T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

POLİNOM TÜRÜ DENKLEMLERİN DAİRESEL MATRİSLERDEN YARARLANARAK KÖKLERİNİN BULUNMASI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Pervin ASLANTAŞ

Enstitü Anabilim Dalı	:	MATEMATİK
Tez Danışmanı	:	Yrd.Doç.Dr. Ömer Faruk GÖZÜKIZIL

Haziran 2010

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

POLİNOM TÜRÜ DENKLEMLERİN DAİRESEL MATRİSLERDEN YARARLANARAK KÖKLERİNİN BULUNMASI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Pervin ASLANTAŞ

Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK

Bu tez 14 / 06 /2010 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Oybirliği ile kabul edilmiştir.

Yrd.Doç.Dr.Ömer Faruk Gözükızıl	**Doç.Dr.Halim Özdemir**	**Prof.Dr.İbrahim Okur**
Jüri Başkanı	**Üye**	**Üye**

TEŞEKKÜR

Öncelikle attığım her adımda maddi manevi hiçbir fedakârlıktan kaçınmadan her zaman yanımda olan, varlıklarıyla beni güçlendiren çok değerli anne ve babama sonsuz teşekkür eder, saygılarımı sunarım.

Bu tezin hazırlanmasında zamanını, yardımını, desteğini esirgemeyerek bana yol gösteren danışman hocam; Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Öğretim Üyesi Yrd.Doç.Dr.Ömer Faruk Gözükızıl' a teşekkür eder, saygılarımı sunarım.

Çalışmanın yanında sunulan; ikinci üçüncü ve dördüncü dereceden polinom türü denklemlerin köklerinin dairesel matrislerden yararlanarak bulunmasını sağlayan bilgisayar programını hazırlamada yardımcı olan; matematik mühendisi arkadaşım Arda Bayrak' a teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

C	: Dairesel matris
$\dot{I}z(C)$	: C dairesel matrisinin köşegeni üzerindeki elemanların toplamı
$q(t)$	: C dairesel matrisinin özdeğer polinomu
$q(w_n)$	: C dairesel matrisinin özdeğerleri
$\det(xI - C)$	: C dairesel matrisinin karakteristik polinomu
$P(x)$	: Gerçek katsayılı polinom
W_k	: Birimin n .dereceden kökleri
W	: Üreteç dairesel matris

ÖZET

Bu tezde polinom tipi denklemlerin kökleri dairesel matrisler kullanılarak çözümlenmektedir.

Çalışmanın birinci bölümünde tez konusu ile ilgili genel bilgi verilmektedir. İkinci bölümünde çalışmada kullanılan bazı tanım ve teoremler yer almaktadır. Üçüncü bölümünde ikinci, üçüncü ve dördüncü dereceden polinom türü denklemlerin çözüm metotları anlatılmaktadır. Dördüncü bölümünde dairesel matrisler hakkında bilgi verilmektedir. Beşinci bölümünde ikinci, üçüncü ve dördüncü dereceden polinom türü denklemlerin köklerinin dairesel matrisler ile bulunuşu anlatılmaktadır. Altıncı bölümünü ise sonuç oluşturmaktadır.

Bununla birlikte ikinci, üçüncü ve dördüncü dereceden polinom türü denklemlerin köklerini veren javascript kodu ile hazırlanmış olan bilgisayar programının kodları ekte sunulmuştur.

THE ROOTS OF POLYNOMIAL TYPE EQUATIONS USING CIRCULAR MATRICES

SUMMARY

In this thesis the roots of polynomial type equations have been evaluated by using the circular matrices.

In the first part, the general information about the research has been given. In part two, some of the definitions and theorems are given and in the part three the solution methods of second, third and fourth degree polynomials are shown. In the part four circulant matrices are mentioned whereas in part five the way of finding the roots of second, third and fourth degree polinoms via circulant matrices are told. Lastly the sixth part is the result part.

However; second, third and fourth degree polynomial equations, the roots of the type which has been prepared with the javascipth code of the computer program code is attached.

BÖLÜM 1. GİRİŞ

Polinom türü denklemlerin çözümü matematikçiler için merak konularından biri olmuştur. İkinci dereceden bir bilinmeyenli denklemlerin çözümleri M.Ö. 400'lü yıllarda Babilliler tarafından yaklaşık olarak biliniyordu. İlk bulunan yaklaşık çözümler, asıl çözümlerden daha uzundu. Üçüncü dereceden denklemler, İtalyan matematikçiler tarafından 1525 dolaylarında kısmen Scipione del Ferro tarafından tam olarak da Niccolo Fontana Tartaglia tarafından çözülmüştür. Beşinci dereceden denklemlerin çoğunun cebirsel yöntemlerle çözülemeyeceği 1824 yılında Norveçli matematikçi Niels Henrik Abel tarafından kanıtlanmıştır. Beş ve beşten daha yüksek dereceli denklemlerin cebirsel yöntemlerle çözülemeyeceği de Fransız matematikçi Evariste Galios tarafından kanıtlanmıştır.

Polinom türü denklemleri çözmenin bir diğer yolu da dairesel matris yöntemidir. Kalman bu yöntemi irdelemiş ve uygulama sınırlılıklarını ortaya koymuştur.

Bu çalışmada ikinci, üçüncü ve dördüncü dereceden polinom türü denklemlerin çözüm yolları ve çözümlerin dairesel matris kullanılarak bulunması anlatılmıştır. Bununla birlikte; ikinci, üçüncü ve dördüncü dereceden polinom türü denklemlerin köklerini veren javascript kodu ile çalışan bir bilgisayar programı hazırlanmış, programın kodları ekte sunulmuştur.

BÖLÜM 2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde çalışmada kullanılan bazı tanım ve teoremler verilmiştir.

Tanım 2.1. $a_0, a_1, a_2, ..., a_{n-1}, a_n$ gerçek sayılar ve n doğal sayı olmak üzere, $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$ biçiminde yazılan ifadelere gerçek katsayılı polinom; $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n = 0$ ifadesine de polinom denklem denir.

Tanım 2.2. $w^n = 1$ denkleminin kökleri $w_k = \left(1, \dfrac{2k\pi}{n}\right)$, $(k = 0,1,2,...,n\text{-}1)$' dir. Bu değerlere birimin n. dereceden kökleri denir.

Tanım 2.3. A, n- kare matris olmak üzere, $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_rx^r$ polinomunda, x değişkeni yerine A matrisi yazılarak elde edilen $P(A)$ ifadesine A matrisinin bir polinomu denir ve $P(A) = a_0I_n + a_1A + a_2A^2 + ... + a_rA^r$ ile gösterilir.

Tanım 2.4. A, n-kare matris olsun. $Ax = \lambda x$ olmak üzere $Ax - \lambda x = 0$ ifadesi $(A - \lambda I)x = 0$ şeklinde yazılabilir. Bu eşitlikteki $(A - \lambda I)$ katsayı matrisinin determinantına A matrisinin karakteristik denklemi, bu denklemin köklerine de A matrisinin özdeğerleri denir. Karakteristik denklem, $|A - \lambda I| \triangleq \Delta A(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + ... + a_{n-1}\lambda + a_n$ şeklinde ifade edilir. $(A - \lambda I)x = 0$ eşitliğindeki x bir vektör olup, A matrisinin özvektörü olarak tanımlanır.

Tanım 2.5. A, n-kare matrisinin $a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}$ elemanlarına köşegen elemanları, bu elemanları toplamına da A matrisinin izi denir ve $\dot{I}zA = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ ile gösterilir.

Teorem 2.1. A, n-kare matris ve özdeğerleri $\lambda_1, \lambda_2, .., \lambda_n$ olsun. A matrisinin köşegeni üzerindeki elemanların toplamı olan $iz(A)$, özdeğerlerinin toplamına eşittir. $\det A$ da özdeğerlerinin çarpımına eşitir.

BÖLÜM 3. POLİNOM TÜRÜ DENKLEMLERİN ÇÖZÜMÜ

3.1. Polinom Türü Denklemler

$a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n = 0$ biçiminde yazılan denklemlere polinom denklemler denir. Burada katsayı adı verilen a' lar reel sayıdır. $a_n \neq 0$ için denklem n.inci derecedendir. Böyle bir denklemin de en fazla n tane çözümü vardır.

3.2. Birinci Dereceden Bir Bilinmeyenli Denklemler

a ve b bilinen gerçel sayılar, $a \neq 0$ olmak üzere, $ax + b = 0$ biçiminde yazılabilen denklemlere birinci dereceden bir bilinmeyenli polinom denklem veya kısaca birinci dereceden denklem veya bir bilinmeyenli lineer (doğrusal) denklem denir. Burada a ile b ye denklemin katsayıları, x' e ise bilinmeyen denir. Bu denklemi sağlayan x değerini bulmak için aşağıdaki işlemler yapılır:

$$ax + b = 0$$
$$ax = -b$$

olarak bulunur. $a \neq 0$ olduğundan denklemin her iki tarafı a ile bölünebilir. Buradan $x = -\frac{b}{a}$ elde edilir. Buna göre denklemin çözüm kümesi $Ç = \left\{-\frac{b}{a}\right\}$'dır.

3.3. İkinci Dereceden Bir Bilinmeyenli Denklemler

a, b ve c bilinen gerçel sayılar $a \neq 0$ olmak üzere; $ax^2 + bx + c = 0$ şeklindeki denklemlere ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklem denir. Bu denklemlerin çözümünü bulmak için aşağıdaki işlemler yapılır:

$ax^2 + bx + c = 0$ denkleminde $a \neq 0$ olduğundan ifade a parantezine alınabilir:

$$a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=0$$

$$a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right)\right)=0$$

$$a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)=0$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}=0$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

elde edilir. İkinci dereceden bir bilinmeyenli denklemin iki çözümü vardır. Denklemin çözüm kümesi $Ç=\left\{\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right\}$ şeklindedir.

Burada üç ayrı durumu incelemek mümkündür: $b^2-4ac>0$ ise denklemin iki reel kökü vardır; $b^2-4ac=0$ ise denklemin çakışık iki kökü vardır; $b^2-4ac<0$ ise denklemin birbirinin eşleniği olan iki karmaşık kökü vardır.

3.4. Üçüncü Dereceden Bir Bilinmeyenli Denklemler

a, b, c ve d bilinen gerçel sayılar, $a\neq 0$ olmak üzere $ax^3+bx^2+cx+d=0$ şeklindeki denklemlere üçüncü dereceden bir bilinmeyenli denklemler denir. Bu denklemlerin çözümünü yapmak için aşağıdaki işlemler uygulanır:

$ax^3+bx^2+cx+d=0$ olup, $a\neq 0$ olduğundan denklemin her tarafı a ile bölünebilir.

$x^3+\frac{b}{a}x^2+\frac{c}{a}x+\frac{d}{a}=0$ elde edilir. Bu denklemde $B=\frac{b}{a}$, $C=\frac{c}{a}$, $D=\frac{d}{a}$ olarak alınırsa, $x^3+Bx^2+Cx+D=0$ şeklinde bir denklem elde edilir. Bu denklemin kökleri ile başlangıçta verilen denklemin kökleri aynıdır. Bu denklemde, $x=y-\frac{B}{3}$ değişken değişimi yapılarak, denklemin ikinci dereceli terimi yok edilir. Böylece, $y^3+\alpha y+\beta=0$ biçiminde bir denklem elde edilir. Bu denklem için iki durum incelemek mümkündür:

$\alpha=0$ ise, $y^3=-\beta$ buradan da $y=\sqrt[3]{-\beta}$ olarak bulunur.

$\alpha\neq 0$ ise, $(u-v)^3+3uv(u-v)+v^3-u^3=0$ ifadesinde $3uv=\alpha$ ve $v^3-u^3=\beta$ olarak alınırsa, $(u-v)$ ifadesi $y^3+\alpha y+\beta=0$ denkleminin bir çözümü olur. Birinci eşitlikten elde edilen $v=\frac{\alpha}{3u}$ ifadesi $v^3-u^3=\beta$ eşitliğinde yazılırsa, $\beta=\left(\frac{\alpha}{3u}\right)^3-u^3$ olur. Bu denklemin düzenlenmesiyle $27u^6+27\beta u^3-\alpha^3=0$ buradan da $u^6+\beta u^3-\frac{\alpha^3}{27}=0$ olarak bulunur. Bu denklemde $w=u^3$ olarak alınırsa, $w^2+\beta w-\frac{\alpha^3}{27}=0$ gibi w cinsinden ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklem elde edilir. İkinci dereceden denklemlerin çözümü bilindiğinden w bulunur. Sonra w nin üçüncü dereceden kökü alınarak u bulunur. Buradan $v=\frac{\alpha}{3u}$ eşitliği kullanılarak v bulunur. Son olarak da $y=u-v$ eşitliğinden y değeri bulunur. Çözümlerden biri bulununca diğerleri de bulunabilir. Eğer y_0, $y^3+\alpha y+\beta=0$ denkleminin bir çözümü ise $(y-y_0)$, $y^3+\alpha y+\beta$ polinomunu tam olarak böler. Yani belli γ, δ sayıları için $y^3+\alpha y+\beta=(y-y_0)(y^2+\gamma y+\delta)$ eşitliği sağlanır. Burada $(y^2+\gamma y+\delta)$ ikinci dereceden denkleminin çözümleri, $y^3+\alpha y+\beta=0$ denkleminin diğer çözümlerini verecektir.

3.5. Dördüncü Dereceden Bir Bilinmeyenli Denklemler

a, b, c, d ve e bilinen gerçel sayılar, $a \neq 0$ olmak üzere $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ biçimindeki denklemlere dördüncü dereceden bir bilinmeyenli denklem denir. Bu denklem aşağıdaki şekilde çözülür:

$a \neq 0$ olduğundan denklemin her tarafı a ile bölünebilir. Böylece $x^4 + \frac{b}{a}x^3 + \frac{c}{a}x^2 + \frac{d}{a}x + \frac{e}{a} = 0$ elde edilir. Burada $B = \frac{b}{a}$, $C = \frac{c}{a}$, $D = \frac{d}{a}$, $E = \frac{e}{a}$ olarak seçilirse, denklem $x^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E = 0$ halini alır. $x = y - \frac{B}{4}$ değişken dönüşümü yapılarak denklemin üçüncü dereceli terimi yok edilir. Böylece $y^4 + \alpha y^2 + \beta y + \gamma = 0$ denklemi elde edilir. Bu denklemi kareye tamamlamak için; $y^4 + 2\alpha y^2 + \alpha^2 = \alpha y^2 - \beta y + \alpha^2 - \gamma$ düzenlemesiyle, $\left(y^2 + \alpha\right)^2 = \alpha y^2 - \beta y + \alpha^2 - \gamma$ şeklinde bir denklem elde edilir. Elde edilen bu denklem y cinsinden çözülmelidir. Her bir z değeri için,

$$\left(y^2 + \alpha + z\right)^2 = \left(\alpha y^2 - \beta y + \alpha^2 - \gamma\right) + 2z\left(y^2 + \alpha\right) + z^2$$
$$\left(y^2 + \alpha + z\right)^2 = (\alpha + 2z)y^2 - \beta y + \left(\alpha^2 - \gamma + 2\alpha z + z^2\right)$$

elde edilir. Son eşitlikte sağ taraf y ye göre ikinci dereceden olduğundan, z değeri sağ taraf bir tam kare olacak şekilde seçilmelidir. Bunun için z sağ tarafın diskriminantı yani, $\beta^2 - 4(\alpha + 2z)\left(\alpha^2 - \gamma + 2\alpha z + z^2\right) = 0$ olacak biçimde alınmalıdır. Bu da z cinsinden üçüncü dereceden bir polinomdur. Belli bir $\tau \geq 0$ için, $\left(y^2 + \alpha + z\right)^2 = \tau^2$ olarak yazılabilir. Burada y, $y^2 + \alpha + z = \tau$ biçiminde seçilirse $y^4 + \alpha y^2 + \beta y + \gamma = 0$ denkleminin çözümlerinden biri bulunur. Bulunan bu kök, y_0 olarak alınsın. Bu durumda $y^4 + \alpha y^2 + \beta y + \gamma$ polinomu $(y - y_0)$ ile bölünürse, $y^4 + \alpha y^2 + \beta y + \gamma = (y - y_0)\left(y^3 + \delta y^2 + \varepsilon y + \varphi\right)$ eşitliğini sağlayacak şekilde δ, ε, φ sayıları bulunur. Böylelikle $y^4+\alpha y^2+\beta y+\gamma=0$ denkleminin diğer kökleri $\left(y^3+\delta y^2+\varepsilon y+\varphi\right)=0$ denkleminin kökleri olarak bulunur.

