T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ÜÇGENSEL SAYILAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Olcay KARAATLI

Enstitü Anabilim Dalı	**:**	**MATEMATİK**
Tez Danışmanı	**:**	**Prof. Dr. Refik KESKİN**

Haziran 2010

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ÜÇGENSEL SAYILAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Olcay KARAATLI

Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK

Bu tez 11 / 06 /2010 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Oybirliği ile kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Refik KESKİN	**Doç. Dr. Halim ÖZDEMİR**	**Prof. Dr. İbrahim OKUR**
Jüri Başkanı	**Üye**	**Üye**

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans çalışmalarım boyunca bana danışmanlık yaparak beni yönlendiren, her türlü imkanı sağlayan ve değerli fikirleriyle yetişmeme katkıda bulunan danışmanım sayın Prof. Dr. Refik Keskin’e ve desteklerini her zaman yanımda hissettiğim çok sevdiğim aileme, tüm içtenlikle teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

T_n	: n –inci üçgensel sayı
K_n	: n –inci kare üçgensel sayı
$\{P_n\}$	: Pell dizisi
P_n	: n –inci Pell sayısı
$\{Q_n\}$	: Pell-Lucas dizisi
Q_n	: n –inci Pell-Lucas sayısı

ŞEKİLLER LİSTESİ

ÖZET

Anahtar kelimeler: Üçgensel Sayılar; Kare-Üçgensel Sayılar; Pell ve Pell-Lucas dizileri.

Bu tez temel olarak iki bölümden ve bu bölümler de kendi içerisinde alt bölümlerden oluşmuştur. Birinci bölümde; üçgensel sayılar tanıtılarak bunların nasıl ortaya çıktığına ve önemli bir takım özelliklerine yer verilmiştir. Ayrıca üçgensel sayıların özelliklerinden elde edilen bazı denklemlerin çözümlerinin karakterizasyonu yapılmıştır.

İkinci bölümde kare-üçgensel sayılar tanıtılarak bu sayıların Pell, Pell-Lucas sayı dizileri ile $\{u_n\},\{v_n\},\{y_n\}$ dizileri arasındaki yakın ilişkiden bahsedilmiştir. Kare-üçgensel sayıları elde etmede kullanılan formül daha basit olarak bazı Diophantine denklemlerinin çözümleri yoluyla ispatlanmıştır. Pell, Pell-Lucas dizileri ile $\{u_n\},\{v_n\}$ dizilerinin monoton artanlıkları, kongrüans özellikleri ve bölünebilme özellikleri verilmiş ve bu özellikler yardımıyla yeni teoremler ispatlanmıştır. Bazı Diophantine denklemleri daha basit hale getirilerek çözümleri karakterize edilmiş ve bu çözümlerin $\{u_n\}$ ve $\{y_n\}$ dizilerinden oluştuğu ispat edilmiştir. Ayrıca, $n>1$ ve $m>1$ için $y_n y_m = y_r$ olacak biçimde r doğal sayısının mevcut olmadığı gösterilmiştir.

TRIANGULAR NUMBERS

SUMMARY

Key Words: Triangular Numbers; Square-Triangular Numbers; Pell and Pell-Lucas Sequences.

This thesis consists of fundamentally two chapters and these chapters consist of subchapters in itself. In the first chapter, triangular numbers and how they emerge are introduced as well as some important properties of them are mentioned. Also, some equations obtained from properties of triangular numbers are characterized.

In the second chapter, square-triangular numbers are introduced and their close relations between Pell, Pell-Lucas numbers and $\{u_n\},\{v_n\},\{y_n\}$ sequences are mentioned. Formula used to get square-triangular numbers is proved easily by means of some Diophantine equations. Monotone increasing, congruences and divisibility properties of Pell, Pell-Lucas, $\{u_n\}$ and $\{v_n\}$ sequences and some new theorems are given. Solutions of some Diophantine equations are characterized and it is proved that these solutions are related to $\{u_n\}$ and $\{y_n\}$ sequences. Moreover, it is showed that there exists no solution of the equality of $y_n y_m = y_r$ for $n > 1$ and $m > 1$.

BÖLÜM 1. GİRİŞ

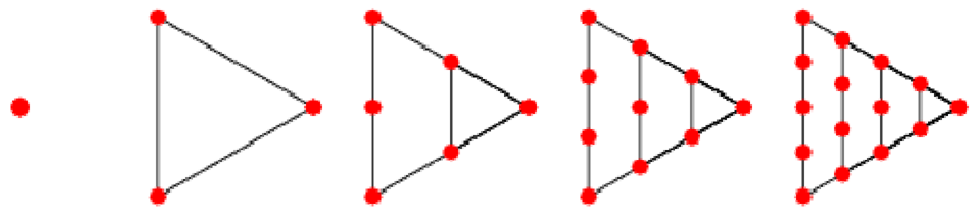
1.1. Giriş

Üçgensel bir formda düzenlenebilen sayılar olarak adlandırılan üçgensel sayılar, belirli geometrik şekillerle ilişkilendirilmiş olan şekilsel sayılardan biridir. Üçgensel sayıların tarihi iki bin yıldan öncesine dayanmaktadır. Bu sayıların özellikleri ilk kez eski Yunan matematikçisi Pisagor ve destekçileri tarafından gizemli bir saygı ile incelenmiştir.

Pisagorcular sayılara evreni anlamanın anahtarı olarak bakmışlar ve “evrenin yapıtaşı sayılardır” düşüncesine inanmışlardır. Hatta bazı sayıları evren ile özdeşleştirmişlerdir. Örneğin onlara göre; 10 üçgensel sayısı kusursuz olduğu düşünülen bir sayıdır. Çünkü bu sayı 1(nokta), 2(doğru), 3(düzlem) ve 4(düzgün yüzlü piramit) sayılarının toplamıdır. Dolayısıyla 10 evreni simgelemektedir.

Bu tip şekilsel sayıların büyüsü zaman geçtikçe azalmasına rağmen, üçgensel sayılar halen sayılar teorisi ile ilgilenen matematikçiler için ilgi çekicidir. Çünkü günlük hayatta da sıkça üçgensel sayılar ile karşı karşıya gelmekteyiz. Kuşların uçarken oluşturdukları şekil üçgensel bir şekil olduğu gibi, uçaklar da gösteri uçuşlarında üçgensel bir şekil oluştururlar.

Bu sayılara üçgensel sayılar denmesinin sebebi; eşit çaplı topların bir eşkenar üçgen formunda dizilmesiyle elde ediliyor olmasıdır. Böylece her üçgensel sayı bir önceki üçgensel sayıya bir sıra ekleyerek oluşturulur. Yani her ardışık sıra bir önceki sıradan bir parça daha uzundur. Dolayısıyla bir dizi eşit çaplı top bir eşkenar üçgen formunda düzenlenirse üçgensel sayılar elde edilir. Aşağıdaki şekilde bu görülebilir.



Şekil 1.1 Üçgensel sayıların eşkenar üçgen formunda gösterilmesi

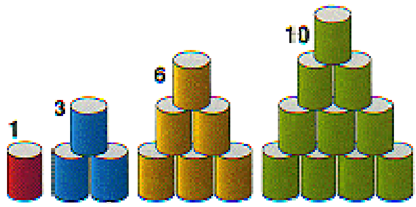
Böylece ilk üçgensel sayı 1’dir. İkinci üçgensel sayı 3’tür. 3’ü elde etmek için 1 ve 2’yi toplamamız gerekir. Üçüncü üçgensel sayı 6’dır ve 6’yı elde etmek için 1’i, 2’yi ve 3’ü toplarız. Artık bundan sonra dördüncü üçgensel sayının $1, 2, 3$ ve 4’ün toplamı olan 10 olduğu söylenir. Böylece karşımıza $1,3,6,10,15,21,28,36,45...$ biçiminde olan bir üçgensel sayı dizisi çıkar.

Üçgensel sayılar ile ardışık doğal sayılar arasında yakın bir ilişki vardır. Eğer $n.$ üçgensel sayı T_n olarak gösterilirse, ardışık ilk n doğal sayının toplamı $n.$ üçgensel sayıyı verir. Yani $T_n = 1+2+3+...+n = \frac{n(n+1)}{2}$’dir. Bu formül daha çok küçük bir çocukken ünlü matematikçi Carl. F. Gauss tarafından bulunmuştur. Formülün ortaya çıkışı ile ilgili meşhur bir hikaye vardır.

Gauss’un ilkokul öğretmeni J. G. Büttner öğrencilerini oyalamak için 1’den 100’e kadar olan sayıların toplamını isteyince Gauss cevabı birkaç saniye içinde bularak hem öğretmenini hem de öğretmeninin asistanı Martin Bertels’i hayrete düşürür. Cevabı 5050 bulmuştur. Peki Gauss bunu nasıl yapmıştır? Gauss 1’den 100’e kadar olan sayıların hepsini toplamak yerine ilk ve son terimi topladığını (1+100=101), sonra ikinci ve sondan ikinci terimi topladığını (2+99=101), ve bu şekilde devam ettiğini söyler. Her toplam çiftinin 101 olduğunu ve bu şekilde 50 tane çift olduğunu, dolayısıyla cevabın 50.101=5050 olduğunu söyler. Bu yüzden T_n, $n.$ üçgensel sayı olmak üzere, 1’den n’ye kadar olan sayıların toplamı $T_n = \frac{n(n+1)}{2}$ biçimindedir.

1.2. Üçgensel Sayılar

Bu bölümde üçgensel sayılardan ve bu sayıların bir takım temel özelliklerinden bahsedilecektir. Üçgensel sayılar, bir eşkenar üçgen konfigürasyonundaki eşit çaplı topların sayısı olarak hem aritmetiği hem de geometriyi birbirine bağlar. Aşağıdaki şekil ilk dört üçgensel sayıyı göstermektedir.



Şekil 1.2 İlk dört üçgensel sayının aritmetik ve geometrik gösterimi

Yukarıdaki şekilde her üçgensel sayının bir önceki sayıya bir sıra ekleyerek elde edildiği görülür. Eklenen her sıra, kendinden önceki sıradan daima bir fazla parça içermektedir. Dolayısıyla bu şekil bizi üçgensel sayıların tanımına götürür.

Tanım 1.2.1. 1 ile başlayıp ardışık tamsayıların toplamı biçiminde yazılabilen sayılara üçgensel sayılar denir [1]. Örneğin $T_1 = 1$, $T_2 = 1+2 = 3$, $T_3 = 1+2+3 = 6$ olur. n. üçgensel sayı $T_n = 1+2+3+...+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ biçiminde olup bu toplam $T_n = \sum_{r=1}^{n} r$ olarak da ifade edilir. Aşağıdaki teoremler üçgensel sayılara farklı açılardan bakmayı sağlar. İlk teoremin ispatı matematiksel tümevarımla kolayca görüleceği için verilmeyecektir.

Teorem 1.2.1. Bir sayının üçgensel sayı olması için gerekli ve yeterli şart $n \geq 1$ olmak üzere $\dfrac{n(n+1)}{2}$ formuna sahip olmasıdır [1].

Teorem 1.2.2. T pozitif tamsayısının üçgensel sayı olması için gerekli ve yeterli şart $8T+1$'in bir tek tamsayının karesi olmasıdır [1].

İspat: $n>0$ olmak üzere $T_n=\dfrac{n(n+1)}{2}$ olsun. $8T+1=(2n+1)^2$ olduğu gösterilecektir. O halde

$$\begin{aligned}8T+1&=8(1+2+3+...+n)+1\\&=8\frac{n(n+1)}{2}+1\\&=4n^2+4n+1\\&=(2n+1)^2\end{aligned}$$

dir.

Aksine $8T+1$ bir tek tamsayının karesi olsun. O halde,

$$\begin{aligned}&8T+1=(2n+1)^2\\&8T+1=4n^2+4n+1\\&8T=4n^2+4n\\&T=\frac{4n^2+4n}{8}\\&T=\frac{n(n+1)}{2}\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $8T+1=(2n+1)^2$ iken $T=\dfrac{n(n+1)}{2}$ üçgensel sayıdır.

Teorem 1.2.3. Eğer T_n, n. üçgensel sayı ise, Binom katsayılarına göre; $n\geq 1$ için $T_n=\dbinom{n+1}{2}$ olur [1].

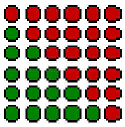
İspat: $(x+y)^n$ nin açılımında $a^{n-k}b^k$ nın katsayısı $C(n,k)$ ve $C(n,k)=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ olarak ifade edilir. O halde,

$$C(n+1,2)=\frac{(n+1)!}{2!(n-1)!}=\frac{(n+1)n(n-1)!}{2!(n-1)!}=\frac{n(n+1)}{2}=T_n$$

elde edilir. Bu ifade $n.$ üçgensel sayı olduğundan, $T_n = C(n+1, 2)$ 'dir.

Sonuç 1.2.1. T bir üçgensel sayı ise $n = \frac{\sqrt{8T+1}-1}{2}$ pozitif tamsayıdır.

Üçgensel sayılarla kare sayılar arasında da yakın bir ilişki vardır. Aşağıdaki şekilden her tam karenin ardışık iki üçgensel sayının toplamı olarak yazıldığı görülür.



Şekil 1.3 Her tam karenin ardışık iki üçgensel sayı biçiminde gösterimi

Teorem 1.2.4. Herhangi ardışık iki üçgensel sayının toplamı bir tam karedir [2].

İspat: T_n ve T_{n+1} herhangi ardışık iki üçgensel sayı olsun. T_n ve T_{n+1} 'in tanımından dolayı

$$\begin{aligned} T_n + T_{n+1} &= \frac{n(n+1)}{2} + \frac{(n+1)(n+2)}{2} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2} \\ &= (n+1)(n+1) \\ &= (n+1)^2 \end{aligned}$$

olur. Şu halde $T_n \, ve T_{n+1}$ herhangi ardışık iki üçgensel sayı iken

$$T_n + T_{n+1} = (n+1)^2 \tag{1.1}$$

dir.

Burada pozitif n tamsayısının karesi n^2 olsun ve bu S_n ile gösterilsin. O halde Teorem 1.2.4'den dolayı $T_n + T_{n+1} = S_{n+1}$ yazılır. Burada n'nin tek ve çift olma durumuna göre üçgensel sayılar, karelerin toplamı ve farkı olarak yazılır. Aşağıdaki önermenin ispatı tümevarımla kolayca yapılacağı için verilmeyecektir.

Önerme 1.2.1. $n > 0$ olmak üzere T_n, $n.$ üçgensel sayı ve $S_n = n^2$ olsun. O halde,

$$T_n = \begin{cases} S_n - S_{n-1} + S_{n-2} + \ldots - S_1 & ; n \ \text{çift ise} \\ S_n - S_{n-1} + S_{n-2} - \ldots + S_1 & ; n \ \text{tek ise} \end{cases}$$

dir.

Aşağıdaki teoremin ispatı üçgensel sayı tanımından kolayca yapılacağı için verilmeyecektir.

Teorem 1.2.5. $n > 0$ olmak üzere T_n ve T_{n+1} ardışık iki üçgensel sayı olsun. O halde,

$$T_{n+1} - T_n = (n+1) \tag{1.2}$$

dir.

(1.1) ve (1.2) eşitliklerinden aşağıdaki sonuca ulaşılır.

Sonuç 1.2.2. $n > 0$ olmak üzere T_n ve T_{n+1} ardışık iki üçgensel sayı olsun. O halde, $(T_{n+1} - T_n)^2 = T_n + T_{n+1}$'dir.

Yukarıdaki eşitlikte $T_{n+1} = x$ ve $T_n = y$ kabul edilsin. O zaman $(x-y)^2 = (x+y)$ Diophantine denklemi elde edilir. Böylece aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 1.2.6. $x > y$ olmak üzere $(x-y)^2 = (x+y)$ Diophantine denkleminin pozitif tamsayı çözümleri ardışık üçgensel sayılardır.

İspat: $x > y$ olmak üzere $x = T_{n+1}$ ve $y = T_n$ ardışık iki üçgensel sayı olsun. Sonuç 1.2.2'ye göre $(T_{n+1} - T_n)^2 = T_n + T_{n+1}$ olduğu için $(x-y)^2 = x + y$ 'dir. Tersine $x > y$ olmak üzere $(x-y)^2 = x+y$ olsun. Burada $x - y = u$ ve $x + y = v$ değişken değişimi yapılırsa $u^2 = v$ olur. Böylece $x = \dfrac{u+v}{2}$ ve $y = \dfrac{v-u}{2}$ elde edilir. Eşitlikte v 'nin değeri yerine yazılırsa $x = \dfrac{u+u^2}{2} = \dfrac{u(u+1)}{2} = T_u$ ve $y = \dfrac{u^2 - u}{2} = \dfrac{(u-1)u}{2} = T_{u-1}$ olur. Böylece x ve y ardışık üçgensel sayı olur. İspat tamamlanır.

Teorem 1.2.7. Ardışık iki üçgensel sayının kareleri arasındaki fark daima bir küpe eşittir [1].

İspat: T_n ve T_{n+1} ardışık iki üçgensel sayı olsun. O halde,

$$\begin{aligned}
{T_{n+1}}^2 - {T_n}^2 &= \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2 - \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 \\
&= \left(\frac{n^2+3n+2}{2}\right)^2 - \left(\frac{n^2+n}{2}\right)^2 \\
&= \left(\frac{n^2+3n+2-n^2-n}{2}\right)\left(\frac{n^2+3n+2+n^2+n}{2}\right) \\
&= \left(\frac{2n+2}{2}\right)\left(\frac{2n^2+4n+2}{2}\right) \\
&= (n+1)(n^2+2n+1) \\
&= (n+1)(n+1)^2 \\
&= (n+1)^3
\end{aligned}$$

olur. Böylece ispat tamamlanır.

Aşağıdaki teorem iki üçgensel sayıya sahipken, üçüncü bir üçgensel sayıyı bulmamıza yardımcı olur.

Teorem 1.2.8. T_n üçgensel sayı olsun. O zaman, $k>0$ olmak üzere $(2k+1)^2T_n+T_k$ da bir üçgensel sayıdır [1].

İspat: T_n üçgensel sayı olduğundan Teorem 1.2.2'den dolayı $x>0$ olmak üzere $8T_n+1=(2x+1)^2$'dir. Burada $8\left((2k+1)^2T_n+T_k\right)+1$ eşitliğinin bir tek tamsayının karesi olduğunu göstermek ispat için yeterlidir. O zaman,

$$\begin{aligned}8\left((2k+1)^2T_n+T_k\right)+1&=8\left((2k+1)^2T_n+\frac{k(k+1)}{2}\right)+1\\&=8T_n(2k+1)^2+4k(k+1)+1\\&=8T_n(2k+1)^2+4k^2+4k+1\\&=8T_n(2k+1)^2+(2k+1)^2\\&=(2k+1)^2(2x+1)^2\\&=\left((2k+1)(2x+1)\right)^2\end{aligned}$$

olur. Yani, $8\left((2k+1)^2T_n+T_k\right)+1$ bir tek tamsayının karesidir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 1.2.9. x, $y\geq 2$ olmak üzere T_x ve T_y üçgensel sayı olsun. O halde,

$$xT_y+yT_{x-1}{}^2=yT_x+xT_{y-1}{}^2$$

dir.

İspat: T_y ve T_{x-1}**'**in tanımından dolayı,

$$\begin{aligned}xT_y+y^2T_{x-1}&=\frac{xy(y+1)}{2}+\frac{y^2(x-1)x}{2}\\&=\frac{xy^2+xy+x^2y^2-xy^2}{2}\\&=\frac{xy+x^2y^2}{2}\end{aligned}$$

olur. Şimdi paya x^2y ekleyip çıkaralım. Böylece

$$\begin{aligned} xT_y + y^2T_{x-1} &= \frac{xy + x^2y^2 + x^2y - x^2y}{2} \\ &= \frac{x^2(y^2 - y)}{2} + \frac{y(x^2 + x)}{2} \\ &= x^2T_{y-1} + yT_x \end{aligned}$$

elde edilir. İspat tamamlanır.

Teorem 1.2.10. T_m ve T_n herhangi üçgensel sayı olsun. m, $n > 0$ olmak üzere

$$T_{m+n} = T_m + T_n + mn$$

dir.

İspat: Üçgensel sayı tanımından dolayı

$$\begin{aligned} T_{m+n} &= \frac{(m+n)(m+n+1)}{2} \\ &= m^2 + mn + m + mn + n^2 + n \\ &= \frac{m^2 + m}{2} + \frac{n^2 + n}{2} + \frac{2mn}{2} \\ &= T_m + T_n + mn \end{aligned}$$

dir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 1.2.11. T_m ve T_n herhangi üçgensel sayı olsun. m, $n > 0$ olmak üzere

$$T_{mn} = T_mT_n + T_{m-1}T_{n-1}$$

dir.

İspat: Üçgensel sayı tanımından dolayı $T_m = \dfrac{m(m+1)}{2}$ ve $T_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ 'dir. O zaman,

$$\begin{aligned} T_m T_n + T_{m-1}T_{n-1} &= \frac{m(m+1)}{2}\frac{n(n+1)}{2} + \frac{(m-1)m}{2}\frac{(n-1)n}{2} \\ &= \frac{(m^2+m)(n^2+n)+(m^2-m)(n^2-n)}{4} \\ &= \frac{m^2n^2+m^2n+mn^2+mn+m^2n^2-m^2n-mn^2+mn}{4} \\ &= \frac{2m^2n^2+2mn}{4} \\ &= \frac{mn(mn+1)}{2} \\ &= T_{mn} \end{aligned}$$

olur. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 1.2.12. T_n , $n.$ üçgensel sayı olmak üzere, n tane üçgensel sayının toplamı;

$$T_1 + T_2 + ... + T_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

dır [2].

