

T.C.  
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**GATEAUX VE FRECHET TÜREVLERİ VE  
UYGULAMALARI**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**Muhammed Abdussamed MALDAR**

**Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK**

**Tez Danışmanı : Yrd. Doç. Dr.  
Mustafa ERÖZ**

**HAZİRAN 2010**

T.C.  
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**GATEAUX VE FRECHET TÜREVLERİ VE  
UYGULAMALARI**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**Muhammed Abdussamed MALDAR**

Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK

Bu tez. 02/ 06 /2010 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Oybirliği ile kabul edilmiştir.

Yrd. Doç. Dr. Mustafa ERÖZ Doç. Dr. Mehmet ÖZEN Yrd. Doç. Dr. Sıtkı DUMAN

Jüri Başkanı

Üye

Üye

## **TEŞEKKÜR**

Yüksek lisans çalışmalarım boyunca, bana danışmanlık yaparak, beni yönlendiren ve her türlü olanağı sağlayan danışmanım Yrd. Doç. Dr. Mustafa Eröz'e, değerli fikirlerine başvurduğum hocam Prof. Dr. Abdullah Yıldız'a, desteklerini her zaman hissettiren çalışma arkadaşlarıma ve aileme teşekkürlerimi sunarım.

## İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR.....	ii
İÇİNDEKİLER .....	iii
SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ.....	v
ŞEKİLLER LİSTESİ .....	vi
TABLolar LİSTESİ.....	viii
ÖZET.....	ix
SUMMARY.....	x
BÖLÜM 1.	
GİRİŞ.....	1
BÖLÜM 2.	
TEMEL KAVRAM VE TANIMLAR.....	2
2.1. Normlu Uzay.....	2
2.1.1. Cauchy dizisi.....	2
2.1.2. Banach uzayı.....	2
2.2. Lineer Operatör .....	3
2.3. Lipschitz Koşulu.....	3
BÖLÜM 3.	
FRECHET VE GATEAUX TÜREVİ.....	4
3.1. Lineer Olmayan Operatörlerin Frechet Türevi.....	4
3.2. Gateaux Türevi.....	8
BÖLÜM 4.	
NONLİNEER OPERATÖRLERDE NEWTON YÖNTEMİ.....	19
4.1. Newton Yöntemi.....	19

## BÖLÜM 5.

### NONLİNEER DİFERANSİYEL OPERATÖRLERDE NEWTON

YÖNTEMİNİN UYGULAMASI.....	32
5.1. Riccati Diferansiyel Denklemleri.....	32
5.2. Duffing Diferansiyel Denklemleri.....	45
5.3. Başlangıç Değer Problemi.....	47
5.4. Sınır Değer Problemi.....	50

## BÖLÜM 6.

SONUÇLAR VE ÖNERİLER.....	53
KAYNAKLAR.....	54
EKLER.....	55
ÖZGEÇMİŞ.....	62

## SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

$\mathbb{C}[a, b]$	: $[a, b] \subset \mathbb{R}$ üzerinde sürekli fonksiyonlar kümesi
$B_r(x_0)$	: $x_0$ merkezli $r$ yarıçaplı açık yuvar
$\ A\ $	: $A$ nın normu
$D(A)$	: $A$ operatörünün tanım kümesi
$F'$	: $F$ nin Frechet Türevi
$\mathcal{F}$	: $\mathcal{F}$ skaler cismi
$(X, \ \cdot\ )$	: $X$ Normlu uzayı
$\overline{B}_r(x_0)$	: $x_0$ merkezli $r$ yarıçaplı kapalı yuvar
$L(X, Y)$	: $X$ den $Y$ ye sınırlı lineer operatör kümesi
$\ f\ $	: $f$ fonksiyonelinin normu
$DT$	: $T$ nin Gateaux türevi

## ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 5.3. Gerçek çözüm .....	38
Şekil 5.4. Birinci yaklaşımın sonucunda elde edilen grafik .....	38
Şekil 5.5. İkinci yaklaşımın sonucunda elde edilen grafik.....	38
Şekil 5.6. Üçüncü yaklaşımın sonucunda elde edilen grafik .....	39
Şekil 5.7. Dördüncü yaklaşımın sonucunda elde edilen grafik .....	39
Şekil 5.8. Beşinci yaklaşımın sonucunda elde edilen grafik.....	39
Şekil 5.9. Altıncı yaklaşımın sonucunda elde edilen grafik.....	40
Şekil 5.10. Yedinci yaklaşımın sonucunda elde edilen grafik .....	40
Şekil 5.11. Sekizinci yaklaşımın sonucunda elde edilen grafik .....	40
Şekil 5.12. Dokuzuncu yaklaşımın sonucunda elde edilen grafik .....	41
Şekil 5.13. Dokuzuncu yaklaşım ile gerçek çözümün mutlak farkı.....	41
Şekil 5.14. Birinci yaklaşımın sonucunda elde edilen grafik.....	41
Şekil 5.15. İkinci yaklaşımın sonucunda elde edilen grafik.....	42
Şekil 5.16. Üçüncü yaklaşımın sonucunda elde edilen grafik .....	42
Şekil 5.17. Dördüncü yaklaşımın sonucunda elde edilen grafik.....	42
Şekil 5.18. Beşinci yaklaşımın sonucunda elde edilen grafik.....	43
Şekil 5.19. Altıncı yaklaşımın sonucunda elde edilen grafik.....	43
Şekil 5.20. Yedinci yaklaşımın sonucunda elde edilen grafik .....	43
Şekil 5.21. Sekizinci yaklaşımın sonucunda elde edilen grafik .....	44
Şekil 5.22. Dokuzuncu yaklaşımın sonucunda elde edilen grafik .....	44
Şekil 5.23. Dokuzuncu yaklaşım ile gerçek çözümün mutlak farkı.....	44
Şekil 5.24. Mathematica çözümü ile başlangıç fonksiyonun grafikleri .....	46
Şekil 5.25. Mathematica çözümü ile birinci yaklaşımın mutlak farkının grafiği.....	46
Şekil 5.26. Mathematica çözümü ile üçüncü yaklaşımın mutlak farkının grafiği .....	46
Şekil 5.27. Mathematica çözümünün grafiği .....	49
Şekil 5.28. Birinci yaklaşımın mutlak hatasının grafiği.....	49
Şekil 5.29. Üçüncü yaklaşımın mutlak hatalarının grafiği.....	50

Şekil 5.30. Gerçek çözümün grafiği.....	51
Şekil 5.31. Birinci yaklaşım ile gerçek çözümün mutlak farkının grafiği .....	51
Şekil 5.32. Üçüncü yaklaşım ile gerçek çözümün mutlak farkının grafiği.....	52



## TABLÖLAR LİSTESİ

Tablo 5.1.	Hata analizi.....	36
Tablo 5.2.	Hata analizi.....	37

## ÖZET

Anahtar kelimeler: Yaklaşık Çözüm, Newton Metodu, Frechet Türevi, Gateaux Türevi

Bu çalışmada Lineer olmayan operatör denklemlerin yaklaşık çözümünde Newton metodu kullanımı incelenmiştir.

Birinci bölümde Newton metodunun gelişimi kısaca verilmiş olup, ikinci bölümde, bazı temel matematik kavramları açıklanmıştır. Lineer ve lineer olmayan operatörler, Lipschitz koşulu, Banach uzayları, operatör denklem ve çözümü gibi konular bunlardan bazılarıdır.

Üçüncü bölümde, Newton metodunda kullanılacak fonksiyonların türev alma işlemleri için gerekli olan Frechet ve Gateaux türevleri ile ilgili ayrıntılı bir bilgi verilmiştir.

Newton metodunun lineer olmayan diferansiyel denklemlere ve lineer olmayan denklem sistemlerine uygulanması anlatılmıştır. Çeşitli örnekler verilerek teorik ve pratik sonuçlar sergilenmiştir.

Ayrıca ekler kısmında Newton metodu ile çözümün paket programları mevcuttur.

# **GATEAUX AND FRECHET DERIVATIVES AND THEIR APPLICATIONS**

## **SUMMARY**

Keywords: Approximate solution, Newton method, Frechet derivative, Gateaux derivative.

In this thesis, the use of Newton Method in the approximate solution of the nonlinear operator equations is investigated.

In the first chapter, a brief history of Newton method is given. Some basic mathematical concepts are given in the second chapter. Some of them can be listed as linear and nonlinear operators, Lipschitz condition, Banach space, operator equation and its solution.

In the third chapter, detailed information about the Frechet and Gateaux derivatives which are necessary for differentiating the functionals that used in Newton method is presented.

In the following chapter, the application of Newton method to the nonlinear differential equations and the nonlinear equation systems is explained. Additionally, by giving some examples, theoretical and practical results are displayed in the last chapter.

Also, the packet programs of the solutions obtained by Newton method are taken place in the appendices.

## BÖLÜM 1. GİRİŞ

Günümüzde lineer olmayan operatör denklemlerin çözümlenmesi en çok üzerinde çalışılan konulardan biridir. Lineer olmayan bir operatöre lineer bir yaklaşım yapmakta bu çalışmaların bir parçasıdır.

Yöntem  $y = f(x)$  gibi reel fonksiyonun  $f(x) = 0$  denklemini sağlayan köklerini bulmak için bir ardışık yaklaşımlar yöntemi Newton (1643-1727) tarafından ileri sürülmüş ve bu yöntem Raphson (1648-1715) tarafından geliştirilmiştir. Bu nedenle bu yönteme Newton-Rapson yöntemi adı verilir. Newton-Rapson yöntemini operatör denklemlerin çözümüne genişleten ve yakınsama kriterlerini belirleyen Kantorovich (1912-1986) olmuştur. Operatör denklemlerin çözümüne genişletilmiş hali ile bu yönteme Newton(-Kantorovich) yöntemi adı verilir.

Newton yönteminin kullanılabilmesi için yeni bir kavram olan “operatörün türevi” ne ihtiyaç duyulmaktadır. Operatörlerin Frechet türevi, bu işi yapan önemli bir kavramdır. Lineer olmayan operatör denklemlerin çözümlerinin ardışık yaklaşım yoluyla belirlenmesinde Newton yöntemi önemli bir yer tutmaktadır. Bu çalışmada Newton yönteminin bazı yakınsama kriterleri ile metodu detaylı olarak anlatılmış teori ve uygulamaları birlikte sergilenmiştir.

## BÖLÜM 2. TEMEL KAVRAM VE TANIMLAR

### 2.1. Normlu Uzay

$\mathcal{F}$  bir skaler cisim olmak üzere, Reel veya kompleks  $X$  vektör uzayı üzerinde tanımlı reel değerli  $\|\cdot\|: X \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu her  $x, y \in X$  ve her  $\alpha \in \mathcal{F}$  için

$$N1) \|x\| \geq 0$$

$$N2) \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$$

$$N3) \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$$

$$N4) \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

koşullarını sağlıyorsa  $X$  üzerinde bir norm adını alır.  $(X, \|\cdot\|)$  ikilisine de normlu uzay adı verilir [1].

#### 2.1.1. Cauchy Dizisi

$(X, \|\cdot\|)$  normlu uzayında bir  $(x_n)$  dizisi verilsin. Her  $\varepsilon > 0$  sayısı için  $m, n > N_\varepsilon$  iken  $\|x_m - x_n\| < \varepsilon$  koşulunu sağlayan bir  $N_\varepsilon$  doğal sayısı belirlenebiliyorsa  $(x_n)$  dizisine  $X$  normlu uzayında bir Cauchy dizisi denir [1].

#### 2.1.2. Banach Uzayı

$(X, \|\cdot\|)$  normlu lineer uzayı, normun indirgediği metriğe göre tam uzay ise, Banach uzayı adını alır [1].

## 2.2. Lineer Operatörler

$\mathcal{F}$  skalerler cismi üzerinde tanımlanmış  $U$  ve  $V$  vektör uzayları olmak üzere  $F:U \rightarrow V$  fonksiyonu

$$i) \forall u_1, u_2 \in U, F(u_1 + u_2) = F(u_1) + F(u_2)$$

$$ii) \forall u \in U \text{ ve } \forall \alpha \in \mathcal{F}, F(\alpha u) = \alpha F(u)$$

koşullarını gerçekliyorsa bir lineer dönüşüm ya da lineer operatör denir [1].

(i) ve (ii) koşullarını birleştirerek bir  $F:U \rightarrow V$  fonksiyonunun ancak ve ancak her  $\forall u_1, u_2 \in U$  ve her  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{F}$  için  $F(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2) = \alpha_1 F(u_1) + \alpha_2 F(u_2)$  koşulunu sağlarsa lineer olur [1].

## 2.3. Lipschitz Koşulu

Bir  $f(x)$  fonksiyonuna,  $x_0$  noktasının herhangi komşuluğundaki her  $x$  için

$$\|f(x) - f(x_0)\| \leq k \|x - x_0\|, k > 0$$

$k$  sabiti varsa,  $x_0$  noktasında Lipschitz koşulunu sağlıyor denir [1].

## BÖLÜM 3. FRECHET VE GATEAUX TÜREV

### 3.1. Lineer Olmayan Operatörlerin Frechet Türevi

Lineer olmayan fonksiyonel denklemlerin (cebirsel, integral, diferansiyel v.b.) incelenmesi uygun lineer olmayan operatörlerin yerel olarak lineer operatörlere yaklaşımı yardımıyla yapılabilir. Bu nedenle normlu uzaylarda lineer olmayan operatörlerin diferansiyel hesabının araştırılması önemlidir [2].

Bir  $f : (a,b) \rightarrow R$  fonksiyonunun herhangi bir  $x_0 \in (a,b)$  noktasında türeve sahip olması

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0) \quad (3.1)$$

eşitliğini sağlayan bir  $f'(x_0)$  reel sayısının varlığı demektir. Bu eşitliğin genel olarak  $X$  ve  $Y$  Banach uzayları olmak üzere  $f : X \rightarrow Y$  şeklindeki operatörler için bir anlamı yoktur. Ancak uygun ifade değişikliği ile bu eşitliğe genel durumda anlam kazandırılabilir.  $\lambda(h) = f'(x_0)h$  şeklinde tanımlanan  $\lambda : R \rightarrow R$  lineer dönüşümü için (3.1) eşitliği

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - \lambda(h)}{h} = 0 \quad (3.2)$$

eşitliğine denk olur [2].

(3.2) eşitliği,  $f(x_0) + \lambda(h)$  fonksiyonunun  $x_0$  noktası komşuluğunda  $f(x_0 + h)$  ifadesine çok iyi yaklaşan bir fonksiyon olduğu şeklinde yorumlanabilir.  $\lambda : R \rightarrow R$  lineer dönüşümü dikkate alınıp, türev tanımı yeniden formüle edilebilir [2].

Bir  $f : (a, b) \rightarrow R$  fonksiyonunun bir  $x_0 \in (a, b)$  noktasında türeve sahip olması demek

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - \lambda(h)}{h} = 0$$

eşitliğini sağlayacak şekilde bir  $\lambda : R \rightarrow R$  lineer dönüşümünün var olması demektir.  $x = x_0 + h$  ve  $\omega(x) = f(x) - f(x_0) - \lambda(x - x_0)$  denirse  $f : (a, b) \rightarrow R$  fonksiyonunun bir  $x_0 \in (a, b)$  noktasındaki türev kavramının şu şekilde denk ifadesi de verilebilir:

$f : (a, b) \rightarrow R$  fonksiyonunun  $x_0 \in (a, b)$  noktasında türevlenebilir olması demek

$$f(x) = f(x_0) + \lambda(x - x_0) + \omega(x), \quad x \in (a, b)$$

olacak şekilde bir  $\lambda : R \rightarrow R$  lineer dönüşümünün ve

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\omega(x)}{x - x_0} = 0$$

veya

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{|\omega(x)|}{|x - x_0|} = 0$$

koşulunu sağlayan bir  $\omega : (a, b) \rightarrow R$  fonksiyonunun var olması demektir [2].

Bu şekilde tanım  $X$  ve  $Y$  Banach uzayları olmak üzere  $F : X \rightarrow Y$  operatörleri içinde kolayca genelleştirilebilir.



### 3.1.1. Tanım

$X$  ve  $Y$  Banach uzayları ve lineer olmayan  $F : D \subset X \rightarrow Y$  operatörü verilmiş olsun. Eğer  $\forall x_0 \in \overset{\circ}{D}$  için

$$F(x) = F(x_0) + A(x - x_0) + \omega(x - x_0) \quad (3.3)$$

koşulunu sağlayan  $A \in L(X, Y)$  operatörü ve

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\|\omega(x - x_0)\|}{\|x - x_0\|} = 0 \quad (3.4)$$

olacak şekilde  $\omega : D \rightarrow Y$  operatörü varsa,  $F(x)$  operatörüne  $x_0 \in \overset{\circ}{D}$  noktasında Frechet türevlenebilir (F- türevlenebilir) denir [2].

(3.3) eşitliğindeki  $A$  operatörüne  $F(x)$  operatörünün  $x_0$  noktasında Frechet türevi (F-türevi) denir ve  $F'(x_0)$  veya  $DF(x_0)$  ile gösterilir.  $x - x_0 = h$  alınırsa (3.3) ve (3.4) eşitlikleri sırasıyla

$$F(x_0 + h) - F(x_0) = F'(x_0)h + \omega(h) \quad (3.5)$$

ve

$$\lim_{h \rightarrow \theta} \frac{\|\omega(h)\|}{\|h\|} = 0 \quad (3.6)$$

şeklinde yazılabilir [2].

### 3.1.2. Örnek

$F(\vec{x}) = D \rightarrow \mathbb{R}^2$ ;  $D \subset \mathbb{R}^3$   $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$  olmak üzere

$$F(x) = (x_1 + x_2^2 + x_3^3, x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2)$$

operatörü verilsin.  $F$  operatörünün  $\vec{x}_0 = (1,1,1)$  noktasındaki Frechet türevini hesaplayınız.

#### Çözüm:

$h = (h_1, h_2, h_3)$ ,  $x+h \in D$   $F(x) = (F_1(x), F_2(x))$  olsun. O halde

$$\begin{aligned} F_1(x+h) - F_1(x) &= (x_1 + h_1) + (x_2 + h_2)^2 + (x_3 + h_3)^3 - (x_1 + x_2^2 + x_3^3) \\ &= h_1 + 2x_2h_2 + h_2^2 + 3x_3^2h_3 + 3x_3h_3^2 + h_3^3 \\ w(h) &= h_2^2 + 3x_3h_3^2 + h_3^3 \end{aligned}$$

elde edilir.  $\|h\| = \sqrt{h_1^2 + h_2^2 + h_3^2}$  olup, küresel koordinatlar kullanılarak yani

$$h_1 = r \sin \phi \cos \theta, h_2 = r \sin \phi \sin \theta, h_3 = r \cos \phi \quad \text{alınıp, } \|h\| \rightarrow 0, \text{ iken } \lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{\|w(h)\|}{\|h\|} = 0$$

da yerlerine yazılıp gerekli işlemler yapılarak istenilen sonuca ulaşılır.  $F_1(x)$  Frechet türevi  $F_1'(x) = h_1 + 2x_2h_2 + 3x_3^2h_3$  dir. Aynı işlemler  $F_2(x)$  içinde yapılırsa

$$\begin{aligned} F_2(x+h) - F_2(x) &= (x_1 + h_1)^2 + (x_1 + h_1)(x_2 + h_2) + (x_2 + h_2)^2 + x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 \\ &= (2x_1 + x_2)h_1 + (x_1 + 2x_2)h_2 + w(h) \\ w(h) &= h_1^2 + h_1h_2 + h_2^2 \end{aligned}$$

elde edilir.  $\|h\| = \sqrt{h_1^2 + h_2^2}$  kutupsal koordinatlar kullanılarak  $h_1 = r \sin \theta$ ,  $h_2 = r \cos \theta$

$\|h\| \rightarrow 0$ , iken  $\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{\|w(h)\|}{\|h\|} = 0$  da yerlerine yazılıp gerekli işlemler yapılarak istenilen

sonuca ulaşılır.  $F$  operatörünün Frechet türevi:

$$F'(x) = \begin{bmatrix} 1 & 2x_2 & 3x_3^2 \\ 2x_1 + x_2 & x_1 + 2x_2 & 0 \end{bmatrix} \text{ ve } F'(x_0) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

### 3.1.3. Örnek

$D \subset \mathbb{R}^n$  bir açık küme  $F: D \rightarrow \mathbb{R}^m$  fonksiyonunun  $x \in D$  noktasında Frechet türevlenebilir olduğunu kabul edelim.  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D$   $F(x) = (F_1(x), \dots, F_m(x))$  operatörü verilmiş olsun.  $F_1(x), \dots, F_m(x)$  fonksiyonlarının  $D$  üzerinde sürekli kimsi türevleri var olsun.  $F: D \rightarrow \mathbb{R}^m$  fonksiyonunun Frechet Türevini bulunuz.