BÖLÜM 4. DAİRESEL MATRİSLER

4.1. Dairesel Matris

Her satır vektörünün, bir önceki satır vektörü dikkate alınarak birer eleman sağa kaydırılmasıyla oluşan matrise dairesel matris denir. $C = circ(c_1, c_2, ..., c_n)$ veya

$$C = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_n \\ c_n & c_1 & \cdots & c_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_2 & c_3 & \cdots & c_1 \end{pmatrix}$$ şeklinde yazılabilir.

4.1.1. Üreteç dairesel matris

W : ilk satırı $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \ldots 0 \end{pmatrix}_{1xn}$ şeklinde olan dairesel matrise üreteç dairesel matris denir. $2x2, 3x3, 4x4$ boyutlu üreteç dairesel matrisler aşağıda verilmiştir:

$$W = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \ldots\ldots W^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

$$W = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ldots\ldots W^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$

$$W = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ldots\ldots W^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_4$$

4.1.2. Bir dairesel matrisin oluşturulması

İlk satırı $[c_0\ c_1\ c_2 \ldots c_{n-1}]$ olan $n \times n$ mertebeli bir dairesel matrisi oluşturmak için, katsayıları C matrisinin ilk satırından oluşan ve derecesi C matrisinin mertebesinden bir düşük olan, $q(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \ldots + c_{n-1} t^{n-1}$ polinomu tanımlansın. $C = q(W)$ dir.

4.1.2.1. *2x2* mertebeli bir dairesel matris oluşturulması

$$C = q(W)$$

$$C = aI + bW$$

$$C = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$$

olarak bulunur.

4.1.2.2. *3x3* mertebeli bir dairesel matris oluşturulması

$$C = q(W)$$

$$C = aI + bW + cW^2$$

$$C = a\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$$

olarak bulunur.

4.1.2.3. *4x4* mertebeli bir dairesel matrisin oluşturulması

$$C = q(W)$$

$$C = aI + bW + cW^2 + dW^3$$

$$C = a\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ d & a & b & c \\ c & d & a & b \\ b & c & d & a \end{pmatrix}$$

olarak bulunur.

4.2. *W* Üreteç Matrisinin Özdeğerleri

λ, W matrisinin özdeğeri olsun. Bu durumda $q(t)$ polinomundan elde edilen $q(\lambda)$, $q(W)$' nin yani C dairesel matrisinin özdeğeridir. W üreteç matrisinin özdeğerleri aşağıda da görüleceği gibi birimin n.dereceden kökleridir.

4.2.1. *2x2* mertebeli üreteç dairesel *W* ' nin özdeğerleri

$W = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ve $\det(W - \lambda I) = 0$ olduğundan,

$$\left| \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \right| = 0$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$\Rightarrow \lambda^2 - 1 = 0$

$\Rightarrow \lambda^2 = 1$

$\Rightarrow \lambda_1 = 1$

$\Rightarrow \lambda_2 = -1$

olarak bulunur.

4.2.2. $3x3$ **mertebeli üreteç dairesel** W **' nin özdeğerleri**

$W = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ve $\det(W - \lambda I) = 0$ olduğundan,

$$\left| \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \right| = 0$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$\Rightarrow \lambda^3 - 1 = 0$

$\Rightarrow \lambda^3 = 1$

$\Rightarrow \lambda_1 = 1$

$\Rightarrow \lambda_2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow \lambda_3 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

olarak bulunur.

4.2.3. $4x4$ mertebeli üreteç dairesel W 'nin özdeğerleri

$$W = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ve } \det(W - \lambda I) = 0 \text{ olduğundan,}$$

$$\left| \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \right| = 0$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow -\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \lambda^4 - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda^4 = 1$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 1$$

$$\Rightarrow \lambda_2 = -1$$

$$\Rightarrow \lambda_3 = i$$

$$\Rightarrow \lambda_4 = -i$$

olarak bulunur.

4.3. Dairesel Matrislerin Özdeğerlerinin Polinomlarla Hesaplanması

C bir dairesel matris, w_n birimin n. dereceden bir kökü olsun. C dairesel matrisinin ilk satırıyla tanımlanan polinoma da $q(t)$ denilsin. Bu durumda C dairesel matrisinin özdeğerleri , $q(w_n)$ ler olur.

2x2 boyutlu bir dairesel matrisinin özdeğerleri $q(t) = a + bt$ polinomunda,

$$q(1) = a + b$$
$$q(-1) = a - b$$

yazılarak; 3x3 boyutlu bir dairesel matrisin özdeğerleri $q(t) = a + bt + ct^2$ polinomunda,

$$q(1) = a + b + c$$
$$q\left(\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}\right) = a - \frac{1}{2}(b + c) + i\frac{\sqrt{3}}{2}(b - c)$$
$$q\left(\frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}\right) = a - \frac{1}{2}(b + c) - i\frac{\sqrt{3}}{2}(b - c)$$

yazılarak; 4x4 boyutlu bir dairesel matrisin özdeğerleri $q(t) = a + bt + ct^2 + dt^3$ polinomunda,

$$q(1) = a + b + c + d$$
$$q(-1) = a - b + c - d$$
$$q(i) = a - c + (b - d)i$$
$$q(-i) = a - c - (b - d)i$$

yazılarak bulunur.

BÖLÜM 5. DAİRESEL MATRİSLERLE POLİNOM TÜRÜ DENKLEMLERİN ÇÖZÜMÜ

Dairesel matrislerle polinom türü denklemlerin çözümleri yapılırken uygulanması gereken basamaklar aşağıdaki gibidir:

i. Verilen polinomun derecesini mertebe kabul eden genel bir dairesel matris alınır.

ii. Alınan matrisin karakteristik polinomu bulunur.

iii. Karakteristik polinomun katsayıları verilen polinomun katsayılarına eşitlenerek C dairesel matrisinin elemanları olan sabitler bulunur.

iv. Dairesel matrisin özdeğerleri bulunur, bulunan bu özdeğerler verilen polinomun kökleridir.

Bu yöntemin, derecesi ikiden fazla olan polinomlarda uygulanabilmesi için aşağıda belirtilen ön işlemlerin yapılması gerekir:

İlk önce n.dereceden polinomun $(n-1)$ dereceli terimi yok edilir. Daha sonra karakteristik polinomdaki $(n-1)$ dereceli terim yok edilir. Alınan C dairesel matrisinin ilk elemanı sıfır seçilir, bu da kökler toplamının yani köşegen üzerindeki elemanların toplamının sıfır olmasını sağlar.

Dairesel matrislerle polinom türü denklemlerin çözümünün sağlanabilmesi için, $(n-1)$. dereceli terimlerin yok edilmesi gereklidir.

5.1. İkinci Dereceden Polinom Türü Denklemlerin Dairesel Matrisle Çözümü

2x2 mertebeli genel bir dairesel matris $C=\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}_{2x2}$ olsun. İkinci dereceden $p(x)=x^2+\alpha x+\beta$ polinomu alınsın. C matrisinin karakteristik polinomu $\det(xI-C)= x^2-2ax+a^2-b^2$ şeklindedir. Karakteristik polinomla, başlangıçta alınan ikinci dereceden genel polinomun katsayıları eşitlenirse,

$$x^2+\alpha x+\beta = x^2-2ax+a^2-b^2$$

olur. Aynı dereceli terimlerin katsayıları eşit olacağından,

$$-2a = \alpha \quad \text{ve} \quad a^2-b^2=\beta$$

elde edilir. Gerekli işlemlerle

$$a=-\frac{\alpha}{2} \quad \text{ve} \quad b=\sqrt{\frac{\alpha^2}{4}-\beta}$$

olarak bulunur. Bu a ve b değerleri dairesel matriste yerine yazılırsa,

$$C=\begin{pmatrix} -\frac{\alpha}{2} & \sqrt{\frac{\alpha^2}{4}-\beta} \\ \sqrt{\frac{\alpha^2}{4}-\beta} & -\frac{\alpha}{2} \end{pmatrix}$$

elde edilir. Bulunan bu matrisin özdeğerleri verilen $p(x)$ polinomunun kökleridir. C dairesel matrisinin özdeğerleri $q(t)=a+bt$ polinomunda a ve b değerleri yerlerine yazılarak, $q(t)=-\frac{\alpha}{2}+\left(\sqrt{\frac{\alpha^2}{4}-\beta}\right)$ ile hesaplanır. Birimin ikinci dereceden kökleri ± 1, $q(t)$ polinomunda yerine yazılırsa, başlangıçta verilen polinomun kökleri

$$q(1) = -\frac{\alpha}{2} + \left(\sqrt{\frac{\alpha^2}{4} - \beta}\right)$$

$$q(-1) = -\frac{\alpha}{2} - \left(\sqrt{\frac{\alpha^2}{4} - \beta}\right)$$

olarak bulunur.

5.2. Üçüncü Dereceden Polinom Türü Denklemlerin Dairesel Matrisle Çözümü

5.2.1. $P(x) = x^3 + \gamma$ şeklindeki polinom türü denklemlerin kökleri

Polinomun kökler toplamı sıfırdır. 3x3 mertebeli genel bir dairesel matris $C = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}_{3x3}$ olsun. Polinomun kökler toplamı ile C dairesel matrisinin özdeğerleri toplamının eşit olması gerektiğinden $iz(C) = 0$ olmalıdır. Bunun için C dairesel matrisinin ilk elemanı $a = 0$ kabul edilir. Böylece C dairesel matrisinin karakteristik denklemi $\det(xI - C) = x^3 - b^3 - c^3 - 3bcx = 0$ halini alır. Karakteristik polinomla, verilen üçüncü dereceden polinomun katsayıları eşitlenirse,

$$x^3 - b^3 - c^3 - 3bcx = x^3 + \gamma$$

olur. Aynı dereceli terimlerin katsayıları eşit olacağından,

$$-3bc = 0 \quad \text{ve} \quad -\left(b^3 + c^3\right) = \gamma$$

elde edilir. Bu eşitliklerden

$$b = 0 \quad \text{ve} \quad c = \sqrt[3]{-\gamma}$$

olarak bulunur. Bulunan b ve c değerleri dairesel matriste yerine yazılırsa

$$
C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sqrt[3]{-\gamma} \\ \sqrt[3]{-\gamma} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt[3]{-\gamma} & 0 \end{pmatrix}
$$

şeklinde bir matris elde edilir. C matrisinin özdeğerleri, verilen $p(x)$ polinomunun da kökleridir. C matrisinin özdeğerleri $q(t) = bt + ct^2$ polinomunda b ve c değerlerinin yerlerine yazılmasıyla bulunur. Bu yöntemle elde edilen, $q(t) = (\sqrt[3]{-\gamma})t^2$ özdeğer polinomunda birimin üçüncü dereceden kökleri yazılarak C matrisinin özdeğerleri hesaplanır. Buna göre

$$
q(1) = b + c = \sqrt[3]{-\gamma}
$$

$$
q\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \quad -\frac{1}{2}(b+c) + i\frac{\sqrt{3}}{2}(b-c) = \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\sqrt[3]{-\gamma}
$$

$$
q\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \quad -\frac{1}{2}(b+c) - i\frac{\sqrt{3}}{2}(b-c) = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\sqrt[3]{-\gamma}
$$

olarak bulunur. Başlangıçta verilen polinomun kökleri de

$$
x_1 = q(1) \quad \sqrt[3]{-\gamma}
$$

$$
x_2 = q\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \quad \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\sqrt[3]{-\gamma}
$$

$$
x_3 = q\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \quad \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\sqrt[3]{-\gamma}
$$

olmak üzere biri reel, diğer ikisi birbirinin eşleniği olan karmaşık iki köktür.

5.2.2. $P(X) = x^3 + \beta x$ şeklindeki polinom türü denklemlerin kökleri

Polinomun kökler toplamı sıfırdır. 3x3 mertebeli genel bir dairesel matris

$C = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}_{3x3}$ olsun. Polinomun kökler toplamı ile C dairesel matrisinin özdeğerleri toplamının eşit olması gerektiğinden $iz(C) = 0$ olmalıdır. Bunun için C dairesel matrisinin ilk elemanı $a = 0$ olarak kabul edilir. C dairesel matrisinin karakteristik denklemi, $\det(xI - C) = x^3 - b^3 - c^3 - 3bcx = 0$ halini alır. Karakteristik polinomla, verilen üçüncü dereceden genel polinomun katsayıları eşitlenirse

$$x^3 - b^3 - c^3 - 3bcx = x^3 + \beta x$$

elde edilir. Aynı dereceli terimlerin katsayıları eşit olacağından,

$$b^3 + c^3 = 0 \quad \text{ve} \quad bc = -\frac{\beta}{3}$$

olur. İkinci eşitlikten çekilen $b = -\dfrac{\beta}{3c}$ değeri birinci eşitlikte yazılırsa,

$$\left(-\frac{\beta}{3c}\right)^3 + c^3 = 0$$

$$c^6 = \frac{\beta^3}{27}$$

buradan da

$$c = -\frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{3}}$$

olarak bulunur. Bundan hareketle

$$b = \frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{3}}$$

elde edilir. Bulunan b ve c değerleri dairesel matriste yerine yazılırsa,

$$C = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{3}} & -\frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{3}} \\ -\frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{3}} \\ \frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{3}} & -\frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{3}} & 0 \end{pmatrix}$$

şeklinde ters simetrik bir matris elde edilir. Bulunan bu matrisin özdeğerleri $q(t) = bt + ct^2$ formülünde b ve c değerlerinin yazılmasıyla elde edilen $q(t) = \frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{3}} t - -\frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{3}} t^2$ polinomu yardımıyla bulunur. Bu özdeğer polinomunda birimin üçüncü dereceden kökleri yazılarak C matrisinin özdeğerleri hesaplanır:

$$q(1) = b + c \quad \frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{3}} \quad 0$$

$$q\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \quad -\frac{1}{2}(b + c) + i\frac{\sqrt{3}}{2}(b - c) = i\sqrt{\beta}$$

$$q\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{1}{2}(b + c) - i\frac{\sqrt{3}}{2}(b - c) = -i\sqrt{\beta}$$

olarak bulunur. Başlangıçta verilen polinomun kökleri de

$$x_1 = q(1) = 0$$

$$x_2 = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = i\sqrt{\beta}$$

$$x_3 = \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -i\sqrt{\beta}$$

şeklindedir. $\beta \rangle 0$ ise $p(x)$ polinomunun köklerinden biri 0, diğer ikisi birbirinin eşleniği olan karmaşık iki köktür. $\beta < 0$ ise $p(x)$ polinomunun köklerinden biri 0, diğer iki kökü ters işaretli olmak üzere üç kökü de reeldir.

