T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KUATERNİYONİK İNVOLÜT-EVOLÜT EĞRİ ÇİFTLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tülay SOYFİDAN

Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK

Tez Danışmanı : Doç. Dr. Mehmet Ali GÜNGÖR

Haziran 2011

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KUATERNİYONİK İNVOLÜT-EVOLÜT EĞRİ ÇİFTLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tülay SOYFİDAN

Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK

Bu tez 21/06/2011 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Oybirliği ile kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Murat TOSUN	**Doç. Dr. Mehmet Ali GÜNGÖR**	**Yrd. Doç. Dr. Hakan YAKUT**
Jüri Başkanı	**Üye**	**Üye**

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın oluşmasında, bilgi ve tecrübesiyle bana daima yol gösteren, her adımda bilgi ve birikiminden yararlandığım, yardımlarını hiçbir zaman esirgemeyen saygıdeğer hocam Doç. Dr. Mehmet Ali GÜNGÖR’ e sonsuz teşekkür ve saygılarımı sunarım.

Ayrıca hayatım boyunca beni büyük bir sabırla destekleyen, sevgileriyle ayakta durmamı sağlayan, beni her konuda cesaretlendiren ve her zaman yanımda olan aileme teşekkürlerimi sunarım.

Bu çalışmanın oluşmasında maddi destek sağlayan TÜBİTAK Bilim İnsanı Destekleme Daire Başkanlığına teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

$\mathbb{R}^n$	: $n-$boyutlu reel iç çarpım uzayı
$\mathbb{E}^n$	: $n-$boyutlu Öklid uzayı
V	: Vektör uzayı
$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$	: $\mathbb{E}^n$, $n-$boyutlu Öklid uzayında herhangi iki vektör
X, Y, Z	: $\mathbb{E}^n$, $n-$boyutlu Öklid uzayında herhangi üç nokta
I	: $\mathbb{R}$ reel Öklid uzayında bir açık aralık
$\langle\ ,\ \rangle$	: İç çarpım
$\wedge$	: Vektörel çarpım
$\lVert\ ,\ \rVert$	: Norm
α, β	: $\mathbb{E}^3$ Öklid uzayında herhangi iki eğri
ξ, ϕ	: $\mathbb{E}^4$ Öklid uzayında herhangi iki eğri
V_i	: $\mathbb{E}^n$ Öklid uzayında $i-$yinci Frenet vektörü
k_i	: $\mathbb{E}^n$ Öklid uzayında $i-$yinci Frenet eğriliği
κ, τ, σ	: Öklid uzayındaki Frenet eğrilikleri
$\mathbb{Q}$	: Kuaterniyonlar cümlesi
q	: Herhangi bir kuaterniyon
S_q	: q kuaterniyonunun skalar kısmı
$\boldsymbol{V}_q$	: q kuaterniyonunun vektörel kısmı
$\oplus$	: Kuaterniyonlar cümlesinde toplama işlemi
$\odot$	: Kuaterniyonlar cümlesinde çarpma işlemi
$\times$	: Kuaterniyonik çarpım
$\hat{\ }$	: Kuaterniyonik eşlenik

$h(\ ,\ )$	: Kuaterniyonik iç çarpım
q^{-1}	: q kuaterniyonunun tersi
q_0	: Birim kuaterniyon
$\boldsymbol{S}_0$	: q_0 birim kuaterniyonunun ekseni
$\boldsymbol{t},\boldsymbol{n},\boldsymbol{b}$	: Uzaysal kuaterniyonik eğrinin Frenet vektörleri
k,r	: Uzaysal kuaterniyonik eğrinin Frenet eğrilikleri
$\boldsymbol{T},\boldsymbol{N},\boldsymbol{B},\boldsymbol{E}$	: Kuaterniyonik eğrinin Frenet vektörleri
$\kappa,k,(r-\kappa)$	: Kuaterniyonik eğrinin Frenet eğrilikleri

ŞEKİLLER LİSTESİ

ÖZET

Anahtar kelimeler: Öklid Uzayı, Kuaterniyonlar, Uzaysal Kuaterniyonik Eğri, Kuaterniyonik Eğri, İnvolüt-Evolüt Eğri Çifti, $w-$Eğrisi

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmıştır. İkinci bölümde, Öklid uzayında ve kuaterniyonlar kümesinde temel kavramlar tanıtılmıştır. Ayrıca, temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde, $\mathbb{E}^3$, $3-$boyutlu Öklid uzayında çalışmamızın temelini oluşturan involüt-evolüt eğri çiftleri tanıtılmış ve ilgili teoremler verilmiştir. Buna ek olarak, $\mathbb{E}^3$, $3-$boyutlu Öklid uzayında yapılan hesaplamaların $\mathbb{E}^4$, $4-$boyutlu Öklid uzayında da karşılıkları gösterilmiştir.

Dördüncü bölüm bu çalışmanın orijinal kısmını oluşturmaktadır. Bu bölümde, $\mathbb{E}^3$, $3-$boyutlu Öklid uzayındaki bir eğrinin reel-kuaterniyonlar kümesindeki uzaysal kuaterniyonik eğriyle birebir eşleşmesi temel alınarak ve kuaterniyonların özellikleri kullanılarak involüt-evolüt eğri çiftlerinin karakterizasyonu elde edilmiştir. Ayrıca, $n=4$ için involüt-evolüt eğri çiftlerinin karakterizasyonları elde edilirken kuaterniyonik $w-$eğrileri göz önüne alınmıştır.

Beşinci bölümde tüm çalışmanın geniş bir özeti yapılmış ve bundan sonra yapılacak araştırmalara yönelik öneride bulunulmuştur.

QUATERNIONIC INVOLUTE-EVOLUTE CURVE COUPLES

SUMMARY

Key words: Euclidean Space, Quaternions, Spatial Quaternionic Curve, Quaternionic Curve, Involute-Evolute Curve Couple, $w-$Curve

This thesis consists of five chapters. The first chapter is devoted to the introduction. In the second chapter, basic concepts in the Euclidean space and set of quaternions are introduced. Moreover, the fundamental definitions and theorems are given.

In the third chapter, involute-evolute curve couples which are the base of our study in the Euclidean 3-space are introduced and related theorems are given. In addition this, it is shown that the calculations done in the Euclidean 3-space can be done in the Euclidean 4-space.

The fourth chapter is the original part of this study. In this chapter, by considering there is a bijective correspondence between a curve in the Euclidean 3-space and a spatial quaternionic curve in the set of real quaternions and using the properties of quaternions, the characterizations of involute-evolute curve couples are obtained. Moreover, the quaternionic $w-$curves are considered while obtaining the characterizations of involute-evolute curve couples for $n = 4$.

In the fifth chapter of this thesis, a brief summary of the study is given and a suggestion is proposed for investigations in future.

BÖLÜM 1. GİRİŞ

Kuaterniyonlar, 1843 yılında İrlandalı matematikçi William Rowan Hamilton'un kompleks sayıları $3-$boyutlu uzaya genelleştirmek amacıyla yaptığı çalışmalar sırasında bulunmuştur ve ilk defa 13 Kasım 1843 yılında, Hamilton (1805-1865) tarafından Royal Irish Academy' de ünlü bildirisi "On a New Species of Imagianery Quantites Connected with the Theory of Quaternions" ile tanımlanarak yayınlanmıştır [9,12].

Hamilton, kuaterniyonları bulurken ilk önce kompleks sayılar üzerinde çalışmış ve sonra iki reel sayıdan oluşan kompleks sayıların bir cebir oluşturduğu sonucuna varmıştır. Bu sonuçtan yola çıkarak çalışmalarını iki kompleks ve bir reel bileşenden oluşan $(q = a + b\boldsymbol{e}_1 + c\boldsymbol{e}_2)$ üçlü sayı sistemi üzerinde yoğunlaştırmıştır. Vektör olarak adlandırdığı bu sistem üzerinde toplama ve çarpma işlemlerini tanımlayabildiği halde bölme işlemi için ise bir metot geliştirememiştir. Daha sonra bu sayı sisteminde çarpma işleminde değişme özelliğinin gerçekleşmediğini anlamıştır ve çarpma işleminin bu özelliğinden vazgeçerek $\boldsymbol{e}_1^{\,2} = \boldsymbol{e}_2^{\,2} = \boldsymbol{e}_3^{\,2} = -1$ özelliğine sahip üç imajiner birim tanımlamıştır. Böylece Hamilton, kuaterniyon ismini verdiği $4-$boyutlu olan vektörleri keşfetmiştir [2,14].

Kuaterniyon cebirinin keşfedildiği yıllarda A. Carley, K. Clifford ve J. J. Slyvester gibi İngiliz matematikçiler bu konuya önemli katkıda bulunmuşlardır. 1878 yılında Vidinli Hüseyin Tevfik Paşa İngilizce olarak yazdığı "Lineer Algebra" adlı kitapta kompleks sayılarla ilgili teorisinde ileri sürdüğü çarpımın $3-$boyutlu uzaya bir uygulamasını bulmuş ve özgün çalışma olarak kuaterniyonların çarpımının bizi $3-$boyutlu uzayda çalışmaya zorladığını vurgulamıştır; R. Kaya ve Ş. Koçak tarafından kuaterniyonlardan hareketle zayıf kuaterniyonların tanımı yapılarak $\mathbb{R}^3$

uzayının vektörleri zayıf kuaterniyon uzayına taşınmış ve bölme işleminin bu şekilde daha anlamlı olarak gerçekleştirilebileceği ispat edilmiştir [17].

Kuaterniyon teorisi zaman içinde kendisini yenileyerek çeşitlenmiştir. Hamilton tarafından keşfedilen kuaterniyonların baz elemanları imajiner, bileşenleri ise reel sayılar olduğu için "reel kuaterniyonlar" şeklinde adlandırılmıştır. Reel kuaterniyonlar, yapı bakımından en basittir ve diğer kuaterniyon türlerinin tanımlanmasında temel rol oynarlar. Bu tür kuaterniyonlar, iki kompleks sayının bir çeşit genelleştirilmiş biçimi olduklarından $4-$boyuta kadar matematiksel nicelikleri başarı ile ifade edebilecek özelliktedirler. Reel kuaterniyonların ardından bileşenleri kompleks sayı olan kuaterniyonlara "kompleks kuaterniyonlar veya bikuaterniyonlar", bileşenleri dual sayılar olan kuaterniyon çeşidine de "dual kuaterniyonlar" adı verilmiştir. Kompleks ve dual kuaterniyonların reel kuaterniyonlardan en önemli farklarından birisi, reel kuaterniyonların aksine dört reel bileşenden ziyade, sekiz reel bileşen içermeleridir. Daha sonra tanımlanan bu yapılar kuaterniyonlar için bir dezavantaj olmamış, aksine daha geniş kullanım alanı bulmalarına neden olmuştur. Örneğin; son yıllarda, kuaterniyonların uygulama alanları neredeyse bilimin tüm dallarına dağılmaktadır. Kimyada molekül yapılarının incelenmesinden tıbbi bilimlerde DNA ve protein yapıları, göz hareketinin tanımlanması hidrodinamik ve elastik, astronomi ve optikteki uygulamalara kadar geniş bir spektrumda kullanılmaya başlandığı görülmektedir [3,4].

$\mathbb{R}^3$, $3-$boyutlu reel Öklid uzayındaki bir eğrinin Serret-Frenet formüleri uzaysal kuaterniyonlar yardımıyla K. Bharathi ve M. Nagaraj tarafından yeniden türetilmiştir. Bulunan bu formüller yardımıyla, $\mathbb{R}^4$, $4-$boyutlu reel Öklid uzayındaki $1-$değişkenli kuaterniyon değerli fonksiyonların (kuaterniyonik eğrilerin) Serret-Frenet formülleri elde edilmiştir [1].

Bu çalışmada ise reel kuaterniyonların cebirsel özellikleri tanıtıldıktan sonra yukarıda sözü edilen hesaplamalar temel alınarak $\mathbb{E}^3$ ve $\mathbb{E}^4$, Öklid uzaylarındaki eğriler kuaterniyonik eğriler seçilerek kuaterniyonik involüt-evolüt eğri çifti kavramı verilmiştir. Ayrıca, kuaterniyonik eğri olarak seçilen bu involüt-evolüt eğri çiftinin Frenet elemanlarının birbirleri cinsinden yazılabildiği ispatlanmıştır.

BÖLÜM 2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1. Öklid Uzayında Temel Kavramlar

Bu bölümde $\mathbb{E}^n$, $n-$boyutlu reel Öklid uzayında temel kavramlardan bahsedilecektir. Daha sonra $n=3$ ve $n=4$ olması özel durumunda çalışmamıza esas olan tanım ve teoremler verilecektir.

Tanım 2.1.1. Bir reel afin uzay A ve A ile birleşen vektör uzayı da V olsun. V vektör uzayında

$$\langle\ ,\ \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$$
$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \to \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \ , \qquad \begin{cases} \boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots\ldots, x_n) \\ \mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots\ldots\ldots\ldots, y_n) \end{cases}$$

şeklinde bir Öklid iç çarpımı tanımlanırsa, A afin uzayına $n-$boyutlu Öklid uzayı denir ve $\mathbb{E}^n$ ile gösterilir [8].

Tanım 2.1.2 $n-$boyutlu bir reel iç çarpım uzayı V ile birleşen bir Öklid uzayı $\mathbb{E}^n$ olsun. V vektör uzayı üzerindeki norm $\|\ ,\ \|$ olmak üzere,

$$d : \mathbb{E}^n \times \mathbb{E}^n \to \mathbb{R} \ , \qquad d(X,Y) = \|\boldsymbol{XY}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i)^2} \ , \quad \begin{cases} X = (x_1, x_2, \ldots., x_n) \\ Y = (y_1, y_2, \ldots., y_n) \end{cases}$$

olarak tanımlanan fonksiyona $\mathbb{E}^n$, $n-$boyutlu Öklid uzayında uzaklık fonksiyonu ve her $X, Y \in \mathbb{E}^n$ için $d(X,Y)$ değerine de X ile Y noktaları arasındaki uzaklık adı verilir [8].

Teorem 2.1.1. $\mathbb{E}^n$**,** $n-$ boyutlu Öklid uzayında uzaklık fonksiyonu bir metriktir [8].

Tanım 2.1.3. $\mathbb{E}^n$**,** $n-$ boyutlu Öklid uzayında tanımlanan uzaklık fonksiyonuna $\mathbb{E}^n$, $n-$ boyutlu Öklid uzayında Öklid metriği denir [8].

Tanım 2.1.4. $\mathbb{E}^n$**,** $n-$ boyutlu Öklid uzayında farklı üç nokta X, Y, Z olsun. $\boldsymbol{XY}$ ile $\boldsymbol{XZ}$ vektörleri arasındaki $\theta \in \mathbb{R}$ açısı, $0 \leq \theta \leq \pi$ olmak üzere,

$$\cos\theta = \frac{\langle \boldsymbol{XY}, \boldsymbol{XZ} \rangle}{\|\boldsymbol{XY}\| \|\boldsymbol{XZ}\|}$$

dır [13].

Tanım 2.1.5. $\mathbb{R}^n$**,** $n-$ boyutlu reel iç çarpım uzayı ile birleşen $\mathbb{E}^n$ Öklid uzayında, sıralı bir $\{P_0, P_1, \ldots\ldots, P_n\}$ nokta $(n+1)-$ lisi için eğer $\{\boldsymbol{P_0P_1}, \boldsymbol{P_0P_2}, \ldots\ldots, \boldsymbol{P_0P_n}\}$ vektör sistemi, $\mathbb{R}^n$ iç çarpım uzayının bir ortonormal bazı ise bu nokta $(n+1)-$ lisine bir dik çatı veya Öklid çatısı denir [8].

Tanım 2.1.6. $\mathbb{E}^n$, $n-$ boyutlu Öklid uzayında bir X noktasının $\mathbb{E}^n$ Öklid uzayındaki standart Öklid çatısına göre ifadesi

$$\boldsymbol{E}_0\boldsymbol{X} = \sum_{i=1}^{n} x_i \boldsymbol{E}_0\boldsymbol{E}_i$$

dir. Burada

$$x_i : \mathbb{E}^n \to \mathbb{R} \qquad (1 \leq i \leq n)$$

fonksiyonlarına X noktasının Öklid koordinat fonksiyonları ve $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ sıralı ve reel değerli fonksiyonlar $n-$lisine de $\mathbb{E}^n$, $n-$boyutlu Öklid uzayının Öklid koordinat sistemi denir [8].

Tanım 2.1.7. $I \subset \mathbb{R}$ bir açık aralık ve

$$\begin{aligned} \alpha : I &\to \mathbb{E}^n \\ s &\to \alpha(s) = (\alpha_1(s), ..., \alpha_n(s)) \end{aligned}$$

diferensiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Bu takdirde $\alpha(I) \subset \mathbb{E}^n$ alt kümesine $\mathbb{E}^n$, $n-$boyutlu Öklid uzayında (I, α) koordinat komşuluğu ile verilen bir eğri denir. $I \subset \mathbb{R}$ aralığına, α eğrisinin parametre aralığı ve $s \in I$ değişkenine de $\alpha(s)$ eğrisinin parametresi denir [8].

Tanım 2.1.8. M eğrisi $\mathbb{E}^n$, $n-$boyutlu Öklid uzayında (I, α) koordinat komşuluğu ile verilen bir eğri ve

$$\alpha(s) = (\alpha_1(s), \alpha_2(s), \ldots, \alpha_n(s))$$

olsun. Bu takdirde

$$\left.\frac{d\alpha}{ds}\right|_s = \alpha'(s)\big|_s = \left(\left.\frac{d\alpha_1}{ds}\right|_s, \left.\frac{d\alpha_2}{ds}\right|_s, ..., \left.\frac{d\alpha_n}{ds}\right|_s \right)$$

tanjant vektörüne, M eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki hız vektörü denir [8].

Tanım 2.1.9. $M \subseteq \mathbb{E}^n$ eğrisi, (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin.

$$\begin{aligned} \|\alpha'\| : I &\to \mathbb{R} \\ s &\to \|\alpha'\|(s) = \|\alpha'(s)\| \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı $\|\alpha'\|$ fonksiyonuna, M eğrisinin (I,α) koordinat komşuluğuna göre skalar hız fonksiyonu, $\|\alpha'(s)\|$ reel sayısına da M eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki skalar hızı denir. Eğer

$$\|\alpha'(s)\| = 1$$

ise, M eğrisine birim hızlı eğri ve $s \in I$ parametresine de eğrinin yay-parametresi denir [8].

Tanım 2.1.10. $M \subseteq \mathbb{E}^n$ eğrisi (I,α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $a,b \in I$ olmak üzere,

$$s = \int_a^b \|\alpha'(s)\| ds$$

reel sayısına M eğrisinin $\alpha(a)$ ve $\alpha(b)$ noktaları arasındaki yay-uzunluğu denir [8].

Tanım 2.1.11. M eğrisi $\mathbb{E}^n$, $n-$boyutlu Öklid uzayında (I,α) koordinat komşuluğu ile verilen bir eğri ve

$$\psi = \left\{\alpha', \alpha'', ..., \alpha^{(r)}\right\}$$

sistemi lineer bağımsız olsun.

$$\alpha^{(k)} \in S_p\left\{\psi\right\}, \qquad k > r$$

olmak üzere, ψ lineer bağımsız sisteminden elde edilen $\left\{V_1, V_2, ..., V_r\right\}$ ortonormal sistemine M eğrisinin Serret-Frenet $r-$ayaklı alanı**,** $m \in M$ için $\left\{\boldsymbol{V}_1(m), \boldsymbol{V}_2(m), ..., \boldsymbol{V}_r(m)\right\}$ sistemine $m \in M$ noktasındaki Serret-Frenet $r-$ayaklısı ve her bir $\boldsymbol{V}_i$, $1 \le i \le r$, vektörüne de Serret-Frenet vektörü denir [8].

Tanım 2.1.12. M eğrisi $\mathbb{E}^n$, $n-$boyutlu Öklid uzayında (I,α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $s \in I$ yay-parametresine karşılık gelen $\alpha(s) \in M$ noktasındaki Frenet $r-$ayaklısı $\{\boldsymbol{V}_1(s), \boldsymbol{V}_2(s), \ldots.., \boldsymbol{V}_r(s)\}$ olmak üzere,

$$
\begin{aligned}
k_i : I &\to \qquad\qquad\qquad (1 \le i < r) \\
s \to k_i(s) &= \left\langle \boldsymbol{V}_i'(s), \boldsymbol{V}_{i+1}(s) \right\rangle
\end{aligned}
$$

şeklinde tanımlı k_i fonksiyonuna M eğrisinin $i-$yinci eğrilik fonksiyonu ve $\forall s \in I$ için $k_i(s)$ reel sayısına da M eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki $i-$yinci eğriliği denir [5].

Teorem 2.1.2. $M \subseteq \mathbb{E}^3$ eğrisi (I,α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $s \in I$ yay-parametresi olmak üzere, M eğrisinin $\{\boldsymbol{t}(s), \boldsymbol{n}(s), \boldsymbol{b}(s)\}$ Frenet vektörleri

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{t}(s) &= \alpha'(s) \\
\boldsymbol{n}(s) &= \frac{1}{\|\alpha''(s)\|}\alpha''(s) \qquad (2.1.1) \\
\boldsymbol{b}(s) &= \boldsymbol{t}(s) \wedge \boldsymbol{n}(s)
\end{aligned}
$$

şeklindedir [8].

Teorem 2.1.3. $M \subseteq \mathbb{E}^3$ eğrisi (I,α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $s \in I$ herhangi bir parametre olmak üzere, M eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki $\{\boldsymbol{t}(s), \boldsymbol{n}(s), \boldsymbol{b}(s)\}$ Frenet vektörleri

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{t}(s) &= \frac{1}{\|\alpha'(s)\|}\alpha'(s) \\
\boldsymbol{n}(s) &= \boldsymbol{b}(s) \wedge \boldsymbol{t}(s) \qquad (2.1.2) \\
\boldsymbol{b}(s) &= \frac{\alpha'(s) \wedge \alpha''(s)}{\|\alpha'(s) \wedge \alpha''(s)\|}
\end{aligned}
$$

şeklinde hesaplanır [8].

Teorem 2.1.4. $M \subseteq \mathbb{E}^3$ eğrisi (I,α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $s \in I$ herhangi bir parametre ve M eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki eğriliği ve burulması, sırasıyla, $\kappa(s)$, $\tau(s)$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} \kappa(s) &= \frac{\left\|\alpha'(s) \wedge \alpha''(s)\right\|}{\left\|\alpha'(s)\right\|^3} \\ \tau(s) &= \frac{\left\langle \alpha'(s) \wedge \alpha''(s), \alpha'''(s)\right\rangle}{\left\|\alpha'(s) \wedge \alpha''(s)\right\|^2} \end{aligned} \tag{2.1.3}$$

dir [16].

Teorem 2.1.5. $M \subseteq \mathbb{E}^4$ eğrisi (I,ξ) koordinat komşuluğu ile verilsin. $s \in I$ herhangi bir parametre olmak üzere, M eğrisinin ξ(s) noktasındaki $\{\boldsymbol{T}(s), \boldsymbol{N}(s), \boldsymbol{B}(s), \boldsymbol{E}(s)\}$ Frenet vektörleri

$$\begin{aligned} \boldsymbol{T}(s) &= \frac{1}{\left\|\xi'(s)\right\|}\xi'(s) \\ \boldsymbol{N}(s) &= \frac{\left\|\xi'(s)\right\|^2 \xi''(s) - \left\langle \xi'(s), \xi''(s)\right\rangle \xi'(s)}{\left\| \left\|\xi'(s)\right\|^2 \xi''(s) - \left\langle \xi'(s), \xi''(s)\right\rangle \xi'(s)\right\|} \\ \boldsymbol{B}(s) &= \eta \boldsymbol{E}(s) \wedge \boldsymbol{T}(s) \wedge \boldsymbol{N}(s) \\ \boldsymbol{E}(s) &= \eta \frac{\boldsymbol{T}(s) \wedge \boldsymbol{N}(s) \wedge \xi'''(s)}{\left\|\boldsymbol{T}(s) \wedge \boldsymbol{N}(s) \wedge \xi'''(s)\right\|}, \qquad (\eta = \pm 1) \end{aligned} \tag{2.1.4}$$

şeklinde hesaplanır [15].

Buradaki vektörel çarpım aşağıdaki şekilde tanımlanır.

Tanım 2.1.13. $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ ve $\boldsymbol{C} \in \mathbb{R}^4$ ve $\mathbb{R}^4$ uzayının standart bazı $\{\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{E}\}$ olmak üzere,

$$\boldsymbol{A} \wedge \boldsymbol{B} \wedge \boldsymbol{C} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{T} & \boldsymbol{N} & \boldsymbol{B} & \boldsymbol{E} \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{vmatrix}, \qquad \begin{cases} \boldsymbol{A} = (a_1, a_2, a_3, a_4) \\ \boldsymbol{B} = (b_1, b_2, b_3, b_4) \\ \boldsymbol{C} = (c_1, c_2, c_3, c_4) \end{cases}$$

şeklindeki çarpıma $\mathbb{R}^4$ uzayında vektörel çarpım veya dış çarpım denir [8].

Teorem 2.1.6. $M \subseteq \mathbb{E}^4$ eğrisi (I,ξ) koordinat komşuluğu ile verilsin. $s \in I$ herhangi bir parametre ve M eğrisinin $\xi(s)$ noktasındaki Frenet eğrilikleri, sırasıyla, $\kappa(s)$, $\tau(s)$ ve $\sigma(s)$ olmak üzere,

$$
\begin{aligned}
\kappa(s) &= \frac{\left\| \left\|\xi'(s)\right\|^2 \xi''(s) - \left\langle \xi'(s), \xi''(s) \right\rangle \xi'(s) \right\|}{\left\|\xi'(s)\right\|^4} \\
\tau(s) &= \frac{\left\| \boldsymbol{T}(s) \wedge \boldsymbol{N}(s) \wedge \xi'''(s) \right\| \left\|\xi'(s)\right\|}{\left\| \left\|\xi'(s)\right\|^2 \xi''(s) - \left\langle \xi'(s), \xi''(s) \right\rangle \xi'(s) \right\|} \qquad (2.1.5) \\
\sigma(s) &= \frac{\left\langle \xi^{(iv)}(s), \boldsymbol{E}(s) \right\rangle}{\left\| \boldsymbol{T}(s) \wedge \boldsymbol{N}(s) \wedge \xi'''(s) \right\| \left\|\xi'(s)\right\|}
\end{aligned}
$$

şeklinde hesaplanır [15].

Teorem 2.1.7. $M \subseteq \mathbb{E}^n$ eğrisi (I,α) koordinat komşuluğu ile verilen $s \in I$ yay-parametreli bir eğri olsun. M eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki $i-$yinci eğriliği $k_i(s)$ ve Frenet $r-$ayaklısı da $\{\boldsymbol{V}_1(s), \boldsymbol{V}_2(s), \ldots\ldots, \boldsymbol{V}_r(s)\}$ olmak üzere,

$$
\begin{aligned}
&1) \quad \boldsymbol{V}_1'(s) = k_1(s)\boldsymbol{V}_2(s) \\
&2) \quad \boldsymbol{V}_i'(s) = -k_{i-1}(s)\boldsymbol{V}_{i-1}(s) + k_i(s)\boldsymbol{V}_{i+1}(s)\,, \quad (1 < i < r) \qquad (2.1.6) \\
&3) \quad \boldsymbol{V}_r'(s) = -k_{r-1}(s)\boldsymbol{V}_{r-1}(s)
\end{aligned}
$$

bağıntıları sağlanır [8].

Tanım 2.1.14. $M \subseteq \mathbb{E}^n$ eğrisi (I,α) koordinat komşuluğu ile verilen $s \in I$ yay-parametreli bir eğri olsun. M eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki $i-$yinci eğriliği $k_i(s)$ olmak üzere, $\{\boldsymbol{V}_1(s), \boldsymbol{V}_2(s), \ldots\ldots, \boldsymbol{V}_r(s)\}$ Frenet $r-$ayaklısının $\boldsymbol{V}_i(s)$ Frenet vektörlerinin eğri boyunca kovaryant türevleri ile ilgili eşitlikler

$$\begin{bmatrix} V_1' \\ V_2' \\ V_3' \\ . \\ . \\ . \\ V_{r-1}' \\ V_r' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & 0 & . & . & . & 0 & 0 \\ -k_1 & 0 & k_2 & . & . & . & 0 & 0 \\ 0 & -k_2 & 0 & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & k_{r-1} \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & -k_{r-1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ . \\ . \\ . \\ V_{r-1} \\ V_r \end{bmatrix}$$

şeklinde yazılabilir. Bu eşitliklere Frenet Formülleri denir [8].

Teorem 2.1.8. $\alpha : I \to \mathbb{E}^3$ eğrisi $s \in I$ yay-parametresi cinsinden verilsin. $\alpha(s)$ eğrisinin Frenet $3-$ayaklısı $\{\boldsymbol{t}(s), \boldsymbol{n}(s), \boldsymbol{b}(s)\}$; eğrilik ve burulması, sırasıyla, $\kappa(s)$, $\tau(s)$ olmak üzere, $\alpha(s)$ eğrisinin Frenet formülleri

$$\begin{aligned} \boldsymbol{t}'(s) &= \kappa(s)\boldsymbol{n}(s) \\ \boldsymbol{n}'(s) &= -\kappa(s)\boldsymbol{t}(s) + \tau(s)\boldsymbol{b}(s) \\ \boldsymbol{b}'(s) &= -\tau(s)\boldsymbol{n}(s) \end{aligned} \tag{2.1.7}$$

dir. Bu Frenet formüllerinin matrisel ifadesi ise

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{t}' \\ \boldsymbol{n}' \\ \boldsymbol{b}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{t} \\ \boldsymbol{n} \\ \boldsymbol{b} \end{bmatrix}$$

şeklindedir [16].

Teorem 2.1.9. $\alpha : I \to \mathbb{E}^3$ eğrisinin herhangi bir parametresi $s \in I$ olsun. $\alpha(s)$ eğrisinin Frenet $3-$ayaklısı $\{\boldsymbol{t}(s), \boldsymbol{n}(s), \boldsymbol{b}(s)\}$ ve eğrilik ile burulması, sırasıyla, $\kappa(s)$, $\tau(s)$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{t}'(s) &= \left\|\alpha'(s)\right\| \kappa(s)\boldsymbol{n}(s) \\ \boldsymbol{n}'(s) &= \left\|\alpha'(s)\right\| \left(-\kappa(s)\boldsymbol{t}(s) + \tau(s)\boldsymbol{b}(s)\right) \\ \boldsymbol{b}'(s) &= -\left\|\alpha'(s)\right\| \tau(s)\boldsymbol{n}(s) \end{aligned} \tag{2.1.8}$$

şeklinde hesaplanır [16].

Teorem 2.1.10. $\xi : I \to \mathbb{E}^4$ eğrisi $s \in I$ yay-parametresi ile verilsin. ξ eğrisinin $\xi(s)$ noktasındaki Frenet elemanları $\{\boldsymbol{T}(s), \boldsymbol{N}(s), \boldsymbol{B}(s), \boldsymbol{E}(s), \kappa(s), \tau(s), \sigma(s)\}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \boldsymbol{T}'(s) &= \kappa(s)\boldsymbol{N}(s) \\ \boldsymbol{N}'(s) &= -\kappa(s)\boldsymbol{T}(s) + \tau(s)\boldsymbol{B}(s) \\ \boldsymbol{B}'(s) &= -\tau(s)\boldsymbol{N}(s) + \sigma(s)\boldsymbol{E}(s) \\ \boldsymbol{E}'(s) &= -\sigma(s)\boldsymbol{B}(s) \end{aligned} \tag{2.1.9}$$

şeklindedir. Bu formüllere Frenet formülleri denir ve bu formüllerin matrisel ifadesi ise

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{T}' \\ \boldsymbol{N}' \\ \boldsymbol{B}' \\ \boldsymbol{E}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau & 0 \\ 0 & -\tau & 0 & \sigma \\ 0 & 0 & -\sigma & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{T} \\ \boldsymbol{N} \\ \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{E} \end{bmatrix}$$

şeklindedir [15].