Bu durumda  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D$  ve  $x+h = (x_1+h_1, x_2+h_2, \dots, x_n+h_n)$  noktaları için

$$F(x_1+h_1, \dots, x_n+h_n) - F(x_1, \dots, x_n) = a_{i1}h_1 + \dots + a_{in}h_n + w_i(h), i=1, \dots, m$$

$$w(h) = (w_1(h), \dots, w_m(h)), (h = h_1, \dots, h_n)$$

$$\|h\| = \sqrt{h_1^2 + \dots + h_n^2}, \quad \|h\| \rightarrow 0 \text{ iken } \|w(h)\| = o(\|h\|)$$

$$A = \left( \frac{\partial F_i(x)}{\partial x_j} \right), i=1, \dots, m, j=1, \dots, n$$

elde edilen  $A$  matrisine Jacobi matrisi denir [2].

### 3.2. Gateaux Türevi

$U$  ile  $V$  reel vektör uzayları ve  $V$  normlu uzay olsun.  $[U, V]$ ,  $U$  dan  $V$  ye tüm operatörlerin oluşturduğu kümeyi gösterebiliriz.  $T, T_1, T_2 \in [U, V]$  ise  $T_1 + T_2 \in [U, V]$  ve  $\alpha T \in [U, V]$  operatörlerini her  $u \in U$  için  $(T_1 + T_2)(u) = T_1(u) + T_2(u) \in V$  ve  $(\alpha T)(u) = \alpha T(u) \in V$  şeklinde tanımlansın. Bu kurallarla  $[U, V]$  bir vektör uzayı

olur.  $T \in [U, V]$  olmak üzere  $D(T) = \Omega \subseteq U$  tanım bölgesi bir açık küme olsun. Bir  $u \in \Omega$  ile bir  $w \in U$  vektörü için  $t \in \mathbb{R}$  olmak üzere  $u + tw \in \Omega$  koşulu sağlansın.

$$DT(u)(w) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{T(u + tw) - T(u)}{t} \quad (3.7)$$

limiti varsa  $DT(u)(w) \in V$  vektörüne  $T$  operatörünün  $u$  vektöründeki  $w$  vektörü doğrultusunda Gateaux türevi veya diferansiyeli adı verilir ve limitin varlığı durumunda  $T$  nin  $u$  da  $w$  doğrultusunda Gateaux türetilebilir olduğu söylenir.  $T$  operatörü  $u$  da her doğrultuda Gateaux türetilebilirse  $u$  vektöründe Gateaux türetilebilir denir. Bu durumda her  $w \in U$  vektörüne  $DT(u)(w) \in V$  vektörünü karşı getiren  $DT(u): U \rightarrow V$  operatörü  $T$  nin  $u$  vektöründeki Gateaux türevi adını alır.  $u \in U$  vektörüne  $DT(u) \in [U, V]$  operatörünü bağlayan  $DT: U \rightarrow [U, V]$  operatörü de  $T$  nin Gateaux türevi olarak adlandırılır. (3.7) limiti her  $\varepsilon > 0$  için bir  $\tau(\varepsilon; w) > 0$  sayısının  $t < \tau$  alındığında

$$\| \{ [T(u + tw) - T(u)] / t \} - DT(u)(w) \| < \varepsilon$$

sağlanacak şekilde bulunacağını ifade eder.  $\tau = \tau(\varepsilon)$  ise bu limit düzgündür, yani  $w$  doğrultusundan bağımsızdır.  $[U, V]$  genel olarak bir topolojik uzay değildir ve üzerinde bir topoloji tanımlamanın sistematik bir yolu yoktur. Bu nedenle bir operatörün Gateaux türevinin Gateaux türevini alışılmış şekilde tanımlayabilme çoğu zaman mümkün değildir. Bazı yazarlar ancak lineerse  $DT(u)$  operatörünü Gateaux türevi olarak kabul ederler [3].

### 3.2.1. Teorem

$A \in L(U, V)$  olsun.

$$DA(u)(w) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{A(u + tw) - A(u)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{A(u) + tA(w) - A(u)}{t} = Aw$$

çıkar. Dolayısıyla her  $u, w \in U$  için  $DA(u) = A$  bulunur, yani lineerdir [3].

### 3.2.2. Örnek

$T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu  $x = (x_1, x_2)$  olmak üzere

$$T(x) = \begin{cases} \frac{x_1^2 x_2}{x_1^2 + x_2^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

olarak tanımlanmaktadır.  $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  operatörünün  $(0,0)$  noktasında Gateaux türevini bulunuz.

### Çözüm:

$$DT(u)(w) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{T(u + tw) - T(u)}{t}$$

Gateaux türev tanımında yerine yazılırsa,  $w = (\xi_1, \xi_2)$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{T((0,0) + t(\xi_1, \xi_2)) - T(0,0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2 \xi_1^2 t \xi_2}{t(t^2 \xi_1^2 + t^2 \xi_2^2)} = \frac{\xi_1^2 \xi_2}{\xi_1^2 + \xi_2^2}$$

Gateaux türevi elde edilir.

### 3.2.3. Örnek

$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu  $x = (x_1, x_2)$  olmak üzere

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

olarak tanımlanmaktadır. Buna göre sıfır noktasındaki Gateaux türevi

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f((0,0) + t(\xi_1, \xi_2)) - f(0,0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(t\xi_1)(t\xi_2)}{t(t^2\xi_1^2 + t^2\xi_2^2)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\xi_1\xi_2}{t(\xi_1^2 + \xi_2^2)}$$

$$Df(0)(\xi) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \frac{\xi_1\xi_2}{\xi_1^2 + \xi_2^2}$$

olur. Bu türev ancak  $\xi = (\xi_1, 0)$  ve  $\xi = (0, \xi_2)$  doğrultularında vardır ve değeri sıfır olur. Öteki doğrultularda ise türev yoktur [3].

### 3.2.4. Teorem

$T \in [U, V]$  operatörünün bir  $u$  vektöründeki Gateaux türevi homojen bir operatördür [3].

**İspat:**  $\alpha \in \mathbb{R}$  olmak üzere

$$DT(u)(\alpha w) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{T(u + \alpha tw) - T(u)}{t} = \alpha \lim_{t \rightarrow 0} \frac{T(u + \alpha tw) - T(u)}{\alpha t} = \alpha DT(u)(w)$$

### 3.2.5. Teorem

$T \in [U, V]$  olsun ve verilen  $u, w \in U$  vektörleri için  $T$  operatörünün her  $u + t(w - u)$ ,  $0 \leq t \leq 1$  vektöründe  $(w - u)$  vektörü doğrultusunda Gateaux türevi bulunsun. Her  $g \in V'$  sürekli lineer fonksiyoneli ve  $0 \leq \delta \leq 1$  koşulunu sağlayan bir  $\delta$  sayısı için

- i)  $g[T(w) - T(u)] = g\{DT[u + \delta(w - u)](w - u)\}$
- ii)  $\|T(w) - T(u)\| \leq \sup_{0 < \delta < 1} \|DT[u + \delta(w - u)](w - u)\|$

bağıntıları geçerlidir [3].

### 3.2.6. Teorem

$F:U \rightarrow V$  operatörünün  $u_0 \in U$  vektöründe Frechet türevi varsa  $F$  operatörü bu noktada süreklidir [3].

**İspat:**  $F$  nin  $u_0$  da Frechet türevi bulunduğuna göre her  $\varepsilon_1 > 0$  sayısına karşı gelen bir  $\delta(\varepsilon_1) > 0$  sayısı,  $\|u - u_0\| < \delta_1$  olan her  $u \in U$  vektörü için

$$\|F(u) - F(u_0) - F'(u_0)(u - u_0)\| < \varepsilon_1 \|u - u_0\|$$

bağıntısı sağlanacak şekilde bulunabilir.

$$\|F(u) - F(u_0) - F'(u_0)(u - u_0)\| \geq \|F(u) - F(u_0)\| - \|F'(u_0)(u - u_0)\|$$

üçgen eşitsizliğinden yararlanılırsa  $\|u - u_0\| < \delta_1$  için

$$\begin{aligned} \|F(u) - F(u_0)\| &< \varepsilon_1 \|u - u_0\| + \|F'(u_0)(u - u_0)\| \\ &< (\varepsilon_1 + \|F'(u_0)\|) \|u - u_0\| \end{aligned}$$

bulunur. Şimdi her  $\varepsilon > 0$  sayısı için  $\delta(\varepsilon) = \min\{\delta_1, \varepsilon / (\varepsilon_1 + \|F'(u_0)\|)\}$  seçilirse

$\|u - u_0\| < \delta(\varepsilon)$  olan her  $u \in U$  vektörü için

$$\|F(u) - F(u_0)\| < \varepsilon$$

bulunur. Yani  $F$  operatörü  $u_0$  da süreklidir [3].

### 3.2.7. Teorem

$T:U \rightarrow V$  operatörünün  $u_0 \in U$  vektöründe Frechet türevi varsa bu noktada Gateaux türevide vardır ve farklı yolla hesaplanmış bu iki türev birbirine eşittir [3].

**İspat:** Her hangi bir  $0 \neq w \in U$  vektörü ve  $t \in \mathbb{R}$  için  $u = u_0 + tw$  yazılırsa

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\|T(u_0 + tw) - T(u_0) - T'(u_0)tw\|}{|t|\|w\|} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left\| \frac{T(u_0 + tw) - T(u_0)}{t} - T'(u_0)(w) \right\| \frac{1}{\|w\|} \end{aligned}$$

sonucu her  $w \in U$  için  $DT(u_0)(w) = T'(u_0)(w)$  olduğunu gösterir. Dolayısıyla  $DT(u_0) = T'(u_0)$  bulunur. Eğer varsa Frechet türevini

$$T'(u)(w) = \left. \frac{d}{dt} T(u + tw) \right|_{t=0} \quad (3.8)$$

şeklinde yazılabileceği sonucu da çıkarılabilir [3].

### 3.2.8. Teorem

$F:U \rightarrow V$  operatörünün  $u_0 \in U$  vektöründe Gateaux türevi varsa ve  $DF(u_0)$  sınırlı bir lineer operatörse ancak ve ancak

$$DT(u)(w) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{T(u + tw) - T(u)}{t}$$

ile tanımlanan limit,  $\|w\| = 1$  olan her  $w \in U$  vektörü için düzgün olduğu takdirde  $T$  operatörünün  $u_0$  vektöründe  $T'(u_0)$  Frechet türevi de vardır [3].



**İspat:** Frechet türevi varsa limitin düzgündür. Şimdi her  $w \in U$  için Gateaux türevinin var olduğunu kabul edilsin.  $\|w\|=1$  ve  $t \in \mathbb{R}^+$  için  $\Delta u = tw$  yazarsak  $\|\Delta u\| = t$  olur ve

$$DT(u)(w) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{T(u + tw) - T(u)}{t}$$

den

$$DT(u_0)(w) = \lim_{\|\Delta u\| \rightarrow 0} \frac{T(u_0 + \Delta u) - T(u_0)}{\|\Delta u\|}$$

yazılabilir. Öte yandan  $w = \Delta u / \|\Delta u\|$  olduğundan Frechet türevi tanımından hemen  $DT(u_0)(w) = T'(u_0)(w)$  sonucunu verir.  $DT(u_0)$  operatörünün lineer ve sınırlı olduğu kabul edildiğinden bu eşitlik her  $w$  vektörü için geçerlidir ve  $T'(u_0) = DT(u_0)$  operatörü  $u_0$  vektöründeki Frechet türevini gösterir.  $T$  operatörü Frechet türetilebilirse Teorem 3.2.5 (ii) deki önerme

$$\|T(w) - T(u)\| \leq \sup_{0 < \delta < 1} \|T'[u + \delta(w - u)]\| \|w - u\|$$

şeklinde yazılabilir. Bu sonuç ortalama değer teoremi olarak bilinir.

$T: U \rightarrow V$  Frechet türetilebilir bir operatör ve  $S \in B(U, V)$  olsun  $u \in U$  için  $S'(u) = S$  olduğu biliniyor

$$(T - S)(w) - (T - S)(u) = T(w) - T(u) - S(w - u)$$

yazılabileceğine göre ortalama değer teoreminden her  $S \in B(U, V)$  için

$$\|T(w) - T(u) - S(w-u)\| \leq \sup_{0 < \delta < 1} \|(T' - S')[u + \delta(w-u)]\| \|w-u\|$$

veya

$$\|T(w) - T(u) - S(w-u)\| \leq \sup_{0 < \delta < 1} \|T'[u + \delta(w-u)]\| \|w-u\|$$

bulunur. Şimdi  $S = T'(u)$  seçer ve  $w-u = \Delta u$  ile gösterilirse

$$\|T(u + \Delta u) - T(u) - T'(u)\Delta u\| \leq \sup_{0 < \delta < 1} \|T'(u + \delta\Delta u) - T'(u)\| \|\Delta u\|$$

elde edilir. Bu sonuca kalan terimli ortalama değer teoremi adı verilir [3].

### 3.2.9. Teorem

$F : U \rightarrow U$  olsun. Kapalı ve konveks bir  $\Omega \subset U$  alt kümesinin her vektöründe  $T$  nin Frechet türevi varsa ve (i)  $F(\Omega) \subset \Omega$ , (ii)  $\sup_{u \in \Omega} \|F'(u)\| = k$ ,  $0 < k < 1$  özellikleri geçerli ise  $F$  operatörünün  $\Omega$  da tek bir sabit noktası vardır [3].

### 3.2.10. Teorem

$U$  ile  $V$  normlu vektör uzayları ve  $T : U \rightarrow V$  operatörü  $U$  da Gateaux türetilebilir olsun.  $u \in U$  için

i)  $DT(u) : U \rightarrow V$  operatörü  $0$  da sürekli

ii) seçilen her  $w \in U$  vektöründe  $DT(u)(w)$  fonksiyonu  $u$  da sürekli ise  $DT(u)$  sürekli bir lineer operatördür [3].

### 3.2.11. Teorem

$U$  ile  $V$  normlu vektör uzayları  $F:U \rightarrow V$  olsun ve  $DF:U \rightarrow B(U,V)$  Gateaux türevi bulunsun.  $DF$  operatörü  $u \in U$  vektöründe sürekli ise  $F'(u)$  vardır ve  $F'$  operatörü  $u$  vektöründe süreklidir.

**İspat:** Teorem 3.2.5 (i) uyarınca her  $g \in V'$  için  $0 < \delta < 1$  olmak üzere

$$g[F(u+w) - F(u)] = g[DF(u+\delta w)(w)]$$

veya

$$\begin{aligned} g[F(u+w) - F(u) - DF(u)(w)] &= g[DF(u+\delta w)(w) - DF(u)(w)] \\ &= g[\{DF(u+\delta w) - DF(u)\}(w)] \end{aligned}$$

yazılabilir. Belirli  $u, w$  vektörleri için  $z = F(u+w) - F(u) - DF(u)(w)$  alalım ve  $g$  sürekli lineer fonksiyonelini  $\|g\| = 1$ ,  $g(z) = \|z\|$  olacak şekilde seçilir. Dolayısıyla

$$\|F(u+w) - F(u) - DF(u)(w)\| \leq \|DF(u+\delta w) - DF(u)\| \|w\|$$

elde edilir.  $DF(u)$  operatörü  $u$  vektöründe sürekli olduğundan seçilen bir  $\varepsilon > 0$  sayısına karşı gelen bir  $r(\varepsilon) > 0$  sayısı  $\|w\| < r$  olan her  $w \in U$  vektörü için  $\|DF(u+\delta w) - DF(u)\| < \varepsilon$  olacak şekilde bulunabilir ve

$$\|F(u+w) - F(u) - DF(u)(w)\| \leq \varepsilon \|w\|$$

$$\frac{\|F(u+w) - F(u) - DF(u)(w)\|}{\|w\|} < \varepsilon, \quad \|w\| < r$$

yazılabilir. Buna göre  $F'(u) = DF(u)$  olur ve  $DF$  operatörü  $u$  da sürekli olduğundan  $F'$  de  $u$  da sürekli çıkar [3].

### 3.2.12. Zincir kuralı

$U$  bir vektör uzayı,  $V$  ile  $W$  ise normlu vektör uzayları olsun.  $T:U \rightarrow V$  operatörü  $U$  da Gateaux türetilebilir,  $S:V \rightarrow W$  de  $V$  de Frechet türetilebilir ise  $R = S \circ T:U \rightarrow W$  operatörü  $U$  da Gateaux türetilebilir ve  $u \in U$  daki Gateaux türevi

$$DR(u) = S'(T(u)) \circ DT(u)$$

ile verilir.  $U$  da bir normlu uzaysa ve  $T$  operatörü  $U$  da Frechet türetilebilirse  $R$  de Frechet türetilebilir ve Frechet türevi aşağıdaki gibi verilir.

$$R'(u) = S'(T(u)) \circ T'(u) \quad (3.9)$$

Verilmiş  $u, w \in U$  vektörleri için  $V$  uzayında  $v = T(u)$  ve  $\Delta v = T(u + tw) - T(u)$  vektörleri tanımlansın. Buna göre

$$\begin{aligned} \frac{R(u + tw) - R(u)}{t} &= \frac{S'(v)(\Delta v) + S(v)(\Delta v) - S(v) - S'(v)\Delta v}{t} \\ &= S'(v) \left( \frac{T(u + tw) - T(u)}{t} \right) + \frac{S(v + \Delta v) - S(v) - S'(v)\Delta v}{t} \\ &= S'(v) \left( \frac{T(u + tw) - T(u)}{t} \right) + \frac{S(v + \Delta v) - S(v) - S'(v)\Delta v}{\|\Delta v\|} \frac{\|\Delta v\|}{t} \end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi  $\Delta v = tz$ ,  $z \in V$ ,  $z \neq 0$  yazalım. Bu durumda yukarıdaki son satırda ikinci terimin normu

$$\left\| \frac{S(v + tz) - S(v)}{t} - S'(v)z \right\|$$

olur.  $t \rightarrow 0$  limitine geçilirse  $S$  Frechet türetilebilir olduğundan bu vektörün normu, dolayısıyla kendisi sifira gider ve

$$DR(u)(w) = S'(v) \circ DT(u)(w) = S'(T(u)) \circ DT(u)(w)$$

bulunur.  $T$  Frechet türetilebilirse  $DT(u) = T'(u)$  olur ve (3.9) eşitliği çıkar [3].