5.2.3. $P(x) = x^3 + \beta x + \gamma$ şeklindeki polinom türü denklemlerin kökleri

Polinomun kökler toplamı sıfırdır. 3x3 mertebeli genel bir dairesel matris, $C = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}_{3x3}$ olsun. Polinomun kökler toplamı ile C dairesel matrisinin özdeğerleri toplamının eşit olması gerektiğinden $iz(C) = 0$ olmalıdır. Bunun için C dairesel matrisinin ilk elemanı $a = 0$ kabul edilir. Böylece C dairesel matrisinin karakteristik denklemi $\det(xI - C) = x^3 - b^3 - c^3 - 3bcx = 0$ halini alır. Karakteristik polinom ile verilen üçüncü dereceden polinomun katsayıları eşitlenirse,

$$x^3 - b^3 - c^3 - 3bcx = x^3 + \beta x + \gamma$$

olur. Buradan $b^3 + c^3 = -\gamma$ ve $bc = -\dfrac{\beta}{3}$ ifadeleri elde edilir. İkinci eşitlikten bulunan $c = -\dfrac{\beta}{3b}$ değeri birinci eşitlikte yerine yazılırsa,

$$b^3 - \frac{\beta^3}{27b^3} = -\gamma$$

$$b^6 + \gamma b^3 - \frac{\beta^3}{27} = 0$$

buradan da

$$b = \left(-\frac{\gamma}{2} + \frac{\sqrt{4\beta^3 + 27\gamma^2}}{6\sqrt{3}} \right)^{\frac{1}{3}}$$

$$c=\left(-\frac{\gamma}{2}-\frac{\sqrt{4\beta^3+27\gamma^2}}{6\sqrt{3}}\right)^{\frac{1}{3}}$$

olarak bulunur. Bu değerlerin dairesel matriste yerlerine yazılmasıyla da

$$C=\begin{pmatrix} 0 & \left(-\frac{\gamma}{2}+\frac{\sqrt{4\beta^3+27\gamma^2}}{6\sqrt{3}}\right)^{\frac{1}{3}} & \left(-\frac{\gamma}{2}-\frac{\sqrt{4\beta^3+27\gamma^2}}{6\sqrt{3}}\right)^{\frac{1}{3}} \\ \left(-\frac{\gamma}{2}-\frac{\sqrt{4\beta^3+27\gamma^2}}{6\sqrt{3}}\right)^{\frac{1}{3}} & 0 & \left(-\frac{\gamma}{2}+\frac{\sqrt{4\beta^3+27\gamma^2}}{6\sqrt{3}}\right)^{\frac{1}{3}} \\ \left(-\frac{\gamma}{2}+\frac{\sqrt{4\beta^3+27\gamma^2}}{6\sqrt{3}}\right)^{\frac{1}{3}} & \left(-\frac{\gamma}{2}-\frac{\sqrt{4\beta^3+27\gamma^2}}{6\sqrt{3}}\right)^{\frac{1}{3}} & 0 \end{pmatrix}$$

matrisi elde edilir. Bu matrisin özdeğerleri verilen $p(x)$ polinomunun kökleridir. C matrisinin özdeğerleri $q(t)=bt+ct^2$ ifadesinde birimin üçüncü dereceden kökleri yazılarak elde edilir. Buna göre

$$q(1)=b+c=\left(-\frac{\gamma}{2}+\frac{\sqrt{\beta^3+27\gamma^2}}{6\sqrt{3}}\right)^{\frac{1}{3}}+\left(-\frac{\gamma}{2}-\frac{\sqrt{\beta^3+27\gamma^2}}{6\sqrt{3}}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$q\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\frac{1}{2}(b+c)+i\frac{\sqrt{3}}{2}(b-c)=$$

$$-\frac{1}{2}\left(\left(-\frac{\gamma}{2}+\frac{\sqrt{4\beta^3+27\gamma^2}}{6\sqrt{3}}\right)^{\frac{1}{3}}+\left(-\frac{\gamma}{2}-\frac{\sqrt{4\beta^3+27\gamma^2}}{6\sqrt{3}}\right)^{\frac{1}{3}}\right)$$

$$+i\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\left(-\frac{\gamma}{2}+\frac{\sqrt{4\beta^3+27\gamma^2}}{6\sqrt{3}}\right)^{\frac{1}{3}}-\left(-\frac{\gamma}{2}-\frac{\sqrt{4\beta^3+27\gamma^2}}{6\sqrt{3}}\right)^{\frac{1}{3}}\right)$$

$$q\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\frac{1}{2}(b+c)-i\frac{\sqrt{3}}{2}(b-c)$$

$$-\frac{1}{2}\left(\left(-\frac{\gamma}{2}+\frac{\sqrt{4\beta^3+27\gamma^2}}{6\sqrt{3}}\right)^{\frac{1}{3}}+\left(-\frac{\gamma}{2}-\frac{\sqrt{4\beta^3+27\gamma^2}}{6\sqrt{3}}\right)^{\frac{1}{3}}\right)$$

$$-i\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\left(-\frac{\gamma}{2}+\frac{\sqrt{4\beta^3+27\gamma^2}}{6\sqrt{3}}\right)^{\frac{1}{3}}-\left(-\frac{\gamma}{2}-\frac{\sqrt{4\beta^3+27\gamma^2}}{6\sqrt{3}}\right)^{\frac{1}{3}}\right)$$

olarak bulunur. Başlangıçta verilen polinomun kökleri de

$$x_1=q(1)$$

$$x_2=q\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$x_3=q\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

şeklindedir.

Burada, $4\beta^3+27\gamma^2=0$ olarak seçilirse $b=c$ olur. Dolayısıyla başlangıçta verilen polinomun kökleri de

$$x_1=2\sqrt[3]{-\frac{\gamma}{2}}$$

$$x_2=-\sqrt[3]{-\frac{\gamma}{2}}$$

$$x_3=-\sqrt[3]{-\frac{\gamma}{2}}$$

şeklindedir. Elde edilen üç kök de reeldir.

$4\beta^3 + 27\gamma^2 \langle 0$ olarak seçilirse b ile c kutupsal formda yazıldığında, toplamları reel, farkları karmaşık geleceğinden polinomun üç kökü de reel olur.

$4\beta^3 + 27\gamma^2 \rangle 0$ olarak seçilirse polinomun köklerinden biri reel, diğer ikisi birbirinin eşleniği olan karmaşık iki kök olur.

5.2.4. $P(x) = x^3 + \alpha x^2$ şeklindeki polinom türü denklemlerin kökleri

3x3 mertebeli genel bir dairesel matris, $C = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}_{3x3}$ olsun. $P(x)$ polinomunu

$x^3 + px + q$ formuna getirmek için $x = x - \dfrac{\alpha}{3}$ değişken dönüşümü yapılsın. Böylece

$$\left(x - \frac{\alpha}{3}\right)^3 + \alpha\left(x - \frac{\alpha}{3}\right)^2 = x^3 - \frac{\alpha^2}{3}x + \frac{2\alpha^3}{27}$$

denklemi elde edilir. Bu denklemin kökler toplamı sıfırdır. Polinomun kökler toplamı ile C dairesel matrisinin özdeğerleri toplamının eşit olması gerektiğinden $iz(C) = 0$ olmalıdır. Bunun için C dairesel matrisinin ilk elemanı $a = 0$ kabul edilir. Karakteristik polinomda $x = x - a$ dönüşümü yapılarak C dairesel matrisinin karakteristik denklemi $\det(xI - C)\quad x^3 - b^3 - c^3 - 3bcx = 0$ halini alır. Karakteristik polinomla, verilen üçüncü dereceden genel polinomun katsayıları eşitlenirse

$$x^3 - b^3 - c^3 - 3bcx = x^3 - \frac{\alpha^2}{3}x + \frac{2\alpha^3}{27}$$

olur. Aynı dereceli terimlerin katsayıları eşit olacağından

$$b^3 + c^3 \quad -\frac{2\alpha^3}{27}$$

$$bc = \frac{\alpha^2}{9}$$

elde edilir. İkinci eşitlikten bulunan, $c = \frac{\alpha^2}{9b}$ ifadesi birinci eşitlikte yerine yazılırsa,

$$b^3 + \left(\frac{\alpha^2}{9b}\right)^3 \quad - \frac{2\alpha^3}{27}$$

$$b^6 + \frac{2\alpha^3}{27} b^3 + \frac{\alpha^6}{729} = 0$$

denklemi yardımıyla,

$$b = -\frac{\alpha}{3}$$

olarak bulunur. Bu ifade ikinci eşitlikte yerleştirilirse,

$$c = -\frac{\alpha}{3}$$

olur. Bulunan b ve c değerleri dairesel matriste yerlerine yazılırsa,

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\alpha}{3} & -\frac{\alpha}{3} \\ -\frac{\alpha}{3} & 0 & -\frac{\alpha}{3} \\ -\frac{\alpha}{3} & -\frac{\alpha}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

şeklinde simetrik bir matris elde edilir. Bulunan bu matrisin özdeğerleri verilen $p(x)$ polinomunun kökleridir. C matrisinin özdeğerleri, $q(t) = bt + ct^2$ ifadesinde birimin üçüncü dereceden köklerinin yazılmasıyla hesaplanır. Buna göre

$$q(1) = b + c = -\frac{2\alpha}{3}$$

$$q\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{1}{2}(b+c)+i\frac{\sqrt{3}}{2}(b-c)=\frac{\alpha}{3}$$

$$q\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{1}{2}(b+c)-i\frac{\sqrt{3}}{2}(b-c)=\frac{\alpha}{3}$$

olur. Başlangıçta verilen polinomun kökleri ise

$$x_1 = q(1)-\frac{\alpha}{3} = -\alpha$$

$$x_2 = q\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\frac{\alpha}{3}=0$$

$$x_3 = q\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\frac{\alpha}{3}=0$$

şeklinde olup, ikisi sıfır olmak üzere üçü de reeldir.

5.2.5. $P(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x$ şeklindeki polinom türü denklemlerin kökleri

3x3 mertebeli genel bir dairesel matris $C=\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}_{3x3}$ olsun. $P(x)$ polinomunu x^3+px+q formuna getirmek için, $x = x-\frac{\alpha}{3}$ değişken dönüşümü yapılsın. Böylece

$$\left(x-\frac{\alpha}{3}\right)^3+\alpha\left(x-\frac{\alpha}{3}\right)^2+\beta\left(x-\frac{\alpha}{3}\right) = x^3+\left(\frac{3\beta-\alpha^2}{3}\right)x+\frac{2\alpha^3-9\alpha\beta}{27}$$

denklemi elde edilir. Bu denklemin kökler toplamı sıfırdır. Polinomun kökler toplamı ile C dairesel matrisinin özdeğerleri toplamının eşit olması gerektiğinden $iz(C)=0$ olmalıdır. Bunun için C dairesel matrisinin ilk elemanı $a=0$ kabul edilir. Karakteristik polinomda $x=(x-a)$ dönüşümü yapılarak C dairesel matrisinin karakteristik denklemi $\det(xI - C) = x^3 - b^3 - c^3 - 3bcx = 0$ halini alır. Karakteristik polinomla, verilen üçüncü dereceden genel polinomun katsayıları eşitlenirse,

$$x^3 - b^3 - c^3 - 3bcx = x^3 + \left(\frac{3\beta - \alpha^2}{3}\right)x + \frac{2\alpha^3 - 9\alpha\beta}{27}$$

elde edilir. Aynı dereceli terimlerin katsayıları eşit olacağından,

$$b^3 + c^3 = \frac{9\alpha\beta - 2\alpha^3}{27}$$

$$bc = \frac{\alpha^2 - 3\beta}{9}$$

olur. İkinci eşitlikten bulunan, $c = \dfrac{\alpha^2 - 3\beta}{9b}$ ifadesi birinci eşitlikte yerine yazılırsa,

$$b^3 + \left(\frac{\alpha^2 - 3\beta}{9b}\right)^3 = \frac{9\alpha\beta - 2\alpha^3}{27}$$

$$b^6 - \left(\frac{9\alpha\beta - 2\alpha^3}{27}\right)b^3 + \frac{\left(\alpha^2 - 3\beta\right)^3}{729} = 0$$

denklemi yardımıyla

$$b = \left(\frac{9\alpha\beta - 2\alpha^3}{54} + \frac{\sqrt{4\beta^3 - \beta^2\alpha^2}}{6\sqrt{3}}\right)^{\frac{1}{3}}$$

olarak, bu değerin ikinci eşitlikte yerine yazılmasıyla da

$$c = \left(\frac{9\alpha\beta - 2\alpha^3}{54} - \frac{\sqrt{4\beta^3 - \beta^2\alpha^2}}{6\sqrt{3}}\right)^{\frac{1}{3}}$$

olarak bulunur. Bu değerlerin dairesel matriste yerleştirilmesiyle,

$$C=\begin{pmatrix} 0 & \left(\frac{9\alpha\beta-2\alpha^3}{54}+\frac{\sqrt{4\beta^3-\beta^2\alpha^2}}{6\sqrt{3}}\right)^{\frac{1}{3}} & \left(\frac{9\alpha\beta-2\alpha^3}{54}-\frac{\sqrt{4\beta^3-\beta^2\alpha^2}}{6\sqrt{3}}\right)^{\frac{1}{3}} \\ \left(\frac{9\alpha\beta-2\alpha^3}{54}-\frac{\sqrt{4\beta^3-\beta^2\alpha^2}}{6\sqrt{3}}\right)^{\frac{1}{3}} & 0 & \left(\frac{9\alpha\beta-2\alpha^3}{54}+\frac{\sqrt{4\beta^3-\beta^2\alpha^2}}{6\sqrt{3}}\right)^{\frac{1}{3}} \\ \left(\frac{9\alpha\beta-2\alpha^3}{54}+\frac{\sqrt{4\beta^3-\beta^2\alpha^2}}{6\sqrt{3}}\right)^{\frac{1}{3}} & \left(\frac{9\alpha\beta-2\alpha^3}{54}-\frac{\sqrt{4\beta^3-\beta^2\alpha^2}}{6\sqrt{3}}\right)^{\frac{1}{3}} & 0 \end{pmatrix}$$

elde edilir. Bulunan bu matrisin özdeğerleri verilen $p(x)$ polinomunun kökleridir. C dairesel matrisinin özdeğerleri $q(t)=bt+ct^2$ polinomunda birimin üçüncü dereceden köklerinin yazılmasıyla bulunur.

$$q(1)=b+c=\left(\frac{9\alpha\beta-2\alpha^3}{54}+\frac{\sqrt{4\beta^3-\beta^2\alpha^2}}{6\sqrt{3}}\right)^{\frac{1}{3}}+\left(\frac{9\alpha\beta-2\alpha^3}{54}-\frac{\sqrt{4\beta^3-\beta^2\alpha^2}}{6\sqrt{3}}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$q\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\frac{1}{2}(b+c)+i\frac{\sqrt{3}}{2}(b-c)=$$

$$-\frac{1}{2}\left(\left(\frac{9\alpha\beta-2\alpha^3}{54}+\frac{\sqrt{4\beta^3-\beta^2\alpha^2}}{6\sqrt{3}}\right)^{\frac{1}{3}}+\left(\frac{9\alpha\beta-2\alpha^3}{54}-\frac{\sqrt{4\beta^3-\beta^2\alpha^2}}{6\sqrt{3}}\right)^{\frac{1}{3}}\right)$$

$$+i\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\left(\frac{9\alpha\beta-2\alpha^3}{54}+\frac{\sqrt{4\beta^3-\beta^2\alpha^2}}{6\sqrt{3}}\right)^{\frac{1}{3}}-\left(\frac{9\alpha\beta-2\alpha^3}{54}-\frac{\sqrt{4\beta^3-\beta^2\alpha^2}}{6\sqrt{3}}\right)^{\frac{1}{3}}\right)$$

$$q\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\frac{1}{2}(b+c)-i\frac{\sqrt{3}}{2}(b-c)=$$

$$-\frac{1}{2}\left(\left(\frac{9\alpha\beta-2\alpha^3}{54}+\frac{\sqrt{4\beta^3-\beta^2\alpha^2}}{6\sqrt{3}}\right)^{\frac{1}{3}}+\left(\frac{9\alpha\beta-2\alpha^3}{54}-\frac{\sqrt{4\beta^3-\beta^2\alpha^2}}{6\sqrt{3}}\right)^{\frac{1}{3}}\right)$$

$$-i\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\left(\frac{9\alpha\beta-2\alpha^3}{54}+\frac{\sqrt{4\beta^3-\beta^2\alpha^2}}{6\sqrt{3}}\right)^{\frac{1}{3}}-\left(\frac{9\alpha\beta-2\alpha^3}{54}-\frac{\sqrt{4\beta^3-\beta^2\alpha^2}}{6\sqrt{3}}\right)^{\frac{1}{3}}\right)$$

değerleri bulunur. Başlangıçta verilen polinomun kökleri ise

$$x_1 = q(1) - \frac{\alpha}{3}$$

$$x_2 = q\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{\alpha}{3}$$

$$x_3 = q\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{\alpha}{3}$$

dönüşümleriyle bulunur. Burada $4\beta - \alpha^2 = 0$ olarak seçilirse, $b = c$ olur. Dolayısıyla başlangıçta verilen polinomun kökleri de

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = -\frac{\alpha}{2}$$

$$x_3 = -\frac{\alpha}{2}$$

olmak üzere üçü de reel olan köklerdir.