Teorem 2.1.11. $\mathbb{E}^3$, $3-$boyutlu Öklid uzayında bir α eğrisi doğrudur gerek ve yeter şart eğrinin her noktasındaki eğriliği sıfırdır $(\kappa = 0)$ [6].

Teorem 2.1.12. $\mathbb{E}^3$, $3-$boyutlu Öklid uzayında bir α eğrisi düzlemsel bir eğridir gerek ve yeter şart eğrinin her noktasındaki burulması sıfırdır $(\tau = 0)$ [6].

Tanım 2.1.15. $\alpha : I \to \mathbb{E}^n$ eğrisi $s \in I$ yay-parametresi ile verilsin. Eğer $\alpha(s)$ eğrisinin Frenet eğrilikleri sabitse $\alpha(s)$ eğrisine $w-$eğrisi denir [15].

2.2. Kuaterniyonlar

Bu bölümde kuaterniyonlar, uzaysal kuaterniyonik ve kuaterniyonik eğrilerle ilgili çalışmamıza esas olan tanım ve teoremler verilecektir.

Bir reel kuaterniyon, sıralı dört sayının $+1, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ gibi dört birime eşlik etmesiyle tanımlanır. Bu dört birim

$$\begin{array}{lll} i) & \boldsymbol{e}_i \times \boldsymbol{e}_i = -\boldsymbol{e}_4, & (\boldsymbol{e}_4 = +1, \quad 1 \le i \le 3) \\ ii) & \boldsymbol{e}_i \times \boldsymbol{e}_j = \boldsymbol{e}_k = -\boldsymbol{e}_j \times \boldsymbol{e}_i & (1 \le i, j \le 3) \end{array}$$

olmak üzere,

$\times$	$+1$	$\boldsymbol{e}_1$	$\boldsymbol{e}_2$	$\boldsymbol{e}_3$
$+1$	$+1$	$\boldsymbol{e}_1$	$\boldsymbol{e}_2$	$\boldsymbol{e}_3$
$\boldsymbol{e}_1$	$\boldsymbol{e}_1$	-1	$\boldsymbol{e}_3$	$-\boldsymbol{e}_2$
$\boldsymbol{e}_2$	$\boldsymbol{e}_2$	$-\boldsymbol{e}_3$	-1	$\boldsymbol{e}_1$
$\boldsymbol{e}_3$	$\boldsymbol{e}_3$	$\boldsymbol{e}_2$	$-\boldsymbol{e}_1$	-1

şeklindedir. Böylece bir reel kuaterniyon

$$q = d + a\boldsymbol{e}_1 + b\boldsymbol{e}_2 + c\boldsymbol{e}_3$$

biçiminde ifade edilir. Burada $d, a, b, c \in \mathbb{R}$ reel sayılarına q kuaterniyonunun bileşenleri denir. Kısaca reel kuaterniyonların kümesi

$$\mathbb{Q} = \{ q \,|\, q = d + a\boldsymbol{e}_1 + b\boldsymbol{e}_2 + c\boldsymbol{e}_3,\ d, a, b, c \in \mathbb{R},\ \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3 \in \mathbb{R}^3 \}$$

şeklinde gösterilir. O halde q kuaterniyonu, S_q ile gösterilen skalar kısım ve $\boldsymbol{V}_q$ ile gösterilen vektörel kısım olmak üzere, iki kısma ayrılır. Böylece

$$S_q = d \quad , \qquad \boldsymbol{V}_q = a\boldsymbol{e}_1 + b\boldsymbol{e}_2 + c\boldsymbol{e}_3$$

olduğundan q kuaterniyonu

$$q = S_q + \boldsymbol{V}_q$$

şeklinde yazılabilir [7].

Tanım 2.2.1. $\mathbb{Q}$ reel kuaterniyonlar kümesi üzerinde toplama işlemi,

$$S_{q_1} + S_{q_2} = S_{q_1+q_2} \qquad \text{ve} \qquad \boldsymbol{V}_{q_1 \oplus q_2} = \boldsymbol{V}_{q_1} \oplus \boldsymbol{V}_{q_2}$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned} \oplus : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} &\to \mathbb{Q} \\ (q_1, q_2) &\to q_1 \oplus q_2 = S_{q_1+q_2} + \boldsymbol{V}_{q_1 \oplus q_2} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $S_{q_1}, S_{q_2} \in \mathbb{R}$ dir ve + işlemi $\mathbb{R}$ reel Öklid uzayındaki toplama işlemidir. $\boldsymbol{V}_{q_1}$ ve $\boldsymbol{V}_{q_2}$ vektörleri de birer reel vektör olup $\oplus$ işlemi, $(\mathbb{R}, +)$ Abel grubundaki işlemin aynısıdır. O halde $(\mathbb{Q}, \oplus)$ ikilisi bir Abel grubudur. Buradaki etkisiz eleman (0,0,0,0) şeklindedir ve sıfır kuaterniyon adını alır [7].

Tanım 2.2.2. $\mathbb{Q}$ reel kuaterniyonlar kümesinde skalar ile çarpma işlemi,

$$\begin{aligned} \odot : \mathbb{R} \times \mathbb{Q} &\to \mathbb{Q} \\ (\lambda, q) &\to \lambda \odot q = \lambda q = \lambda S_q + \lambda \boldsymbol{V}_q \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır. Ayrıca,

$i)\quad \lambda \odot (q_1 \oplus q_2) = \lambda \odot q_1 \oplus \lambda \odot q_2 \;; \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \text{ve} \quad \forall q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$

$ii)\quad (\lambda_1 + \lambda_2) \odot q = (\lambda_1 \odot q) \oplus (\lambda_2 \odot q) \;; \; \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \quad \text{ve} \quad \forall q \in \mathbb{Q}$

$iii)\quad (\lambda_1 . \lambda_2) \odot q = \lambda_1 \odot (\lambda_2 \odot q)$

$iv)\quad 1 \odot q = q$

özellikleri sağlanır.

O halde $\{\mathbb{Q}, \oplus, \mathbb{R}, +, ., \odot\}$ sistemi bir reel vektör uzayıdır. Kısaca bu uzay $\mathbb{Q}$, kuaterniyonlardaki toplama ve çarpma işlemleri, sırasıyla, "$+$" ve "$.$" ile gösterilecektir [7].

Tanım 2.2.3. $\mathbb{Q}$ reel kuaterniyonlar kümesinde kuaterniyonik çarpma işlemi,

$$q_1 = d_1 + a_1\boldsymbol{e}_1 + b_1\boldsymbol{e}_2 + c_1\boldsymbol{e}_3$$
$$q_2 = d_2 + a_2\boldsymbol{e}_1 + b_2\boldsymbol{e}_2 + c_2\boldsymbol{e}_3$$

olmak üzere,

$$\times : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$$
$$(q_1, q_2) \to q_1 \times q_2$$

$$\begin{aligned} q_1 \times q_2 &= (d_1 + a_1\boldsymbol{e}_1 + b_1\boldsymbol{e}_2 + c_1\boldsymbol{e}_3) \times (d_2 + a_2\boldsymbol{e}_1 + b_2\boldsymbol{e}_2 + c_2\boldsymbol{e}_3) \\ &= d_1 d_2 - (a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2) + (d_1 a_2 + a_1 d_2 + b_1 c_2 - c_1 b_2)\boldsymbol{e}_1 \\ &\quad + (d_1 b_2 + b_1 d_2 + b_1 a_2 - a_1 c_2)\boldsymbol{e}_2 + (d_1 c_2 + d_2 c_1 + a_1 b_2 - b_1 a_2)\boldsymbol{e}_3 \end{aligned}$$

$$q_1 \times q_2 = S_{q_1} S_{q_2} - \left\langle \boldsymbol{V}_{q_1}, \boldsymbol{V}_{q_2} \right\rangle + S_{q_1} \boldsymbol{V}_{q_2} + S_{q_2} \boldsymbol{V}_{q_1} + \boldsymbol{V}_{q_1} \wedge \boldsymbol{V}_{q_2}$$

şeklinde tanımlanır. Bu şekilde kuaterniyon çarpımının aşağıdaki özelliklere sahip olduğu kolayca görülür.

i) İki kuaterniyon çarpımı bir kuaterniyondur,

ii) Kuaterniyon çarpımı birleşimlidir,

iii) Kuaterniyon çarpımı dağılımlıdır.

Fakat kuaterniyonlar kümesi üzerindeki kuaterniyon çarpımının değişme özelliği yoktur. Bu özellikleriyle $\{\mathbb{Q}, \oplus, \mathbb{R}, +, ., \odot\}$ sistemi bir asosyatif (birleşimli) cebirdir.

Bu cebire kuaterniyon cebiri denir ve kısaca $\mathbb{Q}$ ile gösterilir. Bu cebirin standart bazı $\{1, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ olmak üzere, $\mathbb{Q}$ cebirinin boyutu 4 dür. Özel olarak q_1 ve q_2 birer skalar veya vektör kısımları orantılı $(\boldsymbol{V}_{q_2} = \lambda \boldsymbol{V}_{q_1})$ ise

$$q_1 \times q_2 = q_2 \times q_1$$

olur [7].

Tanım 2.2.4. Kuaterniyonlar için eşitlik bağıntısı, $\forall q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$ için

$$q_1 = q_2 \Leftrightarrow S_{q_1} = S_{q_2} \text{ ve } \boldsymbol{V}_{q_1} = \boldsymbol{V}_{q_2}$$

şeklinde tanımlanır [7].

Tanım 2.2.5. $\mathbb{Q}$ reel kuaterniyonlar kümesindeki iki kuaterniyonun farkı,

$$S_{q_1 - q_2} = S_{q_1} - S_{q_2} \qquad \text{ve} \qquad \boldsymbol{V}_{q_1 - q_2} = \boldsymbol{V}_{q_1} - \boldsymbol{V}_{q_2}$$

olmak üzere,

$$q_1 - q_2 = (S_{q_1} - S_{q_2}) + (\boldsymbol{V}_{q_1} - \boldsymbol{V}_{q_2})$$

şeklinde tanımlanır [7].

Tanım 2.2.6. $q = S_q + \boldsymbol{V}_q \in \mathbb{Q}$ reel kuaterniyonun eşleniği

$$\begin{aligned} \hat{} : \mathbb{Q} &\to \mathbb{Q} \\ q &\to \hat{q} = S_q - \boldsymbol{V}_q \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır ve $\hat{q}$ kuaterniyonuna q kuaterniyonunun eşleniği denir. Buna göre q kuaterniyonunun eşleniği ile çarpımı

$$q \times \hat{q} = (d + a\boldsymbol{e}_1 + b\boldsymbol{e}_2 + c\boldsymbol{e}_3) \times (d - a\boldsymbol{e}_1 - b\boldsymbol{e}_2 - c\boldsymbol{e}_3)$$
$$= d^2 + a^2 + b^2 + c^2$$

dır. Buradan

$$q \times \hat{q} = \hat{q} \times q > 0\,, \qquad q \neq 0$$
$$q \times \hat{q} = \hat{q} \times q = 0 \quad \Leftrightarrow \quad q = 0$$

sonucu çıkarılabilir. O halde eşlenik işleminin

$$i)\ \ \widehat{(aq_1 + bq_2)} = a\widehat{q_1} + b\widehat{q_2}$$
$$ii)\ \ \widehat{(q_1 \times q_2)} = \widehat{q_2} \times \widehat{q_1}$$
$$iii)\ \ \hat{\hat{q}} = q$$

özelliklerine sahip olduğu kolayca görülebilir. Bu üç özelliğe kuaterniyonun eşlenik özellikleri denir [7].

Tanım 2.2.7. $q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$ reel kuaterniyonları için

$$h : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$$
$$(q_1, q_2) \to h(q_1, q_2) = \frac{1}{2}(q_1 \times \widehat{q_2} + q_2 \times \widehat{q_1}) \tag{2.2.1}$$

şeklinde tanımlanan h fonksiyonuna kuaterniyonik iç çarpım denir. Reel değerli, simetrik, bilineer h fonksiyonu iç çarpım aksiyomlarını sağlar [7].

Tanım 2.2.8. Eğer $q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$ kuaterniyonları için $h(q_1, q_2) = 0$ oluyorsa q_1 ile q_2 kuaterniyonlarına $h-$ortogonal denir [7].

Tanım 2.2.9. Bir $q \in \mathbb{Q}$ kuaterniyonunun normu

$$\|q\|^2 = h(q, q) = q \times \hat{q} = d^2 + a^2 + b^2 + c^2 \tag{2.2.2}$$

eşitliğini sağlayan $\|q\|$ reel sayısına denir. [7].

Tanım 2.2.10. Bir $q \in \mathbb{Q}$ kuaterniyonunun tersi

$$\begin{aligned} (\ )^{-1} : \mathbb{Q}-\{0\} &\to \mathbb{Q}-\{0\} \\ q \to q^{-1} &= \frac{\hat{q}}{\|q\|} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır. Böylece $\mathbb{Q}$ cebirinde bölme işlemi tanımlanabilir [7].

Tanım 2.2.11. $q_2 \neq 0$ olmak üzere, q_1 kuaterniyonunu q_2 kuaterniyonu ile bölmek için, kuaterniyon çarpımının değişme özelliği olmadığından, q_1, q_2^{-1} ile sağdan ve soldan çarpılırsa

$$\begin{aligned} r_1 &= q_1 \times q_2^{-1} \\ r_2 &= q_2^{-1} \times q_1 \end{aligned}$$

elde edilir. Burada r_1 kuaterniyonuna q_1 kuaterniyonunun q_2 kuaterniyonu ile sağdan ve r_2 kuaterniyonuna da q_1 kuaterniyonunun q_2 kuaterniyonu ile soldan bölümü denir. Genel olarak r_1 ve r_2 farklıdır.

Eğer genelleştirme yapılırsa $\forall\, q_1, q_2, \ldots\ldots\ldots\ldots, q_n \in \mathbb{Q}$ için

$$\begin{aligned} \widehat{\left(q_1 + q_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + q_n\right)} &= \widehat{\left(q_1\right)} + \widehat{\left(q_2\right)} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \widehat{\left(q_n\right)} \\ \widehat{\left(q_1 \times q_2 \times \ldots\ldots\ldots\ldots \times q_n\right)} &= \widehat{\left(q_n\right)} \times \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \times \widehat{\left(q_2\right)} \times \widehat{\left(q_1\right)} \\ \left(q_1 \times q_2 \times \ldots\ldots\ldots\ldots \times q_n\right)^{-1} &= \left(q_n\right)^{-1} \times \ldots\ldots\ldots\ldots \times \left(q_2\right)^{-1} \times \left(q_1\right)^{-1} \end{aligned}$$

bağıntıları elde edilir [7].

Tanım 2.2.12. Normu birim olan kuaterniyona birim kuaterniyon denir ve q_0 ile gösterilir. Buna göre vektörlerde olduğu gibi herhangi bir q_0 birim kuaterniyonu, $\|q\|^2 = h(q,q) = q \times \hat{q} = d^2 + a^2 + b^2 + c^2$ olmak üzere,

$$q_0 = \frac{q}{\|q\|} = \frac{d + a\boldsymbol{e}_1 + b\boldsymbol{e}_2 + c\boldsymbol{e}_3}{\sqrt{d^2 + a^2 + b^2 + c^2}}$$

biçiminde ifade edilir. Bu q_0 birim kuaterniyonu

$$q_0 = \cos\omega + \boldsymbol{S}_0 \sin\omega$$

formunda da yazılabilir. Burada

$$\cos\omega = \frac{d}{\sqrt{d^2 + a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$\sin\omega = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}{\sqrt{d^2 + a^2 + b^2 + c^2}}$$

biçimindedir. $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$ olduğu zaman

$$\boldsymbol{S}_0 = \frac{a\boldsymbol{e}_1 + b\boldsymbol{e}_2 + c\boldsymbol{e}_3}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

birim vektörüne q_0 birim kuaterniyonunun ekseni denir [7].

Tanım 2.2.13. Eğer $q \in \mathbb{Q}$ kuaterniyonu için

$$q + \hat{q} = 0$$

ise q kuaterniyonuna bir uzaysal kuaterniyon denir. Uzaysal kuaterniyonların kümesi $3-$boyutlu vektör uzayı $\mathbb{R}^3$ uzayına izomorftur.

Ayrıca, q_1, q_2 gibi iki uzaysal kuaterniyonun kuaterniyonik çarpımı

$$q_1 \times q_2 = -\langle q_1, q_2 \rangle + q_1 \wedge q_2$$

şeklindedir. Dolayısıyla, iki uzaysal kuaterniyon birbirine dikse kuaterniyon çarpımları vektörel çarpımlarına, paralel ise kuaterniyon çarpımları bu iki vektörün skalar çarpımının ters işaretlisine eşit olur [7].

Eğer $q \in \mathbb{Q}$ kuaterniyonu için

$$q-\hat{q}=0$$

oluyorsa q kuaterniyonuna temporal kuaterniyon denir. O halde genel olarak bir q kuaterniyonu

$$q=\frac{1}{2}\left(q+\hat{q}\right)+\frac{1}{2}(q-\hat{q})$$

şeklinde yazılabilir [7].

Tanım 2.2.14. $\mathbb{Q}$ reel kuaterniyonlar kümesinde $s\in I=\left[0,1\right]$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}&\alpha: I\subset\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{Q}\\ &\qquad s\rightarrow\alpha(s)=\sum_{i=1}^{3}\alpha_i(s)\boldsymbol{e}_i, \qquad (1\leq i\leq 3)\end{aligned}$$

olarak tanımlanan eğriye uzaysal kuaterniyonik eğri denir [1].

Teorem 2.2.1. $\alpha: I\rightarrow\mathbb{E}^3$**,** uzaysal kuaterniyonik eğrisi $s\in\left[0,1\right]$ yay-parametresi ile verilsin. $\alpha(s)$, uzaysal kuaterniyonik eğrisinin $\left\{\boldsymbol{t}(s),\boldsymbol{n}(s),\boldsymbol{b}(s)\right\}$ Frenet vektörleri

$$\begin{aligned}\boldsymbol{t}(s)&=\alpha'(s)\\ \boldsymbol{n}(s)&=\frac{1}{\left\|\alpha''(s)\right\|}\alpha''(s)\\ \boldsymbol{b}(s)&=\boldsymbol{t}(s)\times\boldsymbol{n}(s)\end{aligned}\tag{2.2.3}$$

şeklinde hesaplanır. Bu vektörler arasında

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{t}(s)\times\boldsymbol{t}(s)=\boldsymbol{n}(s)\times\boldsymbol{n}(s)=\boldsymbol{b}(s)\times\boldsymbol{b}(s)=-1\\ &\boldsymbol{t}(s)\times\boldsymbol{n}(s)=\boldsymbol{b}(s)=-\boldsymbol{n}(s)\times\boldsymbol{t}(s)\\ &\boldsymbol{n}(s)\times\boldsymbol{b}(s)=\boldsymbol{t}(s)=-\boldsymbol{b}(s)\times\boldsymbol{n}(s)\\ &\boldsymbol{b}(s)\times\boldsymbol{t}(s)=\boldsymbol{n}(s)=-\boldsymbol{t}(s)\times\boldsymbol{b}(s)\end{aligned}\tag{2.2.4}$$

olacak şekilde bir bağıntı vardır [10].

Teorem 2.2.2. $\alpha : I \to \mathbb{E}^3$, uzaysal kuaterniyonik eğrisi verilsin. $s \in [0,1]$ herhangi bir parametresi olmak üzere, $\alpha(s)$, uzaysal kuaterniyonik eğrisinin $\{\boldsymbol{t}(s), \boldsymbol{n}(s), \boldsymbol{b}(s)\}$ Frenet vektörleri

$$\begin{aligned} \boldsymbol{t}(s) &= \frac{1}{\nu(s)}\alpha'(s), \qquad \|\alpha'(s)\| = \nu(s) \\ \boldsymbol{n}(s) &= \boldsymbol{b}(s) \times \boldsymbol{t}(s) \\ \boldsymbol{b}(s) &= \frac{\alpha'(s) \times \alpha''(s) + \nu(s)\nu'(s)}{\|\alpha'(s) \times \alpha''(s) + \nu(s)\nu'(s)\|} \end{aligned} \tag{2.2.5}$$

şeklindedir.

Teorem 2.2.3. $\alpha : I \to \mathbb{E}^3$, uzaysal kuaterniyonik eğrisinin $s \in [0,1]$ herhangi bir parametresi ve $\alpha(s)$ noktasındaki eğriliği ile burulması, sırasıyla, $k(\mathrm{s})$, $r(\mathrm{s})$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} k(s) &= \frac{\|\alpha'(s) \times \alpha''(s) + \nu(s)\nu'(s)\|}{\nu^3(s)}, \qquad \|\alpha'(s)\| = \nu(s) \\ r(s) &= \frac{h(\alpha'(s) \times \alpha''(s), \alpha'''(s))}{\|\alpha'(s) \times \alpha''(s) + \nu(s)\nu'(s)\|^2} \end{aligned} \tag{2.2.6}$$

şeklinde hesaplanır.

Teorem 2.2.4. $\alpha : I \to \mathbb{E}^3$, uzaysal kuaterniyonik eğrisi $s \in [0,1]$ yay-parametresi ile verilsin. α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet $3-$ayaklısı $\{\boldsymbol{t}(s), \boldsymbol{n}(s), \boldsymbol{b}(s)\}$ ve eğrilikleri de $k(s)$, $r(s)$ olmak üzere, $\alpha(s)$ eğrisi boyunca $\{\boldsymbol{t}(s), \boldsymbol{n}(s), \boldsymbol{b}(s)\}$ vektörlerinin türevleri ile eğrilikler arasındaki ilişki

$$\begin{aligned} \boldsymbol{t}'(s) &= k(s)\boldsymbol{n}(s) \\ \boldsymbol{n}'(s) &= -k(s)\boldsymbol{t}(s) + r(s)\boldsymbol{b}(s) \\ \boldsymbol{b}'(s) &= -r(s)\boldsymbol{n}(s) \end{aligned} \tag{2.2.7}$$

biçimindedir. Bu formüllere Frenet formülleri denir ve matrisel ifadesi ise

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{t}' \\ \boldsymbol{n}' \\ \boldsymbol{b}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k & 0 \\ -k & 0 & r \\ 0 & -r & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{t} \\ \boldsymbol{n} \\ \boldsymbol{b} \end{bmatrix} \tag{2.2.8}$$

şeklindedir [18].

Tanım 2.2.15. $\mathbb{Q}$ reel kuaterniyonlar kümesinde $s \in I = [0,1]$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} &\xi : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{Q} \\ &\qquad s \to \xi(s) = \sum_{i=1}^{4} \xi_i(s)\boldsymbol{e}_i, \quad (1 \leq i \leq 4), \quad (\boldsymbol{e}_4 = 1) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan eğriye kuaterniyonik eğri denir [1].

Teorem 2.2.5. $\xi : I \to \mathbb{Q}$ kuaterniyonik eğrisi herhangi bir $s \in [0,1]$ parametresi ile verilsin. ξ kuaterniyonik eğrisinin $\xi(s)$ noktasındaki $\{\boldsymbol{T}(s), \boldsymbol{N}(s), \boldsymbol{B}(s), \boldsymbol{E}(s)\}$ Frenet vektörleri

$$\begin{aligned} \boldsymbol{T}(s) &= \frac{1}{\|\xi'(s)\|}\xi'(s) \\ \boldsymbol{N}(s) &= \frac{\|\xi'(s)\|^2 \xi''(s) - h(\xi'(s), \xi''(s))\xi'(s)}{\left\| \|\xi'(s)\|^2 \xi''(s) - h(\xi'(s), \xi''(s))\xi'(s) \right\|} \\ \boldsymbol{B}(s) &= \eta \boldsymbol{E}(s) \wedge \boldsymbol{T}(s) \wedge \boldsymbol{N}(s) \\ \boldsymbol{E}(s) &= \eta \frac{\boldsymbol{T}(s) \wedge \boldsymbol{N}(s) \wedge \xi'''(s)}{\|\boldsymbol{T}(s) \wedge \boldsymbol{N}(s) \wedge \xi'''(s)\|}, \qquad (\eta = \pm 1) \end{aligned} \tag{2.2.9}$$

şeklindedir.

Teorem 2.2.6. $\xi : I \to \mathbb{Q}$, kuaterniyonik eğrisi herhangi bir $s \in [0,1]$ parametresi ile verilsin. ξ kuaterniyonik eğrisinin $\xi(s)$ noktasındaki Frenet eğrilikleri, sırasıyla, $\kappa(s)$, $k(s)$ ve $(r(s) - \kappa(s))$ olmak üzere,

$$
\begin{aligned}
\kappa(s) &= \frac{\left\| \left\| \xi'(s) \right\|^2 \xi''(s) - h\left(\xi'(s), \xi''(s) \right) \xi'(s) \right\|}{\left\| \xi'(s) \right\|^4} \\
k(s) &= \frac{\left\| \boldsymbol{T}(s) \wedge \boldsymbol{N}(s) \wedge \xi'''(s) \right\| \left\| \xi'(s) \right\|}{\left\| \left\| \xi'(s) \right\|^2 \xi''(s) - h\left(\xi'(s), \xi''(s) \right) \xi'(s) \right\|} \\
r(s) - \kappa(s) &= \frac{h\left(\xi^{(iv)}(s), \boldsymbol{E}(s) \right)}{\left\| \boldsymbol{T}(s) \wedge \boldsymbol{N}(s) \wedge \xi'''(s) \right\| \left\| \xi'(s) \right\|}
\end{aligned}
\qquad (2.2.10)
$$

şeklinde hesaplanır.

Teorem 2.2.7. $\xi : I \to \mathbb{Q}$, kuaterniyonik eğrisi herhangi bir $s \in [0,1]$ parametresi ile verilsin. $\xi(s)$ noktasındaki Frenet $4-$ayaklısı $\{\boldsymbol{T}(s), \boldsymbol{N}(s), \boldsymbol{B}(s), \boldsymbol{E}(s)\}$ ve eğrilikleri de $\kappa(s)$, $k(s)$ *ve* $(r(s) - \kappa(s))$ olmak üzere, $\xi(s)$ kuaterniyonik eğrisi boyunca Frenet vektörleri ile eğrilikler arasındaki ilişki aşağıdaki gibidir.

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{T}'(s) = \kappa(s)\boldsymbol{N}(s), \qquad \kappa(s) = \left\| \boldsymbol{T}'(s) \right\|, && \boldsymbol{N}(s) = \boldsymbol{t}(s) \times \boldsymbol{T}(s) \\
&\boldsymbol{N}'(s) = -\kappa(s)\boldsymbol{T}(s) + k(s)\boldsymbol{B}(s), && \boldsymbol{B}(s) = \boldsymbol{n}(s) \times \boldsymbol{T}(s) \\
&\boldsymbol{B}'(s) = -k(s)\boldsymbol{N}(s) + \left(r(s) - \kappa(s) \right) \boldsymbol{E}(s), && \boldsymbol{E}(s) = \boldsymbol{b}(s) \times \boldsymbol{T}(s) \\
&\boldsymbol{E}'(s) = -\left(r(s) - \kappa_{\xi}(s) \right) \boldsymbol{B}(s)
\end{aligned}
\qquad (2.2.11)
$$

Bu formüllere Frenet formülleri denir ve matrisel ifadesi

$$
\begin{bmatrix} \boldsymbol{T}' \\ \boldsymbol{N}' \\ \boldsymbol{B}' \\ \boldsymbol{E}' \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
0 & \kappa & 0 & 0 \\
-\kappa & 0 & k & 0 \\
0 & -k & 0 & (r-\kappa) \\
0 & 0 & -(r-\kappa) & 0
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} \boldsymbol{T} \\ \boldsymbol{N} \\ \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{E} \end{bmatrix}
\qquad (2.2.12)
$$

şeklindedir [1].

Burada $\xi(s)$ kuaterniyonik eğrisi öyle seçildi ki kuaterniyonik eğrinin birim teğet vektörü olan $\boldsymbol{T}(s)$ vektörü, $\boldsymbol{t}(s)=\boldsymbol{N}(s)\times\widehat{\boldsymbol{T}}(s)$ bağıntısı ile verildi. O halde $\xi(s)$ kuaterniyonik eğrisinin burulması, $\alpha(s)$ uzaysal kuaterniyonik eğrisinin asli eğriliğidir. Ayrıca, $\alpha(s)$ uzaysal kuaterniyonik eğrisinin burulması $r(s)$ ve $\xi(s)$ kuaterniyonik eğrisinin asli eğriliği $\kappa(s)$ olmak üzere, $\xi(s)$ kuaterniyonik eğrisinin 3.eğriliği $\left(r(s)-\kappa(s)\right)$ dır [18].

BÖLÜM 3. ÖKLİD UZAYINDA İNVOLÜT-EVOLÜT EĞRİ ÇİFTLERİ

Bu bölümde, ilk olarak, $\mathbb{E}^3$, $3-$boyutlu Öklid uzayında involüt-evolüt eğri çiftlerinin Frenet elemanları birbirleri cinsinden verilmiştir [16]. Ayrıca, $\mathbb{E}^4$, $4-$boyutlu Öklid uzayında involüt eğrisinin Frenet elemanları evolüt eğrisinin Frenet elemanları cinsinden verilmiştir [15]. Bu çalışmalara ek olarak, $\mathbb{E}^4$, $4-$boyutlu Öklid uzayında evolüt eğrisinin Frenet elemanlarının involüt eğrisinin Frenet elemanları cinsinden yazılabildiği gösterilmiştir.

3.1. $\mathbb{E}^3$, 3-Boyutlu Öklid Uzayında İnvolüt-Evolüt Eğri Çiftleri

$\mathbb{E}^3$**,** $3-$boyutlu Öklid uzayında α ve β eğrileri, sırasıyla, $s, s^* \in I$ parametrelerine sahip olmak üzere,

$$\alpha = \alpha(s) \quad \text{ve} \quad \beta = \beta(s^*)$$

şeklinde verilsin. α ve β eğrilerinin Frenet vektörleri, sırasıyla, $\{\boldsymbol{t}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{b}\}$ ve $\{\boldsymbol{t}^*, \boldsymbol{n}^*, \boldsymbol{b}^*\}$ olmak üzere burada $\boldsymbol{t}$ ve $\boldsymbol{t}^*$ teğet vektör alanlarıdır. Ayrıca, bu eğrilerin eğrilikleri, sırasıyla, κ, τ ve κ^*, τ^* olsun. Bu koşullar altında α ve β eğri çiftinin involüt-evolüt eğri çifti olması ile ilgili aşağıdaki tanım verilebilir.

Tanım 3.1.1. $\alpha : I \to \mathbb{E}^3$ ve $\beta : I \to \mathbb{E}^3$ eğrileri için,

$$f : I \to I$$
$$s \to s^* = f(s), \ \frac{ds^*}{ds} \neq 0$$

birebir ve örten dönüşümü altında

$$\left\langle \boldsymbol{t}(s), \boldsymbol{t}^*(s^*) \right\rangle = 0$$

şartı sağlanıyorsa; $\beta(s^*)$ eğrisine, $\alpha(s)$ eğrisinin involütü, $\alpha(s)$ eğrisine de $\beta(s^*)$ eğrisinin evolütü denir [16].