## BÖLÜM 4. NONLİNEER OPERATÖRLERDE NEWTON YÖNTEMİ

### 4.1. Newton Yöntemi

$U$  ve  $V$  Banach uzayları,  $\Omega \subseteq U$  açık alt bir küme ve  $F: \Omega \rightarrow V$  bir nonlineer operatör olsun.  $\Omega$  da  $F$  yi sıfırlayan bir  $u^*$  vektörünün, yani  $F(u^*) = 0$  denklemini sağlayan bir kökün bulunduğu kabul edilsin. Keyfi bir  $u_0 \in \Omega$  vektörü seçilir.  $\Omega$  da  $F$  operatörü sürekli olarak Frechet-türetilebilirse  $F(u_0) = F(u_0) - F(u^*)$  vektörünün  $F'(u_0)(u_0 - u^*)$  vektörüne yaklaşık olarak eşit olacağı düşünülebilir. Dolayısıyla

$$F'(u_0)(u_0 - u) = F(u_0) \quad (4.1)$$

lineer denklemin çözümünün  $u^*$  vektörüne yakın olmasını beklenir.  $F'(u_0)$  lineer operatörünün tersi varsa (4.1) denkleminin çözümü  $u_1 = u_0 - [F'(u_0)]^{-1}(F(u_0))$  şeklinde elde edilir. Şimdi (4.1) de  $u_0$  yerine  $u_1$  vektörünü alarak işlemi tekrar edilirse

$$u_{n+1} = u_n - [F'(u_n)]^{-1}(F(u_n)) \quad , n=0,1,\dots \quad (4.2)$$

bağıntısı ile belirlenen bir  $\{u_n\}$  dizisi elde edilir. Her  $u_n$  vektörü  $F(u_0) = 0$  denkleminin bir yaklaşık çözümü olmakla birlikte buradaki amaç  $n$  büyüdükçe gerçek köke daha yakın çözümler elde etmek olacaktır. Bir  $\{u_n\}$  dizisini bu yaklaşımla üretme Newton yöntemi olarak bilinir. Görülüyor ki Newton yönteminin başarısı çözümü genelde zor olan lineer olmayan bir problemi, çözümü daha kolay olan ve belki de sistematik çözüm teknikleri geliştirilmiş bulunan lineer problemler

dizisinin çözümüne indirgemektedir. Bu yöntem her zaman işlemeyebilir. Bir  $n$  için  $u_n$  vektörü  $\Omega$  kümesinin dışına kaçabilir ve  $F(u_n)$  vektörü tanımlanamayabilir. Bu durum söz konusu olmasa bile bir  $n$  sayısı için  $[F'(u_n)]^{-1}$  operatörü var olmayabilir.

$\{u_n\}$  dizisi bir  $u^*$  köküne yakınsarsa ve  $u_0$  vektörü  $u^*$  vektörüne yeterli yakınlıktaysa  $F'$  türev operatörünün sürekliliği  $F'(u_0)$  ve  $F'(u_n)$  operatörlerini birbirine yakın kılar. Bu durumda (4.2) bağıntısı

$$u'_{n+1} = u'_n - [F'(u_0)]^{-1}(F(u'_n)), n = 0, 1, \dots; u'_0 = u_0 \quad (4.3)$$

ile değiştirebilir. Bir  $\{u'_n\}$  dizisi üreten bu yöntemin her seferinde  $F'(u_n)$  operatörünün tersini bulma zahmetinden bizi kurtardığı için daha basit olduğu açıktır. Ancak genellikle daha kötü ve yavaş bir yakınsaklık sağlar. Bu yaklaşım basitleştirilmiş Newton yöntemi olarak bilinir [3].

Görülüyor ki Newton yöntemi büzülme dönüşümlerinde rastlanıldığı ardışık yaklaşıklar yönteminin

$$u = u - [F'(u)]^{-1}(F(u))$$

denkleminin uygulanması ile çakışmaktadır.  $S(u) = u - [F'(u)]^{-1}(F(u))$  ile bir  $S:U \rightarrow U$  operatörünü tanımlarsak  $F(u^*) = 0$  kökü  $u = S(u)$  denkleminin bir köküne, yani  $S$  operatörünün bir sabit noktasına karşılık gelir. Yöntemin uygulanabilmesi için  $\{u_n\}$  dizisinin  $\Omega$  kümesi içinde kalmasının, dizinin yakınsamasının ve de limitin yine  $\Omega$  da yer almasının gerekli olduğu açıktır.  $F(u) = 0$  denkleminin  $\Omega$  kümesi içinde kalan kökünün varlığını veya tekliğini belirleyebilmek için çeşitli ölçütler geliştirilmiştir [3].

#### 4.1.1. Teorem

$U$  ve  $V$  Banach uzayları ve  $F:U \rightarrow V$  operatörü bir  $B_r(u_0) \subset U$  açık yuvarı üzerinde Frechet- türetilebilir olsun. Bu operatörün aşağıdaki koşulları sağladığını varsayalım:

(a)  $F'(u_0)$  in tersi var ve süreklidir. Yani  $[F'(u_0)]^{-1} \in B(V,U)$  olur.

(b)  $\|[F'(u_0)]^{-1}(F(u_0))\| \leq \alpha$  ,  $\|[F'(u_0)]^{-1}\| \leq \beta$  koşulları sağlanır.

(c) Her  $u_1, u_2 \in B_r(u_0)$  için  $\|F'(u_1) - F'(u_2)\| \leq k\|u_1 - u_2\|$  olacak şekilde bir  $k > 0$  sabiti vardır.

(d)  $p = 2\alpha\beta k < 1$  ve  $2\alpha < r$  eşitsizlikleri geçerlidir. Bu durumda  $F(u) = 0$  denkleminin  $B_{2\alpha}[u_0]$  içinde bulunan tek bir  $u^*$  kökü vardır, ardışık yaklaşıklar yöntemiyle elde edilen dizi bu köke yakınsar ve n. adımdaki hata için

$$\|u_n - u^*\| \leq \frac{\alpha p^{2^n - 1}}{2^{n-1}} \quad (4.4)$$

sınırlaması geçerli olur [3].

**İspat:**  $u_m, m = 0, 1, \dots$  vektörlerinin  $u_{m+1} = u_m - [F'(u_m)]^{-1}(F(u_m))$  ya da  $F'(u_m)(u_{m+1} - u_m) = -F(u_m)$  bağlantıları sağlanacak şekilde belirlendiğini ve  $\{u_0, u_1, \dots, u_n\} \in B_{2\alpha}[u_0] \subset B_r(u_0)$  olduğunu kabul edilsin. Aynı kuralla bir  $u_{n+1}$  vektörü oluşturulsun. Bu amaçla önce

$$\alpha_m = \|u_{m+1} - u_m\|, \beta_m = \|[F'(u_m)]^{-1}\|, \gamma_m = \alpha_m \beta_m k; m = 0, 1, \dots, n$$

sayılarını tanımlansın.  $u_{n+1} = u_n - [F'(u_n)]^{-1}(F(u_n))$  olduğuna göre,



$$\|u_{n+1} - u_n\| = \left\| -[F'(u_n)]^{-1}(F(u_n)) \right\| \leq \left\| [F'(u_n)]^{-1} \right\| \|F(u_n)\|$$

veya

$$\begin{aligned} \alpha_n \leq \beta_n \|F(u_n)\| &= \beta_n \|F(u_n) - F(u_{n-1}) + F(u_{n-1})\| \\ &= \beta_n \|F(u_n) - F(u_{n-1}) - F'(u_{n-1})(u_n - u_{n-1})\| \\ &\leq \frac{1}{2} \beta_n k \|u_n - u_{n-1}\|^2 = \frac{1}{2} \alpha_{n-1}^2 \beta_n k \end{aligned} \quad (4.5)$$

elde edilir. Bu sonuca varmak için  $B_r(u_0)$  açık yuvarının bir konveks küme olduğuna,  $u_{n-1}$  ile  $u_n$  vektörlerinin  $B_r(u_0)$  da bulunduğuna dikkat edilmelidir. (c) koşuluyla birlikte aşağıdaki teoremden yararlanılması yeterlidir:

**Teorem:**  $U$  bir normlu vektör uzayı,  $V$  bir Banach uzayı ve  $F:U \rightarrow V$  sürekli Frechet türevi olan bir operatör olsun. Bir konveks  $\Omega \subset U$  kümesinde  $F'$  Lipschitz sürekli, yani her  $u, w \in \Omega$  vektörü için

$$\|F'(u) - F'(w)\| \leq k \|u - w\|, k > 0$$

ise  $\forall u_0, u_1 \in \Omega$  için

$$\|F(u_1) - F(u_0) - F'(u_0)(u_1 - u_0)\| \leq \frac{1}{2} k \|u_1 - u_0\|^2$$

eşitsizliği geçerlidir.

Dolayısıyla  $\alpha_n \leq \frac{1}{2} \alpha_{n-1}^2 \beta_n k$  yazılabilir. Şimdi  $F'(u_n) = F'(u_{n-1})A_{n-1}$  özdeşliği göz önüne alınsın. Buradaki  $A_{n-1}:U \rightarrow U$  lineer operatörü

$$A_{n-1} = [F'(u_{n-1})]^{-1} F'(u_n) = I + [F'(u_{n-1})]^{-1} [F'(u_n) - F'(u_{n-1})]$$

olarak tanımlanmıştır.  $m=0,1,\dots,n$  için  $[F'(u_m)]^{-1}$  operatörünün var ve sürekli olduğunu kabul edildiğinden  $A_{n-1}$  ve  $A_{n-1}^{-1}$  operatörleri süreklidir.  $A_{n-1} = I + B_{n-1}$  olmak üzere yine (c) koşulundan yararlanılırsa  $B_{n-1}$  operatörünün normu

$$\|B_{n-1}\| \leq B_{n-1} \|F'(u_n) - F'(u_{n-1})\| \leq \alpha_{n-1} \beta_{n-1} k = \gamma_{n-1}$$

eşitsizliğini sağlar. Buna göre  $\gamma_{n-1} < 1$  ise Neumann serisi aracılığı ile

$$\|A_{n-1}^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|B_{n-1}\|} \leq \frac{1}{1 - \gamma_{n-1}}$$

sonucu elde edilir.  $[F'(u_n)]^{-1} = A_{n-1}^{-1} [F'(u_{n-1})]^{-1}$  bağıntısı

$$\beta_n \leq \beta_{n-1} \|A_{n-1}^{-1}\| \leq \frac{\beta_{n-1}}{1 - \gamma_{n-1}} \quad (4.6)$$

verir. Buna göre (4.5) ve (4.6) dan

$$\alpha_n \leq \frac{\alpha_{n-1}^2 \beta_{n-1} k}{2(1 - \gamma_{n-1})} = \frac{\gamma_{n-1}}{2(1 - \gamma_{n-1})} \alpha_{n-1}, \quad \gamma_{n-1} \leq \frac{\gamma_{n-1}^2}{2(1 - \gamma_{n-1})^2} \quad (4.7)$$

elde edilir.  $\|u_1 - u_0\| = \|[F'(u_0)]^{-1}(F(u_0))\|$  yazabileceğinden (d) varsayımı uyarınca

$\gamma_0 = \alpha_0 \beta_0 k \leq \alpha \beta k < 1/2$  olur ve  $\gamma_n < 1/2$  sonucuna varılabilir. Buradan da her  $n \geq 1$

için  $\alpha_n \leq \frac{1}{2} \alpha_{n-1}$  bulunur. Dolayısıyla

$$\|u_{n+1} - u_0\| \leq \sum_{k=0}^n \|u_{k+1} - u_k\| = \sum_{k=0}^n \alpha_k \leq \alpha \sum_{k=0}^n 2^{-k} \leq 2\alpha$$

olur. Buna göre, (d) göz önünde tutulursa,  $u_{n+1} \in B_{2\alpha}[u_0] \subset B_r(u_0)$  yazılabilir.  $[F'(u_{n+1})]^{-1} = A_n^{-1}[F'(u_n)]^{-1}$  ve  $\|A_n^{-1}\| \leq (1-\gamma_n)^{-1}$  olacağından  $[F'(u_{n+1})]^{-1}$  operatörü süreklidir.  $n=0$  için aranan özelliğin geçerliliği açık olduğuna göre tümevarım yoluyla  $\{u_n\}$  dizisinin oluşturabileceği ve bu dizinin kapalı  $B_{2\alpha}[u_0]$  kümesi içinde kalacağı gösterilmiş olur.  $n \geq m$  alındığı takdirde,

$$\|u_n - u_m\| \leq \sum_{k=m}^{n-1} \|u_{k+1} - u_k\| = \sum_{k=m}^{n-1} \alpha_k \leq \alpha \sum_{k=m}^{n-1} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{m-1}} \left(1 - \frac{1}{2^{n-m}}\right)$$

eşitsizliği açıktır. Dolayısıyla  $m \rightarrow \infty$  için  $\|u_n - u_m\| \rightarrow 0$  bulunur. Yani  $\{u_n\}$  bir Cauchy dizisidir ve  $U$  tam,  $B_{2\alpha}[u_0]$  kapalı olduğundan bu küme içinde bir  $u^*$  vektörüne yakınsar. Bu durumda  $[F'(u^*)]^{-1}$  operatörü sürekli olur ve  $\|[F'(u^*)]^{-1}\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n$  yazılacağından  $\sup_n \beta_n < \infty$  çıkar. (4.2) den  $n \rightarrow \infty$  limitine geçerek  $[F'(u^*)]^{-1}$  operatörünün sınırlı tersinin varlığı bilindiğinden  $T(u^*) = 0$  denkleminin sağlandığı hemen görülür.

$$u_{n+1} - u^* = u_n - u^* - [F'(u_n)]^{-1}(F(u_n))$$

bağıntısını

$$u_{n+1} - u^* = [F'(u_n)]^{-1}[F(u^*) - F(u_n) - F'(u_n)(u^* - u_n)]$$

şeklinde yazar, tanımlardan ve üstteki aynı teoremden yararlanılırsa

$$\|u_{n+1} - u^*\| \leq \frac{1}{2} \beta_n k \|u_n - u^*\|^2$$

elde edilir. Dolayısıyla her  $n$  için  $\|u_{n+1} - u^*\| \leq c \|u_n - u^*\|^2$  sonucu bulunur. Burada

$c = \frac{1}{2} k \sup_n \beta_n$  olarak belirlenmiştir. Bu sonuca göre  $u_n \rightarrow u^*$  yakınsaması ikinci

mertebeden bir yakınsama olarak nitelendirilebilir. Şimdi  $u^*$  vektörünün tek olduğu gösterilsin.  $B_{2\alpha}[u_0]$  da ikinci bir  $u^{**}$  kökünün bulunduğu kabul edilsin.

$$u^* - u^{**} = [F'(u_0)]^{-1}[F(u^{**}) - F(u^*) - F'(u_0)(u^{**} - u^*)]$$

özdeşliğinde  $F(u^{**}) - F(u^*) = \int_{u^*}^{u^{**}} F'(u)(u^{**} - u^*) du$  yazılırsa

$$\begin{aligned} u^* - u^{**} &= [F'(u_n)]^{-1} \left[ \int_{u^*}^{u^{**}} F'(u)(u^{**} - u^*) du - F'(u_0)(u^{**} - u^*) \right] \\ &= [F'(u_n)]^{-1} \left[ \int_0^1 [F'(u^* + t(u^{**} - u^*)) - F'(u_0)] dt (u^{**} - u^*) \right] \end{aligned}$$

elde edilir. Bu aşamada da önce (c) koşulundan, ardından özel bir hal olan sonuç dan

yararlanılırsa  $\left\| \int_{u_0}^{u_1} F(u) du \right\| \leq \int_0^1 \| [F'(u_0 + t(u_1 - u_0))] \| dt = \int_{u_0}^{u_1} \| F(u) \| du$  den yararlanarak

$$\begin{aligned} \|u^* - u^{**}\| &\leq \beta \left\| \int_0^1 [F'(u^* + t(u^{**} - u^*)) - F'(u_0)] dt \right\| \|u^* - u^{**}\| \\ &\leq \beta k \|u^* - u^{**}\| \int_0^1 \|u^* + t(u^{**} - u^*) - u_0\| dt \\ &\leq 2\alpha\beta k \|u^{**} - u^*\| \int_0^1 dt \\ &\leq 2\alpha\beta k \|u^* - u^{**}\| \end{aligned}$$

bulunur. İkinci satırda  $0 \leq t \leq 1$  için  $(1-t)u^* + tu^{**} \in B_{2\alpha}[u_0]$  olduğu göz önünde tutuldu. Buna göre  $\|u^* - u^{**}\| \leq 2\alpha\beta k \|u^* - u^{**}\|$  sağlanmalıdır.  $2\alpha\beta k < 1$  kabul edildiğinden bu eşitsizlik ancak  $u^{**} = u^*$  için gerçekleşebilir. Son olarak da (4.4) eşitsizliği gösterilirse  $\delta_n = \gamma_n / (1 - \gamma_n)$  tanımından  $\gamma_n \leq 1/2$  eşitsizliği nedeniyle her  $n$  için  $\delta_n \leq 1$  bağıntısı sağlanır.

Bu durumda  $\gamma_n = \delta_n/(1 + \delta_n)$  yazar, (4.7) eşitsizliği kullanır ve  $\delta_n \leq 1$  olacağına dikkat edilirse

$$\frac{\delta_n}{2} \leq \frac{\delta_n}{1 + \delta_n} \leq \frac{1}{2} \delta_{n-1}^2,$$

olacağından her  $n \geq 0$  için  $\delta_n \leq \delta_{n-1}^2$  sonucuna varılır. Bu eşitsizlikten kolayca  $\delta_n \leq \delta_0^{2^n}$  çıkar ve (4.7)(9.5.7)<sub>1</sub> eşitsizliği

$$\begin{aligned} \alpha_n &\leq \frac{1}{2} \delta_{n-1} \alpha_{n-1} \leq \frac{1}{2} \delta_0^{2^{n-1}} \alpha_{n-1} \leq \frac{1}{2^2} \delta_0^{2^{n-1}+2^{n-2}} \alpha_{n-2} \leq \\ \dots &\leq \frac{1}{2^n} \delta_0^{2^{n-1}+2^{n-2}+\dots+2+1} \alpha_0 \leq \frac{1}{2^n} \delta_0^{2^n-1} \alpha \leq \frac{1}{2^n} p^{2^n-1} \alpha \end{aligned}$$

sonucunu verir. Yukarıdaki son eşitsizlikte  $\gamma_0 \leq p/2$  için  $\delta_0 \leq p$  olması göz önünde tutarak yazıldı. Buna göre  $p \leq 1$  olduğuna dikkat edilirse

$$\begin{aligned} \|u_n - u^*\| &\leq \sum_{k=n}^{\infty} \|u_{k+1} - u_k\| = \sum_{k=n}^{\infty} \alpha_k \leq \alpha \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{2^k} p^{2^k-1} \\ &\leq \frac{\alpha}{2^n} p^{2^n-1} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{2^k} p^{2^k-2^n} = \frac{\alpha}{2^n} p^{2^n-1} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2^m} p^{2^n(2^m-1)} \\ &\leq \frac{\alpha}{2^n} p^{2^n-1} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2^m} = \frac{\alpha}{2^{n-1}} p^{2^n-1}, \quad p = 2\alpha\beta k \end{aligned}$$

bulunur [3].

