T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

PARABOLİK DENKLEMLERİN GLOBAL ÇÖZÜMLERİNİN YOKLUĞU

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Ümran YARAN

Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK

Tez Danışmanı : Yrd. Doç. Dr. Metin YAMAN

Haziran 2011

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

PARABOLİK DENKLEMLERİN GLOBAL ÇÖZÜMLERİNİN YOKLUĞU

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Ümran YARAN

Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK

Bu tez 29 / 06 / 2011 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği ile kabul edilmiştir .

Doç.Dr.Barış Tamer TONGUÇ	Yrd.Doç.Dr.Metin YAMAN	Yrd.Doç.Dr.Şevket GÜR
Jüri Başkanı	Üye	Üye

TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanması ve çalışmaların yapılması sırasında her türlü destek ve yardımlarını esirgemeyen tez yöneticisi değerli hocam Yrd. Doç. Dr. Metin YAMAN ve tez hazırlama sürecinde bana gösterdikleri destek ve tahammülden ötürü aileme teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR

α	: Alfa
β	: Beta
ε	: Epsilon
γ	: Gama
Δ	: Laplasyon
∇	: Nabla operatörü
Φ	: Phi
Ψ	: Psi
τ	: Tau

ÖZET

Anahtar Kelimeler: Çözümün Patlaması, Parabolik Denklem

Bu çalışmada başlangıç sınır değer problemlerinin global çözümlerinin olmaması incelenmiştir. Parabolik denklemler hidrodinamiğin, termodinamiğin ve filitrasyon teorisinin çeşitli problemlerini ve daha fazlasını içermektedir.

Bu çalışmada parabolik denklemlerin global çözümlerinin olmaması veya çözümlerinin patlaması için gerekli koşullar incelenmiştir. Önce bir fonksiyon tanımlanmış ve bu fonksiyon üzerinden bir eşitsizlik ispatı yapılmıştır. Bu diferansiyel eşitsizliği kullanarak parabolik veya pseudo-parabolik denklemin $u(x,t)$ çözümlerinin zaman belli bir $t_1 > 0$ anına yaklaştığında sonsuza gittiği gösterilmiştir.

NONEXISTENCE OF GLOBAL SOLUTIONS TO PARABOLIC EQUATIONS

SUMMARY

Key Words: Blow up Solutions, Parabolic Equation

The study is investigated nonexistence of global solutions of the initial boundary value problems. Parabolic equations contain various problems of hydrodynamics, thermodynamics and more.

In the study, it is investigated nonexistence of global solutions of the parabolic equations or sufficient conditions for the blow up of solutions. Firstly a function is defined and an inequality is proven with the function. $u(x,t)$ solutions of the parabolic or pseudo-parabolic equation are demonstrated to go endless with use the differential inequality when the time approached an instat $t_1 > 0$.

BÖLÜM 1. GİRİŞ

Lineer olmayan hiperbolik ve parabolik denklemlerde başlangıç sınır değer problemlerinin global çözümlerinin var olmaması üzerine pek çok çalışma yapılmıştır. İlk çalışmalar 1940'lı ve 1950'li yıllarda patlama ve yanma teorisi, Semenov' un zincir reaksiyon teorisi ile ortaya çıkmıştır. 1960'lı yıllardan itibaren H. Fujita , V. K. Kalantarov, O. A. Ladyzhenskaya tarafından daha kapsamlı çalışmalar yapılmıştır.

Bu çalışmada M. Meyvacı'nın 2009 yılında " Journal of Mathematical Analysis and Applications" dergisinde yayınlanan makalesi ve G. A. Philippin ve V. Proytcheva'nın 2006 yılında "Mathematical Methods in The Applied Sciences" dergisinde yayınlanan makalesi ele alınmıştır. İspatı verilmeyen bazı notların ve sonuçların ispatları da yapılarak parabolik ve pseudo-parabolik denklemler için verilen sınır koşullarında zaman sonlu bir t anına yaklaşırken çözümlerin patlaması gösterilmiştir.

1. 1. Notasyonlar

Bu bölümde işaretler ve semboller tanıtılacaktır.

R^n , n boyutlu Öklit uzayıdır.

$x=\left(x_1,...,x_n\right)$ R^n de bir noktadır.

Ω R^n de sınırlı bir bölgedir.

$\partial\Omega$ Ω bölgesinin yeterli düzgün sınırıdır.

u_x ve u_t sembolleri, $\frac{du}{dx}$ ve $\frac{du}{dt}$ türevleridir.

$\left(u_x\right)^2=u_x^2$

$L_p\left(\Omega\right),\ p\geq\Omega$ üzerinde tüm ölçülebilir fonksiyonları içeren Banach uzayıdır ve

$$\|u\|_{p,\Omega} = \left(\int_{\Omega} |u|^p \, dx \right)^{1/p} \tag{1.1}$$

sonlu norm şeklindedir.

Genel olarak $L_2(\Omega)$ deki norm $\|.\|$ olarak kısaltılır ve skaler çarpım (,) şeklinde gösterilir.

$$\|u_x\|_2 = \left(\int_{\Omega} u_x^2 dx \right)^{1/2} \tag{1.2}$$

$$\|u\|_2^2 = \int_{\Omega} u^2 dx \tag{1.3}$$

$$\|\nabla u\|_2^2 = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx \tag{1.4}$$

Green Formülü **:** Kısmi integrasyonun genelleştirilmiş hali olan Green formülü $\frac{\partial v}{\partial n}$, n dış normaline göre türevi göstermek üzere

$$\int_{\Omega} u \Delta v dx = -\int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx + \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial n} dx$$

şeklindedir.

1.2. Temel Eşitsizlikler :

1) Cauchy Eşitsizliği,

a,b sabit reel sayıları için

$$a.b \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} \tag{1.5}$$

dir.

2) ε-Young Eşitsizliği,

a,b,ε pozitif reel sayılar ve $p,q > 1$ için $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olmak üzere

$$a.b \leq \frac{\varepsilon^p a^p}{p} + \frac{1}{q} \frac{b^q}{\varepsilon^q} \tag{1.6}$$

şeklindedir.

3) Hölder Eşitsizliği,

$1 \leq p,q \leq \infty$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ için $u \in L_p(\Omega), v \in L_q(\Omega)$ ise bölge üzerinde

$$\int_\Omega |u.v| \, dx \leq \|u\|_p \|v\|_q \tag{1.7}$$

dir. Özel olarak $p = q = 2$ alınırsa Cauchy-Schwarz eşitsizliği elde edilir.

4) Poincare- Friedrichs Eşitsizliği,

$$\int_\Omega u^2 dx \leq c_1(\Omega) \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx \tag{1.8}$$

Ω, R^n uzayında sınırlı bir bölgedir ve $c_1(\Omega)$ sabiti Ω bölgesine bağlıdır.

1. 3. Genelleştirilmiş Konkavlık Lemması

Lemma 1.1. (Ladyzhenskaya, Kalantarov Lemması)

Negatif olmayan bir $\Psi(t) \in C^2$ fonksiyonu $\gamma > 0,\ C_1, C_2 \geq 0$ reel sayıları için

$$\Psi''(t)\Psi(t) - (1+\gamma)\left[\Psi'(t)\right]^2 \geq -2C_1\, \Psi(t)\Psi'(t) - C_2\Psi^2(t) \tag{1.9}$$

eşitsizliğini sağlarsa

a)

$$\gamma_1 = -C_1 + \sqrt{C_1^2 + \gamma C_2} \tag{1.10}$$

$$\gamma_2 = -C_1 - \sqrt{C_1^2 + \gamma C_2} \tag{1.11}$$

olmak üzere

$$\Psi(0) > 0,\ \Psi'(0) > -\gamma_2 \gamma^{-1} \Psi(0),\ C_1 + C_2 > 0 \tag{1.12}$$

olması halinde t_2 sayısı

$$t_2 = \frac{1}{2\sqrt{C_1^2 + \gamma C_2}} \ln \frac{\gamma_1 \Psi(0) + \gamma\, \Psi'(0)}{\gamma_2 \Psi(0) + \gamma\, \Psi'(0)} \tag{1.13}$$

formülünden hesaplanmak üzere

$t \to t_1$ için $\Psi(t) \to \infty$

olacak biçimde bir $t_1 < t_2$ pozitif reel sayısı vardır.

b)

$\Psi(0) > 0,\ \Psi'(0) > 0$ ve $C_1 = C_2 = 0$ olması halinde t_2 sayısı

$$t_2 = \frac{\Psi(0)}{\gamma\, \Psi'(0)} \tag{1.14}$$

formülünden hesaplanmak üzere

$t \to t_1$ için $\Psi(t) \to +\infty$

olacak şekilde bir $t_1 < t_2$ pozitif reel sayısı vardır.

