_1} \end{aligned} \tag{3.15}$$

alınırsa

$$\frac{ds^*}{ds} t_1^* = a_1\varphi_1 t_1 + a_1\varphi_1 t_2 + a_1\varphi_1 t_3 + a_1\varphi_1 t_4 + a_1\varphi_1 t_5 \tag{3.16}$$

olur. r^* eğrisinin yay uzunluğu s^* olmak üzere

$$s^* = \int \left\| \frac{dr^*}{ds^*} \right\| ds \tag{3.17}$$

dır.

$$\begin{aligned} f : I &\rightarrow I^* \\ s &\rightarrow s^* = f(s) \end{aligned} \tag{3.18}$$

olmak üzere

$$f(s)=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2+a_5^2}\int\varphi_1 ds$$

olduğundan yine kısalığın hatırı için $\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2+a_5^2}=\lambda_1$ alınırsa

$$s^*=f(s)=\lambda_1\int\varphi_1 ds$$

bulunur. Böylece (3.10) denklemi elde edilmiş olur. O halde (3.16) denklemi yeniden düzenlenirse

$$\lambda_1 t_1^*=a_1t_1+a_2t_2+a_3t_3+a_4t_4+\ a_5t_5$$

olarak elde edilir ve böylece (3.4_1) elde edilmiş olur. Bu son denklemin s yay parametresine göre türevi alınırsa

$$\lambda_1 f'(s)\left.\frac{dt_1^*}{ds^*}\right|_{s^*=f(s)}=\sum_{i=1}^{5}a_i t_i'$$

bulunur. Eğer (3.13) de verilen Frenet formülleri yerine yazılırsa

$$\lambda_1^2\varphi_1\left.\frac{dt_1^*}{ds^*}\right|_{s^*=f(s)}=-a_2k_1t_1+(a_1k_1-a_3k_2)t_2+(a_2k_2-a_4k_3)t_3+(a_3k_3-a_5k_4)t_4+a_4k_4t_5 \quad (3.19)$$

elde edilir. r^* eğrisinin birinci eğriliği

$$k_1^*=\left\|\left.\frac{dt_1^*}{ds^*}\right|_{s^*=f(s)}\right\| \quad (3.20)$$

olduğundan (3.19) denklemi yardımıyla,

$$k_1^*=\frac{1}{\lambda_1^2\varphi_1}\sqrt{\left(a_2k_1\right)^2+(a_1k_1-a_3k_2)^2+(a_2k_2-a_4k_3)^2+(a_3k_3-a_5k_4)^2+\left(a_4k_4\right)^2}$$

dir. Yine kısalık için

$$\sqrt{\left(a_2k_1\right)^2+(a_1k_1-a_3k_2)^2+(a_2k_2-a_4k_3)^2+(a_3k_3-a_5k_4)^2+\left(a_4k_4\right)^2}=\lambda_2\varphi_2$$

alınırsa r^* eğrisinin birinci eğriliği

$$k_1^* = \frac{\lambda_2 \varphi_2}{\lambda_1^2 \varphi_1} \tag{3.21}$$

bulunur. Böylece (3.19) denklemi

$$\lambda_1^2 \varphi_1 k_1^* t_2^* = -a_2 k_1 t_1 + (a_1 k_1 - a_3 k_2) t_2 + (a_2 k_2 - a_4 k_3) t_3 + (a_3 k_3 - a_5 k_4) t_4 + a_4 k_4 t_5$$

olarak düzenlenir ve k_1^* yerine yazılırsa

$$\lambda_2 \varphi_2 t_2^* = -a_2 k_1 t_1 + (a_1 k_1 - a_3 k_2) t_2 + (a_2 k_2 - a_4 k_3) t_3 + (a_3 k_3 - a_5 k_4) t_4 + a_4 k_4 t_5$$

yani

$$\lambda_2 t_2^* = \frac{-a_2 k_1 t_1 + (a_1 k_1 - a_3 k_2) t_2 + (a_2 k_2 - a_4 k_3) t_3 + (a_3 k_3 - a_5 k_4) t_4 + a_4 k_4 t_5}{\varphi_2}$$

olduğu görülür. Burada kısalık için

$$-\frac{a_2 k_1}{\varphi_2} = b_1, \quad \frac{(a_1 k_1 - a_3 k_2)}{\varphi_2} = b_2, \quad \frac{(a_2 k_2 - a_4 k_3)}{\varphi_2} = b_3, \quad \frac{(a_3 k_3 - a_5 k_4)}{\varphi_2} = b_4, \quad \frac{a_4 k_4}{\varphi_2} = b_5$$

alınırsa

$$\lambda_2 t_2^* = b_1 t_1 + b_2 t_2 + b_3 t_3 + b_4 t_4 + b_5 t_5$$

olur. Böylece $b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + b_4^2 + b_5^2 = \lambda_2^2$ elde edilir. Yani (3.4_2) bulunmuş olur. Bu son denklemin *s* yay parametresine göre türevi alınırsa

$$\lambda_2 f'(s) \left. \frac{dt_2^*}{ds^*} \right|_{s^* = f(s)} = \sum_{i=1}^{5} b_i t_i'$$

bulunur ve (3.13) de verilen Frenet formülleri yerine yazılırsa

$$\lambda_2 \lambda_1 \varphi_1 \left. \frac{dt_2^*}{ds^*} \right|_{s^* = f(s)} = -b_2 k_1 t_1 + (b_1 k_1 - b_3 k_2) t_2 + (b_2 k_2 - b_4 k_3) t_3 + (b_3 k_3 - b_5 k_4) t_4 + b_4 k_4 t_5 \tag{3.22}$$

elde edilir. r^* eğrisinin ikinci eğriliği

$$k_2^* = \left\| \left.\frac{dt_2^*}{ds^*}\right|_{s^*=f(s)} + k_1^* t_1^* \right\| \tag{3.23}$$

olduğundan (3.4$_1$) ve (3.22) denklemleri (3.23) de yerine yazılarak

$$k_2^* = \frac{1}{\lambda_1\lambda_2\varphi_1}\sqrt{\left(\frac{\lambda_2^2\varphi_2 a_1}{\lambda_1^2} - b_2k_1\right)^2 + \left(\frac{\lambda_2^2\varphi_2 a_2}{\lambda_1^2} + (b_1k_1 - b_3k_2)\right)^2 + \left(\frac{\lambda_2^2\varphi_2 a_3}{\lambda_1^2} + (b_2k_2 - b_4k_3)\right)^2 + \left(\frac{\lambda_2^2\varphi_2 a_4}{\lambda_1^2} + (b_3k_3 - b_5k_4)\right)^2 + \left(\frac{\lambda_2^2\varphi_2 a_5}{\lambda_1^2} + b_4k_4\right)^2}$$

elde edilir. Yine kısalık için

$$\sqrt{\left(\frac{\lambda_2^2\varphi_2 a_1}{\lambda_1^2} - b_2k_1\right)^2 + \left(\frac{\lambda_2^2\varphi_2 a_2}{\lambda_1^2} + (b_1k_1 - b_3k_2)\right)^2 + \left(\frac{\lambda_2^2\varphi_2 a_3}{\lambda_1^2} + (b_2k_2 - b_4k_3)\right)^2 + \left(\frac{\lambda_2^2\varphi_2 a_4}{\lambda_1^2} + (b_3k_3 - b_5k_4)\right)^2 + \left(\frac{\lambda_2^2\varphi_2 a_5}{\lambda_1^2} + b_4k_4\right)^2} = \lambda_3\varphi_3$$

alınırsa r^* eğrisinin ikinci eğriliği

$$k_2^* = \frac{\lambda_3\varphi_3}{\lambda_2\lambda_1\varphi_1} \tag{3.24}$$

bulunur. Böylece (3.22) denklemi, (3.14) Frenet formülleri yardımıyla

$$-\lambda_2\lambda_1\varphi_1\left(\frac{\lambda_2\varphi_2}{\lambda_1\lambda_1\varphi_1}\right)t_1^* + \lambda_2\lambda_1\varphi_1 k_2^* t_3^* = -b_2k_1t_1 + (b_1k_1 - b_3k_2)t_2 + (b_2k_2 - b_4k_3)t_3 + (b_3k_3 - b_5k_4)t_4 + b_4k_4t_5$$

olur. (3.24) yerine yazılıp yeniden düzenlenirse

$$\lambda_3 t_3^* = \frac{\left[-b_2k_1 + a_1\left(\frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2}\right)\varphi_2\right]t_1 + \left[(b_1k_1 - b_3k_2) + a_2\left(\frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2}\right)\varphi_2\right]t_2 + \left[(b_2k_2 - b_4k_3) + a_3\left(\frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2}\right)\varphi_2\right]t_3 + \left[(b_3k_3 - b_5k_4) + a_4\left(\frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2}\right)\varphi_2\right]t_4 + \left[b_4k_4 + a_5\left(\frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2}\right)\varphi_2\right]t_5}{\varphi_3}$$

elde edilir. Benzer yolla

$$\frac{-b_2k_1 + a_1\left(\frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2}\right)\varphi_2}{\varphi_3} = c_1, \quad \frac{(b_1k_1 - b_3k_2) + a_2\left(\frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2}\right)\varphi_2}{\varphi_3} = c_2, \quad \frac{(b_2k_2 - b_4k_3) + a_3\left(\frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2}\right)\varphi_2}{\varphi_3} = c_3$$

$$\frac{(b_3k_3 - b_5k_4) - a_4\left(\frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2}\right)\varphi_2}{\varphi_3} = c_4, \quad \frac{b_4k_4 - a_5\left(\frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2}\right)\varphi_2}{\varphi_3} = c_5$$

alınırsa

$$\lambda_3 t_3^* = c_1t_1 + c_2t_2 + c_3t_3 + c_4t_4 + c_5t_5$$

olur. Burada $c_1^2+c_2^2+c_3^2+c_4^2+c_5^2=\lambda_3^2$ dır ve (3.4_3) denkleminin elde edildiği görülür. (3.4_3) ün s yay parametresine göre türevi alınırsa

$$\lambda_3 f'(s)\left.\frac{dt_3^*}{ds^*}\right|_{s^*=f(s)}=\sum_{i=1}^{5}c_i t_i'$$

bulunur ve (3.13) de verilen Frenet formülleri yerine yazılırsa

$$\lambda_3\lambda_1\varphi_1\left.\frac{dt_3^*}{ds^*}\right|_{s^*=f(s)}=-c_2k_1t_1+(c_1k_1-c_3k_2)t_2+(c_2k_2-c_4k_3)t_3+(c_3k_3-c_5k_4)t_4+c_4k_4t_5 \tag{3.25}$$

elde edilir. r^* eğrisinin üçüncü eğriliği

$$k_3^*=\left\|\left.\frac{dt_3^*}{ds^*}\right|_{s^*=f(s)}+k_2^*t_2^*\right\| \tag{3.26}$$

olduğundan (3.4_2) ve (3.25) denklemleri yardımıyla

$$k_3^*=\frac{1}{\lambda_1\lambda_3\varphi_1}\sqrt{\left(-c_2k_1+b_1\left(\frac{\lambda_3^2}{\lambda_2^2}\right)\varphi_3\right)^2+\left(c_1k_1-c_3k_2+b_2\left(\frac{\lambda_3^2}{\lambda_2^2}\right)\varphi_3\right)^2+\left(c_2k_2-c_4k_3+b_3\left(\frac{\lambda_3^2}{\lambda_2^2}\right)\varphi_3\right)^2+\left(c_3k_3-c_5k_4+b_4\left(\frac{\lambda_3^2}{\lambda_2^2}\right)\varphi_3\right)^2+\left(c_4k_4+b_5\left(\frac{\lambda_3^2}{\lambda_2^2}\right)\varphi_3\right)^2}$$

bulunur. Kısalık için

$$\sqrt{\left(-c_2k_1+b_1\left(\frac{\lambda_3^2}{\lambda_2^2}\right)\varphi_3\right)^2+\left(c_1k_1-c_3k_2+b_2\left(\frac{\lambda_3^2}{\lambda_2^2}\right)\varphi_3\right)^2+\left(c_2k_2-c_4k_3+b_3\left(\frac{\lambda_3^2}{\lambda_2^2}\right)\varphi_3\right)^2+\left(c_3k_3-c_5k_4+b_4\left(\frac{\lambda_3^2}{\lambda_2^2}\right)\varphi_3\right)^2+\left(c_4k_4+b_5\left(\frac{\lambda_3^2}{\lambda_2^2}\right)\varphi_3\right)^2}=\lambda_4\varphi_4$$

alınırsa r^* eğrisinin üçüncü eğriliği

$$k_3^*=\frac{\lambda_4\varphi_4}{\lambda_3\lambda_1\varphi_1} \tag{3.27}$$

bulunur. Böylece (3.14) denklemi ve (3.21) denklemi, (3.25) de yerine yazılırsa

$$-\lambda_3\lambda_1\varphi_1\left(\frac{\lambda_3\varphi_3}{\lambda_2\lambda_1\varphi_1}\right)t_2^*+\lambda_3\lambda_1\varphi_1k_3^*t_4^*=-c_2k_1t_1+(c_1k_1-c_3k_2)t_2+(c_2k_2-c_4k_3)t_3+(c_3k_3-c_5k_4)t_4+c_4k_4t_5$$

olarak düzenlenir. Ayrıca (3.27) de elde edilen k_3^* son denklemde yerine yazılarak

$$-\left(\frac{\lambda_3^2}{\lambda_2^2}\right)\varphi_3\sum_{i=1}^{5}b_it_i+\lambda_4\varphi_4t_4^*=\sum_{i=1}^{5}c_it_i'=-c_2k_1t_1+(c_1k_1-c_3k_2)t_2+(c_2k_2-c_4k_3)t_3+(c_3k_3-c_5k_4)t_4+c_4k_4t_5$$

bulunur. Buradan

$$\lambda_4\varphi_4 t_4^* = -c_2k_1t_1 + (c_1k_1 + c_3k_2)t_2 + (c_2k_2 + c_4k_3)t_3 + (c_3k_3 + c_5k_4)t_4 + c_4k_4t_5 + \left(\frac{\lambda_3^2}{\lambda_2^2}\right)\varphi_3\sum_{i=1}^{5} b_i t_i$$

yani

$$\lambda_4 t_4^* = \frac{\left(-c_2k_1 + b_1\left(\frac{\lambda_3^2}{\lambda_2^2}\right)\varphi_3\right)t_1 + \left(c_1k_1 - c_3k_2 + b_2\left(\frac{\lambda_3^2}{\lambda_2^2}\right)\varphi_3\right)t_2 + \left(c_2k_2 - c_4k_3 + b_3\left(\frac{\lambda_3^2}{\lambda_2^2}\right)\varphi_3\right)t_3 + \left(c_3k_3 - c_5k_4 + b_4\left(\frac{\lambda_3^2}{\lambda_2^2}\right)\varphi_3\right)t_4 + \left(c_4k_4 + b_5\left(\frac{\lambda_3^2}{\lambda_2^2}\right)\varphi_3\right)t_5}{\varphi_4}$$

olduğu görülür. Benzer yolla

$$\frac{-c_2k_1 + b_1\left(\frac{\lambda_3^2}{\lambda_2^2}\right)\varphi_3}{\varphi_4} = d_1,\quad \frac{\left(c_1k_1 - c_3k_2 + b_2\left(\frac{\lambda_3^2}{\lambda_2^2}\right)\varphi_3\right)}{\varphi_4} = d_2,\quad \frac{\left(c_2k_2 - c_4k_3 + b_3\left(\frac{\lambda_3^2}{\lambda_2^2}\right)\varphi_3\right)}{\varphi_4} = d_3$$

$$\frac{\left(c_3k_3 - c_5k_4 + b_4\left(\frac{\lambda_3^2}{\lambda_2^2}\right)\varphi_3\right)}{\varphi_4} = d_4,\quad \frac{\left(c_4k_4 + b_5\left(\frac{\lambda_3^2}{\lambda_2^2}\right)\varphi_3\right)}{\varphi_4} = d_5$$

alınarak

$$\lambda_4 t_4^* = d_1t_1 + d_2t_2 + d_3t_3 + d_4t_4 + d_5t_5$$

bulunur. O halde $d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2 + d_5^2 = \lambda_4^2$ olur. Böylece (3.4_4) elde edilmiş olur. Son olarak,

$$\lambda_4 f'(s)\frac{dt_4^*}{ds^*}\bigg|_{s^*=f(s)} = \sum_{i=1}^{5} d_i t_i'$$

denklemi için (3.13) de verilen Frenet formülleri yerine yazılırsa

$$\lambda_4\lambda_1\varphi_1\frac{dt_4^*}{ds^*}\bigg|_{s^*=f(s)} = -d_2k_1t_1 + (d_1k_1 - d_3k_2)t_2 + (d_2k_2 - d_4k_3)t_3 + (d_3k_3 - d_5k_4)t_4 + d_4k_4t_5 \qquad (3.28)$$

elde edilir. r^* eğrisinin dördüncü eğriliği

$$k_4^* = \left\| \frac{dt_4^*}{ds^*}\bigg|_{s^*=f(s)} + k_3^* t_3^* \right\| \qquad (3.29)$$

olduğundan (3.4$_3$) ve (3.28) denklemleri kullanarak

$$k_4^* = \frac{1}{\lambda_4\lambda_1\varphi_1}\sqrt{\left(-d_2k_1 + c_1\left(\frac{\lambda_4^2}{\lambda_3^2}\right)\varphi_4\right)^2 + \left(d_1k_1 - d_3k_2 + c_2\left(\frac{\lambda_4^2}{\lambda_3^2}\right)\varphi_4\right)^2 + \left(d_2k_2 - d_4k_3 + c_3\left(\frac{\lambda_4^2}{\lambda_3^2}\right)\varphi_4\right)^2 + \left(d_3k_3 - d_5k_4 + c_4\left(\frac{\lambda_4^2}{\lambda_3^2}\right)\varphi_4\right)^2 + \left(d_4k_4 + c_5\left(\frac{\lambda_4^2}{\lambda_3^2}\right)\varphi_4\right)^2}$$

bulunur. Kısalık için

$$\sqrt{\left(-d_2k_1 + c_1\left(\frac{\lambda_4^2}{\lambda_3^2}\right)\varphi_4\right)^2 + \left(d_1k_1 - d_3k_2 + c_2\left(\frac{\lambda_4^2}{\lambda_3^2}\right)\varphi_4\right)^2 + \left(d_2k_2 - d_4k_3 + c_3\left(\frac{\lambda_4^2}{\lambda_3^2}\right)\varphi_4\right)^2 + \left(d_3k_3 - d_5k_4 + c_4\left(\frac{\lambda_4^2}{\lambda_3^2}\right)\varphi_4\right)^2 + \left(d_4k_4 + c_5\left(\frac{\lambda_4^2}{\lambda_3^2}\right)\varphi_4\right)^2} = \lambda_5\varphi_5$$

alınırsa r^* eğrisinin dördüncü eğriliği

$$k_4^* = \frac{\lambda_5\varphi_5}{\lambda_4\lambda_1\varphi_1} \tag{3.30}$$

bulunur. Böylece (3.28) denklemi

$$-\lambda_4\lambda_1\varphi_1\left(\frac{\lambda_4\varphi_4}{\lambda_3\lambda_1\varphi_1}\right)t_3^* + \lambda_4\lambda_1\varphi_1k_4^*t_5^* = -d_2k_1t_1 + (d_1k_1 - d_3k_2)t_2 + (d_2k_2 - d_4k_3)t_3 + (d_3k_3 - d_5k_4)t_4 + d_4k_4t_5$$

elde edilir. O halde

$$-\left(\frac{\lambda_4^2}{\lambda_3^2}\right)\varphi_4\sum_{i=1}^{5}c_it_i + \lambda_5\varphi_5t_5^* = \sum_{i=1}^{5}d_it_i' = -d_2k_1t_1 + (d_1k_1 - d_3k_2)t_2 + (d_2k_2 - d_4k_3)t_3 + (d_3k_3 - d_5k_4)t_4 + d_4k_4t_5$$

dır. Buradan kolaylıkla

$$\lambda_5\varphi_5t_5^* = -d_2k_1t_1 + (d_1k_1 - d_3k_2)t_2 + (d_2k_2 - d_4k_3)t_3 + (d_3k_3 - d_5k_4)t_4 + d_4k_4t_5 + \left(\frac{\lambda_4^2}{\lambda_3^2}\right)\varphi_4\sum_{i=1}^{5}c_it_i$$

olduğu görülür. Bu son denklem düzenlenerek

$$\lambda_5t_5^* = \frac{\left(-d_2k_1 + c_1\left(\frac{\lambda_4^2}{\lambda_3^2}\right)\varphi_4\right)t_1 + \left(d_1k_1 - d_3k_2 + c_2\left(\frac{\lambda_4^2}{\lambda_3^2}\right)\varphi_4\right)t_2 + \left(d_2k_2 - d_4k_3 + c_3\left(\frac{\lambda_4^2}{\lambda_3^2}\right)\varphi_4\right)t_3 + \left(d_3k_3 - d_5k_4 + c_4\left(\frac{\lambda_4^2}{\lambda_3^2}\right)\varphi_4\right)t_4 + \left(d_4k_4 + c_5\left(\frac{\lambda_4^2}{\lambda_3^2}\right)\varphi_4\right)t_5}{\varphi_5}$$

bulunur. Kısalığın hatırına

$$\frac{-d_2k_1 + c_1\left(\frac{\lambda_4^2}{\lambda_3^2}\right)\varphi_3}{\varphi_5} = e_1, \frac{\left(d_1k_1 - d_3k_2 + c_2\left(\frac{\lambda_4^2}{\lambda_3^2}\right)\varphi_3\right)}{\varphi_5} = e_2, \frac{\left(d_2k_2 - d_4k_3 + c_3\left(\frac{\lambda_4^2}{\lambda_3^2}\right)\varphi_3\right)}{\varphi_5} = e_3$$

$$\frac{\left(d_3k_3 - d_5k_4 + c_4\left(\frac{\lambda_4^2}{\lambda_3^2}\right)\varphi_3\right)}{\varphi_5} = e_4, \quad \frac{\left(d_4k_4 + c_4\left(\frac{\lambda_4^2}{\lambda_3^2}\right)\varphi_3\right)}{\varphi_5} = e_5$$

alınırsa

$$\lambda_5 t_5^* = \sum_{i=1}^{5} e_i t_i$$

olur ve $e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 + e_4^2 + e_5^2 = \lambda_5^2$ elde edilir. O halde (4.4_5) ispatlanmış olur.