İspat: İspat matematiksel tümevarımla yapılır. $n=1$ için yukarıdaki formülden $T_1 = \dfrac{1.2.3}{6} = 1$ olur. $T_1 + T_2 + ... + T_k = \dfrac{k(k+1)(k+2)}{6}$ olduğunu kabul edelim. O zaman,

$$\begin{aligned} T_1 + T_2 + ... + T_k + T_{k+1} &= (T_1 + T_2 + ... + T_k) + T_{k+1} \\ &= \frac{k(k+1)(k+2)}{6} + \frac{(k+1)(k+2)}{2} \\ &= \frac{k(k+1)(k+2)+3(k+1)(k+2)}{6} \\ &= \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{6} \end{aligned}$$

olur. Böylece iddia $n=k$ için doğru iken $n=k+1$ için de doğru olur. İspat tamamlanır.

Teorem 1.2.13. Herhangi iki üçgensel sayının toplamı olarak yazılabilen sonsuz çoklukta üçgensel sayı vardır. Özellikle $n>0$ olmak üzere $x=\frac{n(n+3)}{2}+1$, $y=n+1$ ve $z=\frac{n(n+3)}{2}$ ise $T_x=T_y+T_z$'dir [1].

İspat: Üçgensel sayı tanımından $T_y=\frac{y(y+1)}{2}$ ve $T_z=\frac{z(z+1)}{2}$'dir. O halde,

$$
\begin{aligned}
T_y+T_z &= \frac{y(y+1)+z(z+1)}{2} \\
&= \frac{1}{2}\left[(n+1)(n+2)+\left(\frac{n(n+3)}{2}\right)\left(\frac{n(n+3)}{2}+1\right)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[(n^2+3n+2)+(n^2+3n+2)\left(\frac{n(n+3)}{4}\right)\right] \\
&= \frac{1}{2}(n^2+3n+2)\left(1+\frac{n(n+3)}{4}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{(n^2+3n+2)(n(n+3)+4)}{4}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{n^2+3n+2}{2}\right]\left[\frac{n(n+3)+4}{2}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{n(n+3)}{2}+1\right]\left[\frac{n(n+3)}{2}+2\right] \\
&= \frac{x(x+1)}{2} \\
&= T_x
\end{aligned}
$$

olur. Böylece ispat tamamlanır.

Önerme 1.2.2. n herhangi bir doğal sayı olsun. T_1 ve T_2 ilk iki üçgensel sayı olmak üzere $n=a_1T_1+a_2T_2$ olacak biçimde a_1 ve a_2 pozitif tamsayıları vardır [1].

İspat: n herhangi bir doğal sayı olsun. n sayısını ikinci üçgensel sayı olan $T_2 = 3$'e bölersek bölme algoritmasına göre, q ve r tamsayı ve $0 \le r < 3$ olmak üzere $n = 3q + r$ yazılır. q ile r tamsayı oldukları için $a_1 = r$ ve $a_2 = q$ olsun. $T_1 = 1$ ve $T_2 = 3$ olduğundan bu ifadeleri $n = 3q + r$ eşitliğinde yerine yazdığımızda $n = a_1T_1 + a_2T_2$ elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 1.2.14. k herhangi bir doğal sayı ve T_k, k. üçgensel sayı olsun. Bu durumda her n doğal sayısı için, a_i tamsayıları negatif olmayan tamsayılar olmak üzere

$$n = \sum_{i=1}^{k} a_i T_i$$

dir [3].

İspat: n ve k herhangi iki doğal sayı ve T_k, k. üçgensel sayı olsun. Bu durumda, n sayısını T_k' ya bölersek bölme algoritmasına göre, a_k ve r_k tamsayı ve $0 \le r_k < T_k$ olmak üzere $n = a_kT_k + r_k$ olur. $0 \le r_k < T_k$ olduğundan, bölme algoritması yardımıyla $r_k = T_{k-1}a_{k-1} + r_{k-1}$ bulunur. Buna göre $n = T_ka_k + r_k$ olması için gerekli ve yeterli şart a_{k-1} ve r_{k-1} tamsayı ve $0 \le r_{k-1} < T_{k-1}$ iken $n = T_ka_k + T_{k-1}a_{k-1} + r_{k-1}$ olmasıdır. Kalanların her birine bölme algoritması uygulanmaya devam edilirse,

$$n = T_ka_k + T_{k-1}a_{k-1} + T_{k-2}a_{k-2} + ... + T_2a_2 + T_1a_1 + r_0$$

sonucu elde edilir. Burada $0 \le r_0 < T_1$'dir. Fakat $T_1 = 1$'dir. Dolayısıyla $0 \le r_0 < 1$ ifadesinden $r_0 = 0$ sonucuna ulaşılır. Bundan dolayı a_i negatif olmayan tamsayı olmak üzere,

$$n = T_ka_k + T_{k-1}a_{k-1} + T_{k-2}a_{k-2} + ... + T_2a_2 + T_1a_1 = \sum_{i=1}^{k} a_i T_i$$

olur. Yani,

$$n = \sum_{i=1}^{k} a_i T_i$$

dir.

BÖLÜM 2. KARE ÜÇGENSEL SAYILAR

2.1. Kare-Üçgensel Sayılar

Bu kısımda kare üçgensel sayıların tanımı eğlenceli bir problem üzerinden yapılacaktır. Şimdi bu probleme göz atalım.

2.1.1. Ev numaram kaçtır?

Ben evleri sırasıyla 1, 2, $3...$, $(n-1)$, n olarak numaralandırılmış bir sokakta oturuyorum. Dolayısıyla sokağımın başındaki ve sonundaki evler sırasıyla 1 ve n olarak numaralandırılmıştır. Benim evimin numarası ise m $(0<m<n)$'dir. Bir gün evimin solunda bulunan evlerin numaralarını ve evimin sağında bulunan evlerin numaralarını topladığımda, toplamların aynı olduğunu gördüm. m üç haneli bir sayı olmak üzere, m'nin değeri kaçtır?

Yukarıdaki problem için oluşturacağımız durum aşağıdaki denklemi sağlar. Evlerin numaraları sırasıyla 1, 2, $3...$, $(m-1)$, m, $(m+1)...$, $(n-1)$, n olarak sıralandığı için

$$1+2+3+...+(m-1)=(m+1)+(m+2)+...+(n-1)+n$$

dir.

Şu halde $\frac{(m-1)m}{2}=\frac{n(n+1)}{2}-\frac{m(m+1)}{2}$ eşitliği sağlanır. Burada denklem düzenlenip sadeleştirilirse $m^2=\frac{n(n+1)}{2}$ elde edilir. Yani $T_n=m^2$'dir. $T_n=m^2$ eşitliği bizim hem üçgensel, hem de kare olan sayıları yani kare üçgensel sayıları bulmamız gerektiğini anlatır. İstenen bu çeşit sayılardan ilki hiç şüphesiz $n=1$ ve $m=1$ için

$1^2 = T_1$'dir. Fakat bu, problem için çok fazla bir değer ifade etmez. Çünkü bu ifade sokakta benim evimden başka bir ev olmadığı anlamına gelir. Bu tip ikinci sayı ise 36 olup, $6^2 = T_8$'dir. Böylece mümkün çözüm $n = 8$ ve $m = 6$'dır. Gerçekten $n = 8$ ve $m = 6$ için evimin sağındaki ve solundaki evlerin numaralarını kontrol ettiğimde $1+2+3+4+5 = T_5 = \frac{5.6}{2} = 15$, $7+8 = 15$ olup, $T_5 = 15$ olur. Fakat burada m halen üç haneli değildir. Deneyerek devam ettiğimizde, bir sonraki hem üçgensel hem de kare olan sayıya ulaşırız. Bu sayı 1225'tir. $1225 = 35^2 = T_{49}$'dur. Böylece $n = 49$ ve $m = 35$ olur. Buna göre evimin sağındaki ve solundaki evlerin numaraları toplamı $1+2+3+...+34 = T_{34} = \frac{34.35}{2} = 595$, $36+37+38+...+49 = 14\frac{36+49}{2} = 7.85 = 595$ olur. O halde evimin numarası $m = 35$'tir. Ancak halen bu istediğim sayı değildir. Gelecek diğer sayıyı deneyerek ve el yöntemiyle bulmak oldukça sıkıcı ve zordur [4]. Dolayısıyla sorunun cevabını aşağıda kare üçgensel sayıları elde etmek için kullanılacak formülü bulup onun ispatını yaptıktan sonra verelim.

Tanım 2.1.1. Hem üçgensel hem de kare olan sayılara kare üçgensel sayılar denir. Euler, $a = (3+2\sqrt{2})^n$ ve $b = (3-2\sqrt{2})^n$ olmak üzere $\left(\frac{(a-b)}{4\sqrt{2}}\right)^2$ ifadesinin bir üçgensel sayı olduğunu göstermiştir [5]. 1879 yılının başlarında Roberts, Euler'in formülünden hareketle kare üçgensel sayılar için bir formül oluşturmuştur. Roberts'ın formülü n. kare üçgensel sayı için $t_n = \left\{\frac{(1+\sqrt{2})^{2n} - (1-\sqrt{2})^{2n}}{4\sqrt{2}}\right\}^2$ idi ve bu yolla tüm kare üçgensel sayılar hesaplanabiliyordu [5]. Yaklaşık bir yüzyıl sonra ise bu konuda Subramaniam'ın önerdiği formül ile ilgilenilmiştir. Formül $u_n = 6u_{n-1} - u_{n-2}$ ve $u_n = \sqrt{t_n}$ 'dir [6], [7].

İşte burada bu formülün ispatı farklı ve kolay bir yoldan verilecektir. Bu aşamada bazı Diophantine denklemlerinin çözümlerinde de kullanılan Pell, Pell-Lucas sayı dizileri ve $\{u_n\},\{v_n\}$ sayı dizilerinden faydalanılacaktır. Bu dizilerle ilgili ayrıntılı bilgi için [8], [9], [10] veya [11] numaralı kaynağa bakılabilir. İlk olarak kare üçgensel sayıları karakterize etmede kullanılacak olan Pell ve Pell-Lucas dizilerini tanımlayalım.

Tanım 2.1.2. $P_0 = 0$, $P_1 = 1$ ve $n \geq 2$ olmak üzere $P_n = 2P_{n-1} + P_{n-2}$ biçiminde tanımlanan (P_n) dizisine Pell dizisi denir. Burada P_n'ye n. Pell sayısı denir. Negatif indisler için Pell sayıları $n \geq 1$ olmak üzere $P_{-n} = (-1)^{n+1} P_n$ olarak tanımlanır. Kolaylıkla her $n \in \mathbb{Z}$ için $P_n = 2P_{n-1} + P_{n-2}$ olduğu gösterilebilir. Benzer şekilde $Q_0 = 2$, $Q_1 = 2$ ve $n \geq 2$ olmak üzere $Q_n = 2Q_{n-1} + Q_{n-2}$ biçiminde tanımlanan (Q_n) dizisine Pell-Lucas dizisi denir. Burada Q_n'ye n. Pell-Lucas sayısı denir. Negatif indisler için Pell-Lucas sayıları, $n \geq 1$ olmak üzere $Q_{-n} = (-1)^n Q_n$ olarak tanımlanır. Kolaylıkla her $n \in \mathbb{Z}$ için $Q_n = 2Q_{n-1} + Q_{n-2}$ olduğu gösterilebilir. Bu sayı dizilerini işlem yaparken işimizi kolaylaştıracak biçimde ifade etmek de mümkündür. γ ve δ, $x^2 - 2x - 1 = 0$ karakteristik denkleminin kökleri olsun. O zaman $\gamma = 1 + \sqrt{2}$ ve $\delta = 1 - \sqrt{2}$'dir. Buradan $\gamma.\delta = -1, \gamma + \delta = 2$ ve $\gamma - \delta = 2\sqrt{2}$ olduğu kolayca görülür. Dolayısıyla $\gamma^2 = 2\gamma + 1$ ve $\delta^2 = 2\delta + 1$'dir.

Teorem 2.1.1. γ ve δ, $x^2 - 2x - 1 = 0$ karakteristik denkleminin kökleri ve $n \in \mathbb{Z}$ ise

$$i) \gamma^n = \gamma P_n + P_{n-1}$$
$$ii) \delta^n = \delta P_n + P_{n-1}$$

dir.

İspat: Önce her $n \in \mathbb{N}$ için matematiksel tümevarımla $\gamma^n = \gamma P_n + P_{n-1}$ olduğu gösterilsin. $n = 1$ için $\gamma = \gamma P_1 + P_0 = \gamma.1 + 0 = \gamma$ olduğundan ifade doğrudur. $n = k$ için önermemiz doğru olsun. Yani $\gamma^k = \gamma P_k + P_{k-1}$ olsun. Şu halde,

$$\begin{aligned}\gamma^{k+1} &= \gamma^k\gamma \\ &= (\gamma P_k + P_{k-1})\gamma \\ &= \gamma^2 P_k + \gamma P_{k-1} \\ &= (2\gamma+1)P_k + \gamma P_{k-1} \\ &= 2\gamma P_k + P_k + \gamma P_{k-1} \\ &= \gamma(2P_k + P_{k-1}) + P_k \\ &= \gamma P_{k+1} + P_k\end{aligned}$$

olur. Buradan her $n \in \mathbb{N}$ için $\gamma^n = \gamma P_n + P_{n-1}$ elde edilir. Benzer biçimde her $n \in \mathbb{N}$ için $\delta^n = \delta P_n + P_{n-1}$ olduğu da gösterilebilir. $n = 0$ için $i)$ ve $ii)$ eşitlikleri zaten doğrudur. Şimdi $n \geq 1$ olmak üzere $\gamma^{-n} = \gamma P_{-n} + P_{-n-1}$ olduğunu gösterelim. $\gamma^{-n} = (\frac{1}{\gamma})^n = (-\delta)^n = (-1)^n \delta^n$ olup buradan

$$\begin{aligned}(-1)^n \delta^n &= (-1)^n(\delta P_n + P_{n-1}) \\ &= (-1)^n \delta P_n + (-1)^n P_{n-1} \\ &= (-1)^n(2-\gamma)P_n + (-1)^n P_{n-1} \\ &= (-1)^n(2P_n + P_{n-1}) + (-1)^{n+1}\gamma P_n \\ &= (-1)^n P_{n+1} + (-1)^{n+1}\gamma P_n\end{aligned}$$

elde edilir. Diğer yandan Tanım 2.1.2'deki negatif indisler için Pell sayıları tanımından $P_{-n} = (-1)^{n+1} P_n$ ve $P_{-n-1} = (-1)^n P_{n+1}$ olduğundan, bu iki eşitlik $(-1)^n \delta^n = (-1)^n P_{n+1} + (-1)^{n+1}\gamma P_n$ eşitliğinde yerine yazılırsa $\gamma^{-n} = \gamma P_{-n} + P_{-n-1}$ elde edilir. Benzer biçimde $n \geq 1$ olmak üzere $\delta^{-n} = \delta P_{-n} + P_{-n-1}$ olduğu da gösterilebilir. Şu halde her $n \in \mathbb{Z}$ için $\gamma^n = \gamma P_n + P_{n-1}$ ve $\delta^n = \delta P_n + P_{n-1}$'dir.

Teorem 2.1.2. $n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $P_n = \dfrac{\gamma^n - \delta^n}{\gamma - \delta}$ ve $Q_n = \gamma^n + \delta^n$'dir.

İspat: Teorem 2.1.1 deki $i)$ ve $ii)$ eşitlikleri taraf tarafa çıkarılıp, eşitliğin her iki tarafı $\gamma - \delta$ ya bölünürse $P_n = \dfrac{\gamma^n - \delta^n}{\gamma - \delta}$ elde edilir. Şimdi $Q_n = \gamma^n + \delta^n$ olduğunu gösterelim. $\gamma^2 = 2\gamma + 1$ ve $\delta^2 = 2\delta + 1$ eşitliklerinden, $\gamma^2 = 2\gamma + 1$ eşitliğinin her iki yanını γ^n ile çarpalım. O zaman,

$$\gamma^{n+2} = 2\gamma^{n+1} + \gamma^n \tag{2.1}$$

elde edilir.

Aynı şekilde $\delta^2 = 2\delta + 1$ eşitliğinin her iki yanını δ^n ile çarpalım. Bu durumda,

$$\delta^{n+2} = 2\delta^{n+1} + \delta^n \tag{2.2}$$

elde edilir. (2.1) ve (2.2) denklemleri taraf tarafa toplanırsa $\gamma^{n+2} + \delta^{n+2} = 2(\gamma^{n+1} + \delta^{n+1}) + \gamma^n + \delta^n$ olur. Dolayısıyla $A_{n+2} = 2A_{n+1} + A_n$'dir. Diğer yandan $A_{-n} = \gamma^{-n} + \delta^{-n} = \dfrac{1}{\gamma^n} + \dfrac{1}{\delta^n} = \dfrac{\gamma^n + \delta^n}{\gamma - \delta} = \dfrac{\gamma^n + \delta^n}{(-1)^n} = (-1)^n A_n$'dir. Şu halde her $n \in \mathbb{Z}$ için $A_n = \gamma^n + \delta^n$ olsun. Ayrıca $\gamma + \delta = 2$ ve $\gamma^2 + \delta^2 = 6$ olduğu dikkate alınırsa $A_0 = 2$, $A_1 = 2$ ve $A_3 = 6$ olur. Bu durumda A_n'nin tekrarlama bağıntısı Pell-Lucas dizinin tekrarlama bağıntısı ile aynı olur. Böylece $A_n = Q_n = \gamma^n + \delta^n$ elde edilir. İspat tamamlanır.

Yukarıda ispatı verilen $P_n = \dfrac{\gamma^n - \delta^n}{\gamma - \delta}$ ve $Q_n = \gamma^n + \delta^n$ eşitlikleri Binet formülü olarak adlandırılır. Bu formül çoğu teoremin ispatı yapılırken işleri kolaylaştırır.

Şimdi ise çözümleri Pell ve Pell-Lucas sayıları olan denklemlerden bahsedilip onlarla ilgili teoremler verilecektir. Teorem 2.1.3'ün ispatı Binet formülleri kullanılarak kolayca yapılacağı için verilmeyecektir. Teorem 2.1.4'ün ispatı için ise [11] veya [12] numaralı kaynağa bakılabilir.

Teorem 2.1.3. $\forall n \in \mathbb{Z}$ için $Q_n^{\,2} - 8P_n^{\,2} = 4(-1)^n$'dir.

Teorem 2.1.4. $\mathbb{Z}[\gamma]=\{a+b\gamma\,|\,a,b\in\mathbb{Z}\}=\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]=\left\{c+d\sqrt{2}\,|\,c,d\in\mathbb{Z}\right\}$ olmak üzere $\mathbb{Z}[\gamma]$ 'nın birimlerinin kümesi $\{\mp\gamma^n\,|\,n\in\mathbb{Z}\}$ 'dir.

Aşağıda, Pell denklemleri ile ilgili verilecek olan teoremlerin ispatları literatürde mevcuttur. Fakat bütünlüğü sağlamak açısından ispatları yapılacaktır.

Teorem 2.1.5. $x^2-8y^2=\mp4$ denkleminin tüm pozitif tamsayı çözümleri, $n\geq1$ olmak üzere $(x,y)=(Q_n,P_n)$ 'dir.

İspat: $(x,y)=(Q_n,P_n)$ ise Teorem 2.1.3'e göre $x^2-8y^2={Q_n}^2-8{P_n}^2=4(-1)^n=\mp4$ olur. Eğer $x^2-8y^2=\pm4$ ise $\left(\frac{x}{2}\right)^2-2y^2=\pm1$ olur. O zaman $\left(\frac{x}{2}-\sqrt{2}y\right)\left(\frac{x}{2}+\sqrt{2}y\right)=\pm1$ olup buradan $\frac{x}{2}+\sqrt{2}y$ 'nin $\mathbb{Z}[\gamma]$ 'da bir birim olduğu görülür. x ve y pozitif tamsayılar olduğundan $\frac{x}{2}+\sqrt{2}y>1$'dir. O zaman Teorem 2.1.4'e göre $\frac{x}{2}+\sqrt{2}y=\gamma^n$ olacak biçimde $n\geq1$ vardır. Dolayısıyla $\frac{x}{2}+\sqrt{2}y=\gamma^n=\gamma P_n+P_{n-1}$ olur. Yani, $\frac{x}{2}+\sqrt{2}y=(1+\sqrt{2})P_n+P_{n-1}$ olup buradan $\frac{x}{2}+\sqrt{2}y=P_n+P_{n-1}+\sqrt{2}P_n$ olduğu görülür. Eşitlikten dolayı $\frac{x}{2}=P_n+P_{n-1}$ ve $y=P_n$ elde edilir. $\frac{x}{2}=P_n+P_{n-1}$ olduğundan $x=2P_n+2P_{n-1}=2P_n+P_{n-1}+P_{n-1}$ olup buradan $x=P_{n+1}+P_{n-1}$ elde edilir. Böylece,

$$
\begin{aligned}
P_{n+1} + P_{n-1} &= \frac{\gamma^{n+1} - \delta^{n+1}}{\gamma - \delta} + \frac{\gamma^{n-1} - \delta^{n-1}}{\gamma - \delta} \\
&= \frac{\gamma^{n+1} - \delta^{n+1} - \gamma^{n-1} + \delta^{n-1}}{\gamma - \delta} \\
&= \frac{\gamma^{n}(\gamma - \delta) + \delta^{n}(\gamma - \delta)}{\gamma - \delta} \\
&= \frac{(\gamma^{n} + \delta^{n})(\gamma - \delta)}{(\gamma - \delta)} \\
&= \gamma^{n} + \delta^{n} \\
&= Q_n
\end{aligned}
$$

dir. Yani, $x = Q_n$ ve $y = P_n$ olur. O halde $x^2 - 8y^2 = \mp 4$ denkleminin tüm pozitif tamsayı çözümleri $n \geq 1$ olmak üzere $(x, y) = (Q_n, P_n)$ biçimindedir.