Newton yöntemi yerine basitleştirilmiş Newton yöntemi kullanılırsa yukarıdaki teoremden elde edilmiş olunan yakınsama ölçütleri bir ölçüde kötüleşir.  $T:U \rightarrow V$  operatörü yine bir  $B_r(u_0) \subset U$  açık yuvarı üzerinde Frechet-türetilebilir ve  $\|[F'(u_0)]^{-1}(F(u_0))\| \leq \alpha$ ,  $\|[F'(u_0)]^{-1}\| \leq \beta$  ile her  $u_1, u_2 \in B_r(u_0)$  için  $\|F'(u_1) - F'(u_2)\| \leq k \|u_1 - u_2\|$  koşulları sağlansın. Ardışık yaklaşımı  $u_0$  vektöründen başlayıp  $u_{m+1} = u_m - [F'(u_0)]^{-1}(F(u_m))$ ,  $m \geq 0$  şeklinde uygulanırsa n. adıma kadar gelindiğinde  $\{u_0, u_1, \dots, u_n\} \subset B_r(u_0)$  vektörleri belirlenip şimdi  $u_{n+1}$

vektörü oluşturulsun. Yine  $\alpha_m = \|u_{m+1} - u_m\|$  notasyonunu kullanıldığı takdirde  $\alpha_0 = \|u_1 - u_0\| \leq \alpha$  olur. Dolayısıyla bu kez

$$\begin{aligned}
\alpha_n &= \left\| [F'(u_0)]^{-1}(F(u_n)) \right\| \leq \beta \|F(u_n) - F(u_{n-1}) + F(u_{n-1})\| \\
&= \beta \left\| \int_{u_{n-1}}^{u_n} F'(u)(u_n - u_{n-1}) du - F'(u_0)(u_n - u_{n-1}) \right\| \\
&= \beta \left\| \int_0^1 F'[u_{n-1} + t(u_n - u_{n-1})] - F'(u_0) dt (u_n - u_{n-1}) \right\| \\
&\leq \beta \|u_n - u_{n-1}\| \left\| \int_0^1 F'[u_{n-1} + t(u_n - u_{n-1})] - F'(u_0) dt \right\| \\
&\leq \beta \|u_n - u_{n-1}\| \int_0^1 \|F'[u_{n-1} + t(u_n - u_{n-1})] - F'(u_0)\| dt \\
&\leq \beta k \|u_n - u_{n-1}\| \int_0^1 \|u_{n-1} + t(u_n - u_{n-1}) - u_0\| dt
\end{aligned}$$

elde edilir.  $0 \leq t \leq 1$  için  $(1-t)u_{n-1} + tu_n \in B_r(u_0)$  yazılabileceğinden  $\|u_{n-1} + t(u_n - u_{n-1}) - u_0\| < r$  olur ve sonuçta  $\alpha_n \leq q\alpha_{n-1}$ ,  $q = \beta kr$  bağıntısı bulunur. Buradan da  $\alpha_n \leq \alpha q^n$ ,  $n \geq 0$  eşitsizliği çıkar. Buna göre  $q < 1$  kabul edildiği takdirde

$$\|u_{n+1} - u_0\| \leq \sum_{k=0}^n \alpha_k \leq \alpha \sum_{k=0}^n q^k = \alpha \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \leq \frac{\alpha}{1 - q} = \rho$$

sonucuna varılır. Dolayısıyla  $\rho < r$  ise  $\{u_n\}$  dizisi  $B_\rho[u_0] \subset B_r(u_0)$  kapalı yuvarı içinde kalır.  $\alpha/(1-q) < r$  ya da  $\beta kr^2 - r + \alpha < 0$  koşulunun sağlanabilmesi için  $r_1 \leq r \leq r_2$  olmasının gerektiği açıktır. Burada

$$r_1 = 2\alpha \frac{1 - \sqrt{1 - 2p}}{p}, \quad r_2 = 2\alpha \frac{1 + \sqrt{1 - 2p}}{p}$$

olup yine  $p = 2\alpha\beta k$  olarak tanımlanmıştır. Reel bir  $r$  için  $p \leq 1/2$  olmalıdır. Şimdi  $\{u_n\}$  dizisinin bir Cauchy dizisi olduğunu göstermek için  $n \geq m$  olmak üzere

$$\|u_n - u_m\| \leq \sum_{k=m}^{n-1} \alpha_k \leq \alpha \sum_{k=m}^{n-1} q^k = \alpha q^m \frac{1 - q^{n-m}}{1 - q}$$

yazabileceğinden  $m \rightarrow \infty$  için  $\|u_n - u_m\| \rightarrow 0$  bulunur. Yani  $\{u_n\}$  dizisinin bir  $u^* \in B_\rho[u_0]$  limiti vardır. Yukarıda  $n \rightarrow \infty$  limitine geçilirse

$$\|u_n - u_m\| \leq \alpha \frac{q^m}{1 - q} \leq \alpha q^m$$

yazılabileceği görülür. En hızlı yakınsama en küçük  $q$  sayısı ile sağlanacağından en uygun  $q$  değeri olarak

$$q = \beta k r_1 = 1 - \sqrt{1 - 2p}$$

alınmalıdır. Dolayısıyla  $n$ . iterasyonun  $u^*$  vektörüne uzaklığının üst sınırı

$$\|u_n - u_m\| \leq \alpha [1 - \sqrt{1 - 2p}]^n, p = 2\alpha\beta k$$

ile belirlenir [3].

#### 4.1.2. Örnek

T:  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  operatörü

$$T(x) = (52x_1 + 4x_2 + 4x_2^2 - 19,169x_1^2 + 111x_1 + 3x_2^2 - 10x_2 - 10)$$

olarak tanımlanmaktadır.  $T(x)=0$  denkleminin köklerini Newton metodu ile  $x_0 = (-1,3)$  noktası civarında bulmaya çalışınız.

**Çözüm:**

Newton raphson yönteminden bilindiği gibi

$$x_{n+1} = x_n - \frac{T(x_n)}{T'(x_n)} \quad (*)$$

idi. Bu düzenlenirse  $x_{n+1} = x_n - [T'(x_n)]^{-1}T(x_n)$  şeklinde yazılabilir.

Burada  $T'(x)$  hesaplanırsa

$$T'(x) = \begin{bmatrix} 52 & 8x_2 + 4 \\ 338x_1 + 111 & 6x_2 - 10 \end{bmatrix}$$

şeklinde bulunur. Ayrıca verilen  $x_0$  başlangıç noktasında yerine konulursa

$$T(x_0) = (-23, 45)$$

bulunur.  $T'(x_0)$  için verilen değerleri yerine konulursa

$$T'(x_0) = \begin{bmatrix} 52 & 28 \\ -227 & 8 \end{bmatrix}$$

bulunur.  $[T'(x_0)]^{-1}$  i de hesaplanırsa

$$[T'(x_0)]^{-1} = \begin{bmatrix} 0.00118133 & -0.00413467 \\ 0.0335204 & 0.00767868 \end{bmatrix}$$

bulunur. Bu bulunan değerler (\*) da yerine konulursa



$$x_1 = (-0.786769, 3.42543)$$

bulunur. Böylece basitleştirilmiş Newton yöntemi kullanılarak devam edilirse ve gerekli işlemler yapılırsa

$$x_2 = (-0.753608, 3.33799), x_3 = (-0.743471, 3.3287), x_4 = (-0.739956, 3.3287)$$

$$x_5 = (-0.738716, 3.32128), x_6 = (-0.738272, 3.32062), x_7 = (-0.738114, 3.32038)$$

$$x_8 = (-0.738057, 3.3203), x_9 = (-0.738036, 3.32027), x_{10} = (-0.738029, 3.32026)$$

$$x_{11} = (-0.738026, 3.32025), x_{12} = (-0.738026, 3.32025), x_{13} = (-0.738025, 3.32025)$$

$$x_{14} = (-0.738025, 3.32025), x_{15} = (-0.738025, 3.32025)$$

bulunur.

Teorem 4.1.1. in başka bir ifadesi verilirse:

#### 4.1.3. Teorem

$U$  ve  $V$  Banach uzayları ve  $F : U \rightarrow V$  operatörü aşağıdaki koşulları sağlasın:

(a) Bir  $u_0 \in U$  olmak üzere  $F : U \rightarrow V$  operatörü  $B_r(u_0) \subset U$  açık yuvarı üzerinde Frechet- türetilbilir olsun.

(b)  $F'(u_0)$  in tersi var ve sürekli, yani  $[F'(u_0)]^{-1} \in B(V, U)$  olur. Her  $u \in B_r(u_0)$  için  $\|[F'(u_0)]^{-1}\| \leq \beta$  olacak şekilde  $\beta > 0$  sayısı vardır.

(c) Her  $u_1, u_2 \in B_r(u_0)$  için  $\|F'(u_1) - F'(u_2)\| \leq k \|u_1 - u_2\|$  olacak şekilde bir  $k > 0$  sabiti vardır.

(d)  $\|F(u_0)\| \leq \alpha$  dır.

$p = \frac{1}{2}\alpha\beta^2k < 1$  ise  $F(u) = 0$  denkleminin  $r' < r$  olmak üzere  $B_{r'}(u_0)$  yuvarında bulunan tek bir  $u^*$  kökü vardır ve ardışık yaklaşıklar yöntemiyle elde edilen dizinin yakınsama hızı

$$\|u_n - u^*\| \leq \frac{\alpha\beta p^{2^n-1}}{2^{n-1}}$$

eşitsizliği ile verilir [2].

## BÖLÜM 5. NONLİNEER DİFERANSİYEL OPERATÖRLERDE NEWTON YÖNTEMİNİN UYGULAMASI

### 5.1. Riccati Diferansiyel Denklemi

Genel bir Riccati diferansiyel denklemi  $y' = P(x) + Q(x)y + R(x)y^2$  biçimindeki diferansiyel denklemdir. Burada  $P, Q, R$  türevleri ile birlikte belirli bir bölgede tanımlı fonksiyonlardır.

$$y' = -2 - y + y^2 ; y_1 = 2$$

özel çözümünü verilen riccati diferansiyel denkleminin çözümü aşağıdaki biçimde yapılır:

$$z = \frac{1}{y-2} \Rightarrow y = 2 + \frac{1}{z} \text{ ve } y' = -\frac{z'}{z^2}$$

elde edilir. Bu elde edilen ifade yukarıdaki denklemde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} -\frac{z'}{z^2} &= -2 - \left(2 + \frac{1}{z}\right) + \left(2 + \frac{1}{z}\right)^2 \\ -\frac{z'}{z^2} &= \frac{3}{z} + \frac{1}{z^2} \end{aligned}$$

diferansiyel denkleme ulaşılır. Bu denklem düzenlenerek

$$z' = -3z - 1$$

Lineer diferansiyel denklemi elde edilir. Elde edilen son denklemin genel çözümü

$$z = \frac{-\frac{1}{3}e^{3x} + C}{e^{3x}} = -\frac{1}{3} + Ce^{-3x} \text{ ve}$$

$$y = 2 + \frac{1}{-\frac{1}{3} + Ce^{-3x}}$$

dir.

Verilen lineer olmayan riccati diferansiyel denklemi Frechet türevi yardımıyla lineer hale getirildikten sonra yaklaşık olarak çözümü aşağıdaki örnekte verilmiştir.

### 5.1.1. Örnek

$F : C^1[a, b] \rightarrow C[a, b]$  operatörü  $F(y) = y' + 2 + y - y^2$  biçiminde verilsin.  $F(y) = 0$  diferansiyel denkleminin Newton yöntemiyle yaklaşık çözümünü bulunuz.

#### Çözüm:

Yaklaşık çözüm için izlenilecek basamaklar aşağıdaki biçimde verilebilir:

Newton yönteminin kesin olarak kullanılabileceğini veren teoremin yani 4.1.2 teoreminin şartlarının sağlanıp sağlanmadığı araştırıldı. Bunun için bir başlangıç fonksiyonu seçildi. Bu başlangıç fonksiyonunun seçimi için bu soruda izlenen yol önce  $(0,1)$  ve  $(15,0)$  noktalarından geçen doğrunun denklemi alındı. Daha sonra  $y_0(x) = \cos(x)$  fonksiyonu alındı. Elde edilen sonuçlar verildi ve karşılaştırma yapıldı.

$F : C^1[0, 30] \rightarrow C[0, 30]$  operatörünün Frechet türevi araştırılırsa,

$$\begin{aligned} F(y+h) &= (y+h)' + 2 + (y+h) - (y+h)^2 \\ &= y' + h' + 2 + y + h - y^2 - 2yh - h^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F(y+h) - F(y) &= F'(y)h + w(h) \\
&= y' + h' + 2 + y + h - y^2 - 2yh - h^2 - y' - 2 - y + y^2 \\
F'(y)h + w(h) &= h' + h - 2yh - h^2
\end{aligned}$$

elde edilir. burada  $w(h) = -h^2$  olup,

$$\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{\|w(h)\|}{\|h\|} = \lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{\|-h^2\|}{\|h\|} = 0$$

dır.  $y_0(x) = 1 - \frac{x}{15}$  başlangıç fonksiyonu kullanılarak  $y_0$  fonksiyonundaki Frechet türevi

$$F'(y_0)h = h' + (1 - 2y_0)h$$

olarak elde edilir. Buradan hareketle, Newton yöntemine başvurularak iterasyon prosesi

$$y_1 = y_0 + h_1 = y_0 - \frac{F(y_0)}{F'(y_0)}$$

$$y_1 - y_0 = h_1, \quad y_1 = y_0 - \frac{F(y_0)}{F'(y_0)}, \quad (y_1 - y_0 = h_1), \quad F'(y_0)h = -F(y_0)$$

elde edilir.

$\|F(y_0)\|_{\infty} \leq \alpha$  olduğu kabul edilirse  $\alpha$  sayısının bulunması gerekir. İşlemlere devam edilirse

$$F(y_0(x)) = y_0'(x) + 2 + y_0(x) - y_0(x)^2$$

$$y_0(x) = 1 - \frac{x}{15}$$

$$F(y_0(x)) = -\frac{1}{15} + 2 + 1 - \frac{x}{15} - 1 + \frac{2x}{15} - \frac{x^2}{225}$$

elde edilir.

$$\|F(y_0)\|_{\infty} \leq \alpha \Rightarrow \|F(y_0)\|_{\infty} = \max_{0 \leq x \leq 30} \left\{ -\frac{1}{15} + 2 + \frac{2x}{15} - \frac{x^2}{225} \right\} = 2.1833$$

buradaki maksimum değer  $x = 7.5$  noktasında elde edilir.

$\|[F'(y_0)]^{-1}\|_{\infty} \leq \beta$  kabul edilirse  $\beta$  sayısının bulunması gerekir. Bunun için aşağıdaki adımlar takip edilir.

$$\|[F'(y_0)]^{-1}\|_{\infty} \leq \beta$$

$$F'(y)h = h' + (1 - 2y)h$$

$$F'(y_0)h = h' + (1 - 2y_0)h$$

$$F'(y_0)h = h' + \left(1 - 2\left(1 - \frac{x}{15}\right)\right)h$$

$$\Rightarrow h' + \underbrace{\left(\frac{2x}{15} - 1\right)}_{p(x)}h = q(x)$$

biçiminde elde edilen lineer diferansiyel denklemin çözümü operatörün tersini verecektir. Birinci mertebeden lineer diferansiyel denklemin çözümü

$$h(x) = e^{-\int p(x)dx} \left\{ \int q(x) e^{\int p(x)dx} dx + C \right\}$$

biçiminde verileceğinden

$$([F'(y_0)]^{-1})q(x) = e^{-\int_0^x p(t)dt} \left\{ \int_0^x q(s) e^{\int_0^s p(r)dr} ds + C \right\}$$

$$\sup_{\|q\|=1} \left\{ e^{-\int_0^x \left(\frac{2t}{15}-1\right)dt} \left\{ \int_0^x e^{\int_0^s \left(\frac{2r}{15}-1\right)dr} ds + C \right\} \right\} = \sup_{\|q\|=1} \left\{ e^{-\left(-x+\frac{x^2}{15}\right)} \left\{ \int_0^x e^{-s+\frac{s^2}{15}} ds + C \right\} \right\} = 30$$

olacağından  $\beta = 30$  elde edilir. Son olarak da türevlerinin Lipschitz koşulunu sağladığı gösterilirse;

$$\begin{aligned}
 F'(y_0(x))h(x) &= h'(x) + (1 - 2y_0(x))h(x) \\
 \|F'(u_1) - F'(u_2)\| &= \|h' + (1 - 2u_1)h - h' + (1 - 2u_2)h\| \\
 &= \|2h(u_2 - u_1)\| \\
 &= 2\|h(u_2 - u_1)\| \\
 &\leq 2\underbrace{\|h\|_\infty}_l \|u_2 - u_1\|
 \end{aligned}$$

$l$  Lipschitz sabiti  $h$  fonksiyonuna bağlı olarak değişir.  $h$  sürekli olduğundan sınırlıdır. Mathematica paket programı yardımıyla ile bundan sonraki adımlar gerçekleştirilmiş olup, ayrıntıları Ek 1 ve Ek 2 de verilmiştir. Yapılan yaklaşımların gerçek çözümle en küçük kareler anlamında hata analizleri yapıp sonucu elde edilen veriler aşağıdaki tabloda verilmiştir.