İspat.

a)

$\Phi(t)$ fonksiyonunu

$$\Phi(t) = \Psi^{-\gamma}(t)$$

olarak seçelim. O zaman $\Phi(t)$ fonksiyonunun birinci ve ikinci türevi

$$\Phi'(t) = -\gamma \frac{\Psi'(t)}{\Psi^{1+\gamma}(t)} \tag{1.15}$$

$$\Phi''(t) = -\gamma \frac{\Psi''(t)\Psi^{1+\gamma}(t) - \Psi'(t)(1+\gamma)\Psi^{\gamma}(t)\Psi'(t)}{\left(\Psi^{1+\gamma}(t)\right)^2}$$

$$\Phi''(t) = -\gamma \frac{\Psi''(t)\Psi(t) - (1+\gamma)\left(\Psi'(t)\right)^2}{\Psi^{2+\gamma}(t)} \tag{1.16}$$

olacaktır. (1.15) ve (1.16) türevleri (1.9) eşitsizliğinde yerine yazılırsa

$$\frac{\Psi^{2+\gamma}(t)\Phi''(t)}{-\gamma} \geq -2C_1\Psi(t)\frac{\Psi^{1+\gamma}(t)\Phi'(t)}{-\gamma} - C_2\Phi(t)\Psi^{2+\gamma} \tag{1.17}$$

olur. (1.17) eşitsizliğin her iki tarafı $\dfrac{-\gamma}{\Psi^{2+\gamma}}$ ile çarpılırsa

$$\Phi''(t) \leq -2C_1\Psi'(t) + \gamma C_2\Phi(t)$$

$$\Phi''(t) + 2C_1\Phi'(t) - \gamma C_2\Phi(t) = f(t) \leq 0 \tag{1.18}$$

ikinci basamaktan diferensiyel denklemi elde edilir. Bu ifadenin $C_1 + C_2 > 0$ olması halinde çözümü

$$r^2 + 2C_1 r - \gamma C_2 = 0$$

parametrik denkleminden

$$r_1 = \gamma_1 = -C_1 + \sqrt{C_1^2 + \gamma C_2} \tag{1.19}$$

$$r_2 = \gamma_2 = -C_1 - \sqrt{C_1^2 + \gamma C_2} \tag{1.20}$$

ve β_1, β_2 sayıları

$$\beta_1 + \beta_2 = \Phi(0) \tag{1.21}$$

$$\gamma_1\beta_1 + \gamma_2\beta_2 = \Phi'(0) \tag{1.22}$$

denklem sisteminin çözümü olmak üzere

$$\beta_1 + \beta_2 = \Psi^{-\gamma}(0)$$

$$\gamma_1\beta_1 + \gamma_2\beta_2 = -\gamma\frac{\Psi'(0)}{\Psi^{1+\gamma}(0)}$$

olarak

$$\beta_1 = -(\gamma_1 - \gamma_2)^{-1}\left[\gamma\Psi'(0) + \gamma_2\Psi(0)\right]\Psi^{-1-\gamma}(0) \tag{1.23}$$

$$\beta_2 = -(\gamma_1 - \gamma_2)^{-1}\left[\gamma\,\Psi'(0) + \gamma_1\Psi(0)\right]\Psi^{-1-\gamma}(0) \tag{1.24}$$

elde edilir. Buradan $\Phi(t)$

$$\Phi(t) = \beta_1 e^{\gamma_1 t} + \beta_2 e^{\gamma_2 t} + (\gamma_2 - \gamma_1)^{-1}\int_0^t f(\tau)\left[e^{\gamma_2(t-\tau)} - e^{\gamma_1(t-\tau)}\right]dt \tag{1.25}$$

şeklinde bulunur. (1.10), (1.11) ve (1.12) hipotezlerinden

$$\gamma_1 - \gamma_2 = -C_1 + \sqrt{C_1^2 + \gamma C_2} + C_1 + \sqrt{C_1^2 + \gamma C_2}$$

$$\gamma_1 - \gamma_2 = 2\sqrt{C_1^2 + \gamma C_2} > 0$$

ve

$$\Psi'(0) > -\gamma_2 \gamma^{-1} \Psi(0)$$

$$\gamma\, \Psi'(0) + \gamma_2 \Psi(0) > 0$$

olacağından , $\beta_1 < 0,\quad \gamma_1 > \gamma_2$ ve $\Psi(0) > 0 \quad \gamma_1 - \gamma_2 > 0$ olması sebebiyle

$$\gamma\, \Psi'(0) + \gamma_1 \Psi(0) > 0$$

ve

$$\beta_2 > 0$$

elde edilir. (1.25) eşitliğinin sağındaki integralli terimin integrandı pozitif, çarpanı $\gamma_2 - \gamma_1 > 0$ olduğundan

$$0 \le \Phi(t) \le \beta_1 e^{\gamma_1 t} + \beta_2 e^{\gamma_2 t} \tag{1.26}$$

eşitsizliği elde edilir. O halde

$$\beta_1 e^{\gamma_1 t} + \beta_2 e^{\gamma_2 t} = 0$$

eşitliğinden

$$\beta_1 e^{\gamma_1 t} = -\beta_2 e^{\gamma_2 t} \quad \Rightarrow \quad \frac{e^{\gamma_1 t}}{e^{\gamma_2 t}} = \frac{-\beta_2}{\beta_1} \quad \Rightarrow \quad \ln e^{(\gamma_1 - \gamma_2)t} = \ln\left(\frac{-\beta_2}{\beta_1}\right)$$

$$(\gamma_1 - \gamma_2)t = \ln\left(\frac{-\beta_2}{\beta_1}\right) \Rightarrow t_1 = \frac{1}{(\gamma_1 - \gamma_2)} \ln\left(\frac{-\beta_2}{\beta_1}\right) \tag{1.27}$$

şeklinde bir pozitif sonlu çözüm elde edilir.

$t \to t_1$ için $\Phi(t) \to 0$ olur.

Sonuç olarak $\Phi(t) = \Psi^{-\gamma}(t)$ eşitliğinden $\Psi(t) \to \infty$ olur.

Lemmanın ilk kısmının ispatı tamamlanır.

b)

$C_1 = 0$ ve $C_2 = 0$ olması halinde hipotez fonksiyonu $\gamma > 0,\ C_1 = C_2 = 0$ sayıları için (1.18) eşitliğinden $\Phi''(t) \le 0$ olur. İki kere integrasyonla

$$\Phi'(t) - \Phi'(0) \le 0,$$

$$\Phi(t) - \Phi'(0)t - \Phi(0) \le 0 \tag{1.28}$$

bulunur ki

$$0 \le \Phi(t) \le \Phi'(0)t + \Phi(0) \tag{1.29}$$

eşitsizlik zincirinden

$$t_1 = -\frac{\Phi(0)}{\Phi'(0)}$$

pozitif zamanında $t_1 \to t_2$ için $\Phi(t) \to 0$ olur ki $\Phi(t) = \Psi^{-\gamma}(t)$ olarak tanımlandığından ispatın (a) kısmında olduğu gibi

$t \to t_1$ için $\Psi(t) \to +\infty$

olur ve lemmanın ispatı tamamlanır.

BÖLÜM 2. ÇÖZÜMLERİN PATLAMASI

2. 1. Pseudo-parabolik Denklemin Çözümünün Patlaması Problemi

Bu bölümde bir pseudo-parabolik denklemin çözümlerinin sonlu zamanda sonsuza gideceği gösterilecektir. Bu tür problemlere çözümlerin patlaması problemi denir. Çözümlerin patlaması iki farklı şekilde gösterilecektir. İlk yöntem direkt yöntem, ikinci yöntem ise değişken değiştirme yöntemi şeklindedir.

Aşağıdaki başlangıç sınır değer problemi ele alınsın.

$$u_t - \Delta u_t - \Delta u - u^p u_{x_1} = |u|^{2m} u \qquad x \in \Omega, \quad t > 0 \tag{2.1}$$

$$u(x,0) = u_0(x) \qquad x \in \Omega \tag{2.2}$$

$$u(x,t) = 0 \qquad x \in \partial\Omega, \quad t \geq 0 \tag{2.3}$$

Burada $\Omega \in R^n$ yeteri kadar düzgün sınıra sahip sınırlı bir bölgedir. $p \geq 1$ verilen bir tamsayı, $m \geq 1$ verilen sayıdır.

Bu tür problemler hidrodinamik, termodinamik ve filitreleme teorisinde ortaya çıkmaktadırlar. Bu tür problemlerin çözümlerinin varlığı, tekliği ve düzgünlüğü [10] da çalışılmıştır.

Teorem 2.1.

$1 < p < m$ varsayılsın ve u_0 aşağıdaki şartı sağlasın

$$\|u_0\|_{2(m+1)}^{2(m+1)} > \|\nabla u_0\|^2 + \left[\|u_0\|^2 + \|\nabla u_0\|^2 + \frac{(m-p)2^{(m+1)/(m-p)}|\Omega|}{(p+1)(2m+1)}\right]\frac{\sqrt{8(p+1)}}{m(6p+5)-1}$$

$$\times\left[\sqrt{2(p+1)} + \sqrt{m(m+1)(6p+5)+2p+1-m}\right]$$

Bu durumda (2.1)-(2.3) sınır değer probleminin çözümü t sonlu zamanında patlar.

İspat.

(2.1) eşitliğinin her iki tarafı u ile çarpılır ve Ω bölgesinde integre edilirse

$$\int_\Omega uu_t dx - \int_\Omega u\Delta u_t dx - \int_\Omega u\Delta u dx - \int_\Omega uu^p u_{x_1} dx = \int_\Omega u|u|^{2m} udx$$

elde edilir. Green formülü kullanılarak

$$\int_\Omega \frac{1}{2}\frac{d}{dt}u^2 dx - \int_{\partial\Omega} u\frac{\partial u_t}{\partial n}dx + \int_\Omega \nabla u\nabla u_t dx - \int_{\partial\Omega} u\frac{\partial u}{\partial n}dx + \int_\Omega \nabla u\nabla u dx - \int_\Omega u^{p+1}u_{x_1} dx$$

$$= \int_\Omega |u|^{2m} u^2 dx$$

bulunur.