Teorem 3.1.1. $\alpha : I \to \mathbb{E}^3$ eğrisi $s \in I$ yay-parametresi ile verilsin. $\alpha(s)$ eğrisinin involütü, herhangi bir $s^* \in I$ parametreli $\beta : I \to \mathbb{E}^3$ eğrisi olmak üzere, $\forall s, s^* \in I$ için

$$d(\alpha(s), \beta(s^*)) = \left| c - s \right|, \qquad (c \in \mathbb{R})$$

dir. Böylece

$$\beta(s^*) = \alpha(s) + (c - s)\boldsymbol{t}(s) \tag{3.1.1}$$

şeklinde yazılabilir [16].

Teorem 3.1.2. $\alpha : I \to \mathbb{E}^3$ eğrisi $s \in I$ yay-parametresi ile verilsin. $\alpha(s)$ eğrisinin involütü, herhangi bir $s^* \in I$ parametreli $\beta : I \to \mathbb{E}^3$ eğrisi ise; $\frac{ds^*}{ds} = \text{sbt}$ olmak üzere, $\alpha(s)$ eğrisinin Frenet vektör alanları $\{\boldsymbol{t}(s), \boldsymbol{n}(s), \boldsymbol{b}(s)\}$ ile $\beta(s^*)$ eğrisinin Frenet vektör alanları $\{\boldsymbol{t}^*(s^*), \boldsymbol{n}^*(s^*), \boldsymbol{b}^*(s^*)\}$ arasında

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{t}^*(s^*) &= \boldsymbol{n}(s) \\
\boldsymbol{n}^*(s^*) &= \frac{-\kappa(s)}{\sqrt{\kappa^2(s)+\tau^2(s)}}\boldsymbol{t}(s) + \frac{\tau(s)}{\sqrt{\kappa^2(s)+\tau^2(s)}}\boldsymbol{b}(s) \\
\boldsymbol{b}^*(s^*) &= \frac{\tau(s)}{\sqrt{\kappa^2(s)+\tau^2(s)}}\boldsymbol{t}(s) + \frac{\kappa(s)}{\sqrt{\kappa^2(s)+\tau^2(s)}}\boldsymbol{b}(s)
\end{aligned} \tag{3.1.2}$$

bağıntıları vardır [16].

Bundan sonra aksi söylenmedikçe $\dfrac{ds^*}{ds}$ sabit alınacaktır.

Teorem 3.1.3. $\alpha : I \to \mathbb{E}^3$ eğrisi $s \in I$ yay-parametresi ile verilsin. $\alpha(s)$ eğrisinin involütü, herhangi bir $s^* \in I$ parametreli $\beta : I \to \mathbb{E}^3$ eğrisi olmak üzere, $\alpha(s)$ eğrisinin Frenet eğrilikleri $\kappa(s), \tau(s)$, $\beta(s^*)$ eğrisinin Frenet eğrilikleri $\kappa^*(s^*), \tau^*(s^*)$ cinsinden

$$\begin{aligned}
\kappa^*(s^*) &= \frac{\sqrt{\kappa^2(s)+\tau^2(s)}}{\left|(c-s)\kappa(s)\right|} \\
\tau^*(s^*) &= \frac{\kappa(s)\tau'(s)-\kappa'(s)\tau(s)}{\left|(c-s)\kappa(s)\right|(\kappa^2(s)+\tau^2(s))}
\end{aligned} \tag{3.1.3}$$

şeklinde yazılır [16].

Teorem 3.1.4. $\alpha : I \to \mathbb{E}^3$ eğrisi $s \in I$ yay-parametresi ile verilsin. $\alpha(s)$ eğrisinin involütü, herhangi bir $s^* \in I$ parametreli $\beta : I \to \mathbb{E}^3$ eğrisi ise;

$$\varphi(s^*) = \int_0^{s^*} \tau^*(u)\,du$$

olmak üzere,

$$\alpha(s) = \beta(s^*) + \rho(s^*)\boldsymbol{n}^*(s^*) - \rho(s^*)\tan\left[\varphi(s^*)+c\right]\boldsymbol{b}^*(s^*), \qquad c \in \mathbb{R} \tag{3.1.4}$$

dir. Ayrıca, $\beta(s^*)$ noktasındaki normal düzlemde, birinci kenarı $\alpha(s)-\beta(s^*)$, ikinci kenarı $\boldsymbol{n}^*(s^*)$ olan yönlü açının ölçüsü $\varphi(s^*)+c$ dir [16].

Teorem 3.1.5. $\beta : I \to \mathbb{E}^3$ eğrisi $s^* \in I$ yay-parametresi ile verilsin. $\beta(s^*)$ eğrisinin evolütü, herhangi bir $s \in I$ parametreli $\alpha : I \to \mathbb{E}^3$ eğrisi olmak üzere, $\alpha(s)$ eğrisinin Frenet vektör alanları $\{\boldsymbol{t}(s), \boldsymbol{n}(s), \boldsymbol{b}(s)\}$, $\beta(s^*)$ eğrisinin Frenet vektör alanları $\{\boldsymbol{t}^*(s^*), \boldsymbol{n}^*(s^*), \boldsymbol{b}^*(s^*)\}$ cinsinden

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{t}(s) &= \cos(\varphi(s^*)+c)\boldsymbol{n}^*(s^*) - \sin(\varphi(s^*)+c)\boldsymbol{b}^*(s^*) \\
\boldsymbol{n}(s) &= -\boldsymbol{t}^*(s^*) \\
\boldsymbol{b}(s) &= \sin(\varphi(s^*)+c)\boldsymbol{n}^*(s^*) + \cos(\varphi(s^*)+c)\boldsymbol{b}^*(s^*)
\end{aligned} \tag{3.1.5}$$

şeklinde yazılır [16].

Teorem 3.1.6. $\beta : I \to \mathbb{E}^3$ eğrisi $s^* \in I$ yay-parametresi ile verilsin. $\beta(s^*)$ eğrisinin evolütü, herhangi bir $s \in I$ parametreli $\alpha : I \to \mathbb{E}^3$ eğrisi olmak üzere, $\alpha(s)$ eğrisinin Frenet eğrilikleri $\kappa(s)$, $\tau(s)$ ile $\beta(s^*)$ eğrisinin Frenet eğrilikleri $\kappa^*(s^*)$, $\tau^*(s^*)$ arasında

$$\begin{aligned}
\kappa(s) &= \frac{\kappa^{*3}(s^*)\cos(\varphi(s^*)+c)}{\kappa^*(s^*)\sin(\varphi(s^*)+c) - \kappa^{*\prime}(s^*)\cos(\varphi(s^*)+c)} \\
\tau(s) &= \frac{-\kappa^{*3}(s^*)\sin(\varphi(s^*)+c)\cos^2(\varphi(s^*)+c)}{\kappa^*(s^*)\tau^*(s^*)\sin(\varphi(s^*)+c) - \kappa^{*\prime}(s^*)\cos(\varphi(s^*)+c)}
\end{aligned} \tag{3.1.6}$$

bağıntıları sağlanır. [16].

Teorem 3.1.7. $\beta : I \to \mathbb{E}^3$ eğrisi $s^* \in I$ yay-parametresi ile verilsin. $\beta(s^*)$ eğrisinin evolütü, herhangi bir $s \in I$ parametreli $\alpha : I \to \mathbb{E}^3$ eğrisi olsun. $\alpha(s)$ eğrisinin eğrilik ve burulması, sırasıyla, $\kappa(s)$, $\tau(s)$ olmak üzere,

$$\frac{\tau(s)}{\kappa(s)} = -\tan(\varphi(s^*)+c)$$

şeklindedir. Burada c yerine c_1 ve c_2 sayıları konularak elde edilen iki evolüt eğrisinin $\alpha^{(1)}(s)$ ve $\alpha^{(2)}(s)$ noktalarındaki teğetleri $\beta(s^*)$ noktasında kesişir. Bu teğetler arasındaki açının ölçüsü $c_1 - c_2$ dir [16].

2.2. $\mathbb{E}^4$, 4-Boyutlu Öklid Uzayında İnvolüt-Evolüt Eğri Çiftleri

$\mathbb{E}^4$, $4-$boyutlu Öklid uzayında ξ ve ϕ eğrileri, sırasıyla, $s, s^* \in I$ parametrelerine sahip olmak üzere,

$$\xi = \xi(s) \quad \text{ve} \quad \phi = \phi(s^*)$$

şeklinde verilsin. ξ ve ϕ eğrilerinin Frenet vektörleri, sırasıyla, $\{\boldsymbol{T}_\xi, \boldsymbol{N}_\xi, \boldsymbol{B}_\xi, \boldsymbol{E}_\xi\}$ ve $\{\boldsymbol{T}_\phi, \boldsymbol{N}_\phi, \boldsymbol{B}_\phi, \boldsymbol{E}_\phi\}$ olmak üzere $\boldsymbol{T}_\xi$ ve $\boldsymbol{T}_\phi$ teğet vektör alanlarıdır. Ayrıca, bu eğrilerin eğrilikleri, sırasıyla $\kappa_\xi, \tau_\xi, \sigma_\xi$ ve $\kappa_\phi, \tau_\phi, \sigma_\phi$ olsun. Bu koşullar altında ξ ve ϕ eğri çiftinin involüt-evolüt eğri çifti olması ile ilgili aşağıdaki tanım verilebilir.

Tanım 3.2.1. $\xi : I \to \mathbb{E}^4$ ve $\phi : I \to \mathbb{E}^4$ eğrileri için,

$$\begin{aligned} f &: I \to I \\ &\quad s \to s^* = f(s), \ \frac{ds^*}{ds} \neq 0 \end{aligned}$$

birebir ve örten dönüşümü altında

$$\langle \boldsymbol{T}_\xi(s), \boldsymbol{T}_\phi(s^*) \rangle = 0$$

şartı sağlanıyorsa; $\phi(s^*)$ eğrisine $\xi(s)$ eğrisinin involütü, $\xi(s)$ eğrisine de $\phi(s^*)$ eğrisinin evolütü denir [15].

Teorem 3.2.1. $\xi : I \to \mathbb{E}^4$ eğrisi $s \in I$ yay-parametresi ile verilsin. Herhangi bir $s^* \in I$ parametreli $\phi : I \to \mathbb{E}^4$ eğrisi $\xi(s)$ eğrisinin bir involütü olmak üzere,

$$d(\xi(s), \phi(s^*)) = |c - s|, \qquad (c \in \mathbb{R})$$

dir. Böylece

$$\phi(s^*) = \xi(s) + (c - s)\boldsymbol{T}_\xi(s)$$

şeklinde yazılabilir [8].

Teorem 3.2.2. $\xi : I \to \mathbb{E}^4$ eğrisi $s \in I$ yay-parametresi ile verilsin. Herhangi bir $s^* \in I$ parametreli $\phi : I \to \mathbb{E}^4$ eğrisi $\xi(s)$ eğrisinin bir involütü olmak üzere, $\phi(s^*)$ eğrisinin Frenet vektörleri $\{\boldsymbol{T}_\phi(s^*), \boldsymbol{N}_\phi(s^*), \boldsymbol{B}_\phi(s^*), \boldsymbol{E}_\phi(s^*)\}$, $\xi(s)$ eğrisinin Frenet vektörleri $\{\boldsymbol{T}_\xi(s), \boldsymbol{N}_\xi(s), \boldsymbol{B}_\xi(s), \boldsymbol{E}_\xi(s)\}$ cinsinden yazılabilir [15].

İspat: $\xi : I \to \mathbb{E}^4$ eğrisi $s \in I$ yay-parametresi ile verilmek üzere, herhangi bir $s^* \in I$ parametreli $\phi : I \to \mathbb{E}^4$ eğrisi $\xi(s)$ eğrisinin bir involütü olsun. Teorem 3.2.1' den

$$\phi(s^*) = \xi(s) + (c - s)\boldsymbol{T}_\xi(s)$$

dir. Buradan $\phi(s^*)$ eğrisinin (2.1.9) Frenet formülleri kullanılarak $s \in I$ parametresine göre 1. 2. 3. ve 4. mertebeden türevleri, sırasıyla, hesaplanırsa

$$\frac{d\phi}{ds^*}\frac{ds^*}{ds} = \xi'(s) - \boldsymbol{T}_\xi(s) + (c - s)\boldsymbol{T}_\xi'(s)$$

$$\frac{d\phi}{ds^*}\frac{ds^*}{ds} = \boldsymbol{T}_\xi(s) - \boldsymbol{T}_\xi(s) + (c - s)\kappa_\xi(s)\boldsymbol{N}_\xi(s)$$

$$\frac{d\phi}{ds^*}\frac{ds^*}{ds} = (c - s)\kappa_\xi(s)\boldsymbol{N}_\xi(s) \qquad (3.2.1)$$

$$\frac{d^2\phi}{ds^{*2}}\frac{ds^{*2}}{ds^2}=-(c-s)\kappa_\xi^{\,2}(s)\boldsymbol{T}_\xi(s)+\Big[(c-s)\kappa_\xi'(s)-\kappa_\xi(s)\Big]\boldsymbol{N}_\xi(s)+(c-s)\kappa_\xi(s)\tau_\xi(s)\boldsymbol{B}_\xi(s)$$

(3.2.2)

$$\begin{aligned}\frac{d^3\phi}{ds^{*3}}\frac{ds^{*3}}{ds^3}&=\Big[2\kappa_\xi^{\,2}(s)-3(c-s)\kappa_\xi(s)\kappa_\xi'(s)\Big]\boldsymbol{T}_\xi(s)\\&+\Big[-(c-s)\kappa_\xi(s)\big[\kappa_\xi^{\,2}(s)+\tau_\xi^{\,2}(s)\big]-2\kappa_\xi'(s)+(c-s)\kappa_\xi''(s)\Big]\boldsymbol{N}_\xi(s)\\&+\Big[2(c-s)\kappa_\xi'(s)\tau_\xi(s)-2\kappa_\xi(s)\tau_\xi(s)+(c-s)\kappa_\xi(s)\tau_\xi'(s)\Big]\boldsymbol{B}_\xi(s)\\&+(c-s)\kappa_\xi(s)\tau_\xi(s)\sigma_\xi(s)\boldsymbol{E}_\xi(s)\end{aligned}\tag{3.2.3}$$

$$\begin{aligned}\frac{d^4\phi}{ds^{*4}}\frac{ds^{*4}}{ds^4}&=\Big[9\kappa_\xi(s)\kappa_\xi'(s)-3(c-s)\kappa_\xi'^{2}(s)-4(c-s)\kappa_\xi(s)\kappa_\xi''(s)+(c-s)\kappa_\xi^{\,2}(s)\big[\kappa_\xi^{\,2}(s)+\tau_\xi^{\,2}(s)\big]\Big]\boldsymbol{T}_\xi(s)\\&+\begin{bmatrix}3\kappa_\xi^{\,3}(s)-6(c-s)\kappa_\xi^{\,2}(s)\kappa_\xi'(s)+3\kappa_\xi(s)\tau_\xi^{\,2}(s)-3(c-s)\kappa_\xi'(s)\tau_\xi^{\,2}(s)\\-3(c-s)\kappa_\xi(s)\tau_\xi(s)\tau_\xi'(s)-3\kappa_\xi''(s)+(c-s)\kappa_\xi'''(s)\end{bmatrix}\boldsymbol{N}_\xi(s)\\&+\begin{bmatrix}-6\kappa_\xi'(s)\tau_\xi(s)+3(c-s)\kappa_\xi''(s)\tau_\xi(s)+3(c-s)\kappa_\xi'(s)\tau_\xi'(s)-3\kappa_\xi(s)\tau_\xi'(s)\\+(c-s)\kappa_\xi(s)\tau_\xi''(s)-(c-s)\kappa_\xi(s)\tau_\xi(s)\sigma_\xi^{\,2}(s)-(c-s)\kappa_\xi(s)\tau_\xi(s)\big[\kappa_\xi^{\,2}(s)+\tau_\xi^{\,2}(s)\big]\end{bmatrix}\boldsymbol{B}_\xi(s)\\&+\begin{bmatrix}3(c-s)\kappa_\xi'(s)\tau_\xi(s)\sigma_\xi(s)-3\kappa_\xi(s)\tau_\xi(s)\sigma_\xi(s)\\+2(c-s)\kappa_\xi(s)\tau_\xi'(s)\sigma_\xi(s)+(c-s)\kappa_\xi(s)\tau_\xi(s)\sigma_\xi'(s)\end{bmatrix}\boldsymbol{E}_\xi(s)\end{aligned}\tag{3.2.4}$$

elde edilir.

Şimdi $\boldsymbol{T}_\phi(s^*)$ vektörünü hesaplayalım. Bunun için (3.2.1) denkleminin normu hesaplanırsa

$$\left\|\frac{d\phi}{ds^*}\frac{ds^*}{ds}\right\|=\left|(c-s)\kappa_\xi(s)\right|$$

$$\left\|\frac{d\phi}{ds^*}\right\|=\left|\frac{ds}{ds^*}\right|\left|(c-s)\kappa_\xi(s)\right|\tag{3.2.5}$$

bulunur. Dolayısıyla, (2.1.4) Frenet denklemleri ve (3.2.1), (3.2.5) denklemleri yardımıyla $\boldsymbol{T}_\phi(s^*)$ vektörü

$$\boldsymbol{T}_{\phi}(s^{*})=\frac{\dfrac{ds}{ds^{*}}(c-s)\kappa_{\xi}(s)}{\left|\dfrac{ds}{ds^{*}}\right|\left|(c-s)\kappa_{\xi}(s)\right|}\boldsymbol{N}_{\xi}(s)$$

şeklinde elde edilir. Böylece $\left\{\boldsymbol{T}_{\phi}(s^{*}),\boldsymbol{N}_{\xi}(s)\right\}$ vektörlerinin lineer bağımlı olduğu görülür. O halde

$$\boldsymbol{T}_{\phi}(s^{*})=\boldsymbol{N}_{\xi}(s) \qquad (3.2.6)$$

alınabilir.

Şimdi $\boldsymbol{N}_{\phi}(s^{*})$ vektörünü hesaplayalım. Bunun için ilk önce (3.2.1) ve (3.2.2) denklemleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}\left\langle \frac{d\phi}{ds^{*}}\frac{ds^{*}}{ds},\frac{d^{2}\phi}{ds^{*2}}\frac{ds^{*2}}{ds^{2}}\right\rangle &=\frac{ds^{*3}}{ds^{3}}\left\langle \frac{d\phi}{ds^{*}},\frac{d^{2}\phi}{ds^{*2}}\right\rangle\\ &=\left\langle (c-s)\kappa_{\xi}(s)\boldsymbol{N}_{\xi}(s),\begin{bmatrix}-(c-s)\kappa_{\xi}^{2}(s)\boldsymbol{T}_{\xi}(s)+\left[(c-s)\kappa_{\xi}'(s)-\kappa_{\xi}(s)\right]\boldsymbol{N}_{\xi}(s)\\ +(c-s)\kappa_{\xi}(s)\tau_{\xi}(s)\boldsymbol{B}_{\xi}(s)\end{bmatrix}\right\rangle\\ &=(c-s)^{2}\kappa_{\xi}(s)\kappa_{\xi}'(s)-(c-s)\kappa_{\xi}^{2}(s) \qquad (3.2.7)\end{aligned}$$

elde edilir. O halde (2.1.4) Frenet denklemlerinde (3.2.1), (3.2.2), (3.2.5) ve (3.2.7) denklemleri yerlerine yazılırsa $\boldsymbol{N}_{\phi}(s^{*})$ vektörü

$$\boldsymbol{N}_{\phi}(s^{*})=\frac{(c-s)^{3}\kappa_{\xi}^{3}(s)\left[-\kappa_{\xi}(s)\boldsymbol{T}_{\xi}(s)+\tau_{\xi}(s)\boldsymbol{B}_{\xi}(s)\right]}{(c-s)^{3}\kappa_{\xi}^{3}(s)\sqrt{\kappa_{\xi}^{2}(s)+\tau_{\xi}^{2}(s)}}$$

$$\boldsymbol{N}_{\phi}(s^{*})=\frac{-\kappa_{\xi}(s)}{\sqrt{\kappa_{\xi}^{2}(s)+\tau_{\xi}^{2}(s)}}\boldsymbol{T}_{\xi}(s)+\frac{\tau_{\xi}(s)}{\sqrt{\kappa_{\xi}^{2}(s)+\tau_{\xi}^{2}(s)}}\boldsymbol{B}_{\xi}(s) \qquad (3.2.8)$$

şeklinde bulunur.

Şimdi $\boldsymbol{E}_{\phi}(s^{*})$ vektörünü hesaplayalım. Bunun için ilk önce $\boldsymbol{T}_{\phi}(s^{*})\wedge\boldsymbol{N}_{\phi}(s^{*})\wedge\dfrac{d^{3}\phi}{ds^{*3}}$ vektörünü hesaplayalım. Kısalık için $\dfrac{d^{3}\phi}{ds^{*3}}\dfrac{ds^{*3}}{ds^{3}}$ vektörünün bileşenleri

$$\begin{aligned}
X &= 2\kappa_\xi^{\,2}(s) - 3(c-s)\kappa_\xi(s)\kappa_\xi'(s) \\
Y &= -(c-s)\kappa_\xi(s)\left[\kappa_\xi^{\,2}(s) + \tau_\xi^{\,2}(s)\right] - 2(c-s)\kappa_\xi'(s) + \kappa_\xi''(s) \\
Z &= 2(c-s)\kappa_\xi'(s)\tau_\xi(s) - 2\kappa_\xi(s)\tau_\xi(s) + (c-s)\kappa_\xi(s)\tau_\xi'(s) \\
V &= (c-s)\kappa_\xi(s)\tau_\xi(s)\sigma_\xi(s)
\end{aligned}$$

şeklinde alınacaktır. O halde

$$\boldsymbol{T}_\phi(s^*) \wedge \boldsymbol{N}_\phi(s^*) \wedge \frac{d^3\phi}{ds^{*3}} = \frac{ds^3}{ds^{*3}} \begin{vmatrix} \boldsymbol{T}_\xi(s) & \boldsymbol{N}_\xi(s) & \boldsymbol{B}_\xi(s) & \boldsymbol{E}_\xi(s) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \dfrac{-\kappa_\xi(s)}{\sqrt{\kappa_\xi^{\,2}(s)+\tau_\xi^{\,2}(s)}} & 0 & \dfrac{\tau_\xi(s)}{\sqrt{\kappa_\xi^{\,2}(s)+\tau_\xi^{\,2}(s)}} & 0 \\ X & Y & Z & V \end{vmatrix}$$

vektörel çarpımı yapılırsa

$$\boldsymbol{T}_\phi(s^*) \wedge \boldsymbol{N}_\phi(s^*) \wedge \frac{d^3\phi}{ds^{*3}} = \frac{ds^3}{ds^{*3}} \left[\frac{(c-s)\kappa_\xi(s)}{\sqrt{\kappa_\xi^{\,2}(s)+\tau_\xi^{\,2}(s)}} \begin{bmatrix} \tau_\xi^{\,2}(s)\sigma_\xi(s)\boldsymbol{T}_\xi(s) + \kappa_\xi(s)\tau_\xi(s)\sigma_\xi(s)\boldsymbol{B}_\xi(s) \\ +\left(\kappa_\xi'(s)\tau_\xi(s) - \kappa_\xi(s)\tau_\xi'(s)\right)\boldsymbol{E}_\xi(s) \end{bmatrix} \right]$$

(3.2.9)

olur. Bu son denklemin normu hesaplanırsa

$$\left\| \boldsymbol{T}_\phi(s^*) \wedge \boldsymbol{N}_\phi(s^*) \wedge \frac{d^3\phi}{ds^{*3}} \right\| = \left| \frac{ds^3}{ds^{*3}} \right| \frac{(c-s)\kappa_\xi(s)}{\sqrt{\kappa_\xi^{\,2}(s)+\tau_\xi^{\,2}(s)}} \sqrt{\begin{matrix} \tau_\xi^{\,4}(s)\sigma_\xi^{\,2}(s) + \kappa_\xi^{\,2}(s)\tau_\xi^{\,2}(s)\sigma_\xi^{\,2}(s) \\ +\left(\kappa_\xi'(s)\tau_\xi(s) - \kappa_\xi(s)\tau_\xi'(s)\right)^2 \end{matrix}}$$

(3.2.10)

elde edilir. Buradan (3.2.9) ve (3.2.10) denklemleri (2.1.4) Frenet denklemleri ile birlikte göz önüne alınırsa $\boldsymbol{E}_\phi(s^*)$ vektörü

$$\boldsymbol{E}_\phi(s^*) = \eta \frac{\tau_\xi^{\,2}(s)\sigma_\xi(s)\boldsymbol{T}_\xi(s) + \kappa_\xi(s)\tau_\xi(s)\sigma_\xi(s)\boldsymbol{B}_\xi(s) + \left(\kappa_\xi'(s)\tau_\xi(s) - \kappa_\xi(s)\tau_\xi'(s)\right)\boldsymbol{E}_\xi(s)}{\sqrt{\tau_\xi^{\,4}(s)\sigma_\xi^{\,2}(s) + \kappa_\xi^{\,2}(s)\tau_\xi^{\,2}(s)\sigma_\xi^{\,2}(s) + \left(\kappa_\xi'(s)\tau_\xi(s) - \kappa_\xi(s)\tau_\xi'(s)\right)^2}}$$

şeklinde bulunur. Burada η, $\det\left(\boldsymbol{T}_\xi(s), \boldsymbol{N}_\xi(s), \boldsymbol{B}_\xi(s), \boldsymbol{E}_\xi(s)\right)$, $+1$ olacak şekilde ± 1 olarak seçilir.

Son olarak $\boldsymbol{B}_{\phi}(s^*)$ vektörünü bulalım. Bunun için (2.1.4) Frenet denklemlerinde $\boldsymbol{T}_{\phi}(s^*)$, $\boldsymbol{N}_{\phi}(s^*)$ ve $\boldsymbol{E}_{\phi}(s^*)$ vektörleri yerlerine yazılırsa

$$\boldsymbol{B}_{\phi}(s^*)=\eta\frac{\left(\kappa_{\xi}'(s)\tau_{\xi}(s)-\kappa_{\xi}(s)\tau_{\xi}'(s)\right)\left[\tau_{\xi}(s)\boldsymbol{T}_{\xi}(s)+\kappa_{\xi}(s)\boldsymbol{B}_{\xi}(s)\right]-\tau_{\xi}(s)\sigma_{\xi}(s)\left(\kappa_{\xi}^{2}(s)+\tau_{\xi}^{2}(s)\right)\boldsymbol{E}_{\xi}(s)}{\sqrt{\kappa_{\xi}^{2}(s)+\tau_{\xi}^{2}(s)}\sqrt{\tau_{\xi}^{4}(s)\sigma_{\xi}^{2}(s)+\kappa_{\xi}^{2}(s)\tau_{\xi}^{2}(s)\sigma_{\xi}^{2}(s)+\left(\kappa_{\xi}'(s)\tau_{\xi}(s)-\kappa_{\xi}(s)\tau_{\xi}'(s)\right)^{2}}}$$

elde edilir.

Teorem 3.2.3. $\xi : I \to \mathbb{E}^4$ eğrisi $s \in I$ yay-parametresi ile verilsin. Herhangi bir $s^* \in I$ parametreli $\phi : I \to \mathbb{E}^4$ eğrisi $\xi(s)$ eğrisinin bir involütü olmak üzere, $\phi(s^*)$ eğrisinin Frenet eğrilikleri $\kappa_{\phi}(s^*), \tau_{\phi}(s^*), \sigma_{\phi}(s^*)$, $\xi(s)$ eğrisinin Frenet eğrilikleri $\kappa_{\xi}(s), \tau_{\xi}(s), \sigma_{\xi}(s)$ cinsinden yazılabilir [15].

İspat: $\xi : I \to \mathbb{E}^4$ eğrisi $s \in I$ yay-parametresi ile verilmek üzere, herhangi bir $s^* \in I$ parametreli $\phi : I \to \mathbb{E}^4$ eğrisi $\xi(s)$ eğrisinin bir involütü olsun. $\kappa_{\phi}(s^*)$ 1. eğriliği, (2.1.5) Frenet denklemlerinde (3.2.1), (3.2.2), (3.2.5) ve (3.2.7) denklemleri yerlerine yazılırsa

$$\kappa_{\phi}(s^*)=\frac{(c-s)^3\kappa_{\xi}^{3}(s)\sqrt{\kappa_{\xi}^{2}(s)+\tau_{\xi}^{2}(s)}}{\left|\left(c-s\right)\kappa_{\xi}(s)\right|^4}$$

$$\kappa_{\phi}(s^*)=\frac{\sqrt{\kappa_{\xi}^{2}(s)+\tau_{\xi}^{2}(s)}}{\left|\left(c-s\right)\kappa_{\xi}(s)\right|}$$

şeklinde elde edilir.

Ayrıca, $\tau_{\phi}(s^*)$ (burulma) 2. eğriliği, (2.1.5) Frenet denklemlerinde (3.2.1), (3.2.2), (3.2.5), (3.2.7) ve (3.2.10) denklemleri yerlerine yazılırsa

$$\tau_\phi(s^*) = \frac{\sqrt{\tau_\xi^{\,4}(s)\sigma_\xi^{\,2}(s) + \kappa_\xi^{\,2}(s)\tau_\xi^{\,2}(s)\sigma_\xi^{\,2}(s) + \left(\kappa_\xi'(s)\tau_\xi(s) - \kappa_\xi(s)\tau_\xi'(s)\right)^2}}{\left|(c-s)\kappa_\xi(s)\right|\left(\kappa_\xi^{\,2}(s) + \tau_\xi^{\,2}(s)\right)}$$

olarak bulunur.

Aynı şekilde son olarak $\sigma_\phi(s^*)$, 3. eğriliği bulunabilir. Bunun için ilk önce $\left\langle \dfrac{d^4\phi}{ds^{*4}}, \boldsymbol{E}_\phi(s^*) \right\rangle$ iç çarpımı

$$\left\langle \frac{d^4\phi}{ds^{*4}}\frac{ds^{*4}}{ds^4}, \boldsymbol{E}_\phi(s^*) \right\rangle = \frac{ds^{*4}}{ds^4}\left\langle \frac{d^4\phi}{ds^{*4}}, \boldsymbol{E}_\phi(s^*) \right\rangle$$

$$= \frac{\begin{bmatrix} -(c-s)\kappa_\xi(s)\kappa_\xi''(s)\tau_\xi^{\,2}(s)\sigma_\xi(s) + 2(c-s)\kappa_\xi(s)\kappa_\xi'(s)\tau_\xi(s)\tau_\xi'(s)\sigma_\xi(s) \\ +(c-s)\kappa_\xi^{\,2}(s)\tau_\xi(s)\tau_\xi''(s)\sigma_\xi(s) - 2(c-s)\kappa_\xi^{\,2}(s)\tau_\xi'^{\,2}(s)\sigma_\xi(s) \\ -(c-s)\kappa_\xi^{\,2}(s)\tau_\xi(s)\tau_\xi'(s)\sigma_\xi'(s) - (c-s)\kappa_\xi^{\,2}(s)\tau_\xi^{\,2}(s)\sigma_\xi^{\,3}(s) \end{bmatrix}}{\sqrt{\tau_\xi^{\,4}(s)\sigma_\xi^{\,2}(s) + \kappa_\xi^{\,2}(s)\tau_\xi^{\,2}(s)\sigma_\xi^{\,2}(s) + \left(\kappa_\xi'(s)\tau_\xi(s) - \kappa_\xi(s)\tau_\xi'(s)\right)^2}} \tag{3.2.11}$$

şeklinde hesaplanır ve (2.1.5) Frenet denklemlerinde (3.2.5), (3.2.10) ve (3.2.11) denklemleri yerlerine yazılırsa

$$\sigma_\phi(s^*) = \frac{\begin{bmatrix} -(c-s)\kappa_\xi(s)\kappa_\xi''(s)\tau_\xi^{\,2}(s)\sigma_\xi(s) + 2(c-s)\kappa_\xi(s)\kappa_\xi'(s)\tau_\xi(s)\tau_\xi'(s)\sigma_\xi(s) \\ +(c-s)\kappa_\xi^{\,2}(s)\tau_\xi(s)\tau_\xi''(s)\sigma_\xi(s) - 2(c-s)\kappa_\xi^{\,2}(s)\tau_\xi'^{\,2}(s)\sigma_\xi(s) \\ -(c-s)\kappa_\xi^{\,2}(s)\tau_\xi(s)\tau_\xi'(s)\sigma_\xi'(s) - (c-s)\kappa_\xi^{\,2}(s)\tau_\xi^{\,2}(s)\sigma_\xi^{\,3}(s) \end{bmatrix}}{\dfrac{(c-s)^2\kappa_\xi^{\,2}(s)}{\sqrt{\kappa_\xi^{\,2}(s) + \tau_\xi^{\,2}(s)}}\left[\tau_\xi^{\,4}(s)\sigma_\xi^{\,2}(s) + \kappa_\xi^{\,2}(s)\tau_\xi^{\,2}(s)\sigma_\xi^{\,2}(s) + \left(\kappa_\xi'(s)\tau_\xi(s) - \kappa_\xi(s)\tau_\xi'(s)\right)^2\right]}$$

elde edilir.