$y_0(x) = 1 - \frac{x}{15}$  başlangıç fonksiyonu ile elde edilen sonuçlar

Yaklaşımlar	Hata Miktarı
Birinci Yaklaşım	713.563
İkinci Yaklaşım	349.74
Üçüncü Yaklaşım	168.11
Dördüncü Yaklaşım	77.7494
Beşinci Yaklaşım	33.2926
Altıncı Yaklaşım	12.1708
Yedinci Yaklaşım	3.16228
Sekizinci Yaklaşım	0.376546
dokuzuncu Yaklaşım	0.0075827

Tablo 5.1. Hata analizi

$y_0(x) = \cos(x)$  başlangıç fonksiyonu ile elde edilen sonuçlar aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Yaklaşımlar	Hata Miktarı
Birinci Yaklaşım	140.745
İkinci Yaklaşım	63.6424
Üçüncü Yaklaşım	26.0915
Dördüncü Yaklaşım	8.69289
Beşinci Yaklaşım	1.79871
Altıncı Yaklaşım	0.118187
Yedinci Yaklaşım	0.00059645
Sekizinci Yaklaşım	$1.8652 \times 10^{-6}$
dokuzuncu Yaklaşım	$1.9305 \times 10^{-6}$

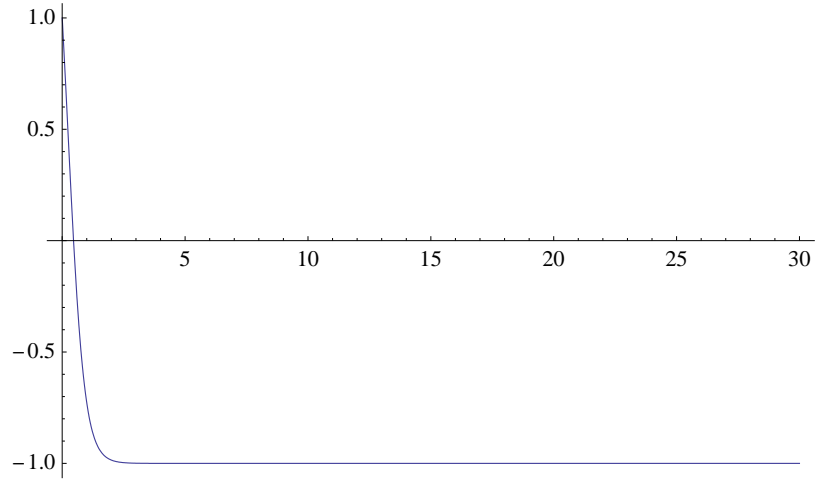
Tablo 5.2. Hata analizi

Yukarıda verilen iki tabloda başlangıç fonksiyonlarının değişmesiyle benzer adımdaki hata miktarlarının değiştiği görülmektedir.  $y_0(x) = 1 - \frac{x}{15}$  başlangıç fonksiyonu ile elde edilen dokuzuncu yaklaşımdaki hata  $e_1 = 0.0075827$  ve  $y_0(x) = \cos(x)$  başlangıç fonksiyonu ile elde edilen dokuzuncu yaklaşımdaki hata  $e_2 = 1.9305 \times 10^{-6}$  ile gösterilsin.

$$\frac{e_2}{e_1} = \frac{1.9305 \times 10^{-6}}{0.0075827} = 0.000254593 < 3 \times 10^{-4}$$

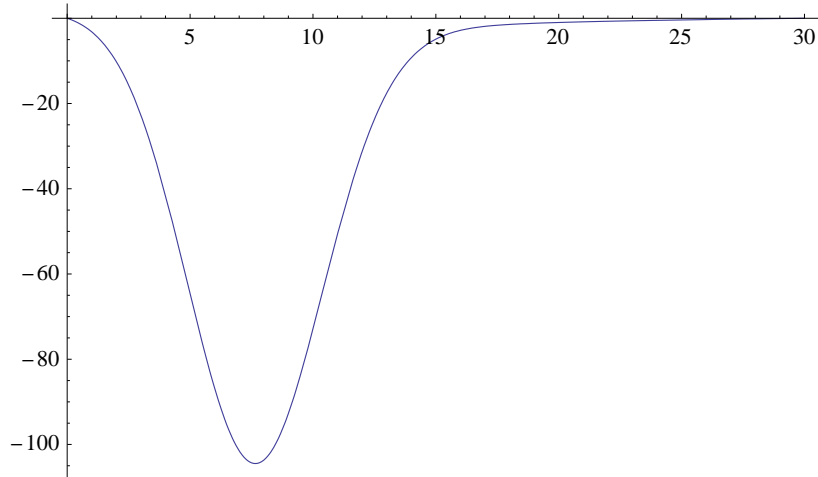
olduğu göz önünde bulundurularak  $y_0(x) = \cos(x)$  başlangıç fonksiyonu ile yaklaşık çözümün  $y_0(x) = 1 - \frac{x}{15}$  başlangıç fonksiyonuna göre daha iyi elde edildiği gözlenebilir.



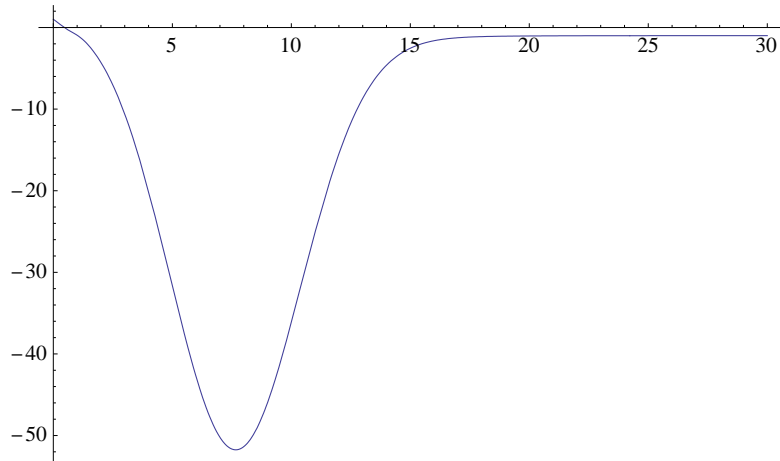


Şekil 5.3. Gerçek çözüm

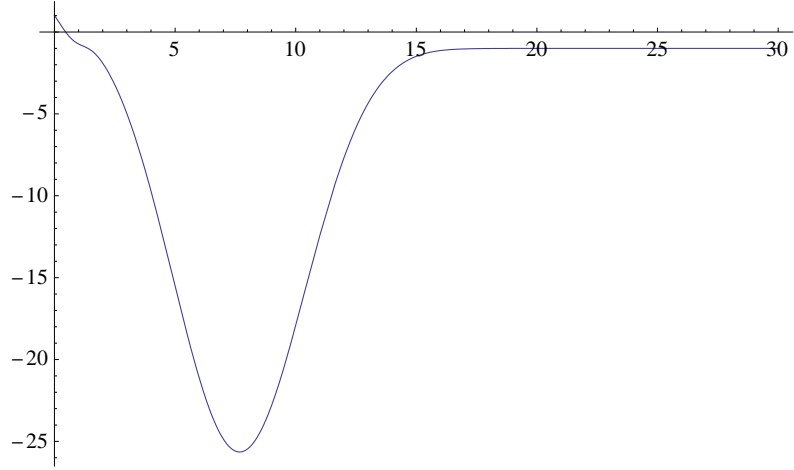
$y_0(x) = 1 - \frac{x}{15}$  başlangıç fonksiyonu ile elde edilen sonuçların grafikleri



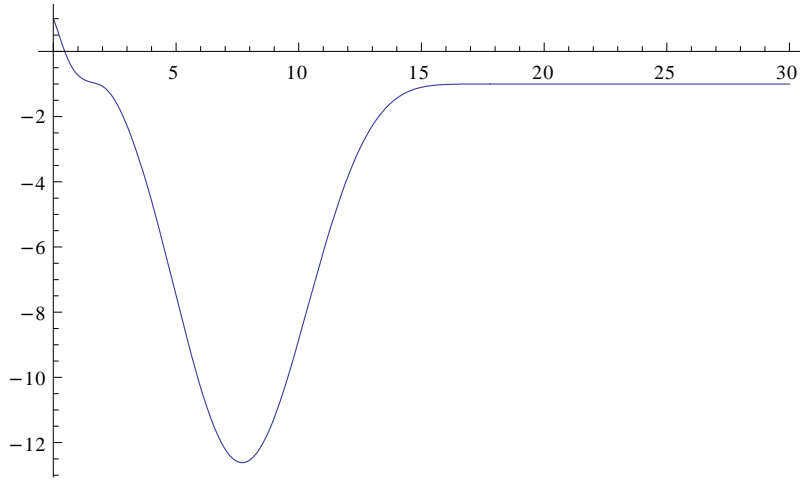
Şekil 5.4. Birinci yaklaşımın sonucunda elde edilen grafik



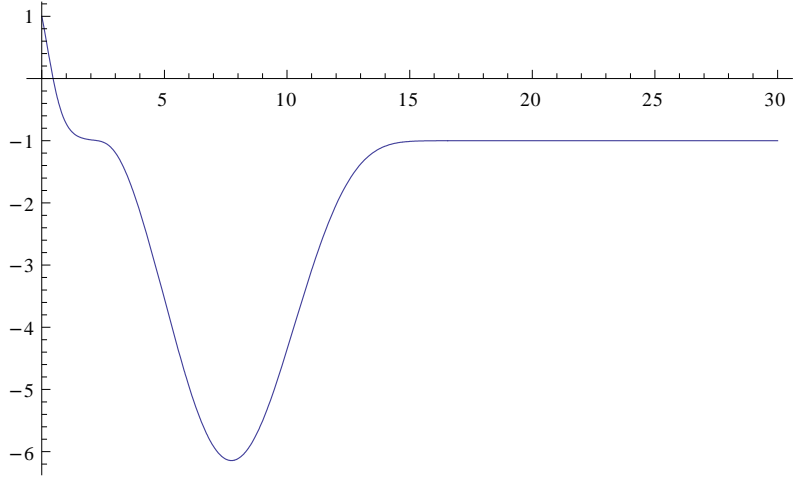
Şekil 5.5. İkinci yaklaşımın sonucunda elde edilen grafik



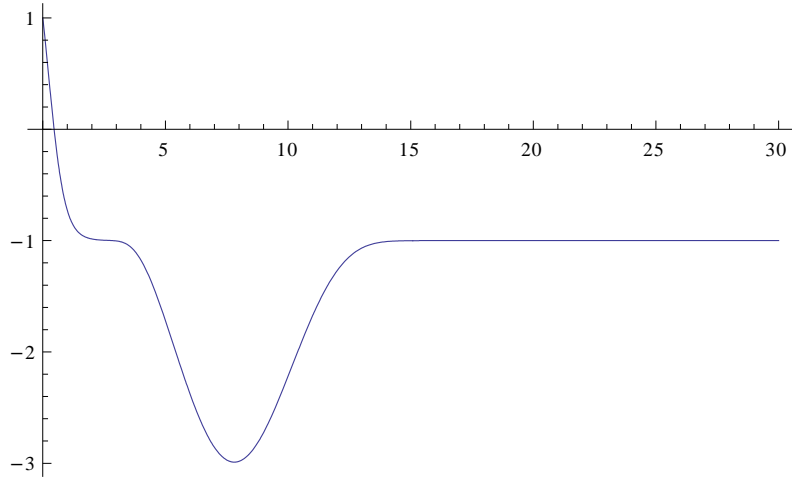
Şekil 5.6. Üçüncü yaklaşımın sonucunda elde edilen grafik



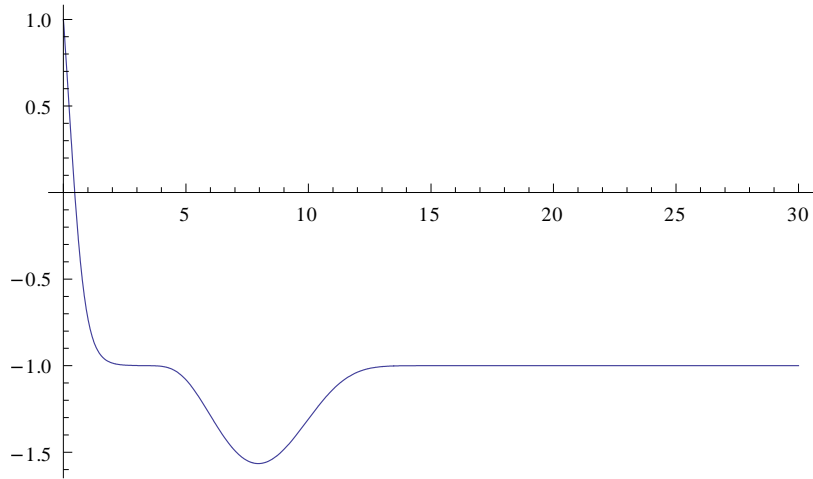
Şekil 5.7. Dördüncü yaklaşımın sonucunda elde edilen grafik



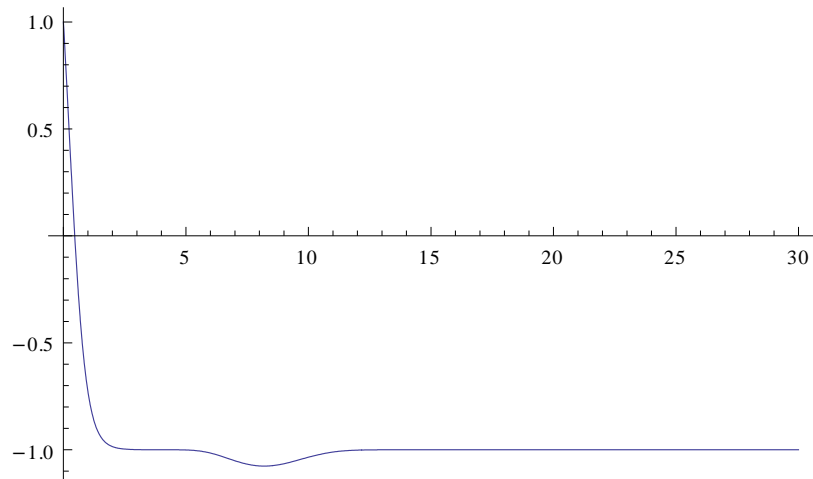
Şekil 5.8. Beşinci yaklaşımın sonucunda elde edilen grafik



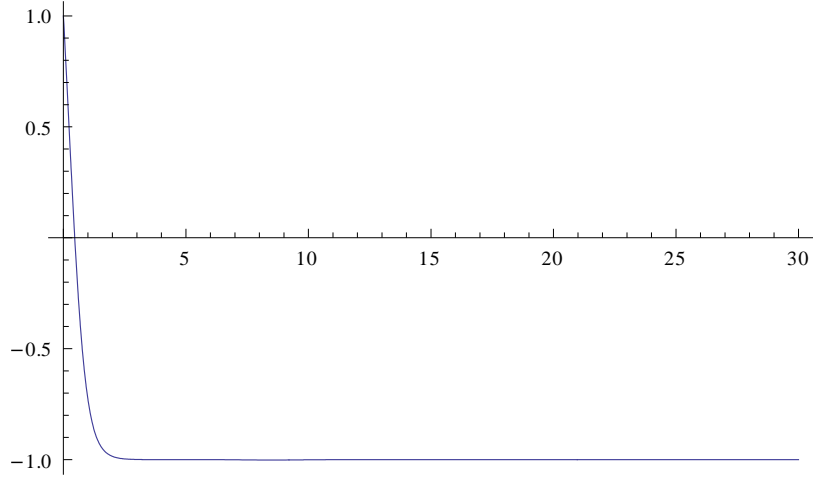
Şekil 5.9. Altıncı yaklaşımın sonucunda elde edilen grafik



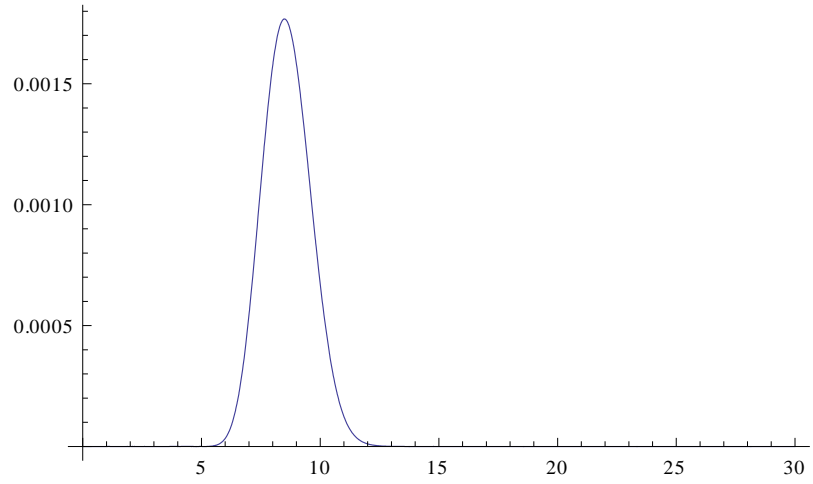
Şekil 5.10. Yedinci yaklaşımın sonucunda elde edilen grafik



Şekil 5.11. Sekizinci yaklaşımın sonucunda elde edilen grafik

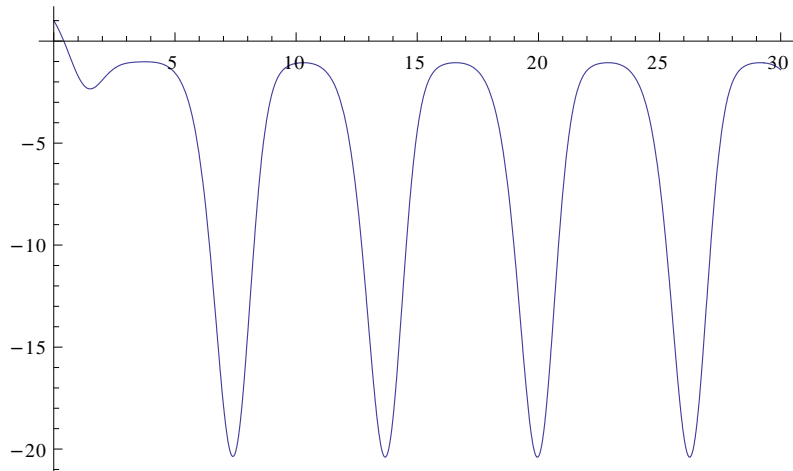


Şekil 5.12. Dokuzuncu yaklaşımın sonucunda elde edilen grafik

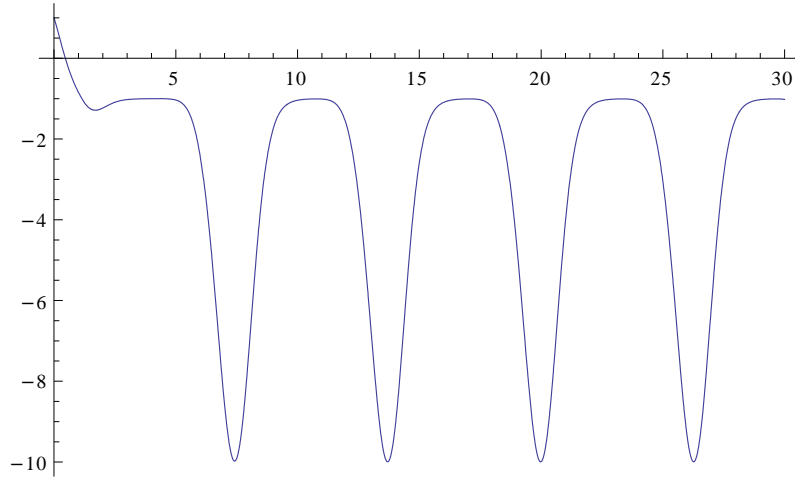


Şekil 5.13. Dokuzuncu yaklaşım ile gerçek çözümün mutlak farkı

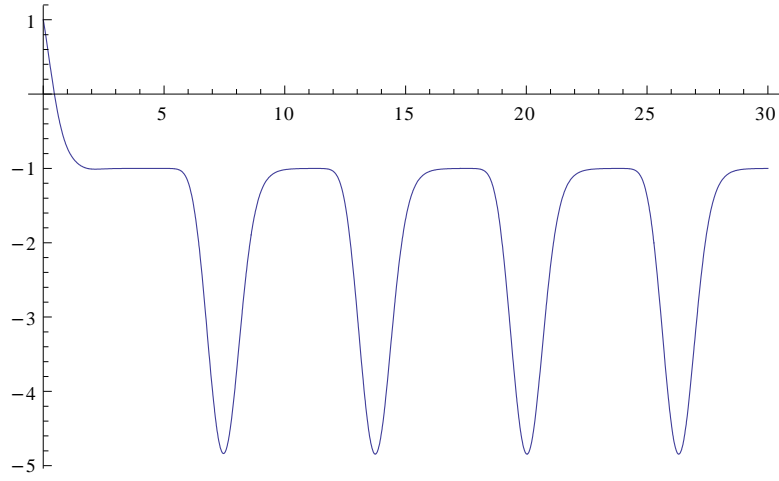
Aynı sorunun  $y_0(x) = \cos(x)$  başlangıç fonksiyonu ile elde edilen sonuçlar