(2.3) sınır koşulundan dolayı $\int_{\partial\Omega} u\frac{\partial u_t}{\partial n}dx = 0$ ve $\int_{\partial\Omega} u\frac{\partial u}{\partial n}dx = 0$ dır.Buradan

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\Omega} u^2 dx + \int_{\Omega} \nabla u \nabla u_t dx + \|\nabla u\|^2 - \int_{\Omega} u^{p+1} u_{x_1} dx = \int_{\Omega} u^{2(m+1)} dx$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u\|^2 + \int_{\Omega} \nabla u \nabla u_t dx + \|\nabla u\|^2 - \frac{p+2}{p+2}\int_{\Omega} u^{p+1} u_{x_1} dx = \int_{\Omega} u^{2(m+1)} dx$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u\|^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u\|^2 + \|\nabla u\|^2 - \frac{1}{p+2}\int_{\Omega} \frac{d}{dx}\left(u^{p+2}\right) dx = \int_{\Omega} u^{2(m+1)} dx$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\|u\|^2 + \|\nabla u\|^2\right] + \|\nabla u\|^2 - \frac{1}{p+2}\int_{\partial\Omega} u^{(p+2)} dx = \|u\|_{2m+2}^{2m+2}$$

bulunur. (2.3) sınır koşulundan $\frac{1}{p+2}\int_{\partial\Omega} u^{(p+2)} dx = 0$ dır. Buradan

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\|u\|^2 + \|\nabla u\|^2\right] + \|\nabla u\|^2 = \|u\|_{2m+2}^{2m+2}$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\|u\|^2 + \|\nabla u\|^2\right] = \|u\|_{2m+2}^{2m+2} - \|\nabla u\|^2 \qquad (2.4)$$

eşitliği elde edilir.

(2.1) eşitliğinin her iki tarafı u_t ile çarpılır ve Ω üzerinde integre edilirse

$$\int_{\Omega} u_t u_t dx - \int_{\Omega} u_t \Delta u_t dx - \int_{\Omega} u_t \Delta u dx - \int_{\Omega} u_t u^p u_{x_1} dx = \int_{\Omega} u_t |u|^{2m} u dx$$

elde edilir. Green formülü kullanılarak

$$\|u_t\|^2 - \int_{\partial\Omega} u_t \frac{\partial u_t}{\partial n} dx + \int_{\Omega} \nabla u_t \nabla u_t dx - \int_{\partial\Omega} u_t \frac{\partial u}{\partial n} dx + \int_{\Omega} \nabla u_t \nabla u dx - \int_{\Omega} u_t u^p u_{x_1} dx = \int_{\Omega} u_t |u|^{2m+1} dx$$

$$\|u_t\|^2 + \|\nabla u_t\|^2 + \int_{\Omega} \nabla u_t \nabla u dx - \int_{\partial\Omega} u_t \frac{u^{p+1}}{p+1} dx + \int_{\Omega} u_{tx_1} \frac{u^{p+1}}{p+1} du = \int_{\Omega} u_t |u|^{2m+1} dx$$

$$\|u_t\|^2 + \|\nabla u_t\|^2 + \int_{\Omega} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \nabla u^2 dx + \frac{1}{p+1} \int_{\Omega} u^{p+1} u_{tx_1} du = \int_{\Omega} u_t |u|^{2m+1} dx$$

elde edilir. Burada (2.3) sınır koşulundan

$$\int_{\partial\Omega} u_t \frac{\partial u_t}{\partial n} dx = 0\,, \quad \int_{\partial\Omega} u_t \frac{\partial u}{\partial n} dx = 0 \quad , \quad \int_{\partial\Omega} u_t \frac{u^{p+1}}{p+1} dx = 0$$

dır.

$$\|u_t\|^2 + \|\nabla u_t\|^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla u\|^2 + \frac{1}{p+1} \left(u^{p+1}, u_{tx_1} \right) = \int_{\Omega} u_t |u|^{2m+1} dx$$

$$\|u_t\|^2 + \|\nabla u_t\|^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla u\|^2 + \frac{1}{p+1} \left(u^{p+1}, u_{tx_1} \right) = \frac{1}{2m+2} \left(\int_{\Omega} \frac{d}{dt} u^{2m+2} dx \right)$$

$$\|u_t\|^2 + \|\nabla u_t\|^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla u\|^2 + \frac{1}{p+1} \left(u^{p+1}, u_{tx_1} \right) = \frac{1}{2m+2} \frac{d}{dt} \left(\int_{\Omega} u^{2m+2} dx \right)$$

$$\|u_t\|^2 + \|\nabla u_t\|^2 = \frac{1}{2(m+1)} \frac{d}{dt} \|u\|_{2(m+1)}^{2(m+1)} - \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla u\|^2 - \frac{1}{p+1} \left(u^{p+1}, u_{tx_1} \right) \tag{2.5}$$

elde edilir.

$p<m$ varsayılsın. $\Psi(t)$ fonksiyonu

$$\Psi(t)=\|u(t)\|^2+\|\nabla u(t)\|^2+c_0 \tag{2.6}$$

şeklinde seçilsin. Burada c_0 negatif olmayan bir sabit sayıdır.

$$\Psi(t)=\int u(t)^2 dx+\int \nabla u(t)^2 dx+\int c_0 dx$$

fonksiyonunun türevi

$$\Psi'(t)=\frac{d}{dt}\int u^2 dx+\frac{d}{dt}\int \nabla u^2 dx$$

$$\Psi'(t)=2\int uu_t dx+2\int \nabla u \nabla u_t dx$$

$$\Psi'(t)=2(u,u_t)+2(\nabla u,\nabla u_t)$$

$$\Psi'(t)=2\left[(u,u_t)+(\nabla u,\nabla u_t)\right]$$

şeklinde bulunur. $\Psi'(t)$ fonksiyonunun karesi alınır ve Cauchy-Schwarz eşitsizliği uygulanırsa

$$\left[\Psi'(t)\right]^2=4\left[(u,u_t)+(\nabla u,\nabla u_t)\right]^2$$

$$\left[\Psi'(t)\right]^2\le 4\left(\|u\|^2+\|\nabla u\|^2\right)\left(\|u_t\|^2+\|\nabla u_t\|^2\right)$$

bulunur. (2.6) eşitliğinden elde edilen

$$\Psi(t) \geq \|u(t)\|^2 + \|\nabla u(t)\|^2$$

eşitsizliğinin uygulanmasıyla

$$\left[\Psi'(t)\right]^2 \leq 4\Psi(t)\left(\|u_t\|^2 + \|\nabla u_t\|^2\right)$$

$$\frac{1}{4\Psi(t)}\left[\Psi'(t)\right]^2 \leq \left(\|u_t\|^2 + \|\nabla u_t\|^2\right) \tag{2.7}$$

eşitsizliği elde edilir.

Diğer taraftan Cauchy-Schwarz ve ε-Young eşitsizlikleri kullanılarak

$$\left|\frac{d}{dt}\|\nabla u\|^2\right| = \left|2\int \nabla u \nabla u_t\, dx\right| \leq 2\int |\nabla u||\nabla u_t|\, dx \leq 2\left(\int |\nabla u_t|^2\, dx\right)^{1/2}\left(\int |\nabla u|^2\, dx\right)^{1/2}$$

$$\left|\frac{d}{dt}\|\nabla u\|^2\right| \leq 2\left(\frac{\varepsilon}{2}\int |\nabla u_t|^2\, dx + \frac{1}{2\varepsilon}\int |\nabla u|^2\, dx\right)$$

$$\left|\frac{d}{dt}\|\nabla u\|^2\right| \leq \varepsilon\|\nabla u_t\|^2 + \frac{1}{\varepsilon}\|\nabla u\|^2 \tag{2.8}$$

eşitsizliği elde edilir.

Benzer şekilde

$$\left|\left(u^{p+1}, u_{tx_1}\right)\right| = \int u^{p+1} u_{tx_1}\, dx \leq \left(\int u_{tx}{}^2 dx\right)^{1/2}\left(\int u^{2(p+1)}\right)^{1/2} \leq \frac{\varepsilon_1}{2}\|\nabla u_t\|^2 + \frac{1}{2\varepsilon_1}\|u\|_{2(p+1)}^{2(p+1)} \tag{2.9}$$

elde edilir.