Sonuç 3.2.1. $\xi(s)$ eğrisi $s \in I$ yay-parametresi cinsinden verilsin. Eğer $\xi(s)$ eğrisi $w-$eğrisi olarak alınırsa $\xi(s)$ eğrisinin eğrilikleri κ_ξ, τ_ξ ve σ_ξ sabit olacağından Teorem 3.2.2' deki Frenet $4-$ayaklısı

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{T}_\phi(s^*) &= \boldsymbol{N}_\xi(s) \\
\boldsymbol{N}_\phi(s^*) &= \frac{-\kappa_\xi(s)}{\sqrt{\kappa_\xi^2(s)+\tau_\xi^2(s)}}\boldsymbol{T}_\xi(s) + \frac{\tau_\xi(s)}{\sqrt{\kappa_\xi^2(s)+\tau_\xi^2(s)}}\boldsymbol{B}_\xi(s) \\
\boldsymbol{B}_\phi(s^*) &= \eta \boldsymbol{E}_\xi(s) \\
\boldsymbol{E}_\phi(s^*) &= \eta\left[\frac{\tau_\xi(s)}{\sqrt{\kappa_\xi^2(s)+\tau_\xi^2(s)}}\boldsymbol{T}_\xi(s) + \frac{\kappa_\xi(s)}{\sqrt{\kappa_\xi^2(s)+\tau_\xi^2(s)}}\boldsymbol{B}_\xi(s)\right]
\end{aligned} \tag{3.2.12}$$

şeklindedir.

Teorem 3.2.4. $\phi : I \to \mathbb{E}^4$ eğrisi $s^* \in I$ yay-parametresi ile verilsin. $\phi(s^*)$ eğrisinin evolütü, $s \in I$ yay-parametreli $\xi : I \to \mathbb{E}^4$ eğrisi $w-$eğrisi olmak üzere,

$$\xi(s) = \phi(s^*) + \rho(s^*)\boldsymbol{N}_\phi(s^*) - \rho(s^*)\frac{\tau_\xi(s)}{\kappa_\xi(s)}\boldsymbol{E}_\phi(s^*)$$

dir. Burada $\rho(s^*)$, $\phi(s^*)$ eğrisinin eğrilik yarıçapıdır.

İspat: $\phi(s^*)$ eğrisinin evolütü olan $\xi(s)$ eğrisini $w-$eğrisi olarak alalım. ξ ve ϕ eğrilerinin yay-parametreleri, sırasıyla, $s \in I$ ve $s^* \in I$ olmak üzere, $\xi(s) - \phi(s^*)$ vektörü, $\boldsymbol{T}_\phi(s^*)$ vektörüne dik olduğundan $\boldsymbol{N}_\phi(s^*)$, $\boldsymbol{B}_\phi(s^*)$ ve $\boldsymbol{E}_\phi(s^*)$ vektörleri cinsinden

$$\xi(s) - \phi(s^*) = \lambda(s^*)\boldsymbol{N}_\phi(s^*) + \mu(s^*)\boldsymbol{B}_\phi(s^*) + \gamma(s^*)\boldsymbol{E}_\phi(s^*) \tag{3.2.13}$$

$$\xi(s) = \phi(s) + \lambda(s^*)\boldsymbol{N}_\phi(s^*) + \mu(s^*)\boldsymbol{B}_\phi(s^*) + \gamma(s^*)\boldsymbol{E}_\phi(s^*)$$

şeklinde yazılabilir. Burada $\lambda(s^*)$, $\mu(s^*)$ ve $\gamma(s^*)$, $s^* \in I$ yay-parametresine bağlı keyfi fonksiyonlardır. Bu son denklemin $s^* \in I$ yay-parametresine göre 1. mertebeden türevi alınırsa

$$\boldsymbol{T}_\xi(s)\frac{ds}{ds^*}=\left(1-\lambda(s^*)\right)\boldsymbol{T}_\phi(s^*)+\left(\lambda'(s^*)+\mu(s^*)\tau_\phi(s^*)\right)\boldsymbol{N}_\phi(s^*)$$
$$+\left(\lambda(s^*)\tau_\phi(s^*)+\mu'(s^*)-\gamma(s^*)\sigma_\phi(s^*)\right)\boldsymbol{B}_\phi(s^*)+\left(\mu(s^*)\sigma_\phi(s^*)+\gamma'(s^*)\right)\boldsymbol{E}_\phi(s^*)$$

elde edilir. Son denklem $\boldsymbol{T}_\phi(s^*)$ vektörü ile skalar olarak çarpılırsa

$$\left\langle \boldsymbol{T}_\xi(s)\frac{ds}{ds^*},\boldsymbol{T}_\phi(s^*)\right\rangle=\left(1-\lambda(s^*)\kappa_\phi(s^*)\right)\left\langle \boldsymbol{T}_\phi(s^*),\boldsymbol{T}_\phi(s^*)\right\rangle+\left(\lambda'(s^*)+\mu(s^*)\tau_\phi(s^*)\right)\left\langle \boldsymbol{N}_\phi(s^*),\boldsymbol{T}_\phi(s^*)\right\rangle$$
$$+\left(\lambda(s^*)\tau_\phi(s^*)+\mu'(s^*)-\gamma(s^*)\sigma_\phi(s^*)\right)\left\langle \boldsymbol{B}_\phi(s^*),\boldsymbol{T}_\phi(s^*)\right\rangle$$
$$+\left(\mu(s^*)\sigma_\phi(s^*)+\gamma'(s^*)\right)\left\langle \boldsymbol{E}_\phi(s^*),\boldsymbol{T}_\phi(s^*)\right\rangle \tag{3.2.14}$$

elde edilir. İnvolüt-evolüt tanımı gereği

$$\left\langle \boldsymbol{T}_\xi(s)\frac{ds}{ds^*},\boldsymbol{T}_\phi(s^*)\right\rangle=\frac{ds}{ds^*}\left\langle \boldsymbol{T}_\xi(s),\boldsymbol{T}_\phi(s^*)\right\rangle=0$$

olduğundan (3.2.14) denklemi

$$1-\lambda(s^*)\kappa_\phi(s^*)=0$$

$$\lambda(s^*)=\frac{1}{\kappa_\phi(s^*)}=\rho(s^*) \tag{3.2.15}$$

şeklinde bulunur. Burada $\rho(s^*)$ eğrilik yarıçapıdır. Şimdi $\mu(s^*)$ ve $\gamma(s^*)$ fonksiyonlarını bulalım. (3.2.13) denklemi, sırasıyla, $\boldsymbol{N}_\phi(s^*)$, $\boldsymbol{B}_\phi(s^*)$ ve $\boldsymbol{E}_\phi(s^*)$ vektörleriyle skalar olarak çarpılırsa

$$\lambda(s^*)=\rho(s^*)=\left\langle \boldsymbol{N}_\phi(s^*),\xi(s)-\phi(s^*)\right\rangle \tag{3.2.16}$$

$$\mu(s^*)=\left\langle \boldsymbol{B}_\phi(s^*),\xi(s)-\phi(s^*)\right\rangle \tag{3.2.17}$$

$$\gamma(s^*)=\left\langle \boldsymbol{E}_\phi(s^*),\xi(s)-\phi(s^*)\right\rangle \tag{3.2.18}$$

elde edilir. $\xi(s)$ eğrisi $w-$eğrisi olduğundan (3.2.12) denklemleri göz önüne alınırsa (3.2.16), (3.2.17) ve (3.2.18) denklemleri

$$\rho(s^*) = \frac{-\kappa_\xi(s)}{\sqrt{\kappa_\xi^2(s)+\tau_\xi^2(s)}}\left\langle \boldsymbol{T}_\xi(s), \xi(s)-\phi(s^*)\right\rangle + \frac{\tau_\xi(s)}{\sqrt{\kappa_\xi^2(s)+\tau_\xi^2(s)}}\left\langle \boldsymbol{B}_\xi(s), \xi(s)-\phi(s^*)\right\rangle$$
$$\mu(s^*) = \left\langle \boldsymbol{E}_\xi(s), \xi(s)-\phi(s^*)\right\rangle$$
$$\gamma(s^*) = \frac{\tau_\xi(s)}{\sqrt{\kappa_\xi^2(s)+\tau_\xi^2(s)}}\left\langle \boldsymbol{T}_\xi(s), \xi(s)-\phi(s^*)\right\rangle + \frac{\kappa_\xi(s)}{\sqrt{\kappa_\xi^2(s)+\tau_\xi^2(s)}}\left\langle \boldsymbol{B}_\xi(s), \xi(s)-\phi(s^*)\right\rangle$$

(3.2.19)

şeklinde bulunur. $\xi(s)$ eğrisinin teğeti $\boldsymbol{T}_\xi(s)$ vektörü, $\xi(s)-\phi(s^*)$ vektörü ile lineer bağımlı olduğundan $\xi(s)-\phi(s^*)$ vektörü $\boldsymbol{N}_\xi(s)$, $\boldsymbol{B}_\xi(s)$ ve $\boldsymbol{E}_\xi(s)$ vektörlerine diktir. Dolayısıyla,

$$\left\langle \boldsymbol{N}_\xi(s), \xi(s)-\phi(s^*)\right\rangle = \left\langle \boldsymbol{B}_\xi(s), \xi(s)-\phi(s^*)\right\rangle = \left\langle \boldsymbol{E}_\xi(s), \xi(s)-\phi(s^*)\right\rangle = 0$$

dır. O halde (3.2.19) denklemleri

$$\rho(s^*) = \frac{-\kappa_\xi(s)}{\sqrt{\kappa_\xi^2(s)+\tau_\xi^2(s)}}\left\langle \boldsymbol{T}_\xi(s), \xi(s)-\phi(s^*)\right\rangle \quad (3.2.20)$$

$$\mu(s) = 0 \quad (3.2.21)$$

$$\gamma(s^*) = \frac{\tau_\xi(s)}{\sqrt{\kappa_\xi^2(s)+\tau_\xi^2(s)}}\left\langle \boldsymbol{T}_\xi(s), \xi(s)-\phi(s^*)\right\rangle \quad (3.2.22)$$

şeklinde bulunur. Burada gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$-\frac{\rho(s^*)}{\kappa_\xi(s)} = \frac{\left\langle \boldsymbol{T}_\xi(s), \xi(s)-\phi(s^*)\right\rangle}{\sqrt{\kappa_\xi^2(s)+\tau_\xi^2(s)}} \quad (3.2.23)$$

$$\frac{\gamma(s^*)}{\tau_\xi(s)} = \frac{\left\langle \boldsymbol{T}_\xi(s), \xi(s)-\phi(s^*)\right\rangle}{\sqrt{\kappa_\xi^2(s)+\tau_\xi^2(s)}} \quad (3.2.24)$$

olur. O halde (3.2.23) ile (3.2.24) denklemlerinin eşitliğinden

$$-\frac{\rho(s^*)}{\kappa_\xi(s)} = \frac{\gamma(s^*)}{\tau_\xi(s)}$$

$$\gamma(s^*) = -\frac{\rho(s^*)\tau_\xi(s)}{\kappa_\xi(s)} \tag{3.2.25}$$

elde edilir. Öyleyse sonuç olarak (3.2.13) denkleminde (3.2.15), (3.2.21) ve (3.2.25) denklemleri yerlerine yazılırsa

$$\xi(s) = \phi(s^*) + \rho(s^*)\boldsymbol{N}_\phi(s^*) - \frac{\rho(s^*)\tau_\xi(s)}{\kappa_\xi(s)}\boldsymbol{E}_\phi(s^*)$$

elde edilir.

Teorem 3.2.5. $\phi : I \to \mathbb{E}^4$ ve $\xi : I \to \mathbb{E}^4$ eğrileri, sırasıyla, $s^*, s \in I$ yay-parametreleri ile verilsin. $\phi(s^*)$ eğrisi ile bu eğrinin evolütü, $\xi(s)$ eğrisi $w-$eğrisi olarak alınırsa, $\xi(s)$ eğrisinin Frenet vektör alanları $\{\boldsymbol{T}_\xi(s), \boldsymbol{N}_\xi(s), \boldsymbol{B}_\xi(s), \boldsymbol{E}_\xi(s)\}$, $\phi(s^*)$ eğrisinin Frenet vektör alanları $\{\boldsymbol{T}_\phi(s^*), \boldsymbol{N}_\phi(s^*), \boldsymbol{B}_\phi(s^*), \boldsymbol{E}_\phi(s^*)\}$ cinsinden yazılabilir.

İspat : $\phi : I \to \mathbb{E}^4$ ve $\xi : I \to \mathbb{E}^4$ eğrileri, sırasıyla, $s^*, s \in I$ yay-parametreleri ile verilmek üzere, $\phi(s^*)$ eğrisi ile bu eğrinin evolütü olan $\xi(s)$ eğrisi $w-$eğrisi olarak alınsın. Teorem 3.2.4' den

$$\xi(s) = \phi(s^*) + \rho(s^*)\boldsymbol{N}_\phi(s^*) - \rho(s^*)\frac{\tau_\xi(s)}{\kappa_\xi(s)}\boldsymbol{E}_\phi(s^*)$$

denkleminin $s^* \in I$ yay-parametresine göre 1. mertebeden türevi alınırsa

$$\boldsymbol{T}_\xi(s)\frac{ds}{ds^*} = \boldsymbol{T}_\phi(s^*) - \rho(s^*)\kappa_\phi(s^*)\boldsymbol{T}_\phi(s^*) + \rho(s^*)\tau_\phi(s^*)\boldsymbol{B}_\phi(s^*) + \frac{\rho(s^*)\tau_\xi(s)}{\kappa_\xi(s)}\sigma_\phi(s^*)\boldsymbol{B}_\phi(s^*)$$

bulunur. Burada gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$$\boldsymbol{T}_\xi(s)\frac{ds}{ds^*} = \frac{\kappa_\xi(s)\tau_\phi(s^*) + \tau_\xi(s)\sigma_\phi(s^*)}{\kappa_\xi(s)\kappa_\phi(s^*)}\boldsymbol{B}_\phi(s^*) \tag{3.2.26}$$

elde edilir. Böylece $\{\boldsymbol{T}_{\xi}(s), \boldsymbol{B}_{\phi}(s^*)\}$ vektörlerinin lineer bağımlı olduğu görülür. O halde $\xi(s)$, $w-$eğrisi ile $\phi(s^*)$ eğrisi yay-parametreli verildiğinden

$$\boldsymbol{T}_{\xi}(s) = \boldsymbol{B}_{\phi}(s^*) \tag{3.2.27}$$

alınabilir. Ayrıca,

$$\frac{ds}{ds^*} = \frac{\kappa_{\xi}(s)\tau_{\phi}(s^*) + \tau_{\xi}(s)\sigma_{\phi}(s^*)}{\kappa_{\xi}(s)\kappa_{\phi}(s^*)} \tag{3.2.28}$$

bulunur.

Buradan da görüldüğü üzere ξ ve ϕ eğrileri $w-$eğrisi olduğundan $\dfrac{ds^*}{ds}$ sabittir.

Şimdi $\boldsymbol{N}_{\phi}(s^*)$ vektörünü bulalım. Bunun için ilk önce (3.2.27) denkleminin türevi ve türevinin normu hesaplanırsa

$$\frac{d\boldsymbol{T}_{\xi}}{ds}\frac{ds}{ds^*} = \frac{d^2\xi}{ds^2}\frac{ds}{ds^*} = -\tau_{\phi}(s^*)\boldsymbol{N}_{\phi}(s^*) + \sigma_{\phi}(s^*)\boldsymbol{E}_{\phi}(s^*) \tag{3.2.29}$$

$$\left\| \frac{d^2\xi}{ds^2}\frac{ds}{ds^*} \right\| = \sqrt{\tau_{\phi}^{\,2}(s^*) + \sigma_{\phi}^{\,2}(s^*)} \tag{3.2.30}$$

bulunur. $\xi(s)$ parametreli bir eğri olduğundan (2.1.4) Frenet denklemlerinde (3.2.29) ve (3.2.30) denklemleri kullanılırsa

$$\boldsymbol{N}_{\xi}(s) = \frac{-\tau_{\phi}(s^*)}{\sqrt{\tau_{\phi}^{\,2}(s^*) + \sigma_{\phi}^{\,2}(s^*)}}\boldsymbol{N}_{\phi}(s^*) + \frac{\sigma_{\phi}(s^*)}{\sqrt{\tau_{\phi}^{\,2}(s^*) + \sigma_{\phi}^{\,2}(s^*)}}\boldsymbol{E}_{\phi}(s^*)$$

elde edilir.

Şimdi $\boldsymbol{E}_{\xi}(s)$ vektörünü bulalım. Bunun için ilk önce (2.1.9) Frenet formüllerinden yararlanarak (3.2.29) denkleminin 3. mertebeden türevi ve $\boldsymbol{T}_{\xi}(s) \wedge \boldsymbol{N}_{\xi}(s) \wedge \dfrac{d^3\xi}{ds^3}$ vektörel çarpımı hesaplanırsa

$$\frac{d^3\xi}{ds^3}\frac{ds^2}{ds^{*2}}=-\tau_\phi(s^*)\boldsymbol{N}_\phi'(s^*)+\sigma_\phi(s^*)\boldsymbol{E}_\phi'(s^*)$$

$$\frac{d^3\xi}{ds^3}\frac{ds^2}{ds^{*2}}=\left[\kappa_\phi(s^*)\tau_\phi(s^*)\boldsymbol{T}_\phi(s^*)-\left[\tau_\phi^2(s^*)+\sigma_\phi^2(s^*)\right]\boldsymbol{B}_\phi(s^*)\right] \tag{3.2.31}$$

$$\boldsymbol{T}_\xi(s)\wedge\boldsymbol{N}_\xi(s)\wedge\frac{d^3\xi}{ds^3}=\frac{ds^{*2}}{ds^2}\begin{vmatrix} \boldsymbol{T}_\phi(s^*) & \boldsymbol{N}_\phi(s^*) & \boldsymbol{B}_\phi(s^*) & \boldsymbol{E}_\phi(s^*) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{-\tau_\phi(s^*)}{\sqrt{\tau_\phi^2(s^*)+\sigma_\phi^2(s^*)}} & 0 & \frac{\sigma_\phi(s^*)}{\sqrt{\tau_\phi^2(s^*)+\sigma_\phi^2(s^*)}} \\ \kappa_\phi(s^*)\tau_\phi(s^*) & 0 & -\left[\tau_\phi^2(s^*)+\sigma_\phi^2(s^*)\right] & 0 \end{vmatrix}$$

$$=\frac{ds^{*2}}{ds^2}\left[-\frac{\kappa_\phi(s^*)\tau_\phi(s^*)\sigma_\phi(s^*)}{\sqrt{\tau_\phi^2(s^*)+\sigma_\phi^2(s^*)}}\boldsymbol{N}_\phi(s^*)-\frac{\kappa_\phi(s^*)\tau_\phi^2(s^*)}{\sqrt{\tau_\phi^2(s^*)+\sigma_\phi^2(s^*)}}\boldsymbol{E}_\phi(s^*)\right]$$

$$=\frac{ds^{*2}}{ds^2}\left[-\frac{\kappa_\phi(s^*)\tau_\phi(s^*)}{\sqrt{\tau_\phi^2(s^*)+\sigma_\phi^2(s^*)}}\left[\sigma_\phi(s^*)\boldsymbol{N}_\phi(s^*)+\tau_\phi(s^*)\boldsymbol{E}_\phi(s^*)\right]\right] \tag{3.2.32}$$

elde edilir. Ayrıca, (3.2.32) denkleminin normu hesaplanırsa

$$\left\|\boldsymbol{T}_\xi(s)\wedge\boldsymbol{N}_\xi(s)\wedge\frac{d^3\xi}{ds^3}\right\|=\left|\frac{ds^{*2}}{ds^2}\right|\left|-\frac{\kappa_\phi(s^*)\tau_\phi(s^*)}{\sqrt{\tau_\phi^2(s^*)+\sigma_\phi^2(s^*)}}\right|\sqrt{\tau_\phi^2(s^*)+\sigma_\phi^2(s^*)}$$

$$=\left|\frac{ds^{*2}}{ds^2}\right|\left|\kappa_\phi(s^*)\tau_\phi(s^*)\right| \tag{3.2.33}$$

olduğu görülür. Son olarak (2.1.4) Frenet denklemlerinde (3.2.32) ve (3.2.33) denklemleri yerlerine yazılırsa $\boldsymbol{E}_\xi(s)$ vektörü

$$\boldsymbol{E}_\xi(s)=\eta\left[\frac{\sigma_\phi(s^*)}{\sqrt{\tau_\phi^2(s^*)+\sigma_\phi^2(s^*)}}\boldsymbol{N}_\phi(s^*)+\frac{\tau_\phi(s^*)}{\sqrt{\tau_\phi^2(s^*)+\sigma_\phi^2(s^*)}}\boldsymbol{E}_\phi(s^*)\right]$$

şeklinde elde edilir.

Şimdi $\boldsymbol{B}_\xi(s)$ vektörünü bulalım. Bunun için (2.1.4) Frenet denklemlerinde $\boldsymbol{E}_\xi(s)$, $\boldsymbol{T}_\xi(s)$ ve $\boldsymbol{N}_\xi(s)$ vektörleri yerlerine yazılırsa

$$\boldsymbol{B}_{\xi}\left(s\right)=\begin{vmatrix} \boldsymbol{T}_{\phi}(s^*) & \boldsymbol{N}_{\phi}(s^*) & \boldsymbol{B}_{\phi}(s^*) & \boldsymbol{E}_{\phi}(s^*) \\ 0 & \dfrac{\sigma_{\phi}(s^*)}{\sqrt{\tau_{\phi}{}^2(s^*)+\sigma_{\phi}{}^2(s^*)}} & 0 & \dfrac{\tau_{\phi}(s^*)}{\sqrt{\tau_{\phi}{}^2(s^*)+\sigma_{\phi}{}^2(s^*)}} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \dfrac{-\tau_{\phi}(s^*)}{\sqrt{\tau_{\phi}{}^2(s^*)+\sigma_{\phi}{}^2(s^*)}} & 0 & \dfrac{\sigma_{\phi}(s^*)}{\sqrt{\tau_{\phi}{}^2(s^*)+\sigma_{\phi}{}^2(s^*)}} \end{vmatrix}$$

$$\boldsymbol{B}_{\xi}\left(s\right)=\eta\frac{\tau_{\phi}{}^2(s^*)+\sigma_{\phi}{}^2(s^*)}{\sqrt{\tau_{\phi}{}^2(s^*)+\sigma_{\phi}{}^2(s^*)}}\boldsymbol{T}_{\phi}(s^*)$$

$$\boldsymbol{B}_{\xi}\left(s\right)=\eta\sqrt{\tau_{\phi}{}^2(s^*)+\sigma_{\phi}{}^2(s^*)}\boldsymbol{T}_{\phi}(s^*)$$

elde edilir.

Teorem 3.2.6. $\phi: I \to \mathbb{E}^4$ ve $\xi: I \to \mathbb{E}^4$ eğrileri, sırasıyla, $s^*, s \in I$ yay-parametreleri ile verilsin. $\phi(s^*)$ eğrisi ile bu eğrinin evolütü olan $\xi(s)$ eğrisi $w-$ eğrisi olarak alınırsa, $\xi(s)$ eğrisinin Frenet eğrilikleri $\left(\kappa_{\xi}(s), \tau_{\xi}(s), \sigma_{\xi}(s)\right)$, $\phi(s^*)$ eğrisinin Frenet eğrilikleri $\left(\kappa_{\phi}(s^*), \tau_{\phi}(s^*), \sigma_{\phi}(s^*)\right)$ cinsinden yazılabilir.

İspat : $\phi: I \to \mathbb{E}^4$ ve $\xi: I \to \mathbb{E}^4$ eğrileri, sırasıyla, $s^*, s \in I$ yay-parametreleri ile verilsin. (3.2.30) denkleminden

$$\left\|\frac{d^2\xi}{ds^2}\right\|=\kappa_{\xi}(s)=\left|\frac{ds^*}{ds}\right|\sqrt{\tau_{\phi}{}^2(s^*)+\sigma_{\phi}{}^2(s^*)}$$

dir. Ayrıca, (3.2.28) denklemi göz önüne alınırsa $\kappa_{\xi}(s)$ 1. eğriliği

$$\kappa_{\xi}(s)=\frac{\kappa_{\phi}(s^*)\sqrt{\tau_{\phi}{}^2(s^*)+\sigma_{\phi}{}^2(s^*)}-\tau_{\xi}(s)\sigma_{\phi}(s^*)}{\tau_{\phi}(s^*)}$$

şeklinde bulunur. Şimdi $\tau_\xi(s)$ burulmasını bulalım. (2.1.5) denklemleri yardımıyla, $\xi(s)$ eğrisi yay-parametreli bir eğri olduğundan

$$\tau_\xi(s)=\frac{\left\|\boldsymbol{T}_\xi(s)\wedge\boldsymbol{N}_\xi(s)\wedge\dfrac{d^3\xi}{ds^3}\right\|}{\left\|\dfrac{d^2\xi}{ds^2}\right\|}$$

yazılabilir. Burada (3.2.30) ve (3.2.33) denklemleri yerlerine yazılırsa

$$\tau_\xi(s)=\frac{\left|\dfrac{ds^*}{ds}\right|\kappa_\phi(s^*)\tau_\phi(s^*)}{\sqrt{\tau_\phi^{\,2}(s^*)+\sigma_\phi^{\,2}(s^*)}}$$

elde edilir. Ayrıca, (3.2.28) denklemi göz önüne alınırsa

$$\tau_\xi(s)=\frac{\dfrac{\kappa_\xi(s)\kappa_\phi(s^*)}{\kappa_\xi(s)\tau_\phi(s^*)+\tau_\xi(s)\sigma_\phi(s^*)}\kappa_\phi(s^*)\tau_\phi(s^*)}{\sqrt{\tau_\phi^{\,2}(s^*)+\sigma_\phi^{\,2}(s^*)}}$$

$$\tau_\xi(s)=\frac{\kappa_\xi(s)\kappa_\phi^{\,2}(s^*)\tau_\phi(s^*)}{\left(\kappa_\xi(s)\tau_\phi(s^*)+\tau_\xi(s)\sigma_\phi(s^*)\right)\sqrt{\tau_\phi^{\,2}(s^*)+\sigma_\phi^{\,2}(s^*)}}$$

bulunur. Son denklemde $\kappa_\xi(s)$ değeri yerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa $\tau_\xi(s)$ burulması

$$\tau_\xi(s)=\frac{\kappa_\phi^{\,2}(s^*)\sqrt{\tau_\phi^{\,2}(s^*)+\sigma_\phi^{\,2}(s^*)}}{\tau_\phi^{\,2}(s^*)+\sigma_\phi^{\,2}(s^*)+\kappa_\phi(s^*)\sigma_\phi(s^*)}$$

şeklinde bulunur. $\kappa_\xi(s)$ eğriliğini de $\phi(s^*)$, involüt eğrisinin Frenet eğrilikleri cinsinden yazmak için $\tau_\xi(s)$ burulması, $\kappa_\xi(s)$ eğriliğinde yerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa $\kappa_\xi(s)$ eğriliği

$$\kappa_\xi(s)=\frac{\kappa_\phi(s^*)\sqrt{\left(\tau_\phi^{\,2}(s^*)+\sigma_\phi^{\,2}(s^*)\right)^3}}{\tau_\phi(s^*)\left(\tau_\phi^{\,2}(s^*)+\sigma_\phi^{\,2}(s^*)+\kappa_\phi(s^*)\sigma_\phi(s^*)\right)}$$

şeklinde bulunur.

Son olarak $\sigma_{\xi}(s)$, 3. eğriliği bulalım. Bunun için öncelikle $\xi(s)$ eğrisinin $s^{*}\in I$ yay-parametresine göre 4. mertebeden türevi hesaplanırsa

$$\frac{d^4\xi}{ds^4}\frac{ds^3}{ds^{*3}}=\left[\tau_{\phi}(s^{*})\left(\kappa_{\phi}^{2}(s^{*})+\tau_{\phi}^{2}(s^{*})+\sigma_{\phi}^{2}(s^{*})\right)\right]\boldsymbol{N}_{\phi}(s^{*})-\left[\tau_{\phi}^{2}(s^{*})+\sigma_{\phi}^{2}(s^{*})\right]\sigma_{\phi}(s^{*})\boldsymbol{E}_{\phi}(s^{*})$$

elde edilir. Bu son denkleme $\boldsymbol{E}_{\xi}(\mathrm{s})$ vektörü ile skalar çarpım uygulanırsa

$$\left\langle \frac{d^4\xi}{ds^4}\frac{ds^3}{ds^{*3}},\boldsymbol{E}_{\xi}(s)\right\rangle=\frac{ds^3}{ds^{*3}}\left\langle \frac{d^4\xi}{ds^4},\boldsymbol{E}_{\xi}(s)\right\rangle=\frac{\kappa_{\phi}^{2}(s^{*})\tau_{\phi}(s^{*})\sigma_{\phi}(s^{*})}{\sqrt{\tau_{\phi}^{2}(s^{*})+\sigma_{\phi}^{2}(s^{*})}} \qquad (3.2.34)$$

bulunur. Son olarak (2.1.5) Frenet denklemlerinden yararlanarak (3.2.33) ve (3.2.34) denklemlerinin yardımıyla

$$\sigma_{\xi}(s)=\frac{\left\langle \frac{d^4\xi}{ds^4},\boldsymbol{E}_{\xi}(s)\right\rangle}{\left\|\boldsymbol{T}_{\xi}(s)\wedge\boldsymbol{N}_{\xi}(s)\wedge\frac{d^3\xi}{ds^3}\right\|}$$

$$\sigma_{\xi}(s)=\frac{\left|\frac{ds^{*3}}{ds^3}\right|\frac{\kappa_{\phi}^{2}(s^{*})\tau_{\phi}(s^{*})\sigma_{\phi}(s^{*})}{\sqrt{\tau_{\phi}^{2}(s^{*})+\sigma_{\phi}^{2}(s^{*})}}}{\left|\frac{ds^{*2}}{ds^2}\right|\left|\kappa_{\phi}(s^{*})\tau_{\phi}(s^{*})\right|}$$

$$\sigma_{\xi}(s)=\frac{\left|\frac{ds^{*}}{ds}\right|\kappa_{\phi}(s^{*})\sigma_{\phi}(s^{*})}{\sqrt{\tau_{\phi}^{2}(s^{*})+\sigma_{\phi}^{2}(s^{*})}}$$

bulunur. Buradan (3.2.28) denklemi göz önüne alınır ve $\kappa_{\xi}(s)$ ve $\tau_{\xi}(s)$ eğrilikleri kullanılırsa $\sigma_{\xi}(s)$ 3. eğriliği

$$\sigma_{\xi}(s)=\frac{\kappa_{\phi}^{2}(s^{*})\sigma_{\phi}(s^{*})\sqrt{\tau_{\phi}^{2}(s^{*})+\sigma_{\phi}^{2}(s^{*})}}{\tau_{\phi}(s^{*})\left(\tau_{\phi}^{2}(s^{*})+\sigma_{\phi}^{2}(s^{*})+\kappa_{\phi}(s^{*})\sigma_{\phi}(s^{*})\right)}$$

şeklinde elde edilir.