Böylece, (3.21), (3.24), (3.27) ve (3.30) denklemlerinden r eğrisinin Bertrand eşleği r^* eğrisinin $1 \leq v \leq 4$ olmak üzere *v*. eğriliği

$$k_v^* = \frac{\lambda_{v+1}\varphi_{v+1}}{\lambda_v \lambda_1 \varphi_1} \tag{3.11}$$

dır.

Ayrıca (3.5_1-3.5_5)-(3.8_1-3.8_5) bağıntıları var olmak üzere (3.4_1)-(3.4_5) denklemlerinin doğru olduğu ispatlanarak 5-boyutlu Öklid uzayında bir eğri çiftinin Bertrand eğri çifti olmasının genel karakterizasyonunu elde edildi. Bundan sonra 5-boyutlu Öklid uzayında bazı özel Bertrand eğri çiftlerini incelenecektir.

3.2. 5-Boyutlu Öklid Uzayında Bazı Özel Bertrand Eğri Çiftleri

İlk olarak E^5 de $r = (s)$ ve $r^* = (s^*)$ eğrileri Bertrand eğri çifti olmak üzere (3.3) parametrizasyonun da $\mu_1 = \mu_3 = \mu_4 = \mu_5 = 0,\ \mu_2 \neq 0$ alınırsa E^3 de iyi bilinen Bertrand eğri çifti tanımına uyan Bertrand eğri çiftinin karakterizasyonunu E^5 de karşılığı aşağıdaki teoremdeki gibidir.

Teorem 3.2.1. E^5 de Bertrand eğri çifti

$$r^* = r + \mu_2 t_2 \tag{3.31}$$

şeklinde ise

$$\lambda_1 t_1^* = a_1 t_1 + a_3 t_3,\ \lambda_1^2 = a_1^2 + a_3^2, \tag{3.32$_1$}$$

$$\lambda_2 t_2^* = b_2 t_2 + b_4 t_4,\ \lambda_2^2 = b_2^2 + b_4^2 \quad , \tag{3.32$_2$}$$

$$\lambda_3 t_3^* = c_1 t_1 + c_3 t_3 + c_5 t_5,\ \lambda_3^2 = c_1^2 + c_3^2 + c_5^2, \tag{3.32$_3$}$$

$$\lambda_4 t_4^* = d_2 t_2 + d_4 t_4,\ \lambda_4^2 = d_2^2 + d_4^2, \tag{3.32$_4$}$$

$$\lambda_5 t_5^* = e_1 t_1 + e_3 t_3 + e_5 t_5,\ \lambda_5^2 = e_1^2 + e_3^2 + e_5^2 \tag{3.32$_5$}$$

dır. Burada

$$a_1\varphi_1 = 1 - \mu_2 k_1,\ a_3\varphi_1 = \mu_2 k_2, \tag{3.33}$$

$$b_2\varphi_2 = a_1 k_1 - a_3 k_2,\ b_4\varphi_2 = a_3 k_3, \tag{3.34}$$

$$c_1\varphi_3 = -b_2 k_1 + a_1 \frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2}\varphi_2,\ c_3\varphi_3 = b_2 k_2 - b_4 k_3 + a_3 \frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2}\varphi_2,\ c_5\varphi_3 = b_4 k_4, \tag{3.35}$$

$$d_2\varphi_4 = c_1 k_1 - c_3 k_2 + b_2 \frac{\lambda_3^2}{\lambda_2^2}\varphi_3,\ d_4\varphi_4 = c_3 k_3 - c_5 k_4 + b_4 \frac{\lambda_3^2}{\lambda_2^2}\varphi_3, \tag{3.36}$$

$$e_1\varphi_5 = -d_2 k_1 + c_1 \frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2}\varphi_4,\ e_3\varphi_5 = d_2 k_2 - d_4 k_3 + c_3 \frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2}\varphi_4,\ e_5\varphi_5 = d_4 k_4 + c_5 \frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2}\varphi_4 \tag{3.37}$$

dır. Ayrıca r^* eğrisinin yay parametresi

$$s^* = \lambda_1 \int \varphi_1 ds$$

dır ve $1 \le v \le 4$ için r^* eğrisinin *v*. eğriliği

$$k_v^* = \frac{\lambda_{v+1}\varphi_{v+1}}{\lambda_v \lambda_1 \varphi_1}$$

dır [8].

İspat. İlk olarak s ile s^* arasındaki bağıntıyı elde etmek için (3.31) formülünün s yay parametresine göre türevi alınırsa

$$\frac{dr^*}{ds}=r'+\mu_2 t_2{}'=\frac{dr^*}{ds^*}\frac{ds^*}{ds}=t_1+\mu_2(-k_1t_1+k_2t_3)$$

$$t_1^*\frac{ds^*}{ds}=(1-\mu_2k_1)t_1+\mu_2k_2t_3 \tag{3.38}$$

olur. Yay parametreleri arasındaki bağıntıyı elde etmek için kabul edelim ki

$$\frac{(1-\mu_2k_1)}{\varphi_1}=a_1,\ \frac{\mu_2k_2}{\varphi_1}=a_3$$

olsun. $\forall s\in I$ için

$$f:I\to I^*$$

$$s\to s^*=f(s),\ \frac{ds^*}{ds}\neq 0$$

olduğundan

$$f(s)=\sqrt{a_1^2+a_3^2}\int\varphi_1 ds$$

bulunur. $a_1^2+a_3^2=\lambda_1^2$ denirse

$$s^*=\lambda_1\int\varphi_1 ds$$

elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapılırsa (3.38) denklemi

$$\lambda_1t_1^*=a_1t_1+a_3t_3$$

haline gelir. O halde (3.32_1) bulunmuş olur. Bu son denklemin s yay parametresine göre türevi alınırsa

$$\lambda_1 f'(s)\left.\frac{dt_1^*}{ds^*}\right|_{s^*=f(s)}=a_1t_1'+a_2t_3'$$

bulunur. (3.13) de verilen Frenet formülleri yardımıyla

$$\lambda_1^2\varphi_1\left.\frac{dt_1^*}{ds^*}\right|_{s^*=f(s)}=(a_1k_1-a_3k_2)t_2+a_3k_3t_4 \tag{3.39}$$

elde edilir. $k_1^*=\left\|\left.\frac{dt_1^*}{ds^*}\right|_{s^*=f(s)}\right\|$ olduğundan

$$k_1^*=\frac{1}{\lambda_1^2\varphi_1}\sqrt{(a_1k_1-a_3k_2)^2+\left(a_3k_3\right)^2}$$

bulunur. Kısalığın hatırı için

$$\sqrt{(a_1k_1-a_3k_2)^2+\left(a_3k_3\right)^2}=\lambda_2\varphi_2$$

alınırsa r^* eğrisinin birinci eğriliği

$$k_1^*=\frac{\lambda_2\varphi_2}{\lambda_1^2\varphi_1} \tag{3.40}$$

bulunur. Böylece (3.39) denkleminde (3.40) denklemi yerine yazılarak

$$\lambda_2\varphi_2t_2^*=(a_1k_1-a_3k_2)t_2+a_3k_3t_4$$

$$\lambda_2t_2^*=\frac{(a_1k_1-a_3k_2)t_2+a_3k_3t_4}{\varphi_2}$$

olur. Bu denklemde kısalığın hatırı için

$$b_2=\frac{(a_1k_1-a_3k_2)}{\varphi_2},\ b_4=\frac{a_3k_3t_4}{\varphi_2}$$

alınırsa

$$\lambda_2t_2^*=b_2t_2+b_4t_4$$

olur ve $\lambda_2^2 = b_2^2 + b_4^2$ elde edilir. Böylece (3.32_2) elde edilmiş olur. Bu son denklemin s yay parametresine göre türevi alınırsa

$$\lambda_2 f'(s) \left.\frac{dt_2^*}{ds^*}\right|_{s^*=f(s)} = b_2 t_2' + b_4 t_4'$$

bulunur ve (3.13) de verilen Frenet formülleri yerine yazılırsa

$$\lambda_2 \lambda_1 \varphi_1 \left.\frac{dt_2^*}{ds^*}\right|_{s^*=f(s)} = -b_2 k_1 t_1 + (b_2 k_2 - b_4 k_3) t_3 + b_4 k_4 t_5 \tag{3.41}$$

elde edilir. $k_2^* = \left\| \left.\frac{dt_2^*}{ds^*}\right|_{s^*=f(s)} + k_1^* t_1^* \right\|$ olduğundan (3.41) ve (3.32_1) denklemleri de kullanılarak

$$k_2^* = \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2 \varphi_1} \sqrt{\left(-b_2 k_1 + a_1 \left(\frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2}\right)\varphi_2\right)^2 + \left((b_2 k_2 - b_4 k_3) + a_3 \left(\frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2}\right)\varphi_2\right)^2 + \left(b_4 k_4\right)^2}$$

olur. Yine kısalığın hatırı için

$$\sqrt{\left(-b_2 k_1 + a_1 \left(\frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2}\right)\varphi_2\right)^2 + \left((b_2 k_2 - b_4 k_3) + a_3 \left(\frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2}\right)\varphi_2\right)^2 + \left(b_4 k_4\right)^2} = \lambda_3 \varphi_3$$

alınırsa r^* eğrisinin ikinci eğriliği

$$k_2^* = \frac{\lambda_3 \varphi_3}{\lambda_2 \lambda_1 \varphi_1} \tag{3.42}$$

bulunur. Böylece (3.41) denklemi, (3.14) de verilen Frenet formülleri ve (3.40) denklemi yerlerine yazılarak

$$-\lambda_2 \lambda_1 \varphi_1 \left(\frac{\lambda_2 \varphi_2}{\lambda_1 \lambda_1 \varphi_1}\right) t_1^* + \lambda_2 \lambda_1 \varphi_1 k_2^* t_3^* = -b_2 k_1 t_1 + (b_2 k_2 - b_4 k_3) t_3 + b_4 k_4 t_5$$

şeklinde olur. Bu son denklemde (3.41) denklemi yerine yazılıp denklem düzenlenirse

$$\lambda_3\varphi_3 t_3^* = \frac{\left(-b_2k_1 + a_1\left(\frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2}\right)\varphi_2\right)t_1 + \left((b_2k_2 - b_4k_3) + a_3\left(\frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2}\right)\varphi_2\right)t_3 + \left(b_4k_4\right)t_5}{\varphi_3}$$

olur. Eğer

$$\frac{b_2k_1 + a_1\left(\frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2}\right)\varphi_2}{\varphi_3} = c_1,\ \frac{(b_2k_2 - b_4k_3) + a_3\left(\frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2}\right)\varphi_2}{\varphi_3} = c_3,\ \frac{b_4k_4}{\varphi_3} = c_5$$

alınırsa

$$\lambda_3 t_3^* = c_1t_1 + c_3t_3 + c_5t_5$$

olur ve buradan da $\lambda_1^2 = c_1^2 + c_3^2 + c_5^2$ bulunur. Böylece (3.32_3) denklemi elde edilir. (3.32_3) denkleminin s yay parametresine göre türevi alınırsa

$$\lambda_3 f'(s)\left.\frac{dt_3^*}{ds^*}\right|_{s^*=f(s)} = c_1t_1' + c_3t_3' + c_5t_5'$$

bulunur. (3.13) de verilen Frenet formülleri yerine yazılırsa

$$\lambda_3\lambda_1\varphi_1\left.\frac{dt_3^*}{ds^*}\right|_{s^*=f(s)} = (c_1k_1 - c_3k_2)t_2 + (c_3k_3 - c_5k_4)t_4 \qquad (3.43)$$

elde edilir. $k_3^* = \left\| \left.\frac{dt_3^*}{ds^*}\right|_{s^*=f(s)} + k_2^* t_2^* \right\|$ denkleminde (3.32_2) ve (3.43) denklemleri kullanılarak

$$k_3^* = \frac{1}{\lambda_1\lambda_3\varphi_1}\sqrt{\left(c_1k_1 - c_3k_2 + b_2\left(\frac{\lambda_3^2}{\lambda_2^2}\right)\varphi_3\right)^2 + \left(c_3k_3 - c_5k_4 + b_4\left(\frac{\lambda_3^2}{\lambda_2^2}\right)\varphi_3\right)^2}$$

bulunur. Kısalığın hatırı için

$$\sqrt{\left(c_1k_1 - c_3k_2 + b_2\left(\frac{\lambda_3^2}{\lambda_2^2}\right)\varphi_3\right)^2 + \left(c_3k_3 - c_5k_4 + b_4\left(\frac{\lambda_3^2}{\lambda_2^2}\right)\varphi_3\right)^2} = \lambda_4\varphi_4$$

alınırsa r^* eğrisinin üçüncü eğriliği

$$k_3^* = \frac{\lambda_4 \varphi_4}{\lambda_3 \lambda_1 \varphi_1} \tag{3.44}$$

olur. Bu durumda (3.43) denkleminde (3.14) Frenet formülleri ve k_3^* yerine yazılırsa

$$\lambda_4 \varphi_4 t_4^* = (c_1 k_1 - c_3 k_2) t_2 + (c_3 k_3 - c_5 k_4) t_4 + \left(b_2 t_2 + b_4 t_4\right)\left(\frac{\lambda_3^2}{\lambda_2^2}\right)\varphi_3$$

$$\lambda_4 t_4^* = \frac{\left(c_1 k_1 + c_3 k_2 + b_2 \left(\frac{\lambda_3^2}{\lambda_2^2}\right)\varphi_3\right) t_2 + \left(c_3 k_3 + c_5 k_4 + b_4 \left(\frac{\lambda_3^2}{\lambda_2^2}\right)\varphi_3\right) t_4}{\varphi_4}$$

olur. Burada

$$d_2 = \frac{\left(c_1 k_1 - c_3 k_2 + b_2 \left(\frac{\lambda_3^2}{\lambda_2^2}\right)\varphi_3\right)}{\varphi_4}, \quad d_4 = \frac{\left(c_3 k_3 - c_5 k_4 + b_4 \left(\frac{\lambda_3^2}{\lambda_2^2}\right)\varphi_3\right)}{\varphi_4}$$

alınırsa

$$\lambda_4 t_4^* = d_2 t_2 + d_4 t_4$$

ve $\lambda_4^2 = d_2^2 + d_4^2$ olur. Böylece (3.32_4) denklemi bulunmuş olur. Son olarak (3.32_4) denkleminin s yay parametresine göre türevinden

$$\lambda_4 \lambda_1 \varphi_1 \left.\frac{dt_4^*}{ds^*}\right|_{s^*=f(s)} = d_2 t_2' + d_4 t_4' \tag{3.45}$$

olur. $k_4^* = \left\| \left.\frac{dt_4^*}{ds^*}\right|_{s^*=f(s)} + k_3^* t_3^* \right\|$ denkleminde (3.32_3) ve (3.45) denklemleri kullanılarak

$$k_4^* = \frac{1}{\lambda_4 \lambda_1 \varphi_1} \sqrt{\left(-d_2 k_1 + c_1 \left(\frac{\lambda_4^2}{\lambda_3^2}\right)\varphi_4\right)^2 + \left(d_2 k_2 - d_4 k_3 + c_3 \left(\frac{\lambda_4^2}{\lambda_3^2}\right)\varphi_4\right)^2 + \left(d_4 k_4 + c_5 \left(\frac{\lambda_4^2}{\lambda_3^2}\right)\varphi_4\right)^2}$$

olur. Kısalığın hatırı için

$$\sqrt{\left(-d_2k_1+c_1\left(\frac{\lambda_4^2}{\lambda_3^2}\right)\varphi_4\right)^2+\left(d_2k_2-d_4k_3+c_3\left(\frac{\lambda_4^2}{\lambda_3^2}\right)\varphi_4\right)^2+\left(d_4k_4+c_5\left(\frac{\lambda_4^2}{\lambda_3^2}\right)\varphi_4\right)^2}=\lambda_5\varphi_5$$

denirse r^* eğrisinin dördüncü eğriliği

$$k_4^*=\frac{\lambda_5\varphi_5}{\lambda_4\lambda_1\varphi_1} \tag{3.46}$$

olur. Böylece (3.45) denklemi, (3.14) Frenet formülleri ve k_4^* yardımıyla

$$-\left(c_1t_1+c_3t_3+c_5t_5\right)\left(\frac{\lambda_4^2}{\lambda_3^2}\right)\varphi_4+\lambda_5\varphi_5t_5^*=d_2t_2'+d_4t_4'$$

olur. Gerekli düzenlemeler sonucu

$$\lambda_5\varphi_5t_5^*=-d_2k_1t_1+(d_2k_2-d_4k_3)t_3+d_4k_4t_5+\left(c_1t_1+c_3t_3+c_5t_5\right)\left(\frac{\lambda_4^2}{\lambda_3^2}\right)\varphi_4$$

$$\lambda_5t_5^*=\frac{\left(-d_2k_1+c_1\left(\frac{\lambda_4^2}{\lambda_3^2}\right)\varphi_4\right)t_1+\left(d_2k_2-d_4k_3+c_3\left(\frac{\lambda_4^2}{\lambda_3^2}\right)\varphi_4\right)t_3+\left(d_4k_4+c_5\left(\frac{\lambda_4^2}{\lambda_3^2}\right)\varphi_4\right)t_5}{\varphi_5}$$

olur. Eğer

$$\frac{-d_2k_1+c_1\left(\frac{\lambda_4^2}{\lambda_3^2}\right)\varphi_4}{\varphi_5}=e_1,\quad \frac{d_2k_2-d_4k_3+c_3\left(\frac{\lambda_4^2}{\lambda_3^2}\right)\varphi_4}{\varphi_5}=e_3,\quad \frac{d_4k_4+c_5\left(\frac{\lambda_4^2}{\lambda_3^2}\right)\varphi_4}{\varphi_5}=e_5$$

alınırsa

$$\lambda_5t_5^*=e_1t_1+e_3t_3+e_5t_5$$

ve $\lambda_5^2=e_1^2+e_3^2+e_5^2$ olur. Böylece (3.32_5) bulunmuş olur.

(3.40), (3.42), (3.44) ve (3.46) denklemlerinden r eğrisinin Bertrand eşleği r^* eğrisinin v. eğriliği

$$k_\nu^* = \frac{\lambda_{\nu+1}\varphi_{\nu+1}}{\lambda_\nu \lambda_1 \varphi_1}, \quad 1 \le \nu \le 4$$

olduğu görülür.

Şimdi de ikinci olarak, (3.3) parametrik gösterimine sahip $r = (s)$ ve $r^* = (s^*)$ Bertrand eğri çifti için $\mu_1\mu_3\mu_5 \neq 0$ ve $\mu_2 = \mu_4 = 0$ olsun. Böyle bir Bertrand eğri çiftinin karakterizasyonu aşağıdaki teoremde verilmiştir.

Teorem 3.2.3. E^5 de Bertrand eğri çifti

$$r^* = r + \mu_1 t_1 + \mu_3 t_3 + \mu_5 t_5 \tag{3.47}$$

şeklinde ise

$$\lambda_1 t_1^* = a_1 t_1 + a_2 t_2 + a_4 t_4, \ \lambda_1^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_4^2, \tag{3.48$_1$}$$

$$\lambda_2 t_2^* = b_1 t_1 + b_2 t_2 + b_3 t_3 + b_5 t_5, \ \lambda_2^2 = b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + b_5^2, \tag{3.48$_2$}$$

$$\lambda_3 t_3^* = c_1 t_1 + c_2 t_2 + c_3 t_3 + c_4 t_4, \ \lambda_3^2 = c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 + c_4^2, \tag{3.48$_3$}$$

$$\lambda_4 t_4^* = d_1 t_1 + d_2 t_2 + d_3 t_3 + d_5 t_5, \ \lambda_4^2 = d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_5^2, \tag{3.48$_4$}$$

$$\lambda_5 t_5^* = e_1 t_1 + e_2 t_2 + e_3 t_3 + e_4 t_4, \ \lambda_5^2 = e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 + e_4^2 \tag{3.48$_5$}$$

dır. Burada

$$a_1\varphi_1 = 1, \ a_2\varphi_1 = \mu_1 k_1 - \mu_3 k_2, \ a_4\varphi_1 = \mu_3 k_3 - \mu_5 k_4, \tag{3.49}$$

$$b_1\varphi_2 = -a_2 k_1, \ b_2\varphi_2 = a_1 k_1, \ b_3\varphi_2 = a_2 k_2 - a_4 k_3, \ b_5\varphi_2 = a_4 k_4, \tag{3.50}$$

$$\begin{aligned} &c_1\varphi_3 = -b_2 k_1 + a_1\left(\frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2}\right)\varphi_2, \ c_2\varphi_3 = b_1 k_1 - b_3 k_2 + a_2\left(\frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2}\right)\varphi_2, \ c_3\varphi_3 = b_2 k_2, \\ &c_4\varphi_3 = b_3 k_3 - b_5 k_4 + a_4\left(\frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2}\right)\varphi_2, \end{aligned} \tag{3.51}$$

$$d_1\varphi_4 = -c_2k_1 + b_1\left(\frac{\lambda_3^2}{\lambda_2^2}\right)\varphi_3,\ d_2\varphi_4 = c_1k_1 - c_3k_2 + b_2\left(\frac{\lambda_3^2}{\lambda_2^2}\right)\varphi_3,$$
$$d_3\varphi_4 = c_2k_2 - c_4k_3 + b_3\left(\frac{\lambda_3^2}{\lambda_2^2}\right)\varphi_3,\ d_5\varphi_4 = c_4k_4 + b_5\left(\frac{\lambda_3^2}{\lambda_2^2}\right)\varphi_3, \tag{3.52}$$

$$e_1\varphi_5 = -d_2k_1 + c_1\left(\frac{\lambda_4^2}{\lambda_3^2}\right)\varphi_4,\ e_2\varphi_5 = d_1k_1 - d_3k_2 + c_2\left(\frac{\lambda_4^2}{\lambda_3^2}\right)\varphi_4$$
$$e_3\varphi_5 = d_2k_2 + c_3\left(\frac{\lambda_4^2}{\lambda_3^2}\right)\varphi_4,\ e_4\varphi_5 = d_3k_3 - d_5k_4 + c_4\left(\frac{\lambda_4^2}{\lambda_3^2}\right)\varphi_4 \tag{3.53}$$

dır. r^* eğrisinin yay parametresi ve $1 \le v \le 4$ için r^* eğrisinin v. inci eğriliği

$$s^* = \lambda_1 \int \varphi_1 ds$$

$$k_v^* = \frac{\lambda_{v+1}\varphi_{v+1}}{\lambda_v\lambda_1\varphi_1}$$

dır [8].