$\frac{1}{\bar{p}} + \frac{1}{\bar{q}} = 1$ olmak üzere $a.b \leq \left(\int a^{\bar{p}}\right)^{1/\bar{p}}\left(\int b^{\bar{q}}\right)^{1/\bar{q}}$ eşitsizliğinde

$\bar{p}=\dfrac{m+1}{p+1}$ ve $\bar{q}=\dfrac{m+1}{m-p}$

olarak alınırsa

$$\|u\|_{2(p+1)}^{2(p+1)}=\int_\Omega 1.u^{2(p+1)}dx \le \left(\int_\Omega u^{2(p+1)\frac{m+1}{p+1}}dx\right)^{p+1/m+1} .\left(\int_\Omega 1^{\frac{m+1}{m-p}}dx\right)^{m-p/m+1}$$

elde edilir. Benzer şekilde $a.b \le \dfrac{(\varepsilon a)^{\bar{p}}}{\bar{p}}+\dfrac{b^{\bar{q}}}{\varepsilon^{\bar{q}}\,\bar{q}}$ eşitsizliği kullanılarak

$$\|u\|_{2(p+1)}^{2(p+1)} \le \frac{\varepsilon_2^{\frac{m+1}{p+1}}}{\dfrac{m+1}{p+1}}\left[\left(\int_\Omega u^{2(m+1)}dx\right)^{p+1/m+1}\right]^{m+1/p+1} + \frac{1}{\varepsilon_2^{\frac{m+1}{m-p}}\dfrac{m+1}{m-p}}\left[\left(\int_\Omega 1^{m-p}dx\right)^{m-p/m+1}\right]^{m+1/m-p}$$

$$\|u\|_{2(p+1)}^{2(p+1)} \le \frac{p+1}{m+1}\varepsilon_2^{\frac{m+1}{p+1}}\|u\|_{2(m+1)}^{2(m+1)}+\frac{m-p}{m+1}\varepsilon_2^{\frac{m+1}{p-m}}\int_\Omega 1\,dx$$

$$\|u\|_{2(p+1)}^{2(p+1)} \le \frac{p+1}{m+1}\varepsilon_2^{\frac{m+1}{p+1}}\|u\|_{2(m+1)}^{2(m+1)}+\frac{m-p}{m+1}\varepsilon_2^{\frac{m+1}{p-m}}|\Omega| \qquad (2.10)$$

eşitsizliği elde edilir. Burada ε, ε_1 , ε_2 daha sonra belirlenecek keyfi sabitlerdir.

(2.4) ve (2.5) eşitliklerinden

$$\|\nabla u_t\|^2+\|u_t\|^2=\frac{1}{2(m+1)}\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\|u\|^2+\|\nabla u\|^2\right)+\|\nabla u\|^2\right]-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u\|^2$$

$$-\frac{1}{p+1}\left(u^{p+1},u_{tx_1}\right)$$

$$\|\nabla u_t\|^2+\|u_t\|^2=\frac{1}{4(m+1)}\frac{d^2}{dt^2}\left[\left(\|u\|^2+\|\nabla u\|^2\right)\right]+\left(\frac{1}{2(m+1)}-\frac{1}{2}\right)\frac{d}{dt}\|\nabla u\|^2$$

$$-\frac{1}{p+1}\left(u^{p+1},u_{tx_1}\right)$$

olarak bulunur.

$\|u\|^2+\|\nabla u\|^2=\Psi(t)-c_0$ eşitliği kullanılarak

$$\|\nabla u_t\|^2+\|u_t\|^2=\frac{1}{4(m+1)}\frac{d^2}{dt^2}\Psi(t)-\frac{m}{2(m+1)}\frac{d}{dt}\|\nabla u\|^2-\frac{1}{p+1}\left(u^{p+1},u_{tx_1}\right)$$

yazılır. (2.8) ve (2.9) eşitsizlikleri kullanılarak

$$\|\nabla u_t\|^2+\|u_t\|^2\le\frac{1}{4(m+1)}\Psi''(t)+\frac{m}{2(m+1)}\left[\frac{1}{\varepsilon}\|\nabla u\|^2+\varepsilon\|\nabla u_t\|^2\right]$$

$$+\frac{1}{p+1}\left[\frac{1}{2\varepsilon_1}\|u\|_{2(p+1)}^{2(p+1)}+\frac{\varepsilon_1}{2}\|\nabla u_t\|^2\right]$$

$$\|\nabla u_t\|^2+\|u_t\|^2\le\frac{1}{4(m+1)}\Psi''(t)+\frac{m}{2\varepsilon(m+1)}\|\nabla u\|^2+\frac{1}{2\varepsilon_1(p+1)}\|u\|_{2(p+1)}^{2(p+1)}$$

$$+\left(\frac{m\varepsilon}{2(m+1)}+\frac{\varepsilon_1}{2(p+1)}\right)\|\nabla u_t\|^2 \qquad (2.11)$$

eşitsizliği elde edilir.

(2.10) eşitsizliği (2.11) eşitsizliğinde yerine yazılırsa

$$\|\nabla u_t\|^2+\|u_t\|^2 \le \frac{1}{4(m+1)}\Psi''(t)+\frac{m}{2\varepsilon(m+1)}\|\nabla u\|^2$$

$$+\frac{1}{2\varepsilon_1(p+1)}\left[\frac{p+1}{m+1}\varepsilon_2^{\frac{m+1}{p+1}}\|u\|_{2(m+1)}^{2(m+1)}+\frac{m-p}{m+1}\varepsilon_2^{\frac{m+1}{p-m}}|\Omega|\right]+\left(\frac{m\varepsilon}{2(m+1)}+\frac{\varepsilon_1}{2(p+1)}\right)\|\nabla u_t\|^2$$

$$\|\nabla u_t\|^2+\|u_t\|^2 \le \frac{1}{4(m+1)}\Psi''(t)+\frac{m}{2\varepsilon(m+1)}\|\nabla u\|^2+\frac{\varepsilon_2^{\frac{m+1}{p+1}}}{2\varepsilon_1(m+1)}\|u\|_{2(m+1)}^{2(m+1)}$$

$$+\frac{(m-p)\varepsilon_2^{\frac{m+1}{p-m}}}{2\varepsilon_1(m+1)(p+1)}|\Omega|+\left(\frac{m\varepsilon}{2(m+1)}+\frac{\varepsilon_1}{2(p+1)}\right)\|\nabla u_t\|^2$$

elde edilir. $c_1=\dfrac{(m-p)\varepsilon_2^{\frac{m+1}{p-m}}}{2\varepsilon_1(m+1)(p+1)}|\Omega|$ olarak alınırsa

$$\|\nabla u_t\|^2+\|u_t\|^2 \le \frac{1}{4(m+1)}\Psi''(t)+\frac{m}{2\varepsilon(m+1)}\|\nabla u\|^2+\frac{\varepsilon_2^{\frac{m+1}{p+1}}}{2\varepsilon_1(m+1)}\|u\|_{2(m+1)}^{2(m+1)}+c_1$$

$$+\left(\frac{m\varepsilon}{2(m+1)}+\frac{\varepsilon_1}{2(p+1)}\right)\|\nabla u_t\|^2 \tag{2.12}$$

eşitsizliği elde edilir.

(2.4) eşitliğinin her iki tarafı $\dfrac{\varepsilon_2^{\frac{m+1}{p+1}}}{2\varepsilon_1(m+1)}$ ile çarpılırsa

$$\frac{\varepsilon_2^{\frac{m+1}{p+1}}}{2\varepsilon_1(m+1)}\|u\|_{2m+2}^{2m+2}=\frac{\varepsilon_2^{\frac{m+1}{p+1}}}{4\varepsilon_1(m+1)}\Psi'(t)+\frac{\varepsilon_2^{\frac{m+1}{p+1}}}{2\varepsilon_1(m+1)}\|\nabla u\|^2 \tag{2.13}$$

bulunur .

(2.13) eşitliği (2.12) eşitsizliğinde yerine yazılırsa

$$\|\nabla u_t\|^2+\|u_t\|^2 \le \frac{1}{4(m+1)}\Psi''(t)+\frac{m}{2\varepsilon(m+1)}\|\nabla u\|^2+\frac{\varepsilon_2^{\frac{m+1}{p+1}}}{4\varepsilon_1(m+1)}\Psi'(t)$$

$$+\frac{\varepsilon_2^{\frac{m+1}{p+1}}}{2\varepsilon_1(m+1)}\|\nabla u\|^2+\left[\frac{m\varepsilon}{2(m+1)}+\frac{\varepsilon_1}{2(p+1)}\right]\|\nabla u_t\|^2+c_1$$

veya

$$\|\nabla u_t\|^2+\|u_t\|^2 \le \frac{1}{4(m+1)}\Psi''(t)+\left[\frac{m}{2\varepsilon(m+1)}+\frac{\varepsilon_2^{\frac{m+1}{p+1}}}{2\varepsilon_1(m+1)}\right]\|\nabla u\|^2+\frac{\varepsilon_2^{\frac{m+1}{p+1}}}{4\varepsilon_1(m+1)}\Psi'(t)$$

$$+\left[\frac{m\varepsilon}{2(m+1)}+\frac{\varepsilon_1}{2(p+1)}\right]\|\nabla u_t\|^2+c_1 \tag{2.14}$$

bulunur.