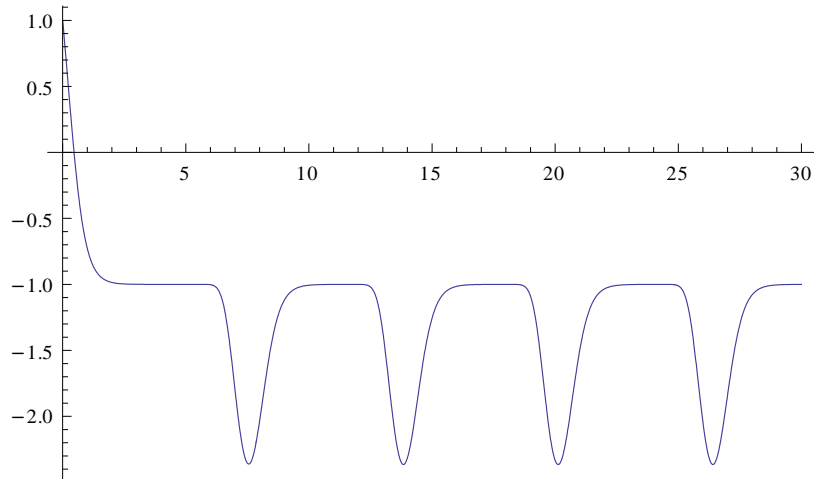
Şekil 5.14. Birinci yaklaşımın sonucunda elde edilen grafik



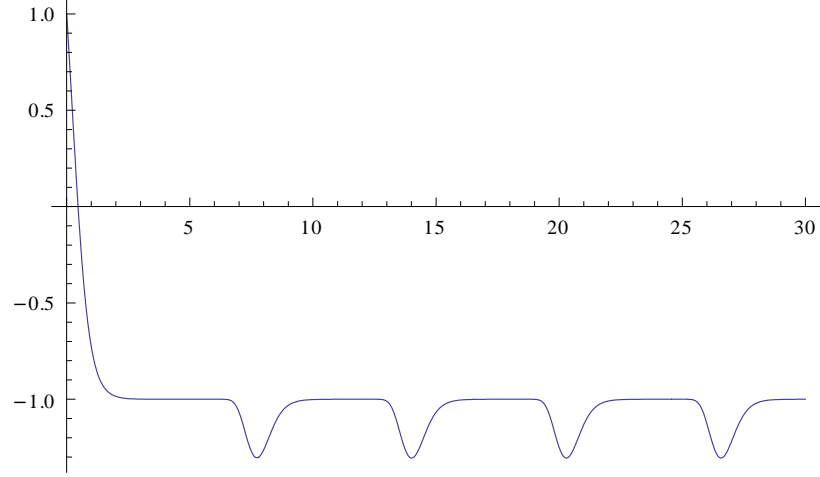
Şekil 5.15. İkinci yaklaşımın sonucunda elde edilen grafik



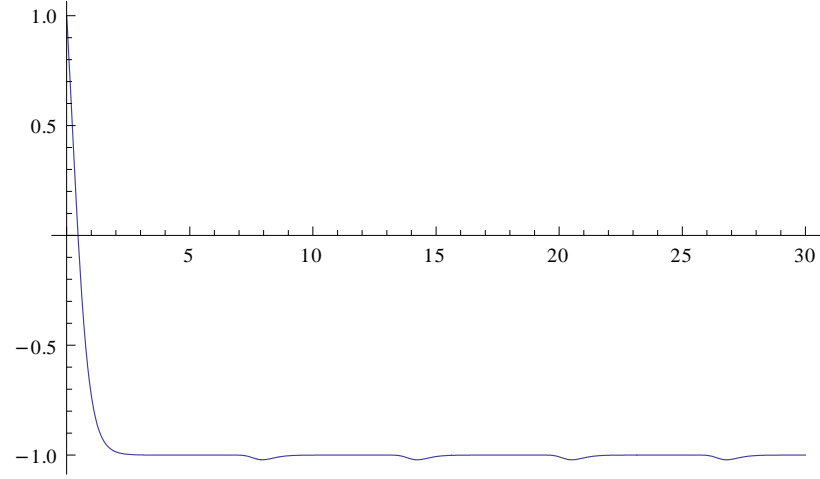
Şekil 5.16. Üçüncü yaklaşımın sonucunda elde edilen grafik



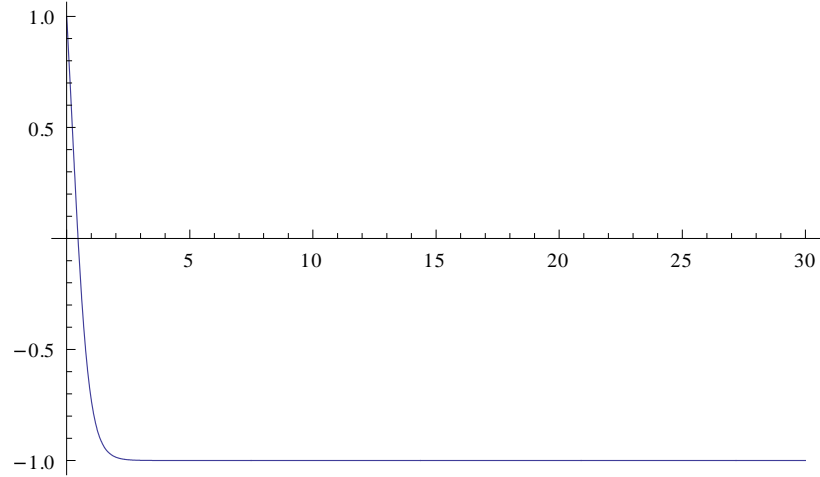
Şekil 5.17. Dördüncü yaklaşımın sonucunda elde edilen grafik



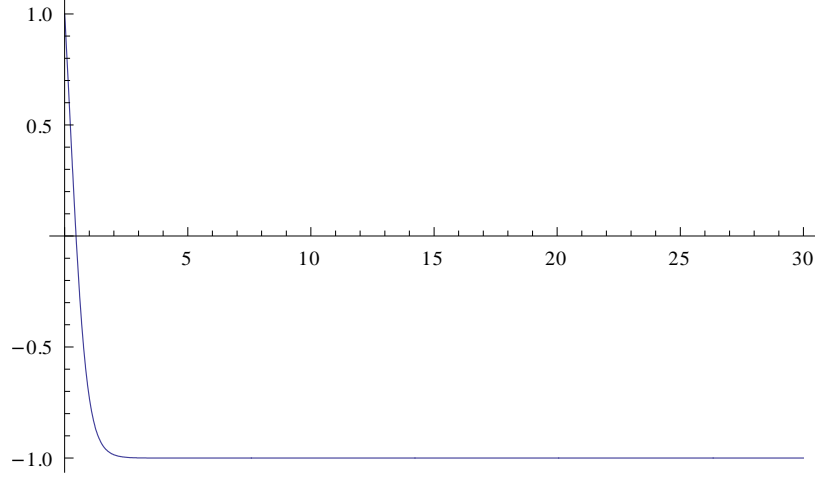
Şekil 5.18. Beşinci yaklaşımın sonucunda elde edilen grafik



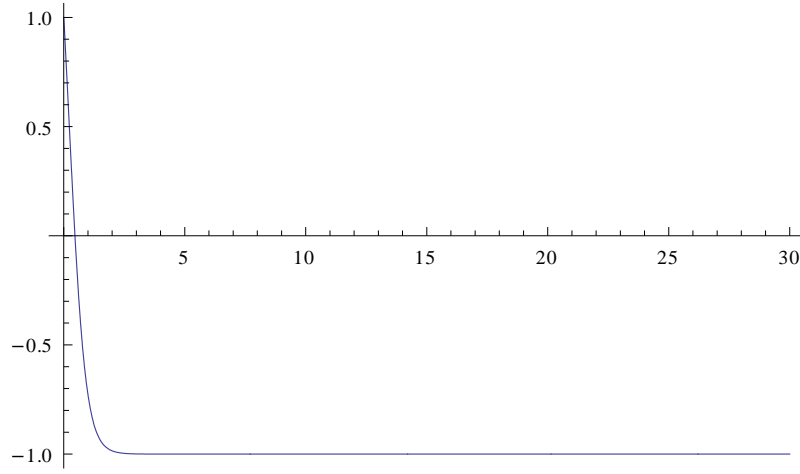
Şekil 5.19. Altıncı yaklaşımın sonucunda elde edilen grafik



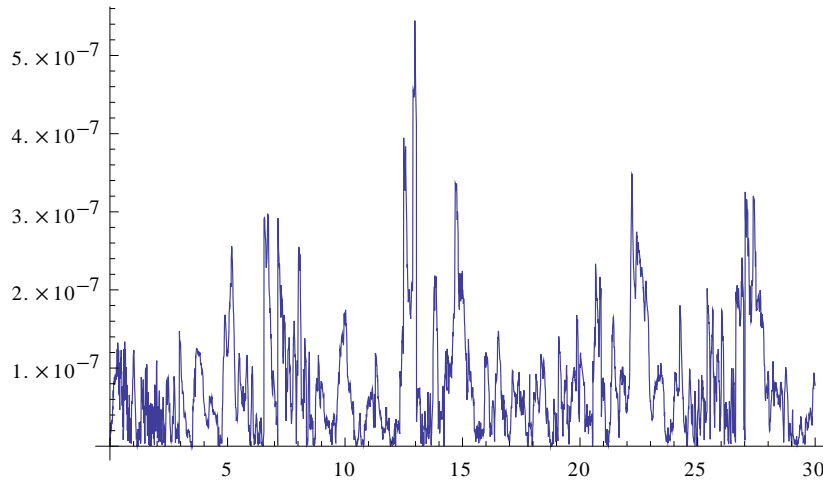
Şekil 5.20. Yedinci yaklaşımın sonucunda elde edilen grafik



Şekil 5.21. Sekizinci yaklaşımın sonucunda elde edilen grafik



Şekil 5.22. Dokuzuncu yaklaşımın sonucunda elde edilen grafik



Şekil 5.23. Dokuzuncu yaklaşım ile gerçek çözümün mutlak farkı

$y_0(x) = 1 - \frac{x}{15}$  başlangıç fonksiyonu ile  $y_0(x) = \cos(x)$  başlangıç fonksiyonunun dokuz yaklaşım yapılarak elde edilen sonuçları yukarıdaki grafiklerde verilmiştir.

## 5.2. Duffing Diferansiyel Denklemleri

$F(y) = my'' + ky + ay^3$  biçimindeki diferansiyel denklemlerdir.

### 5.2.1. Örnek

$y'' + 0.1y + 0.01y^3 = 0$  Duffing diferansiyel denklemleri verilsin. Bu denklemin Newton yöntemiyle yaklaşık çözümünü araştırın.

$F : C^2[a, b] \rightarrow C[a, b]$  operatörü  $F(y) = y'' + 0.1y + 0.01y^3$  biçiminde tanımlansın. Bu durumda  $F(y) = 0$  denkleminin Newton yöntemiyle yaklaşık çözümü araştırılacaktır.

#### Çözüm:

$F(y) = y'' + 0.1y + 0.01y^3$  diferansiyel denkleminin Frechet türevi araştırılırsa,

$$\begin{aligned} F(y+h) &= (y+h)'' + 0.1(y+h) + 0.01(y+h)^3 \\ &= y'' + h'' + 0.1y + 0.1h + 0.01(y^3 + 3y^2h + 3yh^2 + h^3) \end{aligned}$$

$$F(y+h) - F(y) = F'(y)h + w(h)$$

$$F(y+h) - F(y) = y'' + h'' + 0.1y + 0.1h + 0.01(y^3 + 3y^2h + 3yh^2 + h^3) - (y'' + 0.1y + 0.01y^3)$$

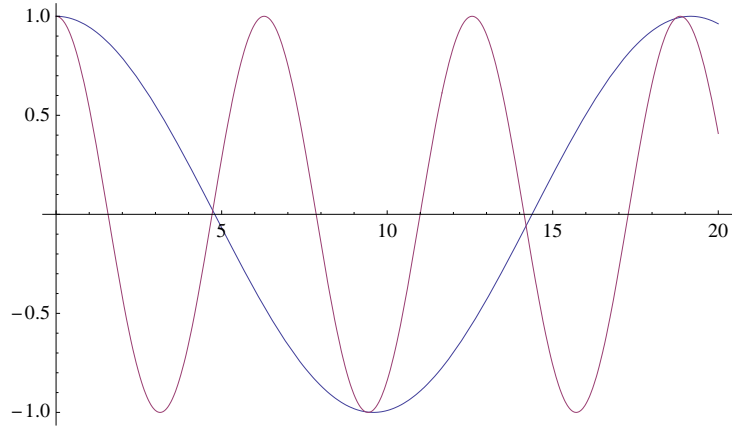
$$F'(y)h + w(h) = h'' + 0.1h + 0.01(3y^2h + 3yh^2 + h^3)$$

elde edilir. Burada  $w(h) = 0.03yh^2 + h^3$  olmak üzere

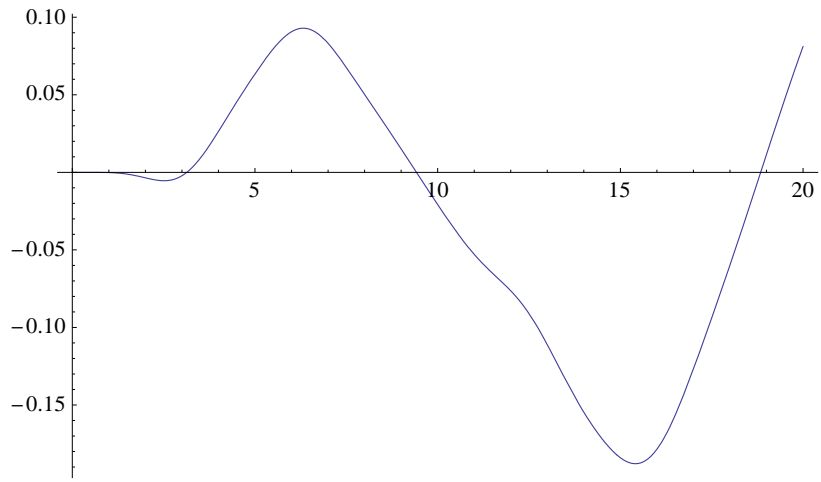
$$\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{\|w(h)\|}{\|h\|} = \lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{\|0.03yh^2 + h^3\|}{\|h\|} = 0$$

dır. Verilen denklemin yaklaşık çözümü için oluşturulan algoritma Ek-4 te verilmiş olup,  $y_0(x)$  başlangıç fonksiyonu olarak  $y_0(x) = \cos(x)$  alındığında elde edilen sonuçlar aşağıda gösterilmiştir.

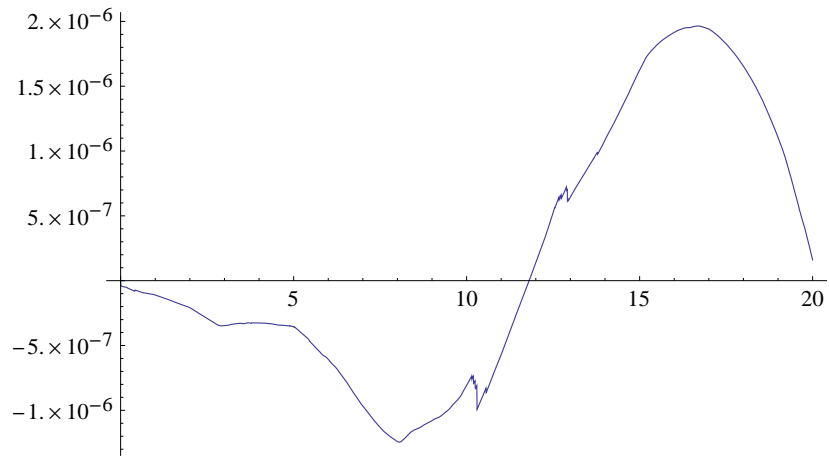




Şekil 5.24. Mathematica çözümü ile başlangıç fonksiyonun grafikleri



Şekil 5.25. Mathematica çözümü ile birinci yaklaşımın mutlak farkının grafiği



Şekil 5.26. Mathematica çözümü ile üçüncü yaklaşımın mutlak farkının grafiği

### 5.3. Başlangıç Değer Problemi

#### 5.3.1. Örnek

$$y'' + \sin(y) = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

başlangıç değer probleminin yaklaşık çözümünü Newton yöntemiyle araştırın.

Burada  $F : C^2[a, b] \rightarrow C[a, b]$  operatörü

$F(y) = y'' + \sin(y)$  biçiminde tanımlanırsa  $F(y) = 0$  denkleminin yaklaşık çözümü

Newton yöntemiyle araştırılacaktır.

#### Çözüm:

Bu operatör lineer olmadığından Frechet türevini alarak lineer hale getirilmelidir.

Bunun için;

$$\begin{aligned} F(y+h) &= (y+h)'' + \sin(y+h) \\ F(y) &= y'' + \sin(y) \end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} F(y+h) - F(y) &= (y+h)'' - y'' + \sin(y+h) - \sin(y) \\ &= y'' + h'' - y'' + \sin(y+h) - \sin(y) \end{aligned}$$

olur.  $\sin(y+h)$ 'ın  $h$  civarında Taylor seri açılımı

$$\sin(y+h) = \sin(y) + \sin'(y)h + \frac{\sin''(y)}{2!}h^2 + \dots$$

şeklinde olup, bu ifade yukarıda yerine yazılarak

$$F(y+h) - F(y) = h'' - \sin(y) + \sin(y) + \sin'(y)h + \frac{\sin''(y)}{2!}h^2 + \dots$$

elde edilir. Buradan

$$F(y+h) - F(y) = h'' + \sin'(y)h + \underbrace{\frac{\sin''(y)}{2!}h^2 + \dots}_{\omega(h)}$$

eşitliğine ulaşır.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|\omega(h)\|}{\|h\|} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left\| \frac{\sin''(y)}{2!}h^2 + \dots \right\|}{\|h\|} = 0$$

olduğundan  $\|\omega(h)\| = o(\|h\|)$  eşitliği görülür. Böylece  $h$  vektörüne göre lineer olan parça ile verilen operatörünün Frechet türevi:

$$F'(y)h = h'' + \cos(y)h$$

biçiminde elde edilir. Bu durumda ardışık yaklaşımlar için kullanılan

$$y_1 = y_0 + h_1 = y_0 - \frac{F(y_0)}{F'(y_0)}$$

$$y_1 - y_0 = h_1, \quad y_1 = y_0 - \frac{F(y_0)}{F'(y_0)}, \quad (y_1 - y_0 = h_1) \Rightarrow F'(y_0)h = -F(y_0)$$

eşitliklerinde Frechet türevini yerine yazılırsa

$$h'' + \cos(y_0).h = -F(y_0)$$

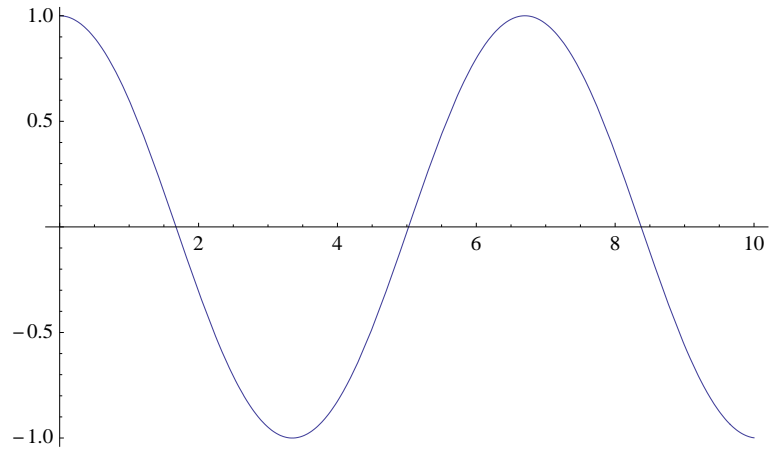
olur.  $y(0) = 1$   $y'(0) \neq$  başlangıç koşullarını sağlayan  $y_0 = \cos(t)$  başlangıç yaklaşımı ile Newton yöntemi uygulamaya başlanırsa