İspat. s ile s^* arasındaki bağıntıyı elde etmek üzere (3.47) formülünün s yay parametresine göre türevi alınırsa

$$\frac{dr^*}{ds} = r + \mu_1 t_1' + \mu_3 t_3' + \mu_5 t_5'$$
$$\frac{dr^*}{ds^*}\frac{ds^*}{ds} = t_1 + \mu_1 k_1 t_2 + \mu_3(-k_2t_2 + k_3t_4) + \mu_5(-k_4t_4)$$

$$\frac{ds^*}{ds} t_1^* = \left(t_1 + (\mu_1\ k_1 - \mu_3k_2)t_2 + (\mu_3k_3 - \mu_5k_4)t_4\right) \quad . \tag{3.54}$$

olur. Yay parametreleri arasındaki bağıntıyı elde etmek üzere

$$a_1 = \frac{1}{\varphi_1},\ a_2 = \frac{(\mu_1k_1 - \mu_3k_2)}{\varphi_1},\ a_4 = \frac{(\mu_3k_3 - \mu_5k_4)}{\varphi_1}$$

kabul edilsin. r^* eğrisinin yay parametresi $\forall s \in I$ için

$$f : I \to I^*$$

$$s \to s^* = f(s), \frac{ds^*}{ds} \neq 0$$

fonksiyonu ile belirlendiğinden

$$f(s) = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_4^2} \int \varphi_1 ds$$

$$s^* = \lambda_1 \int \varphi_1 ds$$

elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapılırsa (3.54) denklemi

$$\lambda_1 t_1^* = a_1 t_1 + a_2 t_2 + a_4 t_4$$

haline gelir ve $a_1^2 + a_2^2 + a_4^2 = \lambda_1^2$ olur. Bu durumda (3.48_1) denklemi ispatlanmış olur. Bu son denklemin s yay parametresine göre türevi alınırsa

$$\lambda_1 f'(s) \left. \frac{dt_1^*}{ds^*} \right|_{s^* = f(s)} = a_1 t_1' + a_2 t_2' + a_4 t_4'$$

bulunur ve (3.13) de verilen Frenet formülleri yardımıyla

$$\lambda_1^2 \varphi_1 \left. \frac{dt_1^*}{ds^*} \right|_{s^* = f(s)} = -a_2 k_1 t_1 + a_1 k_1 t_2 + (a_2 k_2 - a_4 k_3) t_3 + a_4 k_4 t_5 \qquad (3.55)$$

elde edilir. $k_1^* = \left\| \left. \frac{dt_1^*}{ds^*} \right|_{s^* = f(s)} \right\|$ olduğundan (3.55) denklemi yardımıyla

$$k_1^* = \frac{1}{\lambda_1^2 \varphi_1} \sqrt{(-a_2 k_1)^2 + (a_1 k_1)^2 + (a_2 k_2 - a_4 k_3)^2 + (a_4 k_4)^2}$$

bulunur. Kısalığın hatırı için

$$\sqrt{(-a_2 k_1)^2 + (a_1 k_1)^2 + (a_2 k_2 - a_4 k_3)^2 + (a_4 k_4)^2} = \lambda_2 \varphi_2$$

alınırsa r^* eğrisinin birinci eğriliği

$$k_1^* = \frac{\lambda_2 \varphi_2}{\lambda_1^2 \varphi_1} \qquad (3.56)$$

bulunur. Böylece (3.55) denklemi, k_1^* ve (3.14) Frenet formülü yardımıyla

$$\lambda_2\varphi_2 t_2^* = -a_2k_1t_1 + a_1k_1t_2 + \left(a_2k_2 - a_4k_3\right)t_3 + a_4k_4t_5$$

$$\lambda_2 t_2^* = \frac{-a_2k_1t_1 + a_1k_1t_2 + \left(a_2k_2 - a_4k_3\right)t_3 + a_4k_4t_5}{\varphi_2}$$

bulunur. Bu denklemde kısalığın hatırı için

$$b_1 = \frac{-a_2k_1}{\varphi_2},\ b_2 = \frac{a_1k_1}{\varphi_2},\ b_3 = \frac{\left(a_2k_2 - a_4k_3\right)}{\varphi_2},\ b_5 = \frac{a_4k_4}{\varphi_2}$$

alınırsa

$$\lambda_2 t_2^* = b_1t_1 + b_2t_2 + b_3t_3 + b_5t_5$$

olur ve $\lambda_2^2 = b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + b_5^2$ elde edilir. Böylece (3.48_2) ispatlanmış olur. Bu son denklemin s yay parametresine göre türevi alınırsa

$$\lambda_2 f'(s)\left.\frac{dt_2^*}{ds^*}\right|_{s^*=f(s)} = b_1t_1' + b_2t_2' + b_3t_3' + b_5t_5'$$

bulunur ve (3.13) de verilen Frenet formülleri yerine yazılırsa

$$\lambda_2\lambda_1\varphi_1 \left.\frac{dt_2^*}{ds^*}\right|_{s^*=f(s)} = -b_2k_1t_1 + (b_2k_2 - b_4k_3)t_3 + b_4k_4t_5 \tag{3.57}$$

elde edilir. $k_2^* = \left\| \left.\frac{dt_2^*}{ds^*}\right|_{s^*=f(s)} + k_1^*t_1^* \right\|$ olduğundan, (3.57) ve (3.48_1) denklemleri kullanılarak

$$k_2^* = \frac{1}{\lambda_1\lambda_2\varphi_1}\sqrt{\left(-b_2k_1 + a_1\left(\frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2}\right)\varphi_2\right)^2 + \left(b_1k_1 - b_3k_2 + a_2\left(\frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2}\right)\varphi_2\right)^2 + \left(b_2k_2\right)^2 + \left(b_3k_3 - b_5k_4 + a_4\left(\frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2}\right)\varphi_2\right)^2}$$

bulunur. Yine kısalığın hatırı için

$$\sqrt{\left(-b_2k_1+a_1\left(\frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2}\right)\varphi_2\right)^2+\left(b_1k_1-b_3k_2+a_2\left(\frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2}\right)\varphi_2\right)^2+\left(b_2k_2\right)^2+\left(b_3k_3-b_5k_4+a_4\left(\frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2}\right)\varphi_2\right)^2}=\lambda_3\varphi_3$$

alınırsa r^* eğrisinin ikinci eğriliği

$$k_2^*=\frac{\lambda_3\varphi_3}{\lambda_2\lambda_1\varphi_1} \tag{3.58}$$

bulunur. Böylece (3.57) denklemi, (3.14) Frenet formülü ve k_1^* yardımıyla

$$-\lambda_2\lambda_1\varphi_1\left(\frac{\lambda_2\varphi_2}{\lambda_1\lambda_1\varphi_1}\right)t_1^*+\lambda_2\lambda_1\varphi_1k_2^*t_3^*=-b_2k_1t_1+(b_1k_1-b_3k_2)t_2+b_2k_2t_3+\left(b_3k_3-b_5k_4\right)t_4$$

şeklinde olur. Bu son denklemde (3.58) yerine yazılır ve denklem düzenlenirse

$$\lambda_3\varphi_3t_3^*=\left(-b_2k_1+a_1\left(\frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2}\right)\varphi_2\right)t_1+\left(b_1k_1-b_3k_2+a_2\left(\frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2}\right)\varphi_2\right)t_2+b_2k_2t_3+\left(b_3k_3-b_5k_4+a_4\left(\frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2}\right)\varphi_2\right)t_4$$

bulunur. Eğer

$$c_1=\frac{\left(-b_2k_1+a_1\left(\frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2}\right)\varphi_2\right)}{\varphi_3},\; c_2=\frac{\left(b_1k_1-b_3k_2+a_2\left(\frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2}\right)\varphi_2\right)}{\varphi_3},\; c_3=\frac{b_2k_2}{\varphi_3},\; c_4=\frac{\left(b_3k_3-b_5k_4+a_4\left(\frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2}\right)\varphi_2\right)}{\varphi_3}$$

alınırsa

$$\lambda_3t_3^*=c_1t_1+c_2t_2+c_3t_3+c_4t_4$$

olur ve $\lambda_1^2=c_1^2+c_2^2+c_3^2+c_4^2$ bulunur. Böylece (3.48_3) ispatlanmış olur. Bu son denklemin s yay parametresine göre türevi alınırsa

$$\lambda_3f'(s)\left.\frac{dt_3^*}{ds^*}\right|_{s^*=f(s)}=c_1t_1'+c_2t_2'+c_3t_3'+c_4t_4'$$

bulunur. (3.13) de verilen Frenet formülleri yerine yazılırsa

$$\lambda_3\lambda_1\varphi_1\left.\frac{dt_3^*}{ds^*}\right|_{s^*=f(s)}=-c_2k_1t_1+(c_1k_1-c_3k_2)t_2+(c_2k_2-c_4k_3)t_4+c_4k_4t_5 \tag{3.59}$$

elde edilir. $k_3^* = \left\| \left. \frac{dt_3^*}{ds^*} \right|_{s^*=f(s)} + k_2^* t_2^* \right\|$ denkleminde (3.48$_2$) ve (3.59) denklemleri kullanılarak

$$k_3^* = \frac{1}{\lambda_1\lambda_3\varphi_1}\sqrt{\left(-c_2k_1+b_1\left(\frac{\lambda_3^2}{\lambda_2^2}\right)\varphi_3\right)^2+\left(c_1k_1-c_3k_2+b_2\left(\frac{\lambda_3^2}{\lambda_2^2}\right)\varphi_3\right)^2+\left(c_2k_2-c_4k_3+b_3\left(\frac{\lambda_3^2}{\lambda_2^2}\right)\varphi_3\right)^2+\left(c_4k_4+b_5\left(\frac{\lambda_3^2}{\lambda_2^2}\right)\varphi_3\right)^2}$$

bulunur. Kısalığın hatırı için

$$\sqrt{\left(-c_2k_1+b_1\left(\frac{\lambda_3^2}{\lambda_2^2}\right)\varphi_3\right)^2+\left(c_1k_1-c_3k_2+b_2\left(\frac{\lambda_3^2}{\lambda_2^2}\right)\varphi_3\right)^2+\left(c_2k_2-c_4k_3+b_3\left(\frac{\lambda_3^2}{\lambda_2^2}\right)\varphi_3\right)^2+\left(c_4k_4+b_5\left(\frac{\lambda_3^2}{\lambda_2^2}\right)\varphi_3\right)^2} = \lambda_4\varphi_4$$

alınırsa r^* eğrisinin üçüncü eğriliği

$$k_3^* = \frac{\lambda_4\varphi_4}{\lambda_3\lambda_1\varphi_1} \tag{3.60}$$

olur. Bu durumda (3.59) denkleminde (3.14) Frenet formülleri ve k_3^* yerine yazılıp gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\lambda_4 t_4^* = \frac{\left(-c_2k_1+b_1\left(\frac{\lambda_3^2}{\lambda_2^2}\right)\varphi_3\right)t_1+\left(c_1k_1-c_3k_2+b_2\left(\frac{\lambda_3^2}{\lambda_2^2}\right)\varphi_3\right)t_2+\left(c_2k_2-c_4k_3+b_3\left(\frac{\lambda_3^2}{\lambda_2^2}\right)\varphi_3\right)t_3+\left(c_4k_4+b_5\left(\frac{\lambda_3^2}{\lambda_2^2}\right)\varphi_3\right)t_5}{\varphi_4}$$

bulunur. Burada

$$d_1 = \frac{\left(-c_2k_1+b_1\left(\frac{\lambda_3^2}{\lambda_2^2}\right)\varphi_3\right)}{\varphi_4},\ d_2 = \frac{\left(c_1k_1-c_3k_2+b_2\left(\frac{\lambda_3^2}{\lambda_2^2}\right)\varphi_3\right)}{\varphi_4}$$

$$d_3 = \frac{\left(c_2k_2-c_4k_3+b_3\left(\frac{\lambda_3^2}{\lambda_2^2}\right)\varphi_3\right)}{\varphi_4},\ d_5 = \frac{\left(c_4k_4+b_5\left(\frac{\lambda_3^2}{\lambda_2^2}\right)\varphi_3\right)}{\varphi_4}$$

alınırsa

$$\lambda_4 t_4^* = d_1t_1 + d_2t_2 + d_3t_3 + d_5t_5$$

ve $\lambda_4^2 = d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_5^2$ olur. Böylece (3.48$_4$) ispatlanmış olur. Son olarak, bu son denklemin s yay parametresine göre türevine bakılırsa

$$\lambda_4 \lambda_1 \varphi_1 \left.\frac{dt_4^*}{ds^*}\right|_{s^*=f(s)} = d_1 t_1' + d_2 t_2' + d_3 t_3' + d_5 t_5' \tag{3.61}$$

olur. $k_4^* = \left\| \left.\frac{dt_4^*}{ds^*}\right|_{s^*=f(s)} + k_3^* t_3^* \right\|$ denkleminde (3.48$_3$) ve (3.61) denklemleri yerine yazılarak

$$k_4^* = \frac{1}{\lambda_4 \lambda_1 \varphi_1} \sqrt{\left(-d_2 k_1 + c_1\left(\frac{\lambda_4^2}{\lambda_3^2}\right)\varphi_4\right)^2 + \left(d_1 k_1 - d_3 k_2 + c_2\left(\frac{\lambda_4^2}{\lambda_3^2}\right)\varphi_4\right)^2 + \left(d_2 k_2 + c_3\left(\frac{\lambda_4^2}{\lambda_3^2}\right)\varphi_4\right)^2 + \left(d_3 k_3 - d_5 k_4 + c_4\left(\frac{\lambda_4^2}{\lambda_3^2}\right)\varphi_4\right)^2}$$

bulunur. Kısalığın hatırı için

$$\sqrt{\left(-d_2 k_1 + c_1\left(\frac{\lambda_4^2}{\lambda_3^2}\right)\varphi_4\right)^2 + \left(d_1 k_1 - d_3 k_2 + c_2\left(\frac{\lambda_4^2}{\lambda_3^2}\right)\varphi_4\right)^2 + \left(d_2 k_2 + c_3\left(\frac{\lambda_4^2}{\lambda_3^2}\right)\varphi_4\right)^2 + \left(d_3 k_3 - d_5 k_4 + c_4\left(\frac{\lambda_4^2}{\lambda_3^2}\right)\varphi_4\right)^2} = \lambda_5 \varphi_5$$

denirse r^* eğrisinin dördüncü eğriliği

$$k_4^* = \frac{\lambda_5 \varphi_5}{\lambda_4 \lambda_1 \varphi_1} \tag{3.62}$$

olur. Böylece (3.61) denklemi k_4^* ve (3.14) Frenet formülleri yardımıyla

$$-\left(c_1 t_1 + c_2 t_2 + c_3 t_3 + c_4 t_4\right)\left(\frac{\lambda_4^2}{\lambda_3^2}\right)\varphi_4 + \lambda_5 \varphi_5 t_5^* = d_1 t_1' + d_2 t_2' + d_3 t_3' + d_5 t_5'$$

olur. Gerekli düzenlemeler sonucu

$$\lambda_5 t_5^* = \frac{\left(-d_2 k_1 + c_1\left(\frac{\lambda_4^2}{\lambda_3^2}\right)\varphi_4\right) t_1 + \left(d_1 k_1 - d_3 k_2 + c_2\left(\frac{\lambda_4^2}{\lambda_3^2}\right)\varphi_4\right) t_2 + \left(d_2 k_2 + c_3\left(\frac{\lambda_4^2}{\lambda_3^2}\right)\varphi_4\right) t_3 + \left(d_3 k_3 - d_5 k_4 + c_4\left(\frac{\lambda_4^2}{\lambda_3^2}\right)\varphi_4\right) t_4}{\varphi_5}$$

bulunur. Eğer

$$e_1 = \frac{\left(-d_2 k_1 + c_1\left(\frac{\lambda_4^2}{\lambda_3^2}\right)\varphi_4\right)}{\varphi_5}, \quad e_2 = \frac{\left(d_1 k_1 - d_3 k_2 + c_2\left(\frac{\lambda_4^2}{\lambda_3^2}\right)\varphi_4\right)}{\varphi_5}$$

$$e_3 = \frac{\left(d_2 k_2 + c_3 \left(\frac{\lambda_4^2}{\lambda_3^2} \right) \varphi_4 \right)}{\varphi_5}, \; e_4 = \frac{\left(d_3 k_3 - d_5 k_4 + c_4 \left(\frac{\lambda_4^2}{\lambda_3^2} \right) \varphi_4 \right)}{\varphi_5}$$

alınırsa

$$\lambda_5 t_5^* = e_1 t_1 + e_2 t_2 + e_3 t_3 + e_4 t_4$$

ve $\lambda_5^2 = e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 + e_4^2$ olur. Böylece (3.48_5) ispatlanmış olur.

Sonuç olarak (3.56), (3.58), (3.60) ve (3.62) denklemlerinden r^* Bertrand eşlenik eğrisinin v. eğriliği

$$k_\nu^* = \frac{\lambda_{\nu+1}\varphi_{\nu+1}}{\lambda_\nu \lambda_1 \varphi_1}, \quad 1 \le \nu \le 4$$

olduğu görülür.

Son olarak (3.3) parametrik gösterimine sahip $r = (s)$ ve $r^* = (s^*)$ Bertrand eğri çifti için $\mu_4 \neq 0$ ve $\mu_1 = \mu_3 = \mu_5 = 0$ olsun. Böyle bir Bertrand eğri çiftinin karakterizasyonu aşağıdaki teoremde verilmiştir.

Teorem 3.2.4 Bertrand eğri çifti

$$r^* = r + \mu_2 t_2 + \mu_4 t_4 \tag{3.62}$$

şeklinde ise

$$\lambda_1 t_1^* = a_1 t_1 + a_3 t_3 + a_5 t_5, \; \lambda_1^2 = a_1^2 + a_3^2 + a_5^2, \tag{3.63_1}$$

$$\lambda_2 t_2^* = b_2 t_2 + b_4 t_4, \; \lambda_2^2 = b_2^2 + b_4^2, \tag{3.63_2}$$

$$\lambda_3 t_3^* = c_1 t_1 + c_3 t_3 + c_5 t_5, \; \lambda_3^2 = c_1^2 + c_3^2 + c_5^2, \tag{3.63_3}$$

$$\lambda_4 t_4^* = d_2 t_2 + d_4 t_4, \; \lambda_4^2 = d_2^2 + d_4^2, \tag{3.63_4}$$

$$\lambda_5 t_5^* = e_1 t_1 + e_3 t_3 + e_5 t_5, \; \lambda_5^2 = e_1^2 + e_3^2 + e_5^2 \tag{3.63_5}$$

dır ve

$$a_1\varphi_1 = (1-\mu_2 k_1),\ a_3\varphi_1 = (\mu_2\ k_2 - \mu_4 k_3),\ a_5\varphi_1 = \mu_4 k_4, \tag{3.64}$$

$$b_2\varphi_2 = (a_1 k_1 - a_3 k_2),\ b_4\varphi_2 = (a_3 k_3 - a_5 k_4), \tag{3.65}$$

$$\begin{aligned} c_1\varphi_3 &= \left(-b_2 k_1 + a_1\left(\frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2}\right)\varphi_2\right),\ c_3\varphi_3 = \left(b_2 k_2 - b_4 k_3 + a_3\left(\frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2}\right)\varphi_2\right), \\ c_5\varphi_3 &= \left(b_4 k_4 + a_5\left(\frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2}\right)\varphi_2\right), \end{aligned} \tag{3.66}$$

$$d_2\varphi_4 = \left(c_1 k_1 - c_3 k_2 + b_2\left(\frac{\lambda_3^2}{\lambda_2^2}\right)\varphi_3\right),\ d_4\varphi_4 = \left(c_3 k_3 - c_5 k_4 + b_4\left(\frac{\lambda_3^2}{\lambda_2^2}\right)\varphi_3\right), \tag{3.67}$$

$$\begin{aligned} e_1\varphi_5 &= \left(-d_2 k_1 + c_1\left(\frac{\lambda_4^2}{\lambda_3^2}\right)\varphi_4\right),\ e_3\varphi_5 = \left(d_2 k_2 - d_4 k_3 + c_3\left(\frac{\lambda_4^2}{\lambda_3^2}\right)\varphi_4\right), \\ e_5\varphi_5 &= \left(d_4 k_4 + c_5\left(\frac{\lambda_4^2}{\lambda_3^2}\right)\varphi_4\right) \end{aligned} \tag{3.68}$$

dır. Burada

$$s^* = \lambda_1 \int \varphi_1 ds$$

dır. $1 \le \nu \le 4$ için r^* eğrisinin ν. inci eğriliği

$$k_\nu^* = \frac{\lambda_{\nu+1}\varphi_{\nu+1}}{\lambda_\nu \lambda_1 \varphi_1}$$

dır [8].