BÖLÜM 4. KUATERNİYONİK İNVOLÜT-EVOLÜT EĞRİ ÇİFTLERİ

Bu bölüm tezimizin orijinal kısmını oluşturmaktadır. Bu bölümde, $3-$boyutlu Öklid uzayındaki bir eğrinin reel-kuaterniyonlar kümesindeki uzaysal kuaterniyonik eğrisiyle birebir eşleşmesi temel alınarak ve kuaterniyonların özellikleri kullanılarak involüt-evolüt eğri çiftlerinin karakterizasyonları elde edilmiştir. Ayrıca, $n=4$ için involüt-evolüt eğri çiftlerinin karakterizasyonları elde edilirken kuaterniyonik $w-$ eğrileri göz önüne alınmıştır.

4.1. Uzaysal Kuaterniyonik İnvolüt-Evolüt Eğri Çiftleri

$\mathbb{E}^3$, $3-$boyutlu Öklid uzayında α ve β, sırasıyla $s \in I$ ve $s^* \in I$ parametrelerine sahip iki uzaysal kuaterniyonik eğri olmak üzere,

$$\alpha = \alpha(s) \qquad \text{ve} \qquad \beta = \beta(s^*)$$

şeklinde verilsin. α ve β uzaysal kuaterniyonik eğrilerinin Frenet vektörleri, sırasıyla, $\{\boldsymbol{t},\boldsymbol{n},\boldsymbol{b}\}$ ve $\{\boldsymbol{t}^*,\boldsymbol{n}^*,\boldsymbol{b}^*\}$ dır. Burada $\boldsymbol{t}$ ve $\boldsymbol{t}^*$ teğet vektör alanlarıdır. Ayrıca, bu uzaysal kuaterniyonik eğrilerin eğrilikleri, sırasıyla, k,r ve k^*,r^* olsun. Bu koşullar altında α ve β eğri çiftinin uzaysal kuaterniyonik involüt-evolüt eğri çifti olması ile ilgili aşağıdaki tanım verilebilir.

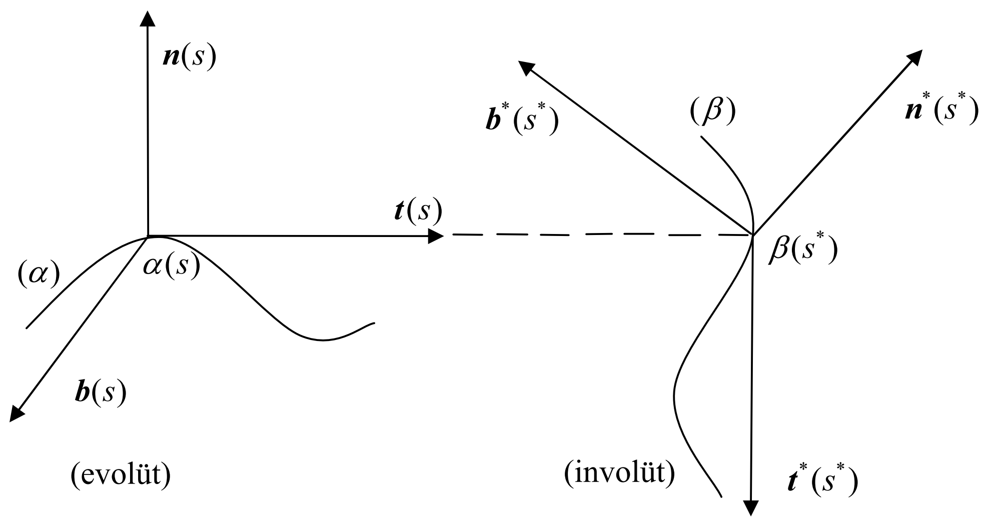
Tanım 4.1.1. $\alpha : I \to \mathbb{E}^3$ ve $\beta : I \to \mathbb{E}^3$ uzaysal kuaterniyonik eğrileri için $I=[0,1]$ olmak üzere,

$$f : I \to I$$
$$s \to s^* = f(s), \ \frac{ds^*}{ds} \neq 0$$

birebir ve örten dönüşümü altında

$$h\left(\boldsymbol{t}^*(s^*), \boldsymbol{t}(s)\right) = 0$$

şartı sağlanıyorsa; $\beta(s^*)$ uzaysal kuaterniyonik eğrisine $\alpha(s)$ uzaysal kuaterniyonik eğrisinin uzaysal kuaterniyonik involütü, $\alpha(s)$ eğrisine de $\beta(s^*)$ eğrisinin uzaysal kuaterniyonik evolütü denir (Şekil 4.1.1).



Şekil 4.1.1 : Uzaysal Kuaterniyonik İnvolüt-Evolüt Eğri Çiftleri

Teorem 4.1.1. $\alpha : I \to \mathbb{E}^3$, uzaysal kuaterniyonik eğrisi $s \in [0,1]$ yay-parametresi ile verilsin. $\alpha(s)$ eğrisinin uzaysal kuaterniyonik involütü, herhangi bir $s^* \in I$ parametreli $\beta(s^*)$ uzaysal kuaterniyonik eğrisi olmak üzere, $\forall s, s^* \in I$ için

$$d(\alpha(s), \beta(s^*)) = |c - s|, \qquad (c \in \mathbb{R})$$

dir. Böylece

$$\beta(s^*) = \alpha(s) + (c-s)\boldsymbol{t}(s)$$

şeklinde yazılabilir.

İspat: $s \in I$ yay-parametresi ile verilen $\alpha(s)$ uzaysal kuaterniyonik eğrisinin uzaysal kuaterniyonik involütü, herhangi bir $s^* \in I$ parametreli $\beta(s^*)$ uzaysal kuaterniyonik eğrisi olsun. Şekil 4.1.1 yardımıyla

$$\beta(s^*) = \alpha(s) + \lambda(s)\boldsymbol{t}(s) \tag{4.1.1}$$

yazılabilir. (4.1.1) denkleminin $s \in I$ yay-parametresine göre türevi alınır ve (2.2.7) Frenet formülleri kullanılırsa

$$\frac{d\beta}{ds^*}\frac{ds^*}{ds} = \left(1+\lambda'(s)\right)\boldsymbol{t}(s) + \lambda(s)k(s)\boldsymbol{n}(s)$$

elde edilir. Bu son denklem $\boldsymbol{t}(s)$ vektörü ile kuaterniyonik iç çarpım yapılırsa

$$h\left(\frac{d\beta}{ds^*}\frac{ds^*}{ds}, \boldsymbol{t}(s)\right) = h\left(\left[\left(1+\lambda'(s)\right)\boldsymbol{t}(s) + \lambda(s)k(s)\boldsymbol{n}(s)\right] \times \boldsymbol{t}(s)\right)$$

$$h\left(\frac{d\beta}{ds^*}\frac{ds^*}{ds}, \boldsymbol{t}(s)\right) = \frac{1}{2}\left[\left[\left(1+\lambda'(s)\right)\boldsymbol{t}(s) + \lambda(s)k(s)\boldsymbol{n}(s)\right] \times \hat{\boldsymbol{t}}(s) + \boldsymbol{t}(s) \times \overline{\left[\left(1+\lambda'(s)\right)\boldsymbol{t}(s) + \lambda(s)k(s)\boldsymbol{n}(s)\right]}\right]$$

olur. Buradan kuaterniyonik eşlenik özellikleri, kuaterniyonik çarpım ve (2.2.4) Frenet denklemleri kullanılırsa

$$h\left(\frac{d\beta}{ds^*}\frac{ds^*}{ds}, \boldsymbol{t}(s)\right) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \left[\left(1+\lambda'(s)\right)\boldsymbol{t}(s) + \lambda(s)k(s)\boldsymbol{n}(s)\right] \times \\ \left(-\boldsymbol{t}(s)\right) + \boldsymbol{t}(s) \times \left[\left(1+\lambda'(s)\right)\left(-\boldsymbol{t}(s)\right) + \lambda(s)k(s)\left(-\boldsymbol{n}(s)\right)\right] \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -\left(1+\lambda'(s)\right)\left(\boldsymbol{t}(s)\times\boldsymbol{t}(s)\right) - \lambda(s)k(s)\left(\boldsymbol{n}(s)\times\boldsymbol{t}(s)\right) \\ -\left(1+\lambda'(s)\right)\left(\boldsymbol{t}(s)\times\boldsymbol{t}(s)\right) - \lambda(s)k(s)\left(\boldsymbol{t}(s)\times\boldsymbol{n}(s)\right) \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\left[-2\left(1+\lambda'(s)\right)\left(\boldsymbol{t}(s)\times\boldsymbol{t}(s)\right)\right]$$

$$= -\left(1+\lambda'(s)\right)\left[-\left\langle \boldsymbol{t}(s), \boldsymbol{t}(s)\right\rangle + \boldsymbol{t}(s) \wedge \boldsymbol{t}(s)\right]$$

$$= \left(1+\lambda'(s)\right) \tag{4.1.2}$$

elde edilir. $\beta(s^*)$ uzaysal kuaterniyonik eğrisi, $\alpha(s)$ uzaysal kuaterniyonik eğrisinin uzaysal kuaterniyonik involütü olduğundan

$$h\left(\frac{d\beta}{ds^*}\frac{ds^*}{ds}, \boldsymbol{t}(s)\right) = \frac{ds^*}{ds} h\left(\frac{d\beta}{ds^*}, \boldsymbol{t}(s)\right) = 0$$

dir. Dolayısıyla, (4.1.2) denklemi

$$1+\lambda'(s) = 0$$
$$\lambda'(s) = -1$$

şeklinde bulunur. Buradan $s \in I$ yay-parametresine göre integral alınırsa

$$\lambda(s) = c - s$$

elde edilir. Bu denklem (4.1.1) denkleminde yerine yazılırsa

$$\beta(s^*) = \alpha(s) + (c-s)\boldsymbol{t}(s) \tag{4.1.3}$$

bulunur. O halde $\alpha(s)$ noktası ile $\beta(s^*)$ noktası arasındaki uzaklık kuaterniyonik çarpım, norm ve eşlenik özellikleri yardımıyla

$$d\left(\alpha(s), \beta(s^*)\right) = \left\|\beta(s^*) - \alpha(s)\right\| = \left\|\lambda(s)\boldsymbol{t}(s)\right\|$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned} \left\|\lambda(s)\boldsymbol{t}(s)\right\|^2 &= \lambda(s)\boldsymbol{t}(s) \times \widehat{\lambda(s)\boldsymbol{t}(s)} \\ &= \lambda^2(s)\left(\boldsymbol{t}(s) \times \hat{\boldsymbol{t}}(s)\right) \\ &= -\lambda^2(s)\left(\boldsymbol{t}(s) \times \boldsymbol{t}(s)\right) \\ &= -\lambda^2(s)\left[-\left\langle \boldsymbol{t}(s), \boldsymbol{t}(s)\right\rangle + \boldsymbol{t}(s) \wedge \boldsymbol{t}(s)\right] \\ &= \lambda^2(s) \end{aligned}$$

dır. Dolayısıyla,

$$d\left(\alpha(s), \beta(s^*)\right) = |c - s|$$

şeklinde bulunur.

Teorem 4.1.2. $\alpha : I \to \mathbb{E}^3$, uzaysal kuaterniyonik eğrisi $s \in I$ yay-parametresi ile verilsin. $\alpha(s)$ eğrisinin uzaysal kuaterniyonik involütü, herhangi bir $s^* \in I$ parametreli $\beta(s^*)$ uzaysal kuaterniyonik eğrisi olsun. $\dfrac{ds^*}{ds} = \text{sbt}$ olmak üzere, $\beta(s^*)$ eğrisinin Frenet vektörleri $\{\boldsymbol{t}^*(s^*), \boldsymbol{n}^*(s^*), \boldsymbol{b}^*(s^*)\}$ ile $\alpha(s)$ eğrisinin Frenet vektörleri $\{\boldsymbol{t}(s), \boldsymbol{n}(s), \boldsymbol{b}(s)\}$ arasında

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{t}^*(s^*) &= \boldsymbol{n}(s) \\
\boldsymbol{n}^*(s^*) &= \frac{-k(s)}{\sqrt{k^2(s) + r^2(s)}}\boldsymbol{t}(s) + \frac{r(s)}{\sqrt{k^2(s) + r^2(s)}}\boldsymbol{b}(s) \\
\boldsymbol{b}^*(s^*) &= \frac{r(s)}{\sqrt{k^2(s) + r^2(s)}}\boldsymbol{t}(s) + \frac{k(s)}{\sqrt{k^2(s) + r^2(s)}}\boldsymbol{b}(s)
\end{aligned}$$

bağıntıları vardır.

İspat: $\alpha : I \to \mathbb{E}^3$, uzaysal kuaterniyonik eğrisi $s \in I$ yay-parametresi ile verilmek üzere, $\alpha(s)$ eğrisinin uzaysal kuaterniyonik involütü, herhangi bir $s^* \in I$ parametreli $\beta(s^*)$ uzaysal kuaterniyonik eğrisi olsun. Teorem 4.1.1' den

$$\beta(s^*) = \alpha(s) + (c - s)\boldsymbol{t}(s)$$

dır. Buradan $s \in I$ yay-parametresine göre 1. mertebeden türev alınır ve (2.2.7) Frenet formülleri kullanılırsa

$$\frac{d\beta}{ds^*}\frac{ds^*}{ds} = \alpha'(s) - \boldsymbol{t}(s) + (c - s)\boldsymbol{t}'(s)$$

$$\frac{d\beta}{ds^*}\frac{ds^*}{ds} = (c - s)k(s)\boldsymbol{n}(s) \tag{4.1.4}$$

elde edilir. Kuaterniyonik eşlenik, iç çarpım özellikleri ve (2.2.4) denklemleri kullanılarak (4.1.4) denkleminin normu

$$\left\|\frac{d\beta}{ds^*}\frac{ds^*}{ds}\right\|^2 = (c-s)k(s)\boldsymbol{n}(s)\times\widehat{(c-s)k(s)\boldsymbol{n}(s)}$$

$$= (c-s)^2 k^2(s)\left(\boldsymbol{n}(s)\times\hat{\boldsymbol{n}}(s)\right)$$

$$= -(c-s)^2 k^2(s)\left(\boldsymbol{n}(s)\times\boldsymbol{n}(s)\right)$$

$$= (c-s)^2 k^2(s)$$

$$\left\|\frac{d\beta}{ds^*}\frac{ds^*}{ds}\right\| = \left|(c-s)k(s)\right| \tag{4.1.5}$$

şeklinde bulunur. Buradan (2.2.5) Frenet denklemleri ile (4.1.4) ve (4.1.5) denklemleri kullanılırsa $\boldsymbol{t}^*(s^*)$ vektörü

$$\boldsymbol{t}^*(s^*) = \frac{\frac{ds}{ds^*}(c-s)k(s)}{\left|\frac{ds}{ds^*}\right|\left|(c-s)k(s)\right|}\boldsymbol{n}(s)$$

şeklinde elde edilir. Buradan $\left\{\boldsymbol{t}^*(s^*), \boldsymbol{n}(s)\right\}$ vektörlerinin lineer bağımlı olduğu görülür. O halde

$$\boldsymbol{t}^*(s^*) = \boldsymbol{n}(s) \tag{4.1.6}$$

alınabilir.

Şimdi $\boldsymbol{b}^*(s^*)$ vektörünü hesaplayalım. Bunun için ilk önce (2.2.7) Frenet formülleri kullanılarak $\frac{ds^*}{ds} = \text{sbt}$ olmak üzere, (4.1.4) denkleminin $s \in I$ yay-parametresine göre 2. mertebeden türevi alınırsa

$$\frac{d^2\beta}{ds^{*2}}\frac{ds^{*2}}{ds^2} = -(c-s)k^2(s)\boldsymbol{t}(s) + \left[-k(s)+(c-s)k'(s)\right]\boldsymbol{n}(s) + (c-s)k(s)r(s)\boldsymbol{b}(s) \tag{4.1.7}$$

bulunur. Dolayısıyla, (2.2.4) Frenet denklemleri yardımıyla (4.1.4) ve (4.1.7) denklemleri kullanılarak $\frac{d\beta}{ds^*}\times\frac{d^2\beta}{ds^{*2}}$ kuaterniyonik çarpımı yapılırsa

$$\frac{d\beta}{ds^*}\times\frac{d^2\beta}{ds^{*2}}=\frac{ds^3}{ds^{*3}}\left[\left[(c-s)k(s)\boldsymbol{n}(s)\ \right]\times\begin{bmatrix}-(c-s)k^2(s)\boldsymbol{t}(s)\\+\left[-k(s)+(c-s)k'(s)\right]\boldsymbol{n}(s)+(c-s)k(s)r(s)\boldsymbol{b}(s)\end{bmatrix}\right]$$

$$=\frac{ds^3}{ds^{*3}}\begin{bmatrix}-(c-s)^2k^3(s)\left(\boldsymbol{n}(s)\times\boldsymbol{t}(s)\right)\\+(c-s)k(s)\left[-k(s)+(c-s)k'(s)\right]\left(\boldsymbol{n}(s)\times\boldsymbol{n}(s)\right)\\+(c-s)^2k^2(s)r(s)\left(\boldsymbol{n}(s)\times\boldsymbol{b}(s)\right)\end{bmatrix}$$

$$=\frac{ds^3}{ds^{*3}}\left[(c-s)^2k^2(s)r(s)\boldsymbol{t}(s)+(c-s)^2k^3(s)\boldsymbol{b}(s)-(c-s)k(s)\left[-k(s)+(c-s)k'(s)\right]\right]$$

(4.1.8)

elde edilir. Ayrıca, (4.1.5) denkleminin $s\in I$ yay-parametresine göre türevi alınırsa

$\left\|\frac{d\beta}{ds^*}\right\|=v\left(s^*\right)$ olmak üzere,

$$v'\left(s^*\right)=\frac{ds^2}{ds^{*2}}\left[-k(s)+(c-s)k'(s)\right] \tag{4.1.9}$$

bulunur. O halde $\boldsymbol{b}^*(s^*)$ vektörü (2.2.5) Frenet denklemleri ile (4.1.5), (4.1.8) ve (4.1.9) denklemleri kullanılırsa

$$\boldsymbol{b}^*(s^*)=\frac{r(s)}{\sqrt{k^2(s)+r^2(s)}}\boldsymbol{t}(s)+\frac{k(s)}{\sqrt{k^2(s)+r^2(s)}}\boldsymbol{b}(s) \tag{4.1.10}$$

şeklinde bulunur.

Son olarak $\boldsymbol{n}^*(s^*)$ vektörünü bulalım. (2.2.5) Frenet denklemleri ile (4.1.6) ve (4.1.10) denklemleri kullanılırsa

$$\boldsymbol{n}^*(s^*)=\left[\frac{r(s)}{\sqrt{k^2(s)+r^2(s)}}\boldsymbol{t}(s)+\frac{k(s)}{\sqrt{k^2(s)+r^2(s)}}\boldsymbol{b}(s)\right]\times\boldsymbol{n}(s)$$
$$=\left[\frac{r(s)}{\sqrt{k^2(s)+r^2(s)}}\left(\boldsymbol{t}(s)\times\boldsymbol{n}(s)\right)+\frac{k(s)}{\sqrt{k^2(s)+r^2(s)}}\left(\boldsymbol{b}(s)\times\boldsymbol{n}(s)\right)\right]$$

$$\boldsymbol{n}^*(s^*)=\frac{-k(s)}{\sqrt{k^2(s)+r^2(s)}}\boldsymbol{t}(s)+\frac{r(s)}{\sqrt{k^2(s)+r^2(s)}}\boldsymbol{b}(s) \qquad (4.1.11)$$

bulunur.

Bundan sonra aksi söylenmedikçe $\dfrac{ds^*}{ds}$ sabit alınacaktır.

Teorem 4.1.3. $\alpha: I\to\mathbb{E}^3$, uzaysal kuaterniyonik eğrisi $s\in I$ yay-parametresi ile verilsin. $\alpha(s)$ eğrisinin uzaysal kuaterniyonik involütü, herhangi bir $s^*\in I$ parametreli $\beta(s^*)$ uzaysal kuaterniyonik eğrisi olmak üzere, $\alpha(s)$ eğrisinin Frenet eğrilikleri $k(s)$, $r(s)$ ile $\beta(s^*)$ eğrisinin Frenet eğrilikleri $k^*(s^*)$, $r^*(s^*)$ arasında

$$k^*(s^*)=\frac{\sqrt{k^2(s)+r^2(s)}}{\left|(c-s)k(s)\right|}$$
$$r^*(s^*)=\frac{k(s)r'(s)-k'(s)r(s)}{\left|(c-s)k(s)\right|\left(k^2(s)+r^2(s)\right)}$$

bağıntıları vardır.

İspatı: $s\in I$ yay-parametresi ile verilen $\alpha(s)$, uzaysal kuaterniyonik eğrisinin uzaysal kuaterniyonik involütü, herhangi bir $s^*\in I$ parametreli $\beta(s^*)$ uzaysal kuaterniyonik eğrisi olsun. $\beta(s^*)$ eğrisinin 1. eğriliği

$$k^*(s^*)=\frac{\left\|\dfrac{d\beta}{ds^*}\times\dfrac{d^2\beta}{ds^{*2}}+\nu\left(s^*\right)\nu'\left(s^*\right)\right\|}{\nu^3\left(s^*\right)}, \qquad \nu\left(s^*\right)=\left\|\frac{d\beta}{ds^*}\right\|$$

olduğundan (4.1.5), (4.1.8) ve (4.1.9) denklemleri yerlerine yazılırsa

$$k^*(s^*) = \frac{(c-s)^2 k^2(s)\sqrt{k^2(s)+r^2(s)}}{\left|(c-s)k(s)\right|^3}$$

$$k^*(s^*) = \frac{\sqrt{k^2(s)+r^2(s)}}{\left|(c-s)k(s)\right|} \tag{4.1.12}$$

elde edilir.

Şimdi $\beta(s^*)$ eğrisinin $r^*(s^*)$ uzaysal kuaterniyonik burulmasını bulalım. $r^*(s^*)$, uzaysal kuaterniyonik burulması

$$r^*(s^*) = \frac{h\left(\frac{d\beta}{ds^*}\times\frac{d^2\beta}{ds^{*2}}, \frac{d^3\beta}{ds^{*3}}\right)}{\left\|\frac{d\beta}{ds^*}\times\frac{d^2\beta}{ds^{*2}} + \nu\left(s^*\right)\nu'\left(s^*\right)\right\|^2} \tag{4.1.13}$$

olduğundan ilk önce $\frac{d^3\beta}{ds^{*3}}$ türevini ve $h\left(\frac{d\beta}{ds^*}\times\frac{d^2\beta}{ds^{*2}}, \frac{d^3\beta}{ds^{*3}}\right)$ kuaterniyonik iç çarpımını hesaplayalım. O halde (2.2.7) Frenet formülleri kullanılarak (4.1.7) denkleminin $s \in I$ yay-parametresine göre türevi alınırsa

$$\begin{aligned} \frac{d^3\beta}{ds^{*3}}\frac{ds^{*3}}{ds^3} = {} & \left[2k^2(s) - 3(c-s)k(s)k'(s)\right]\boldsymbol{t}(s) \\ & + \left[-(c-s)k^3(s) - 2k'(s) + (c-s)k''(s) - (c-s)k(s)r^2(s)\right]\boldsymbol{n}(s) \\ & + \left[-2k(s)r(s) + 2(c-s)k'(s)r(s) + (c-s)k(s)r'(s)\right]\boldsymbol{b}(s) \end{aligned} \tag{4.1.14}$$

bulunur. Ayrıca, (2.2.4) denklemleri ile kuaterniyonik eşlenik ve çarpım özellikleri kullanılarak $h\left(\frac{d\beta}{ds^*}\times\frac{d^2\beta}{ds^{*2}}, \frac{d^3\beta}{ds^{*3}}\right)$ kuaterniyonik iç çarpımı hesaplanırsa

$$h\left(\frac{d\beta}{ds^*}\times\frac{d^2\beta}{ds^{*2}},\frac{d^3\beta}{ds^{*3}}\right)=\frac{1}{2}\frac{ds^3}{ds^{*3}}\left[\begin{array}{l}\begin{bmatrix}(c-s)^2k^2(s)r(s)\boldsymbol{t}(s)\\+(c-s)^2k^3(s)\boldsymbol{b}(s)\\-(c-s)k(s)\left[-k(s)+(c-s)k'(s)\right]\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}-\left[2k^2(s)-3(c-s)k(s)k'(s)\right]\boldsymbol{t}(s)\\-\begin{bmatrix}-(c-s)k^3(s)-2k'(s)\\+(c-s)k''(s)-(c-s)k(s)r^2(s)\end{bmatrix}\boldsymbol{n}(s)\\-\begin{bmatrix}-2k(s)r(s)+2(c-s)k'(s)r(s)\\+(c-s)k(s)r'(s)\end{bmatrix}\boldsymbol{b}(s)\end{bmatrix}\\+\begin{bmatrix}\left[2k^2(s)-3(c-s)k(s)k'(s)\right]\boldsymbol{t}(s)\\+\begin{bmatrix}-(c-s)k^3(s)-2k'(s)\\+(c-s)k''(s)-(c-s)k(s)r^2(s)\end{bmatrix}\boldsymbol{n}(s)\\+\begin{bmatrix}-2k(s)r(s)+2(c-s)k'(s)r(s)\\+(c-s)k(s)r'(s)\end{bmatrix}\boldsymbol{b}(s)\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}-(c-s)^2k^2(s)r(s)\boldsymbol{t}(s)\\-(c-s)^2k^3(s)\boldsymbol{b}(s)\\-(c-s)k(s)\left[-k(s)+(c-s)k'(s)\right]\end{bmatrix}\end{array}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\frac{ds^3}{ds^{*3}}\begin{bmatrix}-2(c-s)^2k^2(s)r(s)\left[2k^2(s)-3(c-s)k(s)k'(s)\right]\left(\boldsymbol{t}(s)\times\boldsymbol{t}(s)\right)\\-2(c-s)^2k^3(s)\left[-2k(s)r(s)+2(c-s)k'(s)r(s)+(c-s)k(s)r'(s)\right]\left(\boldsymbol{b}(s)\times\boldsymbol{b}(s)\right)\end{bmatrix}$$

$$=\frac{ds^3}{ds^{*3}}\begin{bmatrix}2(c-s)^2k^2(s)r(s)\left[2k^2(s)-3(c-s)k(s)k'(s)\right]\\+(c-s)^2k^3(s)\left[-2k(s)r(s)+2(c-s)k'(s)r(s)+(c-s)k(s)r'(s)\right]\end{bmatrix}$$

$$=\frac{ds^3}{ds^{*3}}(c-s)^3k^3(s)\left[k(s)r'(s)-k'(s)r(s)\right] \qquad (4.1.15)$$

elde edilir. Böylece (4.1.13) denkleminde (4.1.5), (4.1.8), (4.1.9) ve (4.1.15) denklemleri yerlerine yazılırsa $r^*(s^*)$, uzaysal kuaterniyonik burulması

$$r^*(s^*)=\frac{k(s)r'(s)-k'(s)r(s)}{(c-s)k(s)\left(k^2(s)+r^2(s)\right)} \qquad (4.1.16)$$

şeklinde bulunur.

Sonuç 4.1.1. $\alpha: I\to\mathbb{E}^3$, uzaysal kuaterniyonik eğrisi $s\in I$ yay-parametresi ile verilsin. Eğer $\alpha(s)$, uzaysal kuaterniyonik eğrisi kuaterniyonik $w-$eğrisi olarak alınırsa

$$r^*(s^*)=0$$

dir.

İspat: $\alpha(s)$**,** uzaysal kuaterniyonik eğrisi kuaterniyonik $w-$eğrisi olarak alınsın. Dolayısıyla, $k(s)$ ve $r(s)$ uzaysal kuaterniyonik eğrilikleri sabit olacağından

$$k'(s) = r'(s) = 0$$

dır. O halde (4.1.16) denkleminin bir sonucu olarak

$$r^*(s^*) = \frac{k(s)r'(s) - k'(s)r(s)}{(c-s)k(s)\left(k^2(s) + r^2(s)\right)} = 0$$

elde edilir.

Sonuç 4.1.2. $\alpha : I \to \mathbb{E}^3$**,** uzaysal kuaterniyonik eğrisi kuaterniyonik $w-$eğrisi olarak alınsın. $\beta(s^*)$, uzaysal kuaterniyonik involüt eğrisinin burulması $r^*(s^*) = 0$ dır gerek ve yeter şart $\beta(s^*)$ eğrisi düzlemsel bir eğridir.

İspat: Sonuç 4.1.1' den aşikardır.

Teorem 4.1.4. $\beta : I \to \mathbb{E}^3$, uzaysal kuaterniyonik eğrisi $s^* \in I$ yay-parametresi ile verilsin. $\beta(s^*)$ eğrisinin uzaysal kuaterniyonik evolütü, herhangi bir $s \in I$ parametreli $\alpha(s)$ uzaysal kuaterniyonik eğrisi ise

$$\varphi(s^*) = \int_0^{s^*} r^*(u)du$$

olmak üzere,

$$\alpha(s) = \beta(s^*) + \rho^*(s^*)\boldsymbol{n}^*(s^*) - \rho^*(s^*)\tan\left[\varphi(s^*) + c\right]\boldsymbol{b}^*(s^*), \qquad (c \in \mathbb{R})$$

dir. Burada $\rho^*(s^*)$, $\beta(s^*)$ eğrisinin eğrilik yarıçapı ve $\beta(s^*)$ noktasındaki normal düzlemde, birinci kenarı $\alpha(s) - \beta(s^*)$, ikinci kenarı $\boldsymbol{n}^*(s^*)$ olan yönlü açının ölçüsü $\varphi(s^*) + c$ dir.