$\|\nabla u\|^2 \le \Psi(t)-c_0 \le \Psi(t)$ eşitsizliklerinin (2.14) eşitsizliğinde yerine yazılmasıyla

$$\|\nabla u_t\|^2+\|u_t\|^2 \le \frac{1}{4(m+1)}\Psi''(t)+\left[\frac{m}{2\varepsilon(m+1)}+\frac{\varepsilon_2^{\frac{m+1}{p+1}}}{2\varepsilon_1(m+1)}\right]\left(\Psi(t)-c_0\right)$$

$$+\frac{\varepsilon_2^{\frac{m+1}{p+1}}}{4\varepsilon_1(m+1)}\Psi'(t)+\left[\frac{m\varepsilon}{2(m+1)}+\frac{\varepsilon_1}{2(p+1)}\right]\|\nabla u_t\|^2+c_1$$

veya

$$\left\|\nabla u_t\right\|^2-\left[\frac{m\varepsilon}{2(m+1)}+\frac{\varepsilon_1}{2(p+1)}\right]\left\|\nabla u_t\right\|^2+\left\|u_t\right\|^2\le\frac{1}{4(m+1)}\Psi''(t)\;+\frac{\varepsilon_2^{\frac{m+1}{p+1}}}{4\varepsilon_1(m+1)}\Psi'(t)$$

$$+\left[\frac{m}{2\varepsilon(m+1)}+\frac{\varepsilon_2^{\frac{m+1}{p+1}}}{2\varepsilon_1(m+1)}\right]\Psi(t)\;+c_1-c_0\left[\frac{m}{2\varepsilon(m+1)}+\frac{\varepsilon_2^{\frac{m+1}{p+1}}}{2\varepsilon_1(m+1)}\right]$$

veya

$$\left[1-\frac{m\varepsilon}{2(m+1)}-\frac{\varepsilon_1}{2(p+1)}\right]\left\|\nabla u_t\right\|^2+\left\|u_t\right\|^2\le\frac{1}{4(m+1)}\Psi''(t)+\frac{\varepsilon_2^{\frac{m+1}{p+1}}}{4\varepsilon_1(m+1)}\Psi'(t)$$

$$+\left[\frac{m}{2\varepsilon(m+1)}+\frac{\varepsilon_2^{\frac{m+1}{p+1}}}{2\varepsilon_1(m+1)}\right]\Psi(t)+c_1-c_0\left[\frac{m}{2\varepsilon(m+1)}+\frac{\varepsilon_2^{\frac{m+1}{p+1}}}{2\varepsilon_1(m+1)}\right]$$

veya

$$\left[1-\frac{m\varepsilon}{2(m+1)}-\frac{\varepsilon_1}{2(p+1)}\right]\left(\left\|\nabla u_t\right\|^2+\left\|u_t\right\|^2\right)\le\frac{1}{4(m+1)}\Psi''(t)+\frac{\varepsilon_2^{\frac{m+1}{p+1}}}{4\varepsilon_1(m+1)}\Psi'(t)$$

$$+\left[\frac{m}{2\varepsilon(m+1)}+\frac{\varepsilon_2^{\frac{m+1}{p+1}}}{2\varepsilon_1(m+1)}\right]\Psi(t)\;+\;c_1-c_0\left[\frac{m}{2\varepsilon(m+1)}+\frac{\varepsilon_2^{\frac{m+1}{p+1}}}{2\varepsilon_1(m+1)}\right] \qquad (2.15)$$

elde edilir. (2.15) eşitsizliğinde

$$c_0=\frac{(m-p)}{(p+1)(m+1)}2^{\frac{m+1}{m-p}}|\Omega|,\quad \varepsilon=\frac{1}{2},\varepsilon_1=\frac{1}{4}\quad \text{ve}\quad \varepsilon_2=2^{-\frac{p+1}{m+1}}$$

seçilir ve (2.7) eşitsizliği kullanılırsa

$$\frac{1}{4\Psi(t)}\left[\Psi'(t)\right]^2\left[\frac{m(6p+5)+8p+7}{8(m+1)(p+1)}\right]\leq\frac{1}{4(m+1)}\Psi''(t)+\frac{1}{2(m+1)}\Psi'(t)$$

$$+\frac{m+1}{m+1}\Psi(t)$$

bulunur. Eşitsizliğin her iki tarafı $4(m+1)\Psi(t)$ ile çarpılırsa

$$\left[\Psi'(t)\right]^2\left[1+\frac{m(6p+5)-1}{8(p+1)}\right]\leq\Psi(t)\Psi''(t)+2\Psi(t)\Psi'(t)+4(m+1)\Psi(t)\Psi(t)$$

veya

$$-2\Psi(t)\Psi'(t)-4(m+1)\Psi(t)^2\leq\Psi(t)\Psi''(t)-\left[1+\frac{m(6p+5)-1}{8(p+1)}\right]\left[\Psi'(t)\right]^2$$

elde edilir.

Lemma 1.1' de $\alpha=\dfrac{m(6p+5)-1}{8(p+1)}>0$, $C_1=1$, $C_2=4(m+1)$ seçilirse lemmanın şartı sağlanmış olur.

Sonuçta $t\to t_1$ için

$$\Psi(t)=\|u\|^2+\|\nabla u\|^2$$

sonsuza gider. Yani

$$\lim_{t\to t_1^-}\|u\|=+\infty$$

dir. Bu da çözümün sonlu zamanda patladığını ifade eder.

Şimdide aynı problemi aşağıda

$u(t) = e^{-t}v(t)$

dönüşümü altında inceleyelim.

Teorem 2.2.

$p = m,\ m \geq 1$ varsayılsın. u_0 aşağıdaki

$$\|u_0\|_{2(m+1)}^{2(m+1)} > \left(1 + \frac{1}{m^2}\right)\|u_0\|^2 + \left(2 + \frac{1}{m^2}\right)\|\nabla u_0\|^2$$

şartını sağlayan başlangıç fonksiyonu olsun. Bu durumda (2.1)-(2.3) başlangıç sınır değer probleminin çözümü sonlu zamanda patlar.

İspat.

$u(x,t) = e^{-t}v(x,t)$

dönüşümü yapılsın.

$ue^t = v$, $u_t e^t + ue^t = v_t$, $u_t = -e^{-t}v + e^{-t}v_t$, $\nabla u = e^{-t}\nabla v$, $\Delta u = e^{-t}\Delta v$,
$\Delta u_t = e^{-t}\Delta v_t + \Delta v e^{-t}$

eşitliklerinden faydalanarak (2.1)-(2.3) sınır değer problemi

$$e^{-t}v_t - e^{-t}\Delta v_t - e^{-t}v - e^{-mt}v^m e^{-t}v_{x_1} = e^{-2mt}|v|^{2m} e^{-t}v$$

şeklinde yazılır.

Yukarıdaki eşitliğinin her iki tarafı e^t ile çarpılırsa

$$v_t - \Delta v_t - v - e^{-mt} v^m v_{x_1} = e^{-2mt} |v|^{2m} v \qquad x \in \Omega \ , \ t > 0 \tag{2.16}$$

$$v(x,0) = v_0(x) \qquad x \in \Omega \tag{2.17}$$

$$v(x,t) = 0 \qquad x \in \partial\Omega \ , \ t \geq 0 \tag{2.18}$$

başlangıç sınır değer problemi elde edilir.

(2.16) denkleminin her iki tarafı v ile çarpılır ve Ω üzerinde integre edilirse

$$\int_\Omega v v_t dx - \int_\Omega v \Delta v_t dx - \int_\Omega v v dx - \int_\Omega v e^{-mt} v^m v_{x_1} dx = \int_\Omega v e^{-2mt} |v|^{2m} v dx$$

elde edilir. Green formülü kullanılarak

$$\int_\Omega \frac{1}{2}\frac{d}{dt} v^2 dx - \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial v_t}{\partial n} dx + \int_\Omega \nabla v \nabla v_t dx - \int_\Omega v^2 dx - \frac{(m+2)}{(m+2)} \int_\Omega e^{-mt} v^{m+1} v_{x_1} dx$$

$$= \int_\Omega |v|^{2m+2} e^{-2mt} dx$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega v^2 dx - \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial v_t}{\partial n} dx + \int_\Omega \frac{1}{2}\frac{d}{dt} \nabla v^2 dx - \|v\|^2 - \frac{1}{(m+2)} e^{-mt} \int_\Omega \frac{d}{dx} v^{m+2} dx$$

$$= e^{-2mt} \int_\Omega |v|^{2m+2} dx$$

elde edilir. (2.18) sınır koşulu dikkate alınırsa

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\|v\|^2+\|\nabla v\|^2\right]=\|v\|^2+e^{-2mt}\|v\|_{2m+2}^{2m+2} \tag{2.19}$$

bulunur.