İspat: (3.62) formülünün s yay parametresine göre türevi alınırsa

$$\frac{dr^*}{ds} = r + \mu_2 t_2' + \mu_4 t_4' = \frac{dr^*}{ds^*}\frac{ds^*}{ds} = t_1 + \mu_2(-k_1 t_1 + k_2 t_3) + \mu_4(-k_3 t_3 + k_4 t_5)$$

$$t_1^* \frac{ds^*}{ds} = \left((1-\mu_2 k_1)t_1 + (\mu_2 k_2 - \mu_4 k_3)t_3 + \mu_4 k_4 t_5\right) \tag{3.69}$$

olur. Yay parametreleri arasındaki fonksiyonu elde etmek üzere

$$a_1 = \frac{(1-\mu_2 k_1)}{\varphi_1},\ a_3 = \frac{(\mu_2 k_2 - \mu_4 k_3)}{\varphi_1},\ a_5 = \frac{\mu_4 k_4}{\varphi_1} \text{ ve } a_1^2 + a_3^2 + a_5^2 = \lambda_1^2$$

kabul edilsin. r^* eğrisinin yay parametresi $\forall s \in I$ için

$$f : I \to I^*$$

$$s \to s^* = f(s),\ \frac{ds^*}{ds} \neq 0$$

fonksiyonu ile belirlendiğinden

$$f(s) = \sqrt{a_1^2 + a_3^2 + a_5^2} \int \varphi_1 ds$$

$$s^* = \lambda_1 \int \varphi_1 ds$$

elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapılırsa (3.69) denklemi

$$\lambda_1 t_1^* = a_1 t_1 + a_3 t_3 + a_5 t_5$$

haline gelir ki burada $a_1^2 + a_3^2 + a_5^2 = \lambda_1^2$ dir. Böylece (3.63_1) ispatlanmış olur. Bu son denklemin s yay parametresine göre türevi alınırsa

$$\lambda_1 f'(s) \left.\frac{dt_1^*}{ds^*}\right|_{s^* = f(s)} = a_1 t_1' + a_3 t_3' + a_5 t_5'$$

bulunur ve (3.13) de verilen Frenet formülleri yardımıyla

$$\lambda_1^2 \varphi_1 \left.\frac{dt_1^*}{ds^*}\right|_{s^* = f(s)} = (a_1 k_1 - a_3 k_2) t_2 + (a_3 k_3 - a_5 k_4) t_4 \qquad (3.70)$$

elde edilir. $k_1^* = \left\| \left.\frac{dt_1^*}{ds^*}\right|_{s^* = f(s)} \right\|$ olduğundan (3.70) denkleminden

$$k_1^* = \frac{1}{\lambda_1^2 \varphi_1} \sqrt{(a_1 k_1 - a_3 k_2)^2 + (a_3 k_3 - a_5 k_4)^2}$$

bulunur. Kısalığın hatırı için

$$\sqrt{(a_1k_1 - a_3k_2)^2 + (a_3k_3 - a_5k_4)^2} = \lambda_2\varphi_2$$

alınırsa r^* eğrisinin birinci eğriliği

$$k_1^* = \frac{\lambda_2\varphi_2}{\lambda_1^2\varphi_1} \tag{3.71}$$

bulunur. Böylece (3.70) denkleminde (3.14) Frenet formülleri ve k_1^* denklemi yerine yazılarak

$$\lambda_2\varphi_2 t_2^* = (a_1k_1 - a_3k_2)t_2 + (a_3k_3 - a_5k_4)t_4$$

$$\lambda_2 t_2^* = \frac{(a_1k_1 - a_3k_2)t_2 + (a_3k_3 - a_5k_4)t_4}{\varphi_2}$$

bulunur. Bu denklemde kısalığın hatırı için

$$b_2 = \frac{(a_1k_1 - a_3k_2)}{\varphi_2},\ b_4 = \frac{(a_3k_3 - a_5k_4)t_4}{\varphi_2}$$

alınırsa

$$\lambda_2 t_2^* = b_2t_2 + b_4t_4$$

olur ve $\lambda_2^2 = b_2^2 + b_4^2$ elde edilir. Böylece (3.63_2) ispatlanmış olur. Bu son denklemin s yay parametresine göre türevi alınırsa

$$\lambda_2 f'(s) \left.\frac{dt_2^*}{ds^*}\right|_{s^*=f(s)} = b_2t_2' + b_4t_4'$$

bulunur. O halde (3.13) de verilen Frenet formülleri yerine yazılırsa

$$\lambda_2\lambda_1\varphi_1 \left.\frac{dt_2^*}{ds^*}\right|_{s^*=f(s)} = -b_2k_1t_1 + (b_2k_2 - b_4k_3)t_3 + b_4k_4t_5 \tag{3.72}$$

elde edilir. $k_2^* = \left\| \left.\frac{dt_2^*}{ds^*}\right|_{s^*=f(s)} + k_1^*t_1^* \right\|$ olduğundan, (3.72) ve (3.63_1) denklemleri kullanılarak

$$k_2^* = \frac{1}{\lambda_1\lambda_2\varphi_1}\sqrt{\left(-b_2k_1 + a_1\left(\frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2}\right)\varphi_2\right)^2 + \left((b_2k_2 - b_4k_3) + a_3\left(\frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2}\right)\varphi_2\right)^2 + \left(b_4k_4 + a_5\left(\frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2}\right)\varphi_2\right)^2}$$

olur. Yine kısalığın hatırı için

$$\sqrt{\left(-b_2k_1 + a_1\left(\frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2}\right)\varphi_2\right)^2 + \left((b_2k_2 - b_4k_3) + a_3\left(\frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2}\right)\varphi_2\right)^2 + \left(b_4k_4 + a_5\left(\frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2}\right)\varphi_2\right)^2} = \lambda_3\varphi_3$$

alınırsa r^* eğrisinin ikinci eğriliği

$$k_2^* = \frac{\lambda_3\varphi_3}{\lambda_2\lambda_1\varphi_1} \tag{3.73}$$

bulunur. Böylece (3.72) denklemi k_2^* ve (3.14) Frenet formülü yardımıyla

$$-\lambda_2\lambda_1\varphi_1\left(\frac{\lambda_2\varphi_2}{\lambda_1\lambda_1\varphi_1}\right)t_1^* + \lambda_2\lambda_1\varphi_1k_2^*t_3^* = -b_2k_1t_1 + (b_2k_2 - b_4k_3)t_3 + b_4k_4t_5$$

şeklinde olur. Bu son denklemde (3.63$_2$) ve (3.73) yerine yazılıp düzenlenirse

$$\lambda_3t_3^* = \frac{\left(-b_2k_1 + a_1\left(\frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2}\right)\varphi_2\right)t_1 + \left((b_2k_2 - b_4k_3) + a_3\left(\frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2}\right)\varphi_2\right)t_3 + \left(b_4k_4 + a_5\left(\frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2}\right)\varphi_2\right)t_5}{\varphi_3}$$

olur. Eğer

$$\frac{-b_2k_1 + a_1\left(\frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2}\right)\varphi_2}{\varphi_3} = c_1,\quad \frac{(b_2k_2 - b_4k_3) + a_3\left(\frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2}\right)\varphi_2}{\varphi_3} = c_3,\quad \frac{\left(b_4k_4 + a_5\left(\frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2}\right)\varphi_2\right)}{\varphi_3} = c_5$$

alınırsa

$$\lambda_3t_3^* = c_1t_1 + c_3t_3 + c_5t_5$$

olur ve buradan da $\lambda_1^2 = c_1^2 + c_3^2 + c_5^2$ bulunur. Yani (3.63$_3$) ispatlanmış olur. Şimdi de (3.63$_3$) denklemin s yay parametresine göre türevi alınırsa

$$\lambda_3 f'(s)\left.\frac{dt_3^*}{ds^*}\right|_{s^*=f(s)} = c_1 t_1' + c_3 t_3' + c_5 t_5'$$

bulunur. (3.13) de verilen Frenet formülleri yerine yazılırsa

$$\lambda_3\lambda_1\varphi_1 \left.\frac{dt_3^*}{ds^*}\right|_{s^*=f(s)} = (c_1k_1 - c_3k_2)t_2 + (c_3k_3 - c_5k_4)t_4 \tag{3.74}$$

elde edilir. $k_3^* = \left\| \left.\frac{dt_3^*}{ds^*}\right|_{s^*=f(s)} + k_2^* t_2^* \right\|$ denkleminde, (3.63$_2$) ve (3.74) denklemleri kullanılarak

$$k_3^* = \frac{1}{\lambda_1\lambda_3\varphi_1}\sqrt{\left(c_1k_1 - c_3k_2 + b_2\left(\frac{\lambda_3^2}{\lambda_2^2}\right)\varphi_3\right)^2 + \left(c_3k_3 - c_5k_4 + b_4\left(\frac{\lambda_3^2}{\lambda_2^2}\right)\varphi_3\right)^2}$$

bulunur. Eğer

$$\sqrt{\left(c_1k_1 - c_3k_2 + b_2\left(\frac{\lambda_3^2}{\lambda_2^2}\right)\varphi_3\right)^2 + \left(c_3k_3 - c_5k_4 + b_4\left(\frac{\lambda_3^2}{\lambda_2^2}\right)\varphi_3\right)^2} = \lambda_4\varphi_4$$

kabul edilirse r^* eğrisinin üçüncü eğriliği

$$k_3^* = \frac{\lambda_4\varphi_4}{\lambda_3\lambda_1\varphi_1} \tag{3.75}$$

olur. Bu durumda (3.74) denkleminde gerekli düzenlemeler yapılıp k_3^* ve (3.14) Frenet formülü yerine yazılırsa

$$\lambda_4\varphi_4 t_4^* = (c_1k_1 - c_3k_2)t_2 + (c_3k_3 - c_5k_4)t_4 + \left(b_2t_2 + b_4t_4\right)\left(\frac{\lambda_3^2}{\lambda_2^2}\right)\varphi_3$$

$$\lambda_4 t_4^* = \frac{\left(c_1k_1 + c_3k_2 + b_2\left(\frac{\lambda_3^2}{\lambda_2^2}\right)\varphi_3\right)t_2 + \left(c_3k_3 + c_5k_4 + b_4\left(\frac{\lambda_3^2}{\lambda_2^2}\right)\varphi_3\right)t_4}{\varphi_4}$$

olur. Burada

$$d_2=\frac{\left(c_1k_1-c_3k_2+b_2\left(\frac{\lambda_3^2}{\lambda_2^2}\right)\varphi_3\right)}{\varphi_4},\ d_4=\frac{\left(c_3k_3-c_5k_4+b_4\left(\frac{\lambda_3^2}{\lambda_2^2}\right)\varphi_3\right)}{\varphi_4}$$

alınırsa

$$\lambda_4t_4^*=d_2t_2+d_4t_4$$

ve $\lambda_4^2=d_2^2+d_4^2$ olur. Böylece (3.63_4) ispatlanmış olur. Son olarak (3.63_4) denkleminin s yay parametresine göre türevi alınırsa

$$\lambda_4f'(s)\left.\frac{dt_4^*}{ds^*}\right|_{s^*=f(s)}=d_2t_2'+d_4t_4'$$

$$\lambda_4\lambda_1\varphi_1\left.\frac{dt_4^*}{ds^*}\right|_{s^*=f(s)}=d_2t_2'+d_4t_4' \tag{3.76}$$

olur. $k_4^*=\left\|\left.\frac{dt_4^*}{ds^*}\right|_{s^*=f(s)}+k_3^*t_3^*\right\|$ denkleminde (3.63_3) ve (3.76) denklemleri kullanılarak

$$k_4^*=\frac{1}{\lambda_4\lambda_1\varphi_1}\sqrt{\left(-d_2k_1+c_1\left(\frac{\lambda_4^2}{\lambda_3^2}\right)\varphi_4\right)^2+\left(d_2k_2-d_4k_3+c_3\left(\frac{\lambda_4^2}{\lambda_3^2}\right)\varphi_4\right)^2+\left(d_4k_4+c_5\left(\frac{\lambda_4^2}{\lambda_3^2}\right)\varphi_4\right)^2}$$

olur. Kısalığın hatırı için

$$\sqrt{\left(-d_2k_1+c_1\left(\frac{\lambda_4^2}{\lambda_3^2}\right)\varphi_4\right)^2+\left(d_2k_2-d_4k_3+c_3\left(\frac{\lambda_4^2}{\lambda_3^2}\right)\varphi_4\right)^2+\left(d_4k_4+c_5\left(\frac{\lambda_4^2}{\lambda_3^2}\right)\varphi_4\right)^2}=\lambda_5\varphi_5$$

denirse r^* eğrisinin dördüncü eğriliği

$$k_4^*=\frac{\lambda_5\varphi_5}{\lambda_4\lambda_1\varphi_1} \tag{3.77}$$

olur. Böylece (3.76) denklemi k_4^* ve (3.14) Frenet formülleri yardımıyla

$$-\left(c_1t_1+c_3t_3+c_5t_5\right)\left(\frac{\lambda_4^2}{\lambda_3^2}\right)\varphi_4+\lambda_5\varphi_5t_5^*=d_2t_2'+d_4t_4'$$

olur. Gerekli düzenlemeler sonucu

$$\lambda_5\varphi_5 t_5^* = -d_2k_1t_1 + (d_2k_2 - d_4k_3)t_3 + d_4k_4t_5 + \left(c_1t_1 + c_3t_3 + c_5t_5\right)\left(\frac{\lambda_4^2}{\lambda_3^2}\right)\varphi_4$$

$$\lambda_5 t_5^* = \frac{\left(-d_2k_1 + c_1\left(\frac{\lambda_4^2}{\lambda_3^2}\right)\varphi_4\right)t_1 + \left(d_2k_2 - d_4k_3 + c_3\left(\frac{\lambda_4^2}{\lambda_3^2}\right)\varphi_4\right)t_3 + \left(d_4k_4 + c_5\left(\frac{\lambda_4^2}{\lambda_3^2}\right)\varphi_4\right)t_5}{\varphi_5}$$

olur. Eğer

$$\frac{-d_2k_1 + c_1\left(\frac{\lambda_4^2}{\lambda_3^2}\right)\varphi_4}{\varphi_5} = e_1, \quad \frac{d_2k_2 - d_4k_3 + c_3\left(\frac{\lambda_4^2}{\lambda_3^2}\right)\varphi_4}{\varphi_5} = e_3, \quad \frac{d_4k_4 + c_5\left(\frac{\lambda_4^2}{\lambda_3^2}\right)\varphi_4}{\varphi_5} = e_5$$

alınırsa

$$\lambda_5 t_5^* = e_1t_1 + e_3t_3 + e_5t_5$$

ve $\lambda_5^2 = e_1^2 + e_3^2 + e_5^2$ olur. Böylece (3.63_5) ispatlanmış olur.

Sonuç olarak (3.71), (3.73), (3.75) ve (3.77) denklemlerinden r eğrisinin Bertrand eşleği r^* eğrisinin $1 \le v \le 4$ olmak üzere v. eğriliği

$$k_v^* = \frac{\lambda_{v+1}\varphi_{v+1}}{\lambda_v\lambda_1\varphi_1}$$

olduğu görülür.

BÖLÜM 4. 5-BOYUTLU LORENTZ UZAYINDA TİMELİKE BERTRAND EĞRİ ÇİFTLERİ

4.1. 5-Boyutlu Lorentz Uzayında timelike Bertrand Eğri Çiftleri

$\mathbb{R}_1^5$, 5-boyutlu Lorentz uzayında r ve r^*, sırasıyla, s ve s^* yay parametresine sahip timelike eğriler olsun ve bu eğriler

$$r = r(s) \text{ ve } r^* = r^*\left(s^*\right) \tag{4.1}$$

parametrizasyonu ile verilsin. r ve r^* timelike eğrilerinin Frenet vektörleri, sırasıyla, $1 \le i \le 5$, t_i ve t_i^* olmak üzere t_1 ve t_1^* timelike birim teğet vektör alanlarıdır. Ayrıca (4.1) denklemi ile verilen eğrilerin, sırasıyla, k_l ve k_l^* $\left(1 \le l \le 4\right)$ eğrilikleri için

$$k_1 k_2 k_3 k_4 k_1^* k_2^* k_3^* k_4^* \neq 0$$

olsun.

Bu koşullar altında verilen (4.1) eğri çiftinin Bertrand eğri çifti olması ile ilgili aşağıdaki tanım verilebilir.

Tanım 4.1.1. Bir $r\left(r : I \to \mathbb{R}_1^5\right)$ timelike eğrisi ve bir diğer $r^*\left(r^* : I^* \to \mathbb{R}_1^5\right)$ timelike eğrisi için

$$\begin{aligned} f &: I \to I^* \\ s &\to s^* = f\left(s\right), \ \frac{ds^*}{ds} \neq 0 \end{aligned} \tag{4.2}$$

birebir dönüşümü var ve bu dönüşüm altında Frenet 5-ayaklı çifti Lorentz hareket gruplarına göre invaryant hacimler oluşturuyorsa $r = r\left(s\right)$ eğrisine timelike Bertrand eğrisi, $r^* = r^*\left(s^*\right)$ eğrisine r eğrisinin timelike Bertrand eşleniği denir. $\left(r, r^*\right)$ eğri çiftine de timelike Bertrand eğri çifti denir.

Teorem 4.1.1. Eğer $\mathbb{R}_1^5$ de $\left(r, r^*\right)$ eğrileri timelike Bertrand çifti iseler bu takdirde

$\mu_i, a_i, b_i, c_i, d_i, e_i$ sabitler ve $\varphi_i = \varphi_i(s) \neq 0, (1 \leq i \leq 5)$ olmak üzere,

$$r^* = r + \sum_{i=1}^{5} \mu_i t_i \tag{4.3}$$

bağıntısı vardır, öyle ki

$$\left|\lambda_1\right| t_1^* = \sum_{i=1}^{5} a_i t_i\,,\ \lambda_1^2 = \left|-a_1^2 + \sum_{i=2}^{5} a_i^2\right|, \tag{4.4$_1$}$$

$$\left|\lambda_2\right| t_2^* = \sum_{i=1}^{5} b_i t_i\,,\ \lambda_2^2 = \left|-b_1^2 + \sum_{i=2}^{5} b_i^2\right|, \tag{4.4$_2$}$$

$$\left|\lambda_3\right| t_3^* = \sum_{i=1}^{5} c_i t_i\,,\ \lambda_3^2 = \left|-c_1^2 + \sum_{i=2}^{5} c_i^2\right|, \tag{4.4$_3$}$$

$$\left|\lambda_4\right| t_4^* = \sum_{i=1}^{5} d_i t_i\,,\ \lambda_4^2 = \left|-d_1^2 + \sum_{i=2}^{5} d_i^2\right|, \tag{4.4$_4$}$$

$$\left|\lambda_5\right| t_5^* = \sum_{i=1}^{5} e_i t_i\,,\ \lambda_5^2 = \left|-e_1^2 + \sum_{i=2}^{5} e_i^2\right|, \tag{4.4$_5$}$$

dır ve $2 \leq h \leq 4$ için

$$a_1\left|\varphi_1\right| = 1 + \mu_2 k_1\,,\ a_h\left|\varphi_1\right| = \mu_{h\text{-}1} k_{h\text{-}1} - \mu_{h+1} k_h\ ,\ a_5\left|\varphi_1\right| = \mu_4 k_4\,, \tag{4.5$_1$-4.5$_5$}$$

$$b_1\left|\varphi_2\right| = a_2 k_1,\ b_2\left|\varphi_2\right| = a_{h\text{-}1} k_{h\text{-}1} - a_{h+1} k_h,\ b_5\left|\varphi_2\right| = a_4 k_4\,, \tag{4.6$_1$-4.6$_5$}$$

$$\begin{gathered} c_1\left|\varphi_3\right| = b_2 k_1 - a_1\left(\frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2}\right)\left|\varphi_2\right|,\ c_h\left|\varphi_3\right| = b_{h\text{-}1} k_{h\text{-}1} - b_{h+1} k_h - a_h\left(\frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2}\right)\left|\varphi_2\right|, \\ c_5\left|\varphi_3\right| = b_4 k_4 - a_5\left(\frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2}\right)\left|\varphi_2\right|, \end{gathered} \tag{4.7$_1$-4.7$_5$}$$

$$d_1\left|\varphi_4\right| = c_2 k_1 + b_1\left(\frac{\lambda_3^2}{\lambda_2^2}\right)\left|\varphi_3\right|,\ d_h\left|\varphi_4\right| = c_{h\text{-}1}k_{h\text{-}1} - c_{h+1}k_h + b_h\left(\frac{\lambda_3^2}{\lambda_2^2}\right)\left|\varphi_3\right|,$$
$$d_5\left|\varphi_4\right| = c_4 k_4 + b_5\left(\frac{\lambda_3^2}{\lambda_2^2}\right)\left|\varphi_3\right|, \qquad (4.8_1\text{-}4.8_5)$$

$$e_1\left|\varphi_5\right| = d_2 k_1 + c_1\left(\frac{\lambda_4^2}{\lambda_3^2}\right)\left|\varphi_4\right|,\ e_h\left|\varphi_5\right| = d_{h\text{-}1}k_{h\text{-}1} - d_{h+1}k_h + c_h\left(\frac{\lambda_4^2}{\lambda_3^2}\right)\left|\varphi_4\right|,$$
$$e_5\left|\varphi_5\right| = d_4 k_4 + c_5\left(\frac{\lambda_4^2}{\lambda_3^2}\right)\left|\varphi_4\right| \qquad (4.9_1\text{-}4.9_5)$$

dır. Ayrıca, r^* timelike eğrisinin yay parametresi

$$s^* = \left|\lambda_1\right|\int\left|\varphi_1\right|ds \qquad (4.10)$$

ve eğriliği r^* timelike eğrisinin eğriliği

$$k_v^* = \left|\frac{\lambda_{v+1}\varphi_{v+1}}{\lambda_v\lambda_1\varphi_1}\right|,\quad 1\le v\le 4 \qquad (4.11)$$

dır.

İspat: t_i ve t_i^* $(1\le i\le 5)$ birim vektörleri birbirine dik olduklarından ve Frenet 5-ayaklı çifti Lorentz hareket gruplarına göre invaryant hacimler oluşturduğundan

$$t_j^* = \sum_{i=1}^{5}\gamma_{ji}t_i\ ,\ j=1,..,5 \qquad (4.12)$$

olur. Burada γ_{ji} sabittir ve (γ_{ji}) bir ortagonal matristir.