$4\beta - \alpha^2 \langle 0$ olarak seçilirse b ile c kutupsal formda yazıldığında toplamları reel, farkları karmaşık geleceğinden polinomun üç kökü de reel olur.

$4\beta - \alpha^2 \rangle 0$ olarak seçilirse polinomun bir kökü reel, diğer ikisi birbirinin eşleniği olan karmaşık iki kök olur.

5.2.6. $P(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ şeklindeki polinom türü denklemlerin kökleri

3x3 mertebeli genel bir dairesel matris $C = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}_{3x3}$ olsun. $P(x)$ polinomunu

$x^3 + px + q$ formuna getirmek için $x = x - \dfrac{\alpha}{3}$ değişken dönüşümü yapılsın. Böylece

$$\left(x - \frac{\alpha}{3}\right)^3 + \alpha\left(x - \frac{\alpha}{3}\right)^2 + \beta\left(x - \frac{\alpha}{3}\right) + \gamma \quad x^3 + \left(\frac{3\beta - \alpha^2}{3}\right)x + \frac{2\alpha^3 - 9\alpha\beta + 27\gamma}{27}$$

denklemi elde edilir. Bu denklemin kökler toplamı sıfırdır. Polinomun kökler toplamı ile C dairesel matrisinin özdeğerleri toplamının eşit olması gerektiğinden $iz(C) = 0$ olmalıdır. Bunun için C dairesel matrisinin ilk elemanı $a = 0$ kabul edilir Karakteristik polinomda $x = (x - a)$ dönüşümü yapılarak C dairesel matrisinin karakteristik denklemi $\det(xI - C) \quad x^3 - b^3 - c^3 - 3bcx = 0$ halini alır. Karakteristik polinomla, verilen üçüncü dereceden genel polinomun katsayıları eşitlenirse

$$x^3 - b^3 - c^3 - 3bcx \quad x^3 + px + q$$

olur. Aynı dereceli terimlerin katsayıları eşit olacağından,

$$bc = -\frac{p}{3}$$

$$b^3 + c^3 \quad -q$$

Birinci eşitlikten elde edilen $c = -\dfrac{p}{3b}$ değeri ikinci eşitlikte yerine yazılırsa,

$$b^3 + \left(-\frac{p}{3b}\right)^3 \quad -q$$

$$b^3 - \frac{p^3}{27b^3} + q = 0$$

$$b^6 + qb^3 - \frac{p^3}{27} = 0$$

elde edilir. Buradan

$$b = \left(-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \right)^{\frac{1}{3}}$$

ve bu değerinin ikinci eşitlikte yazılmasıyla da

$$c = \left(-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \right)^{\frac{1}{3}}$$

olarak bulunur. Bulunan bu b ve c değerleri dairesel matriste yerine yazılırsa,

$$C = \begin{pmatrix} 0 & \left(-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \right)^{\frac{1}{3}} & \left(-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \right)^{\frac{1}{3}} \\ \left(-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \right)^{\frac{1}{3}} & 0 & \left(-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \right)^{\frac{1}{3}} \\ \left(-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \right)^{\frac{1}{3}} & \left(-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \right)^{\frac{1}{3}} & 0 \end{pmatrix}$$

elde edilir. Bulunan bu matrisin özdeğerleri verilen $p(x)$ polinomunun kökleridir. C matrisinin özdeğerleri $q(t) = bt + ct^2$ polinomunda b ve c değerlerinin yazılmasıyla elde edilen $q(t) = \left(-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \right)^{\frac{1}{3}} t + \left(-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \right)^{\frac{1}{3}} t^2$ ifadesi yardımıyla bulunur. Bu polinomda birimin üçüncü dereceden kökleri yazılarak C matrisinin özdeğerleri hesaplanır. Buna göre

$$q(1) = b + c \quad \left(-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$q\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \quad -\frac{1}{2}(b+c) + i\frac{\sqrt{3}}{2}(b-c) =$$

$$-\frac{1}{2}\left(\left(-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}\right)^{\frac{1}{3}}\right)$$

$$+i\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\left(-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}\right)^{\frac{1}{3}} - \left(-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}\right)^{\frac{1}{3}}\right)$$

$$q\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \quad -\frac{1}{2}(b+c) - i\frac{\sqrt{3}}{2}(b-c) =$$

$$-\frac{1}{2}\left(\left(-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}\right)^{\frac{1}{3}}\right)$$

$$-i\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\left(-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}\right)^{\frac{1}{3}} - \left(-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}\right)^{\frac{1}{3}}\right)$$

Böylelikle C dairesel matrisinin özdeğerleri bulunmuş oldu. Başlangıçta verilen polinomun kökleri ise

$$x_1 = q(1) - \frac{\alpha}{3}$$

$$x_2 = q\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{\alpha}{3}$$

$$x_3 = q\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{\alpha}{3}$$

dönüşümleriyle elde edilir.

Burada p ve q değerlerinin b ve c ifadelerinde yerlerine yazılmasıyla,

$$b=\left(\frac{-2\alpha^3+9\alpha\beta-27\gamma}{54}+\frac{\sqrt{4\beta^3-\beta^2\alpha^2+4\alpha^3\gamma-18\alpha\beta\gamma+27\gamma^2}}{6\sqrt{3}}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$c=\left(\frac{-2\alpha^3+9\alpha\beta-27\gamma}{54}-\frac{\sqrt{4\beta^3-\beta^2\alpha^2+4\alpha^3\gamma-18\alpha\beta\gamma+27\gamma^2}}{6\sqrt{3}}\right)^{\frac{1}{3}}$$

olarak bulunur. Burada aşağıda belirtilen üç ayrı durumu incelemek mümkündür:

$4\beta^3-\beta^2\alpha^2+4\alpha^3\gamma-18\alpha\beta\gamma+27\gamma^2=0$ seçilirse, $b=c$ olur. Bu durumda verilen polinomun üç kökü de reel olur.

$4\beta^3-\beta^2\alpha^2+4\alpha^3\gamma-18\alpha\beta\gamma+27\gamma^2\langle 0$ olarak seçilirse b ile c kutupsal formda yazıldığında toplamları reel, farkları karmaşık geleceğinden verilen polinomun üç kökü de reel olur.

$4\beta^3-\beta^2\alpha^2+4\alpha^3\gamma-18\alpha\beta\gamma+27\gamma^2\rangle 0$ olarak seçilirse verilen polinomun bir kökü reel, diğer ikisi birbirinin eşleniği olan karmaşık iki kök olur.

5.3. Dördüncü Dereceden Polinom Türü Denklemlerin Dairesel Matrisle Çözümü

5.3.1. $P(x)=x^4+\delta$ şeklindeki polinom türü denklemlerin kökleri

Polinomun kökler toplamı sıfırdır. 4x4 mertebeli genel bir dairesel matris,

$$C=\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ d & a & b & c \\ c & d & a & b \\ b & c & d & a \end{pmatrix}_{4x4}$$ olsun. Polinomun kökler toplamı ile C dairesel matrisinin özdeğerleri toplamının eşit olması gerektiğinden $iz(C)=0$ olmalıdır. Bunun için C dairesel matrisinin ilk elemanı $a=0$ kabul edilir. Böylece C dairesel matrisinin karakteristik denklemi

$$\det(xI-C) = x^4-(4bd+2c^2)x^2-4c(b^2+d^2)x+c^4-b^4-d^4-4bdc^2+2b^2d^2=0$$

halini alır. Karakteristik polinomla, verilen dördüncü dereceden genel polinomun katsayıları eşitlenirse

$$x^4-(4bd+2c^2)x^2-4c(b^2+d^2)x+c^4-b^4-d^4-4bdc^2+2b^2d^2 = x^4+\delta$$

olur. Aynı dereceli terimlerin katsayıları eşit olduğundan

$$-4c(b^2+d^2)=0$$

$$-(4bd+2c^2)=0$$

$$c^4-b^4-d^4-4bdc^2+2b^2d^2=\delta$$

olur. Üçüncü eşitlik düzenlenirse,

$$c^4-(b^2+d^2)^2+4(bd)^2-4bdc^2=\delta$$

elde edilir. Birinci eşitlikten $(b^2+d^2)=0$ ve ikinci eşitlikten $bd=-\dfrac{c^2}{2}$ değerleri bulunur. Bu değerler düzenlenen üçüncü eşitlikte yerlerine yazıldığında,

$c^4-\dfrac{\delta}{4}=0$ ve buradan da

$$c = \frac{\sqrt[4]{\delta}}{\sqrt{2}}$$

olarak bulunur. İkinci eşitlikten elde edilen $d = -\frac{c^2}{2b}$ değeri $\left(b^2 + d^2\right) = 0$ eşitliğinde yerine yazılırsa , $b^2 + \frac{c^4}{4b^2}$ =0 ve burada $c^4 = \frac{\delta}{4}$ olarak yerleştirildiğinde $b^4 + \frac{\delta}{16} = 0$ olur. Bu denklem yardımıyla da $b = \frac{1}{2}\sqrt{i}\sqrt[4]{\delta}$ olarak bulunur. $\sqrt{i} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$ olarak alınıp bulunan b değerinde yerine yazılırsa,

$$b = \frac{\sqrt{2}}{4}(1+i)\sqrt[4]{\delta}$$

olur. İkinci eşitlikten elde edilen, $b = -\frac{c^2}{2d}$ ifadesi $\left(b^2 + d^2\right) = 0$ denkleminde yerine yazılırsa, $d^2 + \frac{c^4}{4d^2} = 0$ ve bu ifadede $c^4 = \frac{\delta}{4}$ olarak alınırsa $d^4 + \frac{\delta}{16} = 0$ elde edilir. Buradan $d = \frac{1}{2}i\sqrt{i}\sqrt[4]{\delta}$ olarak bulunur. $\sqrt{i} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$ İfadesi yukarıdaki denklemde yerine yazıldığında,

$$d = \frac{\sqrt{2}}{4}(i-1)\sqrt[4]{\delta}$$

olarak bulunur. Elde edilen b , c , d değerleri dairesel matriste yerlerine yazıldığında,

$$C=\begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{4}(1+i)\sqrt[4]{\delta} & \frac{\sqrt[4]{\delta}}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{2}}{4}(i-1)\sqrt[4]{\delta} \\ \frac{\sqrt{2}}{4}(i-1)\sqrt[4]{\delta} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{4}(1+i)\sqrt[4]{\delta} & \frac{\sqrt[4]{\delta}}{\sqrt{2}} \\ \frac{\sqrt[4]{\delta}}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{2}}{4}(i-1)\sqrt[4]{\delta} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{4}(1+i)\sqrt[4]{\delta} \\ \frac{\sqrt{2}}{4}(1+i)\sqrt[4]{\delta} & \frac{\sqrt[4]{\delta}}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{2}}{4}(i-1)\sqrt[4]{\delta} & 0 \end{pmatrix}$$

olur. Bu matrisin özdeğer polinomu $q(t)=bt+ct^2+dt^3$ şeklindedir. Bu özdeğer polinomunda birimin dördüncü dereceden kökleri yerlerine yazılarak dairesel matrisin özdeğerleri bulunur.

$$q(1)=b+c+d=\frac{\sqrt{2}}{4}(1+i)\sqrt[4]{\delta}+\frac{\sqrt[4]{\delta}}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{2}}{4}(i-1)\sqrt[4]{\delta}=\frac{\sqrt[4]{\delta}}{\sqrt{2}}(1+i)$$

$$q(-1)=-b+c-d=-\frac{\sqrt{2}}{4}(1+i)\sqrt[4]{\delta}+\frac{\sqrt[4]{\delta}}{\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{2}}{4}(i-1)\sqrt[4]{\delta}=\frac{\sqrt[4]{\delta}}{\sqrt{2}}(1-i)$$

$$q(i)=bi-c-di=\frac{\sqrt{2}}{4}(1+i)i\sqrt[4]{\delta}-\frac{\sqrt[4]{\delta}}{\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{2}}{4}(i-1)i\sqrt[4]{\delta}=\frac{\sqrt[4]{\delta}}{\sqrt{2}}(i-1)$$

$$q(i)=-bi-c+di=-\frac{\sqrt{2}}{4}(1+i)i\sqrt[4]{\delta}-\frac{\sqrt[4]{\delta}}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{2}}{4}(i-1)i\sqrt[4]{\delta}=-\frac{\sqrt[4]{\delta}}{\sqrt{2}}(i+1)$$

Başlangıçta verilen polinomun kökleri de

$$x_1=q(1)=\frac{\sqrt[4]{\delta}}{\sqrt{2}}(1+i)$$

$$x_2=q(-1)=\frac{\sqrt[4]{\delta}}{\sqrt{2}}(1-i)$$

$$x_3=q(i)=\frac{\sqrt[4]{\delta}}{\sqrt{2}}(i-1)$$

$$x_4=q(-i)=-\frac{\sqrt[4]{\delta}}{\sqrt{2}}(i+1)$$

olarak bulunur. Polinomun kökleri arasında $x_1 = -x_4$ ve $x_2 = -x_3$ bağıntısı vardır.