(2.16) denkleminin her iki tarafı v_t ile çarpılır ve Ω üzerinde integre edilirse

$$\int_\Omega v_t v_t dx-\int_\Omega v_t\Delta v_t dx-\int_\Omega v_t v dx-\int_\Omega v_t e^{-mt}v^m v_{x_1}dx=\int_\Omega v_t e^{-2mt}|v|^{2m}vdx$$

elde edilir. Green formülü kullanılarak

$$\int_\Omega v_t^{\,2}dx-\int_{\partial\Omega} v_t\frac{\partial v_t}{\partial n}dx+\int_\Omega \nabla v_t\nabla v_t dx-\int_\Omega \frac{1}{2}\frac{d}{dt}v^2dx-e^{-mt}\int_{\partial\Omega} v_t\frac{v^{m+1}}{m+1}dx+\frac{e^{-mt}}{m+1}\int_\Omega v_{tx_1}v^{m+1}dx$$

$$=e^{-2mt}\int_\Omega v_t|v|^{2m+1}dx$$

$$\|v_t\|^2+\|\nabla v_t\|^2-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|v\|^2+\frac{e^{-mt}}{m+1}\int_\Omega v_{tx_1}v^{m+1}dx=\frac{e^{-2mt}}{2m+2}\int_\Omega\frac{d}{dt}|v|^{2m+2}dx$$

$$\|v_t\|^2+\|\nabla v_t\|^2-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|v\|^2+\frac{e^{-mt}}{m+1}\left(v^{m+1},v_{tx_1}\right)=\frac{e^{-2mt}}{2m+2}\frac{d}{dt}\int_\Omega|v|^{2m+2}dx$$

$$\|v_t\|^2+\|\nabla v_t\|^2=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|v\|^2+\frac{e^{-2mt}}{2m+2}\frac{d}{dt}\|v\|_{2m+2}^{2m+2}-\frac{e^{-mt}}{m+1}\left(v^{m+1},v_{tx_1}\right) \tag{2.20}$$

elde edilir. (2.18) sınır koşulu gereği

$$e^{-mt}\int_{\partial\Omega} v_t \frac{v^{m+1}}{m+1}dx = 0 \quad \text{ve} \quad \int_{\partial\Omega} v_t \nabla v_t dx = 0$$

dır.

$\Phi(t)$ fonksiyonu

$$\Phi(t) = \|v\|^2 + \|\nabla v\|^2$$

$$\Phi(t) = \int_{\Omega} v^2 dx + \int_{\Omega} \nabla v^2 dx$$

olsun. $\Phi(t)$ fonksiyonunun birinci türevi

$$\Phi'(t) = \frac{d}{dt}\int_{\Omega} v^2 dx + \frac{d}{dt}\int_{\Omega} \nabla v^2 dx = 2\int_{\Omega} v v_t dx + 2\int_{\Omega} \nabla v \nabla v_t dx$$

$$\Phi'(t) = 2\left[(v, v_t) + (\nabla v, \nabla v_t)\right]$$

elde edilir. $\Phi'(t)$ fonksiyonunun karesi alınır ve Cauchy-Schwarz eşitsizliği kullanılırsa

$$\left[\Phi'(t)\right]^2 = 4\left[(v, v_t) + (\nabla v, \nabla v_t)\right]^2 \leq 4\left(\|v\|^2 + \|\nabla v\|^2\right)\left(\|v_t\|^2 + \|\nabla v_t\|^2\right)$$

$$\left[\Phi'(t)\right]^2 \leq 4\Phi(t)\left[\|v_t\|^2 + \|\nabla v_t\|^2\right] \tag{2.21}$$

eşitsizliği elde edilir.

Cauchy-Schwarz eşitsizliğinden yararlanılarak

$$\left|\frac{d}{dt}\|v(t)\|^2\right| = \left|\frac{d}{dt}\int v^2 dx\right| = \left|2\int v v_t dx\right| \le 2\left(\int |v|^2\, dx\right)^{1/2}\left(\int |v_t|^2\, dx\right)^{1/2}$$

$$\left|\frac{d}{dt}\|v(t)\|^2\right| \le \left[\left(\int |v|^2\, dx\right)^{1/2}\right]^2 + \left[\left(\int |v_t|^2\, dx\right)^{1/2}\right]^2$$

$$\left|\frac{d}{dt}\|v(t)\|^2\right| \le \int |v|^2\, dx + \int |v_t|^2\, dx = \|v\|^2 + \|v_t\|^2 \qquad (2.22)$$

eşitsizliği elde edilir.

$t \ge 0$ ve $\varepsilon(t)$ t'ye bağlı bir fonksiyon olmak üzere

$$\left|\left(v^{m+1}, v_{tx_1}\right)\right| = \int v^{m+1} v_{tx_1}\, dx \le \left(\int v^{2m+2} dx\right)^{1/2}\left(\int v_{tx_1}{}^2 dx\right)^{1/2} \le \frac{\varepsilon(t)}{2}\|\nabla v_t\|^2$$

$$+\frac{1}{2\varepsilon(t)}\|v\|_{2(m+1)}^{2(m+1)} \qquad (2.23)$$

olarak bulunur.

(2.19) eşitliği (2.20) eşitliğinde yerine yazılır ise

$$\|v_t\|^2 + \|\nabla v_t\|^2 = \frac{e^{-2mt}}{2m+2}\frac{d}{dt}\left[\frac{e^{2mt}}{2}\frac{d}{dt}\left(\|v\|^2 + \|\nabla v\|^2\right) - e^{2mt}\|v\|^2\right] + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|v\|^2$$

$$-\frac{e^{-mt}}{m+1}\left(v^{m+1}, v_{tx_1}\right)$$

$$\|v_t\|^2+\|\nabla v_t\|^2=\frac{e^{-2mt}}{4m+4}2me^{2mt}\Phi'(t)+\frac{e^{-2mt}}{2m+2}\frac{e^{2mt}}{2}\frac{d^2}{dt^2}\Phi(t)-\frac{e^{-2mt}}{2m+2}2me^{2mt}\|v\|^2$$

$$-\frac{e^{-2mt}}{2m+2}e^{2mt}\frac{d}{dt}\|v\|^2+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|v\|^2-\frac{e^{-mt}}{m+1}\left(v^{m+1},v_{tx_1}\right)$$

$$\|v_t\|^2+\|\nabla v_t\|^2=\frac{m}{2m+2}\Phi'(t)+\frac{1}{4m+4}\Phi''(t)-\frac{m}{m+1}\|v\|^2-\frac{1}{2m+2}\frac{d}{dt}\|v\|^2+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|v\|^2$$

$$-\frac{e^{-mt}}{m+1}\left(v^{m+1},v_{tx_1}\right)$$

$$\|v_t\|^2+\|\nabla v_t\|^2=\frac{m}{2m+2}\Phi'(t)+\frac{1}{4m+4}\Phi''(t)-\frac{m}{m+1}\|v\|^2+\frac{m}{2m+2}\frac{d}{dt}\|v\|^2$$

$$-\frac{e^{-mt}}{m+1}\left(v^{m+1},v_{tx_1}\right) \tag{2.24}$$

elde edilir.

(2.24) eşitliğinde (2.22) ve (2.23) eşitsizlikleri kullanılırsa

$$\|v_t\|^2+\|\nabla v_t\|^2\le\frac{m}{2m+2}\Phi'(t)+\frac{1}{4m+4}\Phi''(t)-\frac{m}{m+1}\|v\|^2+\frac{m}{2m+2}\left[\|v\|^2+\|v_t\|^2\right]$$

$$-\frac{e^{-mt}}{m+1}\left[\frac{\varepsilon(t)}{2}\|\nabla v_t\|^2+\frac{1}{2\varepsilon(t)}\|v\|_{2m+2}^{2m+2}\right]$$

$$\|v_t\|^2+\|\nabla v_t\|^2\le\frac{m}{2m+2}\Phi^{'}(t)+\frac{1}{2.2(m+1)}\Phi^{''}(t)+\frac{m}{2m+2}\|v_t\|^2-\frac{e^{-mt}}{m+1}\frac{\varepsilon(t)}{2}\|\nabla v_t\|^2$$

$$-\frac{e^{-mt}}{(m+1)2\varepsilon(t)}\|v\|_{2m+2}^{2m+2}$$

bulunur. Eşitsizliğin sağ tarafı $\frac{1}{2(m+1)}$ parantezine alınırsa

$$\|v_t\|^2 + \|\nabla v_t\|^2 \le \frac{1}{2(m+1)}\left[m\Phi'(t) + \frac{\Phi''(t)}{2} + m\|v_t\|^2 - \varepsilon(t)e^{-mt}\|\nabla v_t\|^2 \right.$$

$$\left. + \varepsilon^{-1}e^{-mt}\|v\|_{2m+2}^{2m+2} \right] \tag{2.25}$$

eşitsizliği elde edilir.

(2.19) eşitliğinden

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Phi(t) \ge e^{-2mt}\|v\|_{2(m+1)}^{2(m+1)} \tag{2.26}$$

eşitsizliği elde edilir.