Yukarıdaki teoremden aşağıdaki sonuçlar verilebilir.

Sonuç 2.1.1. $x^2 - 8y^2 = 4$ denkleminin tüm pozitif tamsayı çözümleri $n \geq 1$ olmak üzere;

$$(x, y) = (Q_{2n}, P_{2n})$$

biçimindedir.

Sonuç 2.1.2. $x^2 - 8y^2 = -4$ denkleminin tüm pozitif tamsayı çözümleri, $n \geq 1$ olmak üzere;

$$(x, y) = (Q_{2n+1}, P_{2n+1})$$

biçimindedir.

Sonuç 2.1.3. $x^2 - 2y^2 = 1$ denkleminin tüm pozitif tamsayı çözümleri, $n \geq 1$ olmak üzere;

$$(x,y)=(\frac{Q_{2n}}{2},P_{2n})$$

biçimindedir.

Sonuç 2.1.4. $x^2-2y^2=-1$ denkleminin tüm pozitif tamsayı çözümleri, $n\geq 0$ olmak üzere;

$$(x,y)=(\frac{Q_{2n+1}}{2},P_{2n+1})$$

biçimindedir.

Teorem 2.1.6. $x^2-8y^2=1$ denkleminin tüm pozitif tamsayı çözümleri, $n\geq 1$ olmak üzere;

$$(x,y)=(\frac{Q_{2n}}{2},\frac{P_{2n}}{2})$$

biçimindedir.

İspat: $x^2-8y^2=1$ olsun. Şimdi eşitliğin her iki tarafı 4 ile çarpılırsa, $4x^2-32y^2=4$ olur. Buradan $(2x)^2-8(2y)^2=4$ elde edilir. Sonuç 2.1.1'e göre, $(2x,2y)=(Q_{2n},P_{2n})$ olacak biçimde $n\geq 1$ vardır. Böylece $(x,y)=(\frac{Q_{2n}}{2},\frac{P_{2n}}{2})$ olur. Tersine $(x,y)=(\frac{Q_{2n}}{2},\frac{P_{2n}}{2})$ olsun. x ve y 'nin değeri $x^2-8y^2=1$ denkleminde yerine yazılırsa $(\frac{Q_{2n}}{2})^2-8(\frac{P_{2n}}{2})^2=\frac{Q_{2n}^2}{4}-8\frac{P_{2n}^2}{4}=\frac{Q_{2n}^2-8P_{2n}^2}{4}=\frac{4(-1)^{2n}}{4}=1$ Eşitliği sağlanır. Böylece ispat tamamlanır.

Yukarıdaki teoremlerde $x^2-8y^2=\mp 4, x^2-2y^2=\mp 1$ ve $x^2-8y^2=1$ Diophantine denklemlerinin çözümleri Pell ve Pell-Lucas sayıları cinsinden oluşturuldu. Şimdi ise bazı denklemlerinin çözümlerinin karakterize edilmesinde yine bu sayılardan faydalanılacaktır.

Gupta, [13] numaralı kaynakta ardışık iki sayının çarpımı olan üçgensel sayıların olduğunu söylemiş ve örnek olarak 6'yı vermiştir. Çünkü 6, 2 ve 3 ün çarpımı olan bir üçgensel sayıdır. Gupta bu tür üçgensel sayılardan bir kaçının ise

$$\begin{gathered} 2.3 = 6 = T_3 \\ 14.15 = 210 = T_{20} \\ 84.85 = 7140 = T_{119} \\ 492.493 = 242556 = T_{696} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{gathered}$$

biçiminde olduğunu belirtmiştir. Biz ise burada bu sayıları karakterize edeceğiz. Yani hangi ardışık iki sayının çarpımı üçgensel sayı olur sorusunun cevabını vereceğiz. Dahası Utz, [14] numaralı kaynakta bazı üçgensel sayı denklemlerinin pozitif tamsayılarda sonsuz çözümünün olduğunu söylemiştir. Örneğin; T_n, $n.$ üçgensel sayı olmak üzere; $T_a T_b = T_{(a^2-1)}$ olacak biçimde sonsuz sayıda a ve b pozitif tamsayısının olduğunu belirtmiştir [14]. Dahası $T_x T_y = T(T_y)$ eşitliği ile verilen denklemin pozitif tamsayılarda sonsuz çözümünün olduğunu söylemiştir [14].

Bunlar verilen denklemlerden sadece bir kaçıdır. Utz buna benzer birçok denklem örneği vermiştir. Biz burada bu denklemleri karakterize edip, çözümlerinin Pell ve Pell-Lucas sayıları cinsinden olduğunu göstereceğiz.

Teorem 2.1.7. $n \geq 1$ olmak üzere; n ve $n+1$ ardışık iki pozitif tamsayı ve T_m, $m.$ üçgensel sayı olsun. Bu durumda, $n(n+1) = \dfrac{m(m+1)}{2}$ olması için gerekli ve yeterli şart, k tek doğal sayı olmak üzere $n = \dfrac{P_k - 1}{2}$ ve $m = \dfrac{Q_k - 2}{4}$ olmasıdır.

İspat: $n(n+1) = m(m+1)/2$ ise $m^2 + m = 2n^2 + 2n$'dir. Şimdi eşitliğin her iki tarafı 4 ile çarpılıp eşitliğe 1 eklensin. Bu durumda $4m^2 + 4m + 1 = 8n^2 + 16n + 1$ olur.

O halde $(2m+1)^2 = 2(4n^2+8n)+1$ olup buradan $(2m+1)^2 = 2\left((2n+1)^2-1\right)+1$ elde edilir. Şimdi $x=2m+1$ ve $y=2n+1$ olsun. Böylece $x^2-2y^2=-1$ denklemi elde edilir. Sonuç 2.1.4'e göre $(x,y)=\left(\frac{Q_k}{2},P_k\right)$ olacak biçimde k tek doğal sayısı vardır. O halde $x=\frac{Q_k}{2}$ ve $y=P_k$ olur. O zaman $2m+1=\frac{Q_k}{2}$ olup buradan $m=\frac{Q_k-2}{4}$ ve $2n+1=P_k$ olup buradan $n=\frac{P_k-1}{2}$ elde edilir. Tersine k tek doğal sayı olmak üzere; $n=\frac{P_k-1}{2}$ ve $m=\frac{Q_k-2}{4}$ olsun. O halde $n(n+1)=(\frac{P_k-1}{2})(\frac{P_k-1}{2}+1)$ olup buradan $n(n+1)=(\frac{P_k-1}{2})(\frac{P_k+1}{2})=\frac{P_k^2-1}{4}$ bulunur. Diğer yandan Teorem 2.1.3'e göre $Q_k^2-8P_k^2=-4$ olduğundan $P_k^2=\frac{Q_k^2+4}{8}$ olur. Böylece,

$$n(n+1)=\frac{P_k^2-1}{4}=\frac{\frac{Q_k^2+4}{8}-1}{4}=\frac{Q_k^2-4}{32}=\frac{(\frac{Q_k-2}{4})(\frac{Q_k+2}{4})}{2}$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$n(n+1)=\frac{(\frac{Q_k-2}{4})(\frac{Q_k-2}{4}+1)}{2}$$

yazılır. Bu eşitlikte $\frac{Q_k-2}{4}=m$ alınırsa

$$n(n+1)=\frac{m(m+1)}{2}$$

elde edilir.

Teorem 2.1.8. $2T_x=T_y+1$ olması için gerekli ve yeterli şart n tek doğal sayı olmak üzere $x=\frac{3P_n-1}{2}$ ve $y=\frac{3Q_n-2}{4}$ olmasıdır.

İspat:

$2T_x=T_y+1$ olsun. Üçgensel sayı tanımından $2\frac{x(x+1)}{2}=\frac{y(y+1)}{2}+1$ olur. O halde $x^2+x=\frac{y^2+y+2}{2}$'dir. Böylece $2x^2+2x-2=y^2+y$ elde edilir. Dolayısıyla $2(x+\frac{1}{2})^2-\frac{10}{4}=(y+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}$ ve buradan $(y+\frac{1}{2})^2-2(x+\frac{1}{2})^2=\frac{-9}{4}$ bulunur. Şimdi eşitliğin her iki tarafı 4 ile çarpılırsa, $(2y+1)^2-2(2x+1)^2=-9$ olur. Burada $a=2y+1$ ve $b=2x+1$ olsun. O halde $a^2-2b^2=-9$ denklemi elde edilir. Diğer yandan $a^2-2b^2=-9$ ise $3|a$ ve $3|b$ olduğunu görmek kolaydır. Dolayısıyla $a=3u$ ve $b=3v$ olacak biçimde u ve v pozitif tamsayıları vardır. O halde $a=3u$ ve $b=3v$ eşitlikleri $a^2-2b^2=-9$ denkleminde yerine yazılırsa $9u^2-18v^2=-9$ ve buradan $u^2-2v^2=-1$ denklemi elde edilir. Sonuç 2.1.4'e göre $(u,v)=(\frac{Q_n}{2},P_n)$ olacak biçimde n tek doğal sayısı vardır. Dolayısıyla $u=\frac{Q_n}{2}$ ve $v=P_n$'dir. u ve v değerleri $a=3u$ ve $b=3v$ eşitliğinde yerine yazılırsa $a=\frac{3Q_n}{2}$ ve $b=3P_n$ elde edilir. $a=2y+1$ ve $b=2x+1$ olduğundan $x=\frac{3P_n-1}{2}$ ve $y=\frac{3Q_n-2}{4}$ olduğu görülür. Tersine n tek doğal sayı olmak üzere; $x=\frac{3P_n-1}{2}$ ve $y=\frac{3Q_n-2}{4}$ olsun. Üçgensel sayı tanımından $2T_x=2\left(\frac{\left(\frac{3P_n-1}{2}\right)\left(\frac{3P_n+1}{2}\right)}{2}\right)=\frac{9P_n^2-1}{4}$ ve

$T_y=\frac{(\frac{3Q_n-2}{4})(\frac{3Q_n+2}{4})}{2}=\frac{9Q_n^2-4}{32}$'dir. Diğer yandan Teorem 2.1.3'e göre $Q_n^2-8P_n^2=-4$ olduğundan $P_n^2=\frac{Q_n^2+4}{8}$ olur. $P_n^2=\frac{Q_n^2+4}{8}$ değeri $2T_x=\frac{9P_n^2-1}{4}$ eşitliğinde yerine yazılırsa $2T_x=9(\frac{(\frac{Q_n^2+4}{8}-1)}{4})=\frac{9Q_n^2+28}{32}=\frac{9Q_n^2-4}{32}+1=T_y+1$ elde edilir. İspat tamamlanır.

Teorem 2.1.9. T_n, n. üçgensel sayı olsun. $T_xT_y=T_{x^2-1}$ olması için gerekli ve yeterli şart n tek doğal sayı olmak üzere; $x=\frac{P_n+1}{2}$, $y=\frac{Q_n-2}{4}$ olmasıdır.

İspat: $T_xT_y = T_{x^2-1}$ ise üçgensel sayı tanımından $\frac{x(x+1)}{2}\frac{y(y+1)}{2} = \frac{(x^2-1)x^2}{2}$ 'dir. Buradan $(x^2+x)(y^2+y) = 2(x^4-x^2)$ yazılır. Eşitlik düzenlenirse $(x^2+x)(y^2+y) = 2(x^2-x)(x^2+x)$ olur. O halde $y^2+y = 2(x^2-x)$ ve buradan $(y+\frac{1}{2})^2 - 2(x-\frac{1}{2})^2 = -\frac{1}{4}$ bulunur. Şimdi eşitliğin her iki tarafı 4 ile çarpılırsa $(2y+1)^2 - 2(2x-1)^2 = -1$ olur. Burada $u = 2y+1$ ve $v = 2x-1$ olsun. Böylece $u^2 - 2v^2 = -1$ denklemi elde edilir. Sonuç 2.1.4'e göre $(u,v) = (\frac{Q_n}{2}, P_n)$ olacak biçimde n tek doğal sayısı vardır. O halde $u = \frac{Q_n}{2}$ ve $v = P_n$ olur. u ve v nin değerleri $u = 2y+1$ ve $v = 2x-1$ eşitliğinde yerine yazılırsa $2y+1 = \frac{Q_n}{2}$ olduğundan $y = \frac{Q_n-2}{4}$ ve aynı şekilde $2x-1 = P_n$ olduğundan $x = \frac{P_n+1}{2}$ bulunur. Tersine n tek doğal sayı olmak üzere; $x = \frac{P_n+1}{2}$ ve $y = \frac{Q_n-2}{4}$ olsun. Üçgensel sayı tanımından dolayı $T_x = \frac{\left(\frac{P_n+1}{2}\right)\left(\frac{P_n+1}{2}+1\right)}{2}$ ve $T_y = \frac{(\frac{Q_n-2}{4})(\frac{Q_n-2}{4}+1)}{2}$ olduğundan

$$T_xT_y = \frac{\left(\frac{P_n+1}{2}\right)^2 + \left(\frac{P_n+1}{2}\right)}{2}\left(\frac{Q_n^2-4}{32}\right)$$

olur. Diğer yandan Teorem 2.1.3'e göre $Q_n^2 - 8P_n^2 = -4$ olduğundan

$$
\begin{aligned}
T_xT_y &= \frac{(\frac{P_n+1}{2})^2+(\frac{P_n+1}{2})}{2}(\frac{8P_n^2-8}{32}) \\
&= \frac{(\frac{P_n+1}{2})^2+(\frac{P_n+1}{2})}{2}(\frac{P_n^2-1}{4}) \\
&= \frac{(P_n+1)^2+2(P_n+1)}{8}(\frac{P_n^2-1}{4}) \\
&= \frac{1}{32}\left((P_n+1)^2(P_n+1)(P_n+3)\right) \\
&= \frac{(\frac{P_n+1}{2})^2\left((\frac{P_n+1}{2})^2-1\right)}{2} \\
&= T_{x^2-1}
\end{aligned}
$$

elde edilir. Yani $T_xT_y=T_{x^2-1}$ olur.

Teorem 2.1.10. $T_y=2T_{x-1}$ olması için gerekli ve yeterli şart n tek doğal sayı olmak üzere $x=\frac{P_n+1}{2}$ ve $y=\frac{Q_n-2}{4}$ olmasıdır.

İspat: $T_y=2T_{x-1}$ olsun. O halde üçgensel sayı tanımından $\frac{y(y+1)}{2}=2\frac{(x-1)x}{2}$ olur. Böylece $y^2+y=2(x^2-x)$ olup buradan $(y+\frac{1}{2})^2-2(x-\frac{1}{2})^2=-\frac{1}{4}$ denklemi elde edilir. Şimdi eşitliğin her iki tarafı 4 ile çarpılırsa, $(2y+1)^2-2(2x-1)^2=-1$ elde edilir. Burada $u=2y+1$, $v=2x-1$ olsun. O halde $u^2-2v^2=-1$ denklemi elde edilir. Sonuç 2.1.4'e göre $(u,v)=(\frac{Q_n}{2},P_n)$ olacak biçimde n tek doğal sayısı vardır. Dolayısıyla $u=\frac{Q_n}{2}$ ve $v=P_n$ olur. u ve v nin değerleri $u=2y+1$ ve $v=2x-1$ eşitliğinde yerine yazılırsa, $2y+1=\frac{Q_n}{2}$ olduğundan $y=\frac{Q_n-2}{4}$ ve $2x-1=P_n$ olduğundan $x=\frac{P_n+1}{2}$ olur. Tersine n tek doğal sayı olmak üzere; $x=\frac{P_n+1}{2}$ ve

$y=\dfrac{Q_n-2}{4}$ olsun. Diğer yandan Teorem 2.1.3'e göre $Q_n^2-8P_n^2=-4$ olduğundan $Q_n^2=8P_n^2-4$ olur. Üçgensel sayı tanımından $T_y=\dfrac{Q_n^2-4}{32}$'dir. Bu durumda $Q_n^2=8P_n^2-4$ eşitliği $T_y=\dfrac{Q_n^2-4}{32}$ eşitliğinde yerine yazılırsa $T_y=\dfrac{8P_n^2-8}{32}=\dfrac{P_n^2-1}{4}=\left(\dfrac{P_n-1}{2}\right)\left(\dfrac{P_n-1}{2}+1\right)=2T_{x-1}$ elde edilir.

Teorem 2.1.9 ve Teorem 2.1.10 yardımıyla aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 2.1.6. $2T_{x-1}T_x=T_{x^2-1}$'dir.

2.2. Kare Üçgensel Sayılar ve $\{u_n\},\{v_n\}$ Dizileri

Bu kısımda kare-üçgensel sayılarla yakın ilişkisi olan $\{u_n\}$ ve $\{v_n\}$ dizileri tanımlanıp onlara ait bir takım özellikler, sağladıkları denklemler ve bu denklemlerin çözümleri verilecektir. Ayrıca kare-üçgensel sayıların $\{u_n\}$ dizisi yardımıyla elde edilişi ispatlanacaktır.

Tanım 2.2.1. $\{u_n\}$ dizisi $u_0=0$, $u_1=1$ ve $n\geq 2$ olmak üzere $u_n=6u_{n-1}-u_{n-2}$ olarak tanımlanır. Negatif indisler için $\{u_n\}$ dizisinin elemanları $n\geq 1$ olmak üzere $u_{-n}=-u_n$ olarak tanımlanır. Benzer biçimde $\{v_n\}$ dizisi $v_0=2$, $v_1=6$ ve $n\geq 2$ olmak üzere $v_n=6v_{n-1}-v_{n-2}$ olarak tanımlanır. Negatif indisler için $\{v_n\}$ dizisinin elemanları $n\geq 1$ olmak üzere, $v_{-n}=v_n$ biçimindedir. $x^2-6x+1=0$ karakteristik denkleminin kökleri sırasıyla α ve β olmak üzere, $\alpha=3+2\sqrt{2}$ ve $\beta=3-2\sqrt{2}$'dir. Buradan $\alpha.\beta=1$, $\alpha+\beta=6$ ve $\alpha-\beta=4\sqrt{2}$ olduğu kolaylıkla görülür. Böylece $\alpha^2=6\alpha-1$ ve $\beta^2=6\beta-1$'dir.

Aşağıda verilecek olan Teoremin $ii)$ numaralı kısmının ispatı $i)$ numaralı kısmın ispatı ile benzer yoldan yapılabileceği için verilmeyecektir.

Teorem 2.2.1. $x^2-6x+1=0$ denkleminin karakteristik kökleri sırasıyla α ve β olsun. O zaman her $n\in\mathbb{Z}$ için;

$$i)\alpha^n=\alpha u_n-u_{n-1} \tag{2.3}$$

$$ii)\beta^n=\beta u_n-u_{n-1} \tag{2.4}$$

dir.

İspat $i)$: İspat matematiksel tümevarımla yapılır.

$n=1$ için $\alpha=\alpha u_1-u_0=\alpha.1-0=\alpha$ olduğundan ifadenin doğruluğu görülür. $n=k$ için $\alpha^k=\alpha u_k-u_{k-1}$ önermemiz doğru olsun. Bu durumda $n=k+1$ için;

$$\begin{aligned}\alpha^{k+1}=\alpha^k\alpha&=(\alpha u_k-u_{k-1})\alpha\\&=\alpha^2u_k-\alpha u_{k-1}\\&=(6\alpha-1)u_k-\alpha u_{k-1}\\&=6\alpha u_k-u_k-\alpha u_{k-1}\\&=\alpha(6u_k-u_{k-1})-u_k\\&=\alpha u_{k+1}-u_k\end{aligned}$$

olur. Buradan her $n\geq 0$ için $\alpha^n=\alpha u_n-u_{n-1}$ elde edilir. Eğer $n<0$ ise $u_n=-u_{-n}$ olduğu kullanılırsa $\alpha^n=\alpha u_n-u_{n-1}$ elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 2.2.2. $x^2-6x+1=0$ karakteristik denkleminin kökleri sırasıyla $\alpha=3+2\sqrt{2}$ ve $\beta=3-2\sqrt{2}$ olsun. O zaman her $n\in\mathbb{Z}$ için, $u_n=\dfrac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}$ ve $v_n=\alpha^n+\beta^n$'dir.

İspat: Teorem 2.2.1'deki (2.3) ve (2.4) eşitlikleri taraf tarafa çıkarılıp eşitliğin her iki tarafı $(\alpha-\beta)$ ya bölünürse, $u_n=\dfrac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}$ elde edilir. Şimdi $v_n=\alpha^n+\beta^n$ olduğunu gösterelim. Teorem 2.2.1'deki (2.3) ve (2.4) eşitlikleri taraf tarafa toplanırsa, $\alpha^{n+2}+\beta^{n+2}=6(\alpha^{n+1}+\beta^{n+1})-(\alpha^n+\beta^n)$ bulunur. Burada $B_n=\alpha^n+\beta^n$ olarak alınırsa, her $n\in\mathbb{Z}$ için $B_{n+2}=6B_{n+1}-B_n$ olur. Diğer yandan $B_{-n}=\alpha^{-n}+\beta^{-n}=\dfrac{1}{\alpha^n}+\dfrac{1}{\beta^n}=\dfrac{\alpha^n+\beta^n}{(\alpha\beta)^n}=\alpha^n+\beta^n=B_n$ ve $\alpha+\beta=6$, $\alpha^2+\beta^2=34$ olduğu kullanılırsa; $B_0=2$, $B_1=6$ ve $B_2=34$ olup B_n'nin tekrarlama bağıntısı $\{v_n\}$ dizisinin tekrarlama bağıntısı ile aynı olur. Şu halde $B_n=v_n=\alpha^n+\beta^n$ elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. Teorem 2.1.2. ve Teorem 2.2.2. den aşağıdaki sonuca ulaşılır.