İspat: $s^* \in I$ yay-parametreli $\beta(s^*)$ uzaysal kuaterniyonik eğrisinin uzaysal kuaterniyonik evolütü, herhangi bir $s \in I$ parametreli $\alpha(s)$ uzaysal kuaterniyonik eğrisi olsun. $\alpha(s) - \beta(s^*)$ vektörü, $\boldsymbol{t}^*(s^*)$ vektörüne dik olduğundan $\boldsymbol{n}^*(s^*)$ ve $\boldsymbol{b}^*(s^*)$ vektörleri cinsinden

$$\alpha(s) - \beta(s^*) = \lambda(s^*)\boldsymbol{n}^*(s^*) + \mu(s^*)\boldsymbol{b}^*(s^*) \tag{4.1.17}$$

şeklinde yazılabilir. Burada $\lambda(s^*)$, $\mu(s^*)$ fonksiyonları $s^* \in I$ yay-parametresine bağlı keyfi fonksiyonlardır. Şimdi $\lambda(s^*)$ ve $\mu(s^*)$ fonksiyonlarını bulmak için (2.2.7) Frenet formüllerini kullanarak (4.1.17) denkleminin $s^* \in I$ yay-parametresine göre türevini alalım. O halde

$$\frac{d\alpha}{ds}\frac{ds}{ds^*} = \left(1 - \lambda(s^*)k^*(s^*)\right)\boldsymbol{t}^*(s^*) + \left(\lambda'(s^*) - \mu(s^*)r^*(s^*)\right)\boldsymbol{n}^*(s^*) + \left(\lambda(s^*)r^*(s^*) + \mu'(s^*)\right)\boldsymbol{b}^*(s^*) \tag{4.1.18}$$

elde edilir. (4.1.18) denklemine $\boldsymbol{t}^*(s^*)$ vektörü ile kuaterniyonik iç çarpım yapılırsa

$$h\left(\frac{d\alpha}{ds}\frac{ds}{ds^*}, \boldsymbol{t}^*(s^*)\right) = \frac{1}{2}\left[\begin{array}{l}\left[\left(\begin{array}{l}\left(1 - \lambda(s^*)k^*(s^*)\right)\boldsymbol{t}^*(s^*) + \left(\lambda'(s^*) - \mu(s^*)r^*(s^*)\right)\boldsymbol{n}^*(s^*) \\ +\left(\lambda(s^*)r^*(s^*) + \mu'(s^*)\right)\boldsymbol{b}^*(s^*)\end{array}\right) \times \widehat{\boldsymbol{t}^*}(s^*)\right] \\ +\boldsymbol{t}^*(s^*) \times \left(\begin{array}{l}\left(1 - \lambda(s^*)k^*(s^*)\right)\widehat{\boldsymbol{t}^*}(s^*) + \left(\lambda'(s^*) - \mu(s^*)r^*(s^*)\right)\widehat{\boldsymbol{n}^*}(s^*) \\ +\left(\lambda(s^*)r^*(s^*) + \mu'(s^*)\right)\widehat{\boldsymbol{b}^*}(s^*)\end{array}\right)\end{array}\right] \tag{4.1.19}$$

elde edilir. Uzaysal kuaterniyonik involüt-evolüt çifti tanımı gereği

$$h\left(\frac{d\alpha}{ds}\frac{ds}{ds^*}, \boldsymbol{t}^*(s^*)\right) = \frac{ds}{ds^*} h\left(\frac{d\alpha}{ds}, \boldsymbol{t}^*(s^*)\right) = 0$$

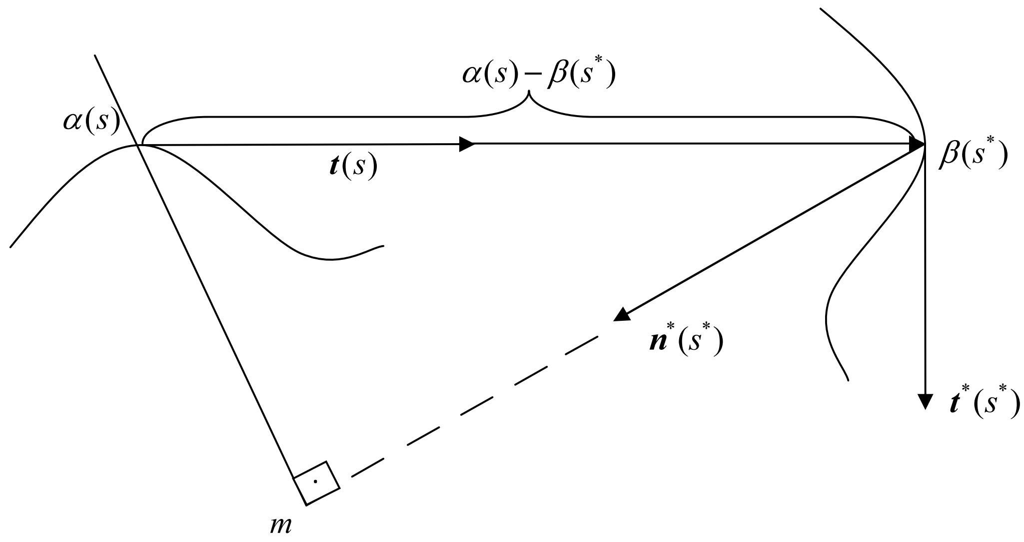
olduğundan (4.1.19) denklemi

$$1 - \lambda(s^*)k^*(s^*) = 0$$

şeklinde bulunur. Bu denklem (4.1.18) denkleminde yerine yazılırsa

$$\frac{d\alpha}{ds}\frac{ds}{ds^*} = \left(\lambda'(s^*) - \mu(s^*)r^*(s^*)\right)\boldsymbol{n}^*(s^*) + \left(\lambda(s^*)r^*(s^*) + \mu'(s^*)\right)\boldsymbol{b}^*(s^*)$$

olur.



Şekil 4.1.2: $\alpha(s)$ ve $\beta(s^*)$ Eğrisinin Frenet Vektörleri

Şekil 4.1.2' den de görüleceği gibi $\frac{d\alpha}{ds}\frac{ds}{ds^*}$ vektör alanı ile (4.1.17) denklemindeki $\alpha(s) - \beta(s^*)$ vektör alanı birbirine paraleldir. Dolayısıyla,

$$\frac{\lambda'(s^*) - \mu(s^*)r^*(s^*)}{\lambda(s^*)} = \frac{\lambda(s^*)r^*(s^*) + \mu'(s^*)}{\mu(s^*)} \tag{4.1.20}$$

dir. Ayrıca,

$$1 - \lambda(s^*)k^*(s^*) = 0 \tag{4.1.21}$$

olduğundan

$$\lambda(s^*) = \frac{1}{k^*(s^*)} = \rho^*(s^*) \tag{4.1.22}$$

bulunur. Burada $\rho^*(s^*)$, $\beta(s^*)$ eğrisinin eğrilik yarıçapıdır. O halde (4.1.20) denkleminde (4.1.22) denklemi yerine yazılırsa

$$\frac{\rho^{*\prime}(s^*)-\mu(s^*)r^*(s^*)}{\rho^*(s^*)}=\frac{\rho^*(s^*)r^*(s^*)+\mu'(s^*)}{\mu(s^*)}$$

elde edilir. Bu eşitlikten $r^*(s^*)$ uzaysal kuaterniyonik burulması çekilirse

$$r^*(s^*)=-\frac{\mu'(s^*)\rho^*(s^*)-\mu(s^*)\rho^{*\prime}(s^*)}{\rho^{*2}(s^*)+\mu^2(s^*)}$$

elde edilir. Bu denklem, $\arctan\left(-\dfrac{\mu(s^*)}{\rho^*(s^*)}\right)$ nin türevi olduğundan

$$r^*(s^*)=\left[\arctan\left(-\frac{\mu(s^*)}{\rho^*(s^*)}\right)\right]'$$

şeklinde yazılır ve her iki tarafın integrali alınırsa

$$\int_0^{s^*} r^*(u)du+c=\arctan\left(-\frac{\mu(s^*)}{\rho^*(s^*)}\right)$$

olur. $\varphi(s^*)=\int_0^{s^*} r^*(u)du$ olduğu göz önüne alınırsa

$$\varphi(s^*)+c=\arctan\left(-\frac{\mu(s^*)}{\rho^*(s^*)}\right)$$

elde edilir. Bu son denklemde gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$-\frac{\mu(s^*)}{\rho^*(s^*)}=\tan\left[\varphi(s^*)+c\right]$$

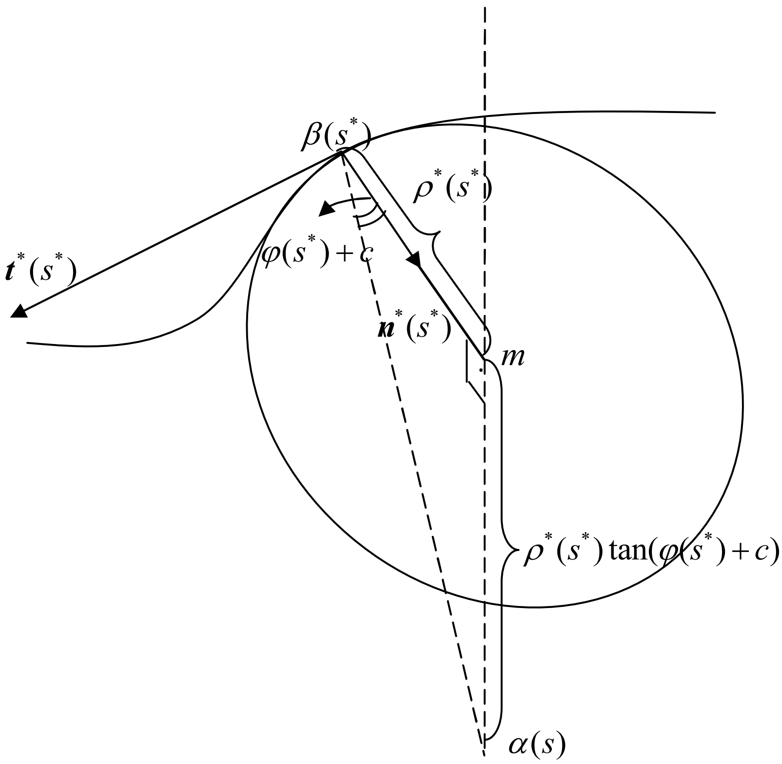
$$\mu(s)=-\rho^*(s^*)\tan\left[\varphi(s^*)+c\right] \tag{4.1.23}$$

bulunur. Dolayısıyla, (4.1.17) denkleminde (4.1.22) ve (4.1.23) denklemleri yerlerine yazılırsa

$$\alpha(s)-\beta(s^*)=\rho^*(s^*)\boldsymbol{n}^*(s^*)-\rho^*(s^*)\tan\left(\varphi(s^*)+c\right)\boldsymbol{b}^*(s^*)$$

$$\alpha(s)=\beta(s^*)+\rho^*(s^*)\boldsymbol{n}^*(s^*)-\rho^*(s^*)\tan\left(\varphi(s^*)+c\right)\boldsymbol{b}^*(s^*) \qquad (4.1.24)$$

olur (Şekil 4.1.3).



Şekil 4.1.3 : Uzaysal Kuaterniyonik Eğrinin Eğrilik Merkezi

Şekil 4.1.3' den $\alpha(s)-\beta(s^*)$ vektörünün $\boldsymbol{n}^*(s^*)$ vektörü ile yaptığı açının

$$\tan\theta=\frac{\rho(s^*)\tan\left(\varphi(s^*)+c\right)}{\rho^*(s^*)}$$

$$\tan\theta=\tan\left(\varphi(s^*)+c\right)$$

$$\theta=\varphi(s^*)+c$$

olduğu görülür.

Teorem 4.1.5. $\beta : I \to \mathbb{E}^3$ uzaysal kuaterniyonik eğrisi $s^* \in I$ yay-parametresi ile verilsin. $\beta(s^*)$ eğrisinin uzaysal kuaterniyonik evolütü, herhangi bir $s \in I$ parametreli $\alpha(s)$ uzaysal kuaterniyonik eğrisi olmak üzere, $\alpha(s)$ eğrisinin Frenet vektörleri $\{\boldsymbol{t}(s), \boldsymbol{n}(s), \boldsymbol{b}(s)\}$ ile $\beta(s^*)$ eğrisinin Frenet vektörleri $\{\boldsymbol{t}^*(s^*), \boldsymbol{n}^*(s^*), \boldsymbol{b}^*(s^*)\}$ arasında

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{t}(s) &= \cos(\varphi(s^*)+c)\boldsymbol{n}^*(s^*) - \sin(\varphi(s^*)+c)\boldsymbol{b}^*(s^*) \\
\boldsymbol{n}(s) &= -\boldsymbol{t}^*(s^*) \\
\boldsymbol{b}(s) &= \sin(\varphi(s^*)+c)\boldsymbol{n}^*(s^*) + \cos(\varphi(s^*)+c)\boldsymbol{b}^*(s^*)
\end{aligned}$$

bağıntıları vardır.

İspat: $\beta(s^*)$ uzaysal kuaterniyonik eğrisinin uzaysal kuaterniyonik evolütü, herhangi bir $s \in I$ parametreli $\alpha(s)$ uzaysal kuaterniyonik eğrisi olsun. (4.1.24) denkleminin $s^* \in I$ yay-parametresine göre türevi alınır ve (2.2.7) Frenet formülleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\frac{d\alpha}{ds}\frac{ds}{ds^*} &= \left[1-\rho^*(s^*)k^*(s^*)\right]\boldsymbol{t}^*(s^*) + \left[\rho^{*\prime}(s^*) + \rho^*(s^*)r^*(s^*)\tan(\varphi(s^*)+c)\right]\boldsymbol{n}^*(s^*) \\
&\quad -\left[\rho^{*\prime}(s^*)\tan(\varphi(s^*)+c) + \varphi'(s^*)\rho^*(s^*)\left(1+\tan^2(\varphi(s^*)+c)\right) - \rho^*(s^*)r^*(s^*)\right]\boldsymbol{b}^*(s^*)
\end{aligned} \tag{4.1.25}$$

elde edilir. Ayrıca, Teorem 4.1.4' den

$$\varphi(s^*) = \int_0^{s^*} r^*(u)du$$

dir. Buradan $s^* \in I$ yay-parametresine göre integral alınırsa

$$\varphi'(s^*) = r^*(s^*) \tag{4.1.26}$$

elde edilir. Dolayısıyla, (4.1.26) denklemi (4.1.25) denkleminde yerine yazılır ve (4.1.22) denklemi göz önüne alınırsa

$$\frac{d\alpha}{ds}\frac{ds}{ds^*} = \left[1-\rho^*(s^*)k^*(s^*)\right]\boldsymbol{t}^*(s^*) + \left[\rho^{*\prime}(s^*) + \rho^*(s^*)\tan(\varphi(s^*)+c)r^*(s^*)\right]\boldsymbol{n}^*(s^*)$$
$$-\left[\rho^{*\prime}(s^*)\tan(\varphi(s^*)+c) + \rho^*(s^*)r^*(s^*)\tan^2(\varphi(s^*)+c) + \rho^*(s^*)r^*(s^*) - \rho^*(s^*)r^*(s^*)\right]\boldsymbol{b}^*(s^*)$$

$$\frac{d\alpha}{ds}\frac{ds}{ds^*} = \left[\rho^{*\prime}(s^*) + \rho^*(s^*)r^*(s^*)\tan(\varphi(s^*)+c)\right]\boldsymbol{n}^*(s^*)$$
$$-\left[\rho^{*\prime}(s^*)\tan(\varphi(s^*)+c) + \rho^*(s^*)r^*(s^*)\tan^2(\varphi(s^*)+c)\right]\boldsymbol{b}^*(s^*)$$

bulunur. Bu son denklemde gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\frac{d\alpha}{ds}\frac{ds}{ds^*} = \left[\frac{\rho^{*\prime}(s^*)+\rho^*(s^*)r^*(s^*)\tan\left(\varphi(s^*)+c\right)}{\cos\left(\varphi(s^*)+c\right)}\right]\left[\cos\left(\varphi(s^*)+c\right)\boldsymbol{n}^*(s^*) - \sin\left(\varphi(s^*)+c\right)\boldsymbol{b}^*(s^*)\right] \tag{4.1.27}$$

elde edilir. Buradan (4.1.27) denkleminin kuaterniyonik normu hesaplanırsa

$$\left\|\frac{d\alpha}{ds}\frac{ds}{ds^*}\right\|^2 = \delta\left[\left(\cos\left(\varphi(s^*)+c\right)\boldsymbol{n}^*(s^*) - \sin\left(\varphi(s^*)+c\right)\boldsymbol{b}^*(s^*)\right)\times\left(\widehat{\cos\left(\varphi(s^*)+c\right)\boldsymbol{n}^*(s^*) - \sin\left(\varphi(s^*)+c\right)\boldsymbol{b}^*(s^*)}\right)\right]$$

$$= \delta\left[\left(\cos\left(\varphi(s^*)+c\right)\boldsymbol{n}^*(s^*) - \sin\left(\varphi(s^*)+c\right)\boldsymbol{b}^*(s^*)\right)\times\left(\cos\left(\varphi(s^*)+c\right)\hat{\boldsymbol{n}}^*(s^*) - \sin\left(\varphi(s^*)+c\right)\hat{\boldsymbol{b}}^*(s^*)\right)\right]$$

$$= \delta\left[\begin{array}{l}\cos^2\left(\varphi(s^*)+c\right)\left(\boldsymbol{n}^*(s^*)\times\widehat{\boldsymbol{n}^*}(s^*)\right) - \sin\left(\varphi(s^*)+c\right)\cos\left(\varphi(s^*)+c\right)\left(\boldsymbol{b}^*(s^*)\times\widehat{\boldsymbol{n}^*}(s^*)\right) \\ -\sin\left(\varphi(s^*)+c\right)\cos\left(\varphi(s^*)+c\right)\left(\boldsymbol{n}^*(s^*)\times\widehat{\boldsymbol{b}^*}(s^*)\right) + \sin^2\left(\varphi(s^*)+c\right)\left(\boldsymbol{b}^*(s^*)\times\widehat{\boldsymbol{b}^*}(s^*)\right)\end{array}\right]$$

$$= \delta\left[\cos^2\left(\varphi(s^*)+c\right) + \sin^2\left(\varphi(s^*)+c\right)\right]$$

dır. Burada

$$\delta = \left[\frac{\rho^{*\prime}(s^*)+\rho^*(s^*)r^*(s^*)\tan\left(\varphi(s^*)+c\right)}{\cos\left(\varphi(s^*)+c\right)}\right]^2$$

dır. Dolayısıyla, kuaterniyonik norm

$$\left\|\frac{d\alpha}{ds}\frac{ds}{ds^*}\right\| = \left\|\frac{d\alpha}{ds}\right\|\left|\frac{ds}{ds^*}\right| = \frac{\rho^{*\prime}(s^*)+\rho^*(s^*)r^*(s^*)\tan\left(\varphi(s^*)+c\right)}{\cos\left(\varphi(s^*)+c\right)} \tag{4.1.28}$$

şeklinde bulunur. Böylece (2.2.5) Frenet denklemlerinde (4.1.27) ve (4.1.28) denklemleri kullanılarak $\boldsymbol{t}(s)$ teğet vektörü

$$\boldsymbol{t}(s)=\frac{\frac{d\alpha}{ds}}{\left\|\frac{d\alpha}{ds}\right\|}=\cos(\varphi(s^*)+c)\boldsymbol{n}^*(s^*)-\sin(\varphi(s^*)+c)\boldsymbol{b}^*(s^*) \tag{4.1.29}$$

şeklinde bulunur.

Şimdi $\boldsymbol{n}(s)$ vektörünü hesaplayalım. Bunun için (4.1.29) denkleminin $s^*\in I$ yay-parametresine göre türevi alınır ve (4.1.26) denklemi göz önüne alınarak (2.2.7) Frenet formülleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}\frac{d\boldsymbol{t}}{ds}\frac{ds}{ds^*}=&-k^*(s^*)\cos\left(\varphi(s^*)+c\right)\boldsymbol{t}^*(s^*)+\left[r^*(s^*)\sin\left(\varphi(s^*)+c\right)-\varphi'(s^*)\sin\left(\varphi(s^*)+c\right)\right]\boldsymbol{n}^*(s^*)\\&+\left[r^*(s^*)\cos\left(\varphi(s^*)+c\right)-\varphi'(s^*)\cos\left(\varphi(s^*)+c\right)\right]\boldsymbol{b}^*(s^*)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d\boldsymbol{t}}{ds}\frac{ds}{ds^*}=&-k^*(s^*)\cos\left(\varphi(s^*)+c\right)\boldsymbol{t}^*(s^*)+\left[r^*(s^*)\sin\left(\varphi(s^*)+c\right)-r^*(s^*)\sin\left(\varphi(s^*)+c\right)\right]\boldsymbol{n}^*(s^*)\\&+\left[r^*(s^*)\cos\left(\varphi(s^*)+c\right)-r^*(s^*)\cos\left(\varphi(s^*)+c\right)\right]\boldsymbol{b}^*(s^*)\end{aligned}$$

$$\frac{d\boldsymbol{t}}{ds}\frac{ds}{ds^*}=-k^*(s^*)\cos\left(\varphi(s^*)+c\right)\boldsymbol{t}^*(s^*) \tag{4.1.30}$$

bulunur. $\alpha(s)$ uzaysal kuaterniyonik eğrisi yay-parametreli olmadığından

$$\boldsymbol{t}'(s)=\frac{d\boldsymbol{t}}{ds}=\left\|\alpha'(s)\right\|k(s)\boldsymbol{n}(s)$$

dir. Son denklem ve (4.1.30) denklemi göz önüne alınırsa

$$-k^*(s^*)\cos\left(\varphi(s^*)+c\right)\boldsymbol{t}^*(s^*)=\left\|\frac{d\alpha}{ds}\right\|\frac{ds}{ds^*}k(s)\boldsymbol{n}(s) \tag{4.1.31}$$

elde edilir. Buradan $\boldsymbol{t}^*(s^*)$ ve $\boldsymbol{n}(s)$ vektörlerinin lineer bağımlı olduğu görülür. O halde

$$\boldsymbol{n}(s) = -\boldsymbol{t}^*(s^*) \tag{4.1.32}$$

yazılabilir. Öyleyse $\alpha(s)$ uzaysal kuaterniyonik evolüt eğrisinin asal normali, $\beta(s^*)$ uzaysal kuaterniyonik eğrisinin teğetine paraleldir.

Son olarak $\boldsymbol{b}(s)$ vektörünü bulalım. $\boldsymbol{t}(s)$ vektörü ile $\boldsymbol{n}(s)$ vektörünün kuaterniyonik çarpımı

$$\boldsymbol{b}(s) = \boldsymbol{t}(s) \times \boldsymbol{n}(s)$$

olduğundan $\boldsymbol{b}(s)$ vektörü, kuaterniyonik çarpım özellikleri ve (2.2.4) denklemleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{b}(s) &= \left[\cos(\varphi(s^*)+c)\boldsymbol{n}^*(s^*) - \sin(\varphi(s^*)+c)\boldsymbol{b}^*(s^*)\right] \times \left[-\boldsymbol{t}^*(s^*)\right] \\
\boldsymbol{b}(s) &= \cos(\varphi(s^*)+c)\left[\boldsymbol{n}^*(s^*) \times \left(-\boldsymbol{t}^*(s^*)\right)\right] - \sin(\varphi(s^*)+c)\left[\boldsymbol{b}^*(s^*) \times \left(-\boldsymbol{t}^*(s^*)\right)\right] \\
\boldsymbol{b}(s) &= \sin(\varphi(s^*)+c)\boldsymbol{n}^*(s^*) + \cos(\varphi(s^*)+c)\boldsymbol{b}^*(s^*) \qquad (4.1.33)
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur.

Teorem 4.1.6. $\beta : I \to \mathbb{E}^3$, uzaysal kuaterniyonik eğrisi $s^* \in I$ yay-parametresi ile verilsin. $\beta(s^*)$ eğrisinin uzaysal kuaterniyonik evolütü, herhangi bir $s \in I$ parametreli $\alpha(s)$ uzaysal kuaterniyonik eğrisi olmak üzere, $\alpha(s)$ eğrisinin Frenet eğrilikleri $k(s), r(s)$, $\beta(s^*)$ eğrisinin Frenet eğrilikleri $k^*(s^*), r^*(s^*)$ cinsinden

$$k(s) = \frac{k^{*3}(s^*)\cos^3(\varphi(s^*)+c)}{k^*(s^*)r^*(s^*)\sin\left(\varphi(s^*)+c\right) - k^{*\prime}(s^*)\cos\left(\varphi(s^*)+c\right)}$$

$$r(s) = \frac{-k^{*3}(s^*)\sin\left(\varphi(s^*)+c\right)\cos^2(\varphi(s^*)+c)}{k^*(s^*)r^*(s^*)\sin\left(\varphi(s^*)+c\right) - k^{*\prime}(s^*)\cos\left(\varphi(s^*)+c\right)}$$

şeklinde yazılır.

İspat: $s^* \in I$ yay-parametresi ile verilen $\beta(s^*)$ uzaysal kuaterniyonik eğrisinin uzaysal kuaterniyonik evolütü, $\alpha(s)$ uzaysal kuaterniyonik eğrisi olsun. (4.1.31) denkleminde (4.1.32) denklemi göz önüne alınırsa

$$k^*(s^*)\cos\left(\varphi(s^*)+c\right)=\left\|\frac{d\alpha}{ds}\right\|\frac{ds}{ds^*}k(s)$$

olur. Buradan $\alpha(s)$ eğrisinin $k(s)$ uzaysal kuaterniyonik eğriliği çekilirse

$$k(s)=\frac{k^*(s^*)\cos\left(\varphi(s^*)+c\right)}{\left\|\frac{d\alpha}{ds}\right\|\frac{ds}{ds^*}}$$

elde edilir. Böylelikle (4.1.28) denklemi göz önüne alınırsa

$$k(s)=\frac{k^*(s^*)\cos\left(\varphi(s^*)+c\right)}{\frac{\rho^{*\prime}(s^*)+\rho^*(s^*)r^*(s^*)\tan\left(\varphi(s^*)+c\right)}{\cos\left(\varphi(s^*)+c\right)}} \tag{4.1.34}$$

elde edilir. (4.1.22) denkleminin $s^* \in I$ yay-parametresine göre türevi alınır ve (4.1.34) denkleminde yerine yazılırsa

$$k(s)=\frac{k^*(s^*)\cos\left(\varphi(s^*)+c\right)}{\frac{-\frac{k^{*\prime}(s^*)}{k^{*2}(s^*)}+\frac{1}{k^*(s^*)}r^*(s^*)\tan\left(\varphi(s^*)+c\right)}{\cos\left(\varphi(s^*)+c\right)}}$$

$$k(s)=\frac{k^*(s^*)\cos\left(\varphi(s^*)+c\right)}{-\frac{k^{*\prime}(s^*)}{k^{*2}(s^*)}+\frac{r^*(s^*)\sin\left(\varphi(s^*)+c\right)}{k^*(s^*)\cos\left(\varphi(s^*)+c\right)}}$$

$$k(s)=\frac{k^{*3}(s^*)\cos^3(\varphi(s^*)+c)}{k^*(s^*)r^*(s^*)\sin\left(\varphi(s^*)+c\right)-k^{*\prime}(s^*)\cos\left(\varphi(s^*)+c\right)}$$

elde edilir. Şimdi $\alpha(s)$ uzaysal kuaterniyonik eğrisinin $r(s)$ uzaysal kuaterniyonik burulmasını hesaplayalım. Bunun için ilk önce (2.2.7) Frenet formülleri kullanılır ve

$\varphi'(s^*) = r^*(s^*)$ olduğu göz önüne alınırsa (4.1.33) denkleminin $s^* \in I$ yay-parametresine göre türevi

$$\frac{d\boldsymbol{b}}{ds}\frac{ds}{ds^*} = \varphi'(s^*)\cos\left(\varphi(s^*)+c\right)\boldsymbol{n}^*(s^*) + \sin\left(\varphi(s^*)+c\right)\boldsymbol{n}^{*\prime}(s^*)$$
$$-\varphi'(s^*)\sin\left(\varphi(s^*)+c\right)\boldsymbol{b}^*(s^*) + \cos\left(\varphi(s^*)+c\right)\boldsymbol{b}^{*\prime}(s^*)$$

$$\frac{d\boldsymbol{b}}{ds}\frac{ds}{ds^*} = r^*(s^*)\cos\left(\varphi(s^*)+c\right)\boldsymbol{n}^*(s^*) - k^*(s^*)\sin\left(\varphi(s^*)+c\right)\boldsymbol{t}^*(s^*) + r^*(s^*)\sin\left(\varphi(s^*)+c\right)\boldsymbol{b}^*(s^*)$$
$$-r^*(s^*)\sin\left(\varphi(s^*)+c\right)\boldsymbol{b}^*(s^*) - r^*(s^*)\cos\left(\varphi(s^*)+c\right)\boldsymbol{n}^*(s^*)$$

$$\frac{d\boldsymbol{b}}{ds}\frac{ds}{ds^*} = -k^*(s^*)\sin\left(\varphi(s^*)+c\right)\boldsymbol{t}^*(s^*) \qquad (4.1.35)$$

şeklinde bulunur. $\alpha(s)$ uzaysal kuaterniyonik eğrisi yay-parametreli olmadığından

$$\boldsymbol{b}'(s) = \frac{d\boldsymbol{b}}{ds} = -\left\|\alpha'(s)\right\| r(s)\boldsymbol{n}(s)$$

dır. Son denklemde (4.1.35) denklemi yerine yazılırsa

$$-k^*(s^*)\sin\left(\varphi(s^*)+c\right)\boldsymbol{t}^*(s^*) = -\left\|\frac{d\alpha}{ds}\right\|\frac{ds}{ds^*} r(s)\boldsymbol{n}(s) \qquad (4.1.36)$$

elde edilir. (4.1.36) denkleminde (4.1.32) denklemi göz önüne alınırsa

$$k^*(s^*)\sin\left(\varphi(s^*)+c\right) = -\left\|\frac{d\alpha}{ds}\right\|\frac{ds}{ds^*} r(s)$$

elde edilir. Buradan $\alpha(s)$ uzaysal kuaterniyonik eğrisinin $r(s)$, uzaysal kuaterniyonik burulması çekilir ve (4.1.28) denklemi yerine yazılırsa

$$r(s) = \frac{-k^*(s^*)\sin\left(\varphi(s^*)+c\right)}{\left\|\frac{d\alpha}{ds}\right\|\frac{ds}{ds^*}}$$

$$r(s) = \frac{-k^*(s^*)\sin\left(\varphi(s^*)+c\right)}{\dfrac{\rho^{*\prime}(s^*) + \rho^*(s^*)r^*(s^*)\tan\left(\varphi(s^*)+c\right)}{\cos\left(\varphi(s^*)+c\right)}}$$

olur. (4.1.22) denkleminin $\beta(s^*)$ eğrisinin $s^* \in I$ yay-parametresine göre türevi alınır ve son denklemde yerine yazılırsa

$$r(s) = \frac{-k^*(s^*)\sin\left(\varphi(s^*)+c\right)}{\dfrac{-\dfrac{k^{*\prime}(s^*)}{k^{*2}(s^*)} + \dfrac{1}{k^*(s)} r^*(s^*)\tan\left(\varphi(s^*)+c\right)}{\cos\left(\varphi(s^*)+c\right)}}$$

$$r(s) = \frac{-k^{*3}(s^*)\sin\left(\varphi(s^*)+c\right)\cos^2\left(\varphi(s^*)+c\right)}{k^*(s^*)r^*(s^*)\sin\left(\varphi(s^*)+c\right) - k^{*\prime}(s^*)\cos\left(\varphi(s^*)+c\right)}$$

elde edilir.

Sonuç 4.1.3. $\beta : I \to \mathbb{E}^3$, uzaysal kuaterniyonik eğrisi $s^* \in I$ yay-parametresi ile verilsin. Eğer $\beta(s^*)$ eğrisi kuaterniyonik $w-$eğrisi olarak alınırsa $\alpha(s)$ eğrisinin Frenet eğrilikleri $k(s)$, $r(s)$ ile $\beta(s^*)$ eğrisinin Frenet eğrilikleri $k^*(s^*)$, $r^*(s^*)$ arasında

$$k(s) = \frac{k^{*2}(s^*)\cos^3(\varphi(s^*)+c)}{r^*(s^*)\sin\left(\varphi(s^*)+c\right)}$$

$$r(s) = \frac{k^{*2}(s^*)\cos^2(\varphi(s^*)+c)}{r^*(s^*)}$$

bağıntıları sağlanır.