$$h'' + \cos(\cos t) \cdot h = -(\cos'' t + \sin(\cos t))$$

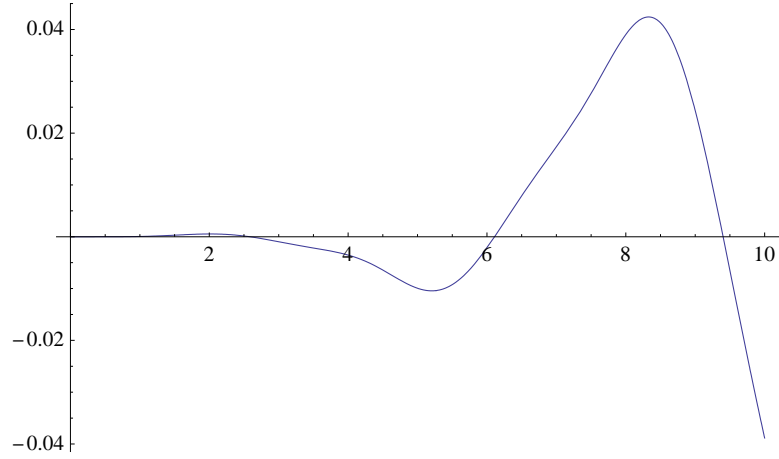
$$h'' + \cos(\cos t) \cdot h = \cos t - \sin(\cos t)$$

$$h(0) = 0 \quad h'(0) = 0$$

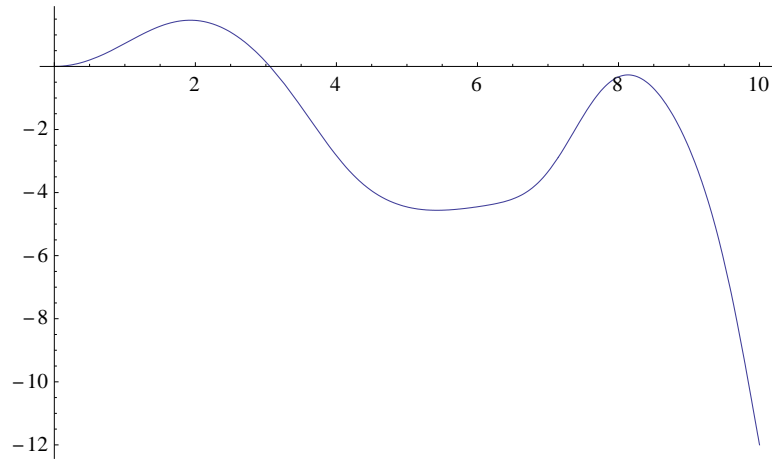
eşitlikleri elde edilir. Verilen denklemin yaklaşık çözümü için oluşturulan algoritma Ek-5 te verilmiş olup,  $y_0(t)$  başlangıç fonksiyonu olarak  $y_0(t) = \cos(t)$  alındığında elde edilen sonuçlar aşağıda gösterilmiştir.



Şekil 5.27. Mathematica çözümünün grafiği



Şekil 5.28. Birinci yaklaşımın mutlak hatasının grafiği



Şekil 5.29. Üçüncü yaklaşımın mutlak hatalarının grafiği

## 5.4. Sınır Değer Problemi

### 5.4.1. Örnek

$$-y'' + ty^2 - t^3 = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0$$

sınır değer probleminin yaklaşık çözümünü Newton yöntemiyle araştırın. Burada  $F : C^2[a, b] \rightarrow C[a, b]$  operatörü  $F(y) = -y'' + ty^2 - t^3$  biçiminde tanımlanırsa  $F(y) = 0$  denkleminin yaklaşık çözümü Newton yöntemiyle araştırılacaktır.

### Çözüm:

Daha önceki örneklerde olduğu gibi operatör lineer olmadığından Frechet türevini alarak lineer hale getirilmelidir. Bunun için;

$$F(y+h) = -(y+h)'' + t(y+h)^2 - t^3$$

$$F(y) = -y'' + ty^2 - t^3$$

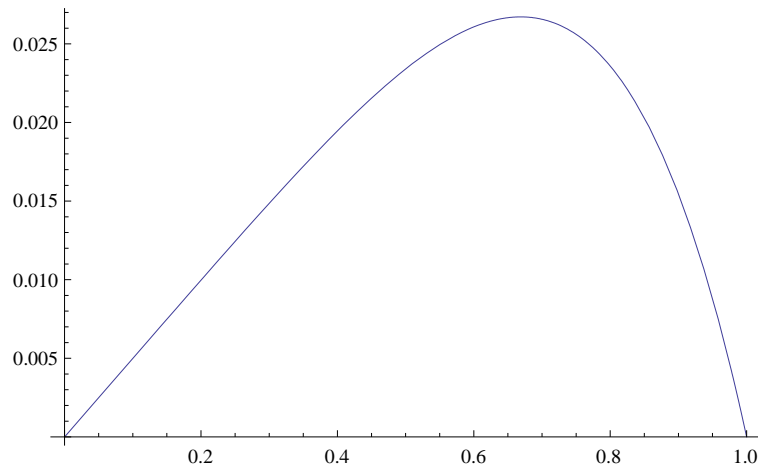
olduğundan

$$\begin{aligned}
F(y+h) - F(y) &= -(y+h)'' + t(y+h)^2 - t^3 - (-y'' + ty^2 - t^3) \\
&= -h'' - 2yht + h^2t \\
F'(y)h + w(h) &= -h'' - 2yht + h^2t \\
w(h) &= h^2t
\end{aligned}$$

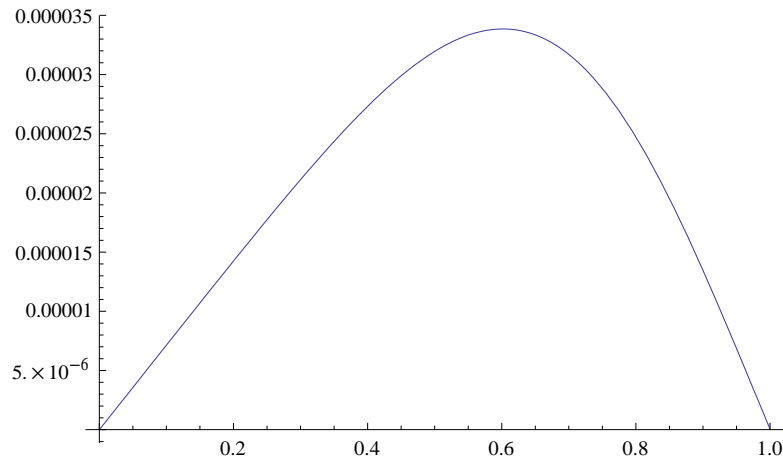
elde edilir.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|\omega(h)\|}{\|h\|} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|th^2\|}{\|h\|} = 0$$

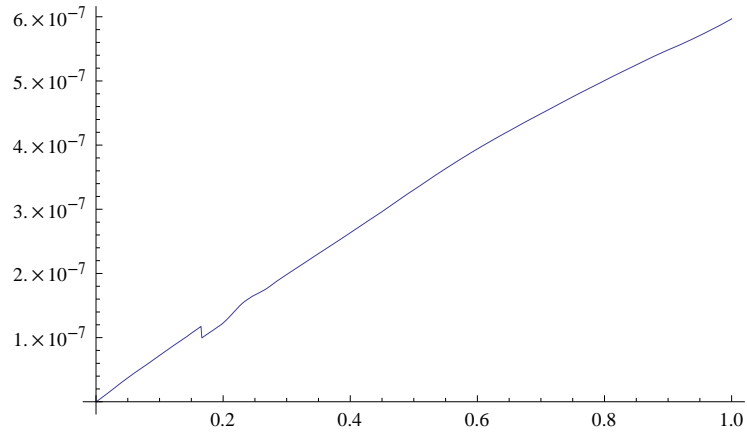
dır. Verilen denklemin yaklaşık çözümü için oluşturulan algoritma Ek-6 da verilmiş olup,  $y_0(x)$  başlangıç fonksiyonu olarak  $y_0(x) = 0$  alındığında elde edilen sonuçlar aşağıda gösterilmiştir.



Şekil 5.30. Gerçek çözümün grafiği



Şekil 5.31. Birinci yaklaşım ile gerçek çözümün mutlak farkının grafiği



Şekil 5.32. Üçüncü yaklaşım ile gerçek çözümün mutlak farkının grafiği

## BÖLÜM 6. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmada lineer olmayan operatör denklemlerin yaklaşık çözümünde Newton metodu kullanımı incelenmiştir. Matematik biliminin yanı sıra temel bilimlerde ve mühendisliğin birçok dalında lineer olmayan operatör denklemlerin çözülmesi en çok üzerinde çalışılan konulardan biridir. Analitik çözümlerin mümkün olmadığı durumlarda, ki pratikte birçok problemde karşılaşılmaktadır, lineer olmayan bir operatöre lineer bir yaklaşım yapmak ve yaklaşık çözümlere başvurmak gerekir.

Çalışma esnasında Newton metodunun gelişimi kısaca verildikten sonra bazı temel matematik kavramları değinilmiştir. Lineer olmayan operatör denklemlerin çözümlerinin ardışık yaklaşım yoluyla belirlenmesinde Newton yöntemi önemli bir yer tutmaktadır. Newton yönteminde kullanılacak fonksiyonların türev alma işlemleri için gerekli olan Frechet ve Gateaux türevleri ile ilgili ayrıntılı bir bilgi verilmiştir. Bu çalışmada Newton yönteminin bazı yakınsama kriterleri ile metodu detaylı olarak anlatılmış teori ve uygulamaları birlikte sergilenmiştir.

Newton metodunun lineer olmayan diferansiyel denklemlere ve lineer olmayan denklem sistemlerine uygulanması anlatılmıştır. Lineer olmayan terimlerin görüldüğü Riccati ve Duffing denklemlerinin yaklaşık çözümleri Newton yöntemi ile elde edilmiş olup, seçilen başlangıç yaklaşımının yöntemin yakınsamasına etkisi olduğu farklı başlangıç fonksiyonları alınarak görülmüştür. Bu durum göz önünde bulundurularak, verilen lineer olmayan denklemin Newton yöntemi ile yaklaşık çözümünde başlangıç fonksiyonlarının çözüme hangi koşullar altında daha hızlı yakınsayacağı daha ileriki bir çalışmanın konusu niteliğindedir.



## KAYNAKLAR

- [1] YILDIZ, A. ve ERÖZ, M., Fonksiyonel Analiz. Sakarya Üniversitesi Yayınları, 2009.
- [2] MUSAYEV, B. ve ALP, M. Fonksiyonel Analiz, Balcı Yayınları, 2000
- [3] ŞUHUBİ, E.S, Fonksiyonel Analiz, İTÜ Vakfı yayınları, 2001.
- [4] KREYSZIG, E., Introductory Functional Analysis With Application, John Wiley and Sons, 1987.
- [5] KINCAID, D. and CHENEY, W., Numerical Analysis Mathematics of Scientific Computing, Brooks/Cole Publishing company.1991.
- [6] AMİRALİ, G., DURU, H., Nümerik Analiz, Pegem Yayıncılık, 2002.

## EKLER

### EK 1: Newton Yöntemi Sistem

```
Clear[x, y]
f[x_, y_] := 4 * y^2 + 4 * y + 52 * x - 19;
g[x_, y_] := 169 * x^2 + 3 * y^2 + 111 * x - 10 * y - 10;
NSolve[{4 * y^2 + 4 * y + 52 * x - 19 == 0, 169 * x^2 + 3 * y^2 + 111 * x - 10 * y - 10 == 0}, {x, y}]

X =  $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ ;
Do[
  x = X[[1, 1]]; y = X[[2, 1]];
  Y = X - Inverse $\begin{pmatrix} 52 & 28 \\ -227 & 8 \end{pmatrix}$  *  $\begin{pmatrix} 4 * y^2 + 4 * y + 52 * x - 19 \\ 169 * x^2 + 3 * y^2 + 111 * x - 10 * y - 10 \end{pmatrix}$ ;
  Print["Y-", i, "=", N[Y // MatrixForm]]; X = Y, {i, 1, 15}]
```

### EK 2: Riccati 1

```
ss = First[y /. NDSolve[{y'[x] == -2 - y[x] + (y[x])^2, y[0] == 1}, y, {x, 0, 30}]];
y0[x_] :=  $\left(1 - \frac{x}{15}\right)$ 
Plot[ss[x], {x, 0, 30}, AxesOrigin -> {0, 0}, PlotRange -> All]

ilk = First[
  h /. NDSolve[{h'[x] + (1 - 2 * y0[x]) * h[x] == -y0'[x] - 2 - y0[x] + (y0[x])^2, h[0] == 0},
  h, {x, 0, 30}]];
(*Plot[ilk[x], {x, 0, 30}, AxesOrigin -> {0, 0}, PlotRange -> All]*)
y1[x_] := ilk[x] + y0[x];
Plot[y1[x], {x, 0, 30}, PlotLabel -> "y1(x): Birinci Yakla m",
  AxesOrigin -> {0, 0}, PlotRange -> All]

iki = First[h1 /.
  NDSolve[{h1'[x] + (1 - 2 * (y1[x])) * h1[x] == -y1'[x] - 2 - y1[x] + (y1[x])^2, h1[0] == 0},
  h1, {x, 0, 30}]]; Plot[iki[x] + y1[x], {x, 0, 30},
  PlotLabel -> "y2(x): ikinci Yakla m", AxesOrigin -> {0, 0}, PlotRange -> All]
y2[x_] := iki[x] + y1[x]

uc = First[h2 /.
  NDSolve[{h2'[x] + (1 - 2 * (y2[x])) * h2[x] == -y2'[x] - 2 - y2[x] + (y2[x])^2, h2[0] == 0},
  h2, {x, 0, 30}]]; Plot[uc[x] + y2[x], {x, 0, 30},
  PlotLabel -> "y3(x): nc Yakla m", AxesOrigin -> {0, 0}, PlotRange -> All]
y3[x_] := uc[x] + y2[x]
```

```

dort = First[h3 /.
  NDSolve[{h3'[x] + (1 - 2 * (y3[x])) * h3[x] == -y3'[x] - 2 - y3[x] + (y3[x])^2, h3[0] == 0},
    h3, {x, 0, 30}]; Plot[dort[x] + y3[x], {x, 0, 30},
  PlotLabel -> "y4(x):d rd nc Yakla m", AxesOrigin -> {0, 0}, PlotRange -> All]
y4[x_] := dort[x] + y3[x]

bes = First[h4 /.
  NDSolve[{h4'[x] + (1 - 2 * (y4[x])) * h4[x] == -y4'[x] - 2 - y4[x] + (y4[x])^2, h4[0] == 0},
    h4, {x, 0, 30}]; Plot[bes[x] + y4[x], {x, 0, 30},
  PlotLabel -> "y5(x):Be inci Yakla m", AxesOrigin -> {0, 0}, PlotRange -> All]
y5[x_] := bes[x] + y4[x]

alt = First[h5 /.
  NDSolve[{h5'[x] + (1 - 2 * (y5[x])) * h5[x] == -y5'[x] - 2 - y5[x] + (y5[x])^2, h5[0] == 0},
    h5, {x, 0, 30}]; Plot[alt[x] + y5[x], {x, 0, 30},
  PlotLabel -> "y6(x):Alt nc Yakla m", AxesOrigin -> {0, 0}, PlotRange -> All]
y6[x_] := alt[x] + y5[x]

yed = First[h6 /.
  NDSolve[{h6'[x] + (1 - 2 * (y6[x])) * h6[x] == -y6'[x] - 2 - y6[x] + (y6[x])^2, h6[0] == 0},
    h6, {x, 0, 30}]; Plot[yed[x] + y6[x], {x, 0, 30},
  PlotLabel -> "y7(x):Yedinci Yakla m", AxesOrigin -> {0, 0}, PlotRange -> All]
y7[x_] := yed[x] + y6[x]

sek = First[h7 /.
  NDSolve[{h7'[x] + (1 - 2 * (y7[x])) * h7[x] == -y7'[x] - 2 - y7[x] + (y7[x])^2, h7[0] == 0},
    h7, {x, 0, 30}]; Plot[sek[x] + y7[x], {x, 0, 30},
  PlotLabel -> "y8(x):Sekizinci Yakla m", AxesOrigin -> {0, 0}, PlotRange -> All]
y8[x_] := sek[x] + y7[x]

dok = First[h8 /.
  NDSolve[{h8'[x] + (1 - 2 * (y8[x])) * h8[x] == -y8'[x] - 2 - y8[x] + (y8[x])^2, h8[0] == 0},
    h8, {x, 0, 30}]; Plot[dok[x] + y8[x], {x, 0, 30},
  PlotLabel -> "y9(x):Dokuzuncu Yakla m", AxesOrigin -> {0, 0}, PlotRange -> All]
y9[x_] := dok[x] + y8[x]
Plot[ss[x] - y9[x], {x, 0, 30},
  PlotLabel -> "ger ek-dokuzuncu", AxesOrigin -> {0, 0}, PlotRange -> All]

(*HATA ANAL Z *)
RD = Table[0, {300}];
Do[RD[[hh * 10]] = ss[hh], {hh, 0.1, 30, 0.1}];
D1 = Table[0, {300}];
Do[D1[[hh * 10]] = y1[hh], {hh, 0.1, 30, 0.1}];
D2 = Table[0, {300}];
Do[D2[[hh * 10]] = y2[hh], {hh, 0.1, 30, 0.1}];
D3 = Table[0, {300}];
Do[D3[[hh * 10]] = y3[hh], {hh, 0.1, 30, 0.1}];
D4 = Table[0, {300}];
Do[D4[[hh * 10]] = y4[hh], {hh, 0.1, 30, 0.1}];
D5 = Table[0, {300}];
Do[D5[[hh * 10]] = y5[hh], {hh, 0.1, 30, 0.1}];
D6 = Table[0, {300}];
Do[D6[[hh * 10]] = y6[hh], {hh, 0.1, 30, 0.1}];
D7 = Table[0, {300}];
Do[D7[[hh * 10]] = y7[hh], {hh, 0.1, 30, 0.1}];
D8 = Table[0, {300}];
Do[D8[[hh * 10]] = y8[hh], {hh, 0.1, 30, 0.1}];
D9 = Table[0, {300}];
Do[D9[[hh * 10]] = y9[hh], {hh, 0.1, 30, 0.1}];