(2.25) eşitsizliğinde $\varepsilon(t)$ fonksiyonu $\varepsilon(t) = me^{mt}$ şeklinde kabul edilir ve (2.26) eşitsizliği kulanılır ise

$$\|v_t\|^2 + \|\nabla v_t\|^2 \le \frac{1}{2(m+1)}\left[m\Phi'(t) + \frac{\Phi''(t)}{2} + m\|v_t\|^2 - me^{mt}e^{-mt}\|\nabla v_t\|^2 + \frac{1}{m}\frac{1}{2}\Phi'(t) \right]$$

$$\|v_t\|^2 + \|\nabla v_t\|^2 \le \frac{1}{2(m+1)}\left[\left(m + \frac{1}{2m}\right)\Phi'(t) + \frac{\Phi''(t)}{2} + m\left(\|v_t\|^2 + \|\nabla v_t\|^2\right) \right]$$

$$\|v_t\|^2 + \|\nabla v_t\|^2 - \frac{m}{2(m+1)}\left(\|v_t\|^2 + \|\nabla v_t\|^2\right) \le \frac{1}{2(m+1)}\left[\left(\frac{2m^2+1}{2m}\right)\Phi'(t) + \frac{\Phi''(t)}{2} \right]$$

$$\left[1-\frac{m}{2(m+1)}\right]\left(\|v_t\|^2+\|\nabla v_t\|^2\right)\le\frac{2m^2+1}{4m(m+1)}\Phi'(t)+\frac{1}{4(m+1)}\Phi''(t) \tag{2.27}$$

elde edilir. (2.21) eşitsizliği kullanılarak (2.27) eşitsizliği

$$\left[\frac{m+2}{2(m+1)}\right]\frac{1}{4\Phi(t)}\left[\Phi'(t)\right]^2\le\frac{2m^2+1}{4m(m+1)}\Phi'(t)+\frac{1}{4(m+1)}\Phi''(t)$$

şeklinde yazılır. Eşitsizliğin her iki tarafı $4(m+1)\Phi(t)$ ile çarpılırsa

$$\frac{m+2}{2}\left[\Phi'(t)\right]^2\le\frac{2m^2+1}{m}\Phi(t)\Phi'(t)+\Phi(t)\Phi''(t)$$

$$-\frac{2m^2+1}{m}\Phi(t)\Phi'(t)\le\Phi(t)\Phi''(t)-\left(1+\frac{m}{2}\right)\left[\Phi'(t)\right]^2 \tag{2.28}$$

elde edilir. Lemma 1.1.'de belirtilen α ve C_1 ; $\alpha=\frac{m}{2},C_1=\frac{2m^2+1}{2m}$ şeklinde seçilirse istenen sonuç elde edilir.

BÖLÜM 3. PARABOLİK DENKLEMİN ÇÖZÜMÜNÜN PATLAMASI PROBLEMİ

Bu bölümde bir parabolik problemin çözümünün patlaması Bölüm 2 deki yöntemden farklı bir şekilde ele alınacaktır. Bu bölümdeki yöntemde iki farklı fonksiyonel seçilerek bunlar ve bunların türevleri arasındaki bağıntılar kullanılarak t sonlu zamanı için çözümlerin sonsuza gittiği gösterilecektir. Bu problem üzerinde çeşitli araştırmacıların çalışmaları bulunmaktadır [1],[4],[5],[8].

f ve g negatif olmayan fonksiyonlar, n≥ 2 olmak şartıyla ve Ω , R^n de sınırlı bir bölge olmak üzere

$$\Delta u-\frac{\partial u}{\partial t}=-f\left(u\right) \qquad x\in \Omega, t>0 \tag{3.1}$$

$$u\left(x,0\right)=g\left(x\right) \qquad x\in \Omega \tag{3.2}$$

$$u\left(x,t\right)=0 \qquad x\in \partial\Omega, t>0 \tag{3.3}$$

başlangıç sınır değer problemi ele alınsın.

Teorem 3.1.

(3.1)-(3.3) başlangıç sınır değer probleminin çözümü $u\left(x,t\right)$ olsun. $\Phi\left(t\right)$, $\Psi\left(t\right)$ ve $F\left(u\right)$ yardımcı fonksiyonları

$$\Phi\left(t\right)=\int_{\Omega}u^2\left(x,t\right)dx=\left\|u\right\| \tag{3.4}$$

$$F(u)=\int_0^u f(\sigma)d\sigma \tag{3.5}$$

$$\Psi(t)=\int_\Omega\left\{F(u)-\frac{1}{2}|\nabla u|^2\right\}dx \tag{3.6}$$

şeklinde tanımlansın. f fonksiyonu α pozitif bir parametre olmak üzere

$$sf(s)\geq\frac{1}{2}(4+\alpha)F(s) \qquad \alpha>0 \tag{3.7}$$

şartını sağlasın. $g(x)$ fonksiyonu

$$\Psi(0)=\int_\Omega\left\{F(g)-\frac{1}{2}|\nabla g|^2\right\}dx\geq 0 \tag{3.8}$$

şartını sağlasın. Bu durumda

$$T=\frac{4}{\alpha(\alpha+4)}\Phi(0)\Psi^{-1}(0)\leq\infty$$

olmak üzere $\tau<T$ sonlu anında $u(x,t)$ fonksiyonunun çözümü sonsuza gider.

İspat.

Φ fonksiyonunun türevi

$$\Phi'(t)=2\int_\Omega uu_t dx \tag{3.9}$$

olarak bulunur. (3.1) eşitliğinden elde edilen

$$u_t=\left[\Delta u+f(u)\right] \tag{3.10}$$

eşitliğinin (3.9) denkleminde yerine yazılmasıyla

$$\Phi'(t)=2\int_\Omega u\left[\Delta u+f(u)\right]dx$$

$$\Phi'(t)=2\int_\Omega u\Delta u dx+2\int_\Omega uf(u)dx$$

$$\Phi'(t)=2\left[\int_{\partial\Omega} u\frac{\partial u}{\partial n}dx-\int_{\Omega}\nabla u\nabla u dx\right]+2\int_{\Omega} uf(u)dx$$

$$\Phi'(t)=-2\int_{\Omega}|\nabla u|^2 dx+2\int_{\Omega} uf(u)dx \tag{3.11}$$

elde edilir. Burada (3.3) sınır koşulundan

$$\int_{\partial\Omega} u\frac{\partial u}{\partial n}dx=0$$

dır.

(3.11) eşitliğinde (3.7) eşitsizliğinin kullanılmasıyla

$$\Phi'(t)\ \geq -2\int_{\Omega}|\nabla u|^2 dx+(4+\alpha)\int_{\Omega} F(u)dx \tag{3.12}$$

bulunur. (3.6) eşitliğinin (3.12) eşitsizliğinde yerine yazılmasıyla

$$\Phi'(t)\ \geq -2\int_{\Omega}|\nabla u|^2 dx+(4+\alpha)\left[\Psi(t)+\frac{1}{2}\int_{\Omega}|\nabla u|^2\, dx\right]$$

$$\Phi'(t)\ \geq -2\int_{\Omega}|\nabla u|^2 dx+\frac{(4+\alpha)}{2}\int_{\Omega}|\nabla u|^2\, dx+(4+\alpha)\Psi(t) \tag{3.13}$$

olarak bulunur.

$$-2\int_{\Omega}|\nabla u|^2 dx+\frac{(4+\alpha)}{2}\int_{\Omega}|\nabla u|^2\, dx>0$$

olduğundan

$$\Phi'(t)\geq(4+\alpha)\Psi(t) \tag{3.14}$$

elde edilir.

$$\Psi(t)=\int_{\Omega}\left\{F(u)-\frac{1}{2}|\nabla u|^2\right\}dx$$

fonksiyonunun türevi alınırsa

$$\frac{d}{dt}\Psi(t)=\frac{d}{dt}\left[\int_{\Omega}\left\{F(u)-\frac{1}{2}|\nabla u|^2\right\}dx\right]$$

$$\Psi'(t)=\int_{\Omega}f(u)u_t dx-\int_{\Omega}\nabla u\nabla u_t dx$$

$$\Psi'(t)=\int_{\Omega}f(u)u_t dx-\left[\int_{\partial\Omega}u_t\frac{\partial u}{\partial n}dx-\int_{\Omega}u_t\Delta u dx\right]$$

$$\Psi'(t)=\int_{\Omega}f(u)u_t dx+\int_{\Omega}u_t\Delta u dx$$

$$\Psi'(t)=\int_{\Omega}u_t\left[f(u)+\Delta u\right]dx \qquad (3.15)$$

bulunur. (3.3) sınır koşulundan $\int_{\partial\Omega}u_t\frac{\partial u}{\partial n}dx=0$ dır.

(3.10) eşitliğinin (3.15) eşitliğinde yerine yazılmasıyla

$$\Psi'(t)=\int_{\Omega}u_t u_t dx=\int_{\Omega}(u_t)^2\,dx\geq 0 \qquad (3.16)$$

elde edilir.

$\Phi(t)$ fonksiyonu ile $\Psi'(t)$ fonksiyonu çarpılırsa

$$\Phi\Psi'=\left(\int_{\Omega}u^2dx\right)\left(\int_{\Omega}u_t^2dx\right)$$

bulunur. Cauchy- Schwarz eşitsizliğinin kullanılmasıyla

$$\Phi\Psi' \geq \left(\int_{\Omega} u u_t dx\right)^2$$

elde edilir.