İspat: $\beta(s^*)$ uzaysal kuaterniyonik eğrisi kuaterniyonik $w-$eğrisi olsun. Bu durumda $k^*(s^*)$ ve $r^*(s^*)$ eğrilikleri sabit olacağından $k^{*\prime}(s^*) = r^{*\prime}(s^*) = 0$ olur. Dolayısıyla, Teorem 4.1.6' nın bir sonucu olarak

$$k(s) = \frac{k^{*2}(s^*)\cos^3(\varphi(s^*)+c)}{r^*(s^*)\sin\left(\varphi(s^*)+c\right)}$$

$$r(s) = \frac{-k^{*2}(s^*)\cos^2(\varphi(s^*)+c)}{r^*(s^*)}$$

elde edilir.

Teorem 4.1.7. $\beta : I \to \mathbb{E}^3$, uzaysal kuaterniyonik eğrisi $s^* \in I$ yay-parametresi ile verilsin. $\beta(s^*)$ eğrisinin uzaysal kuaterniyonik evolütü, herhangi bir $s \in I$ parametreli $\alpha(s)$ uzaysal kuaterniyonik eğrisi olsun. $\alpha(s)$ eğrisinin Frenet eğrilikleri, sırasıyla, $k(s)$, $r(s)$ olmak üzere,

$$\frac{r(s)}{k(s)} = -\tan\left(\varphi(s^*)+c\right)$$

dir. Burada c yerine c_1 ve c_2 sayıları konularak elde edilen iki uzaysal kuaterniyonik evolüt eğrisinin $\alpha^{(1)}(s)$ ve $\alpha^{(2)}(s)$ noktalarındaki teğetleri $\beta(s^*)$ noktasında kesişirler. Bu teğetler arasındaki açının ölçüsü $c_1 - c_2$ dir.

İspat: $s^* \in I$ yay-parametresi ile verilen $\beta(s^*)$, uzaysal kuaterniyonik eğrisinin uzaysal kuaterniyonik evolütü, $\alpha(s)$ uzaysal kuaterniyonik eğrisi olsun. Teorem 4.1.6' dan

$$\frac{r(s)}{k(s)} = \frac{\dfrac{-k^{*3}(s^*)\sin\left(\varphi(s^*)+c\right)\cos^2(\varphi(s^*)+c)}{k^*(s^*)r^*(s^*)\sin\left(\varphi(s^*)+c\right) - k^{*\prime}(s^*)\cos\left(\varphi(s^*)+c\right)}}{\dfrac{k^{*3}(s^*)\cos^3(\varphi(s^*)+c)}{k^*(s^*)r^*(s^*)\sin\left(\varphi(s^*)+c\right) - k^{*\prime}(s^*)\cos\left(\varphi(s^*)+c\right)}}$$

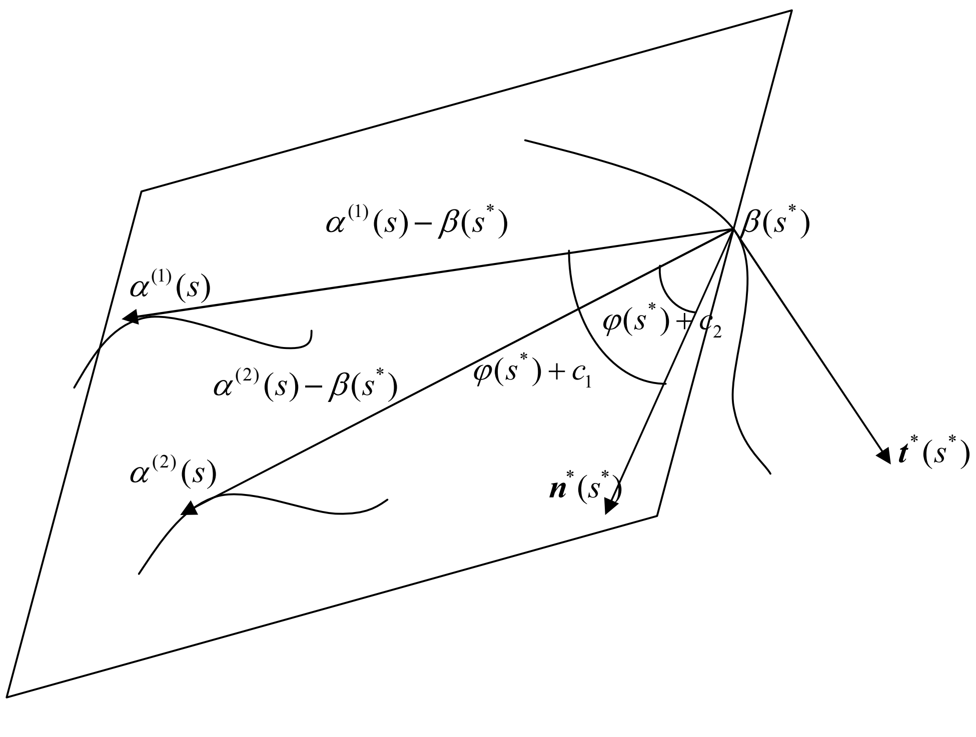
$$\frac{r(s)}{k(s)} = \frac{-k^{*3}(s^*)\sin\left(\varphi(s^*)+c\right)\cos^2(\varphi(s^*)+c)}{k^{*3}(s^*)\cos^3(\varphi(s^*)+c)} = \frac{-\sin\left(\varphi(s^*)+c\right)}{\cos\left(\varphi(s^*)+c\right)}$$

$$\frac{r(s)}{k(s)} = -\tan\left(\varphi(s^*)+c\right)$$

olduğu kolayca görülür.

$\alpha(s)$ uzaysal kuaterniyonik eğrisinin uzaysal kuaterniyonik evolütü, $\beta(s^*)$ uzaysal kuaterniyonik eğrisi olmak üzere, Teorem 4.1.4' den $\alpha(s)-\beta(s^*)$ vektörü ile $\boldsymbol{n}^*(s^*)$ vektörü arasındaki açının ölçüsü $\varphi(s^*)+c$ dir. O halde c_1 ve c_2 sayıları konularak elde edilen iki eğride $\beta(s^*)$ uzaysal kuaterniyonik eğrisinin uzaysal kuaterniyonik evolütü olduğundan, $\alpha^{(1)}(s)-\beta(s^*)$ vektörü ile $\boldsymbol{n}^*(s^*)$ vektörünün belirttiği açının ölçüsü $\varphi(s^*)+c_1$, $\alpha^{(2)}(s)-\beta(s^*)$ vektörü ile $\boldsymbol{n}^*(s^*)$ vektörünün belirttiği açının ölçüsü $\varphi(s^*)+c_2$ dir. Dolayısıyla, $\alpha^{(1)}(s)$ uzaysal kuaterniyonik eğrisi, $\beta(s^*)$ uzaysal kuaterniyonik eğrisinin bir uzaysal kuaterniyonik evolütü olduğundan, $\alpha^{(1)}(s)-\beta(s^*)$ vektörü, $\alpha^{(1)}$ eğrisinin $\alpha^{(1)}(s)$ noktasındaki teğetine paraleldir. Aynı şekilde $\alpha^{(2)}(s)$ uzaysal kuaterniyonik eğrisi, $\beta(s^*)$ uzaysal kuaterniyonik eğrisinin bir uzaysal kuaterniyonik evolütü olduğundan, $\alpha^{(2)}(s)-\beta(s^*)$ vektörü, $\alpha^{(2)}$ eğrisinin $\alpha^{(2)}(s)$ noktasındaki teğetine paraleldir.

Ayrıca $\alpha^{(1)}(s)-\beta(s^*)$, $\alpha^{(2)}(s)-\beta(s^*)$, $\boldsymbol{n}^*(s^*)$ vektörlerinin üçü de $\boldsymbol{t}^*(s^*)$ vektörüne $h-$ortogonal olduklarından düzlemseldir (Şekil 4.1.4).



Şekil 4.1.4: $\alpha^{(1)}(s)$ ve $\alpha^{(2)}(s)$ Uzaysal Kuaterniyonik Evolüt Eğrileri

Buna göre Şekil 4.1.4' den dolayı $\alpha^{(1)}(s)$ ve $\alpha^{(2)}(s)$ eğrilerinin $\alpha^{(1)}(s)$ ve $\alpha^{(2)}(s)$ noktalarındaki teğetleri arasındaki açının ölçüsü

$$\varphi(s^*)+c_1-\left(\varphi(s^*)+c_2\right)=c_1-c_2$$

dir.

4.2. Kuaterniyonik İnvolüt-Evolüt Eğri Çiftleri

$\mathbb{Q}$ kuaterniyonik uzayında ξ ve ϕ, sırasıyla, $s\in I$ ve $s^*\in I$ parametrelerine sahip iki kuaterniyonik eğri olmak üzere,

$$\xi=\xi(s) \quad \text{ve} \quad \phi=\phi\left(s^*\right)$$

şeklinde verilsin. ξ ve ϕ kuaterniyonik eğrilerinin Frenet vektörleri, sırasıyla, $\left\{\boldsymbol{T}_\xi,\boldsymbol{N}_\xi,\boldsymbol{B}_\xi,\boldsymbol{E}_\xi\right\}$ ve $\left\{\boldsymbol{T}_\phi,\boldsymbol{N}_\phi,\boldsymbol{B}_\phi,\boldsymbol{E}_\phi\right\}$ dir. Burada $\boldsymbol{T}_\xi$ ve $\boldsymbol{T}_\phi$ teğet vektör alanlarıdır. Ayrıca, ξ ve ϕ kuaterniyonik eğrilerin eğrilikleri, sırasıyla $\kappa_\xi,k,\left(r-\kappa_\xi\right)$ ve $\left(\kappa_\phi,k^*,r^*-\kappa_\phi\right)$ olsun. Bu koşullar altında ξ ve ϕ kuaterniyonik eğri çiftinin kuaterniyonik involüt-evolüt eğri çifti olması ile ilgili aşağıdaki tanım verilebilir.

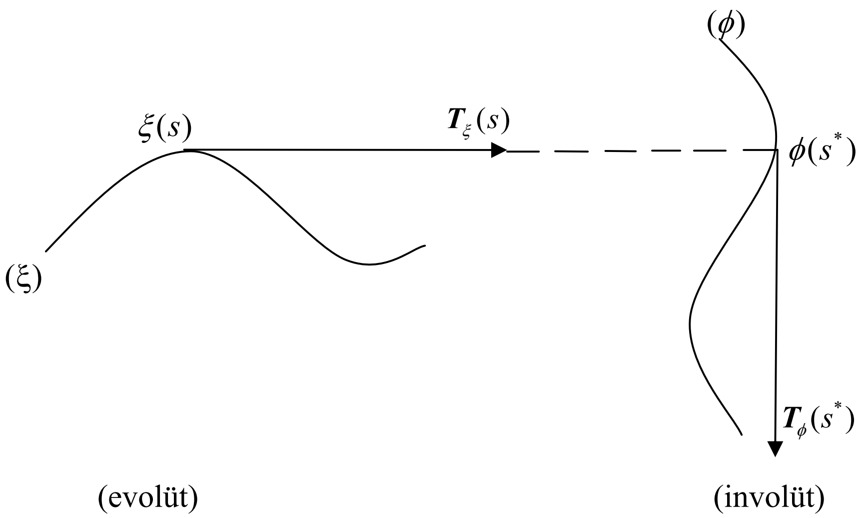
Tanım 4.2.1. $\xi:I\to\mathbb{Q}$ ve $\phi:I\to\mathbb{Q}$ eğrileri için $I=\left[0,1\right]$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} &f:I\to I\\ &\quad s\to s^*=f(s),\ \frac{ds^*}{ds}\neq 0\end{aligned}$$

birebir ve örten dönüşümü altında

$$h\left(\boldsymbol{T}_\phi(s^*),\boldsymbol{T}_\xi(s)\right)=0$$

şartı sağlanıyorsa; $\phi(s^*)$ kuaterniyonik eğrisine, $\xi(s)$ kuaterniyonik eğrisinin kuaterniyonik involütü, $\xi(s)$ eğrisine de $\phi(s^*)$ eğrisinin kuaterniyonik evolütü denir (Şekil 4.2.1).



Şekil 4.2.1: Kuaterniyonik İnvolüt-Evolüt Eğri Çiftleri

Teorem 4.2.1. $\xi : I \to \mathbb{Q}$, kuaterniyonik eğrisi $s \in I$ yay-parametresi ile verilsin. Herhangi bir $s^* \in I$ parametreli $\phi(s^*)$ kuaterniyonik eğrisi $\xi(s)$ kuaterniyonik eğrisinin bir kuaterniyonik involütü olmak üzere,

$$d(\xi(s), \phi(s^*)) = |c - s|, \qquad (c \in \mathbb{R})$$

dir. Böylece

$$\phi(s^*) = \xi(s) + (c - s)\boldsymbol{T}_\xi(s)$$

dir.

İspat: $s \in I$ yay-parametresi ile verilen $\xi(s)$ kuaterniyonik eğrisinin bir kuaterniyonik involütü, herhangi bir $s^* \in I$ parametreli $\phi(s^*)$ kuaterniyonik eğrisi olsun. Şekil 4.2.1' den

$$\phi(s^*) = \xi(s) + \lambda(s)\boldsymbol{T}_\xi(s) \tag{4.2.1}$$

dir. (4.2.1) denkleminin $s \in I$ yay-parametresine göre (2.2.11) Frenet formülleri kullanılarak türevi alınırsa

$$\frac{d\phi}{ds^*}\frac{ds^*}{ds} = \xi'(s) + \lambda'(s)\boldsymbol{T}_\xi(s) + \lambda(s)\boldsymbol{T}_\xi{}'(s)$$

$$= \boldsymbol{T}_\xi(s) + \lambda'(s)\boldsymbol{T}_\xi(s) + \lambda(s)\kappa_\xi(s)\boldsymbol{N}_\xi(s)$$

$$= \left(1 + \lambda'(s)\right)\boldsymbol{T}_\xi(s) + \lambda(s)\kappa_\xi(s)\boldsymbol{N}_\xi(s) \qquad (4.2.2)$$

elde edilir. (2.2.11) Frenet formülleri ile kuaterniyonik çarpım ve eşlenik özellikleri göz önüne alınır, (4.2.2) denklemi ile $\boldsymbol{T}_\xi(s)$ vektörüne kuaterniyonik iç çarpım uygulanırsa

$$h\left(\frac{d\phi}{ds^*}\frac{ds^*}{ds}, \boldsymbol{T}_\xi(s)\right) = h\left(\left[\left(1 + \lambda'(s)\right)\boldsymbol{T}_\xi(s) + \lambda(s)\kappa_\xi(s)\left(\boldsymbol{t}(s) \times \boldsymbol{T}_\xi(s)\right)\right], \boldsymbol{T}_\xi(s)\right)$$

$$= \left(1 + \lambda'(s)\right)h\left(\boldsymbol{T}_\xi(s), \boldsymbol{T}_\xi(s)\right) + \lambda(s)\kappa_\xi(s)h\left(\left(\boldsymbol{t}(s) \times \boldsymbol{T}_\xi(s)\right), \boldsymbol{T}_\xi(s)\right)$$

$$= \left(1 + \lambda'(s)\right) + \lambda(s)\kappa_\xi(s)\left[\frac{1}{2}\left[\left(\boldsymbol{t}(s) \times \boldsymbol{T}_\xi(s)\right) \times \widehat{\boldsymbol{T}}_\xi(s) + \boldsymbol{T}_\xi(s) \times \widehat{\left(\boldsymbol{t}(s) \times \boldsymbol{T}_\xi(s)\right)}\right]\right]$$

$$= \left(1 + \lambda'(s)\right) + \lambda(s)\kappa_\xi(s)\left[\frac{1}{2}\left[\boldsymbol{t}(s) \times \left(\boldsymbol{T}_\xi(s) \times \widehat{\boldsymbol{T}}_\xi(s)\right) + \boldsymbol{T}_\xi(s) \times \left(\widehat{\boldsymbol{T}}_\xi(s) \times \hat{\boldsymbol{t}}(s)\right)\right]\right]$$

$$= \left(1 + \lambda'(s)\right) + \lambda(s)\kappa_\xi(s)\left[\frac{1}{2}\left[\boldsymbol{t}(s) \times h\left(\boldsymbol{T}_\xi(s), \boldsymbol{T}_\xi(s)\right) + \left(\boldsymbol{T}_\xi(s) \times \widehat{\boldsymbol{T}}_\xi(s)\right) \times \hat{\boldsymbol{t}}(s)\right]\right]$$

$$= \left(1 + \lambda'(s)\right) + \lambda(s)\kappa_\xi(s)\left[\frac{1}{2}\left[\boldsymbol{t}(s) + h\left(\boldsymbol{T}_\xi(s), \boldsymbol{T}_\xi(s)\right) \times \hat{\boldsymbol{t}}(s)\right]\right]$$

$$= \left(1 + \lambda'(s)\right) + \lambda(s)\kappa_\xi(s)\left[\frac{1}{2}\left[\boldsymbol{t}(s) + \hat{\boldsymbol{t}}(s)\right]\right]$$

$$= \left(1 + \lambda'(s)\right)$$

elde edilir. Kuaterniyonik involüt-evolüt eğri çifti tanımı gereği

$$h\left(\frac{d\phi}{ds^*}\frac{ds^*}{ds},\boldsymbol{T}_\xi(s)\right)=\frac{ds^*}{ds}h\left(\frac{d\phi}{ds^*},\boldsymbol{T}_\xi(s)\right)=0$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
&1+\lambda'(s)=0\\
&\lambda'(s)=-1\\
&\lambda(s)=c-s
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylelikle $\xi(s)$ ve $\phi(s^*)$ noktaları arasındaki uzaklık

$$d\left(\xi(s),\phi(s^*)\right)=\left\|\phi(s^*)-\xi(s)\right\|=\left\|\lambda(s)\boldsymbol{T}_\xi(s)\right\|$$

$$\begin{aligned}
\left\|\lambda(s)\boldsymbol{T}_\xi(s)\right\|^2&=\lambda(s)\boldsymbol{T}_\xi(s)\times\widehat{\lambda(s)\boldsymbol{T}_\xi(s)}\\
&=\lambda^2(s)\left(\boldsymbol{T}_\xi(s)\times\widehat{\boldsymbol{T}_\xi(s)}\right)\\
&=\lambda^2(s)h\left(\boldsymbol{T}_\xi(s),\boldsymbol{T}_\xi(s)\right)\\
&=\lambda^2(s)
\end{aligned}$$

olmak üzere,

$$d\left(\xi(s),\phi(s^*)\right)=|\lambda|=|c-s|$$

dir. Dolayısıyla, (4.2.1) denklemi

$$\phi(s^*)=\xi(s)+(c-s)\boldsymbol{T}_\xi(s)$$

şeklinde yazılır.

Teorem 4.2.2. $\xi:I\to\mathbb{Q}$ kuaterniyonik eğrisi $s\in I$ yay-parametresi ile verilsin. Herhangi bir $s^*\in I$ parametreli $\phi:I\to\mathbb{Q}$ kuaterniyonik eğrisi, $\xi(s)$ kuaterniyonik eğrisinin bir kuaterniyonik involütü olmak üzere, $\phi(s^*)$ kuaterniyonik eğrisinin Frenet vektörleri $\left\{\boldsymbol{T}_\phi(s^*),\boldsymbol{N}_\phi(s^*),\boldsymbol{B}_\phi(s^*),\boldsymbol{E}_\phi(s^*)\right\}$, $\xi(s)$ kuaterniyonik eğrisinin Frenet vektörleri $\left\{\boldsymbol{T}_\xi(s),\boldsymbol{N}_\xi(s),\boldsymbol{B}_\xi(s),\boldsymbol{E}_\xi(s)\right\}$ cinsinden yazılabilir.

İspat: $s \in I$ yay-parametresi ile verilen $\xi(s)$ kuaterniyonik eğrisinin bir kuaterniyonik involütü, herhangi bir $s^* \in I$ parametreli $\phi(s^*)$ kuaterniyonik eğrisi olsun. Teorem 4.2.1' den

$$\phi(s^*) = \xi(s) + (c-s)\boldsymbol{T}_\xi(s)$$

dir. Buradan (2.2.11) Frenet formülleri dikkate alınarak $s \in I$ yay-parametresine göre 1. 2. 3. ve 4. mertebeden türevler hesaplanırsa

$$\frac{d\phi}{ds^*}\frac{ds^*}{ds} = \xi'(s) - \boldsymbol{T}_\xi(s) + (c-s)\boldsymbol{T}_\xi'(s)$$

$$\frac{d\phi}{ds^*}\frac{ds^*}{ds} = \boldsymbol{T}_\xi(s) - \boldsymbol{T}_\xi(s) + (c-s)\kappa_\xi(s)\boldsymbol{N}_\xi(s)$$

$$\frac{d\phi}{ds^*}\frac{ds^*}{ds} = (c-s)\kappa_\xi(s)\boldsymbol{N}_\xi(s) \tag{4.2.3}$$

$$\frac{d^2\phi}{ds^{*2}}\frac{ds^{*2}}{ds^2} = \left[(c-s)\kappa_\xi(s)\right]' \boldsymbol{N}_\xi(s) + (c-s)\kappa_\xi(s)\boldsymbol{N}_\xi'(s)$$

$$= \left[(c-s)\kappa_\xi'(s) - \kappa_\xi(s)\right]\boldsymbol{N}_\xi(s) + (c-s)\kappa_\xi(s)\left(\boldsymbol{t}(s)\times\boldsymbol{T}_\xi(s)\right)'$$

$$= \left[(c-s)\kappa_\xi'(s) - \kappa_\xi(s)\right]\boldsymbol{N}_\xi(s) + (c-s)\kappa_\xi(s)\left(\boldsymbol{t}'(s)\times\boldsymbol{T}_\xi(s) + \boldsymbol{t}(s)\times\boldsymbol{T}_\xi'(s)\right)$$

$$= \left[(c-s)\kappa_\xi'(s) - \kappa_\xi(s)\right]\boldsymbol{N}_\xi(s) + (c-s)\kappa_\xi(s)\left(\boldsymbol{t}'(s)\times\boldsymbol{T}_\xi(s) + \boldsymbol{t}(s)\times\boldsymbol{T}_\xi'(s)\right)$$

$$= \left[(c-s)\kappa_\xi'(s) - \kappa_\xi(s)\right]\boldsymbol{N}_\xi(s) + (c-s)\kappa_\xi(s)\left(k(s)\boldsymbol{n}(s)\times\boldsymbol{T}_\xi(s) + \boldsymbol{t}(s)\times\kappa_\xi(s)\boldsymbol{N}_\xi(s)\right)$$

$$= \left[(c-s)\kappa_\xi'(s) - \kappa_\xi(s)\right]\boldsymbol{N}_\xi(s) + (c-s)\kappa_\xi(s)\left(k(s)\boldsymbol{B}_\xi(s) + \boldsymbol{t}(s)\times\kappa_\xi(s)\left(\boldsymbol{t}(s)\times\boldsymbol{T}_\xi(s)\right)\right)$$

$$= \left[(c-s)\kappa_\xi'(s) - \kappa_\xi(s)\right]\boldsymbol{N}_\xi(s) + (c-s)\kappa_\xi(s)\left(k(s)\boldsymbol{B}_\xi(s) + \boldsymbol{t}(s)\times\kappa_\xi(s)\left(\boldsymbol{t}(s)\times\boldsymbol{T}_\xi(s)\right)\right)$$

$$=\Big[(c-s)\kappa_\xi{}'(s)-\kappa_\xi(s)\Big]\boldsymbol{N}_\xi(s)+(c-s)\kappa_\xi(s)\Big(k(s)\boldsymbol{B}_\xi(s)+\kappa_\xi(s)\boldsymbol{t}(s)\times\boldsymbol{t}(s)\times\boldsymbol{T}_\xi(s)\Big)$$

$$=\Big[(c-s)\kappa_\xi{}'(s)-\kappa_\xi(s)\Big]\boldsymbol{N}_\xi(s)+(c-s)\kappa_\xi(s)\Big(k(s)\boldsymbol{B}_\xi(s)-\kappa_\xi(s)\boldsymbol{T}_\xi(s)\Big)$$

$$=-(c-s)\kappa_\xi{}^2(s)\boldsymbol{T}_\xi(s)+\Big[(c-s)\kappa_\xi{}'(s)-\kappa_\xi(s)\Big]\boldsymbol{N}_\xi(s)+(c-s)\kappa_\xi(s)k(s)\boldsymbol{B}_\xi(s)$$

(4.2.4)

$$\begin{aligned}\frac{d^3\phi}{ds^{*3}}\frac{ds^{*3}}{ds^3}=&\Big[-(c-s)\kappa_\xi{}^2(s)\Big]'\boldsymbol{T}_\xi(s)+\Big[-(c-s)\kappa_\xi{}^2(s)\Big]\kappa_\xi(s)\boldsymbol{N}_\xi(s)+\Big[(c-s)\kappa_\xi{}'(s)-\kappa_\xi(s)\Big]'\boldsymbol{N}_\xi(s)\\&+\Big[(c-s)\kappa_\xi{}'(s)-\kappa_\xi(s)\Big]\Big(\boldsymbol{t}(s)\times\boldsymbol{T}_\xi(s)\Big)'+\Big[(c-s)\kappa_\xi(s)k(s)\Big]'\boldsymbol{B}_\xi(s)\\&+\Big[(c-s)\kappa_\xi(s)k(s)\Big]\Big(\boldsymbol{n}(s)\times\boldsymbol{T}_\xi(s)\Big)'\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}=&\Big[\kappa_\xi{}^2(s)-(c-s)\kappa_\xi{}^{2\prime}(s)\Big]\boldsymbol{T}_\xi(s)+\Big[-(c-s)\kappa_\xi{}^2(s)\Big]\kappa_\xi(s)\boldsymbol{N}_\xi(s)+\Big[-2\kappa_\xi{}'(s)+(c-s)\kappa_\xi{}''(s)\Big]\boldsymbol{N}_\xi(s)\\&+\Big[(c-s)\kappa_\xi{}'(s)-\kappa_\xi(s)\Big]\Big(\boldsymbol{t}'(s)\times\boldsymbol{T}_\xi(s)+\boldsymbol{t}(s)\times\boldsymbol{T}_\xi{}'(s)\Big)\\&+\Big[-\kappa_\xi(s)k(s)+(c-s)\kappa_\xi{}'(s)k(s)+(c-s)\kappa_\xi(s)k'(s)\Big]\boldsymbol{B}_\xi(s)\\&+\Big[(c-s)\kappa_\xi(s)k(s)\Big]\Big(\boldsymbol{n}'(s)\times\boldsymbol{T}_\xi(s)+\boldsymbol{n}(s)\times\boldsymbol{T}_\xi{}'(s)\Big)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}=&\Big[\kappa_\xi{}^2(s)-(c-s)\kappa_\xi{}^{2\prime}(s)\Big]\boldsymbol{T}_\xi(s)+\Big[-(c-s)\kappa_\xi{}^2(s)\Big]\kappa_\xi(s)\boldsymbol{N}_\xi(s)+\Big[-2\kappa_\xi{}'(s)+(c-s)\kappa_\xi{}''(s)\Big]\boldsymbol{N}_\xi(s)\\&+\Big[(c-s)\kappa_\xi{}'(s)-\kappa_\xi(s)\Big]\Big(k(s)\boldsymbol{n}(s)\times\boldsymbol{T}_\xi(s)+\boldsymbol{t}(s)\times\kappa_\xi(s)\boldsymbol{N}_\xi(s)\Big)\\&+\Big[-\kappa_\xi(s)k(s)+(c-s)\kappa_\xi{}'(s)k(s)+(c-s)\kappa_\xi(s)k'(s)\Big]\boldsymbol{B}_\xi(s)\\&+\Big[(c-s)\kappa_\xi(s)k(s)\Big]\Big(\big(-k(s)\boldsymbol{t}(s)+r(s)\boldsymbol{b}(s)\big)\times\boldsymbol{T}_\xi(s)+\boldsymbol{n}(s)\times\kappa_\xi(s)\boldsymbol{N}_\xi(s)\Big)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}=&\Big[\kappa_\xi{}^2(s)-(c-s)\kappa_\xi{}^{2\prime}(s)\Big]\boldsymbol{T}_\xi(s)+\Big[-(c-s)\kappa_\xi{}^2(s)\Big]\kappa_\xi(s)\boldsymbol{N}_\xi(s)\\&+\Big[-2\kappa_\xi{}'(s)+(c-s)\kappa_\xi{}''(s)\Big]\boldsymbol{N}_\xi(s)+\Big[(c-s)\kappa_\xi{}'(s)-\kappa_\xi(s)\Big]\Big(k(s)\boldsymbol{B}_\xi(s)-\kappa_\xi(s)\boldsymbol{T}_\xi(s)\Big)\\&+\Big[-\kappa_\xi(s)k(s)+(c-s)\kappa_\xi{}'(s)k(s)+(c-s)\kappa_\xi(s)k'(s)\Big]\boldsymbol{B}_\xi(s)\\&+\Big[(c-s)\kappa_\xi(s)k(s)\Big]\Big(-k(s)\boldsymbol{N}_\xi(s)+r(s)\boldsymbol{E}_\xi(s)-\kappa_\xi(s)\boldsymbol{b}(s)\times\boldsymbol{T}_\xi(s)\Big)\end{aligned}$$

$$=\Big[2\kappa_\xi^{2}(s)-3(c-s)\kappa_\xi(s)\kappa_\xi'(s)\Big]\boldsymbol{T}_\xi(s)$$
$$+\Big[-(c-s)\kappa_\xi(s)\big[\kappa_\xi^{2}(s)+k^{2}(s)\big]-2\kappa_\xi'(s)+(c-s)\kappa_\xi''(s)\Big]\boldsymbol{N}_\xi(s)$$
$$+\Big[2(c-s)\kappa_\xi'(s)k(s)-2\kappa_\xi(s)k(s)+(c-s)\kappa_\xi(s)k'(s)\Big]\boldsymbol{B}_\xi(s)$$
$$+(c-s)\kappa_\xi(s)k(s)\big(r(s)-\kappa_\xi(s)\big)\boldsymbol{E}_\xi(s) \tag{4.2.5}$$

$$\frac{d^4\phi}{ds^{*4}}\frac{ds^{*4}}{ds^4}=\Big[2\kappa_\xi^{2}(s)-3(c-s)\kappa_\xi(s)\kappa_\xi'(s)\Big]'\boldsymbol{T}_\xi(s)+\Big[2\kappa_\xi^{2}(s)-3(c-s)\kappa_\xi(s)\kappa_\xi'(s)\Big]\boldsymbol{T}_\xi'(s)$$
$$+\Big[-(c-s)\kappa_\xi(s)\big[\kappa_\xi^{2}(s)+k^{2}(s)\big]-2\kappa_\xi'(s)+(c-s)\kappa_\xi''(s)\Big]'\boldsymbol{N}_\xi(s)$$
$$+\Big[-(c-s)\kappa_\xi(s)\big[\kappa_\xi^{2}(s)+k^{2}(s)\big]-2\kappa_\xi'(s)+(c-s)\kappa_\xi''(s)\Big]\big(\boldsymbol{t}(s)\times\boldsymbol{T}_\xi(s)\big)'$$
$$+\Big[2(c-s)\kappa_\xi'(s)k(s)-2\kappa_\xi(s)k(s)+(c-s)\kappa_\xi(s)k'(s)\Big]'\boldsymbol{B}_\xi(s)$$
$$+\Big[2(c-s)\kappa_\xi'(s)k(s)-2\kappa_\xi(s)k(s)+(c-s)\kappa_\xi(s)k'(s)\Big]\big(\boldsymbol{n}(s)\times\boldsymbol{T}_\xi(s)\big)'$$
$$+\Big[(c-s)\kappa_\xi(s)k(s)\big(r(s)-\kappa_\xi(s)\big)\Big]'\boldsymbol{E}_\xi(s)+\Big[(c-s)\kappa_\xi(s)k(s)\big(r(s)-\kappa_\xi(s)\big)\Big]\big(\boldsymbol{b}(s)\times\boldsymbol{T}_\xi(s)\big)'$$