Sonuç 2.2.1. $n\geq 0$ olmak üzere; $u_n=\dfrac{P_{2n}}{2}$ ve $v_n=Q_{2n}$'dir.

Önerme 2.2.1. $n\geq 1$ olmak üzere; $u_n^2-6u_nu_{n-1}+u_{n-1}^2=1$'dir.

İspat: $u_n=\dfrac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}$ eşitliği kullanılırsa,

$$
\begin{aligned}
u_n^2-6u_nu_{n-1}+u_{n-1}^2 &= \left(\frac{\alpha^n-\beta^n}{4\sqrt{2}}\right)^2-6\left(\frac{\alpha^n-\beta^n}{4\sqrt{2}}\right)\left(\frac{\alpha^{n-1}-\beta^{n-1}}{4\sqrt{2}}\right)+\left(\frac{\alpha^{n-1}-\beta^{n-1}}{4\sqrt{2}}\right)^2\\
&=\frac{\alpha^{2n}+\beta^{2n}-2}{32}-\frac{6}{32}(\alpha^{2n-1}-\alpha^n\beta^{n-1}-\beta^n\alpha^{n-1}+\beta^{2n-1})+\frac{\alpha^{2n-2}+\beta^{2n-2}-2}{32}\\
&=\frac{1}{32}(\alpha^{2n}+\beta^{2n}-6\alpha^{2n-1}+6\alpha^n\beta^{n-1}+6\beta^n\alpha^{n-1}-6\beta^{2n-1}+\alpha^{2n-2}-\beta^{2n-2}-4)\\
&=\frac{1}{32}\left(\alpha^{2n}(1-6\beta+\beta^2)+\beta^{2n}(1-6\alpha+\alpha^2)+6(\alpha+\beta)-4\right)\\
&=\frac{1}{32}\left(6(\alpha+\beta)-4\right)\\
&=\frac{6.6-4}{32}\\
&=1
\end{aligned}
$$

elde edilir. Yani, $u_n^2 - 6u_n u_{n-1} + u_{n-1}^2 = 1$ olur. Aşağıda verilecek olan önermenin ispatı Binet formülleri ile gösterilebileceğinden verilmeyecektir.

Önerme 2.2.2. $n \geq 0$ için $v_n^2 - 32u_n^2 = 4$ 'tür.

Teorem 2.2.2 ve Sonuç 2.2.1'den dolayı aşağıdaki sonuçlar verilebilir.

Sonuç 2.2.2. $x^2 - 8y^2 = 1$ denkleminin tüm pozitif tamsayı çözümleri $n \geq 1$ olmak üzere;

$$(x, y) = (\frac{v_n}{2}, u_n)$$

biçimindedir.

Sonuç 2.2.3. $x^2 - 8y^2 = 4$ denkleminin tüm pozitif tamsayı çözümleri $n \geq 1$ olmak üzere;

$$(x, y) = (v_n, 2u_n)$$

biçimindedir.

Sonuç 2.2.4. $x^2 - 2y^2 = 1$ denkleminin tüm pozitif tamsayı çözümleri $n \geq 1$ olmak üzere;

$$(x, y) = (\frac{v_n}{2}, 2u_n)$$

biçimindedir.

Teorem 2.2.3. x sayısının kare-üçgensel sayı olması için gerekli ve yeterli şart $n \geq 1$ olmak üzere $x = u_n^2$ olmasıdır.

İspat: x kare-üçgensel sayı olsun. O halde, $x=\dfrac{p(p+1)}{2}=m^2$'dir. $\dfrac{p(p+1)}{2}=m^2$ olduğundan $p(p+1)=2m^2$ olur. Şimdi eşitliğin her iki tarafı 4 ile çarpılırsa, $4p(p+1)=8m^2$, yani $4p^2+4p=8m^2$ olur. Buradan $(2p+1)^2-1=8m^2$ elde edilir. Şu halde $(2p+1)^2-8m^2=1$'dir. Sonuç 2.2.2'ye göre $(2p+1,m)=(\dfrac{v_n}{2},u_n)$ olacak biçimde $n\geq 1$ vardır. Buradan $p=\dfrac{v_n-2}{4}$ ve $m=u_n$ elde edilir. Böylece $x=m^2=u_n^2$ bulunur. Tersine $m=u_n$ olsun. Önerme 2.2.2'ye göre $v_n^2-32u_n^2=4$ olduğundan $u_n^2=\dfrac{v_n^2-4}{32}$ yazılabilir. Buradan gerekli düzenlemeler yapılırsa $u_n^2=\dfrac{v_n^2-4}{32}=\dfrac{\left(\dfrac{v_n-2}{4}\right)\left(\dfrac{v_n+2}{4}\right)}{2}=\dfrac{\left(\dfrac{v_n-2}{4}\right)\left(\dfrac{v_n-2}{4}+1\right)}{2}$ bulunur. Şimdi $\dfrac{v_n-2}{4}=p$

olsun. Bu durumda $u_n^2=\dfrac{p(p+1)}{2}$ elde edilir. Böylece u_n^2 bir kare-üçgensel sayıdır.

Bu teorem ile $\{u_n\}$ dizisi ve kare-üçgensel sayılar arasındaki yakın ilişki gösterildi ve aslında kare-üçgensel sayıların $\{u_n\}$ dizisinin elemanlarının karelerinden başka bir şey olmadığı görüldü. Böylece aşağıdaki sonuca ulaşılır.

Sonuç 2.2.5. $\alpha=3+2\sqrt{2}$, $\beta=3-2\sqrt{2}$ ve $n\geq 1$ olmak üzere, K_n, n. kare-üçgensel sayı olsun. Bu durumda

$$K_n=\left[\frac{\alpha^n-\beta^n}{4\sqrt{2}}\right]^2$$

dir.

Yukarıdaki teorem ve sonucun ardından ilk birkaç kare-üçgensel sayı aşağıdaki gibidir.

$$K_1 = 1^2,\ K_2 = 6^2,\ K_3 = 35^2,\ K_4 = 204^2 ...$$

Böylece kare-üçgensel sayılar $1,\ 36,\ 1225,\ 41646...$ dizisini oluşturur. İlk birkaç kare-üçgensel sayı belirlendiğine göre, artık problemimizin cevabını verebiliriz. Evimin üç haneli kapı numarası, $m = u_4 = 204$ 'tür.

Teorem 2.2.4. $n \geq 1$ olmak üzere ilk n tane kare-üçgensel sayının toplamı; $\sum_{k=1}^{n} u_k^2 = \frac{1}{32}\left(u_{2n+1} - (2n+1)\right)$ 'dir.

İspat: $\alpha = 3 + 2\sqrt{2},\ \beta = 3 - 2\sqrt{2},\ \alpha.\beta = 1,\ \alpha - \beta = 4\sqrt{2}$ ve $1 \leq k \leq n$ için $u_k^2 = \left(\frac{\alpha^k - \beta^k}{4\sqrt{2}}\right)^2$ 'dir. O halde,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} u_k^2 = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\alpha^k - \beta^k}{4\sqrt{2}}\right)^2 &= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{32}\left(\alpha^{2k} + \beta^{2k} - 2(\alpha\beta)^k\right) \\
&= \frac{1}{32}\sum_{k=1}^{n}\left(\alpha^{2k} + \beta^{2k} - 2\right) \\
&= \frac{1}{32}\left(\sum_{k=1}^{n}\alpha^{2k} + \sum_{k=1}^{n}\beta^{2k} - 2\sum_{k=1}^{n}1\right) \\
&= \frac{1}{32}\left((\alpha^2 + \alpha^4 + ... + \alpha^{2n}) + (\beta^2 + \beta^4 + ... + \beta^{2n}) - 2n\right)
\end{aligned}$$

olur ve buradan

$$\sum_{k=1}^{n} u_k^2 = \frac{1}{32}\left((\alpha^0+\alpha^2+\ldots+\alpha^{2n}-1)+(\beta^0+\beta^2+\ldots+\beta^{2n}-1)-2n\right)$$
$$=\frac{1}{32}\left((\frac{\alpha^{2(n+1)}-1}{\alpha^2-1}-1)+(\frac{\beta^{2(n+1)}-1}{\beta^2-1}-1)-2n\right)$$
$$=\frac{1}{32}\left(\frac{\beta(\alpha^{2(n+1)}-1)}{4\sqrt{2}}+\frac{\alpha(\beta^{2(n+1)}-1)}{4\sqrt{2}}-2-2n\right)$$
$$=\frac{1}{32}\left(\frac{\alpha^{-1}(\alpha^{2(n+1)}-1)+\beta^{-1}(\beta^{2(n+1)}-1)}{4\sqrt{2}}-(2+2n)\right)$$
$$=\frac{1}{32}\left(\frac{\alpha^{2n+1}-\alpha^{-1}+\beta^{2n+1}-\beta^{-1}}{4\sqrt{2}}-(2+2n)\right)$$
$$=\frac{1}{32}\left((\frac{\alpha^{2n+1}-\beta^{2n+1}}{4\sqrt{2}})-(\frac{\alpha^{-1}-\beta^{-1}}{4\sqrt{2}})-(2+2n)\right)$$
$$=\frac{1}{32}\left(\frac{\alpha^{2n+1}-\beta^{2n+1}}{4\sqrt{2}}+\frac{\alpha-\beta}{4\sqrt{2}}-(2+2n)\right)$$
$$=\frac{1}{32}\left(u_{2n+1}+u_1-(2n+2)\right)$$
$$=\frac{1}{32}\left(u_{2n+1}-(2n+1)\right)$$

elde edilir. Yani, $\sum_{k=1}^{n} u_k^2 = \frac{1}{32}\left(u_{2n+1}-(2n+1)\right)$ ’dir.

Sonuç 2.2.6. r tek doğal sayı ise; $u_r \equiv r(\bmod 32)$ ’dir.

Önerme 2.2.3. r çift doğal sayı ise; $u_r \equiv 3r(\bmod 32)$ ’dir.

İspat: Her $n\in\mathbb{N}$ için $u_{2n} \equiv 6n(\bmod 32)$ olduğu gösterilirse ispat tamamlanır. Şu halde; $n=1$ için $u_2 = 6 = 6.1(\bmod 32)$ olup ifade doğrudur. n için ifade doğru olsun. Yani $u_{2n} = 6n(\bmod 32)$ olsun. Bu durumda $\{u_n\}$ dizisinin tanımından dolayı, $u_{2(n+1)} = u_{2n+2} = 6u_{2n+1} - u_{2n}$ ’dir. Sonuç 2.2.6 ve tümevarım kabulünden dolayı $u_{2(n+1)} \equiv 6(2n+1)-6n \equiv 6n+6 = 6(n+1)(\bmod 32)$ elde edilir. Yani, $u_{2(n+1)} = 6(n+1)(\bmod 32)$ olur. Böylece ifade $n+1$ için de doğrudur. Dolayısıyla tümevarım ilkesine göre her $n\in\mathbb{N}$ için $u_{2n} \equiv 6n(\bmod 32)$ ’dir.

Aşağıdaki önermenin ispatı Binet formülü kullanılarak kolayca yapılacağı için verilmeyecektir.

Önerme 2.2.4. $n \geq 1$ olmak üzere, $v_n = u_{n+1} - u_{n-1}$ ’dir.

Sonuç 2.2.7. $n \geq 0$ olmak üzere;

$i)$ n çift doğal sayı ise $v_n \equiv 2(\text{mod}\, 32)$

ve

$ii)$ n tek doğal sayı ise $v_n \equiv 6(\text{mod}\, 32)$

dir.

İspat $i)$: $n = 2r$ olsun. Önerme 2.2.4 ve Sonuç 2.2.6’ya göre $v_{2r} = u_{2r+1} - u_{2r-1} \equiv 2r + 1 - 2r + 1 \equiv 2(\text{mod}\, 32)$ olur. Yani $v_n \equiv 2(\text{mod}\, 32)$ ’dir.
$ii)$ $n = 2r+1$ tek tamsayı olsun. Önerme 2.2.3 ve Önerme 2.2.4’e göre $v_{2r+1} = u_{2r+2} - u_{2r} \equiv 6r + 6 - 6r(\text{mod}\, 32)$ olur. Yani $v_n \equiv 6(\text{mod}\, 32)$ ’dir.

Daha önce her kare-üçgensel sayının u_n^2 biçiminde olduğu ispat edilmişti. Ayrıca Teorem 2.2.3’e göre $u_n^2 = \dfrac{(\frac{v_n - 2}{4})(\frac{v_n - 2}{4} + 1)}{2} = \dfrac{(\frac{v_n - 2}{4})(\frac{v_n + 2}{4})}{2}$ ’dir. Teorem 2.2.2’ye göre $v_n = \alpha^n + \beta^n$ olduğundan $v_n^2 = \alpha^{2n} + \beta^{2n} + 2(\alpha\beta)^2 = v_{2n} + 2$ olur. Yani, $v_n^2 = v_{2n} + 2$ ’dir. Şimdi

$$y_n = \frac{v_n - 2}{4} \tag{2.4}$$

olsun. Bu durumda $u_n^2 = \dfrac{y_n(y_n + 1)}{2}$ elde edilir. Dolayısıyla $n \geq 1$ olmak üzere y_n dizisi v_n dizisine bağlı olarak $y_1 = 1$, $y_2 = 8$, $y_3 = 49$, $y_4 = 288$, $y_5 = 1681 \ldots$

biçiminde devam eden bir dizidir. Ayrıca $u_n^2 = \dfrac{(\frac{v_n - 2}{4})(\frac{v_n + 2}{4})}{2}$ olduğundan (2.4) eşitliği yardımıyla $u_n^2 = \dfrac{v_n^2 - 4}{32} = \dfrac{v_{2n} - 2}{32} = \dfrac{\frac{v_{2n} - 2}{4}}{8} = \dfrac{y_{2n}}{8}$ elde edilir. Yani

$$y_{2n} = 8u_n^2 \tag{2.5}$$

olur.

Önerme 2.2.5. $n \geq 1$ olmak üzere u_n ve v_n dizileri verilmiş olsun. Şu halde $u_n = \dfrac{v_{n+1} - v_{n-1}}{32}$'dir.

İspat: $n \geq 1$ olmak üzere Teorem 2.2.2'ye göre $u_n = \dfrac{\alpha^n - \beta^n}{4\sqrt{2}}$ ve $v_n = \alpha^n + \beta^n$ olduğundan

$$\begin{aligned}
\frac{v_{n+1} - v_{n-1}}{32} &= \frac{(\alpha^{n+1} + \beta^{n+1}) - (\alpha^{n-1} + \beta^{n-1})}{32} \\
&= \frac{\alpha^n(\alpha - \alpha^{-1}) + \beta^n(\beta - \beta^{-1})}{32} \\
&= \frac{\alpha^n(\alpha - \beta) - \beta^n(\alpha - \beta)}{32} \\
&= \frac{(\alpha - \beta)(\alpha^n - \beta^n)}{32} \\
&= \frac{\alpha^n - \beta^n}{4\sqrt{2}} \\
&= u_n
\end{aligned}$$

elde edilir. Yani, $u_n = \dfrac{v_{n+1} - v_{n-1}}{32}$'dir.

Önerme 2.2.6. $n \geq 2$ olmak üzere $y_{n+1} = 6y_n - y_{n-1} + 2$'dir [15].

İspat: (2.4) 'e göre $y_n = \frac{v_n - 2}{4}$ olduğundan

$$\begin{aligned} 6y_{n+1} - y_n + 2 &= 6(\frac{v_{n+1}-2}{4}) - (\frac{v_n - 2}{4}) + 2 \\ &= \frac{6v_{n+1} - 12 - v_n + 2}{4} + 2 \\ &= \frac{v_{n+2} - 10}{4} + 2 \\ &= \frac{v_{n+2} - 2}{4} \\ &= y_{n+2} \end{aligned}$$

olur. Yani, $y_{n+2} = 6y_{n+1} - y_n + 2$ 'dir.

Önerme 2.2.5'e göre $u_n = \frac{v_{n+1} - v_{n-1}}{32}$, (2.4) 'e göre $y_n = \frac{v_n - 2}{4}$ olduğu kullanılırsa $v_n = 4y_n + 2$ ve $u_n = \frac{v_{n+1} - v_{n-1}}{32} = \frac{4y_{n+1} + 2 - (4y_{n-1} + 2)}{32} = \frac{4(y_{n+1} - y_{n-1})}{32} = \frac{y_{n+1} - y_{n-1}}{8}$ elde edilir. Diğer yandan Önerme 2.2.6'ya göre $y_{n+1} = 6y_n - y_{n-1} + 2$ olduğundan $y_n = \frac{y_{n+1} + y_{n-1} - 2}{6}$ elde edilir. Şu halde $n = 2k - 1$ tek doğal sayısı için $y_n = y_{2k-1} = \frac{y_{2k} + y_{2k-2} - 2}{6} = \frac{8u_k^2 + 8u_{k-1}^2 - 2}{6}$ olur. Ayrıca Önerme 2.2.1'e göre $u_k^2 - 6u_k u_{k-1} + u_{k-1}^2 = 1$ olduğu kullanılırsa $y_{2k-1} = \frac{8u_k^2 + 8u_{k-1}^2 - 2}{6} = \frac{8(u_k^2 + u_{k-1}^2) - 2}{6}$ olup buradan $y_{2k-1} = \frac{8(6u_k u_{k-1} + 1) - 2}{6} = \frac{8.6.u_k u_{k-1} + 6}{6} = 8u_k u_{k-1} + 1$ elde edilir. Yani

$$y_{2k-1} = 8u_k u_{k-1} + 1 \qquad (2.6)$$

dir.

$n = 2k$ olmak üzere; $y_n = y_{2k} = 8u_k^2 = \frac{v_k^2 - 4}{4} = \frac{Q_{2k}^2 - 4}{4}$ olur. Diğer yandan $Q_n^2 = Q_{2n} + 2(-1)^n$ olduğu kolayca gösterilebilir. O halde $y_{2k} = y_n = \frac{Q_n^2 - 4}{4} = \frac{Q_n^2}{4} - 1$ elde edilir.

Ayrıca n tek doğal sayı ise $y_n = \frac{v_n - 2}{4} = \frac{Q_{2n} - 2}{4} = \frac{Q_n^2 + 2 - 2}{4} = \frac{Q_n^2}{4}$ olur. Şu halde;

$$y_n = \begin{cases} \frac{Q_n^2}{4} & ; n \text{ tek ise} \\ \frac{Q_n^2}{4} - 1 & ; n \text{ çift ise} \end{cases} \tag{2.7}$$

dir.

Sonuç 2.2.8. $k \geq 2$ için $u_k u_{k-1}$ sayısı üçgensel sayıdır.

İspat: Teorem 1.1.1'e göre $u_k u_{k-1}$ sayısının 8 katının 1 fazlasının bir tek tamsayının karesi olduğu gösterilirse ispat tamamlanır. (2.6) eşitliğinden $y_{2k-1} = 8u_k u_{k-1} + 1$'dir. (2.7) eşitliğinden ise $y_{2k-1} = \frac{Q_{2k-1}^2}{4}$'dir. Böylece $8u_k u_{k-1} + 1 = \frac{Q_{2k-1}^2}{4} = \left(\frac{Q_{2k-1}}{2}\right)^2$ bir tek tamsayının karesi olup ispat tamamlanır.

Sonuç 2.2.9. $n \geq 1$ olmak üzere; $y_{2n} = 8u_n^2$ ve $y_{2n+1} = 1 + 8u_n u_{n+1}$'dir.

Daha önce çözümleri P_n ve Q_n olan bazı Diophantine denklemleri verilmişti. Şimdi ise bu denklemler yardımıyla çözümleri ; u_n, v_n ve y_n olan denklemler ile ilgili teoremler verilecektir. Bu teoremler sayesinde çözümleri zor olan denklemler daha basit hale getirilerek çözülebilecektir. Teoremlere geçmeden önce çözümlerde işimizi kolaylaştıracak aşağıdaki önermeyi verelim. Önermenin (ii), (iii) ve (iv) ile gösterilen kısımlarının ispatı (i) ile gösterilen kısmın ispatı ile benzer yolla yapılacağından verilmeyecektir.

Önerme 2.2.5. $n \geq 0$ olmak üzere $\{P_n\}$, $\{Q_n\}$ ve $\{v_n\}$ dizileri verilsin. Bu durumda

$$i)\ v_{n+1} = 4P_{2n+1} + Q_{2n+1} \quad (2.8)$$

$$ii)\ v_n = 4P_{2n+1} - Q_{2n+1} \quad (2.9)$$

$$iii)\ u_{n+1} = (Q_{2n+1} + 2P_{2n+1})/4 \quad (2.10)$$

$$iv)\ u_n = (Q_{2n+1} - 2P_{2n+1})/4 \quad (2.11)$$

dir.

İspat (i)**:** $\gamma = 1+\sqrt{2}$ ve $\beta = 1-\sqrt{2}$ olmak üzere; $n \geq 0$ için $P_n = \dfrac{\gamma^n - \delta^n}{2\sqrt{2}}$ ve $Q_n = \gamma^n + \delta^n$ eşitliklerinden

$$\begin{aligned}
4P_{2n+1} + Q_{2n+1} &= 4\left(\frac{\gamma^{2n+1} - \delta^{2n+1}}{2\sqrt{2}}\right) + (\gamma^{2n+1} + \delta^{2n+1}) \\
&= \sqrt{2}(\gamma^{2n+1} - \delta^{2n+1}) + (\gamma^{2n+1} + \delta^{2n+1}) \\
&= \gamma^{2n}(\sqrt{2}\gamma + \gamma) + \delta^{2n}(\delta - \sqrt{2}\delta) \\
&= \gamma^{2n}\left(\gamma(1+\sqrt{2})\right) + \delta^{2n}\left(\delta(1-\sqrt{2})\right) \\
&= \gamma^{2n}\gamma^2 + \delta^{2n}\delta^2 \\
&= \gamma^{2n+2} + \delta^{2n+2} \\
&= Q_{2n+2} \\
&= v_{n+1}
\end{aligned}$$

elde edilir. Yani, $v_{n+1} = 4P_{2n+1} + Q_{2n+1}$'dir.