$$\left(\int_{\Omega} u u_t dx\right)^2 = \frac{1}{4}\Phi'^2$$

eşitliği ve (3.14) eşitsizliğinin yardımıyla

$$\frac{1}{4}\Phi'^2 \geq \left(1+\frac{\alpha}{4}\right)\Phi'\Psi \tag{3.17}$$

bulunur. (3.17) eşitsizliği

$$\Phi\Psi' - \left(1+\frac{\alpha}{4}\right)\Phi'\Psi \geq 0 \tag{3.18}$$

şeklinde düzenlenir ve eşitsizliğin her iki tarafı $\Phi^{-2-\frac{\alpha}{4}}$ ile çarpılırsa

$$\Phi^{-\left(1+\frac{\alpha}{4}\right)}\Psi' - \left(1+\frac{\alpha}{4}\right)\Phi'\Psi\Phi^{-2-\frac{\alpha}{4}} \geq 0$$

veya

$$\frac{d}{dt}\left[\Psi\Phi^{-\left(1+\frac{\alpha}{4}\right)}\right] \geq 0 \tag{3.19}$$

eşitsizliği elde edilir. (3.19) eşitsizliğinin $(0,t)$ aralığında t ye göre integrali alınırsa

$$\int_0^t \frac{d}{dt}\left[\Psi\Phi^{-\left(1+\frac{\alpha}{4}\right)}\right] dt \geq 0$$

veya

$$\Psi(t)\Phi(t)^{-\left(1+\frac{\alpha}{4}\right)} - \Psi(0)\Phi(0)^{-\left(1+\frac{\alpha}{4}\right)} \geq 0$$

veya

$$\Psi(t)\Phi(t)^{-\left(1+\frac{\alpha}{4}\right)} \geq \Psi(0)\Phi(0)^{-\left(1+\frac{\alpha}{4}\right)} \tag{3.20}$$

bulunur. (3.14) eşitsizliğinden elde edilen

$$\frac{1}{4+\alpha}\Phi'(t) \geq \Psi(t)$$

eşitsizliği (3.20) eşitsizliğinde yerine yazılırsa

$$\frac{1}{4+\alpha}\Phi'(t)\Phi(t)^{-\left(1+\frac{\alpha}{4}\right)} \geq \Psi(t)\Phi(t)^{-\left(1+\frac{\alpha}{4}\right)} \geq \Psi(0)\Phi(0)^{-\left(1+\frac{\alpha}{4}\right)} \tag{3.21}$$

eşitsizlikleri elde edilir. (3.21) eşitsizliğinde $\Psi(0)\Phi(0)^{-\left(1+\frac{\alpha}{4}\right)} = M$ olarak alınırsa

$$\frac{1}{4+\alpha}\Phi'(t)\Phi(t)^{-\left(1+\frac{\alpha}{4}\right)} \geq M \tag{3.22}$$

şeklinde yazılır.

$$\frac{d}{dt}\left(\Phi^{-\frac{\alpha}{4}}\right) = -\frac{\alpha}{4}\Phi^{-\frac{\alpha}{4}-1}\Phi'$$

eşitliğinden faydalanılarak (3.22) eşitsizliği

$$-\frac{4}{\alpha(\alpha+4)}\left(\Phi(t)^{-\frac{\alpha}{4}}\right)' \geq M \tag{3.23}$$

şeklinde yazılır. (3.23) eşitsizliğinin her iki tarafı $(0,t)$ aralığında integre edilir ise

$$-\frac{4}{\alpha(\alpha+4)}\int_0^t \Phi(t)^{-\frac{\alpha}{4}}dt \geq \int_0^t Mdt$$

$$-\frac{4}{\alpha(\alpha+4)}\left[\Phi^{-\frac{\alpha}{4}}(t)-\Phi^{-\frac{\alpha}{4}}(0)\right]\geq Mt$$

$$\Phi^{-\frac{\alpha}{4}}(t)-\Phi^{-\frac{\alpha}{4}}(0)\leq-\frac{\alpha(\alpha+4)}{4}Mt$$

$$\Phi^{-\frac{\alpha}{4}}(t)\leq\Phi^{-\frac{\alpha}{4}}(0)-\frac{\alpha(\alpha+4)}{4}Mt$$

$$\frac{1}{\Phi^{\alpha/4}(t)}\leq\frac{1}{\Phi^{\alpha/4}(0)}-\frac{\alpha(\alpha+4)}{4}Mt \tag{3.24}$$

eşitsizlikleri elde edilir. Φ pozitif bir fonksiyon olduğundan (3.24) eşitsizliğinin düzenlenmesiyle

$$\frac{1}{\frac{1}{\Phi^{\alpha/4}(0)}-\frac{\alpha(\alpha+4)}{4}Mt}\leq\Phi^{\alpha/4}(t)$$

$$\frac{1}{\Phi^{\alpha/4}(0)}-\frac{\alpha(\alpha+4)}{4}Mt\geq 0$$

$$\frac{1}{\Phi^{\alpha/4}(0)}\geq\frac{\alpha(\alpha+4)}{4}Mt$$

$$t\leq\frac{4}{\alpha(\alpha+4)M}\frac{1}{\Phi^{\alpha/4}(0)}$$

$$t \leq \frac{4}{\alpha(\alpha+4)} \frac{1}{\Phi^{\alpha/4}(0)\Psi(0)\Phi^{-1-\frac{\alpha}{4}}(0)} = \frac{4}{\alpha(\alpha+4)} \frac{\Phi(0)}{\Psi(0)} \tag{3.25}$$

bulunur. (3.25) eşitsizliğinde $\Phi(0) > 0$ ve $\Psi(0) > 0$ olduğundan

$$T = \frac{4}{\alpha(\alpha+4)} \frac{\Phi(0)}{\Psi(0)} > 0$$

elde edilir.Buradan $T = \frac{4}{\alpha(\alpha+4)} \frac{\Phi(0)}{\Psi(0)}$ ile

$$\Phi^{\frac{\alpha}{4}}(t) \to \infty$$

olur . Dolayısıyla

$\Phi(t) \to \infty$ ve $u(x,t) \to \infty$

bulunur. $\tau \leq T$ anında patlamaya ulaşılır.

BÖLÜM 4. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmada parabolik ve pseudo-parabolik denklemlerin global çözümlerinin olmamasına yani bir t sonlu anında patlamasına ilişkin çeşitli makalelerde yeralan problemler ele alınmış ve çözüm basamakları açık şekilde incelenmiştir. Bu problemlerin çözümü için kullanılan yöntem Kalantarov-Ladyzhenskaya Lemmasına dayanan genelleştirilmiş konkavlık lemması yöntemidir. Bu yöntem uygulanırken sınır koşullarındaki sönüm teriminide içeren ve istenilen özellikleri taşıyan bir fonksiyonel tanımlanmıştır. Tanımlanan bu fonksiyonele Cauchy, Young ve Hölder eşitsizlikleri yardımıyla lemmadaki şartlar sağlatılmış ve parabolik ve pseudo-parabolik denklemlerin çözümlerinin t sonlu zamanına yaklaşırken patladığı gösterilmiştir.

Bu çalışma parabolik ve pseudo-parabolik denklemlerin patlaması problemini içeren çeşitli makalelerden bir derleme olup ek kaynak olarak kullanılabilir. Daha fazla araştırmacının gelişen bilimsel koşullar altında daha fazla problem ve çözüm ortaya koyacağını umut ediyoruz.

KAYNAKLAR

[1] BALL, J. M., Remarks on blow-up and nonexistence theorems for nonlinear evalution equations. Quarterly Journal of Mathematics Oxford, 28; 473-486, 1977

[2] ERDEM, D., Blow-up of solutions to quasilinear parabolic equations, Appl. Math. Lett., 12; 65-69, 1999

[3] ERDEM, D., KALANTAROV, V. K., A remark on nonexistence of global solutions to quasi-lineer hyperbolic and parabolic equations, Applied Mathematics Letters, 15; 585-590, 2002

[4] FUJITA, H., On the blowing up of solutions of the Cauchy problem for $u_t = \Delta u + u^{1/\alpha}$. Journal of the Faculty of Science University of Tokyo , Section 1A-Mathematics Astronomy Physics Chemstry, 13; 109-124, 1966

[5] FUJITA, H., On some nonexistence and nonuniqueness theorems for equations. Proceedings of the Symposia in Pure Mathematics, 18; 105-113, 1969

[6] KALANTAROV, V. K., LADYZHENSKAYA, O. A., Formation of collapses in quasilinear equations of parabolic and hyperbolic types, Zap. Nauchn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steclov(LOMI), 69; 77-102, 1977

[7] KALANTAROV, V. K., LADYZHENSKAYA, O. A., The occurence of collapse for quasilinear equation of parabolic and hyperbolic types, J. Sov. Math ,10; 53-70, 1978

[8] LEVINE, H. A., Some nonexistence and instability theorems for solutions of formally parabolic equations of the form Pu= -Au+F(u). Archive for Rational Mechanics and Analysis, 8; 211-229, 1973

[9] LEVINE, H. A., PAYNE, L. E., Nonexistance of global weak solutions for classes of nonlinear wave and parabolic equations, J. Math. Anal. Appl, 55; 329-334, 1976

[10] LEVINE, H., PARK, S., SERRIN, J., Global existence and nonexistence theorems for quasilinear evolution equations of formaly parabolic type, J. Differential Equations, 142; 212-229, 1998

[11] MEYVACI, M., Blow up of solitions of pseudoparabolic equations, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 352; 629-639, 2009

[12] PAYNE, L. E., PHILIPPIN, G. A., Decay bounds for solutions of second order parabolic problems and their derivatives. Mathematical Models and Methods in Applied Sciences, 5; 95-100, 1995

[13] PHILIPHIN, G. A., PROYTCHEVA, V., Some remarks on the asymtotic behavior of the solutions of a class of parabolic problems, Mathematical Methods in the Applied Sciences, 29; 297-307, 2006

ÖZGEÇMİŞ

Ümran YARAN, 27. 11.1985’ de Kocaeli’ de doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Kocaeli’ de tamamladı. 2004 yılında Gazi Üniversitesi Kırşehir Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünü kazandı. 2008 yılında mezun oldu. 3 yıldır Kocaeli’ de matematik öğretmenliği yapmaktadır.