5.3.2. $P(x) = x^4 + \gamma x$ şeklindeki polinom türü denklemlerin kökleri

Polinomun kökler toplamı sıfırdır. 4x4 mertebeli genel bir dairesel matris $C = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ d & a & b & c \\ c & d & a & b \\ b & c & d & a \end{pmatrix}_{4x4}$ olsun. Polinomun kökler toplamı ile C dairesel matrisinin özdeğerleri toplamının eşit olması gerektiğinden $iz(C) = 0$ olmalıdır. Bunun için C dairesel matrisinin ilk elemanı $a = 0$ kabul edilir. Böylece C dairesel matrisinin karakteristik denklemi

$$\det(xI - C) = x^4 - (4bd + 2c^2)x^2 - 4c(b^2 + d^2)x + c^4 - b^4 - d^4 - 4bdc^2 + 2b^2d^2 = 0$$

halini alır. Karakteristik polinomla, verilen dördüncü dereceden genel polinomun katsayıları eşitlenirse,

$$x^4 - (4bd + 2c^2)x^2 - 4c(b^2 + d^2)x + c^4 - b^4 - d^4 - 4bdc^2 + 2b^2d^2 = x^4 + \gamma x$$

olur. Aynı dereceli terimlerin katsayıları eşit olacağından,

$$4bd + 2c^2 = 0$$
$$-4c(b^2 + d^2) = \gamma$$
$$c^4 - b^4 - d^4 - 4bdc^2 + 2b^2d^2 = 0$$

bulunur. Üçüncü denklem düzenlenirse, $c^4 - \left(b^2 + d^2\right)^2 + 4\left(bd\right)^2 - 4bdc^2 = 0$ elde edilir. İkinci eşitlikten bulunan $\left(b^2 + d^2\right) = -\dfrac{\gamma}{4c}$ ile birinci eşitlikten bulunan $bd = -\dfrac{c^2}{2}$ ifadeleri üçüncü denklemde yazılırsa,

$$c^4 - \left(-\frac{\gamma}{4c}\right)^2 + 4\left(-\frac{c^2}{2}\right)^2 - 4\left(-\frac{c^2}{2}\right)c^2 = 0$$

$$4c^4 - \frac{\gamma^2}{16c^2} = 0$$

$$c^4 - \frac{\gamma^2}{64c^2} = 0$$

$$\left(c^2 - \frac{\gamma}{8c}\right)\left(c^2 + \frac{\gamma}{8c}\right) = 0$$

$$c = \frac{\sqrt[3]{\gamma}}{2}$$

elde edilir. $4bd = -2c^2$ eşitliğinden bulunan $d = -\dfrac{c^2}{2b}$ değeri $b^2 + \cancel{d}^2 \quad -\dfrac{\gamma}{4c}$ ifadesinde yerine yazılırsa, $d^2 + \dfrac{c^4}{4d^2} + \dfrac{\gamma}{4c} = 0$ olur. Bu ifadede yukarıdaki denklemden elde edilen $c = \dfrac{\sqrt[3]{\gamma}}{2}$ değeri yerine yazılırsa, $4b^4 + c^4 + 8c^2b^2 = 0$ bulunur. Buradan $b = \dfrac{\sqrt{-2c^2 - \sqrt{3}c^2}}{\sqrt{2}}$ elde edilir. Bu ifadenin düzenlenmesiyle $b = \dfrac{\sqrt{-c^2(4+2\sqrt{3})}}{2}$ olarak yazılabilir. Bu denklemde $c = \dfrac{\sqrt[3]{\gamma}}{2}$ yerine yazılarak,

$$b = \frac{\left(\sqrt{3}+1\right)}{2} i\sqrt[3]{\gamma}$$

olarak bulunur. Benzer işlemlerle, $4bd = -2c^2$ eşitliğinden bulunan $b = -\dfrac{c^2}{2d}$ değeri $b^2 + \cancel{d}^2 \quad -\dfrac{\gamma}{4c}$ ifadesinde yerine yazılırsa $d^2 + \dfrac{c^4}{4d^2} + \dfrac{\gamma}{4c} = 0$ denkleminde yukarıda uygulanan işlemlere benzer işlemlerle $d = \dfrac{\sqrt{-2c^2 + \sqrt{3}c^2}}{\sqrt{2}}$ buradan da

$$d = \frac{\left(\sqrt{3}-1\right)}{2} i\sqrt[3]{\gamma}$$

değeri elde edilir. Elde edilen b, c, d değerleri dairesel matriste yerine yazılırsa,

$$C = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\left(\sqrt{3}+1\right)}{2} i\sqrt[3]{\gamma} & \frac{\sqrt[3]{\gamma}}{2} & \frac{\left(\sqrt{3}-1\right)}{2} i\sqrt[3]{\gamma} \\ \frac{\left(\sqrt{3}-1\right)}{2} i\sqrt[3]{\gamma} & 0 & \frac{\left(\sqrt{3}+1\right)}{2} i\sqrt[3]{\gamma} & \frac{\sqrt[3]{\gamma}}{2} \\ \frac{\sqrt[3]{\gamma}}{2} & \frac{\left(\sqrt{3}-1\right)}{2} i\sqrt[3]{\gamma} & 0 & \frac{\left(\sqrt{3}+1\right)}{2} i\sqrt[3]{\gamma} \\ \frac{\left(\sqrt{3}+1\right)}{2} i\sqrt[3]{\gamma} & \frac{\sqrt[3]{\gamma}}{2} & \frac{\left(\sqrt{3}-1\right)}{2} i\sqrt[3]{\gamma} & 0 \end{pmatrix}$$

olur. Dairesel matrisin özdeğer polinomu $q(t) = bt + ct^2 + dt^3$ şeklindedir. Dairesel matrisin özdeğerlerini bulmak için birimin dördüncü dereceden kökleri bu polinomda yerlerine yazılır. Bulunan bu değerler başlangıçta verilen polinomun da kökleridir. Böylece

$$x_1 = q(1) = b + c + d = \frac{\sqrt[3]{\gamma}}{2}\left(1+\sqrt{3}i\right)$$

$$x_2 = q(-1) = -b + c - d = \frac{\sqrt[3]{\gamma}}{2}\left(1-\sqrt{3}i\right)$$

$$x_3 = q(i) = bi - c - di = -2\sqrt[3]{\gamma}$$

$$x_4 = q(-i) = -bi - c + di = 0$$

elde edilir. Polinomun köklerinin biri sıfır olmak üzere ikisi reel, diğer ikisi birbirinin eşleniği olan karmaşık iki köktür.

5.3.3. *P(x)* = $x^4 + \beta x^2$ şeklindeki polinom türü denklemlerin kökleri

Polinomun kökler toplamı sıfırdır. 4x4 mertebeli genel bir dairesel matris

$C=\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ d & a & b & c \\ c & d & a & b \\ b & c & d & a \end{pmatrix}_{4x4}$ olsun. Polinomun kökler toplamı ile C dairesel matrisinin özdeğerleri toplamının eşit olması gerektiğinden $iz(C)=0$ olmalıdır. Bunun için C dairesel matrisinin ilk elemanı $a=0$ kabul edilir. Böylece C dairesel matrisinin karakteristik denklemi

$$\det(xI-C) = x^4-(4bd+2c^2)x^2-4c(b^2+d^2)x+c^4-b^4-d^4-4bdc^2+2b^2d^2=0$$

halini alır. Karakteristik polinomla, verilen dördüncü dereceden genel polinomun katsayıları eşitlenirse,

$$x^4-(4bd+2c^2)x^2-4c(b^2+d^2)x+c^4-b^4-d^4-4bdc^2+2b^2d^2 = x^4+\beta x^2$$

olur. Aynı dereceli terimlerin katsayıları eşit olduğundan,

$$-4c(b^2+d^2)=0$$

$$-\left(4bd+2c^2\right)=\beta$$

$$c^4-b^4-d^4-4bdc^2+2b^2d^2=0$$

üçüncü denklemin düzenlenmesiyle, $c^4-(b^2+d^2)^2+4\left(bd\right)^2-4bdc^2=0$ elde edilir. Burada birinci eşitlikten bulunan $b^2+d^2=0$ ve ikinci eşitlikten bulunan $bd=-\dfrac{\beta+2c^2}{4}$ yerine yazılırsa,

$$c^4+\frac{\left(\beta+2c^2\right)^2}{4}+\left(\beta+2c^2\right)c^2=0$$

$$16c^4+8\beta c^2+\beta^2=0$$

$$\left(4c^2+\beta\right)^2=0$$

buradan da

$$c = \frac{i\sqrt{\beta}}{2}$$

olarak bulunur. İkinci eşitlikten bulunan $bd = -\frac{\beta + 2c^2}{4}$ denkleminde $c^2 = -\frac{\beta}{4}$ olarak yazılırsa $bd = -\frac{\beta}{8}$ bulunur. Elde edilen $d = -\frac{\beta}{8b}$ değeri $b^2 + d^2 = 0$ denkleminde yerine yazılırsa $b^2 + \frac{\beta^2}{64b^2} = 0$ olur. Bu denklemin düzenlenmesiyle de $b^4 + \frac{\beta^2}{64} = 0$ elde edilir. Buradan $b = \frac{\sqrt{i\beta}}{2\sqrt{2}}$ olarak bulunur. Burada $\sqrt{i} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$ olarak alınıp, bulunan b değerinde yerine yazılırsa,

$$b = \frac{\sqrt{\beta}}{4}(1+i)$$

elde edilir. Benzer işlemlerle yukarıda bulunan $b = -\frac{\beta}{8d}$ ifadesi $b^2 + d^2 = 0$ denkleminde yazıldığında, $d^4 + \frac{\beta^2}{64} = 0$ olur. Buradan da $d = \frac{i\sqrt{i\beta}}{2\sqrt{2}}$ olarak bulunur. Burada $\sqrt{i} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$ olarak alınırsa,

$$d = \frac{\sqrt{\beta}}{4}(i-1)$$

elde edilir. Bulunan b, c, d değerleri dairesel matriste yazılırsa

$$C=\begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{\beta}}{4}(1+i) & \frac{i\sqrt{\beta}}{2} & \frac{\sqrt{\beta}}{4}(i-1) \\ \frac{\sqrt{\beta}}{4}(i-1) & 0 & \frac{\sqrt{\beta}}{4}(1+i) & \frac{i\sqrt{\beta}}{2} \\ \frac{i\sqrt{\beta}}{2} & \frac{\sqrt{\beta}}{4}(i-1) & 0 & \frac{\sqrt{\beta}}{4}(1+i) \\ \frac{\sqrt{\beta}}{4}(1+i) & \frac{i\sqrt{\beta}}{2} & \frac{\sqrt{\beta}}{4}(i-1) & 0 \end{pmatrix}$$

bulunur. Dairesel matrisin özdeğer polinomu $q(t)=bt+ct^2+dt^3$ şeklindedir. Dairesel matrisin özdeğerlerini bulmak için birimin dördüncü dereceden kökleri bu polinomda yerlerine yazılır. Bulunan bu değerler başlangıçta verilen polinomun da kökleridir. Böylece

$$x_1 = q(1) = b+c+d = i\sqrt{\beta}$$

$$x_2 = q(-1) = -b+c-d = 0$$

$$x_3 = q(i) = bi-c-di = 0$$

$$x_4 = q(-i) = -bi-c+di \quad -i\sqrt{\beta}$$

elde edilir. Buna göre $\beta \rangle 0$ için polinomun iki kökü birbirinin eşleniği olan karmaşık iki kök, diğer ikisi sıfırdır. $\beta \langle 0$ için polinomun köklerinin ikisi sıfır, diğer ikisi de ters işaretli olmak üzere dört kökü de reeldir.

5.3.4. $P(x) = x^4 + \alpha x^3$ şeklindeki polinom türü denklemlerin kökleri

4x4 mertebeli genel bir dairesel matris $C=\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ d & a & b & c \\ c & d & a & b \\ b & c & d & a \end{pmatrix}_{4x4}$ olsun. $p(x)$ polinomunu $x^4+\beta x^2+\gamma x+\delta$ formuna getirmek için; $x = x-\frac{\alpha}{4}$ değişken değişimi yapılsın. Böylece

$$\left(x-\frac{\alpha}{4}\right)^4+\alpha\left(x-\frac{\alpha}{4}\right)^3=x^4-\frac{3}{8}\alpha^2x^2+\frac{\alpha^3}{8}x-\frac{3\alpha^4}{256}$$

elde edilir. Bu denklemin kökler toplamı sıfırdır. Polinomun kökler toplamı ile C dairesel matrisinin özdeğerleri toplamının eşit olması gerektiğinden $iz(C)=0$ olmalıdır. Bunun için C dairesel matrisinin ilk elemanı $a=0$ kabul edilir. Böylece C dairesel matrisinin karakteristik denklemi

$$\det(xI-C)\quad x^4=-\left(4bd+2c^2\right)x^2-4c\left(b^2+d^2\right)x+c^4-b^4-d^4-4bdc^2+2b^2d^2=0$$

halini alır. Karakteristik polinomla, verilen dördüncü dereceden polinomun katsayıları eşitlenirse,

$$x^4-\left(4bd+2c^2\right)x^2-4c\left(b^2+d^2\right)x+c^4-b^4-d^4-4bdc^2+2b^2d^2=\ x^4-\frac{3}{8}\alpha^2x^2+\frac{\alpha^3}{8}x-\frac{3\alpha^4}{256}$$

elde edilir. Aynı dereceli terimlerin katsayıları eşit olacağından,

$$4bd+2c^2=\frac{3}{8}\alpha^2$$

$$-4c\left(b^2+d^2\right)=\frac{\alpha^3}{8}$$

$$c^4-b^4-d^4-4bdc^2+2b^2d^2\quad -\frac{3}{256}\alpha^4$$

olur.Üçüncü eşitlik düzenlenirse $c^4-\left(b^2+d^2\right)^2+4\left(bd\right)^2-4bdc^2\quad -\frac{3}{256}\alpha^4$ olur.

Birinci eşitlikten bulunan $bd=\frac{3\alpha^2}{32}-\frac{c^2}{2}$ ve ikinci eşitlikten $b^2+d^2\quad -\frac{\alpha^2}{32c}$ ifadeleri üçüncü eşitlikte yazılırsa,

$$c^4-\left(-\frac{\alpha^3}{32c}\right)^2+4\left(\frac{3\alpha^2}{32}-\frac{c^2}{2}\right)^2-4\left(\frac{3\alpha^2}{32}-\frac{c^2}{2}\right)c^2+\frac{3\alpha^4}{256}=0$$

$$4c^6 - \frac{3}{4}\alpha^2 c^4 + \frac{3}{64}\alpha^4 c^2 - \frac{\alpha^6}{1024} = 0$$

olur. Buradan da

$$c = -\frac{\alpha}{4}$$

olarak bulunur. Birinci eşitlikten bulunan $4bd + 2c^2 = \frac{3\alpha^2}{8}$ ifadesinde $c^2 = \frac{\alpha^2}{16}$ olarak yazılırsa $bd = \frac{\alpha^2}{16}$ olur. Buradan elde edilen $d = \frac{\alpha^2}{16b}$ ve $c = -\frac{\alpha}{4}$ ikinci eşitlikte yani $-4c(b^2 + d^2) = \frac{\alpha^3}{8}$ ifadesinde yerleştirilirse, $b^4 - \frac{\alpha^2}{8}b^2 + \frac{\alpha^4}{256} = 0$ elde edilir. Buradan

$$b = \frac{\alpha}{4}$$

olarak bulunur. Benzer işlemlerle,

$$d = \frac{\alpha}{4}$$

olarak bulunur. Bulunan b , c , d değerleri dairesel matriste yerleştirilirse

$$C = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\alpha}{4} & -\frac{\alpha}{4} & \frac{\alpha}{4} \\ \frac{\alpha}{4} & 0 & \frac{\alpha}{4} & -\frac{\alpha}{4} \\ -\frac{\alpha}{4} & \frac{\alpha}{4} & 0 & \frac{\alpha}{4} \\ \frac{\alpha}{4} & -\frac{\alpha}{4} & \frac{\alpha}{4} & 0 \end{pmatrix}$$

şeklinde simetrik bir matris elde edilir. Dairesel matrisin özdeğer polinomu $q(t) = bt + ct^2 + dt^3$ şeklindedir. Bulunan bu özdeğer polinomunda birimin dördüncü dereceden kökleri yazılarak dairesel matrisin özdeğerleri bulunur. Buna göre

$$q(1) = b + c + d = \frac{\alpha}{4}$$
$$q(-1) = -b + c - d = -\frac{3\alpha}{4}$$
$$q(i) = bi - c - di = \frac{\alpha}{4}$$
$$q(-i) = -bi - c + di = \frac{\alpha}{4}$$

olur. Başlangıçta verilen polinomun kökleri ise $x = x - \frac{\alpha}{4}$ değişken dönüşümü yapılarak bulunur. Buna göre

$$x_1 = q(1) - \frac{\alpha}{4} = 0$$
$$x_2 = q(-1) - \frac{\alpha}{4} = -\alpha$$
$$x_3 = q(i) - \frac{\alpha}{4} = 0$$
$$x_4 = q(-i) - \frac{\alpha}{4} = 0$$

şeklinde olup, üç tanesi sıfır olmak üzere dört kökü de reeldir.