[15] numaralı kaynakta POTTER, $(y_n + y_{n+1} - 1)^2 = 8y_n y_{n+1}$ olduğunu göstermiştir. Daha genel olarak aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 2.2.5. $(x+y-1)^2 = 8xy$ denkleminin tüm pozitif tamsayı çözümleri $n \geq 1$ olmak üzere, $(x, y) = (y_n, y_{n+1})$ biçimindedir.

İspat: $(x+y-1)^2=8xy$ olduğunu kabul edelim. Burada $y+x=u$, $y-x=v$ olsun. Böylece $x=\frac{u-v}{2}$, $y=\frac{u+v}{2}$ olur. Eşitlikler denklemde yerine yazılırsa $(u-1)^2=2(u^2-v^2)$ bulunur. Buradan $u^2-2u+1=2u^2-2v^2$ elde edilir. Böylece $u^2+2u-1-2v^2=0$ olup buradan $(u+1)^2-2v^2=2$ elde edilir. Eşitliğin her iki tarafı 2'ye bölünürse $v^2-2(\frac{u+1}{2})^2=-1$ denklemi bulunur. Sonuç 2.1.4'e göre $(v,\frac{u+1}{2})=\left(\frac{Q_{2n+1}}{2},P_{2n+1}\right)$ olacak biçimde $n\geq 0$ vardır. O halde $v=\frac{Q_{2n+1}}{2}$, $u=2P_{2n+1}-1$'dir. Böylece $x=\frac{u-v}{2}$ ve $y=\frac{u+v}{2}$ olup buradan

$$x=\frac{2P_{2n+1}-1-\frac{Q_{2n+1}}{2}}{2}=\frac{4P_{2n+1}-Q_{2n+1}-2}{4} \text{ ve } y=\frac{2P_{2n+1}-1+\frac{Q_{2n+1}}{2}}{2}=\frac{4P_{2n+1}+Q_{2n+1}-2}{4}$$

elde edilir. (2.8) ve (2.9) eşitlikleri kullanılırsa $x=\frac{v_n-2}{4}$ ve $y=\frac{v_{n+1}-2}{4}$ olduğu görülür. (2.4) eşitliğine göre $y_n=\frac{v_n-2}{4}$ olup buradan $x=y_n$, $y=y_{n+1}$ bulunur. Böylece, $(x+y-1)^2=8xy$ ise $x=y_n$, $y=y_{n+1}$ olur. Tersine $n\geq 1$ olmak üzere $(x,y)=(y_n,y_{n+1})$ olsun. O zaman $(y_n+y_{n+1}-1)^2=8y_ny_{n+1}$ olduğu gösterilirse ispat tamamlanır. Önce n tek sayı yani $n=2k-1$ olacak biçimde, k doğal sayısı olsun. Böylece $x=y_{2k-1}$ ve $y=y_{2k}$ olur. (2.5) eşitliğine göre $y_{2k}=8u_k^2$ ve (2.6) eşitliğine göre $y_{2k-1}=8u_ku_{k-1}+1$ olduğundan

$$\begin{aligned}(y_{2k-1}+y_{2k}-1)^2 &= (8u_ku_{k-1}+1+8u_k^2-1)^2\\ &= (8u_ku_{k-1}+8u_k^2)^2\\ &= \left(8u_k(u_{k-1}+u_k)\right)^2\\ &= 64u_k^2(u_k^2+u_{k-1}^2+2u_{k-1}u_k)\\ &= 64u_k^2(6u_ku_{k-1}+1+2u_{k-1}u_k)\\ &= 64u_k^2(8u_ku_{k-1}+1)\\ &= 8.8u_k^2(8u_ku_{k-1}+1)\\ &= 8y_{2k}y_{2k-1}\end{aligned}$$

elde edilir. Yani, $(y_n + y_{n+1} - 1)^2 = 8y_n y_{n+1}$'dir. n'nin çift olma durumunda x ve y nin rolleri değişeceğinden benzer ispat yapılır.

Yukarıdaki teorem, Sonuç 2.1.4 ve Sonuç 2.2.4 kullanılarak aşağıdaki teoremler verilebilir.

Teorem 2.2.6. $(x+y+1)^2 = 8xy$ denkleminin tüm pozitif tamsayı çözümleri $n \geq 1$ olmak üzere, $(x, y) = (y_n + 1, y_{n+1} + 1)$ biçimindedir.

İspat: $(x+y+1)^2 = 8xy$ denkleminde $x = u+1$ ve $y = v+1$ alınsın. Buradan $(u+v+3)^2 = 8(u+1)(v+1)$ olur. Bu denklem açılıp gerekli düzenlemeler yapılırsa $(u+v-1)^2 = 8uv$ denklemi elde edilir. Teorem 2.2.5'e göre $(u, v) = (y_n, y_{n+1})$ olan $n \geq 1$ vardır. Şu halde $u = y_n$ $v = y_{n+1}$'dir. Burada u ve v'nin değerleri yerine yazılırsa, $x = u+1$ olduğundan $x = y_n + 1$ ve $y = v+1$ olduğundan $y = y_{n+1} + 1$ elde edilir. Tersine $n \geq 1$ olmak üzere $(x, y) = (y_n + 1, y_{n+1} + 1)$ olsun. O zaman $(y_n + y_{n+1} + 3)^2 = 8(y_n + 1)(y_{n+1} + 1)$ olduğu gösterilirse ispat tamamlanır. Öncelikle n tek sayı yani, $n = 2k-1$ olacak biçimde k doğal sayısı olsun. O halde $x = y_{2k-1} + 1$ ve $y = y_{2k} + 1$ olur. Böylece $(y_{2k-1} + y_{2k} + 3)^2 = (y_{2k-1} + y_{2k} - 1 + 4)^2$ olup buradan $(y_{2k-1} + y_{2k} + 3)^2 = (y_{2k-1} + y_{2k} - 1)^2 + 8(y_{2k-1} + y_{2k} - 1) + 16$ yazılır. Diğer yandan Teorem 2.2.5'e göre $(y_{2k-1} + y_{2k} - 1)^2 = 8y_{2k} y_{2k-1}$ olduğu üstteki eşitlikte yerine yazılırsa $(y_{2k-1} + y_{2k} + 3)^2 = 8y_{2k} y_{2k-1} + 8(y_{2k-1} + y_{2k} - 1) + 16$ olup buradan $(y_{2k-1} + y_{2k} + 3)^2 = 8y_{2k} y_{2k-1} + 8y_{2k} + 8y_{2k-1} + 8 = 8(y_{2k-1} + 1)(y_{2k} + 1)$ elde edilir. Yani $(y_n + y_{n+1} + 3)^2 = 8(y_n + 1)(y_{n+1} + 1)$'dir. n'nin çift olma durumunda x ve y'nin rolleri değişeceğinden benzer ispat yapılır.

Teorem 2.2.7. $(x+y)^2 = 4x(2y+1)$ denkleminin tüm pozitif tamsayı çözümleri $k \geq 1$ olmak üzere $(x, y) = (4u_k^2, 4u_k u_{k+1})$ veya $(x, y) = (4u_{k+1}^2, 4u_k u_{k+1})$ biçimindedir.

İspat: $(x+y)^2 = 4x(2y+1)$ eşitliğinin her iki tarafını 4 ile çarpalım. Bu durumda $(2x+2y)^2 = 16x(2y+1)$ olur. Buradan $(2x+2y+1-1)^2 = 8.2x(2y+1)$ elde edilir. $2x = u$ ve $2y+1 = v$ alınsın. O halde $(u+v-1)^2 = 8uv$ olur. Teorem 2.2.5'e göre $(u,v) = (y_n, y_{n+1})$ veya $(u,v) = (y_{n+1}, y_n)$ olan $n \geq 1$ vardır. Böylece $u = y_n$, $v = y_{n+1}$ veya $u = y_{n+1}$, $v = y_n$ olur. u ve v'nin değerleri $u = 2x$ ve $v = 2y+1$ eşitliğinde yerine yazılırsa $x = \frac{y_n}{2}$, $y = \frac{y_{n+1}-1}{2}$ veya $x = \frac{y_{n+1}}{2}$, $y = \frac{y_n - 1}{2}$ elde edilir. Önce $x = \frac{y_n}{2}$ ve $y = \frac{y_{n+1}-1}{2}$ olsun. Burada y_n'nin çift olması için gereli ve yeterli şart n'nin çift olmasıdır. Bu kolaylıkla gösterilebilir. Bu durumda $x = \frac{y_n}{2}$ ve $y = \frac{y_{n+1}-1}{2}$ ise n çift olur. O halde $n = 2k$ olacak biçimde $k \geq 1$ vardır. Dolayısıyla $x = \frac{y_n}{2} = \frac{y_{2k}}{2}$ ve $y = \frac{y_{n+1}-1}{2} = \frac{y_{2k+1}-1}{2}$ olur. (2.5) ve (2.6) eşitlikleri yardımıyla $x = 4u_k^2$ ve $y = 4u_k u_{k+1}$ elde edilir. Şimdi de $x = \frac{y_{n+1}}{2}$ ve $y = \frac{y_n - 1}{2}$ olsun. O zaman $n+1$ çift yani n tektir. O halde $n = 2k+1$ olacak biçimde $k \geq 1$ vardır. Dolayısıyla $x = \frac{y_{n+1}}{2} = \frac{y_{2k+2}}{2}$ ve $y = \frac{y_n - 1}{2} = \frac{y_{2k+1}-1}{2}$ olur. (2.5) ve (2.6) eşitlikleri yardımıyla $x = 4u_{k+1}^2$ ve $y = 4u_k u_{k+1}$ elde edilir. Tersine $k \geq 1$ olmak üzere $(x,y) = (4u_k^2, 4u_k u_{k+1})$ veya $(x,y) = (4u_{k+1}^2, 4u_k u_{k+1})$ olsun. Burada $(x,y) = (4u_k^2, 4u_k u_{k+1})$ olması durumunda işlem yapacağız. Diğer durum için de benzer işlem yapılabilir. Şimdi $(x,y) = (4u_k^2, 4u_k u_{k+1})$ olsun. Bu durumda $(4u_k^2 + 4u_k u_{k+1})^2 = 4.4u_k^2(2.4u_k u_{k+1} + 1)$ olduğu gösterilirse ispat tamamlanır. (2.5) ve (2.6) eşitlikleri yardımıyla $4u_k^2 = \frac{y_{2k}}{2}$ ve $4u_k u_{k+1} = \frac{y_{2k+1}-1}{2}$ yazılabilir. O halde $(4u_k^2 + 4u_k u_{k+1})^2 = (\frac{y_{2k}}{2} + \frac{y_{2k+1}-1}{2})^2$ olur. $(\frac{y_{2k}}{2} + \frac{y_{2k+1}-1}{2})^2 = \frac{(y_{2k} + y_{2k+1} - 1)^2}{4}$ olarak düzenlenir ve Teorem 2.2.5 yardımıyla $(y_{2k} + y_{2k+1} - 1)^2 = 8y_{2k} y_{2k+1}$ olduğu üstteki eşitlikte yerine yazılırsa $(4u_k^2 + 4u_k u_{k+1})^2 = \frac{8y_{2k} y_{2k+1}}{4} = 2y_{2k} y_{2k+1} = 4u_k^2(2.4u_k u_{k+1} + 1)$ elde edilir. Yani

$(4u_k^2+4u_ku_{k+1})^2=4u_k^2(2.4u_ku_{k+1}+1)$'dir. Bu ise $k\geq 1$ olmak üzere $(x,y)=(4u_k^2,4u_ku_{k+1})$ olduğunda $(x+y)^2=4x(2y+1)$ denkleminin sağlandığını gösterir. Böylece $(x+y)^2=4x(2y+1)$ denkleminin tüm pozitif tamsayı çözümleri $k\geq 1$ olmak üzere $(x,y)=(4u_k^2,4u_ku_{k+1})$ veya $(x,y)=(4u_{k+1}^2,4u_ku_{k+1})$ biçimindedir.

Teorem 2.2.8. $(x+y)^2=4x(2y-1)$ denkleminin tüm pozitif tamsayı çözümleri $k\geq 0$ olmak üzere $(x,y)=(4u_ku_{k+1}+1,4u_k^2+1)$ veya $(x,y)=(4u_ku_{k+1}+1,4u_{k+1}^2+1)$ biçimindedir.

İspat: $(x+y)^2=4x(2y-1)$ eşitliğinin her iki tarafı 4 ile çarpılsın. O halde $(2x+2y)^2=16x(2y-1)$ olur. Buradan $(2x+2y-1+1)^2=8.2x(2y-1)$ elde edilir. $2x=u$ ve $2y-1=v$ alınsın. Bu durumda $(u+v+1)^2=8uv$ denklemi elde edilir. Teorem 2.2.6'ya göre $(u,v)=(y_n+1,y_{n+1}+1)$ veya $(u,v)=(y_{n+1}+1,y_n+1)$ olan $n\geq 1$ vardır. u ve v'nin değeri $u=2x$ ve $v=2y-1$ eşitliğinde yerine yazılırsa $x=\dfrac{y_n+1}{2}$, $y=\dfrac{y_{n+1}+2}{2}$ veya $x=\dfrac{y_{n+1}+1}{2}$, $y=\dfrac{y_n+2}{2}$ elde edilir. u'nun çift doğal sayı olduğu açıktır. Bu durumda $n\geq 1$ olmak üzere y_n+1 veya $y_{n+1}+1$ çift olur. İlk olarak y_n+1 çift olsun. y_n'nin çift olması için gerekli yeterli şart n'nin çift olmasıdır. Bu (2.5), (2.6) ve (2.7)'den görülür. Böylece y_n tek olur ve bu nedenle n tektir. O halde $n=2k+1$ olacak biçimde $k\geq 0$ vardır. Bu durumda $x=\dfrac{y_n+1}{2}=\dfrac{y_{2k+1}+1}{2}$ ve $y=\dfrac{y_{n+1}+2}{2}=\dfrac{y_{2k+2}+2}{2}$ olur. (2.5) ve (2.6) eşitlikleri yardımıyla $x=4u_ku_{k+1}+1$ ve $y=4u_{k+1}^2+1$ elde edilir. Şimdi de $y_{n+1}+1$ çift olsun. Böylece y_{n+1} tek olup buradan n çift olur. O halde $n=2k$ olacak biçimde $k\geq 1$ vardır.Bu durumda $x=\dfrac{y_{n+1}+1}{2}=\dfrac{y_{2k+1}+1}{2}$ ve $y=\dfrac{y_n+2}{2}=\dfrac{y_{2k}+2}{2}$ olur. (2.5) ve (2.6) eşitlikleri yardımıyla $x=4u_ku_{k+1}+1$ ve $y=4u_k^2+1$ elde edilir. Tersine $(x,y)=(4u_ku_{k+1}+1,4u_k^2+1)$ veya $(x,y)=(4u_ku_{k+1}+1,4u_{k+1}^2+1)$ olsun. Burada eşitliklerden yalnızca birini kullanarak ispata gideceğiz. Diğer eşitlik içinde benzer ispat yapılabilir. Şimdi $(x,y)=(4u_k u_{k+1}+1, 4u_k^2+1)$ olsun. x ve y'nin değerleri için $(x+y)^2=4x(2y-1)$ eşitliğinin sağlanıp sağlanmadığını göstereceğiz. Bunun için de $(4u_k u_{k+1}+4u_k^2+2)^2=4(4u_k u_{k+1}+1)(8u_k^2+1)$ olduğunu göstermek yeterli olacaktır. (2.5) ve (2.6) eşitliklerinden dolayı $y_{2k}=8u_k^2$ ve $y_{2k+1}=8u_k u_{k+1}+1$ olduğu kullanılırsa $(4u_k u_{k+1}+4u_k^2+2)^2=(\frac{y_{2k+1}+1}{2}+\frac{y_{2k}+2}{2})^2=\frac{(y_{2k+1}+y_{2k}+3)^2}{4}$ elde edilir. Diğer yandan Teorem 2.2.6'ya göre $(y_{2k+1}+y_{2k}+3)^2=8(y_{2k+1}+1)(y_{2k}+1)$ eşitliği üstteki eşitlikte yerine yazılırsa $(4u_k u_{k+1}+4u_k^2+2)^2=2(y_{2k+1}+1)(y_{2k}+1)$ olup buradan $(4u_k u_{k+1}+4u_k^2+2)^2=4(4u_k u_{k+1}+1)(8u_k^2+1)$ elde edilir. Böylece $(x+y)^2=4x(2y-1)$ denkleminin tüm pozitif tamsayı çözümleri $k\geq 0$ olmak üzere $(x,y)=(4u_k u_{k+1}+1, 4u_k^2+1)$ veya $(x,y)=(4u_k u_{k+1}+1, 4u_{k+1}^2+1)$ biçimindedir.

Teorem 2.2.9. $(x+y+1)^2=8xy+1$ denkleminin tüm pozitif tamsayı çözümleri $(x,y)=(1,1)$ veya $n\geq 1$ olmak üzere $(x,y)=(y_n+u_n+1, y_n-u_n+1)$ biçimindedir.

İspat: $(x+y+1)^2=8xy+1$ denkleminde $x=y$ ise $x=1$ ve $y=1$ olduğu görülür. Eğer $x\neq y$ ise $x>y$ kabul edelim. O halde $x+y=u$ ve $x-y=v$ alınsın. Böylece $x=\frac{u+v}{2}$ ve $y=\frac{u-v}{2}$ olur. x ve y değerleri denklemde yerine yazılırsa $(u+1)^2=8\left(\frac{u^2-v^2}{4}\right)+1$ elde edilir. Buradan $(u+1)^2=2u^2-2v^2+1$ olur. O halde $u^2+2u+1=2u^2-2v^2+1$ olduğundan, $u^2+2u=2u^2-2v^2$, yani $(u-1)^2-1-2v^2=0$ dır. Buradan $(u-1)^2-2v^2=1$ Pell denklemi elde edilir. Sonuç 2.2.4'e göre $(u-1,v)=\left(\frac{v_n}{2}, 2u_n\right)$ olan $n\geq 1$ vardır. Şu halde $u=\frac{v_n+2}{2}$ ve $v=2u_n$ dır. Burada u ve v'nin değerleri yerine yazılırsa $x=\frac{v_n+4u_n+2}{4}=\frac{v_n-2+4u_n+4}{4}$ ve $y=\frac{v_n-4u_n+2}{4}=\frac{v_n-2-4u_n+4}{4}$ elde edilir. (2.4) eşitliğinden dolayı $x=y_n+u_n+1$ ve y_n-u_n+1 olur. Tersine $x=y_n+u_n+1$, $y=y_n-u_n+1$ olsun. Bu durumda $(x+y+1)^2=8xy+1$ olduğunu göstereceğiz. Burada x ve y'nin değerleri $8xy+1$'de yerine yazılırsa $8(y_n+1+u_n)(y_n+1-u_n)+1=8(y_n+1)^2-8u_n^2+1$ olur. (2.6) eşitliğinden dolayı $y_{2n}=8u_n^2$ ve $u_n^2=\dfrac{y_n(y_n+1)}{2}$ olduğundan $8u_n^2=4y_n(y_n+1)$ olur. O halde

$$\begin{aligned}8(y_n+1+u_n)(y_n+1-u_n)+1&=8(y_n+1)^2-4y_n(y_n+1)+1\\&=8y_n^2+16y_n+8-4y_n^2-4y_n+1\\&=4y_n^2+12y_n+9\\&=(2y_n+3)^2\\&=(y_n+u_n+1+y_n-u_n+1+1)^2\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $(x+y+1)^2=8xy+1$ denkleminin tüm pozitif tamsayı çözümleri $n\geq 0$ olmak üzere $(x,y)=(y_n+u_n+1,y_n-u_n+1)$ biçimindedir.

Yukarıdaki teoremin çözümlerinden ilk bir kaçının

$$\begin{aligned}(x,y)&=(3,1)\\(x,y)&=(15,3)\\(x,y)&=(85,15)\\(x,y)&=(493,85)\end{aligned}$$

olduğu görülür. O halde $y_{n+1}-u_{n+1}+1=y_n+u_n+1$'dir. Bu bizi aşağıdaki sonuca götürür.

Sonuç 2.2.10. $n\geq 1$ olmak üzere $y_{n+1}-y_n=u_n+u_{n+1}$'dir.

İspat: $v_n=u_{n+1}-u_{n-1}$ ve $y_n=\dfrac{v_n-2}{4}$ olduğu $y_{n+1}-y_n$ değerinde yerine yazılırsa, $y_{n+1}-y_n=\dfrac{u_{n+2}-u_n-2}{4}-\dfrac{u_{n+1}-u_{n-1}-2}{4}=\dfrac{u_{n+2}-u_n-u_{n+1}+u_{n-1}}{4}$ elde edilir. $\{u_n\}$

dizisinin tanımına göre, $\frac{u_{n+2}-u_n-u_{n+1}+u_{n-1}}{4}=\frac{5u_{n+1}-2u_n+u_{n-1}}{4}=\frac{4u_{n+1}+4u_n}{4}$

olduğundan, $y_{n+1}-y_n=u_n+u_{n+1}$ elde edilir.

Teorem 2.2.10. $x^2+y^2-6xy=1$ denkleminin tüm pozitif tamsayı çözümleri $n\geq 2$ olmak üzere, $(x,y)=(u_n,u_{n-1})$ biçimindedir.