(4.1) denklemi ile verilen bir eğri için Frenet Formülleri aşağıdaki gibidir.

$$\frac{dr}{ds}=t_1,\ \frac{dt_1}{ds}=k_1t_2,\ \frac{dt_2}{ds}=k_1t_1+k_2t_3,\ \frac{dt_h}{ds}=-k_{h-1}t_{h-1}+k_ht_{h+1},\ \frac{dt_5}{ds}=-k_4t_4 \qquad (4.13)$$

$$\frac{dr^*}{ds^*}=t_1^*,\ \frac{dt_1^*}{ds^*}=k_1^*t_2^*,\ \frac{dt_2^*}{ds^*}=k_1^*t_1^*+k_2^*t_3^*,\ \frac{dt_h^*}{ds^*}=-k_{h-1}^*t_{h-1}^*+k_h^*t_{h+1}^*,\ \frac{dt_5^*}{ds^*}=-k_4^*t_4^* \quad (4.14)$$

İlk olarak s ile s^* arasındaki bağıntıyı elde etmek için (4.3) formülünün s yay parametresine göre türevi alınırsa

$$\frac{dr^*}{ds}=r^{'}+\sum_{i=1}^{5}\mu_i t_i^{'}=\frac{dr^*}{ds^*}\frac{ds^*}{ds}=t_1+\mu_1k_1t_2+\mu_2(k_1t_1+k_2t_3)+\mu_3(-k_2t_2+k_3t_3)+\mu_4(-k_3t_3+k_4t_5)+\mu_5(-k_4t_4)$$

bulunur. Denklem düzenlenirse

$$t_1^*\frac{ds^*}{ds}=(1+\mu_2k_1)t_1+(\mu_1k_1-\mu_3k_2)t_2+(\mu_2k_2-\mu_4k_3)t_3+(\mu_3k_3-\mu_5k_4)t_4+\mu_4k_4t_5 \qquad (4.15)$$

olur. Burada kısalığın hatırı için

$$a_1=\frac{(1+\mu_2k_1)}{|\varphi_1|},\ a_2=\frac{(\mu_1k_1-\mu_3k_2)}{|\varphi_1|},\ a_3=\frac{(\mu_2k_2-\mu_4k_3)}{|\varphi_1|},$$
$$a_4=\frac{(\mu_3k_3-\mu_5k_4)}{|\varphi_1|},\ a_5=\frac{\mu_4k_4}{|\varphi_1|}$$

alınırsa

$$t_1^*\frac{ds^*}{ds}=\left(a_1|\varphi_1|t_1+a_1|\varphi_1|t_2+a_1|\varphi_1|t_3+a_1|\varphi_1|t_4+a_1|\varphi_1|t_5\right)$$

olur. r^* eğrisinin yay uzunluğu s^* olmak üzere

$$s^*=\int\left\|\frac{dr^*}{ds}\right\|ds \qquad (4.16)$$

ile tanımlıdır.

$$\begin{aligned} f:I&\to I^* \\ s&\to s^*=f(s)\end{aligned} \qquad (4.17)$$

olmak üzere

$$f(s)=\sqrt{\left|-a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2+a_5^2\right|}\int|\varphi_1|ds$$

olduğundan kısalığın hatırı için $\sqrt{\left|-a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2+a_5^2\right|}=|\lambda_1|$ denilirse

$$s^*=|\lambda_1|\int|\varphi_1|ds$$

elde edilir. Böylece (4.15) denklemi yeniden düzenlenirse

$$|\lambda_1| t_1^* = \sum_{i=1}^{5} a_i t_i$$

olur. Burada $\left| -a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 \right| = \lambda_1^2$ dır. Böylece (4.4_1) ispatlanmış olur. Son denklemin *s* yay parametresine göre türevi alınırsa

$$|\lambda_1|\, f'(s) \left.\frac{dt_1^*}{ds^*}\right|_{s^*=f(s)} = \sum_{i=1}^{5} a_i t_i'$$

bulunur. (4.13) de verilen Frenet formülleri yerine yazılırsa

$$|\lambda_1||\lambda_1\varphi_1| \left.\frac{dt_1^*}{ds^*}\right|_{s^*=f(s)} = a_2k_1t_1 + (a_1k_1 - a_3k_2)t_2 + (a_2k_2 - a_4k_3)t_3 + (a_3k_3 - a_5k_4)t_4 + a_4k_4t_5 \quad (4.18)$$

bulunur. r^* timelike eğrisinin birinci eğriliği

$$k_1^* = \left\| \left.\frac{dt_1^*}{ds^*}\right|_{s^*=f(s)} \right\| \quad (4.19)$$

olduğundan (4.18) denklemi yardımıyla

$$k_1^* = \frac{1}{|\lambda_1^2\varphi_1|} \sqrt{\left| -\left(a_2k_1\right)^2 + (a_1k_1 - a_3k_2)^2 + (a_2k_2 - a_4k_3)^2 + (a_3k_3 - a_5k_4)^2 + \left(a_4k_4\right)^2 \right|}$$

dır. Kısalığın hatırı için

$$\sqrt{\left| -\left(a_2k_1\right)^2 + (a_1k_1 - a_3k_2)^2 + (a_2k_2 - a_4k_3)^2 + (a_3k_3 - a_5k_4)^2 + \left(a_4k_4\right)^2 \right|} = |\lambda_2\varphi_2|$$

alınırsa r^* timelike eğrisinin birinci eğriliği

$$k_1^* = \left| \frac{\lambda_2\varphi_2}{\lambda_1^2\varphi_1} \right| \quad (4.20)$$

bulunur. Böylece (4.18) denklemi, (4.14) Frenet formülleri ve k_1^* yardımıyla

$$|\lambda_2\varphi_2| t_2^* = a_2k_1t_1 + (a_1k_1 - a_3k_2)t_2 + (a_2k_2 - a_4k_3)t_3 + (a_3k_3 - a_5k_4)t_4 + a_4k_4t_5$$

$$\left|\lambda_2\right| t_2^* = \frac{a_2 k_1 t_1 + (a_1 k_1 - a_3 k_2) t_2 + (a_2 k_2 - a_4 k_3) t_3 + (a_3 k_3 - a_5 k_4) t_4 + \ a_4 k_4 t_5}{\left|\varphi_2\right|}$$

olur. Kısalık için

$$b_1 = \frac{a_2 k_1}{\left|\varphi_2\right|},\ b_2 = \frac{(a_1 k_1 - a_3 k_2)}{\left|\varphi_2\right|},\ b_3 = \frac{(a_2 k_2 - a_4 k_3)}{\left|\varphi_2\right|},\ b_4 \frac{(a_3 k_3 - a_5 k_4)}{\left|\varphi_2\right|},\ b_5 = \frac{a_4 k_4}{\left|\varphi_2\right|}$$

denilirse

$$\left|\lambda_2\right| t_2^* = \sum_{i=1}^{5} b_i t_i$$

olur öyle ki $\left|-b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + b_4^2 + b_5^2\right| = \lambda_2^2$ dır. O halde (4.4_2) ispatlanmış olur. (4.4_2) denkleminin s yay parametresine göre türevi alınırsa

$$\left|\lambda_2\right| f'(s) \left.\frac{dt_2^*}{ds^*}\right|_{s^*=f(s)} = \sum_{i=1}^{5} b_i t_i'$$

bulunur. Eğer (4.13) de verilen Frenet formülleri yerine yazılırsa

$$\left|\lambda_2 \lambda_1 \varphi_1\right| \left.\frac{dt_2^*}{ds^*}\right|_{s^*=f(s)} = b_2 k_1 t_1 + (b_1 k_1 - b_3 k_2) t_2 + (b_2 k_2 - b_4 k_3) t_3 + (b_3 k_3 - b_5 k_4) t_4 + b_4 k_4 t_5 \qquad (4.21)$$

elde edilir. r^* timelike eğrisinin ikinci eğriliği

$$k_2^* = \left\| \left.\frac{dt_2^*}{ds^*}\right|_{s^*=f(s)} + k_1^* t_1^* \right\| \qquad (4.22)$$

olduğundan, (4.4_1) ve (4.21) denklemleri (4.22) de yerlerine yazılarak

$$k_2^* = \frac{1}{\left|\lambda_2 \lambda_1 \varphi_1\right|} \sqrt{\left| -\left(\frac{\lambda_2^2 |\varphi_2| a_1}{\lambda_1^2} - b_2 k_1\right)^2 + \left(\frac{\lambda_2^2 |\varphi_2| a_2}{\lambda_1^2} + (b_1 k_1 - b_3 k_2)\right)^2 + \left(\frac{\lambda_2^2 |\varphi_2| a_3}{\lambda_1^2} + (b_2 k_2 - b_4 k_3)\right)^2 + \left(\frac{\lambda_2^2 |\varphi_2| a_4}{\lambda_1^2} + (b_3 k_3 - b_5 k_4)\right)^2 + \left(\frac{\lambda_2^2 |\varphi_2| a_5}{\lambda_1^2} + b_4 k_4\right)^2 \right|}$$

bulunur. Yine kısalık için

$$\sqrt{\left| -\left(\frac{\lambda_2^2 |\varphi_2| a_1}{\lambda_1^2} - b_2 k_1\right)^2 + \left(\frac{\lambda_2^2 |\varphi_2| a_2}{\lambda_1^2} + (b_1 k_1 - b_3 k_2)\right)^2 + \left(\frac{\lambda_2^2 |\varphi_2| a_3}{\lambda_1^2} + (b_2 k_2 - b_4 k_3)\right)^2 + \left(\frac{\lambda_2^2 |\varphi_2| a_4}{\lambda_1^2} + (b_3 k_3 - b_5 k_4)\right)^2 + \left(\frac{\lambda_2^2 |\varphi_2| a_5}{\lambda_1^2} + b_4 k_4\right)^2 \right|} = \left|\lambda_3 \varphi_3\right|$$

denilirse r^* timelike eğrisinin ikinci eğriliği

$$k_2^* = \left| \frac{\lambda_3 \varphi_3}{\lambda_2 \lambda_1 \varphi_1} \right| \tag{4.23}$$

bulunur. Böylece (4.21) denklemi, (4.14) Frenet formülleri ve k_2^* yardımıyla

$$|\lambda_3 \varphi_3| t_3^* = b_2 k_1 t_1 + (b_1 k_1 - b_3 k_2) t_2 + (b_2 k_2 - b_4 k_3) t_3 + (b_3 k_3 - b_5 k_4) t_4 + b_4 k_4 t_5 - \left(\frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2} \right) |\varphi_2| \sum_{i=1}^{5} a_i t_i$$

$$|\lambda_3 \varphi_3| t_3^* = \frac{\left[b_2 k_1 - a_1 \left(\frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2} \right) |\varphi_2| \right] t_1 + \left[(b_1 k_1 - b_3 k_2) - a_2 \left(\frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2} \right) |\varphi_2| \right] t_2 + \left[(b_2 k_2 - b_4 k_3) - a_3 \left(\frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2} \right) |\varphi_2| \right] t_3 + \left[(b_3 k_3 - b_5 k_4) - a_4 \left(\frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2} \right) |\varphi_2| \right] t_4 + \left[b_4 k_4 - a_5 \left(\frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2} \right) |\varphi_2| \right] t_5}{|\varphi_3|}$$

şeklinde olur. Benzer yolla

$$c_1 = \frac{b_2 k_1 - a_1 \left(\frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2} \right) |\varphi_2|}{|\varphi_3|}, \quad c_2 = \frac{(b_1 k_1 - b_3 k_2) - a_2 \left(\frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2} \right) |\varphi_2|}{|\varphi_3|}, \quad c_3 = \frac{(b_2 k_2 - b_4 k_3) - a_3 \left(\frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2} \right) |\varphi_2|}{|\varphi_3|},$$

$$c_4 = \frac{(b_3 k_3 - b_5 k_4) - a_4 \left(\frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2} \right) |\varphi_2|}{|\varphi_3|}, \quad c_5 = \frac{b_4 k_4 - a_5 \left(\frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2} \right) |\varphi_2|}{|\varphi_3|}$$

denilirse

$$|\lambda_3| t_3^* = \sum_{i=1}^{5} c_i t_i$$

olur. Burada $\left| -c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 + c_4^2 + c_5^2 \right| = \lambda_3^2$ dir. Böylece (4.4_3) ispatlanmış olur. (4.4_3) denkleminin s yay parametresine göre türevi alınırsa

$$|\lambda_3| \, f'(s) \left. \frac{dt_3^*}{ds^*} \right|_{s^* = f(s)} = \sum_{i=1}^{5} c_i t_i'$$

bulunur. (4.13) de verilen Frenet formülleri yerine yazılırsa

$$|\lambda_3 \lambda_1 \varphi_1| \left. \frac{dt_3^*}{ds^*} \right|_{s^* = f(s)} = c_2 k_1 t_1 + (c_1 k_1 - c_3 k_2) t_2 + (c_2 k_2 - c_4 k_3) t_3 + (c_3 k_3 - c_5 k_4) t_4 + c_4 k_4 t_5 \tag{4.24}$$

olur. r^* timelike eğrisinin üçüncü eğriliği

$$k_3^* = \left\| \left. \frac{dt_3^*}{ds^*} \right|_{s^*=f(s)} + k_2^* t_2^* \right\| \tag{4.25}$$

dir. (4.4_2) ve (4.21) denklemleri (4.25) de yerine yazılırsa

$$k_3^* = \frac{1}{\left|\lambda_1\lambda_3\varphi_1\right|}\sqrt{\left|\left(c_1k_1 - c_3k_2 + b_2\left(\frac{\lambda_3^2}{\lambda_2^2}\right)\left|\varphi_3\right|\right)^2 + \left(c_2k_2 - c_4k_3 + b_3\left(\frac{\lambda_3^2}{\lambda_2^2}\right)\left|\varphi_3\right|\right)^2 + \left(c_3k_3 - c_5k_4 + b_4\left(\frac{\lambda_3^2}{\lambda_2^2}\right)\left|\varphi_3\right|\right)^2 + \left(c_4k_4 + b_5\left(\frac{\lambda_3^2}{\lambda_2^2}\right)\left|\varphi_3\right|\right)^2 - \left(c_2k_1 + b_1\left(\frac{\lambda_3^2}{\lambda_2^2}\right)\left|\varphi_3\right|\right)^2\right|}$$

bulunur. Kısalık için

$$\sqrt{\left|-\left(c_2k_1 + b_1\left(\frac{\lambda_3^2}{\lambda_2^2}\right)\left|\varphi_3\right|\right)^2 + \left(c_1k_1 - c_3k_2 + b_2\left(\frac{\lambda_3^2}{\lambda_2^2}\right)\left|\varphi_3\right|\right)^2 + \left(c_2k_2 - c_4k_3 + b_3\left(\frac{\lambda_3^2}{\lambda_2^2}\right)\left|\varphi_3\right|\right)^2 + \left(c_3k_3 - c_5k_4 + b_4\left(\frac{\lambda_3^2}{\lambda_2^2}\right)\left|\varphi_3\right|\right)^2 + \left(c_4k_4 + b_5\left(\frac{\lambda_3^2}{\lambda_2^2}\right)\left|\varphi_3\right|\right)^2\right|} = \left|\lambda_4\varphi_4\right|$$

alınırsa r^* timelike eğrisinin üçüncü eğriliği

$$k_3^* = \left|\frac{\lambda_4\varphi_4}{\lambda_3\lambda_1\varphi_1}\right| \tag{4.26}$$

bulunur. Böylece (4.24) denklemi, (4.14) Frenet formülleri ve k_3^* yerine yazılarak

$$-\left(\frac{\lambda_3^2}{\lambda_2^2}\right)\left|\varphi_3\right|\sum_{i=1}^{5} b_i t_i + \left|\lambda_4\varphi_4\right| t_4^* = c_2k_1t_1 + (c_1k_1 - c_3k_2)t_2 + (c_2k_2 - c_4k_3)t_3 + (c_3k_3 - c_5k_4)t_4 + c_4k_4t_5$$

bulunur. Buradan

$$\left|\lambda_4\varphi_4\right| t_4^* = c_2k_1t_1 + (c_1k_1 - c_3k_2)t_2 + (c_2k_2 - c_4k_3)t_3 + (c_3k_3 - c_5k_4)t_4 + c_4k_4t_5 + \left(\frac{\lambda_3^2}{\lambda_2^2}\right)\left|\varphi_3\right|\sum_{i=1}^{5} b_i t_i$$

$$\left|\lambda_4\right| t_4^* = \frac{\left(c_2k_1 + b_1\left(\frac{\lambda_3^2}{\lambda_2^2}\right)\left|\varphi_3\right|\right)t_1 + \left(c_1k_1 - c_3k_2 + b_2\left(\frac{\lambda_3^2}{\lambda_2^2}\right)\left|\varphi_3\right|\right)t_2 + \left(c_2k_2 - c_4k_3 + b_3\left(\frac{\lambda_3^2}{\lambda_2^2}\right)\left|\varphi_3\right|\right)t_3 + \left(c_3k_3 - c_5k_4 + b_4\left(\frac{\lambda_3^2}{\lambda_2^2}\right)\left|\varphi_3\right|\right)t_4 + \left(c_4k_4 + b_5\left(\frac{\lambda_3^2}{\lambda_2^2}\right)\left|\varphi_3\right|\right)t_5}{\left|\varphi_4\right|}$$

olduğu görülür. Benzer yolla

$$d_1 = \frac{c_2k_1 + b_1\left(\frac{\lambda_3^2}{\lambda_2^2}\right)\left|\varphi_3\right|}{\left|\varphi_4\right|},\ d_2 = \frac{\left(c_1k_1 - c_3k_2 + b_2\left(\frac{\lambda_3^2}{\lambda_2^2}\right)\left|\varphi_3\right|\right)}{\left|\varphi_4\right|},\ d_3 = \frac{\left(c_2k_2 - c_4k_3 + b_3\left(\frac{\lambda_3^2}{\lambda_2^2}\right)\left|\varphi_3\right|\right)}{\left|\varphi_4\right|},$$

$$d_4 = \frac{\left(c_3k_3 - c_5k_4 + b_4\left(\frac{\lambda_3^2}{\lambda_2^2}\right)\left|\varphi_3\right|\right)}{\left|\varphi_4\right|},\ d_5 = \frac{\left(c_4k_4 + b_5\left(\frac{\lambda_3^2}{\lambda_2^2}\right)\left|\varphi_3\right|\right)}{\left|\varphi_4\right|}$$

denilirse

$$\left|\lambda_4\right| t_4^* = \sum_{i=1}^{5} d_i t_i$$

ve $\left|-d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2 + d_5^2\right| = \lambda_4^2$ elde edilir. Yani (4.4_4) ispatlanmış olur. Son olarak (4.4_4) denkleminin s yay parametresine göre türevi alınırsa

$$\left|\lambda_4\right| f'(s) \left.\frac{dt_4^*}{ds^*}\right|_{s^*=f(s)} = \sum_{i=1}^{5} d_i t_i'$$

olur. (4.13) de verilen Frenet formülleri yerine yazılırsa

$$\left|\lambda_4 \lambda_1 \varphi_1\right| \left.\frac{dt_4^*}{ds^*}\right|_{s^*=f(s)} = d_2 k_1 t_1 + (d_1 k_1 - d_3 k_2) t_2 + (d_2 k_2 - d_4 k_3) t_3 + (d_3 k_3 - d_5 k_4) t_4 + d_4 k_4 t_5 \qquad (4.27)$$

elde edilir. r^* timelike eğrisinin dördüncü eğriliği

$$k_4^* = \left\| \left.\frac{dt_4^*}{ds^*}\right|_{s^*=f(s)} + k_3^* t_3^* \right\| \qquad (4.28)$$

olduğundan (4.4_3) ve (4.28) denklemleri yardımıyla

$$k_4^* = \frac{1}{\left|\lambda_4 \lambda_1 \varphi_1\right|} \sqrt{\left| -\left(d_2 k_1 + c_1 \left(\frac{\lambda_4^2}{\lambda_3^2}\right) \left|\varphi_4\right| \right)^2 + \left(d_1 k_1 - d_3 k_2 + c_2 \left(\frac{\lambda_4^2}{\lambda_3^2}\right) \left|\varphi_4\right| \right)^2 + \left(d_2 k_2 - d_4 k_3 + c_3 \left(\frac{\lambda_4^2}{\lambda_3^2}\right) \left|\varphi_4\right| \right)^2 + \left(d_3 k_3 - d_5 k_4 + c_4 \left(\frac{\lambda_4^2}{\lambda_3^2}\right) \left|\varphi_4\right| \right)^2 + \left(d_4 k_4 + c_5 \left(\frac{\lambda_4^2}{\lambda_3^2}\right) \left|\varphi_4\right| \right)^2 \right|}$$

olur. Kısalık için

$$\sqrt{\left| -\left(d_2 k_1 + c_1 \left(\frac{\lambda_4^2}{\lambda_3^2}\right) \left|\varphi_4\right| \right)^2 + \left(d_1 k_1 - d_3 k_2 + c_2 \left(\frac{\lambda_4^2}{\lambda_3^2}\right) \left|\varphi_4\right| \right)^2 + \left(d_2 k_2 - d_4 k_3 + c_3 \left(\frac{\lambda_4^2}{\lambda_3^2}\right) \left|\varphi_4\right| \right)^2 + \left(d_3 k_3 - d_5 k_4 + c_4 \left(\frac{\lambda_4^2}{\lambda_3^2}\right) \left|\varphi_4\right| \right)^2 + \left(d_4 k_4 + c_5 \left(\frac{\lambda_4^2}{\lambda_3^2}\right) \left|\varphi_4\right| \right)^2 \right|} = \left|\lambda_5 \varphi_5\right|$$

alınırsa r^* timelike eğrisinin dördüncü eğriliği

$$k_4^* = \left| \frac{\lambda_5 \varphi_5}{\lambda_4 \lambda_1 \varphi_1} \right| \qquad (4.29)$$

bulunur. Böylece (4.28) denklemi, (4.29) denklemi ve (4.14) Frenet formülleri yardımıyla

$$\left|\lambda_5\varphi_5\right|t_5^* = d_2k_1t_1 + (d_1k_1 - d_3k_2)t_2 + (d_2k_2 - d_4k_3)t_3 + (d_3k_3 - d_5k_4)t_4 + d_4k_4t_5 + \left(\frac{\lambda_4^2}{\lambda_3^2}\right)|\varphi_4|\sum_{i=1}^{5} c_i t_i$$

şeklinde olur. Denklem düzenlenerek

$$\left|\lambda_5\right|t_5^* = \frac{\left(d_2k_1 + c_1\left(\frac{\lambda_4^2}{\lambda_3^2}\right)|\varphi_4|\right)t_1 + \left(d_1k_1 - d_3k_2 + c_2\left(\frac{\lambda_4^2}{\lambda_3^2}\right)|\varphi_4|\right)t_2 + \left(d_2k_2 - d_4k_3 + c_3\left(\frac{\lambda_4^2}{\lambda_3^2}\right)|\varphi_4|\right)t_3 + \left(d_3k_3 - d_5k_4 + c_4\left(\frac{\lambda_4^2}{\lambda_3^2}\right)|\varphi_4|\right)t_4 + \left(d_4k_4 + c_5\left(\frac{\lambda_4^2}{\lambda_3^2}\right)|\varphi_4|\right)t_5}{|\varphi_5|}$$

bulunur. Kısalığın hatırına

$$e_1 = \frac{d_2k_1 + c_1\left(\frac{\lambda_4^2}{\lambda_3^2}\right)|\varphi_3|}{|\varphi_5|},\; e_2 = \frac{\left(d_1k_1 - d_3k_2 + c_2\left(\frac{\lambda_4^2}{\lambda_3^2}\right)|\varphi_3|\right)}{|\varphi_5|},\; e_3 = \frac{\left(d_2k_2 - d_4k_3 + c_3\left(\frac{\lambda_4^2}{\lambda_3^2}\right)|\varphi_3|\right)}{|\varphi_5|},$$

$$e_4 = \frac{\left(d_3k_3 - d_5k_4 + c_4\left(\frac{\lambda_4^2}{\lambda_3^2}\right)|\varphi_3|\right)}{|\varphi_5|},\; e_5 = \frac{\left(d_4k_4 + c_5\left(\frac{\lambda_4^2}{\lambda_3^2}\right)|\varphi_3|\right)}{|\varphi_5|}$$

denilirse

$$\left|\lambda_5\right|t_5^* = \sum_{i=1}^{5} e_i t_i$$

ve $\left|e_2^2 + e_3^2 + e_4^2 + e_5^2 - e_1^2\right| = \lambda_5^2$ elde edilir. Yani (4.4$_5$) ispatlanmış olur.