5.3.5. $P(x) = x^4 + \alpha x^3 + \beta x^2$ şeklindeki polinom türü denklemlerin kökleri

4x4 mertebeli genel bir dairesel matris, $C = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ d & a & b & c \\ c & d & a & b \\ b & c & d & a \end{pmatrix}_{4x4}$ olsun. $P(x)$ polinomu $x^4 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$ formuna getirmek için $x = x - \frac{\alpha}{4}$ değişken değişimi yapılsın. Böylece

$$\left(x-\frac{\alpha}{4}\right)^4+\alpha\left(x-\frac{\alpha}{4}\right)^3+\beta\left(x-\frac{\alpha}{4}\right)^2=x^4+\left(\frac{8\beta-3\alpha^2}{8}\right)x^2+\left(\frac{\alpha^3-4\alpha\beta}{8}\right)x+\left(\frac{16\beta\alpha^2-3\alpha^4}{256}\right)$$

elde edilir. Bulunan bu polinomun kökler toplamı sıfırdır. Polinomun kökler toplamı ile C dairesel matrisinin özdeğerleri toplamının eşit olması gerektiğinden, $iz(C)=0$ olmalıdır. Bunun için C dairesel matrisinin ilk elemanı $a=0$ kabul edilir. Böylece C dairesel matrisinin karakteristik denklemi,

$$\det(xI-C) = x^4-\left(4bd+2c^2\right)x^2-4c\left(b^2+d^2\right)x+c^4-b^4-d^4-4bdc^2+2b^2d^2=0$$

halini alır. Karakteristik polinomla, verilen dördüncü dereceden polinomun katsayıları eşitlenirse,

$$\begin{aligned}
&x^4-\left(4bd+2c^2\right)x^2-4c\left(b^2+d^2\right)x+c^4-b^4-d^4-4bdc^2+2b^2d^2\\
&=x^4-\left(\frac{8\beta-3\alpha^2}{8}\right)x^2+\left(\frac{\alpha^3-4\alpha\beta}{8}\right)x+\left(\frac{16\alpha^2\beta-3\alpha^4}{256}\right)
\end{aligned}$$

olur. Aynı dereceli terimlerin katsayıları eşit olacağından,

$$4bd+2c^2=\frac{3\alpha^2-8\beta}{8}$$

$$4c\left(b^2+d^2\right)=\frac{4\alpha\beta-\alpha^3}{8}$$

$$c^4-b^4-d^4-4bdc^2+2b^2d^2=\frac{16\alpha^2\beta-3\alpha^4}{256}$$

elde edilir. Üçüncü denklem düzenlenirse,

$$c^4-\left(b^2+d^2\right)^2+4\left(bd\right)^2-4bdc^2=\frac{16\alpha^2\beta-3\alpha^4}{256}$$

olur. Birinci eşitlikten elde edilen $bd = \frac{3\alpha^2 - 8\beta}{32} - \frac{c^2}{2}$ ile ikinci eşitlikten elde edilen $b^2 + d^2 = \frac{4\alpha\beta - \alpha^3}{32c}$ değerleri, düzenlenen üçüncü denklemde yerlerine yazılırsa,

$$c^4 - \left(\frac{\alpha\beta}{8c} - \frac{\alpha^3}{32c}\right)^2 + 4\left(\frac{3\alpha^2 - 8\beta}{32} - \frac{c^2}{2}\right)^2 - \left(\frac{3\alpha^2 - 8\beta}{8} - 2c^2\right)c^2 = \frac{16\alpha^2\beta - 3\alpha^4}{256}$$

olur. Bu denklemin düzenlenmesiyle de

$$4c^6 + \left(\frac{8\beta - 3\alpha^2}{4}\right)c^4 + \left(\frac{12\alpha^4 - 64\alpha^2\beta + 64\beta^2}{256}\right)c^2 + \frac{8\alpha^4\beta - 16\alpha^2\beta^2 - \alpha^6}{1024} = 0$$

elde edilir. Buradan da

$$c = -\frac{\alpha}{4}$$

olarak bulunur. Birinci eşitlikteki $4bd + 2c^2 = \frac{3\alpha^2 - 8\beta}{8}$ ifadesinde $c = -\frac{\alpha}{4}$ olarak yazılırsa, $4bd + 2\frac{\alpha^2}{16} = \frac{3\alpha^2 - 8\beta}{8}$ buradan da, $d = \frac{\alpha^2 - 4\beta}{16b}$ olarak bulunur. Bulunan $c = -\frac{\alpha}{4}$ ve $d = \frac{\alpha^2 - 4\beta}{16b}$ değerleri ikinci eşitlikten elde edilen $4c\left(b^2 + d^2\right) = \frac{4\alpha\beta - \alpha^3}{8}$ ifadesinde yerleştirilirse,

$$4\frac{\alpha}{4}\left(b^2 + \left(\frac{\alpha^2 - 4\beta}{16b}\right)^2\right) = \frac{4\alpha\beta - \alpha^3}{8}$$

$$b^4 - \left(\frac{4\beta - \alpha^2}{8}\right)b^2 + \frac{\alpha^4 - 8\alpha^2\beta + 16\beta^2}{256} = 0$$

buradan da

$$b=\frac{1}{4}\sqrt{4\beta-\alpha^2}$$

olarak bulunur. Bu değer, $d=\dfrac{\alpha^2-4\beta}{16b}$ ifadesinde yerine yazıldığında $b=\dfrac{\alpha^2-4\beta}{16d}$ olur. Bulunan b ve c değerleri ikinci eşitlikte yerine yazıldığında benzer işlemler sonucu

$$d=-\frac{1}{4}\sqrt{4\beta-\alpha^2}$$

olarak bulunur. Bulunan b,c,d değerleri dairesel matriste yerlerine yazılırsa,

$$C=\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4}\sqrt{4\beta-\alpha^2} & -\frac{\alpha}{4} & -\frac{1}{4}\sqrt{4\beta-\alpha^2} \\ -\frac{1}{4}\sqrt{4\beta-\alpha^2} & 0 & \frac{1}{4}\sqrt{4\beta-\alpha^2} & -\frac{\alpha}{4} \\ -\frac{\alpha}{4} & -\frac{1}{4}\sqrt{4\beta-\alpha^2} & 0 & \frac{1}{4}\sqrt{4\beta-\alpha^2} \\ \frac{1}{4}\sqrt{4\beta-\alpha^2} & -\frac{\alpha}{4} & -\frac{1}{4}\sqrt{4\beta-\alpha^2} & 0 \end{pmatrix}$$

olur. Dairesel matrisin özdeğer polinomu $q(t)=bt+ct^2+dt^3$ şeklindedir. Bulunan bu özdeğer polinomunda birimin dördüncü dereceden kökleri yazılarak dairesel matrisin özdeğerleri bulunur. Buna göre

$$q(1)=b+c+d=\frac{1}{4}\sqrt{4\beta-\alpha^2}+\frac{\alpha}{4}-\frac{1}{4}\sqrt{4\beta-\alpha^2}=\frac{\alpha}{4}$$

$$q(-1)=-b+c-d=-\frac{1}{4}\sqrt{4\beta-\alpha^2}+\frac{\alpha}{4}+\frac{1}{4}\sqrt{4\beta-\alpha^2}=\frac{\alpha}{4}$$

$$q(i)=bi-c-di=\frac{i}{4}\sqrt{4\beta-\alpha^2}-\frac{\alpha}{4}+\frac{i}{4}\sqrt{4\beta-\alpha^2}=\frac{i}{2}\sqrt{4\beta-\alpha^2}-\frac{\alpha}{4}$$

$$q(-i)=-bi-c+di=-\frac{i}{4}\sqrt{4\beta-\alpha^2}-\frac{\alpha}{4}-\frac{i}{4}\sqrt{4\beta-\alpha^2}=-\frac{i}{2}\sqrt{4\beta-\alpha^2}-\frac{\alpha}{4}$$

olur. Başlangıçta verilen denklemin kökleri ise $x = x - \dfrac{\alpha}{4}$ değişken değişimi yapılarak bulunur. Böylece

$$x_1 = q(1) - \frac{\alpha}{4} = 0$$
$$x_2 = q(-1) - \frac{\alpha}{4} = 0$$
$$x_3 = q(i) - \frac{\alpha}{4} = \frac{i}{2}\sqrt{4\beta - \alpha^2} - \frac{\alpha}{2}$$
$$x_4 = q(-i) - \frac{\alpha}{4} = -\frac{i}{2}\sqrt{4\beta - \alpha^2} - \frac{\alpha}{2}$$

olur. Polinomun iki kökü sıfırdır. Diğer iki kökü ise $4\beta - \alpha^2 \rangle 0$ olarak seçilirse birbirinin eşleniği olan karmaşık iki köktür. $4\beta - \alpha^2 \langle 0$ olarak seçilirse ikisi de reel olan köklerdir.

5.3.6. $P(x) = x^4 + \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x$ şeklindeki polinom türü denklemlerin kökleri

4x4 mertebeli genel bir dairesel matris $C = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ d & a & b & c \\ c & d & a & b \\ b & c & d & a \end{pmatrix}_{4x4}$ olsun. $P(x)$ polinomunu $x^4 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$ formuna getirmek için, $x = x - \dfrac{\alpha}{4}$ değişken değişimi yapılsın. Böylece

$$\left(x - \frac{\alpha}{4}\right)^4 + \alpha\left(x - \frac{\alpha}{4}\right)^3 + \beta\left(x - \frac{\alpha}{4}\right)^2 + \gamma\left(x - \frac{\alpha}{4}\right)$$
$$= x^4 + \left(\frac{8\beta - 3\alpha^2}{8}\right)x^2 + \left(\frac{\alpha^3 + 8\gamma - 4\alpha\beta}{8}\right)x + \left(\frac{-3\alpha^4 + 16\alpha^2\beta - 64\alpha\gamma}{256}\right)$$

elde edilir. Bulunan bu polinomun kökler toplamı sıfırdır. Polinomun kökler toplamı ile C dairesel matrisinin özdeğerleri toplamının eşit olması gerektiğinden,

$iz(C)=0$ olmalıdır. Bunun için C dairesel matrisinin ilk elemanı $a=0$ kabul edilir. Böylece C dairesel matrisinin karakteristik denklemi

$$\det(xI-C) \quad x^4 = -\left(4bd+2c^2\right)x^2-4c\left(b^2+d^2\right)x+c^4-b^4-d^4-4bdc^2+2b^2d^2=0$$

halini alır. Karakteristik polinomla, verilen dördüncü dereceden polinomun katsayıları eşitlenirse,

$$\begin{aligned} & x^4-\left(4bd+2c^2\right)x^2-4c\left(b^2+d^2\right)x+c^4-b^4-d^4-4bdc^2+2b^2d^2 \\ & =x^4+\left(\frac{8\beta-3\alpha^2}{8}\right)x^2+\left(\frac{\alpha^3+8\gamma-4\alpha\beta}{8}\right)x+\left(\frac{-3\alpha^4+16\alpha^2\beta-64\alpha\gamma}{256}\right) \end{aligned}$$

olur. Aynı dereceli terimlerin katsayıları eşit olacağından,

$$\begin{aligned} & -\left(4bd+2c^2\right)=\frac{8\beta-3\alpha^2}{8} \\ & -4c\left(b^2+d^2\right)=\frac{\alpha^3+8\gamma-4\alpha\beta}{8} \\ & c^4-b^4-d^4-4bdc^2+2b^2d^2=\frac{-3\alpha^4+16\alpha^2\beta-64\alpha\gamma}{256} \end{aligned}$$

denklemleri elde edilir. Üçüncü denklem düzenlenirse,

$$c^4-\left(b^2+d^2\right)^2+4\left(bd\right)^2-4bdc^2=\frac{-3\alpha^4+16\alpha^2\beta-64\alpha\gamma}{256}$$

halini alır. Birinci denklemden elde edilen $bd=\dfrac{3\alpha^2-8\beta-16c^2}{32}$ ile ikinci denklemden elde edilen, $b^2+d^2 \quad -\dfrac{\alpha^3+8\gamma-4\alpha\beta}{32c}$ değerleri düzenlenen üçüncü eşitlikte yerlerine yazılırsa,

$$c^4-\left(-\frac{\alpha^3+8\gamma-4\alpha\beta}{32c}\right)^2+4\left(\frac{3\alpha^2-8\beta-16c^2}{32}\right)^2-4\left(\frac{3\alpha^2-8\beta-16c^2}{32}\right)c^2=\frac{-3\alpha^4+16\alpha^2\beta-64\alpha\gamma}{256}$$

olur. Bu eşitlikte gerekli işlemler yapılırsa,

$$4c^4-\frac{\alpha^6+64\gamma^2+16\alpha^2\beta^2+16\alpha^3\gamma-8\alpha^4\beta-64\alpha\beta\gamma}{1024c^2}+\frac{12\alpha^4+64\beta^2-64\alpha^2\beta+64\alpha\gamma}{256}$$
$$+\left(\frac{8\beta-3\alpha^2}{4}\right)c^2=0$$

elde edilir. Buradan da

$$4c^6+\left(\frac{8\beta-3\alpha^2}{4}\right)c^4+\left(\frac{12\alpha^4+64\beta^2-64\alpha^2\beta+64\alpha\gamma-256\delta}{256}\right)c^2$$
$$-\left(\frac{\alpha^6+64\gamma^2+16\alpha^2\beta^2+16\alpha^3\gamma-8\alpha^4\beta-64\alpha\beta\gamma}{1024}\right)=0$$

olur. Bu denklem yardımıyla,

$$c=-\frac{\alpha}{12}$$
$$+\frac{\left(1+i\sqrt{3}\right)\left(-1024\alpha^2+3072\beta\right)}{6144.2^{\frac{2}{3}}\left(2\alpha^3-9\alpha\beta+27\gamma+3\sqrt{3}\sqrt{-\alpha^2\beta^2+4\beta^3+4\alpha^3\gamma-18\alpha\beta\gamma+27\gamma^2}\right)^{\frac{1}{3}}}$$
$$-\frac{\left(1-i\sqrt{3}\right)\left(2\alpha^3-9\alpha\beta+27\gamma+3\sqrt{3}\sqrt{-\alpha^2\beta^2+4\beta^3+4\alpha^3\gamma-18\alpha\beta\gamma+27\gamma^2}\right)^{\frac{1}{3}}}{12.2^{\frac{1}{3}}}$$

olarak bulunur.