İspat: İlk olarak $(x,y)=(u_n,u_{n-1})$ biçiminde ise $x^2+y^2-6xy=1$ denkleminin sağlandığını gösterelim. x ve y'nin değeri denklemde yerine yazılırsa Önerme 2.2.1'e göre $x^2+y^2-6xy=u_n^2+u_{n-1}^2-6u_nu_{n-1}=1$ elde edilir. Tersine x, y pozitif tamsayı ve $x^2+y^2-6xy=1$ olsun. Buradan $x\neq y$ olduğu görülür. Bu durumda $x>y$ olsun. $x^2+y^2-6xy=1$ denklemi $(x-y)^2-4xy=1$ biçiminde düzenlensin ve $x+y=u$, $x-y=v$ alınsın. Şu halde $x=\frac{u+v}{2}$ ve $y=\frac{u-v}{2}$ olur. x ve y'nin değerleri denklemde yerine yazılırsa $v^2-(u^2-v^2)=1$ bulunur. Buradan $u^2-2v^2=-1$ Pell denklemi elde edilir. Sonuç 2.1.4'e göre $(u,v)=(\frac{Q_{2n+1}}{2},P_{2n+1})$ olan $n\geq 0$ vardır. Yani $u=\frac{Q_{2n+1}}{2}$, $v=P_{2n+1}$'dir. Eğer u ve v'nin değerleri $x=\frac{u+v}{2}$ ve $y=\frac{u-v}{2}$ eşitliklerinde yerine yazılırsa $x=\frac{Q_{2n+1}+2P_{2n+1}}{4}$ ve $y=\frac{Q_{2n+1}-2P_{2n+1}}{4}$ elde edilir. Böylece (2.10) ve (2.11) eşitliklerine göre $x=u_{n+1}$, $y=u_n$ elde edilir.

Aşağıdaki önermenin ispatı tümevarımla kolaylıkla yapılacağı için verilmeyecektir.

Önerme 2.2.6. $n\geq 1$ olmak üzere P_n sayısının tek olması gerekli ve yeterli şart n'nin tek olmasıdır.

.

Teorem 2.2.11. $x^2+y^2-6xy=-1$ denkleminin pozitif tamsayı çözümü yoktur.

İspat: $x^2+y^2-6xy=-1$ denklemi $(x-y)^2-4xy=1$ biçiminde düzenlensin ve $x+y=u$, $x-y=v$ alınsın. Şu halde $x=\dfrac{u+v}{2}$ ve $y=\dfrac{u-v}{2}$ olur. x ve y'nin değerleri denklemde yerine yazılırsa $v^2-(u^2-v^2)=-1$ bulunur. Buradan $u^2-2v^2=1$ Pell denklemi elde edilir. $(x-y)^2-4xy=1$ denklemi $(x-y)^2=4xy+1$ biçiminde yazılabilir. Dolayısıyla $x-y$ tek olur ve buradan v'nin tek olduğu görülür. Diğer yandan $u^2-2v^2=1$ eşitliğinden $u^2=2v^2+1\equiv 2.1+1 \pmod 8$ ve böylece $u^2\equiv 3 \pmod 8$ elde edilir. Bu ise bir çelişkidir. Böylece $x^2+y^2-6xy=-1$ denkleminin pozitif tamsayı çözümü yoktur.

Teorem 2.2.12. $x^2+y^2-6xy-x=0$ denkleminin tüm pozitif tamsayı çözümleri $k\geq 1$ olmak üzere $(x,y)=(u_k^2,u_ku_{k+1})$ veya $(x,y)=(u_{k+1}^2,u_ku_{k+1})$ biçimindedir.

İspat: $x^2+y^2-6xy-x=0$ denkleminin her iki tarafı 16 ile çarpılırsa $(4x)^2+(4y)^2-6(4x)(4y)-4(4x)=0$ olur. $4x=a$, $4y=b$ olsun. Böylece $a^2+b^2-6ab-4a=0$, yani $(a+b)^2=4a(2b+1)$ denklemi elde edilir. Teorem 2.2.7'ye göre $(a,b)=(4u_k^2,4u_ku_{k+1})$ veya $(a,b)=(4u_{k+1}^2,4u_ku_{k+1})$ olacak biçimde $k\geq 1$ vardır. Şu halde $4x=a$ olduğundan $x=u_k^2$, $y=u_ku_{k+1}$ veya $x=u_{k+1}^2$, $y=u_ku_{k+1}$'dir. Tersine $(x,y)=(u_k^2,u_ku_{k+1})$ veya $(x,y)=(u_{k+1}^2,u_ku_{k+1})$ ise $x^2+y^2-6xy-x=0$ olduğunu görmek kolaydır. Böylece $x^2+y^2-6xy-x=0$ denkleminin tüm pozitif tamsayı çözümleri $k\geq 1$ olmak üzere $(x,y)=(u_k^2,u_ku_{k+1})$ veya $(x,y)=(u_{k+1}^2,u_ku_{k+1})$ biçimindedir.

Aşağıdaki teoremin ispatı Teorem 2.2.8 ve Teorem 2.2.12 kullanılarak yapılabileceği için verilmeyecektir.

Teorem 2.2.13. $x^2+y^2-6xy+x=0$ denkleminin pozitif tamsayı çözümü yoktur.

2.3. Pell ve Pell-Lucas Kongrüansları ve Bölünebilme Özellikleri

Bu kısımda Pell ve Pell-Lucas dizileriyle ilgili kongrüanslar ve monoton artanlık özellikleriyle ilgili teoremler verilip ispatlanacaktır. Bu teoremler yardımıyla da bu dizilerin bölünebilme özellikleri gösterilecektir. Bölünebilme özellikleri yardımıyla ise ilerde vereceğimiz yeni teoremlerin ispatları yapılacaktır.Teoremlere geçmeden önce bölünebilme özelliklerinin ispatlarında kullanacağımız aşağıdaki özdeşlikleri verelim. Bu özdeşliklerin ispatları için [9], [10] ve [16] numaralı kaynaklara bakılabilir.

Önerme 2.3.1. Her $m, n \in \mathbb{Z}$ için aşağıdaki özdeşlikler sağlanır.

$$\begin{aligned}
&i)\ P_m \mid P_{mn}\\
&ii)\ Q_m \mid Q_{mn}\\
&iii)\ 8P_{m+n} = Q_m Q_{n+1} + Q_n Q_{m-1}\\
&iv)\ P_{m+n} = P_{m+1}P_n + P_m P_{n-1}\\
&v)\ Q_{m+n} = P_n Q_{m+1} + P_{n-1} Q_m\\
&vi)\ P_n^2 - 2P_n P_{n-1} - P_{n-1}^2 = (-1)^{n+1}\\
&vii)\ u_m \mid u_{mn}\\
&viii)\ 32u_{m+n} = v_m v_{n+1} - v_n v_{m-1}\\
&ix) u_{m+n} = u_m u_{n+1} - u_{m-1} u_n
\end{aligned}$$

Şimdi teoremlere geçebiliriz. Aşağıdaki teoremin $ii)$ ile gösterilen kısmının ispatı $i)$ gösterilen kısmının ispatı ile benzer yoldan yapılabileceğinden verilmeyecektir. Bu teoremlerin ispatları [17] numaralı kaynakta mevcut olup biz burada farklı bir ispat vereceğiz.

Teorem 2. 3. 1. $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ve $r, m \in \mathbb{Z}$ olsun. O zaman;

$$i)\ P_{2mn+r} \equiv (-1)^{(m+1)n} P_r \pmod{Q_m} \tag{2.12}$$

ve

$$ii) Q_{2mn+r} \equiv (-1)^{(m+1)n} Q_r \pmod{Q_m} \tag{2.13}$$

dir [17].

İspat $i)$**:** İspat tümevarımla yapılacaktır. Eğer $n=0$ ise $P_r \equiv P_r (\bmod Q_m)$ olup Teorem doğrudur. $n=1$ için $P_{2m+r} \equiv (-1)^{m+1} P_r (\bmod Q_m)$ olduğu gösterilebilir. Varsayalım ki ifade n için doğru olsun. Yani $P_{2mn+r} \equiv (-1)^{(m+1)n} P_r (\bmod Q_m)$ olsun. O zaman

$$P_{2m(n+1)+r} = P_{2mn+2m+r} \equiv (-1)^{(m+1)n} P_{2m+r} (\bmod Q_m)$$

olur. Burada $P_{2m+r} \equiv (-1)^{m+1} P_r (\bmod Q_m)$ olduğu kullanılırsa

$$P_{2m(n+1)+r} \equiv (-1)^{(m+1)n} (-1)^{(m+1)} P_r (\bmod Q_m)$$

elde edilir. Yani, $P_{2m(n+1)+r} \equiv (-1)^{(m+1)(n+1)} P_r (\bmod Q_m)$ 'dir.

Teorem 2.3.2. $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ve $r, m \in \mathbb{Z}$ olsun. O zaman

$$i)\, P_{2mn+r} \equiv (-1)^{mn} P_r (\bmod P_m) \tag{2.14}$$

ve

$$ii)\, Q_{2mn+r} \equiv (-1)^{mn} Q_r (\bmod P_m) \tag{2.15}$$

dir [17].

İspat $i)$ **:**

$$
\begin{aligned}
P_{2mn+r}-(-1)^{mn}P_r &= \frac{(\gamma^{2mn+r}-\delta^{2mn+r})-(-1)^{mn}\gamma^r+(-1)^{mn}\delta^r}{2\sqrt{2}} \\
&= \frac{\gamma^r\left(\gamma^{2mn}-(-1)^{mn}\right)+\delta^r\left((-1)^{mn}-\delta^{2mn}\right)}{2\sqrt{2}} \\
&= \frac{\gamma^r\gamma^{mn}(\gamma^{mn}-\delta^{mn})+\delta^r\delta^{mn}(\gamma^{mn}-\delta^{mn})}{2\sqrt{2}} \\
&= \gamma^{mn+r}P_{mn}+\delta^{mn+r}P_{mn} \\
&= P_{mn}(\gamma^{mn+r}+\delta^{mn+r}) \\
&= P_{mn}Q_{mn+r}
\end{aligned}
$$

dır. Şu halde $P_{2mn+r}-(-1)^{mn}P_r=P_{mn}Q_{mn+r}$ **’**dir. Teorem 2.3.1’e göre $P_m \mid P_{mn}$ olduğu için $P_m \mid P_{2mn+r}-(-1)^{mn}P_r$ olur. Yani; $P_{2mn+r}\equiv(-1)^{mn}P_r(\operatorname{mod} P_m)$ ’dir.

$ii)$ **:**

$$
\begin{aligned}
Q_{2mn+r}-(-1)^{mn}Q_r &= (\gamma^{2mn+r}+\delta^{2mn+r})-(-1)^{mn}\gamma^r-(-1)^{mn}\delta^r \\
&= \gamma^r\left(\gamma^{2mn}-(-1)^{mn}\right)-\delta^r\left((-1)^{mn}-\delta^{2mn}\right) \\
&= \gamma^r\gamma^{mn}(\gamma^{mn}-\delta^{mn})-\delta^r\delta^{mn}(\gamma^{mn}-\delta^{mn}) \\
&= \gamma^{mn+r}2\sqrt{2}P_{mn}-\delta^{mn+r}2\sqrt{2}P_{mn} \\
&= 2\sqrt{2}P_{mn}(\gamma^{mn+r}+\delta^{mn+r}) \\
&= 2\sqrt{2}P_{mn}2\sqrt{2}P_{mn+r} \\
&= 8P_{mn}P_{mn+r}
\end{aligned}
$$

dır. Şu halde $Q_{2mn+r}-(-1)^{mn}Q_r=8P_{mn}P_{mn+r}$ ’dir. $P_m \mid P_{mn}$ olduğundan $P_m \mid 8P_{mn}P_{mn+r}$ olur. Yani, $Q_{2mn+r}\equiv(-1)^{mn}Q_r(\operatorname{mod} P_m)$ ’dir.

Teorem 2.3.3. Her $n\in\mathbb{Z}$ için $Q_n>P_n$ ’dir.

İspat: $Q_n^2-8P_n^2=4(-1)^n$ özdeşliğinden $P_n^2=\dfrac{Q_n^2\pm 4}{8}$ olur. Böylece $Q_n^2-P_n^2=Q_n^2-\dfrac{Q_n^2\pm 4}{8}=\dfrac{8Q_n^2-Q_n^2\pm 4}{8}=\dfrac{7Q_n^2\pm 4}{8}$ elde edilir. Ayrıca $7Q_n^2\pm 4>0$ olduğundan $Q_n^2-P_n^2>0$ ’dir. Buradan $Q_n^2>P_n^2$ ve böylece $Q_n>P_n$ elde edilir.

Önerme 2.3.2. $n \geq 0$ olmak üzere $\{P_n\}$ monoton artandır.

İspat: $n \geq 2$ olmak üzere $P_n = 2P_{n-1} + P_{n-2}$ biçiminde tanımlıdır. Şu halde $P_{n+1} = 2P_n + P_{n-1} > P_n$ olduğundan $P_{n+1} > P_n$ 'dir. Yani, $\{P_n\}$ monoton artandır.

Aşağıdaki önermenin ispatı Önerme 2.3.2'nin ispatına benzer biçimde yapılacağından verilmeyecektir.

Önerme 2.3.3. $n \geq 1$ olmak üzere $\{Q_n\}$ monoton artandır.

Aşağıda verilecek olan önermelerden birincisinin ispatı kolaylıkla görülür. İkinci önermenin ispatı ise Önerme 2.3.1'de verilen $P_n^2 - 2P_nP_{n-1} - P_{n-1}^2 = (-1)^{n+1}$ özdeşliğinden görüleceği için verilmeyecektir.

Önerme 2.3.4. Her $n \in \mathbb{Z}$ için $(Q_n, Q_{n-1}) = 2$ 'dir.

Önerme 2.3.5. Her $n \in \mathbb{Z}$ için $(P_n, P_{n-1}) = 1$'dir.

Önerme 2.3.6. $n > 0$ ise $Q_{n+1} > 2Q_n$ 'dir.

İspat: $Q_{n+1} = 2Q_n + Q_{n-1}$ olduğundan $Q_{n+1} - 2Q_n = 2Q_n + Q_{n-1} - 2Q_n = Q_{n-1}$ olur. Ayrıca $n > 0$ olmak üzere $Q_{n-1} > 0$ olduğundan $Q_{n+1} > 2Q_n$ 'dir.

Önerme 2.3.7. $0 < r < n$ ve $r, n \in \mathbb{N}$ ise $Q_n > 2Q_r$ 'dir.

İspat: $r < n$ ise $r \leq n-1$ dir. Şu halde $Q_n > 2Q_{n-1} \geq 2Q_r$ olduğundan $Q_n > 2Q_r$ 'dir.

Önerme 2.3.8. $n \geq 1$ ise $P_{n+1} \geq 2P_n$ 'dir.

İspat: $P_{n-1} \geq 0$ ve $P_{n+1} = 2P_n + P_{n-1}$ olduğundan $P_{n+1} \geq 2P_n$ 'dir.

Aşağıdaki önermelerin ispatları Önerme 2.3.7'nın ispatına benzer biçimde yapılacağından verilmeyecektir.

Önerme 2.3.9. $0<r<n$ ve $r,n\in\mathbb{N}$ ise $P_n \geq 2P_r$'dir.

Önerme 2.3.10. $0<r<n$ ve $r,n\in\mathbb{N}$ ise $Q_n > 2P_r$'dir.

Şimdi Pell ve Pell-Lucas sayılarının bölünebilme özelliklerine geçilebilir. Burada verilecek olan teoremlerin çoğu kaynaklarda mevcut olup, bunun için [18] numaralı kaynağa bakılabilir. Biz burada bu ispatları farklı bir yoldan vereceğiz. Ayrıca ispatlarda Teorem 2.3.1 ve Teorem 2.3.2 kullanılacaktır.

Teorem 2.3.4. $m,n\in\mathbb{N}$ ve $m\geq 2$ olsun. Bu durumda $Q_m \mid P_n$ olması için gerekli ve yeterli şart $m\mid n$ ve n/m tamsayısının çift olmasıdır.

İspat: $m\geq 2$ ve $Q_m \mid P_n$ olduğunu kabul edelim. $n=mq+r$, $0\leq r<m$ olsun. Eğer q tek tamsayı ise, o zaman $t\in\mathbb{Z}$ olmak üzere $q=2t+1$ olur. (2.12) kongrüansından $P_n = P_{2mt+m+r} \equiv (-1)^{(m+1)t} P_{m+r} (\operatorname{mod} Q_m)$ yazılabilir. Böylece $Q_m \mid P_{m+r}$ olur. Önerme 2.3.1 deki $8P_{m+r} = Q_m Q_{r+1} + Q_r Q_{m-1}$ özdeşliği kullanılırsa $Q_m \mid P_{m+r}$ olduğundan $Q_m \mid Q_r Q_{m-1}$ bulunur. Önerme 2.3.4'e göre $(Q_m, Q_{m-1}) = 2$'dir. Şu halde $(\frac{Q_m}{2}, \frac{Q_{m-1}}{2}) = 1$ olur. $Q_m \mid Q_r Q_{m-1}$ olduğundan $\frac{Q_m}{2} \mid Q_r \frac{Q_{m-1}}{2}$ yazılabilir. Buradan $\frac{Q_m}{2} \mid Q_r$ yani $Q_m \leq 2Q_r$ elde edilir. Bu ise $m\geq 2$ ve $0\leq r<m$ olduğundan Önerme 2.3.6'ya göre mümkün değildir. Dolayısıyla q çift tamsayıdır. O halde $t\in\mathbb{Z}$ olmak üzere $q=2t$ olur. $r>0$ olduğunu kabul edelim. (2.12) kongrüansına göre $P_n = P_{2mt+r} \equiv (-1)^{(m+1)t} P_r (\operatorname{mod} Q_m)$ yazılabilir. Bu durumda $Q_m \mid P_r$ olup $Q_m \leq P_r$ bulunur. Fakat bu bir çelişkidir. Çünkü $r<m$ olduğundan Teorem 2.3.3 ve Önerme 2.3.2'ye göre $Q_m > P_m > P_r$'dir. O halde $r=0$ olur. Dolayısıyla $n=mq$ olup $m\mid n$ ve n/m çift tamsayıdır. Tersine $m\mid n$ ve $n=2mt$ çift tamsayı olsun. Bu durumda;

(2.12) kongrüansına göre $P_n = P_{2mt} \equiv (-1)^{(m+1)t} P_0 (\operatorname{mod} Q_m)$ yazılabilir. $P_0 = 0$ olduğundan $Q_m \mid P_n$ elde edilir.

Teorem 2.3.5. m, $n \in \mathbb{N}$ ve $m \geq 2$ olsun. Bu durumda $P_m \mid P_n$ olması için gerekli ve yeterli şart $m \mid n$ olmasıdır.

İspat: Varsayalım ki $P_m \mid P_n$ fakat $m \nmid n$ olsun. O zaman $0 < r < m$ olmak üzere $n = mq + r$'dir. Şimdi varsayalım ki q çift tamsayı olsun. O zaman $t \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $q = 2t$ olur. (2.14) kongrüansından $P_n = P_{2mt+r} \equiv (-1)^{mt} P_r (\operatorname{mod} P_m)$ yazılır. Böylece $P_m \mid P_n$ olduğundan $P_m \mid P_r$ elde edilir. $P_r \neq 0$ olduğundan $P_m \leq P_r$ olur. Fakat bu Önerme 2.3.2'ye göre bir çelişkidir. Çünkü $\{P_n\}$ dizisi monoton artan bir dizidir ve $0 < r < m$ ise $P_r < P_m$'dir. O halde q çift tamsayı değildir. q tek tamsayı olsun. O zaman $t \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $q = 2t + 1$ olur. (2.14) kongrüansından $P_n = P_{2mt+m+r} \equiv (-1)^{mt} P_{m+r} (\operatorname{mod} P_m)$ yazılabilir. Böylece $P_m \mid P_n$ olduğundan $P_m \mid P_{m+r}$ elde edilir. Önerme 2.3.1'de verilen $P_{m+r} = P_{m+1} P_r + P_m P_{r-1}$ özdeşliği kullanılarak $P_m \mid P_{m+r} P_r$ bulunur. Ancak Önerme 2.3.5'e göre $(P_m, P_{m+1}) = 1$'dır. Şu halde $P_m \mid P_r$ olur. Dolayısıyla $P_m \leq P_r$ olur. Fakat bu Önerme 2.3.2'e göre çelişkidir. O halde $r = 0$ dir. Yani $n = mq$ olup $m \mid n$ dır. Şimdi de $m \mid n$ olduğunu varsayalım. Bu durumda $q \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $n = mq$ olur. Eğer q çift tamsayı ise $t \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $q = 2t$ olup (2.14) kongrüansından, $P_n = P_{2mt} \equiv (-1)^{mt} P_0 (\operatorname{mod} P_m)$ yazılabilir. $P_0 = 0$ olduğundan $P_m \mid P_n$'dir. Eğer q tek tamsayı ise $t \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $q = 2t + 1$ olur. (2.14) kongrüansından $P_n = P_{2mt+m} \equiv (-1)^{mt} P_m (\operatorname{mod} P_m)$ olup buradan $P_m \mid P_n$ elde edilir.

Teorem 2.3.6. m, $n \in \mathbb{N}$ ve $m \geq 2$ olsun. Bu durumda $Q_m \mid Q_n$ olması için gerekli ve yeterli şart $m \mid n$ ve n/m tamsayısının tek olmasıdır.