(4.20), (4.23), (4.26) ve (4.29) denklemlerinden r timelike eğrisinin Bertrand eşleği r^* timelike eğrisinin olmak üzere eğrilikleri

$$k_\nu^* = \left|\frac{\lambda_{\nu+1}\varphi_{\nu+1}}{\lambda_\nu\lambda_1\varphi_1}\right|, \quad 1 \le \nu \le 4 \tag{4.11}$$

dır.

Böylece 5-boyutlu Lorentz uzayında, 3.bölümdeki gibi, bir timelike eğri çiftinin timelike Bertrand eğri çifti olmasının genel karakterizasyonunu elde edildi. Bundan sonra 5-boyutlu Lorentz uzayında bazı özel timelike Bertrand eğri çiftleri incelenecektir.

4.2. 5-Boyutlu Lorentz Uzayında Bazı Özel Timelike Bertrand Eğri Çiftleri

İlk olarak $\mathbb{R}_1^5$ de $r=(s)$ ve $r^*=(s^*)$ timelike Bertrand eğri çifti olmak üzere (4.3) parametrizasyonun da $\mu_1=\mu_3=\mu_4=\mu_5=0, \mu_2\neq 0$ alınırsa $\mathbb{R}_1^3$ de iyi bilinen timelike Bertrand eğri çifti tanımına uyan Bertrand eğri çiftinin karakterizasyonunu $\mathbb{R}_1^5$ de karşılığı aşağıdaki teoremdeki gibidir.

Teorem 4.2.2. Bertrand eğri çifti

$$r^*=r+\mu_2 t_2 \tag{4.30}$$

şeklide ise

$$|\lambda_1|t_1^*=a_1t_1+a_3t_3,\ \lambda_1^2=\left|-a_1^2+a_3^2\right|, \tag{4.31$_1$}$$

$$|\lambda_2|t_2^*=b_2t_2+b_4t_4,\ \lambda_2^2=b_2^2+b_4^2, \tag{4.31$_2$}$$

$$|\lambda_3|t_3^*=c_1t_1+c_3t_3+c_5t_5,\ \lambda_3^2=\left|-c_1^2+c_3^2+c_5^2\right|, \tag{4.31$_3$}$$

$$|\lambda_4|t_4^*=d_2t_2+d_4t_4,\ \lambda_4^2=d_2^2+d_4^2, \tag{4.31$_4$}$$

$$|\lambda_5|t_5^*=e_1t_1+e_3t_3+e_5t_5,\ \lambda_5^2=\left|-e_1^2+e_3^2+e_5^2\right| \tag{4.31$_5$}$$

ve

$$a_1|\varphi_1|=1+\mu_2k_1,\ a_3|\varphi_1|=\mu_2k_2, \tag{4.32}$$

$$b_2|\varphi_2|=a_1k_1-a_2k_2,\ b_4|\varphi_2|=a_2k_2-a_5k_3, \tag{4.33}$$

$$c_1|\varphi_3|=b_2k_1-a_1\frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2}|\varphi_2|,\ c_3|\varphi_3|=b_2k_2-b_4k_3-a_3\frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2}|\varphi_2|,\ c_5|\varphi_3|=b_4k_4, \tag{4.34}$$

$$d_2|\varphi_4|=c_1k_1-c_3k_2+b_2\frac{\lambda_3^2}{\lambda_2^2}|\varphi_3|,\ d_4|\varphi_4|=c_3k_3-c_5k_4+b_4\frac{\lambda_3^2}{\lambda_2^2}|\varphi_3|, \tag{4.35}$$

$$e_1|\varphi_5| = d_2k_1 + c_1\frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2}|\varphi_4|,\ e_3|\varphi_5| = d_2k_2 - d_4k_3 + c_3\frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2}|\varphi_4|,$$
$$e_5|\varphi_5| = d_4k_4 + c_5\frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2}|\varphi_4| \tag{4.36}$$

dır. Burada r^* timelike eğrisinin yay parametresi

$$s^* = |\lambda_1|\int|\varphi_1|ds$$

ve r^* in v.eğriliği

$$k_v^* = \left|\frac{\lambda_{v+1}\varphi_{v+1}}{\lambda_v\lambda_1\varphi_1}\right|,\quad 1\le v\le 4$$

dır.

İspat. Şimdi s ile s^* arasındaki bağıntıyı elde etmek için (4.30) formülünün s yay parametresine göre türevi alınırsa

$$\frac{dr^*}{ds} = r' + \mu_2t_2' = \frac{dr^*}{ds^*}\frac{ds^*}{ds} = t_1 + \mu_2(k_1t_1 + k_2t_3)$$

$$t_1^*\frac{ds^*}{ds} = (1+\mu_2k_1)t_1 + \mu_2k_2t_3 \tag{4.37}$$

bulunur. Yay parametreleri arasındaki bağıntıyı elde etmek için kabul edelim ki

$$a_1 = \frac{(1+\mu_2k_1)}{|\varphi_1|},\ a_3 = \frac{\mu_2k_2}{|\varphi_1|}$$

olsun. $\forall s\in I$ için

$$f: I \to I^*$$

$$s \to s^* = f(s),\ \frac{ds^*}{ds} \neq 0$$

olduğundan

$$f(s)=\sqrt{\left|a_3^2-a_1^2\right|}\int\left|\varphi_1\right|ds$$

bulunur. $\sqrt{\left|a_3^2-a_1^2\right|}=\left|\lambda_1\right|$ alınırsa

$$s^*=\left|\lambda_1\right|\int\left|\varphi_1\right|ds$$

elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapılırsa (4.38) denklemi

$$\left|\lambda_1\right|t_1^*=a_1t_1+a_2t_3$$

haline gelir. Böylece (4.31_1) ispatlanmış olur. Bu son denklemin s yay parametresine göre türevi alınırsa

$$\left|\lambda_1\right| f'(s)\left.\frac{dt_1^*}{ds^*}\right|_{s^*=f(s)}=a_1t_1'+a_2t_3'$$

bulunur. Buradan (4.13) de verilen Frenet formülleri yardımıyla

$$\left|\lambda_1^2\right|\left|\varphi_1\right|\left.\frac{dt_1^*}{ds^*}\right|_{s^*=f(s)}=(a_1k_1-a_3k_2)t_2+(a_3k_3-a_5k_4)t_4 \tag{4.38}$$

elde edilir. $k_1^*=\left\|\left.\frac{dt_1^*}{ds^*}\right|_{s^*=f(s)}\right\|$ olduğundan

$$k_1^*=\frac{1}{\left|\lambda_1^2\varphi_1\right|}\sqrt{\left|(a_1k_1-a_3k_2)^2+(a_3k_3-a_5k_4)^2\right|}$$

dir. Kısalığın hatırı için

$$\sqrt{\left|(a_1k_1-a_3k_2)^2+(a_3k_3-a_5k_4)^2\right|}=\left|\lambda_2\varphi_2\right|$$

alınırsa r^* timelike eğrisinin birinci eğriliği

$$k_1^*=\left|\frac{\lambda_2\varphi_2}{\lambda_1^2\varphi_1}\right| \tag{4.39}$$

bulunur. Böylece (4.38) denklemi, (4.39) denklemi yerine yazılarak

$$|\lambda_2\varphi_2|\,t_2^* = (a_1k_1 - a_3k_2)t_2 + (a_3k_3 - a_5k_4)t_4$$

$$|\lambda_2|\,t_2^* = \frac{(a_1k_1 - a_3k_2)t_2 + (a_3k_3 - a_5k_4)t_4}{|\varphi_2|}$$

olur. Bu denklemde kısalığın hatırı için

$$b_2 = \frac{(a_1k_1 - a_3k_2)}{|\varphi_2|},\ b_4 = \frac{(a_3k_3 - a_5k_4)t_4}{|\varphi_2|}$$

alınırsa

$$|\lambda_2|\,t_2^* = b_2t_2 + b_4t_4$$

ve $\lambda_2^2 = b_2^2 + b_4^2$ elde edilir. Böylece (4.31_2) ispatlanmış olur. (4.31_2) denkleminin s yay parametresine göre türevi alınırsa

$$|\lambda_2|\,f'(s)\left.\frac{dt_2^*}{ds^*}\right|_{s^*=f(s)} = b_2t_2' + b_4t_4'$$

bulunur. (3.13) de verilen Frenet formülleri yerine yazılırsa

$$|\lambda_2\lambda_1\varphi_1|\left.\frac{dt_2^*}{ds^*}\right|_{s^*=f(s)} = b_2k_1t_1 + (b_2k_2 - b_4k_3)t_3 + b_4k_4t_5 \tag{4.40}$$

elde edilir. $k_2^* = \left\| \left.\frac{dt_2^*}{ds^*}\right|_{s^*=f(s)} + k_1^*t_1^* \right\|$ olduğundan, (4.40) ve (4.32_1) denklemleri kullanılarak

$$k_2^* = \frac{1}{|\lambda_2\lambda_1\varphi_1|}\sqrt{\left|-\left(b_2k_1 + a_1\left(\frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2}\right)|\varphi_2|\right)^2 + \left((b_2k_2 - b_4k_3) + a_3\left(\frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2}\right)|\varphi_2|\right)^2 + \left(b_4k_4\right)^2\right|}$$

bulunur. Yine kısalığın hatırı için

$$\sqrt{\left|-\left(b_2k_1+a_1\left(\frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2}\right)|\varphi_2|\right)^2+\left((b_2k_2-b_4k_3)+a_3\left(\frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2}\right)|\varphi_2|\right)^2+\left(b_4k_4\right)^2\right|}=|\lambda_3\varphi_3|$$

alınırsa r^* timelike eğrisinin ikinci eğriliği

$$k_2^*=\left|\frac{\lambda_3\varphi_3}{\lambda_2\lambda_1\varphi_1}\right| \tag{4.41}$$

bulunur. Böylece (4.40) denklemi, (4.14) de verilen Frenet formülleri ve k_2^* yerlerine yazılarak

$$|\lambda_2\lambda_1\varphi_1|\left(\left|\frac{\lambda_2\varphi_2}{\lambda_1\lambda_1\varphi_1}\right|\right)t_1^*+|\lambda_2\lambda_1\varphi_1|k_2^*t_3^*=b_2k_1t_1+(b_2k_2-b_4k_3)t_3+b_4k_4t_5$$

şeklinde olur. Denklem düzenlenirse

$$|\lambda_3|t_3^*=\frac{\left(b_2k_1-a_1\left(\frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2}\right)|\varphi_2|\right)t_1+\left((b_2k_2-b_4k_3)-a_3\left(\frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2}\right)|\varphi_2|\right)t_3+\left(b_4k_4\right)t_5}{|\varphi_3|}$$

bulunur. Eğer

$$c_1=\frac{b_2k_1-a_1\left(\frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2}\right)|\varphi_2|}{|\varphi_3|},\quad c_3=\frac{b_2k_2-b_4k_3-a_3\left(\frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2}\right)|\varphi_2|}{|\varphi_3|},\quad c_5=\frac{b_4k_4}{|\varphi_3|}$$

alınırsa

$$|\lambda_3|t_3^*=c_1t_1+c_3t_3+c_5t_5$$

olur ve buradan da $\lambda_3^2=\left|-c_1^2+c_3^2+c_5^2\right|$ bulunur yani (4.31_3) ispatlanmış olur.

Son denklemin s yay parametresine göre türevi için alınırsa

$$|\lambda_3|\,f'(s)\left.\frac{dt_3^*}{ds^*}\right|_{s^*=f(s)}=c_1t_1'+c_3t_3'+c_5t_5'$$

bulunur. (4.13) de verilen Frenet formülleri yerine yazılırsa

$$\left|\lambda_3\lambda_1\varphi_1\right|\left.\frac{dt_3^*}{ds^*}\right|_{s^*=f(s)}=(c_1k_1-c_3k_2)t_2+(c_3k_3-c_5k_4)t_4 \qquad (4.42)$$

elde edilir $k_3^*=\left\|\left.\frac{dt_3^*}{ds^*}\right|_{s^*=f(s)}+k_2^*t_2^*\right\|$ denkleminde (4.31_2) ve (4.42) denklemleri kullanılarak

$$k_3^*=\frac{1}{\left|\lambda_3\lambda_1\varphi_1\right|}\sqrt{\left|\left(c_1k_1-c_3k_2+b_2\left(\frac{\lambda_3^2}{\lambda_2^2}\right)\left|\varphi_3\right|\right)^2+\left(c_3k_3-c_5k_4+b_4\left(\frac{\lambda_3^2}{\lambda_2^2}\right)\left|\varphi_3\right|\right)^2\right|}$$

bulunur. Kısalığın hatırı için

$$\sqrt{\left|\left(c_1k_1-c_3k_2+b_2\left(\frac{\lambda_3^2}{\lambda_2^2}\right)\left|\varphi_3\right|\right)^2+\left(c_3k_3-c_5k_4+b_4\left(\frac{\lambda_3^2}{\lambda_2^2}\right)\left|\varphi_3\right|\right)^2\right|}=\left|\lambda_4\varphi_4\right|$$

alınırsa r^* eğrisinin üçüncü eğriliği

$$k_3^*=\left|\frac{\lambda_4\varphi_4}{\lambda_3\lambda_1\varphi_1}\right| \qquad (4.43)$$

olur. Bu durumda (4.42) denkleminde (4.14) Frenet formülleri ve k_3^* yerine yazılırsa

$$\left|\lambda_4\varphi_4\right|t_4^*=(c_1k_1-c_3k_2)t_2+(c_3k_3-c_5k_4)t_4+\left(b_2t_2+b_4t_4\right)\left(\frac{\lambda_3^2}{\lambda_2^2}\right)\left|\varphi_3\right|$$

$$\left|\lambda_4\right|t_4^*=\frac{\left(c_1k_1-c_3k_2+b_2\left(\frac{\lambda_3^2}{\lambda_2^2}\right)\left|\varphi_3\right|\right)t_2+\left(c_3k_3-c_5k_4+b_4\left(\frac{\lambda_3^2}{\lambda_2^2}\right)\left|\varphi_3\right|\right)t_4}{\left|\varphi_4\right|}$$

olur. Burada

$$d_2=\frac{\left(c_1k_1-c_3k_2+b_2\left(\frac{\lambda_3^2}{\lambda_2^2}\right)\left|\varphi_3\right|\right)}{\left|\varphi_4\right|},\ d_4=\frac{\left(c_3k_3-c_5k_4+b_4\left(\frac{\lambda_3^2}{\lambda_2^2}\right)\left|\varphi_3\right|\right)}{\left|\varphi_4\right|}$$

alınırsa

$$\left|\lambda_4\right| t_4^* = d_2 t_2 + d_4 t_4$$

ve $\lambda_4^2 = d_2^2 + d_4^2$ olur. Böylece (4.32_4) ispatlanmış olur. Son olarak (4.32_4) denkleminin *s* yay parametresine göre türevinden

$$\left|\lambda_4 \lambda_1 \varphi_1\right| \left.\frac{dt_4^*}{ds^*}\right|_{s^*=f(s)} = d_2 t_2' + d_4 t_4' \qquad (4.44)$$

olur. $k_4^* = \left\| \left.\frac{dt_4^*}{ds^*}\right|_{s^*=f(s)} + k_3^* t_3^* \right\|$ denkleminde (4.31_3) ve (4.44) denklemleri kullanılarak

$$k_4^* = \frac{1}{\left|\lambda_4 \lambda_1 \varphi_1\right|} \sqrt{\left| -\left(d_2 k_1 + c_1 \left(\frac{\lambda_4^2}{\lambda_3^2} \right) |\varphi_4| \right)^2 + \left(d_2 k_2 - d_4 k_3 + c_3 \left(\frac{\lambda_4^2}{\lambda_3^2} \right) |\varphi_4| \right)^2 + \left(d_4 k_4 + c_5 \left(\frac{\lambda_4^2}{\lambda_3^2} \right) |\varphi_4| \right)^2 \right|}$$

bulunur. Kısalığın hatırı için

$$\sqrt{\left| -\left(d_2 k_1 + c_1 \left(\frac{\lambda_4^2}{\lambda_3^2} \right) |\varphi_4| \right)^2 + \left(d_2 k_2 - d_4 k_3 + c_3 \left(\frac{\lambda_4^2}{\lambda_3^2} \right) |\varphi_4| \right)^2 + \left(d_4 k_4 + c_5 \left(\frac{\lambda_4^2}{\lambda_3^2} \right) |\varphi_4| \right)^2 \right|} = \left|\lambda_5 \varphi_5\right|$$

denirse r^* timelike eğrisinin dördüncü eğriliği

$$k_4^* = \left| \frac{\lambda_5 \varphi_5}{\lambda_4 \lambda_1 \varphi_1} \right| \qquad (4.45)$$

olur. Böylece (4.44) denklemi, (4.14) Frenet formülleri ve k_4^* yardımıyla

$$-\left(c_1 t_1 + c_3 t_3 + c_5 t_5\right) \left(\frac{\lambda_4^2}{\lambda_3^2} \right) |\varphi_4| + \left|\lambda_5 \varphi_5\right| t_5^* = d_2 t_2' + d_4 t_4'$$

olur. Gerekli düzenlemeler sonucu

$$\left|\lambda_5 \varphi_5\right| t_5^* = d_2 k_1 t_1 + (d_2 k_2 - d_4 k_3) t_3 + d_4 k_4 t_5 + \left(c_1 t_1 + c_3 t_3 + c_5 t_5\right) \left(\frac{\lambda_4^2}{\lambda_3^2} \right) |\varphi_4|$$

$$\left|\lambda_5\right| t_5^* = \frac{\left(d_2 k_1 + c_1\left(\frac{\lambda_4^2}{\lambda_3^2}\right)\left|\varphi_4\right|\right) t_1 + \left(d_2 k_2 - d_4 k_3 + c_3\left(\frac{\lambda_4^2}{\lambda_3^2}\right)\left|\varphi_4\right|\right) t_3 + \left(d_4 k_4 + c_5\left(\frac{\lambda_4^2}{\lambda_3^2}\right)\left|\varphi_4\right|\right) t_5}{\left|\varphi_5\right|}$$

olur. Eğer

$$\frac{d_2 k_1 + c_1\left(\frac{\lambda_4^2}{\lambda_3^2}\right)\left|\varphi_4\right|}{\left|\varphi_5\right|} = e_1, \quad \frac{d_2 k_2 - d_4 k_3 + c_3\left(\frac{\lambda_4^2}{\lambda_3^2}\right)\left|\varphi_4\right|}{\left|\varphi_5\right|} = e_3, \quad \frac{d_4 k_4 + c_5\left(\frac{\lambda_4^2}{\lambda_3^2}\right)\left|\varphi_4\right|}{\left|\varphi_5\right|} = e_5$$

alınırsa

$$\left|\lambda_5\right| t_5^* = e_1 t_1 + e_3 t_3 + e_5 t_5$$

ve $\lambda_5^2 = \left|-e_1^2 + e_3^2 + e_5^2\right|$ olur. Böylece (4.31_5) ispatlanmış olur.

İkinci olarak, (4.3) parametrik gösterimine sahip $r = (s)$ ve $r^* = (s^*)$ Bertrand eğri çifti için $\mu_1 \mu_3 \mu_5 \neq 0$ ve $\mu_2 = \mu_4 = 0$ olsun. Böyle bir Bertrand eğri çiftinin $\mathbb{R}_1^5$ de ki karakterizasyonu aşağıdaki teoremde verilmiştir.

Teorem 4.2.3. Bertrand eğri çifti

$$r^* = r + \mu_1 t_1 + \mu_3 t_3 + \mu_5 t_5 \tag{4.46}$$

şeklinde ise

$$\left|\lambda_1\right| t_1^* = a_1 t_1 + a_2 t_2 + a_4 t_4, \ \lambda_1^2 = \left|-a_1^2 + a_2^2 + a_4^2\right|, \tag{4.47$_1$}$$

$$\left|\lambda_2\right| t_2^* = b_1 t_1 + b_2 t_2 + b_3 t_3 + b_5 t_5, \ \lambda_2^2 = \left|-b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + b_5^2\right|, \tag{4.47$_2$}$$

$$\left|\lambda_3\right| t_3^* = c_1 t_1 + c_2 t_2 + c_3 t_3 + c_4 t_4, \ \lambda_3^2 = \left|-c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 + c_4^2\right|, \tag{4.47$_3$}$$

$$\left|\lambda_4\right| t_4^* = d_1 t_1 + d_2 t_2 + d_3 t_3 + d_5 t_5, \ \lambda_4^2 = \left|-d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_5^2\right|, \tag{4.47$_4$}$$

$$\left|\lambda_5\right| t_5^* = e_1 t_1 + e_2 t_2 + e_3 t_3 + e_4 t_4, \ \lambda_5^2 = \left|-e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 + e_4^2\right| \tag{4.47$_5$}$$

ve

$$a_1|\varphi_1|=1,\ a_2|\varphi_1|=\mu_1k_1-\mu_3k_2,\ a_4|\varphi_1|=\mu_3k_3-\mu_5k_4, \tag{4.48}$$

$$b_1|\varphi_2|=a_2k_1,\ b_2|\varphi_2|=a_1k_1,\ b_3|\varphi_2|=a_2k_2-a_4k_3,\ b_5|\varphi_2|=a_4k_4, \tag{4.49}$$

$$\begin{aligned}&c_1|\varphi_3|=b_2k_1+a_1\left(\frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2}\right)|\varphi_2|,\ c_2|\varphi_3|=b_1k_1-b_3k_2+a_2\left(\frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2}\right)|\varphi_2|,\\&c_3|\varphi_3|=b_2k_2,\ c_4|\varphi_3|=b_3k_3-b_5k_4+a_4\left(\frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2}\right)|\varphi_2|,\end{aligned} \tag{4.50}$$

$$\begin{aligned}&d_1|\varphi_4|=c_2k_1+b_1\left(\frac{\lambda_3^2}{\lambda_2^2}\right)|\varphi_3|,\ d_2|\varphi_4|=c_1k_1-c_3k_2+b_2\left(\frac{\lambda_3^2}{\lambda_2^2}\right)|\varphi_3|\\&d_3|\varphi_4|=c_2k_2-c_4k_3+b_3\left(\frac{\lambda_3^2}{\lambda_2^2}\right)|\varphi_3|,\ d_5|\varphi_4|=c_4k_4+b_5\left(\frac{\lambda_3^2}{\lambda_2^2}\right)|\varphi_3|,\end{aligned} \tag{4.51}$$

$$\begin{aligned}&e_1|\varphi_5|=d_2k_1+c_1\left(\frac{\lambda_4^2}{\lambda_3^2}\right)|\varphi_4|,\ e_2|\varphi_5|=d_1k_1-d_3k_2+c_2\left(\frac{\lambda_4^2}{\lambda_3^2}\right)|\varphi_4|\\&e_3|\varphi_5|=d_2k_2+c_3\left(\frac{\lambda_4^2}{\lambda_3^2}\right)|\varphi_4|,\ e_4|\varphi_5|=d_3k_3-d_5k_4+c_4\left(\frac{\lambda_4^2}{\lambda_3^2}\right)|\varphi_4|\end{aligned} \tag{4.52}$$

dır. . Burada r^* timelike eğrisinin yay parametresi

$$s^* = |\lambda_1|\int|\varphi_1|ds$$

dır ve r^* timelike eğrisinin *v*. eğriliği

$$k_v^*=\left|\frac{\lambda_{v+1}\varphi_{v+1}}{\lambda_v\lambda_1\varphi_1}\right|,\quad 2\le v\le 4$$

dır.