```

$$H1 = \sqrt{\sum_{k=1}^{300} (\text{Abs}[\text{RD}[[k]] - \text{D1}[[k]])^2}; H2 = \sqrt{\sum_{k=1}^{300} (\text{Abs}[\text{RD}[[k]] - \text{D2}[[k]])^2};$$

$$H3 = \sqrt{\sum_{k=1}^{300} (\text{Abs}[\text{RD}[[k]] - \text{D3}[[k]])^2};$$

$$H4 = \sqrt{\sum_{k=1}^{300} (\text{Abs}[\text{RD}[[k]] - \text{D4}[[k]])^2}; H5 = \sqrt{\sum_{k=1}^{300} (\text{Abs}[\text{RD}[[k]] - \text{D5}[[k]])^2};$$

$$H6 = \sqrt{\sum_{k=1}^{300} (\text{Abs}[\text{RD}[[k]] - \text{D6}[[k]])^2}; H7 = \sqrt{\sum_{k=1}^{300} (\text{Abs}[\text{RD}[[k]] - \text{D7}[[k]])^2};$$

$$H8 = \sqrt{\sum_{k=1}^{300} (\text{Abs}[\text{RD}[[k]] - \text{D8}[[k]])^2}; H9 = \sqrt{\sum_{k=1}^{300} (\text{Abs}[\text{RD}[[k]] - \text{D9}[[k]])^2};$$

```
Print["H1=", H1]; Print["H2=", H2]; Print["H3=", H3];
Print["H4=", H4]; Print["H5=", H5]; Print["H6=", H6];
Print["H7=", H7]; Print["H8=", H8]; Print["H9=", H9];
```

### EK 3: Riccati 2

```
ss = First[y /. NDSolve[{y'[x] == -2 - y[x] + (y[x])^2, y[0] == 1}, y, {x, 0, 30}]];
y0[x_] := Cos[x]
Plot[ss[x], {x, 0, 30}, AxesOrigin -> {0, 0}, PlotRange -> All]

ilk = First[
  h /. NDSolve[{h'[x] + (1 - 2 * y0[x]) * h[x] == -y0'[x] - 2 - y0[x] + (y0[x])^2, h[0] == 0},
    h, {x, 0, 30}]];
(*Plot[ilk[x], {x, 0, 30}, AxesOrigin -> {0, 0}, PlotRange -> All]*)
y1[x_] := ilk[x] + y0[x]
Plot[y1[x], {x, 0, 30}, PlotLabel -> "y1(x): Birinci Yakla m",
  AxesOrigin -> {0, 0}, PlotRange -> All]

iki = First[h1 /.
  NDSolve[{h1'[x] + (1 - 2 * (y1[x])) * h1[x] == -y1'[x] - 2 - y1[x] + (y1[x])^2, h1[0] == 0},
    h1, {x, 0, 30}]]; Plot[iki[x] + y1[x], {x, 0, 30},
  PlotLabel -> "y2(x): ikinci Yakla m", AxesOrigin -> {0, 0}, PlotRange -> All]
y2[x_] := iki[x] + y1[x]

uc = First[h2 /.
  NDSolve[{h2'[x] + (1 - 2 * (y2[x])) * h2[x] == -y2'[x] - 2 - y2[x] + (y2[x])^2, h2[0] == 0},
    h2, {x, 0, 30}]]; Plot[uc[x] + y2[x], {x, 0, 30},
  PlotLabel -> "y3(x): nc Yakla m", AxesOrigin -> {0, 0}, PlotRange -> All]
y3[x_] := uc[x] + y2[x]

dort = First[h3 /.
  NDSolve[{h3'[x] + (1 - 2 * (y3[x])) * h3[x] == -y3'[x] - 2 - y3[x] + (y3[x])^2, h3[0] == 0},
    h3, {x, 0, 30}]]; Plot[dort[x] + y3[x], {x, 0, 30},
  PlotLabel -> "y4(x): d rd nc Yakla m", AxesOrigin -> {0, 0}, PlotRange -> All]
y4[x_] := dort[x] + y3[x]
```

```

bes = First[h4 /.
  NDSolve[{h4'[x] + (1 - 2 * (y4[x])) * h4[x] == -y4'[x] - 2 - y4[x] + (y4[x])^2, h4[0] == 0},
    h4, {x, 0, 30}]]; Plot[bes[x] + y4[x], {x, 0, 30},
  PlotLabel -> "y5(x):Be inci Yakla m", AxesOrigin -> {0, 0}, PlotRange -> All]
y5[x_] := bes[x] + y4[x]

alt = First[h5 /.
  NDSolve[{h5'[x] + (1 - 2 * (y5[x])) * h5[x] == -y5'[x] - 2 - y5[x] + (y5[x])^2, h5[0] == 0},
    h5, {x, 0, 30}]]; Plot[alt[x] + y5[x], {x, 0, 30},
  PlotLabel -> "y6(x):Alt nc Yakla m", AxesOrigin -> {0, 0}, PlotRange -> All]
y6[x_] := alt[x] + y5[x]

yed = First[h6 /.
  NDSolve[{h6'[x] + (1 - 2 * (y6[x])) * h6[x] == -y6'[x] - 2 - y6[x] + (y6[x])^2, h6[0] == 0},
    h6, {x, 0, 30}]]; Plot[yed[x] + y6[x], {x, 0, 30},
  PlotLabel -> "y7(x):Yedinci Yakla m", AxesOrigin -> {0, 0}, PlotRange -> All]
y7[x_] := yed[x] + y6[x]

sek = First[h7 /.
  NDSolve[{h7'[x] + (1 - 2 * (y7[x])) * h7[x] == -y7'[x] - 2 - y7[x] + (y7[x])^2, h7[0] == 0},
    h7, {x, 0, 30}]]; Plot[sek[x] + y7[x], {x, 0, 30},
  PlotLabel -> "y8(x):Sekizinci Yakla m", AxesOrigin -> {0, 0}, PlotRange -> All]
y8[x_] := sek[x] + y7[x]

dok = First[h8 /.
  NDSolve[{h8'[x] + (1 - 2 * (y8[x])) * h8[x] == -y8'[x] - 2 - y8[x] + (y8[x])^2, h8[0] == 0},
    h8, {x, 0, 30}]]; Plot[dok[x] + y8[x], {x, 0, 30},
  PlotLabel -> "y9(x):Dokuzuncu Yakla m", AxesOrigin -> {0, 0}, PlotRange -> All]
y9[x_] := dok[x] + y8[x]

Plot[y8[x] - y9[x], {x, 0, 30},
  PlotLabel -> "sekizinci-dokuzuncu", AxesOrigin -> {0, 0}, PlotRange -> All]
Plot[ss[x] - y9[x], {x, 0, 30}, PlotLabel -> "ger ek-dokuzuncu",
  AxesOrigin -> {0, 0}, PlotRange -> All]
(*HATA ANAL Z *)
RD = Table[0, {300}];
Do[RD[[hh * 10]] = ss[hh], {hh, 0.1, 30, 0.1}];
D1 = Table[0, {300}];
Do[D1[[hh * 10]] = y1[hh], {hh, 0.1, 30, 0.1}];
D2 = Table[0, {300}];
Do[D2[[hh * 10]] = y2[hh], {hh, 0.1, 30, 0.1}];
D3 = Table[0, {300}];
Do[D3[[hh * 10]] = y3[hh], {hh, 0.1, 30, 0.1}];
D4 = Table[0, {300}];
Do[D4[[hh * 10]] = y4[hh], {hh, 0.1, 30, 0.1}];
D5 = Table[0, {300}];
Do[D5[[hh * 10]] = y5[hh], {hh, 0.1, 30, 0.1}];
D6 = Table[0, {300}];
Do[D6[[hh * 10]] = y6[hh], {hh, 0.1, 30, 0.1}];
D7 = Table[0, {300}];
Do[D7[[hh * 10]] = y7[hh], {hh, 0.1, 30, 0.1}];
D8 = Table[0, {300}];
Do[D8[[hh * 10]] = y8[hh], {hh, 0.1, 30, 0.1}];
D9 = Table[0, {300}];
Do[D9[[hh * 10]] = y9[hh], {hh, 0.1, 30, 0.1}];

```

$$H1 = \sqrt{\sum_{k=1}^{300} (\text{Abs}[RD[[k]] - D1[[k]])^2}; H2 = \sqrt{\sum_{k=1}^{300} (\text{Abs}[RD[[k]] - D2[[k]])^2};$$

$$H3 = \sqrt{\sum_{k=1}^{300} (\text{Abs}[\text{RD}[[k]] - \text{D3}[[k]]])^2};$$

$$H4 = \sqrt{\sum_{k=1}^{300} (\text{Abs}[\text{RD}[[k]] - \text{D4}[[k]]])^2}; \quad H5 = \sqrt{\sum_{k=1}^{300} (\text{Abs}[\text{RD}[[k]] - \text{D5}[[k]]])^2};$$

$$H6 = \sqrt{\sum_{k=1}^{300} (\text{Abs}[\text{RD}[[k]] - \text{D6}[[k]]])^2}; \quad H7 = \sqrt{\sum_{k=1}^{300} (\text{Abs}[\text{RD}[[k]] - \text{D7}[[k]]])^2};$$

$$H8 = \sqrt{\sum_{k=1}^{300} (\text{Abs}[\text{RD}[[k]] - \text{D8}[[k]]])^2}; \quad H9 = \sqrt{\sum_{k=1}^{300} (\text{Abs}[\text{RD}[[k]] - \text{D9}[[k]]])^2};$$

```
Print["H1=", H1]; Print["H2=", H2]; Print["H3=", H3];
Print["H4=", H4]; Print["H5=", H5]; Print["H6=", H6];
Print["H7=", H7]; Print["H8=", H8]; Print["H9=", H9];
```

## EK 4: Duffing

```
gercek = First[y /.
  NDSolve[{y''[x] == -0.1 * y[x] - 0.01 * (y[x])^3, y[0] == 1, y'[0] == 0}, y, {x, 0, 20}]];
y0[x_] := Cos[x]
Plot[{gercek[x], y0[x]}, {x, 0, 20}, AxesOrigin -> {0, 0}, PlotRange -> All]
ilk = First[h /. NDSolve[{h''[x] + (0.1 + 0.01 * 3 * (y0[x])^2) * h[x] ==
  -y0''[x] - 0.1 * y0[x] - 0.01 * (y0[x])^3, h[0] == 0, h'[0] == 0}, h, {x, 0, 20}]]
y1[x_] := ilk[x] + y0[x]
Plot[gercek[x] - y1[x], {x, 0, 20}, AxesOrigin -> {0, 0}, PlotRange -> All]
iki = First[h1 /. NDSolve[{h1''[x] + (0.1 + 0.01 * 3 * (y1[x])^2) * h1[x] ==
  -y1''[x] - 0.1 * y1[x] - 0.01 * (y1[x])^3, h1[0] == 0, h1'[0] == 0}, h1, {x, 0, 20}]];
Plot[gercek[x] - iki[x] - y1[x], {x, 0, 20}, AxesOrigin -> {0, 0}, PlotRange -> All]
y2[x_] := iki[x] + y1[x]
uc = First[h2 /. NDSolve[{h2''[x] + (0.1 + 0.01 * 3 * (y2[x])^2) * h2[x] ==
  -y2''[x] - 0.1 * y2[x] - 0.01 * (y2[x])^3, h2[0] == 0, h2'[0] == 0}, h2, {x, 0, 20}]]
Plot[gercek[x] - uc[x] - y2[x], {x, 0, 20}, AxesOrigin -> {0, 0}, PlotRange -> All]
(*y3[x_] := uc[x] + y2[x]
dort = First[h3 /. NDSolve[
  {h3'[x] + (1 - 2 * (y3[x])) * h3[x] == -y3'[x] - 2 * y3[x] + (y3[x])^2, h3[0] == 0}, h3, {x, 0, 30}]];
Plot[dort[x] + y3[x], {x, 0, 30}, AxesOrigin -> {0, 0}, PlotRange -> All]
y4[x_] := dort[x] + y3[x]
bes = First[h4 /. NDSolve[
  {h4'[x] + (1 - 2 * (y4[x])) * h4[x] == -y4'[x] - 2 * y4[x] + (y4[x])^2, h4[0] == 0}, h4, {x, 0, 30}]];
Plot[bes[x] + y4[x], {x, 0, 30}, AxesOrigin -> {0, 0}, PlotRange -> All]
y5[x_] := bes[x] + y4[x]
alt = First[h5 /. NDSolve[
  {h5'[x] + (1 - 2 * (y5[x])) * h5[x] == -y5'[x] - 2 * y5[x] + (y5[x])^2, h5[0] == 0}, h5, {x, 0, 30}]];
Plot[alt[x] + y5[x], {x, 0, 30}, AxesOrigin -> {0, 0}, PlotRange -> All]
y6[x_] := alt[x] + y5[x]
yed = First[h6 /. NDSolve[
  {h6'[x] + (1 - 2 * (y6[x])) * h6[x] == -y6'[x] - 2 * y6[x] + (y6[x])^2, h6[0] == 0}, h6, {x, 0, 30}]];
Plot[yed[x] + y6[x], {x, 0, 30}, AxesOrigin -> {0, 0}, PlotRange -> All]
y7[x_] := yed[x] + y6[x]
```

```

sek=First[h7/.NDSolve[
  {h7'[x]+(1-2*(y7[x]))*h7[x]==-y7'[x]-2-y7[x]+(y7[x])^2,h7[0]==0},h7,{x,0,30}]];
Plot[sek[x]+y7[x],{x,0,30},AxesOrigin->{0,0},PlotRange->All]
y8[x_]:=sek[x]+y7[x]
dok=First[h8/.NDSolve[
  {h8'[x]+(1-2*(y8[x]))*h8[x]==-y8'[x]-2-y8[x]+(y8[x])^2,h8[0]==0},h8,{x,0,30}]];
Plot[dok[x]+y8[x],{x,0,30},AxesOrigin->{0,0},PlotRange->All]
y9[x_]:=dok[x]+y8[x]
Plot[ss[x]-y9[x],{x,0,30},AxesOrigin->{0,0},PlotRange->All]*

```

## EK 5: Başlangıç Değer

```

gercek =
  First[y /. NDSolve[{y''[t] + Sin[y[t]] == 0, y[0] == 1., y'[0] == 0}, y, {t, 0, 10}]];
Print["Mathematica z m "]; Plot[gercek[t], {t, 0, 10}]
cos = FunctionInterpolation[Cos[t], {t, 0, 10}];
ybir = First[h /. NDSolve[{h''[t] + Cos[Cos[t]] * h[t] == Cos[t] - Sin[Cos[t]],
  h'[0] == 0, h[0] == 0}, h, {t, 0, 10}]];
Plot[ybir[t] + cos[t] - gerçek[t], {t, 0, 10},
  Epilog -> Inset["1.yakla m hatas "], PlotRange -> All]

yiki = First[h2 /. NDSolve[
  {h2''[t] + Cos[ybir[t] + cos[t]] * h2[t] == -ybir''[t] - cos''[t] - Sin[ybir[t] + cos[t]],
  h2[0] == 0, h2'[0] == 0}, h2, {t, 0, 10}]];

Plot[yiki[t] + ybir[t] + Cos[t] - gerçek[t], {t, 0, 10},
  Epilog -> Inset["2.yakla m hatas "], PlotRange -> All]
yuc = First[h3 /. NDSolve[{h3''[t] + Cos[ybir[t] + cos[t] + yiki[t]] * h3[t] ==
  -ybir''[t] - cos''[t] - yiki''[t] - Sin[ybir[t] + cos[t] + yiki[t]],
  h3[0] == 0, h3'[0] == 0}, h3, {t, 0, 10}]];
Plot[yiki[t] + ybir[t] + Cos[t] + yuc[t] - gerçek[t], {t, 0, 10},
  Epilog -> Inset["3.yakla m hatas "], PlotRange -> All]

```

## EK 6: Sınır Değer

```

t0 = 0; t1 = 1;
gercek =
  First[y /. NDSolve[{-y''[t] + t*y[t]^2 == t^3, y[0] == 0, y[1] == 0}, y, {t, t0, t1}]];
Print["Mathematica z m "]; Plot[gercek[t], {t, t0, t1}]
y0[t_] := 0
hbir = First[
  h /. NDSolve[{-h''[t] + 2*t*y0[t]*h[t] == y0''[t] - t*y0[t]^2 + t^3, h[0] == 0, h[1] == 0},
  h, {t, t0, t1}]]; y1[t_] := hbir[t] + y0[t]
Plot[Abs[y1[t] - gerçek[t]], {t, t0, t1},
  Epilog -> Inset["1.yakla m hatas "], AxesOrigin -> {0, 0}, PlotRange -> All]
Plot[y1[t], {t, t0, t1}, Epilog -> Inset["1.yakla m "]]

```

```

hiki =
First[h2 /. NDSolve[{-h2''[t] + 2 t * y1[t] * h2[t] == y1''[t] - t * y1[t]^2 + t^3, h2[0] == 0,
  h2[1] == 0}, h2, {t, t0, t1}]; y2[t_] := hiki[t] + y1[t]
Plot[Abs[y2[t] - gercek[t]], {t, t0, t1},
Epilog -> Inset["2.yakla m hatas "], AxesOrigin -> {0, 0}, PlotRange -> All]
Plot[y2[t], {t, t0, t1}, Epilog -> Inset["2.yakla m "]]

huc =
First[h3 /. NDSolve[{-h3''[t] + 2 t * y2[t] * h3[t] == y2''[t] - t * y2[t]^2 + t^3, h3[0] == 0,
  h3[1] == 0}, h3, {t, t0, t1}]; y3[t_] := huc[t] + y2[t]
Plot[Abs[y3[t] - gercek[t]], {t, t0, t1},
Epilog -> Inset["3.yakla m hatas "], AxesOrigin -> {0, 0}, PlotRange -> All]
Plot[y3[t], {t, t0, t1}, Epilog -> Inset["3.yakla m "]]

hdort =
First[h4 /. NDSolve[{-h4''[t] + 2 t * y3[t] * h4[t] == y3''[t] - t * y3[t]^2 + t^3, h4[0] == 0,
  h4[1] == 0}, h4, {t, t0, t1}]; y4[t_] := hdort[t] + y3[t]
Plot[Abs[y4[t] - gercek[t]], {t, t0, t1},
Epilog -> Inset["4.yakla m hatas "], AxesOrigin -> {0, 0}, PlotRange -> All]
Plot[y4[t], {t, t0, t1}, Epilog -> Inset["4.yakla m "]]

hbcs =
First[h5 /. NDSolve[{-h5''[t] + 2 t * y4[t] * h5[t] == y4''[t] - t * y4[t]^2 + t^3, h5[0] == 0,
  h5[1] == 0}, h5, {t, t0, t1}]; y5[t_] := hbcs[t] + y4[t]
Plot[Abs[y5[t] - gercek[t]], {t, t0, t1},
Epilog -> Inset["5.yakla m hatas "], AxesOrigin -> {0, 0}, PlotRange -> All]
Plot[y5[t], {t, t0, t1}, Epilog -> Inset["5.yakla m "]]

Do[Print["xk=", xk];
Print["Birinci yakl m n hatas =", Abs[gercek[xk] - y1[xk]]];
Print[" ikinci yakl m n hatas =", Abs[gercek[xk] - y2[xk]]];
Print[" uc yakl m n hatas =", Abs[gercek[xk] - y3[xk]]];
Print["d rd nc yakl m n hatas =", Abs[gercek[xk] - y4[xk]]];
Print["Be inci yakl m n hatas =", Abs[gercek[xk] - y5[xk]]], {xk, t0, t1, 0.25}]

```



## ÖZGEÇMİŞ

Muhammed Abdussamed MALDAR, 1984 yılında Balıkesir'in İvrindi ilçesinde doğdu. Lise öğrenimini 2003 yılında Edremit Lisesi'nde tamamladı. 2004 yılında Sakarya Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde lisans eğitimine başlayıp 2008 yılında mezun oldu ve aynı yılda Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında yüksek lisans eğitimine başladı. 2009 yılında Aksaray üniversitesi Matematik Bölümünde Araştırma Görevliliğine atandı.