İspat: $Q_m \mid Q_n$ olduğunu kabul edelim. Bölme algoritmasına göre $n = mq + r$, $0 \leq r < m$ yazılabilir. Eğer q çift tamsayı ise o zaman $t \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $q = 2t$

olur. (2.13) kongrüansından $Q_n = Q_{2mt+r} \equiv (-1)^{(m+1)t} Q_r (\bmod Q_m)$ yazılabilir. $Q_m \mid Q_n$ olduğundan $Q_m \mid Q_r$ olur. Dolayısıyla $Q_m \leq Q_r$ dır. Fakat bu Önerme 2.3.3'e göre bir çelişkidir. Çünkü $\{Q_n\}$ dizisi monoton artan bir dizidir ve dolayısıyla $0 \leq r < m$ ise $Q_r < Q_m$'dir. Şu halde q tek tamsayıdır. O halde $t \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $q = 2t+1$ olur. Varsayalım ki $r > 0$ olsun. (2.13) kongrüansından $Q_n = Q_{2mt+m+r} \equiv (-1)^{(m+1)t} Q_{m+r} (\bmod Q_m)$ yazılabilir. Bu durumda $Q_m \mid Q_n$ olduğundan $Q_m \mid Q_{m+r}$ elde edilir. Önerme 2.3.1'de verilen $Q_{m+r} = P_r Q_{m+1} + P_{r-1} Q_m$ özdeşliği kullanılırsa; $Q_m \mid Q_{m+r}$ olduğundan $Q_m \mid P_r Q_{m+1}$ elde edilir. Önerme 2.3.4'e göre $(Q_m, Q_{m+1}) = 2$'dir. Şu halde $(\frac{Q_m}{2}, \frac{Q_{m+1}}{2}) = 1$ olur. $Q_m \mid P_r Q_{m+1}$ olduğundan $\frac{Q_m}{2} \mid P_r \frac{Q_{m+1}}{2}$'dir. Buradan $\frac{Q_m}{2} \mid P_r$, yani $Q_m \leq 2P_r$ elde edilir. Fakat bu Önerme 2.3.10'a göre bir çelişkidir. Çünkü $m \geq 2$ için, $0 \leq r < m$ ise $Q_m > 2P_r$ dır. O halde $r = 0$ dır. Yani $n = mq$ olup $m \mid n$ ve n/m, tek tamsayıdır. Tersine $m \mid n$ ve $t \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $n = m(2t+1)$ olsun. O zaman (2.13) kongrüansına göre, $Q_n = Q_{2mt+m} \equiv (-1)^{(m+1)t} Q_m (\bmod Q_m)$ olup buradan $Q_m \mid Q_n$ elde edilir.

2.4. $\{u_n\}$, $\{v_n\}$ Dizileriyle İlgili Kongrüanslar ve Bölünebilme Özellikleri

Bu kısımda $\{u_n\}$ ve $\{v_n\}$ dizileriyle ilgili kongrüanslar verilecek ve bu dizilerin monoton artanlık özellikleriyle ilgili teoremler ispatlanacaktır. Bu teoremler kullanılarak bu dizilerin bölünebilme özellikleri verilecektir. Bu teoremlerin ispatları için [17] numaralı kaynağa bakılabilir fakat biz burada ispatları farklı bir yoldan vereceğiz.

Teorem 2.4.1. $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ve $r, m \in \mathbb{Z}$ olsun. O zaman

$$i)\, u_{2mn+r} \equiv u_r (\bmod u_m) \tag{2.16}$$

ve

$$ii)\, v_{2mn+r} \equiv v_r (\bmod u_m) \tag{2.17}$$

dir [17].

İspat $i)$:

$$
\begin{aligned}
u_{2mn+r}-u_r &= \frac{(\alpha^{2mn+r}-\beta^{2mn+r})-(\alpha^r-\beta^r)}{4\sqrt{2}} \\
&= \frac{\alpha^r(\alpha^{2mn}-1)+\beta^r(1-\beta^{2mn})}{4\sqrt{2}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\alpha^r\left(\alpha^{2mn}-(\alpha\beta)^{mn}\right)+\beta^r\left((\alpha\beta)^{mn}-\beta^{2mn}\right)}{4\sqrt{2}} \\
&= \frac{\alpha^r\alpha^{mn}(\alpha^{mn}-\beta^{mn})+\beta^r\beta^{mn}(\alpha^{mn}-\beta^{mn})}{4\sqrt{2}}
\end{aligned}
$$

dır. Şu halde $u_{2mn+r}-u_r=u_{mn}v_{mn+r}$ olur. Önerme 2.3.1'e göre $u_m \mid u_{mn}$ olduğundan $u_m \mid u_{2mn+r}-u_r$ 'dir. Böylece $u_{2mn+r}\equiv u_r (\operatorname{mod} u_m)$ olur.

$ii)$:

$$
\begin{aligned}
v_{2mn+r}-v_r &= (\alpha^{2mn+r}+\beta^{2mn+r})-(\alpha^r+\beta^r) \\
&= \alpha^r(\alpha^{2mn}-1)+\beta^r(\beta^{2mn}-1) \\
&= \alpha^r\left(\alpha^{2mn}-(\alpha\beta)^{mn}\right)+\beta^r\left(\beta^{2mn}-(\alpha\beta)^{mn}\right) \\
&= \alpha^r\alpha^{mn}(\alpha^{mn}-\beta^{mn})+\beta^r\beta^{mn}(\beta^{mn}-\alpha^{mn}) \\
&= \alpha^{mn+r}4\sqrt{2}u_{mn}-\beta^{mn+r}4\sqrt{2}u_{mn} \\
&= 4\sqrt{2}u_{mn}(\alpha^{mn+r}-\beta^{mn+r}) \\
&= 4\sqrt{2}u_{mn}4\sqrt{2}u_{mn+r} \\
&= 32u_{mn}u_{mn+r}
\end{aligned}
$$

dir. Yani $v_{2mn+r}-v_r=32u_{mn}u_{mn+r}$ 'dir. Önerme 2.3.1'e göre $u_m \mid u_{mn}$ olduğundan $u_m \mid 32u_{mn}u_{mn+r}$ 'dir. Yani, $u_m \mid v_{2mn+r}-v_r$ olur. Böylece $v_{2mn+r}\equiv v_r (\operatorname{mod} u_m)$ elde edilir.

Teorem 2.4.2. $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ ve $r,m\in\mathbb{Z}$ olsun. O zaman

$$i)\, u_{2mn+r} \equiv (-1)^n u_r (\operatorname{mod} v_m) \tag{2.18}$$

ve

$$ii) v_{2mn+r} \equiv (-1)^n v_r (\operatorname{mod} v_m) \tag{2.19}$$

dir [17].

İspat $i)$ **:** İspat tümevarımla yapılacaktır. Eğer $n=0$ ise $u_r \equiv u_r (\operatorname{mod} v_m)$ olduğundan; iddia doğrudur. $n=1$ için $u_{2m+r} \equiv -u_r (\operatorname{mod} v_m)$ olduğu gösterilebilir. İfadenin n için doğru olduğunu kabul edelim. Yani, $u_{2mn+r} \equiv (-1)^n u_r (\operatorname{mod} v_m)$ olsun. O zaman $u_{2m(n+1)+r} = u_{2mn+2m+r} \equiv (-1)^n u_{2m+r} (\operatorname{mod} v_m)$'dir. Burada $u_{2m+r} \equiv -u_r (\operatorname{mod} v_m)$ olduğu kullanılırsa

$$u_{2m(n+1)+r} \equiv (-1)^n (-1) u_r (\operatorname{mod} v_m)$$

olur. Yani,

$$u_{2m(n+1)+r} \equiv (-1)^{(n+1)} u_r (\operatorname{mod} v_m)$$

dir.

$ii)$ **:** İspat tümevarımla yapılacaktır. Eğer $n=0$ ise $v_r \equiv v_r (\operatorname{mod} v_m)$ olduğundan; iddia doğrudur. $n=1$ için $v_{2m+r} \equiv -v_r (\operatorname{mod} v_m)$ olduğu gösterilebilir. İfadenin n için doğru olduğunu kabul edelim. Yani; $v_{2mn+r} \equiv (-1)^n v_r (\operatorname{mod} v_m)$ olsun. O zaman; $v_{2m(n+1)+r} = v_{2mn+2m+r} \equiv (-1)^n v_{2m+r} (\operatorname{mod} v_m)$ olur. Burada $v_{2m+r} \equiv -v_r (\operatorname{mod} v_m)$ olduğu kullanılırsa; $v_{2m(n+1)+r} \equiv (-1)^n (-1) v_r (\operatorname{mod} v_m)$ olur. Yani, $v_{2m(n+1)+r} \equiv (-1)^{(n+1)} v_r (\operatorname{mod} v_m)$ dir.

Teorem 2.4.3. Her $n \geq 0$ tamsayısı için $v_n > u_n$'dir.

İspat: Önerme 2.2.2'ye göre $v_n^2 - 32u_n^2 = 4$ olduğundan $u_n^2 = \dfrac{v_n^2 - 4}{32}$ olur. Böylece

$v_n^2 - u_n^2 = v_n^2 - \dfrac{v_n^2 - 4}{32} = \dfrac{32v_n^2 - v_n^2 + 4}{32} = \dfrac{31v_n^2 + 4}{32}$ bulunur. Ayrıca $31v_n^2 + 4 > 0$ olduğundan $v_n^2 - u_n^2 > 0$ dır. Buradan $v_n^2 > u_n^2$ olur. Yani, $v_n > u_n$ 'dir.

Aşağıda verilecek olan önermenin ispatı kolaylıkla görülebileceğinden verilmeyecektir.

Önerme 2.4.1. $n \geq 0$ olmak üzere; $\{u_n\}$ monoton artandır.

İspat: Teoremin ispatı için Teorem 2.2.1 $ii)$ 'de verilen $\beta^n = \beta u_n - u_{n-1}$ özdeşliği kullanılacaktır. Bu özdeşlikte $\beta = 6 - \alpha$ olduğu göz önüne alınırsa ve β 'nın değeri yerine yazılırsa $\beta^n = (6-\alpha)u_n - u_{n-1} = (6u_n - u_{n-1}) - \alpha u_n = u_{n+1} - \alpha u_n$ bulunur. Yani $\beta^n = u_{n+1} - \alpha u_n$ 'dir. $\beta > 0$ olduğundan $\beta^n > 0$ 'dır. Böylece $u_{n+1} - \alpha u_n > 0$ yani $u_{n+1} > \alpha u_n$ elde edilir. Şu halde $\alpha > 1$ ve $u_{n+1} > \alpha u_n$ olduğundan $u_{n+1} > u_n$ elde edilir.

Önerme 2.4.2. $n \geq 0$ olmak üzere; $\{v_n\}$ monoton artandır.

İspat: $v_n = u_{n+1} - u_{n-1}$ eşitliği ve $\{u_n\}$ dizisinde $u_{n+1} = 6u_n - u_{n-1}$ olduğu kullanılırsa

$v_{n+1} - v_n = (u_{n+2} - u_n) - (u_{n+1} - u_{n-1}) = (6u_{n+1} - 2u_n) - (u_{n+1} - u_{n-1}) = 5u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}$

olup buradan $5u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1} \geq 2u_{n+1} - 2u_n + u_{n+1} > 2(u_{n+1} - u_{n-1}) > 0$ bulunur. Yani $v_{n+1} > v_n$ 'dir.

Önerme 2.4.3. Her $n \in \mathbb{N}$ için $(u_n, u_{n-1}) = 1$ 'dir.

İspat: Önermenin ispatı Önerme 2.3.1'den elde edilir.

Şimdi u_n, v_n sayıları ile Pell, Pell-Lucas sayıları arasındaki ilişkiler kullanılarak, Pell, Pell-Lucas sayılarının bölünebilme özellikleri yardımıyla u_n, v_n sayılarının bölünebilme özellikleri verilecektir.

Teorem 2.4.4. m, $n \in \mathbb{N}$ ve $m \geq 2$ olsun. O zaman $u_m \mid u_n$ olması için gerekli ve yeterli şart $m \mid n$ olmasıdır.

İspat: Sonuç 2.2.1'e göre $u_m = \frac{P_{2m}}{2}$, $u_n = \frac{P_{2n}}{2}$ olduğu ve Teorem 2.3.5 kullanılırsa istenilen sonuç elde edilir.

Teorem 2.4.5. $m,n \in \mathbb{N}$ ve $m \geq 2$ olsun. O zaman $v_m \mid v_n$ olması için gerekli ve yeterli şart $m \mid n$ ve n/m tamsayısının tek olmasıdır.

İspat: Sonuç 2.2.1'e göre $v_m = Q_{2m}$, $v_n = Q_{2n}$ olduğu ve Teorem 2.3.6 kullanılırsa istenilen sonuç elde edilir.

Teorem 2.4.6. $m,n \in \mathbb{N}$ ve $m \geq 2$ olsun. O zaman $v_m \mid u_n$ olması için gerekli ve yeterli şart $m \mid n$ ve n/m tamsayısının çift olmasıdır.

İspat: $v_m \mid u_n$ olduğunu kabul edelim. O zaman $Q_{2m} \mid \frac{P_{2n}}{2}$ olup buradan $Q_{2m} \mid P_{2n}$ yazılabilir. Şu halde Teorem 2.3.4'e göre $2m \mid 2n$ ve $\frac{2n}{2m}$ çift tamsayıdır. Yani $m \mid n$ ve $\frac{n}{m}$ çift tamsayı olur. Tersine $m \mid n$ ve $\frac{n}{m}$ çift tamsayı olsun. O zaman $n = 2mk$ olur. (2.18) kongrüansından dolayı $u_n = u_{2mk} \equiv u_0 (\bmod v_m)$'dir. Yani $u_n \equiv 0 (\bmod v_m)$ olur. Şu halde $v_m \mid u_n$'dir.

Teorem 2.4.7. $n > 1$, $m > 1$ ve $m \geq n$ olmak üzere $u_n u_m = u_r$ olacak biçimde r doğal sayısı yoktur.

İspat: $u_n u_m = u_r$ olsun. O halde $u_m \mid u_r$'dir. Teorem 2.4.4'e göre $u_m \mid u_r$ olduğundan $m \mid r$ dır. Dolayısıyla $r = mt$ olacak biçimde t tamsayısı vardır. t çift tamsayı olsun. Şu halde $t = 2k$ olacak biçimde $k \in \mathbb{Z}$ vardır. Böylece $r = 2km$ dir. O halde $u_n u_m = u_r = u_{2km}$ olup buradan $u_n u_m = u_{km} v_{km}$ olur. Eşitliğin her iki tarafı u_m'ye bölünürse $u_n = \frac{u_{km}}{u_m} v_{km}$ ve böylece $v_{km} \mid u_n$ elde edilir. Teorem 2.4.6' ya göre $v_{km} \mid u_n$ olduğundan $km \mid n$ ve $\frac{n}{km} = 2s$ olacak biçimde s tamsayısı vardır. Dolayısıyla $n = 2kms$ ve $r = 2km$ olup buradan $n = rs$ elde edilir. $n = rs$ olduğundan

$$r \mid n \tag{2.20}$$

yazılabilir.

Ayrıca $u_n u_m = u_r$ olduğundan $u_n \mid u_r$ 'dir. O halde Teorem 2.4.4'e göre

$$n \mid r \tag{2.21}$$

dir. Böylece (2.20) ve (2.21)'den dolayı $r = n$ elde edilir. Bu eşitlik $u_n u_m = u_r$ eşitliğinde yerine yazılırsa $u_m = 1$ olur. Bu ise $m = 1$ olması ile mümkündür. Fakat bu başlangıç kabulümüz ile çelişir. Şu halde t çift olamaz. t tek tamsayı olsun. O halde $t = 4s \mp 1$ olacak biçimde s tamsayısı vardır. Böylece $r = mt = 4sm \mp m$ elde edilir. (2.16) kongrüansından $u_r = u_{4sm \mp m} = u_{2.2sm \mp m} \equiv u_{\mp m} (\bmod\, u_{2m})$ yazılabilir. Dolayısıyla $u_m u_n \equiv \mp u_m (\bmod\, u_{2m})$ ve $u_{2m} = u_m v_m$ olduğundan, $u_m u_n \equiv \mp u_m (\bmod\, u_m v_m)$ olur. Şimdi eşitliğin her iki tarafı u_m ile sadeleştirilirse, $u_n \equiv \mp 1 (\bmod\, v_m)$ elde edilir. Böylece $v_m \mid u_n \mp 1$ olur. Dolayısıyla $v_m \leq u_n \mp 1$ bulunur. Diğer yandan her $n \geq 0$ için $v_n > 2u_n$ olduğu gösterilebilir. Böylece $m \geq n$ olduğundan $u_n + 1 \geq u_n \mp 1 \geq v_m \geq v_n > 2u_n$ elde edilir. Bu ise $u_n + 1 > 2u_n$ yani $u_n < 1$ olmasını gerektirir. Bu bir çelişkidir. Dolayısıyla $n > 1$, $m > 1$ ve $m \geq n$ olmak üzere; $u_n u_m = u_r$ olacak biçimde r doğal sayısı yoktur.

İki tane üçgensel sayının çarpımı üçgensel sayı olabilir. Örneğin $T_3 = 10$ ve $T_6 = 21$, iki üçgensel sayı olmak üzere; $T_3.T_6 = 10.21 = 210 = T_{20}$ olur. Fakat iki tane kare-üçgensel sayının çarpımı önceki teoreme göre üçgensel sayı olamaz. Aşağıda vereceğimiz sonucun ispatı Teorem 2.4.7'den elde edilir.

Sonuç 2.4.1. $u^2 = \dfrac{x(x+1)}{2}$, $v^2 = \dfrac{y(y+1)}{2}$ ve $u^2v^2 = \dfrac{z(z+1)}{2}$ olacak biçimde $x > 1$, $y > 1$ tamsayıları yoktur.

Teorem 2.4.8. $m \geq 1$, $n \geq 1$ ise $(u_m, u_n) = u_{(m,n)}$'dir.

İspat: $d = (m,n)$ olsun. Dolayısıyla $x > 0$ ve $y \leq 0$ veya $x \leq 0$ ve $y > 0$ olmak üzere $d = mx + ny$ olacak biçimde x, y tamsayıları vardır. Genelliği bozmadan $x > 0$ ve $y \leq 0$ kabul edelim. Ayrıca $g = (u_n, u_m)$ olsun. $d = (m,n)$ olduğundan $d \mid m$ ve $d \mid n$ olur. Dolayısıyla Teorem 2.4.4'e göre $u_d \mid u_m$ ve $u_d \mid u_n$'dir. Böylece $u_d \mid (u_m, u_n)$ elde edilir. O halde,

$$u_{(m,n)} \mid (u_m, u_n) \tag{2.22}$$

dir.

Ayrıca Önerme 2.3.1'de verilen *ix*) özdeşliği yardımıyla $u_{mx} = u_{d+n(-y)} = u_d u_{n(-y)+1} - u_{d-1} u_{n(-y)}$ olduğu kullanılırsa $g \mid u_m$ ve $g \mid u_n$ olduğundan $g \mid u_{mx}$ ve $g \mid u_{n(-y)}$ olur. Böylece yukarıdaki eşitlikten $g \mid u_d u_{n(-y)+1}$ elde edilir. $g \mid u_{n(-y)}$ ve Önerme 2.4.4'e göre $(u_{n(-y)}, u_{n(-y)+1}) = 1$ olduğundan g ile $u_{n(-y)+1}$ aralarında asaldır. Dolayısıyla $g \mid u_d$'dir. Yani,

$$(u_m, u_n) \mid u_{(m,n)} \tag{2.23}$$

dir. (2.22) ve (2.23) eşitliklerinden dolayı $(u_m u_n) = u_{(m,n)}$ elde edilir.

Sonuç 2.4.2. $m \geq 1, n \geq 1$ ise $(u_n^2, u_m^2) = u_{(m,n)}^2$'dir.

Sonuç aslında bize iki kare-üçgensel sayının en büyük ortak böleninin kare-üçgensel sayı olduğunu söyler.

1'den büyük birbirini bölmeyen iki üçgensel sayının en küçük ortak katı üçgensel sayı olabilir. Örneğin $T_5 = 15$ ve $T_6 = 21$ için $T_5 \nmid T_6$ iken $\left[T_5, T_6\right] = \left[15, 21\right] = 105 = T_{14}$ olup bu bir üçgensel sayıdır. Fakat 1 den büyük iki kare üçgensel sayının en küçük ortak katının üçgensel sayı olması için sayılardan birinin diğerini bölmesi gerekir. Bunu aşağıdaki teoremde vereceğiz.

Teorem 2.4.9. $u_n > 1$, $u_m > 1$ ve $u_n < u_m$ olsun. $\left[u_n^2, u_m^2\right]$'nin bir üçgensel sayı olması için gerekli ve yeterli şart $u_n^2 \mid u_m^2$ olmasıdır.