İspat : İlk olarak s ile s^* arasındaki bağıntıyı elde etmek için (4.30) formülünün s ye göre türevi alınırsa

$$\frac{dr^*}{ds}=r+\mu_1t_1'+\mu_3t_3'+\mu_5t_5'=\frac{dr^*}{ds^*}\frac{ds^*}{ds}=t_1-\mu_1k_1t_2+\mu_3(-k_2t_2+k_3t_4)+\mu_5(-k_4t_4)$$

$$t_1^* \frac{ds^*}{ds} = \left(t_1 + \left(\mu_1 k_1 - \mu_3 k_2\right) t_2 + \left(\mu_3 k_3 - \mu_5 k_4\right) t_4\right) \tag{4.53}$$

bulunur. Yay parametreleri arasındaki bağıntıyı elde etmek için

$$a_1 = \frac{1}{|\varphi_1|}, \; a_2 = \frac{(\mu_1 k_1 - \mu_3 k_2)}{|\varphi_1|}, \; a_4 = \frac{(\mu_3 k_3 - \mu_5 k_4)}{|\varphi_1|} \text{ ve } \sqrt{\left|a_2^2 + a_4^2 - a_1^2\right|} = \left|\lambda_1\right|$$

kabul edilsin. r^* timelike eğrisinin yay parametresi, $\forall s \in I$ için

$$f : I \to I^*$$

$$s \to s^* = f(s), \frac{ds^*}{ds} \neq 0$$

fonksiyonu ile belirlendiğinden

$$f(s) = \sqrt{\left|-a_1^2 + a_2^2 + a_4^2\right|} \int |\varphi_1| \, ds$$

$$s^* = |\lambda_1| \int |\varphi_1| ds$$

elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapılırsa (4.53) denklemi

$$|\lambda_1| t_1^* = a_1 t_1 + a_2 t_2 + a_4 t_4$$

haline gelir ki (4.47_1) ispatlanmış olur. Bu son denklemin s yay parametresine göre türevi alınırsa

$$|\lambda_1| f'(s) \left.\frac{dt_1^*}{ds^*}\right|_{s^* = f(s)} = a_1 t_1' + a_2 t_2' + a_4 t_4'$$

bulunur. (4.13) de verilen Frenet formülleri yardımıyla

$$\left|\lambda_1^2 \varphi_1\right| \left.\frac{dt_1^*}{ds^*}\right|_{s^* = f(s)} = a_2 k_1 t_1 + a_1 k_1 t_2 + \left(a_2 k_2 - a_4 k_3\right) t_3 + a_4 k_4 t_5 \tag{4.54}$$

elde edilir. $k_1^* = \left\| \left.\frac{dt_1^*}{ds^*}\right|_{s^* = f(s)} \right\|$ olduğundan, (4.54) denklemi yardımıyla

$$k_1^* = \frac{1}{\left|\lambda_1^2 \varphi_1\right|} \sqrt{\left|-\left(a_2 k_1\right)^2 + \left(a_1 k_1\right)^2 + \left(a_2 k_2 - a_4 k_3\right)^2 + \left(a_4 k_4\right)^2\right|}$$

olur. Kısalığın hatırı için

$$\sqrt{\left|-\left(a_2 k_1\right)^2 + \left(a_1 k_1\right)^2 + \left(a_2 k_2 - a_4 k_3\right)^2 + \left(a_4 k_4\right)^2\right|} = \left|\lambda_2 \varphi_2\right|$$

alınırsa r^* timelike eğrisinin birinci eğriliği

$$k_1^* = \left|\frac{\lambda_2 \varphi_2}{\lambda_1^2 \varphi_1}\right| \tag{4.55}$$

bulunur. Böylece (4.54) denklemi, k_1^* ve (3.14) Frenet formülü yardımıyla

$$\left|\lambda_2 \varphi_2\right| t_2^* = a_2 k_1 t_1 + a_1 k_1 t_2 + \left(a_2 k_2 - a_4 k_3\right) t_3 + a_4 k_4 t_5$$

$$\left|\lambda_2\right| t_2^* = \frac{a_2 k_1 t_1 + a_1 k_1 t_2 + \left(a_2 k_2 - a_4 k_3\right) t_3 + a_4 k_4 t_5}{\left|\varphi_2\right|}$$

olur. Bu denklemde kısalığın hatırı için

$$b_1 = \frac{a_2 k_1}{\left|\varphi_2\right|},\ b_2 = \frac{a_1 k_1}{\left|\varphi_2\right|},\ b_3 = \frac{\left(a_2 k_2 - a_4 k_3\right)}{\left|\varphi_2\right|},\ b_5 = \frac{a_4 k_4}{\left|\varphi_2\right|}$$

alınırsa

$$\left|\lambda_2\right| t_2^* = b_1 t_1 + b_2 t_2 + b_3 t_3 + b_5 t_5$$

ve $\lambda_2^2 = \left|-b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + b_5^2\right|$ elde edilir. Böylece (4.47_2) ispatlanmış olur. Benzer yolla bu son denklemin s yay parametresine göre türevi alınırsa

$$\left|\lambda_2\right| f'(s) \left.\frac{dt_2^*}{ds^*}\right|_{s^* = f(s)} = b_1 t_1' + b_2 t_2' + b_3 t_3' + b_5 t_5'$$

bulunur. (4.13) de verilen Frenet formülleri yerine yazılırsa

$$\left|\lambda_2\lambda_1\varphi_1\right|\left.\frac{dt_2^*}{ds^*}\right|_{s^*=f(s)} = b_2k_1t_1 + (b_2k_2 - b_4k_3)t_3 + b_4k_4t_5 \tag{4.56}$$

elde edilir. $k_2^* = \left\| \left.\frac{dt_2^*}{ds^*}\right|_{s^*=f(s)} + k_1^*t_1^* \right\|$ olduğundan, (3.41) ve (3.48$_1$) denklemleri kullanılarak

$$k_2^* = \frac{1}{\left|\lambda_2\lambda_1\varphi_1\right|}\sqrt{\left|-\left(b_2k_1 + a_1\left(\frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2}\right)\left|\varphi_2\right|\right)^2 + \left(b_1k_1 - b_3k_2 + a_2\left(\frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2}\right)\left|\varphi_2\right|\right)^2 + \left(b_2k_2\right)^2 + \left(b_3k_3 - b_5k_4 + a_4\left(\frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2}\right)\left|\varphi_2\right|\right)^2\right|}$$

olur. Yine kısalığın hatırı için

$$\sqrt{\left|-\left(b_2k_1 + a_1\left(\frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2}\right)\left|\varphi_2\right|\right)^2 + \left(b_1k_1 - b_3k_2 + a_2\left(\frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2}\right)\left|\varphi_2\right|\right)^2 + \left(b_2k_2\right)^2 + \left(b_3k_3 - b_5k_4 + a_4\left(\frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2}\right)\left|\varphi_2\right|\right)^2\right|} = \left|\lambda_3\varphi_3\right|$$

alınırsa r^* timelike eğrisinin ikinci eğriliği

$$k_2^* = \left|\frac{\lambda_3\varphi_3}{\lambda_2\lambda_1\varphi_1}\right| \tag{4.57}$$

bulunur. Böylece (4.56) denklemi, (4.14) Frenet formülü ve k_1^* yardımıyla

$$\left|\lambda_2\lambda_1\varphi_1\right|\left(\left|\frac{\lambda_2\varphi_2}{\lambda_1\lambda_1\varphi_1}\right|\right)t_1^* + \left|\lambda_2\lambda_1\varphi_1\right|k_2^*t_3^* = b_2k_1t_1 + (b_1k_1 - b_3k_2)t_2 + b_2k_2t_3 + \left(b_3k_3 - b_5k_4\right)t_4$$

şeklinde olur. Denklem düzenlenirse

$$\left|\lambda_3\varphi_3\right|t_3^* = \left(b_2k_1 - a_1\left(\frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2}\right)\left|\varphi_2\right|\right)t_1 + \left(b_1k_1 - b_3k_2 - a_2\left(\frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2}\right)\left|\varphi_2\right|\right)t_2 + b_2k_2t_3 + \left(b_3k_3 - b_5k_4 - a_4\left(\frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2}\right)\left|\varphi_2\right|\right)t_4$$

olur. Eğer

$$c_1 = \frac{\left(b_2k_1 - a_1\left(\frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2}\right)\left|\varphi_2\right|\right)}{\left|\varphi_3\right|},\; c_2 = \frac{\left(b_1k_1 - b_3k_2 - a_2\left(\frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2}\right)\left|\varphi_2\right|\right)}{\left|\varphi_3\right|},\; c_3 = \frac{b_2k_2}{\left|\varphi_3\right|},\; c_4 = \frac{\left(b_3k_3 - b_5k_4 - a_4\left(\frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2}\right)\left|\varphi_2\right|\right)}{\left|\varphi_3\right|}$$

alınırsa

$$|\lambda_3| t_3^* = c_1 t_1 + c_2 t_2 + c_3 t_3 + c_4 t_4$$

olur ve buradan da $\lambda_3^2 = \left| -c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 + c_4^2 \right|$ bulunur ki (4.47_3) ispatlanmış olur. (4.47_3) denkleminin s yay parametresine göre türevi alınırsa

$$|\lambda_3|\, f'(s) \left.\frac{dt_3^*}{ds^*}\right|_{s^*=f(s)} = c_1 t_1' + c_2 t_2' + c_3 t_3' + c_4 t_4'$$

bulunur. (4.13) de verilen Frenet formülleri yerine yazılırsa

$$|\lambda_3 \lambda_1 \varphi_1| \left.\frac{dt_3^*}{ds^*}\right|_{s^*=f(s)} = c_2 k_1 t_1 + (c_1 k_1 - c_3 k_2) t_2 + (c_3 k_3 - c_5 k_4) t_4 + c_4 k_4 t_5 \quad (4.58)$$

elde edilir. $k_3^* = \left\| \left.\frac{dt_3^*}{ds^*}\right|_{s^*=f(s)} + k_2^* t_2^* \right\|$ denkleminde (4.47_2) ve (4.58) denklemleri kullanılarak

$$k_3^* = \frac{1}{|\lambda_3 \lambda_1 \varphi_1|} \sqrt{\left| -\left(c_2 k_1 + b_1 \left(\frac{\lambda_3^2}{\lambda_2^2} \right) |\varphi_3| \right)^2 + \left(c_1 k_1 - c_3 k_2 + b_2 \left(\frac{\lambda_3^2}{\lambda_2^2} \right) |\varphi_3| \right)^2 + \left(c_2 k_2 - c_4 k_3 + b_3 \left(\frac{\lambda_3^2}{\lambda_2^2} \right) |\varphi_3| \right)^2 + \left(c_4 k_4 + b_5 \left(\frac{\lambda_3^2}{\lambda_2^2} \right) |\varphi_3| \right)^2 \right|}$$

bulunur. Kısalığın hatırı için

$$\sqrt{\left| -\left(c_2 k_1 + b_1 \left(\frac{\lambda_3^2}{\lambda_2^2} \right) |\varphi_3| \right)^2 + \left(c_1 k_1 - c_3 k_2 + b_2 \left(\frac{\lambda_3^2}{\lambda_2^2} \right) |\varphi_3| \right)^2 + \left(c_2 k_2 - c_4 k_3 + b_3 \left(\frac{\lambda_3^2}{\lambda_2^2} \right) |\varphi_3| \right)^2 + \left(c_4 k_4 + b_5 \left(\frac{\lambda_3^2}{\lambda_2^2} \right) |\varphi_3| \right)^2 \right|} = |\lambda_4 \varphi_4|$$

alınırsa r^* timelike eğrisinin üçüncü eğriliği

$$k_3^* = \left| \frac{\lambda_4 \varphi_4}{\lambda_3 \lambda_1 \varphi_1} \right| \quad (4.59)$$

olur. Bu durumda (4.58) denkleminde, (4.14) Frenet formülleri ve k_3^* yerine yazılıp gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$|\lambda_4| t_4^* = \frac{\left(c_2 k_1 + b_1 \left(\frac{\lambda_3^2}{\lambda_2^2} \right) |\varphi_3| \right) t_1 + \left(c_1 k_1 - c_3 k_2 + b_2 \left(\frac{\lambda_3^2}{\lambda_2^2} \right) |\varphi_3| \right) t_2 + \left(c_2 k_2 - c_4 k_3 + b_3 \left(\frac{\lambda_3^2}{\lambda_2^2} \right) |\varphi_3| \right) t_3 + \left(c_4 k_4 + b_5 \left(\frac{\lambda_3^2}{\lambda_2^2} \right) |\varphi_3| \right) t_5}{|\varphi_4|}$$

olur. Burada

$$d_1 = \frac{\left(c_2 k_1 + b_1 \left(\frac{\lambda_3^2}{\lambda_2^2} \right) |\varphi_3| \right)}{|\varphi_4|}, \; d_2 = \frac{\left(c_1 k_1 - c_3 k_2 + b_2 \left(\frac{\lambda_3^2}{\lambda_2^2} \right) |\varphi_3| \right)}{|\varphi_4|},$$

$$d_3 = \frac{\left(c_2 k_2 - c_4 k_3 + b_3 \left(\frac{\lambda_3^2}{\lambda_2^2} \right) |\varphi_3| \right)}{|\varphi_4|}, \; d_5 = \frac{\left(c_4 k_4 + b_5 \left(\frac{\lambda_3^2}{\lambda_2^2} \right) |\varphi_3| \right)}{|\varphi_4|}$$

alınırsa

$$|\lambda_4| t_4^* = d_1 t_1 + d_2 t_2 + d_3 t_3 + d_5 t_5$$

ve $\lambda_4^2 = \left| -d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_5^2 \right|$ olur. Böylece (4.47_4) ispatlanmış olur. Son olarak (4.47_4) denkleminin s yay parametresine göre türevi alınırsa

$$|\lambda_4 \lambda_1 \varphi_1| \left. \frac{dt_4^*}{ds^*} \right|_{s^* = f(s)} = d_1 t_1' + d_2 t_2' + d_3 t_3' + d_5 t_5' \tag{4.60}$$

olur. $k_4^* = \left\| \left. \frac{dt_4^*}{ds^*} \right|_{s^*=f(s)} + k_3^* t_3^* \right\|$ denkleminde (4.47_3) ve (4.60) denklemleri kullanılarak

$$k_4^* = \frac{1}{|\lambda_4 \lambda_1 \varphi_1|} \sqrt{\left| \left(d_1 k_1 - d_3 k_2 + c_2 \left(\frac{\lambda_4^2}{\lambda_3^2} \right) |\varphi_4| \right)^2 + \left(d_2 k_2 + c_3 \left(\frac{\lambda_4^2}{\lambda_3^2} \right) |\varphi_4| \right)^2 + \left(d_3 k_3 - d_5 k_4 + c_4 \left(\frac{\lambda_4^2}{\lambda_3^2} \right) |\varphi_4| \right)^2 - \left(d_2 k_1 + c_1 \left(\frac{\lambda_4^2}{\lambda_3^2} \right) |\varphi_4| \right)^2 \right|}$$

olur. Kısalığın hatırı için

$$\sqrt{\left| \left(d_1 k_1 - d_3 k_2 + c_2 \left(\frac{\lambda_4^2}{\lambda_3^2} \right) |\varphi_4| \right)^2 + \left(d_2 k_2 + c_3 \left(\frac{\lambda_4^2}{\lambda_3^2} \right) |\varphi_4| \right)^2 + \left(d_3 k_3 - d_5 k_4 + c_4 \left(\frac{\lambda_4^2}{\lambda_3^2} \right) |\varphi_4| \right)^2 - \left(d_2 k_1 + c_1 \left(\frac{\lambda_4^2}{\lambda_3^2} \right) |\varphi_4| \right)^2 \right|} = |\lambda_5 \varphi_5|$$

denirse r^* timelike eğrisinin dördüncü eğriliği

$$k_4^* = \left| \frac{\lambda_5 \varphi_5}{\lambda_4 \lambda_1 \varphi_1} \right| \tag{4.61}$$

olur. Böylece (3.61) denklemi k_4^* ve (4.14) Frenet formülleri yardımıyla

$$-\left(c_1t_1+c_2t_2+c_3t_3+c_4t_4\right)\left(\frac{\lambda_4^2}{\lambda_3^2}\right)|\varphi_4|+|\lambda_5\varphi_5|t_5^*=d_1t_1'+d_2t_2'+d_3t_3'+d_5t_5'$$

olur. Gerekli düzenlemeler sonucu

$$|\lambda_5|t_5^*=\frac{\left(d_2k_1+c_1\left(\frac{\lambda_4^2}{\lambda_3^2}\right)|\varphi_4|\right)t_1+\left(d_1k_1-d_3k_2+c_2\left(\frac{\lambda_4^2}{\lambda_3^2}\right)|\varphi_4|\right)t_2+\left(d_2k_2+c_3\left(\frac{\lambda_4^2}{\lambda_3^2}\right)|\varphi_4|\right)t_3+\left(d_3k_3-d_5k_4+c_4\left(\frac{\lambda_4^2}{\lambda_3^2}\right)|\varphi_4|\right)t_4}{|\varphi_5|}$$

olur. Eğer

$$e_1=\frac{\left(d_2k_1+c_1\left(\frac{\lambda_4^2}{\lambda_3^2}\right)|\varphi_4|\right)}{|\varphi_5|},\ e_2=\frac{\left(d_1k_1-d_3k_2+c_2\left(\frac{\lambda_4^2}{\lambda_3^2}\right)|\varphi_4|\right)}{|\varphi_5|},$$

$$e_3=\frac{\left(d_2k_2+c_3\left(\frac{\lambda_4^2}{\lambda_3^2}\right)|\varphi_4|\right)}{|\varphi_5|},\ e_4=\frac{\left(d_3k_3-d_5k_4+c_4\left(\frac{\lambda_4^2}{\lambda_3^2}\right)|\varphi_4|\right)}{|\varphi_5|}$$

alınırsa

$$|\lambda_5|t_5^*=e_1t_1+e_2t_2+e_3t_3+e_4t_4$$

ve $\lambda_5^2=\left|-e_1^2+e_2^2+e_3^2+e_4^2\right|$ olur yani (4.47_5) ispatlanmış olur.

Ayrıca (4.55), (4.57), (4.59) ve (4.61) denklemlerinden r eğrisinin Bertrand eşleği r^* eğrisinin $1\leq v\leq 4$ olmak üzere v. eğriliği

$$k_v^*=\left|\frac{\lambda_{v+1}\varphi_{v+1}}{\lambda_v\lambda_1\varphi_1}\right|$$

olduğu görülür.

Son olarak (4.3) parametrik gösterimine sahip $r=(s)$ ve $r^*=\left(s^*\right)$ Bertrand eğri çifti için $\mu_4\neq 0$ ve $\mu_1=\mu_3=\mu_5=0$ olsun. Böyle bir timelike Bertrand eğri çiftinin $\mathbb{R}_1^5$ de karakterizasyonu aşağıdaki teoremde verilmiştir.