Birinci eşitlikten çekilen, $d=\dfrac{3\alpha^2-8\beta-16c^2}{32b}$ değeri; ikinci eşitlikte yerine yazılırsa, $b^2+\left(\dfrac{3\alpha^2-8\beta-16c^2}{32b}\right)^2=-\dfrac{\alpha^3+8\gamma-4\alpha\beta}{32c}$ olur. Bu ifadenin düzenlenmesiyle,

$$b^4 + \left(\frac{\alpha^3 + 8\gamma - 4\alpha\beta}{32c} \right) b^2$$
$$+ \frac{9\alpha^4 + 64\beta^2 + 256c^4 - 48\alpha^2\beta - 96\alpha^2 c^2 + 256\beta c^2}{1024} = 0$$

elde edilir. Buradan da

$$b = -\sqrt{\frac{-\alpha^3 + 4\alpha\beta - 8\gamma}{64c} - \frac{\sqrt{-4096c\left(256c^5 - 96c^3\alpha^2 + 9c\alpha^4 + 256c^3\beta - 48\alpha^2\beta + 64c\beta^2\right) + \left(32\alpha^3 - 128\alpha\beta + 256\gamma\right)^2}}{2048c}}$$

olarak bulunur. Benzer şekilde birinci denklemden çekilen, $b = \dfrac{3\alpha^2 - 8\beta - 16c^2}{32d}$

değerinin ikinci denklemde yerleştirilmesiyle de

$$d^2 + \left(\frac{3\alpha^2 - 8\beta - 16c^2}{32d} \right)^2 - \frac{\alpha^3 + 8\gamma - 4\alpha\beta}{32c}$$

olur. Bu denklemin düzenlenmesiyle,

$$d^2 + \frac{9\alpha^4 + 64\beta^2 + 256c^4 - 48\alpha^2\beta - 96\alpha^2 c^2 + 256\beta c^2}{1024d^2} + \frac{\alpha^3 + 8\gamma - 4\alpha\beta}{32} = 0$$

ve buradan

$$d^4 + \left(\frac{\alpha^3 + 8\gamma - 4\alpha\beta}{32} \right) d^2$$
$$+ \frac{9\alpha^4 + 64\beta^2 + 256c^4 - 48\alpha^2\beta - 96\alpha^2 c^2 + 256\beta c^2}{1024} = 0$$

elde edilir. Bu denklem yardımıyla,

$$d = -\sqrt{\frac{-\alpha^3 + 4\alpha\beta - 8\gamma}{64c} + \frac{\sqrt{-4096c\left(256c^5 - 96c^3\alpha^2 + 9c\alpha^4 + 256c^3\beta - 48c\alpha^2\beta + 64c\beta^2\right) + \left(32\alpha^3 - 128\alpha\beta + 256\gamma\right)^2}}{2048c}}$$

olarak bulunur. Bulunan b, c, d değerlerin dairesel matriste yerine yazılmasıyla,

$$C = \begin{pmatrix} 0 & b & c & d \\ d & 0 & b & c \\ c & d & 0 & b \\ b & c & d & 0 \end{pmatrix}$$

olur. Dairesel matrisin özdeğer polinomu $q(t) = bt + ct^2 + dt^3$ şeklindedir. Bulunan bu özdeğer polinomunda birimin dördüncü dereceden kökleri yazılarak dairesel matrisin özdeğerleri bulunur. Buna göre

$$q(1) = b + c + d$$
$$q(-1) = -b + c - d$$
$$q(i) = bi - c - di$$
$$q(-i) = -bi - c + di$$

elde edilir. Başlangıçta verilen polinomun köklerini bulmak için ise

$$x_1 = q(1) - \frac{\alpha}{4}$$
$$x_2 = q(-1) - \frac{\alpha}{4}$$
$$x_3 = q(i) - \frac{\alpha}{4}$$
$$x_4 = q(-i) - \frac{\alpha}{4}$$

dönüşümleri kullanılmalıdır. Buradan elde edilecek olan köklerden biri sıfırdır.

5.3.7. $P(x) = x^4 + \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$ şeklindeki polinom türü denklemlerin kökleri

4x4 mertebeli genel bir dairesel matris $C = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ d & a & b & c \\ c & d & a & b \\ b & c & d & a \end{pmatrix}_{4x4}$ olsun. $P(x)$

polinomunu $x^4 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$ formuna getirmek için $x = x - \frac{\alpha}{4}$ değişken değişimi yapılsın. Böylece

$$\left(x - \frac{\alpha}{4}\right)^4 + \alpha\left(x - \frac{\alpha}{4}\right)^3 + \beta\left(x - \frac{\alpha}{4}\right)^2 + \gamma\left(x - \frac{\alpha}{4}\right) + \delta$$

$$= x^4 + \left(\frac{8\beta - 3\alpha^2}{8}\right)x^2 + \left(\frac{\alpha^3 + 8\gamma - 4\alpha\beta}{8}\right)x + \left(\frac{-3\alpha^4 + 16\alpha^2\beta - 64\alpha\gamma + 256\delta}{256}\right)$$

elde edilir. Bulunan bu polinomun kökler toplamı sıfırdır. Polinomun kökler toplamı ile C dairesel matrisinin özdeğerleri toplamının eşit olması gerektiğinden, $iz(C) = 0$ olmalıdır. Bunun için C dairesel matrisinin ilk elemanı $a = 0$ kabul edilir. Böylece C dairesel matrisinin karakteristik denklemi

$$\det(xI - C) = x^4 - \left(4bd + 2c^2\right)x^2 - 4c\left(b^2 + d^2\right)x + c^4 - b^4 - d^4 - 4bdc^2 + 2b^2d^2 = 0$$

halini alır. Karakteristik polinomla, verilen dördüncü dereceden polinomun katsayıları eşitlenirse,

$$x^4 - \left(4bd + 2c^2\right)x^2 - 4c\left(b^2 + d^2\right)x + c^4 - b^4 - d^4 - 4bdc^2 + 2b^2d^2$$

$$= x^4 + \left(\frac{8\beta - 3\alpha^2}{8}\right)x^2 + \left(\frac{\alpha^3 + 8\gamma - 4\alpha\beta}{8}\right)x + \left(\frac{-3\alpha^4 + 16\alpha^2\beta - 64\alpha\gamma + 256\delta}{256}\right)$$

olur. Aynı dereceli terimlerin katsayıları eşit olacağından,

$$-\left(4bd+2c^2\right)=\frac{8\beta-3\alpha^2}{8}$$

$$-4c\left(b^2+d^2\right)=\frac{\alpha^3+8\gamma-4\alpha\beta}{8}$$

$$c^4-b^4-d^4-4bdc^2+2b^2d^2=\frac{-3\alpha^4+16\alpha^2\beta-64\alpha\gamma+256\delta}{256}$$

denklemleri elde edilir. Üçüncü denklem düzenlenirse,

$$c^4-\left(b^2+d^2\right)^2+4\left(bd\right)^2-4bdc^2=\frac{-3\alpha^4+16\alpha^2\beta-64\alpha\gamma+256\delta}{256}$$

halini alır. Birinci denklemden elde edilen $bd=\frac{3\alpha^2-8\beta-16c^2}{32}$ ile ikinci denklemden elde edilen, $b^2+d^2=-\frac{\alpha^3+8\gamma-4\alpha\beta}{32c}$ değerleri düzenlenen üçüncü eşitlikte yerlerine yazılırsa,

$$c^4-\left(-\frac{\alpha^3+8\gamma-4\alpha\beta}{32c}\right)^2+4\left(\frac{3\alpha^2-8\beta-16c^2}{32}\right)^2-4\left(\frac{3\alpha^2-8\beta-16c^2}{32}\right)c^2=\frac{-3\alpha^4+16\alpha^2\beta-64\alpha\gamma+256\delta}{256}$$

elde edilir. Bu eşitlikte gerekli işlemler yapılırsa,

$$4c^4-\frac{\alpha^6+64\gamma^2+16\alpha^2\beta^2+16\alpha^3\gamma-8\alpha^4\beta-64\alpha\beta\gamma}{1024c^2}+\frac{12\alpha^4+64\beta^2-64\alpha^2\beta+64\alpha\gamma-256\delta}{256}+\left(\frac{8\beta-3\alpha^2}{4}\right)c^2=0$$

bulunur. Bu denklemin düzenlenmesiyle de

$$4c^6+\left(\frac{8\beta-3\alpha^2}{4}\right)c^4+\left(\frac{12\alpha^4+64\beta^2-64\alpha^2\beta+64\alpha\gamma-256\delta}{256}\right)c^2-\left(\frac{\alpha^6+64\gamma^2+16\alpha^2\beta^2+16\alpha^3\gamma-8\alpha^4\beta-64\alpha\beta\gamma}{1024}\right)=0$$

elde edilir. Bu denklem yardımıyla c değeri bulunur. Birinci eşitlikten çekilen, $d=\frac{3\alpha^2-8\beta-16c^2}{32b}$ değerinin ikinci eşitlikte yerine yazılmasıyla elde edilen,

$$b^4+\left(\frac{\alpha^3+8\gamma-4\alpha\beta}{32c}\right)b^2+\frac{9\alpha^4+64\beta^2+256c^4-48\alpha^2\beta-96\alpha^2c^2+256\beta c^2}{1024}=0$$

denkleminden bulunan b değeri ve benzer şekilde birinci denklemden çekilen,

$b = \dfrac{3\alpha^2 - 8\beta - 16c^2}{32d}$ değerinin ikinci denklemde yerleştirilmesiyle elde edilen

$$d^4 + \left(\frac{\alpha^3 + 8\gamma - 4\alpha\beta}{32} \right) d^2 + \frac{9\alpha^4 + 64\beta^2 + 256c^4 - 48\alpha^2\beta - 96\alpha^2 c^2 + 256\beta c^2}{1024} = 0$$

eşitliğinden bulunan d değeri dairesel matriste yerine yazılırsa,

$$C = \begin{pmatrix} 0 & b & c & d \\ d & 0 & b & c \\ c & d & 0 & b \\ b & c & d & 0 \end{pmatrix}$$

olur. Dairesel matrisin özdeğer polinomu $q(t) = bt + ct^2 + dt^3$ şeklindedir. Bulunan bu özdeğer polinomunda birimin dördüncü dereceden kökleri yazılarak dairesel matrisin özdeğerleri bulunur. Buna göre

$$q(1) = b + c + d$$
$$q(-1) = -b + c - d$$
$$q(i) = bi - c - di$$
$$q(-i) = -bi - c + di$$

değerleri elde edilir. Başlangıçta verilen polinomun köklerini bulmak için ise

$$x_1 = q(1) - \frac{\alpha}{4}$$
$$x_2 = q(-1) - \frac{\alpha}{4}$$
$$x_3 = q(i) - \frac{\alpha}{4}$$
$$x_4 = q(-i) - \frac{\alpha}{4}$$

dönüşümleri kullanılmalıdır.

BÖLÜM 6. SONUÇ

Polinom türü denklemlerin çözümü cebirin temel konusudur. Dairesel matris yöntemiyle, polinom türü denklemlerin köklerinin bulunması, polinomlar ile matrisler arasındaki bağlantıyı ortaya çıkarması bakımından önemlidir. Ancak bu yöntem kübik ve quartic denklemlerin çözümlerini bulmak için kullanılabilirken; quintic polinomların çözümlerinin bulunması için kullanılamamaktadır.

Bu çalışmada özellikle ikinci, üçüncü ve dördüncü dereceden polinom türü denklemlerin köklerinin dairesel matrislerden yararlanarak hesaplanışı anlatılmıştır. Çalışmada her tür denklem tipi ayrı ayrı incelenmiş, sonuçları ilgili bölümlerde sunulmuştur. Ayrıca bu hesaplama tekniği ile kökleri bulmamızı sağlayan bir bilgisayar programı geliştirilmiştir.

Yapılan literatür taramasında, beş ve daha yüksek dereceli polinom türü denklemlerin cebirsel yolla çözümü olanaksız olmakla birlikte; dairesel matris yöntemiyle en azından bazı kısıtlamalar altında bu tür denklemlerin çözülebileceğinin ip uçları görülmektedir. İleri düzeyde araştırma yapılması durumunda bu açık bir problem olarak karşımıza çıkacaktır.

KAYNAKLAR

[1] KALMAN, D., WHITE, J., Polinomial Equations and Circulant Matrices, Fortcoming Montly article, pp.821-840, November 2001.

[2] DAVIS, P., Circulant Matrices,Wiley, New York, 1979.

[3] WHITE, C.R., Definitive Solutions of General Quartic and Cubic Equations, Amer Math. Monthly, pp.285-287, 69(1962).

[3] htpp://math.american.edu/People/Calman/pdffiles/circulant .pdf.2009.

[4] ÇÖZER, Ö., Polinom Denklemleri, Matematik Dünyası, Kış 2003.

[5] htpp:// mathworld.wolfram.com/circulant matrix.html.2009.

[6] GÖZÜKIZIL, Ö.F., Lineer Cebir ,Değişim Yayınları. İstanbul 2000.

[7] htpp://www/easycalculation.com/2009.

EKLER

```
<html>
<head>
<title>
2-3-4. Dereceden Denklem Kökleri
</title>

<style type="text/css">
.resform{font-weight: bold; border: 1px #009bff solid; background-color: #bbc7dd;}
.main{background-color: #009bff;}
.cbor{border: 1px solid #aaeeff;}
.content{background-color: #eefaff;}
.inner{background-color: #bbc7dd;}
.innerc{background-color: #ffffff;}
table{font-size: 13px; font-family: verdana, arial, san-serif; }
   .style1
   {
      font-size: 16px;background-color: #eefaff;
   }
</style>

<script language="Javascript" >

function sifirla(dataform)
{
        dataform.x1Re.value = "";
        dataform.x1Im.value = "";
        dataform.x2Re.value = "";
        dataform.x2Im.value = "";
        dataform.x3Re.value = "";
        dataform.x3Im.value = "";
        dataform.x4Re.value = "";
        dataform.x4Im.value = "";
}

function hesapla(dataform)
{
        aaa = eval(dataform.aIn.value);
   bbb = eval(dataform.bIn.value);
   sifirla(dataform);
//var aaa = parseFloat(dataForm.aIn.value);
```

```
//bbb = parseFloat(dataForm.bIn.value);
//alert (aaa+" "+ bbb);

  if (aaa == "0"  && bbb == "0") { iki(dataform) };
  if (aaa == "0"  && bbb != "0") { uc(dataform) };
  if (aaa != "0") { dort(dataform)};
}
</script>

<script language="Javascript" >

function dort(dataForm)
{
        var a = parseFloat(dataForm.aIn.value);
        var b = parseFloat(dataForm.bIn.value);
        var c = parseFloat(dataForm.cIn.value);
        var d = parseFloat(dataForm.dIn.value);
        var e = parseFloat(dataForm.eIn.value);
        if (a != 1)
        {
                b /= a;
                c /= a;
                d /= a;
                e /= a;
        }


        var cb, cc, cd;
        var diskriminant, q, r, RRe, RIm, DRe, DIm, dum1, ERe, EIm, s, t, deg1, r13,
sqR, y1, z1Re, z1Im, z2Re;
        cb = -c;
        cc = -4*e + d*b;
        cd = -(b*b*e + d*d) + 4*c*e;
        q = (3*cc - (cb*cb))/9;
        r = -(27*cd) + cb*(9*cc - 2*(cb*cb));
        r /= 54;
        diskriminant = q*q*q + r*r;
        deg1 = (cb/3);
        if (diskriminant > 0)
        {

                s = r + Math.sqrt(diskriminant);
                s = ((s < 0) ? -Math.pow(-s, (1/3)) : Math.pow(s, (1/3)));
                t = r - Math.sqrt(diskriminant);
                t = ((t < 0) ? -Math.pow(-t, (1/3)) : Math.pow(t, (1/3)));
                y1 = -deg1 + s + t;
                }
                else
                {
```

```
                    if (diskriminant == 0)
                    {
                            r13 = ((r < 0) ? -Math.pow(-r,(1/3)) :
Math.pow(r,(1/3)));
                            y1 = -deg1 + 2*r13;
                    }
                    else
                    {
                            q = -q;
                            dum1 = q*q*q;
                            dum1 = Math.acos(r/Math.sqrt(dum1));
                            r13 = 2*Math.sqrt(q);
                            y1 = -deg1 + r13*Math.cos(dum1/3);
                    }
            }

            deg1 = b/4;
            sqR = -c + deg1*b + y1;
            RRe = RIm = DRe = DIm = ERe = EIm = z1Re = z1Im = z2Re = 0;
            if (sqR >= 0)
            {
                    if (sqR == 0)
                    {
                            dum1 = -(4*e) + y1*y1;
                            if (dum1 < 0)
                            z1Im = 2*Math.sqrt(-dum1);
                            else
                            {
                                    z1Re = 2*Math.sqrt(dum1);
                                    z2Re = -z1Re;
                            }
                    }
                    else
                    {
                    RRe = Math.sqrt(sqR);
                    z1Re = -(8*d + b*b*b)/4 + b*c;
                    z1Re /= RRe;
                    z2Re = -z1Re;
            }
    }
    else
    {
            RIm = Math.sqrt(-sqR);
            z1Im = -(8*d + b*b*b)/4 + b*c;
            z1Im /= RIm;
            z1Im = -z1Im;
    }
    z1Re += -(2*c + sqR) + 3*b*deg1;
    z2Re += -(2*c + sqR) + 3*b*deg1;
```