İspat: $u_n^2 \mid u_m^2$ ise $\left[u_n^2, u_m^2\right] = u_m^2$'dir. Şu halde $\left[u_n^2, u_m^2\right]$ üçgensel sayıdır. Tersine $u_n > 1, u_m > 1$ ve $u_n^2 \nmid u_m^2$ yani $n \nmid m$ ise $\left[u_n^2, u_m^2\right]$'nin üçgensel sayı olmadığı gösterilecektir. $d = (m, n)$ olsun. Sonuç 2.4.2'den dolayı $(u_n^2, u_m^2) = (u_n, u_m)^2 = u_d^2$'dir. $\left[u_n^2, u_m^2\right] = \dfrac{u_n^2 u_m^2}{(u_n^2, u_m^2)} = \dfrac{u_n^2 u_m^2}{u_d^2} = \left(\dfrac{u_n u_m}{u_d}\right)^2$ olduğundan eğer $\left[u_n^2, u_m^2\right]$ üçgensel sayı ise, bir kare-üçgensel sayı olur. Şu halde $\left(\dfrac{u_n u_m}{u_d}\right)^2 = u_r^2$ olan r doğal sayısı vardır. Buradan $u_n u_m = u_d u_r$ elde edilir. Dolayısıyla $\dfrac{u_n}{u_d} u_m = u_r$ olur. Buradan $u_m \mid u_r$ ve böylece Teorem 2.4.4'e göre $m \mid r$ yazılabilir. Şu halde $r = mt$ olacak biçimde t doğal sayısı vardır. t tek olsun. O zaman $t = 4q \mp 1$ olacak biçimde q doğal sayısı vardır. Dolayısıyla $r = mt = m(4q \mp 1) = 4qm \mp m$ olur. Böylece (2.16) kongrüansına göre $u_r = u_{4qm \mp m} = u_{2.2qm \mp m} \equiv u_{\mp m} (\bmod u_{2m})$ yazılabilir. Yani, $u_r \equiv \mp u_m (\bmod u_{2m})$ olur. $u_{2m} = u_m v_m$ olduğundan, $\dfrac{u_n}{u_d} u_m = u_r \equiv \mp u_m (\bmod u_m v_m)$ yazılabilir. Şimdi her iki taraf u_m ile sadeleştirilirse $\dfrac{u_n}{u_d} \equiv \mp 1 (\bmod v_m)$ bulunur. Fakat $\dfrac{u_n}{u_d} = 1$ olamaz. Çünkü $\dfrac{u_n}{u_d} = 1$ olursa bu durumda $d = n$ yani $n \mid m$ olur. Halbuki $n \nmid m$ idi. Şu halde

$\frac{u_n}{u_d} \equiv \mp 1 (\bmod v_m)$ kongrüansından $v_m \mid \frac{u_n}{u_d} \mp 1$ yani $v_m \le \frac{u_n}{u_d} \mp 1 \le u_n \mp 1 < u_n + 1$ elde edilir. Hipotez gereği $u_n < u_m$ olduğundan Önerme 2.4.1'e göre $n < m$'dir. O zaman $v_n < v_m < u_n + 1$ olur. Diğer yandan her $n \ge 0$ için $v_n > 2u_n$ olduğu gösterilebilir. Böylece $2u_n < v_n < u_n + 1$ yani $u_n < 1$ elde edilir. Bu ise çelişkidir. Çünkü hipoteze göre $u_n > 1$'dir. Şimdi t çift sayı olsun. O zaman $t = 2k$ olacak biçimde $k \in \mathbb{N}$ vardır. Buradan $r = mt = m(2k) = 2km$ ve böylece $\frac{u_n}{u_d} u_m = u_r = u_{2km} = u_{km} v_{km} \ge u_m v_m$ yazılabilir. Şimdi her iki taraf u_m ile sadeleştirilirse $\frac{u_n}{u_d} \ge v_m$ olur. Dolayısıyla $v_m \le \frac{u_n}{u_d} \le u_n$ olup buradan $v_m \le u_n$ elde edilir. Fakat bu mümkün değildir. Çünkü $n < m$ ise Önerme 2.4.2'e göre $v_n < v_m$ olup bu $v_n < u_n$ olmasını gerektirir. Ancak Teorem 2.4.3'e göre $v_n > u_n$'dir. Bu durumda çelişki elde edilir. Dolayısıyla, $\left[u_n^2, u_m^2\right]$'nin üçgensel sayı olması için gerekli ve yeterli şart $u_n^2 \mid u_m^2$ olmasıdır.

Teorem 2.4.10. $n > 1$, $m > 1$ olmak üzere $y_n y_m = y_r$ olacak biçimde r doğal sayısı yoktur.

İspat: $y_n y_m = y_r$ ise (2.4) eşitliğinden $\left(\frac{v_n - 2}{4}\right)\left(\frac{v_m - 2}{4}\right) = \left(\frac{v_r - 2}{4}\right)$ yazılabilir. Şu halde $(v_n - 2)(v_m - 2) = 4(v_r - 2)$ olur. Sonuç 2.2.7'ye göre

$$v_n \equiv \begin{cases} 2 (\bmod 32) & ; n \text{ çift tamsayı} \\ 6 (\bmod 32) & ; n \text{ tek tamsayı} \end{cases}$$

dır. Burada iki durum söz konusudur.

$i)$ n ve m den herhangi biri çift tamsayı ise r çift tamsayıdır.

$ii)$ n, m ve r tek tamsayılardır.

Şimdi bu durumları ayrı ayrı inceleyelim.

$i)$ n ve r çift tamsayı olsun. O halde $n=2k$ ve $r=2t$ olacak biçimde $k,t\in\mathbb{N}$ vardır. (2.5) eşitliğine göre $y_n=y_{2k}=8u_k^2$ ve $y_r=y_{2t}=8u_t^2$'dir. O zaman $y_ny_m=y_r$ den $y_{2k}y_m=y_{2t}$ ve böylece $8u_k^2y_m=8u_t^2$ elde edilir. Dolayısıyla $y_m=\left(\frac{u_t}{u_k}\right)^2$ bir tam karedir. (2.7) eşitliğine göre y_m bir tam kare ise m tek tamsayıdır ve $y_m=(\frac{Q_m}{2})^2$ 'dir. O halde $\frac{Q_m}{2}=\frac{u_t}{u_k}$ olup buradan Sonuç 2.2.1'e göre

$\frac{u_t}{u_k}=\frac{\frac{P_{2t}}{2}}{\frac{P_{2k}}{2}}=\frac{P_{2t}}{P_{2k}}=\frac{P_r}{P_n}$ ve böylece $2P_r=P_nQ_m$ elde edilir. Burada Q_m'nin çift olduğu açıktır. n çift tamsayı ise P_n'nin de çift tamsayı olacağı tümevarımla kolaylıkla görülebilir. O halde $P_r=\frac{P_nQ_m}{2}$ olur. Buradan $P_n\,|\,P_r$ ve Teorem 2.3.5'e göre $n\,|\,r$'dir. Ayrıca Teorem 2.3.4'e göre $Q_m\,|\,P_r$ olup buradan $m\,|\,r$ ve $\frac{r}{m}$'nin çift tamsayı olduğu görülür. Böylece $r=nu$ ve $r=2ms$ olacak biçimde u, s tamsayıları vardır. $2P_r=P_nQ_m$ olduğundan $P_nQ_m=2P_r=2P_{2ms}=2P_{ms}Q_{ms}>P_{ms}Q_m$ olur. Her iki taraf Q_m ile sadeleştirilirse $P_n>P_{ms}$ elde edilir. Şu halde Önerme 2.3.2'ye göre $ms<n$ ve böylece $2ms<2n$'dir. $2ms<2n$ olduğundan $r<2n$ yani $nu<2n$ olur. O zaman $u<2$ yani $u=1$ olur. $u=1$ ise $n=r$'dir. Bu durumda eşitlik $y_ny_m=y_r$ eşitliğinde yerine yazılırsa $y_m=1$ olur. Bu ise $m=1$ olması ile mümkündür. Ancak kabulümüzde $m>1$'dir. Dolayısıyla çelişki elde edilir.

$ii)\, m,n$ ve r tek tamsayı olsunlar. $y_ny_m=y_r$ olduğundan (2.7) eşitliğine göre $\frac{Q_n^2}{4}\frac{Q_m^2}{4}=\frac{Q_r^2}{4}$ ve böylece $Q_nQ_m=2Q_r$ olur. Buradan $Q_n\,|\,Q_r$ ve $Q_m\,|\,Q_r$ elde edilir. Dolayısıyla Teorem 2.3.6'ya göre $r=nt$ ve $r=mk$ olacak biçimde t, k tek tamsayıları vardır. O halde $r=nt=n(4q\mp1)=4qn\mp n$ olur. (2.13) kongrüansına göre, $Q_r=Q_{4qn\mp n}=Q_{2.2qn\mp n}\equiv\mp Q_n(\bmod Q_{2n})$ ve dolayısıyla $Q_r\equiv\mp Q_n(\bmod Q_{2n})$ yazılabilir. Buradan $2Q_r=\mp2Q_n(\bmod Q_{2n})$ ve böylece $Q_nQ_m\equiv\mp2Q_n(\bmod Q_{2n})$ elde edilir. Önerme 2.3.4'e göre $(Q_n, Q_{2n}) = 2$'dir. O halde, $\frac{Q_n}{2} Q_m \equiv \mp 2 \frac{Q_n}{2}\left(\bmod \frac{Q_{2n}}{2}\right)$ olur. Dolayısıyla, $Q_m \equiv \mp 2\left(\bmod \frac{Q_{2n}}{2}\right)$ olup buradan

$$\frac{Q_{2n}}{2} \leq Q_m \mp 2 \tag{2.24}$$

elde edilir. Şu halde $Q_{2n} \leq 2Q_m \mp 4 \leq 2Q_m + 4$ olur. Benzer yolla $r = mk$ olduğu kullanılarak

$$Q_{2m} \leq 2Q_n + 4 \tag{2.25}$$

olduğu gösterilebilir. (2.24) ve (2.25) eşitsizliklerinden, $Q_{2n} + Q_{2m} \leq 2Q_n + 2Q_m + 8$ elde edilir. n ve m tek olduğundan $Q_{2n} = Q_n^2 + 2$ ve $Q_{2m} = Q_m^2 + 2$'dir. Dolayısıyla, $Q_n^2 + 2 + Q_m^2 + 2 \leq 2Q_n + 2Q_m + 8$ yani $Q_n^2 + Q_m^2 \leq 2Q_n + 2Q_m + 4$ olur. O halde $Q_n^2 - 2Q_n + Q_m^2 - 2Q_m \leq 4$ ve buradan da $Q_n(Q_n - 2) + Q_m(Q_m - 2) \leq 4$ elde edilir. Dolayısıyla $Q_n + Q_m < 4$'tür. Fakat bu hipoteze göre $n > 1$, $m > 1$ olduğundan mümkün değildir. Böylece çelişki elde edilir. İspat tamamlanır.

Sonuç 2.4.3. $x > 1$, $y > 1$ için $\frac{x(x+1)}{2} = u^2$, $\frac{y(y+1)}{2} = v^2$ ve $\frac{xy(xy+1)}{2} = w^2$ olacak biçimde u, v ve w tamsayıları yoktur.

Teorem 2.4.11. $n \geq 1$ olmak üzere y_n'nin üçgensel sayı olması için gerekli ve yeterli şart $n = 1$ olmasıdır.

İspat: $n \geq 1$ için y_n üçgensel sayı olsun. İki durum söz konusudur.

$i)$ n çift tamsayı olsun. O halde $n = 2k$ olacak biçimde k doğal sayısı vardır. Bu durumda (2.5) eşitliğine göre $y_n = y_{2k} = 8u_k^2$ olur. y_n üçgensel sayı olduğundan Teorem 1.2.2'ye göre $1 + 8y_n = x^2$ olacak biçimde x tamsayısı vardır. O zaman

$1+8.8u_k^2=1+64u_k^2=x^2$ olur. $x^2-64u_k^2=1$ olup buradan $x^2-(8u_k)^2=1$ olur. Bu denklem çözüldüğünde $u_k=0$ elde edilir. Bu ise $k=0$ olması ile mümkündür. Burada $\{u_n\}$ dizisinin tanımından $y_n=y_{2k}=8u_k^2=8u_0^2=0$, yani $n=0$ olur. Bu ise $n\geq 1$ kabulü ile çelişir. Şu halde n çift olamaz.

$ii)\, n$ tek tamsayı olsun. O halde (2.7) eşitliğine göre $y_n=\dfrac{Q_n^2}{4}$ olur. Eğer y_n üçgensel sayı ise y_n kare-üçgensel sayıdır. Şu halde $y_n=u_r^2$ olan $r\geq 1$ mevcuttur. Yani $y_n=\dfrac{Q_n^2}{4}=u_r^2$ olur. Sonuç 2.2.1' e göre $u_r=\dfrac{P_{2r}}{2}$'dir. O halde $\dfrac{Q_n^2}{4}=\left(\dfrac{P_{2r}}{2}\right)^2=\dfrac{P_{2r}^2}{4}$ olup buradan $Q_n^2=P_{2r}^2$ ve böylece $Q_n=P_{2r}$ elde edilir. Diğer yandan $P_{2r}=P_rQ_r$ olduğundan $Q_n=P_rQ_r$ olur. Dolayısıyla $Q_r\,|\,Q_n$'dir. O halde Teorem 2.3.6'ya göre $n=rt$ olacak biçimde t tek tamsayısı vardır. $t=4s\mp 1$ olsun. Buradan $n=rt=r(4s\mp 1)=4rs\mp r$ olur. (2.15) kongrüansına göre $P_{2r}=Q_n=Q_{4rs\pm r}\equiv \pm Q_r \pmod{P_{2r}}$'dir. Böylece $P_{2r}\,|\,Q_r$ yani $P_rQ_r\,|\,Q_r$ olur. Buradan da $P_r\,|\,1$ yani $P_r=1$ olur. Bu ise $r=1$ olması ile mümkündür. O halde, $Q_n=P_{2r}=P_2=2$'dir. Yani $n=1$ olur. Tersine $n=1$ olduğunda $y_n=y_1=1$ üçgensel sayıdır. Böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 2.4.4. $128y^2=(x^2-1)(x^2+7)$ denkleminin pozitif tamsayı çözümleri $(x,y)=(3,1)$'dir.

İspat: $128y^2=(x^2-1)(x^2+7)$ ise $y^2=\dfrac{\left(\dfrac{x^2-1}{8}\right)\left(\dfrac{x^2+7}{8}\right)}{2}=\dfrac{\left(\dfrac{x^2-1}{8}\right)\left(\dfrac{x^2-1}{8}+1\right)}{2}$ olur. Şimdi $\dfrac{x^2-1}{8}=z$ olsun. Buradan $y^2=\dfrac{z(z+1)}{2}$'dir. Şu halde y^2 kare-üçgensel sayıdır. Böylece $z=y_n$ olan n doğal sayısı vardır. Teorem 1.2.2 den $8z+1=x^2$ olduğundan z bir üçgensel sayıdır. Yani y_n üçgensel sayıdır. O halde Teorem 2.4.11'e göre $y_n=1$'dir. Dolayısıyla $z=1$ olur. Buradan $\dfrac{x^2-1}{8}=1$ olduğundan

$x=3$ bulunur. Böylece $128y^2=(x^2-1)(x^2+7)$ denkleminin pozitif tamsayı çözümleri $(x,y)=(3,1)$ 'dir.

Teorem 2.4.12. Herhangi bir n doğal sayısı için y_n+1 üçgensel sayı olamaz.

İspat: Varsayalım ki y_n+1 üçgensel sayı olsun. O halde $1+8(y_n+1)=x^2$ olan x tek tamsayısı vardır. Burada iki durum söz konusudur.

$i)\, n$ çift tamsayı olsun. O halde $n=2k$ olacak biçimde $k\in\mathbb{N}$ vardır. $1+8(y_n+1)=x^2$ ise $8y_n+9=x^2$ olur. Diğer yandan (2.5) eşitliğine göre $y_n=y_{2k}=8u_k^2$ olduğundan $8.8u_k^2+9=x^2$ yani $x^2-(8u_k)^2=9$ elde edilir. Bu denklemin çözümünün olmadığı kolaylıkla görülebilir.

$ii)\, n$ tek tamsayı olsun. O halde $n=2t+1$ olacak biçimde $t\in\mathbb{N}$ vardır. $8y_n+9=x^2$ ve (2.7) eşitliğinden $y_n=\dfrac{Q_n^2}{4}$ olduğundan $8\dfrac{Q_n^2}{4}+9=x^2$ olup buradan $2Q_n^2+9=x^2$ 'dir. Yani $x^2-2Q_n^2=9$ olur. Böylece $x^2-2Q_n^2\equiv 0(\bmod 3)$ ve böylece $3\,|\,x$ ve $3\,|\,Q_n$ bulunur. Şimdi $x=3a$ ve $Q_n=3b$ olsun. Buradan $9a^2-2.9b^2=9$ yani $a^2-2b^2=1$ Pell denklemi elde edilir. Sonuç 2.1.3'e göre $(a,b)=\left(\dfrac{Q_{2r}}{2},P_{2r}\right)$ olacak biçimde r doğal sayısı vardır. O halde $x=3a=\dfrac{3Q_{2r}}{2}$ ve $Q_n=3b=3P_{2r}=3P_rQ_r$ olur. $Q_n=3P_rQ_r$ ise $3\,|\,Q_n$ olup Q_n çift olduğundan $6\,|\,Q_n$ elde edilir. $Q_2=6$ olduğundan $Q_2\,|\,Q_n$ ve böylece Teorem 2.3.6'ya göre $2\,|\,n$ olur. Dolayısıyla $n=2t$ olacak biçimde t doğal sayısı vardır. Şu halde n çift olur. Halbuki n tek idi. O halde çelişki elde edilir. Böylece herhangi n doğal sayısı için y_n+1 üçgensel sayı olamaz.

BÖLÜM 3. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

İncelemenin ana konusu üçgensel sayılar ve kare-üçgensel sayılar olmuştur. Bu sayıların Pell, Pell-Lucas dizileri ile $\{u_n\}$, $\{v_n\}$ ve $\{y_n\}$ dizileri arasındaki ilginç bağlantılardan söz edilmiştir. Bu bağlantılar kullanılarak birçok Diophantine ve Pell denklemlerinin çözümlerine ulaşılmış ve bu çözümler karakterize edilmiştir. Çözümlere, Pell denklemlerinin çözümleri için gerekli olan sürekli kesir açılımlarına hiç girilmeden ulaşılmıştır.

Sayı dizileri matematiğin birçok alanında sıkça kullanılmaktadır. Burada da Pell, Pell-Lucas, $\{u_n\}$, $\{v_n\}$ ve $\{y_n\}$ dizileri yardımıyla üçgensel sayılar ve kare-üçgensel sayılar ile ilgili hem temel ve ilginç özellikler hem de yeni teoremler verilmiştir. Çalışmada iki üçgensel sayının toplamının da üçgensel sayı olabileceği gösterilmiştir. Örneğin $T_3 = 6$, $T_5 = 15$ ve $T_6 = 21$ olmak üzere $T_6 = T_3 + T_5$ 'dir. Ancak “hangi kare-üçgensel sayıların toplamı kare-üçgensel sayı ya da üçgensel sayı olabilir” sorusu ile ilgili inceleme yapılmamıştır. Bu konu araştırılabilir. Tezde $y_n y_m = y_r$ olacak biçimde r doğal sayısının mevcut olmadığı gösterilmiştir. Ayrıca $y_r = y_m + y_n$ olacak biçimde m, n, r doğal sayılarının olup olmayacağı araştırılabilir.

KAYNAKLAR

[1] DONALD, J. P., A Study of Triangular and Oblong Numbers., M. S. Thesis, Central Missouri State University; 1998.

[2] TROTTER, T. JR., Some Identities for the Triangular Numbers., J. Recr. Math., 1973; Vol. 6: 128-135

[3] PEKER, B., Üçgensel Sayılar ve Pell Denklemleri İle İlişkileri Üzerine., Yüksek Lisans Tezi., Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Konya, 2005.

[4] SHIRALI, S. A., Fun With Triangular Numbers, http://www.mathcelebration.com/PDF/TriangleNumPDF.pdf, 2010.

[5] DICKSON, L. E. History of The Theory of Numbers, 1971; Vol. 2, Strechert, New York.

[6] SUBRAMANIAM, K. B., A Simple Computation of Square Triangular Numbers., International Journal of Mathematics Education In Science and Technology., 1992; Vol. 23, 790-793

[7] SUBRAMANIAM, K. B., A Divisibility Properties of Square Triangular Numbers., International Journal of Mathematics Education In Science and Technology., 1995; Vol. 26, 284-286.

[8] KALMAN, D., MENA, R., The Fibonacci Numbers-Exposed, Mathematics Magazine 76, 2003; 167-181.

[9] RIBENBOIM, P., My Numbers, My Friends, Springer-Verlag, New York, Inc., 2000.

[10] RABINOWITZ, P., Algorithmic Manipulation of Fibonacci Identities, Appliction of Fibonacci Numbers, Vol. 6, Kluwer Academic Pub., Dordrect, The Netherlands, 1996; 389-408.

[11] KESKİN, R., DEMİRTÜRK, B., Solution of Some Diophantine Equations Using Generalized Fibonacci and Lucas Sequences., Ars Combinatorica(yayına kabul edildi).,2010.

[12] HARDY, G. H. , WRIGHT, E. M., An Introduction to The Theory of Numbers, Fifth Edition, Oxford University Press, New York, 1979.

[13] GUPTA, S., http://www.shyamsundergupta.com/triangle.htm, 2002.

[14] UTZ, W.R., Triangular Numbers Which are Products of Two Other Triangular Numbers., The American Mathematical Monthly., 1986; Vol. 96, No. 10, 928-932.

[15] POTTER, D. C. D., Triangular Square Numbers, The Mathematical Gazette, 1972; Vol. 56, No. 396, 109-110.

[16] DEMİRTÜRK, B., Genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas Dizileri ve Bazı Uygulamaları., Doktora Tezi, Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Sakarya, 2010.

[17] YOSMA, Z., KESKİN, R., Some New Identities Concerning Generalized Fibonacci and Lucas Numbers (yayına gönderildi).

[18] HILTON, P., PEDERSEN, J., and SOMER, L., On Lucasian Numbers, Fibonacci Quart. 35, 1997; 43-47.

ÖZGEÇMİŞ

Olcay KARAATLI, 30.06.1985’de Ankara’da doğdu. İlk, orta ve lise eğitimini Ankara’da tamamladı. 2003 yılında Ankara İncirli Yabancı Dil Ağırlıklı Lisesi’nden mezun oldu. 2004 yılında başladığı Uludağ Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik bölümünü 2008 yılında bitirdi. Lisans öğrenim hayatının son yarı dönemini Erasmus öğrencisi olarak Wroclaw University of Tecnology’de (Polonya) tamamladı. 2008-2009 yılları arasında Sakarya Erenler Lisesi’nde Matematik öğretmeni olarak görev yaptı. Şu anda Ağrı İbrahim Çeçen Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde Araştırma Görevlisi olarak çalışmaktadır.