Teorem 4.2.4. $\mathbb{R}_1^5$, 5-boyutlu Lorentz uzayında timelike Bertrand eğri çifti

$$r^* = r + \mu_2 t_2 + \mu_4 t_4 \tag{4.62}$$

şeklide ise

$$|\lambda_1| t_1^* = a_1 t_1 + a_3 t_3 + a_5 t_5,\ \lambda_1^2 = \left|-a_1^2 + a_3^2 + a_5^2\right|, \tag{4.63$_1$}$$

$$|\lambda_2| t_2^* = b_2 t_2 + b_4 t_4,\ \lambda_2^2 = b_2^2 + b_4^2, \tag{4.63$_2$}$$

$$|\lambda_3| t_3^* = c_1 t_1 + c_3 t_3 + c_5 t_5,\ \lambda_3^2 = \left|-c_1^2 + c_3^2 + c_5^2\right|, \tag{4.63$_3$}$$

$$|\lambda_4| t_4^* = d_2 t_2 + d_4 t_4,\ \lambda_4^2 = d_2^2 + d_4^2, \tag{4.63$_4$}$$

$$|\lambda_5| t_5^* = e_1 t_1 + e_3 t_3 + e_5 t_5,\ \lambda_5^2 = \left|-e_1^2 + e_3^2 + e_5^2\right|, \tag{4.63$_5$}$$

ve

$$a_1|\varphi_1| = (1 + \mu_2 k_1),\ a_3|\varphi_1| = (\mu_2 k_2 - \mu_4 k_3),\ a_5|\varphi_1| = \mu_4 k_4, \tag{4.64}$$

$$b_2|\varphi_2| = (a_1 k_1 - a_3 k_2),\ b_4|\varphi_2| = (a_3 k_3 - a_5 k_4), \tag{4.65}$$

$$\begin{aligned} &c_1|\varphi_3| = \left(b_2 k_1 - a_1\left(\frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2}\right)|\varphi_2|\right),\ c_3|\varphi_3| = \left(b_2 k_2 - b_4 k_3 - a_3\left(\frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2}\right)|\varphi_2|\right), \\ &c_5|\varphi_3| = \left(b_4 k_4 - a_5\left(\frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2}\right)|\varphi_2|\right), \end{aligned} \tag{4.66}$$

$$\begin{aligned} d_2|\varphi_4| &= \left(c_1 k_1 - c_3 k_2 + b_2\left(\frac{\lambda_3^2}{\lambda_2^2}\right)|\varphi_3|\right), \\ d_4|\varphi_4| &= \left(c_3 k_3 - c_5 k_4 + b_4\left(\frac{\lambda_3^2}{\lambda_2^2}\right)|\varphi_3|\right), \end{aligned} \tag{4.67}$$

$$\begin{aligned} &e_1|\varphi_5| = \left(d_2 k_1 + c_1\left(\frac{\lambda_4^2}{\lambda_3^2}\right)|\varphi_4|\right),\ e_3|\varphi_5| = \left(d_2 k_2 - d_4 k_3 + c_3\left(\frac{\lambda_4^2}{\lambda_3^2}\right)|\varphi_4|\right), \\ &e_5|\varphi_5| = \left(d_4 k_4 + c_5\left(\frac{\lambda_4^2}{\lambda_3^2}\right)|\varphi_4|\right) \end{aligned} \tag{4.68}$$

dır. Burada r^* timelike eğrisinin yay parametresi ve v. eğriliği, sırasıyla

$$s^* = |\lambda_1| \int |\varphi_1| ds$$

ve

$$k_v^* = \left| \frac{\lambda_{v+1}\varphi_{v+1}}{\lambda_v \lambda_1 \varphi_1} \right|, \quad 1 \leq v \leq 4$$

dır.

İspat. (4.30) denkleminin s yay parametresine göre türevi incelenirse

$$\frac{dr^*}{ds} = r + \mu_2 t_2' + \mu_4 t_4' = \frac{dr^*}{ds^*}\frac{ds^*}{ds} = t_1 + \mu_2\left(k_1 t_1 + k_2 t_3\right) + \mu_4\left(-k_3 t_3 + k_4 t_5\right)$$

$$t_1^* \frac{ds^*}{ds} = \left(\left(1+\mu_2 k_1\right)t_1 + \left(\mu_2 k_2 - \mu_4 k_3\right)t_3 + \mu_4 k_4 t_5\right) \tag{4.69}$$

olur. Yay parametreleri arasındaki bağıntıyı elde etmek için kabul edelim ki

$$a_1 = \frac{\left(1+\mu_2 k_1\right)}{|\varphi_1|}, \; a_3 = \frac{\left(\mu_2 k_2 - \mu_4 k_3\right)}{|\varphi_1|}, \; a_5 = \frac{\mu_4 k_4}{|\varphi_1|} \text{ ve } \sqrt{\left|-a_1^2 + a_3^2 + a_5^2\right|} = |\lambda_1|$$

olsun. r^* timelike eğrisinin yay parametresi $\forall s \in I$ için

$$f : I \to I^*$$

$$s \to s^* = f(s), \frac{ds^*}{ds} \neq 0$$

fonksiyonu ile belirlendiğinden

$$f(s) = \sqrt{\left|-a_1^2 + a_3^2 + a_5^2\right|} \int |\varphi_1| ds$$

$$s^* = |\lambda_1| \int |\varphi_1| ds$$

elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapılırsa (4.69) denklemi

$$|\lambda_1| t_1^* = a_1 t_1 + a_3 t_3 + a_5 t_5$$

haline gelir. Böylece (4.63_1) ispatlanmış olur. Bu son denklemin s yay parametresine göre türevi alınırsa

$$\left|\lambda_1\right| f'(s) \left.\frac{dt_1^*}{ds^*}\right|_{s^*=f(s)} = a_1 t_1' + a_3 t_3' + a_5 t_5'$$

bulunur. (4.13) de verilen Frenet formülleri yardımıyla

$$\left|\lambda_1^2 \varphi_1\right| \left.\frac{dt_1^*}{ds^*}\right|_{s^*=f(s)} = \left(a_1 k_1 - a_3 k_2\right) t_2 + \left(a_3 k_3 - a_5 k_4\right) t_4 \tag{4.70}$$

elde edilir. $k_1^* = \left\| \left.\frac{dt_1^*}{ds^*}\right|_{s^*=f(s)} \right\|$ olduğundan, (4.70) denklemi yardımıyla

$$k_1^* = \frac{1}{\left|\lambda_1^2 \varphi_1\right|} \sqrt{\left|(a_1 k_1 - a_3 k_2)^2 + (a_3 k_3 - a_5 k_4)^2\right|}$$

olur. Kısalığın hatırı için

$$\sqrt{\left|(a_1 k_1 - a_3 k_2)^2 + (a_3 k_3 - a_5 k_4)^2\right|} = \left|\lambda_2 \varphi_2\right|$$

alınırsa r^* timelike eğrisinin birinci eğriliği

$$k_1^* = \left|\frac{\lambda_2 \varphi_2}{\lambda_1^2 \varphi_1}\right| \tag{4.71}$$

bulunur. Böylece (4.70) denklemi, (4.14) Frenet formülleri ve k_1^* denklemleri yardımıyla

$$\left|\lambda_2 \varphi_2\right| t_2^* = (a_1 k_1 - a_3 k_2) t_2 + (a_3 k_3 - a_5 k_4) t_4$$

$$\left|\lambda_2\right| t_2^* = \frac{(a_1 k_1 - a_3 k_2) t_2 + (a_3 k_3 - a_5 k_4) t_4}{\left|\varphi_2\right|}$$

olur. Bu denklemde kısalığın hatırı için

$$b_2 = \frac{(a_1 k_1 - a_3 k_2)}{\left|\varphi_2\right|}, \; b_4 = \frac{(a_3 k_3 - a_5 k_4)}{\left|\varphi_2\right|}$$

alınırsa

$$|\lambda_2| t_2^* = b_2 t_2 + b_4 t_4$$

ve $\lambda_2^2 = b_2^2 + b_4^2$ elde edilir. Böylece (4.63_2) ispatlanmış olur. Yine bu son denklemin s yay parametresine göre türevi alınırsa

$$|\lambda_2|\, f'(s) \left.\frac{dt_2^*}{ds^*}\right|_{s^*=f(s)} = b_2 t_2' + b_4 t_4'$$

bulunur. (4.13) de verilen Frenet formülleri yerine yazılırsa

$$|\lambda_2 \lambda_1 \varphi_1| \left.\frac{dt_2^*}{ds^*}\right|_{s^*=f(s)} = b_2 k_1 t_1 + (b_2 k_2 - b_4 k_3) t_3 + b_4 k_4 t_5 \tag{4.72}$$

elde edilir. $k_2^* = \left\| \left.\frac{dt_2^*}{ds^*}\right|_{s^*=f(s)} + k_1^* t_1^* \right\|$ olduğundan, (4.72) ve (4.63_1) denklemleri kullanılarak

$$k_2^* = \frac{1}{|\lambda_2 \lambda_1 \varphi_1|} \sqrt{\left| -\left(b_2 k_1 - a_1 \left(\frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2} \right) |\varphi_2| \right)^2 + \left((b_2 k_2 - b_4 k_3) - a_3 \left(\frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2} \right) |\varphi_2| \right)^2 + \left(b_4 k_4 - a_5 \left(\frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2} \right) |\varphi_2| \right)^2 \right|}$$

olur. Yine kısalığın hatırı için

$$\sqrt{\left| -\left(b_2 k_1 - a_1 \left(\frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2} \right) |\varphi_2| \right)^2 + \left((b_2 k_2 - b_4 k_3) - a_3 \left(\frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2} \right) |\varphi_2| \right)^2 + \left(b_4 k_4 - a_5 \left(\frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2} \right) |\varphi_2| \right)^2 \right|} = |\lambda_3 \varphi_3|$$

alınırsa r^* timelike eğrisinin ikinci eğriliği

$$k_2^* = \left| \frac{\lambda_3 \varphi_3}{\lambda_2 \lambda_1 \varphi_1} \right| \tag{4.73}$$

bulunur. Böylece (4.72) denklemi, k_2^* ve (4.14) Frenet formülü yardımıyla

$$|\lambda_2 \lambda_1 \varphi_1| \left(\left| \frac{\lambda_2 \varphi_2}{\lambda_1 \lambda_1 \varphi_1} \right| \right) t_1^* + |\lambda_2 \lambda_1 \varphi_1| k_2^* t_3^* = b_2 k_1 t_1 + (b_2 k_2 - b_4 k_3) t_3 + b_4 k_4 t_5$$

şeklinde olur. Denklem düzenlenirse

$$|\lambda_3|t_3^* = \frac{\left(b_2k_1 - a_1\left(\frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2}\right)|\varphi_2|\right)t_1 + \left((b_2k_2 - b_4k_3) - a_3\left(\frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2}\right)|\varphi_2|\right)t_3 + \left(b_4k_4 - a_5\left(\frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2}\right)|\varphi_2|\right)t_5}{|\varphi_3|}$$

olur. Eğer

$$\frac{b_2k_1 - a_1\left(\frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2}\right)|\varphi_2|}{|\varphi_3|} = c_1,\ \frac{(b_2k_2 - b_4k_3) - a_3\left(\frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2}\right)|\varphi_2|}{|\varphi_3|} = c_3,\ \frac{\left(b_4k_4 - a_5\left(\frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2}\right)|\varphi_2|\right)}{|\varphi_3|} = c_5$$

alınırsa

$$|\lambda_3|t_3^* = c_1t_1 + c_3t_3 + c_5t_5$$

olur ve buradan da $\lambda_3^2 = \left|-c_1^2 + c_3^2 + c_5^2\right|$ bulunur. Yani (4.63_3) ispatlanmış olur. Şimdi de (4.63_3) denklemin s yay parametresine göre türevi alınırsa

$$|\lambda_3|\, f'(s)\left.\frac{dt_3^*}{ds^*}\right|_{s^*=f(s)} = c_1t_1' + c_3t_3' + c_5t_5'$$

bulunur. (4.13) de verilen Frenet formülleri yerine yazılırsa

$$|\lambda_3\lambda_1\varphi_1|\left.\frac{dt_3^*}{ds^*}\right|_{s^*=f(s)} = (c_1k_1 - c_3k_2)t_2 + (c_3k_3 - c_5k_4)t_4 \tag{4.74}$$

elde edilir. $k_3^* = \left\|\left.\frac{dt_3^*}{ds^*}\right|_{s^*=f(s)} + k_2^*t_2^*\right\|$ denkleminde, (4.63_2) ve (4.74) denklemleri kullanılarak

$$k_3^* = \frac{1}{|\lambda_3\lambda_1\varphi_1|}\sqrt{\left|\left(c_1k_1 - c_3k_2 + b_2\left(\frac{\lambda_3^2}{\lambda_2^2}\right)|\varphi_3|\right)^2 + \left(c_3k_3 - c_5k_4 + b_4\left(\frac{\lambda_3^2}{\lambda_2^2}\right)|\varphi_3|\right)^2\right|}$$

bulunur. Kısalığın hatırı için

$$\sqrt{\left(c_1k_1-c_3k_2+b_2\left(\frac{\lambda_3^2}{\lambda_2^2}\right)|\varphi_3|\right)^2+\left(c_3k_3-c_5k_4+b_4\left(\frac{\lambda_3^2}{\lambda_2^2}\right)|\varphi_3|\right)^2}=|\lambda_4\varphi_4|$$

alınırsa r^* timelike eğrisinin üçüncü eğriliği

$$k_3^*=\left|\frac{\lambda_4\varphi_4}{\lambda_3\lambda_1\varphi_1}\right| \tag{4.75}$$

olur. Bu durumda (4.74) denkleminde gerekli düzenlemeler yapılıp k_3^* ve (4.14) Frenet formülü yerine yazılırsa

$$|\lambda_4\varphi_4|t_4^*=(c_1k_1-c_3k_2)t_2+(c_3k_3-c_5k_4)t_4+\left(b_2t_2+b_4t_4\right)\left(\frac{\lambda_3^2}{\lambda_2^2}\right)|\varphi_3|$$

$$|\lambda_4|t_4^*=\frac{\left(c_1k_1-c_3k_2+b_2\left(\frac{\lambda_3^2}{\lambda_2^2}\right)|\varphi_3|\right)t_2+\left(c_3k_3-c_5k_4+b_4\left(\frac{\lambda_3^2}{\lambda_2^2}\right)|\varphi_3|\right)t_4}{|\varphi_4|}$$

olur. Burada

$$d_2=\frac{\left(c_1k_1-c_3k_2+b_2\left(\frac{\lambda_3^2}{\lambda_2^2}\right)|\varphi_3|\right)}{|\varphi_4|},\quad d_4=\frac{\left(c_3k_3-c_5k_4+b_4\left(\frac{\lambda_3^2}{\lambda_2^2}\right)|\varphi_3|\right)}{|\varphi_4|}$$

alınırsa

$$|\lambda_4|t_4^*=d_2t_2+d_4t_4$$

ve $\lambda_4^2=d_2^2+d_4^2$ olur. (4.63_4) ispatlanmış olur. Son olarak (4.63_4) denkleminin s yay parametresine göre türevi alınırsa

$$|\lambda_4|\,f'(s)\left.\frac{dt_4^*}{ds^*}\right|_{s^*=f(s)}=d_2t_2'+d_4t_4'$$

$$|\lambda_4\lambda_1\varphi_1|\left.\frac{dt_4^*}{ds^*}\right|_{s^*=f(s)}=d_2t_2'+d_4t_4' \tag{4.76}$$

olur. $k_4^* = \left\| \left\| \dfrac{dt_4^*}{ds^*} \right|_{s^*=f(s)} + k_3^* t_3^* \right\|$ denkleminde (4.63$_3$) ve (4.76) denklemleri kullanılarak

$$k_4^* = \frac{1}{|\lambda_4 \lambda_1 \varphi_1|} \sqrt{\left| -\left(d_2 k_1 t_1 + c_1 \left(\frac{\lambda_4^2}{\lambda_3^2} \right) |\varphi_4| \right)^2 + \left(d_2 k_2 - d_4 k_3 + c_3 \left(\frac{\lambda_4^2}{\lambda_3^2} \right) |\varphi_4| \right)^2 + \left(d_4 k_4 + c_5 \left(\frac{\lambda_4^2}{\lambda_3^2} \right) |\varphi_4| \right)^2 \right|}$$

olur. Kısalığın hatırı için

$$\sqrt{\left| -\left(d_2 k_1 t_1 + c_1 \left(\frac{\lambda_4^2}{\lambda_3^2} \right) |\varphi_4| \right)^2 + \left(d_2 k_2 - d_4 k_3 + c_3 \left(\frac{\lambda_4^2}{\lambda_3^2} \right) |\varphi_4| \right)^2 + \left(d_4 k_4 + c_5 \left(\frac{\lambda_4^2}{\lambda_3^2} \right) |\varphi_4| \right)^2 \right|} = |\lambda_5 \varphi_5|$$

denirse r^* timelike eğrisinin dördüncü eğriliği

$$k_4^* = \left| \frac{\lambda_5 \varphi_5}{\lambda_4 \lambda_1 \varphi_1} \right| \tag{4.77}$$

olur. Böylece (4.76) denklemi, k_4^* ve (4.14) Frenet formülleri yardımıyla

$$-\left(c_1 t_1 + c_3 t_3 + c_5 t_5 \right) \left(\frac{\lambda_4^2}{\lambda_3^2} \right) |\varphi_4| + |\lambda_5 \varphi_5| t_5^* = d_2 t_2' + d_4 t_4'$$

olur. Bu son denklemde gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$|\lambda_5 \varphi_5| t_5^* = d_2 k_1 t_1 + (d_2 k_2 - d_4 k_3) t_3 + d_4 k_4 t_5 + \left(c_1 t_1 + c_3 t_3 + c_5 t_5 \right) \left(\frac{\lambda_4^2}{\lambda_3^2} \right) |\varphi_4|$$

$$|\lambda_5| t_5^* = \frac{\left(d_2 k_1 + c_1 \left(\frac{\lambda_4^2}{\lambda_3^2} \right) |\varphi_4| \right) t_1 + \left(d_2 k_2 - d_4 k_3 + c_3 \left(\frac{\lambda_4^2}{\lambda_3^2} \right) |\varphi_4| \right) t_3 + \left(d_4 k_4 + c_5 \left(\frac{\lambda_4^2}{\lambda_3^2} \right) |\varphi_4| \right) t_5}{|\varphi_5|}$$

olur. Eğer

$$e_1 = \frac{d_2 k_1 + c_1 \left(\frac{\lambda_4^2}{\lambda_3^2} \right) |\varphi_4|}{|\varphi_5|}, \quad e_3 = \frac{d_2 k_2 - d_4 k_3 + c_3 \left(\frac{\lambda_4^2}{\lambda_3^2} \right) |\varphi_4|}{|\varphi_5|}, \quad e_5 = \frac{d_4 k_4 + c_5 \left(\frac{\lambda_4^2}{\lambda_3^2} \right) |\varphi_4|}{|\varphi_5|}$$

alınırsa

$$|\lambda_5| t_5^* = e_1 t_1 + e_3 t_3 + e_5 t_5$$

ve $\lambda_5^2 = \left| -e_1^2 + e_3^2 + e_5^2 \right|$ olur. Buradan (4.63_5) ın ispatlandığı görülür.

Böylece (4.71), (4.73), (4.75) ve (4.77) denklemlerinden r eğrisinin Bertrand eşleği r^* eğrisinin v. eğriliği

$$k_v^* = \left| \frac{\lambda_{v+1} \varphi_{v+1}}{\lambda_v \lambda_1 \varphi_1} \right|, \quad 2 \le v \le 4$$

olduğu görülür.

BÖLÜM 5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Z.,NÁDENÍK tarafından [8] de 5-boyutlu Öklid uzayında Bertrand eğrisinin tanımı alışılmışın dışında yapılarak genelleştirilmiştir öyle ki 5-boyutlu Öklid uzayında eğrilikleri sıfırdan farklı iki eğrinin yay uzunlukları arasında birebir ve örten bir bağıntı varsa ve bu eğrilerin Frenet 5 ayaklı çifti Öklid hareket gruplarına göre invaryant hacimler oluşturuyorsa bu eğri çiftine Bertrand eğri çifti olarak tanımlanmıştır.

Bu çalışmada, bu tanım göz önüne alınarak $\mathbb{R}_1^5$, 5-boyutlu Lorentz uzayında timelike Bertrand eğri çifti tarafımızdan tanımlanmış ve timelike Bertrand çiftleri için bir genel karakterizasyon elde edilmiştir. Ayrıca bu uzayda bazı özel timelike Bertrand eğri çiftleri tanımlanarak karakterizasyonları elde edilmiştir.

Bu çalışmada elde edilen teorem ve sonuçlar $\mathbb{R}_1^5$, 5-boyutlu Lorentz uzayında spacelike Bertrand eğri çifti için de araştırılabilir.

KAYNAKLAR

[1] BALGETİR, H., BEKTAŞ, M., ERGÜT, M., *"Bertrand Curves for Nonnull Curves in 3-Dimensional Lorentzian Space"*, Hadronic Journal, 27, 2004.

[2] BALGETİR, H., BEKTAŞ, M., INOGUCHI, J., *"Null Bertrand curves in Minkowski 3-space and their characterizations."* Note Math. 23 no. 1, 2004.

[3] ERDOĞAN, N., "*Bertrand Eğri Çiftleri Üzerine Genelleştirmeler* ", Gazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, Ankara, 1986.

[4] TANRIÖVER, N.,*"Bertrand Curves in n-dimensional Euclidian Space"* Journal of Karadeniz University, Faculty of Arts and Sciences, Series of Mathematics-Physics, Volume IX, Trabzon, 1986.

[5] TANRIÖVER, N, SABUNCUOĞLU, A., *"On Bertrand Curves in n-dimensional Euclidean Space"*, Gazi Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik-İstatistik Dergisi, Volume 2, Ankara, 1989.

[6] GÖRGÜLÜ, A., ÖZDAMAR, E.,"*A generalization of the Bertrand curve as general inclined curve in* E^n", Commun. Fac. Sci. Univ. Ank., Series A_1, v. 35, 1986.

[7] EKMEKCI, N.; İLARSLAN, K. "*On Bertrand curves and their characterization*", Differ. Geom. Dyn. Syst.(electronic), Vol.3, no.2, 2001.

[8] NÁDENÍK, Z., "*Кривые Бертрана в пятимерном пространстве*." (Russian) , Czechoslovak Mathematical Journal, vol. 2, issue 1, 1952.

[9] HACISALİHOĞLU, H. H., "*Diferensiyel Geometri*", İnönü Üniversitesi, Fen-Edeb. Fakültesi, 1983.

[10] HACISALİHOĞLU, H. H., "Yüksek Boyutlu Uzaylarda Dönüşümler ve Geometriler ", İnönü Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, 1980.

[11] UYAN, L., "*Yüksek Boyutlu Uzaylarda Bertrand eğri çiftleri*", Yüksek Lisans Tezi, Ankara, 1978.

[12] O'NEILL, B., "*Semi-Riemannian Geometry*", Academic Press, New York 1983.

[13] EKMEKÇİ, N., "*Lorentz Manifoldlari Üzerinde Eğilim Çizgileri*", Ankara Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktora Tezi, Ankara, 1991.

ÖZGEÇMİŞ

Abdullah İNALCIK, 17.02.1986 tarihinde Erzurum'un Aşkale ilçesinde doğdu. İlköğrenimini Erzurum da Vali Vefik Kitapçıgil İlkokulunda, orta ve lise öğrenimini Erzurum Anadolu Lisesinde tamamladı. 2004 yılında Uludağ Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik bölümünde başladığı lisans eğitimini 2008 yılında tamamladı ve aynı yıl Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünde yüksek lisans eğitimine başladı.