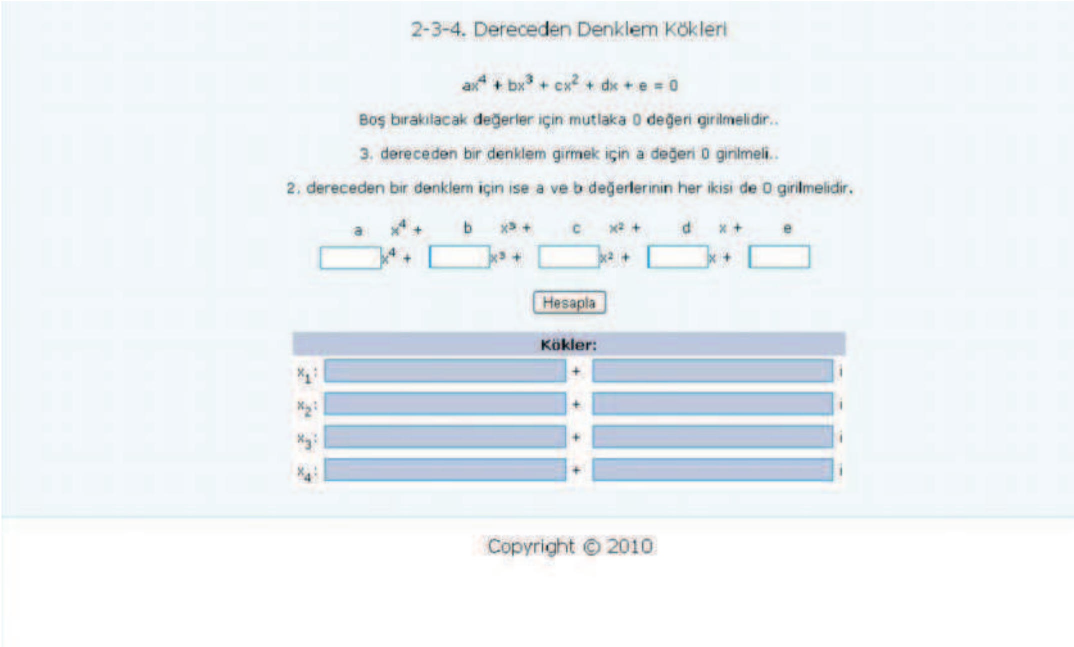
```
        if (z1Im == 0)
        {
                if (z1Re >= 0)
                {
                        DRe = Math.sqrt(z1Re);
                }
                else
                {
                        DIm = Math.sqrt(-z1Re);
                }
                if (z2Re >= 0)
                {
                        ERe = Math.sqrt(z2Re);
                }
                else
                {
                        EIm = Math.sqrt(-z2Re);
                }
        }
        else
        {
                r = Math.sqrt(z1Re*z1Re + z1Im*z1Im);
                r = Math.sqrt(r);
                dum1 = Math.atan2(z1Im, z1Re);
                dum1 /= 2;
                ERe = DRe = r*Math.cos(dum1);
                DIm = r*Math.sin(dum1);
                EIm = -DIm;
        }
        dataForm.x1Re.value = -deg1 + (RRe + DRe)/2;
        dataForm.x1Im.value = (RIm + DIm)/2;
        dataForm.x2Re.value = -(deg1 + DRe/2) + RRe/2;
        dataForm.x2Im.value = (-DIm + RIm)/2;
        dataForm.x3Re.value = -(deg1 + RRe/2) + ERe/2;
        dataForm.x3Im.value = (-RIm + EIm)/2;
        dataForm.x4Re.value = -(deg1 + (RRe + ERe)/2);
        dataForm.x4Im.value = -(RIm + EIm)/2;
        return;
}

function uc(dataForm)
{
        var a = parseFloat(dataForm.bIn.value);
        var b = parseFloat(dataForm.cIn.value);
        var c = parseFloat(dataForm.dIn.value);
        var d = parseFloat(dataForm.eIn.value);
```

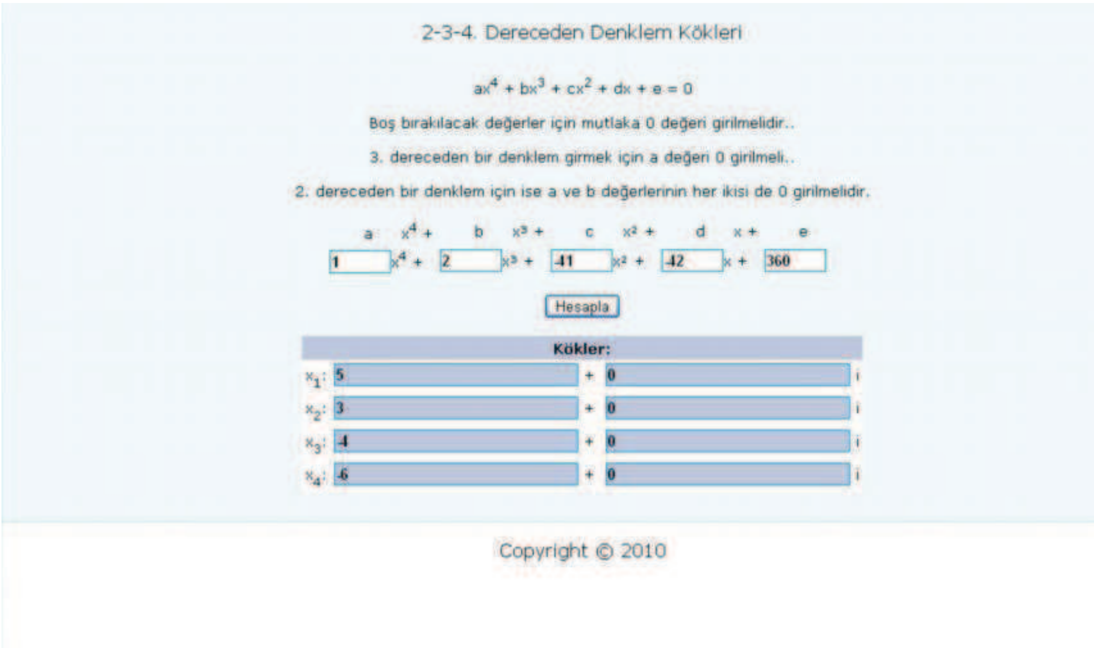
```
        b /= a;
        c /= a;
        d /= a;
        var disc, q, r, dum1, s, t, deg1, r13;
        q = (3*c - (b*b))/9;
        r = -(27*d) + b*(9*c - 2*(b*b));
        r /= 54;
        disc = q*q*q + r*r;
        dataForm.x1Im.value = 0;
        deg1 = (b/3);
        if (disc > 0) {
                s = r + Math.sqrt(disc);
                s = ((s < 0) ? -Math.pow(-s, (1/3)) : Math.pow(s, (1/3)));
                t = r - Math.sqrt(disc);
                t = ((t < 0) ? -Math.pow(-t, (1/3)) : Math.pow(t, (1/3)));
                dataForm.x1Re.value = -deg1 + s + t;
                deg1 += (s + t)/2;
                dataForm.x3Re.value = dataForm.x2Re.value = -deg1;
                deg1 = Math.sqrt(3)*(-t + s)/2;
                dataForm.x2Im.value = deg1;
                dataForm.x3Im.value = -deg1;
                return;
        }


        dataForm.x3Im.value = dataForm.x2Im.value = 0;
        if (disc == 0){
                r13 = ((r < 0) ? -Math.pow(-r,(1/3)) : Math.pow(r,(1/3)));
                dataForm.x1Re.value = -deg1 + 2*r13;
                dataForm.x3Re.value = dataForm.x2Re.value = -(r13 + deg1);
                return;
        }

        q = -q;
        dum1 = q*q*q;
        dum1 = Math.acos(r/Math.sqrt(dum1));
        r13 = 2*Math.sqrt(q);
        dataForm.x1Re.value = -deg1 + r13*Math.cos(dum1/3);
        dataForm.x2Re.value = -deg1 + r13*Math.cos((dum1 + 2*Math.PI)/3);
        dataForm.x3Re.value = -deg1 + r13*Math.cos((dum1 + 4*Math.PI)/3);
        return;
}

function iki(dataForm)
{
                dataForm.x1Re.value = ""
        dataForm.x2Re.value = ""
                dataForm.x1Im.value = ""
        dataForm.x2Im.value = ""
```

```
        var a = parseFloat(dataForm.cIn.value);
        var b = parseFloat(dataForm.dIn.value);
        var c = parseFloat(dataForm.eIn.value);
        delta = Math.pow(b, 2) - 4 * a * c

                if (delta >= 0)
                {
                        kokdelta = Math.sqrt(delta);
                        x1 = (-b + Math.sqrt(delta)) / 2*a;
              x2 = (-b - Math.sqrt(delta)) / 2*a;
                dataForm.x1Re.value = x1;
        dataForm.x2Re.value = x2;

                }
                else
                {
                        kokdelta = Math.sqrt(-delta);
                        re = (-b) / (2*a);
                        im = kokdelta / (2*a);

                dataForm.x1Re.value = re
        dataForm.x2Re.value = re
                dataForm.x1Im.value = im
        dataForm.x2Im.value = -im

                }

}

</script>


</head>



 <body class=innerc style="margin:0px; font-family: Verdana,Arial,serif,helvetica;">
<table width=100% cellpadding=0 cellspacing=0 class=cbor>
        <tr><td align=center class="style1">
      <br />
      2-3-4. Dereceden Denklem Kökleri<br />
      </td></tr>
        <tr><td align=center class=content>
                <div style="padding:12px">
        <br />
                ax<sup>4</sup> + bx<sup>3</sup> + cx<sup>2</sup> + dx + e = 0
                        <br />
        <br />
```

```
Boş bırakılacak değerler için mutlaka 0 değeri girlmelidir..<br />
<br />
3. dereceden bir denklem girmek için a değeri 0 girilmeli..<br />
<br />
2. dereceden bir denklem için ise a ve b değerlerinin her ikisi de 0
girilmelidir. <div><br>
            <form name=form1>
    <table border=0 colspan=4 cellspacing=0 cellpadding=3>
            <tr>

<td>      a   &nbs
p; x<sup>4</sup> +</td>

<td>      b   &nbs
p; x&sup3; +</td>

<td>      c   &nbs
p; x&sup2; +</td>

<td>      d   &nbs
p; x +</td>

<td>      e   &nbs
p; </td></tr>

    <tr>
    <td><input type=text name = "aIn" size=5 class='innerc
resform'>x<sup>4</sup> +</td>
    <td><input type=text name = "bIn" size=5 class='innerc
resform'>x&sup3; +</td>
    <td><input type=text name = "cIn" size=5 class='innerc
resform'>x&sup2; +</td>
    <td><input type=text name = "dIn" size=5 class='innerc resform'>x
+</td>
    <td><input type=text name = "eIn" size=5 class='innerc
resform'></td></tr>
</table>
<br>
    <input type = button name = button1 value = Hesapla onClick =
hesapla(this.form)><br>
<table border=0 class=innerc cellspacing=0 cellpadding=3>
    <tr align=center><td class=inner><b>Kökler:</b></td></tr><br>
    <tr><td>x<sub>1</sub>: <input type = "text" name = "x1Re"
size="25" readonly class=resform> +  <input type = "text" name = "x1Im"
size="25" class=resform> i </td></tr>
    <tr><td>x<sub>2</sub>: <input type = "text" name = "x2Re"
size="25" readonly class=resform> +  <input type = "text" name = "x2Im"
size="25" class=resform> i </td></tr>
```

```
                    <tr><td>x<sub>3</sub>: <input type = "text" name = "x3Re"
size="25" readonly class=resform> +  <input type = "text" name = "x3Im"
size="25" class=resform> i </td></tr>
                    <tr><td>x<sub>4</sub>: <input type = "text" name = "x4Re"
size="25" readonly class=resform> +  <input type = "text" name = "x4Im"
size="25" class=resform> i </td></tr>
          </table>
          </form>
</td></tr>
</table>

   <p>
      <center>
Copyright &#169;
<script>
var xright=new Date;
document.writeln(xright.getFullYear());
</script>
</center>
</p>

</body>
</html>
```


2-3-4. Dereceden Denklem Kökleri
ax4 + bx3 + cx2 + dx + e = 0
Boş bırakılacak değerler için mutlaka 0 değeri girilmelidir..
3. dereceden bir denklem girmek için a değeri 0 girilmeli..
2. dereceden bir denklem için ise a ve b değerlerinin her ikisi de 0 girilmelidir.
a x4 + b x3 + c x2 + d x + e
Hesapla
Kökler:
Copyright © 2010


2-3-4. Dereceden Denklem Kökleri
ax4 + bx3 + cx2 + dx + e = 0
Boş bırakılacak değerler için mutlaka 0 değeri girilmelidir..
3. dereceden bir denklem girmek için a değeri 0 girilmeli..
2. dereceden bir denklem için ise a ve b değerlerinin her ikisi de 0 girilmelidir.
a x4 + b x3 + c x2 + d x + e
1 x4 + 2 x3 + -41 x2 + -42 x + 360
Hesapla
Kökler:
x1: 5 + 0 i
x2: 3 + 0 i
x3: -4 + 0 i
x4: -6 + 0 i
Copyright © 2010

ÖZGEÇMİŞ

Pervin Aslantaş, 10.06.1982 de Ardahan'da doğdu. İlk ve orta eğitimini Sakarya ' da lise eğitiminin ilk üç yılını Sakarya Mithatpaşa Süper Lisesi' nde, son yılını Nevşehir 2000 Evler Süper Lisesi' nde tamamladı. 2001 yılında başladığı Uludağ Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nü 2005 yılında bölüm üçüncüsü olarak bitirdi. 2005 - 2006 eğitim öğretim yılında Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü' nde tezsiz yüksek lisans yaptı. 2005 - 2009 yılları arasında Final Dergisi Dershanesi' nde matematik öğretmenliği yaptı. Şu anda İstek Akademi Dershanesi' nde matematik öğretmeni olarak görev yapmaktadır.