$$=\begin{bmatrix}9\kappa_\xi(s)\kappa_\xi'(s)-3(c-s)\kappa_\xi'^{2}(s)-4(c-s)\kappa_\xi(s)\kappa_\xi''(s)\\+(c-s)\kappa_\xi^{2}(s)\big[\kappa_\xi^{2}(s)+k^{2}(s)\big]\end{bmatrix}\boldsymbol{T}_\xi(s)$$
$$+\begin{bmatrix}3\kappa_\xi^{3}(s)-6(c-s)\kappa_\xi^{2}(s)\kappa_\xi'(s)+3\kappa_\xi(s)k^{2}(s)-3(c-s)\kappa_\xi'(s)k^{2}(s)\\-3(c-s)\kappa_\xi(s)k(s)k'(s)-3\kappa_\xi''(s)+(c-s)\kappa_\xi'''(s)\end{bmatrix}\boldsymbol{N}_\xi(s)$$
$$+\begin{bmatrix}-6\kappa_\xi'(s)k(s)+3(c-s)\kappa_\xi''(s)k(s)+3(c-s)\kappa_\xi'(s)k'(s)\\-3\kappa_\xi(s)k'(s)+(c-s)\kappa_\xi(s)k''(s)-(c-s)\kappa_\xi(s)k(s)\big(r(s)-\kappa_\xi(s)\big)^{2}\\-(c-s)\kappa_\xi(s)k(s)\big[\kappa_\xi^{2}(s)+k^{2}(s)\big]\end{bmatrix}\boldsymbol{B}_\xi(s)$$
$$+\begin{bmatrix}3(c-s)\kappa_\xi'(s)k(s)\big(r(s)-\kappa_\xi(s)\big)-3\kappa_\xi(s)k(s)\big(r(s)-\kappa_\xi(s)\big)\\+2(c-s)\kappa_\xi(s)k'(s)\big(r(s)-\kappa_\xi(s)\big)+(c-s)\kappa_\xi(s)k(s)\big(r(s)-\kappa_\xi(s)\big)'\end{bmatrix}\boldsymbol{E}_\xi(s)$$

$$\tag{4.2.6}$$

elde edilir. Şimdi $\boldsymbol{T}_\phi(s^*)$ vektörünü hesaplayalım. Bunun için ilk önce (2.2.11) denklemleri ve kuaterniyonik eşlenik özellikleri kullanılarak (4.2.3) denkleminin kuaterniyonik normu hesaplanırsa

$$\left\|\frac{d\phi}{ds^*}\frac{ds^*}{ds}\right\|^2 = (c-s)\kappa_\xi(s)\boldsymbol{N}_\xi(s)\times\left(\overline{(c-s)\kappa_\xi(s)\boldsymbol{N}_\xi(s)}\right)$$

$$= (c-s)^2\kappa_\xi^{\ 2}(s)\left(\boldsymbol{N}_\xi(s)\times\widehat{\boldsymbol{N}_\xi}(s)\right)$$

$$= (c-s)^2\kappa_\xi^{\ 2}(s)\left(\left(\boldsymbol{t}(s)\times\boldsymbol{T}_\xi(s)\right)\times\left(\overline{\boldsymbol{t}(s)\times\boldsymbol{T}_\xi(s)}\right)\right)$$

$$= (c-s)^2\kappa_\xi^{\ 2}(s)\left(\left(\boldsymbol{t}(s)\times\boldsymbol{T}_\xi(s)\right)\times\left(\widehat{\boldsymbol{T}_\xi}(s)\times\hat{\boldsymbol{t}}(s)\right)\right)$$

$$= (c-s)^2\kappa_\xi^{\ 2}(s)\left(\boldsymbol{t}(s)\times\left(\boldsymbol{T}_\xi(s)\times\widehat{\boldsymbol{T}_\xi}(s)\right)\times\hat{\boldsymbol{t}}(s)\right)$$

$$= (c-s)^2\kappa_\xi^{\ 2}(s)\left(\boldsymbol{t}(s)\times\hat{\boldsymbol{t}}(s)\right)$$

$$=(c-s)^2\kappa_\xi^{\ 2}(s)\left(-\left\langle\boldsymbol{t}(s),\boldsymbol{t}(s)\right\rangle+\boldsymbol{t}(s)\wedge\boldsymbol{t}(s)\ \right)$$

olmak üzere,

$$\left\|\frac{d\phi}{ds^*}\frac{ds^*}{ds}\right\| = \left|(c-s)\kappa_\xi(s)\right| \tag{4.2.7}$$

elde edilir. Dolayısıyla, (2.2.9) Frenet denklemleri ve (4.2.3), (4.2.7) denklemleri yardımıyla $\boldsymbol{T}_\phi(s^*)$ vektörü

$$\boldsymbol{T}_\phi(s^*) = \frac{\dfrac{ds^*}{ds}(c-s)\kappa_\xi(s)}{\left|\dfrac{ds^*}{ds}\right|\left|(c-s)\kappa_\xi(s)\right|}\boldsymbol{N}_\xi(s)$$

şeklinde elde edilir. Böylece $\left\{\boldsymbol{T}_\phi(s^*),\boldsymbol{N}_\xi(s)\right\}$ vektörlerinin lineer bağımlı olduğu görülür. O halde

$$\boldsymbol{T}_\phi(s^*) = \boldsymbol{N}_\xi(s)$$

alınabilir.

Şimdi $N_\phi(s^*)$ vektörünü hesaplayalım. Bunun için ilk önce (4.2.3) ve (4.2.4) denklemleri kullanılarak $h\left(\frac{d\phi}{ds^*},\frac{d^2\phi}{ds^{*2}}\right)$ kuaterniyonik iç çarpımı hesaplanırsa

$$h\left(\frac{d\phi}{ds^*},\frac{d^2\phi}{ds^{*2}}\right)=\frac{ds^3}{ds^{*3}}h\left(\begin{matrix}\left[(c-s)\kappa_\xi(s)\boldsymbol{N}_\xi(s)\right],\\ \begin{bmatrix}-(c-s)\kappa_\xi{}^2(s)\boldsymbol{T}_\xi(s)+\left[(c-s)\kappa_\xi{}'(s)-\kappa_\xi(s)\right]\boldsymbol{N}_\xi(s)\\ +(c-s)\kappa_\xi(s)k(s)\boldsymbol{B}_\xi(s)\end{bmatrix}\end{matrix}\right)$$

$$h\left(\frac{d\phi}{ds^*},\frac{d^2\phi}{ds^{*2}}\right)=\frac{1}{2}\frac{ds^3}{ds^{*3}}\begin{bmatrix}\left[(c-s)\kappa_\xi(s)\boldsymbol{N}_\xi(s)\right]\times\\ \begin{bmatrix}-(c-s)\kappa_\xi{}^2(s)\widehat{\boldsymbol{T}_\xi}(s)+\left[(c-s)\kappa_\xi{}'(s)-\kappa_\xi(s)\right]\widehat{\boldsymbol{N}_\xi}(s)\\ +(c-s)\kappa_\xi(s)k(s)\widehat{\boldsymbol{B}_\xi}(s)\end{bmatrix}\\ +\begin{bmatrix}-(c-s)\kappa_\xi{}^2(s)\boldsymbol{T}_\xi(s)\\ +\left[(c-s)\kappa_\xi{}'(s)-\kappa_\xi(s)\right]\boldsymbol{N}_\xi(s)+(c-s)\kappa_\xi(s)k(s)\boldsymbol{B}_\xi(s)\end{bmatrix}\times\\ \left[(c-s)\kappa_\xi(s)\widehat{\boldsymbol{N}_\xi}(s)\right]\end{bmatrix}$$

$$h\left(\frac{d\phi}{ds^*},\frac{d^2\phi}{ds^{*2}}\right)=\frac{1}{2}\frac{ds^3}{ds^{*3}}\begin{bmatrix}-(c-s)^2\kappa_\xi{}^3(s)\left(\boldsymbol{N}_\xi(s)\times\widehat{\boldsymbol{T}}_\xi(s)\right)\\ +(c-s)\kappa_\xi(s)\left[(c-s)\kappa_\xi{}'(s)-\kappa_\xi(s)\right]\left(\boldsymbol{N}_\xi(s)\times\widehat{\boldsymbol{N}}_\xi(s)\right)\\ +(c-s)^2\kappa_\xi{}^2(s)k(s)\left(\boldsymbol{N}_\xi(s)\times\widehat{\boldsymbol{B}}_\xi(s)\right)-(c-s)^2\kappa_\xi{}^3(s)\left(\boldsymbol{T}_\xi(s)\times\widehat{\boldsymbol{N}}_\xi(s)\right)\\ +(c-s)\kappa_\xi(s)\left[(c-s)\kappa_\xi{}'(s)-\kappa_\xi(s)\right]\left(\boldsymbol{N}_\xi(s)\times\widehat{\boldsymbol{N}}_\xi(s)\right)\\ +(c-s)^2\kappa_\xi{}^2(s)k(s)\left(\boldsymbol{B}_\xi(s)\times\widehat{\boldsymbol{N}}_\xi(s)\right)\end{bmatrix}$$

$$=\frac{ds^3}{ds^{*3}}\begin{bmatrix}-(c-s)^2\kappa_\xi{}^3(s)\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{N}_\xi(s)\times\widehat{\boldsymbol{T}_\xi}(s)+\boldsymbol{T}_\xi(s)\times\widehat{\boldsymbol{N}_\xi}(s)\right)\\ +(c-s)\kappa_\xi(s)\left[(c-s)\kappa_\xi{}'(s)-\kappa_\xi(s)\right]\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{N}_\xi(s)\times\widehat{\boldsymbol{N}_\xi}(s)+\boldsymbol{N}_\xi(s)\times\widehat{\boldsymbol{N}_\xi}(s)\right)\\ +(c-s)^2\kappa_\xi{}^2(s)k(s)\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{N}_\xi(s)\times\widehat{\boldsymbol{B}_\xi}(s)+\boldsymbol{B}_\xi(s)\times\widehat{\boldsymbol{N}_\xi}(s)\right)\end{bmatrix}$$

$$=\frac{ds^3}{ds^{*3}}\begin{bmatrix}-(c-s)^2\kappa_\xi{}^3(s)h\left(\boldsymbol{N}_\xi(s),\boldsymbol{T}_\xi(s)\right)\\ +\left[(c-s)^2\kappa_\xi(s)\kappa_\xi{}'(s)-(c-s)\kappa_\xi{}^2(s)\right]h\left(\boldsymbol{N}_\xi(s),\boldsymbol{N}_\xi(s)\right)\\ +(c-s)^2\kappa_\xi{}^2(s)k(s)h\left(\boldsymbol{N}_\xi(s),\boldsymbol{B}_\xi(s)\right)\end{bmatrix}$$

$$=\frac{ds^3}{ds^{*3}}\left[(c-s)^2\kappa_\xi(s)\kappa_\xi'(s)-(c-s)\kappa_\xi^2(s)\right] \tag{4.2.8}$$

elde edilir. Buradan (2.2.9) Frenet denklemlerinde (4.2.3), (4.2.4), (4.2.7) ve (4.2.8) denklemleri yerlerine yazılırsa $\boldsymbol{N}_\phi(s^*)$ vektörü

$$\boldsymbol{N}_\phi(s^*)=\frac{(c-s)^3\kappa_\xi^3(s)\left[-\kappa_\xi(s)\boldsymbol{T}_\xi(s)+k(s)\boldsymbol{B}_\xi(s)\right]}{(c-s)^3\kappa_\xi^3(s)\sqrt{\kappa_\xi^2(s)+k^2(s)}}$$

$$\boldsymbol{N}_\phi(s^*)=\frac{-\kappa_\xi(s)}{\sqrt{\kappa_\xi^2(s)+k^2(s)}}\boldsymbol{T}_\xi(s)+\frac{k(s)}{\sqrt{\kappa_\xi^2(s)+k^2(s)}}\boldsymbol{B}_\xi(s)$$

şeklinde bulunur.

Şimdi $\boldsymbol{E}_\phi(s^*)$ vektörünü hesaplayalım. Bunun için ilk önce $\boldsymbol{T}_\phi(s^*)\wedge\boldsymbol{N}_\phi(s^*)\wedge\frac{d^3\phi}{ds^{*3}}$ vektörünü hesaplayalım. Kısalık için $\frac{d^3\phi}{ds^{*3}}\frac{ds^{*3}}{ds^3}$ vektörünün bileşenleri

$$\begin{aligned}
X &= 2\kappa_\xi^2(s)-3(c-s)\kappa_\xi(s)\kappa_\xi'(s)(c-s)\\
Y &= -(c-s)\kappa_\xi(s)\left[\kappa_\xi^2(s)+k^2(s)\right]-2\kappa_\xi'(s)+(c-s)\kappa_\xi''(s)\\
Z &= 2(c-s)\kappa_\xi'(s)k(s)-2\kappa_\xi(s)k(s)+(c-s)\kappa_\xi(s)k'(s)\\
V &= (c-s)\kappa_\xi(s)k(s)\left(r(s)-\kappa_\xi(s)\right)
\end{aligned}$$

şeklinde alınacaktır. O halde

$$\boldsymbol{T}_\phi(s^*)\wedge\boldsymbol{N}_\phi(s^*)\wedge\frac{d^3\phi}{ds^{*3}}\frac{ds^{*3}}{ds^3}=\begin{vmatrix}
\boldsymbol{T}_\xi(s) & \boldsymbol{N}_\xi(s) & \boldsymbol{B}_\xi(s) & \boldsymbol{E}_\xi(s)\\
0 & 1 & 0 & 0\\
\frac{-\kappa_\xi(s)}{\sqrt{\kappa_\xi^2(s)+k^2(s)}} & 0 & \frac{k(s)}{\sqrt{\kappa_\xi^2(s)+k^2(s)}} & 0\\
X & Y & Z & V
\end{vmatrix}$$

vektörel çarpımı yapılırsa

$$\boldsymbol{T}_\phi(s^*)\wedge\boldsymbol{N}_\phi(s^*)\wedge\frac{d^3\phi}{ds^{*3}}=\frac{ds^3}{ds^{*3}}\frac{\kappa_\xi(s)(c-s)}{\sqrt{\kappa_\xi^{\,2}(s)+k^2(s)}}\begin{bmatrix}k^2(s)\big(r(s)-\kappa_\xi(s)\big)\boldsymbol{T}_\xi(s)\\+\kappa_\xi(s)k(s)\big(r(s)-\kappa_\xi(s)\big)\boldsymbol{B}_\xi(s)\\+\big(\kappa_\xi{}'(s)k(s)-\kappa_\xi(s)k'(s)\big)\boldsymbol{E}_\xi(s)\end{bmatrix}\tag{4.2.9}$$

olur. Bu son denklemin kuaterniyonik normu hesaplanırsa

$$\left\|\boldsymbol{T}_\phi(s^*)\wedge\boldsymbol{N}_\phi(s^*)\wedge\frac{d^3\phi}{ds^{*3}}\right\|^2=\frac{ds^3}{ds^{*3}}\frac{\big((c-s)\kappa_\xi(s)\big)^2}{\kappa_\xi^{\,2}(s)+k^2(s)}\left[\begin{bmatrix}k^2(s)\big(r(s)-\kappa_\xi(s)\big)\boldsymbol{T}_\xi(s)\\+\kappa_\xi(s)k(s)\big(r(s)-\kappa_\xi(s)\big)\boldsymbol{B}_\xi(s)\\+\big(\kappa_\xi{}'(s)k(s)-\kappa_\xi(s)k'(s)\big)\boldsymbol{E}_\xi(s)\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}k^2(s)\big(r(s)-\kappa_\xi(s)\big)\widehat{\boldsymbol{T}_\xi}(s)\\+\kappa_\xi(s)k(s)\big(r(s)-\kappa_\xi(s)\big)\widehat{\boldsymbol{B}_\xi}(s)\\+\big(\kappa_\xi{}'(s)k(s)-\kappa_\xi(s)k'(s)\big)\widehat{\boldsymbol{E}_\xi}(s)\end{bmatrix}\right]$$

$$=\frac{ds^3}{ds^{*3}}\frac{\big((c-s)\kappa_\xi(s)\big)^2}{\kappa_\xi^{\,2}(s)+k^2(s)}\begin{pmatrix}k^4(s)\big(r(s)-\kappa_\xi(s)\big)^2\big(\boldsymbol{T}_\xi(s)\times\widehat{\boldsymbol{T}_\xi}(s)\big)+\kappa_\xi(s)k^3(s)\big(r(s)-\kappa_\xi(s)\big)^2\big(\boldsymbol{T}_\xi(s)\times\widehat{\boldsymbol{B}_\xi}(s)\big)\\+k^2(s)\big(r(s)-\kappa_\xi(s)\big)\big(\kappa_\xi{}'(s)k(s)-\kappa_\xi(s)k'(s)\big)\big(\boldsymbol{T}_\xi(s)\times\widehat{\boldsymbol{E}_\xi}(s)\big)\\+\kappa_\xi(s)k^3(s)\big(r(s)-\kappa_\xi(s)\big)^2\big(\boldsymbol{B}_\xi(s)\times\widehat{\boldsymbol{T}_\xi}(s)\big)+\kappa_\xi^{\,2}(s)k^2(s)\big(r(s)-\kappa_\xi(s)\big)^2\big(\boldsymbol{B}_\xi(s)\times\widehat{\boldsymbol{B}_\xi}(s)\big)\\+\kappa_\xi(s)k(s)\big(r(s)-\kappa_\xi(s)\big)\big(\kappa_\xi{}'(s)k(s)-\kappa_\xi(s)k'(s)\big)\big(\boldsymbol{B}_\xi(s)\times\widehat{\boldsymbol{E}_\xi}(s)\big)\\+k^2(s)\big(r(s)-\kappa_\xi(s)\big)\big(\kappa_\xi{}'(s)k(s)-\kappa_\xi(s)k'(s)\big)\big(\boldsymbol{E}_\xi(s)\times\widehat{\boldsymbol{T}_\xi}(s)\big)\\+\kappa_\xi(s)k(s)\big(r(s)-\kappa_\xi(s)\big)\big(\kappa_\xi{}'(s)k(s)-\kappa_\xi(s)k'(s)\big)\big(\boldsymbol{E}_\xi(s)\times\widehat{\boldsymbol{B}_\xi}(s)\big)\\+\big(\kappa_\xi{}'(s)k(s)-\kappa_\xi(s)k'(s)\big)^2\big(\boldsymbol{E}_\xi(s)\times\widehat{\boldsymbol{E}_\xi}(s)\big)\end{pmatrix}$$

$$=\frac{ds^3}{ds^{*3}}\frac{\big((c-s)\kappa_\xi(s)\big)^2}{\kappa_\xi^{\,2}(s)+k^2(s)}\begin{pmatrix}k^4(s)\big(r(s)-\kappa_\xi(s)\big)^2\big(\boldsymbol{T}_\xi(s)\times\widehat{\boldsymbol{T}_\xi}(s)\big)\\+2\kappa_\xi(s)k^3(s)\big(r(s)-\kappa_\xi(s)\big)^2\frac{1}{2}\big(\boldsymbol{T}_\xi(s)\times\widehat{\boldsymbol{B}_\xi}(s)+\boldsymbol{B}_\xi(s)\times\widehat{\boldsymbol{T}_\xi}(s)\big)\\+\Big[2k^2(s)\big(r(s)-\kappa_\xi(s)\big)\big(\kappa_\xi{}'(s)k(s)-\kappa_\xi(s)k'(s)\big)\Big]\frac{1}{2}\big(\boldsymbol{T}_\xi(s)\times\widehat{\boldsymbol{E}_\xi}(s)+\boldsymbol{E}_\xi(s)\times\widehat{\boldsymbol{T}_\xi}(s)\big)\\+\kappa_\xi^{\,2}(s)k^2(s)\big(r(s)-\kappa_\xi(s)\big)^2\big(\boldsymbol{B}_\xi(s)\times\widehat{\boldsymbol{B}_\xi}(s)\big)\\+\Big[2\kappa_\xi(s)k(s)\big(r(s)-\kappa_\xi(s)\big)\big(\kappa_\xi{}'(s)k(s)-\kappa_\xi(s)k'(s)\big)\Big]\frac{1}{2}\big(\boldsymbol{B}_\xi(s)\times\widehat{\boldsymbol{E}_\xi}(s)+\boldsymbol{E}_\xi(s)\times\widehat{\boldsymbol{B}_\xi}(s)\big)\\+\big(\kappa_\xi{}'(s)k(s)-\kappa_\xi(s)k'(s)\big)^2\big(\boldsymbol{E}_\xi(s)\times\widehat{\boldsymbol{E}_\xi}(s)\big)\end{pmatrix}$$

$$=\frac{ds^3}{ds^{*3}}\frac{\big((c-s)\kappa_\xi(s)\big)^2}{\kappa_\xi^{\,2}(s)+k^2(s)}\begin{pmatrix}k^4(s)\big(r(s)-\kappa_\xi(s)\big)^2h(\boldsymbol{T}_\xi(s),\boldsymbol{T}_\xi(s))+2\kappa_\xi(s)k^3(s)\big(r(s)-\kappa_\xi(s)\big)^2h(\boldsymbol{T}_\xi(s),\boldsymbol{B}_\xi(s))\\+2k^2(s)\big(r(s)-\kappa_\xi(s)\big)\big(\kappa_\xi{}'(s)k(s)-\kappa_\xi(s)k'(s)\big)h(\boldsymbol{T}_\xi(s),\boldsymbol{E}_\xi(s))\\+\kappa_\xi^{\,2}(s)k^2(s)\big(r(s)-\kappa_\xi(s)\big)^2h(\boldsymbol{B}_\xi(s),\boldsymbol{B}_\xi(s))+\big(\kappa_\xi{}'(s)k(s)-\kappa_\xi(s)k'(s)\big)^2h(\boldsymbol{E}_\xi(s),\boldsymbol{E}_\xi(s))\\+2\kappa_\xi(s)k(s)\big(r(s)-\kappa_\xi(s)\big)\big(\kappa_\xi{}'(s)k(s)-\kappa_\xi(s)k'(s)\big)h(\boldsymbol{B}_\xi(s),\boldsymbol{E}_\xi(s))\end{pmatrix}$$

$$=\frac{ds^3}{ds^{*3}}\frac{\big((c-s)\kappa_\xi(s)\big)^2}{\kappa_\xi^{\,2}(s)+k^2(s)}\Big(k^4(s)\big(r(s)-\kappa_\xi(s)\big)^2+\kappa_\xi^{\,2}(s)k^2(s)\big(r(s)-\kappa_\xi(s)\big)^2+\big(\kappa_\xi{}'(s)k(s)-\kappa_\xi(s)k'(s)\big)^2\Big)$$

olmak üzere,

$$\left\|\boldsymbol{T}_{\phi}(s^{*})\wedge\boldsymbol{N}_{\phi}(s^{*})\wedge\frac{d^{3}\phi}{ds^{*3}}\right\|=\frac{ds^{3}}{ds^{*3}}\frac{\left|(c-s)\kappa_{\xi}(s)\right|}{\sqrt{\kappa_{\xi}^{2}(s)+k^{2}(s)}}\sqrt{\begin{array}{l}k^{4}(s)\left(r(s)-\kappa_{\xi}(s)\right)^{2}+\kappa_{\xi}^{2}(s)k^{2}(s)\left(r(s)-\kappa_{\xi}(s)\right)^{2}\\+\left(\kappa_{\xi}'(s)k(s)-\kappa_{\xi}(s)k'(s)\right)^{2}\end{array}}$$

(4.2.10)

elde edilir. Buradan (4.2.9) ve (4.2.10) denklemleri (2.2.9) Frenet denklemleri ile göz önüne alınırsa $\boldsymbol{E}_{\xi}(s)$ vektörü

$$\boldsymbol{E}_{\phi}(s^{*})=\eta\frac{k^{2}(s)\left(r(s)-\kappa_{\xi}(s)\right)\boldsymbol{T}_{\xi}(s)+\kappa_{\xi}(s)k(s)\left(r(s)-\kappa_{\xi}(s)\right)\boldsymbol{B}_{\xi}(s)+\left(\kappa_{\xi}'(s)k(s)-\kappa_{\xi}(s)k'(s)\right)\boldsymbol{E}_{\xi}(s)}{\sqrt{k^{4}(s)\left(r(s)-\kappa_{\xi}(s)\right)^{2}+\kappa_{\xi}^{2}(s)k^{2}(s)\left(r(s)-\kappa_{\xi}(s)\right)^{2}+\left(\kappa_{\xi}'(s)k(s)-\kappa_{\xi}(s)k'(s)\right)^{2}}}$$

şeklinde bulunur. Burada η, $\det\left(\boldsymbol{T}_{\xi}(s),\boldsymbol{N}_{\xi}(s),\boldsymbol{B}_{\xi}(s),\boldsymbol{E}_{\xi}(s)\right)$, $+1$ olacak şekilde ±1 seçilir.

Son olarak $\boldsymbol{B}_{\phi}(s^{*})$ vektörünü bulalım. Bunun için (2.2.9) Frenet denklemlerinde $\boldsymbol{T}_{\phi}(s^{*})$, $\boldsymbol{N}_{\phi}(s^{*})$ ve $\boldsymbol{E}_{\phi}(s^{*})$ vektörleri yerlerine yazılırsa

$$\boldsymbol{B}_{\phi}(s^{*})=\eta\frac{\left(\kappa_{\xi}'(s)k(s)-\kappa_{\xi}(s)k'(s)\right)\left[k(s)\boldsymbol{T}_{\xi}(s)+\kappa_{\xi}(s)\boldsymbol{B}_{\xi}(s)\right]-k(s)\left(r(s)-\kappa_{\xi}(s)\right)\left(\kappa_{\xi}^{2}(s)+k^{2}(s)\right)\boldsymbol{E}_{\xi}(s)}{\sqrt{\kappa_{\xi}^{2}(s)+k^{2}(s)}\sqrt{k^{4}(s)\left(r(s)-\kappa_{\xi}(s)\right)^{2}+\kappa_{\xi}^{2}(s)k^{2}(s)\left(r(s)-\kappa_{\xi}(s)\right)^{2}+\left(\kappa_{\xi}'(s)k(s)-\kappa_{\xi}(s)k'(s)\right)^{2}}}$$

elde edilir.

Teorem 4.2.3. $\xi:I\to\mathbb{Q}$ kuaterniyonik eğrisi $s\in I$ yay-parametresi ile verilsin. Herhangi bir $s^{*}\in I$ parametreli $\phi:I\to\mathbb{Q}$ kuaterniyonik eğrisi, $\xi(s)$ kuaterniyonik eğrisinin bir kuaterniyonik involütü olmak üzere, $\phi(s^{*})$ kuaterniyonik eğrisinin Frenet eğrilikleri $\kappa_{\phi}(s^{*}),k^{*}(s^{*}),\left(r^{*}(s^{*})-\kappa_{\phi}(s^{*})\right)$, $\xi(s)$ kuaterniyonik eğrisinin Frenet eğrilikleri $\kappa_{\xi}(s),k(s),\left(r(s)-\kappa_{\xi}(s)\right)$ cinsinden yazılabilir.

İspat: $s \in I$ yay-parametresi ile verilen $\xi(s)$ kuaterniyonik eğrisinin bir kuaterniyonik involütü, herhangi bir $s^* \in I$ parametreli $\phi(s^*)$ kuaterniyonik eğrisi olsun. $\kappa_\phi(s^*)$ kuaterniyonik eğriliğini (1. eğrilik) hesaplayalım. Bunun için (2.2.10) Frenet denklemleri ile (4.2.3), (4.2.4), (4.2.7) ve (4.2.8) denklemleri kullanılırsa

$$\kappa_\phi(s^*) = \frac{(c-s)^3 \kappa_\xi^{\,3}(s)\sqrt{\kappa_\xi^{\,2}(s) + k^2(s)}}{\left|(c-s)\kappa_\xi(s)\right|^4}$$

$$\kappa_\phi(s^*) = \frac{\sqrt{\kappa_\xi^{\,2}(s) + k^2(s)}}{\kappa_\xi(s)\left|c-s\right|}$$

elde edilir.

Ayrıca, $k^*(s^*)$, kuaterniyonik burulması; (2.2.10) Frenet denklemlerinde (4.2.3), (4.2.4), (4.2.7), (4.2.8) ve (4.2.10) denklemleri yerlerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$k^*(s^*) = \frac{\sqrt{k^4(s)\big(r(s)-\kappa_\xi(s)\big)^2 + \kappa_\xi^{\,2}(s)k^2(s)\big(r(s)-\kappa_\xi(s)\big)^2 + \big(\kappa_\xi'(s)k(s) - \kappa_\xi(s)k'(s)\big)^2}}{\kappa_\xi(s)\left|c-s\right|\big(\kappa_\xi^{\,2}(s) + k^2(s)\big)}$$

şeklinde elde edilir.

Aynı şekilde son olarak $\phi(s^*)$ kuaterniyonik eğrisinin $\big(r^*(s^*) - \kappa_\phi(s^*)\big)$ 3. kuaterniyonik eğriliği de bulunabilir. Bunun için ilk önce $h\left(\dfrac{d^4\phi}{ds^{*4}}, \boldsymbol{E}_\phi(s^*)\right)$ kuaterniyonik iç çarpımı

$$h\left(\frac{d^4\phi}{ds^{*4}}, \boldsymbol{E}_\phi(s^*)\right) = \frac{ds^4}{ds^{*4}} \frac{\begin{bmatrix} -(c-s)\kappa_\xi(s)\kappa_\xi''(s)k^2(s)\big(r(s)-\kappa_\xi(s)\big) + 2(c-s)\kappa_\xi(s)\kappa_\xi'(s)k(s)k_\xi'(s)\big(r(s)-\kappa_\xi(s)\big) \\ +(c-s)\kappa_\xi^{\,2}(s)k(s)k''(s)\big(r(s)-\kappa_\xi(s)\big) - 2(c-s)\kappa_\xi^{\,2}(s)k'^2(s)\big(r(s)-\kappa_\xi(s)\big) \\ -(c-s)\kappa_\xi^{\,2}(s)k^2(s)\big(r(s)-\kappa_\xi(s)\big)^3 - (c-s)\kappa_\xi^{\,2}(s)k(s)k'(s)\big(r(s)-\kappa_\xi(s)\big)' \end{bmatrix}}{\sqrt{k^4(s)\big(r(s)-\kappa_\xi(s)\big)^2 + \kappa_\xi^{\,2}(s)k^2(s)\big(r(s)-\kappa_\xi(s)\big)^2 + \big(\kappa_\xi'(s)k(s) - \kappa_\xi(s)k'(s)\big)^2}}$$

(4.2.11)

şeklinde hesaplanır ve (2.2.10) Frenet denklemlerinde (4.2.7), (4.2.10) ve (4.2.11) denklemleri yerlerine yazılırsa $\left(r^*(s^*)-\kappa_\phi(s^*)\right)$ kuaterniyonik eğriliği

$$r^*(s^*)-\kappa_\phi(s^*)=\frac{\begin{bmatrix} -(c-s)\kappa_\xi(s)\kappa_\xi''(s)k^2(s)\left(r(s)-\kappa_\xi(s)\right)+2(c-s)\kappa_\xi(s)\kappa_\xi'(s)k(s)k_\xi'(s)\left(r(s)-\kappa_\xi(s)\right) \\ +(c-s)\kappa_\xi^{2}(s)k(s)k''(s)\left(r(s)-\kappa_\xi(s)\right)-2(c-s)\kappa_\xi^{2}(s)k'^2(s)\left(r(s)-\kappa_\xi(s)\right) \\ -(c-s)\kappa_\xi^{2}(s)k^2(s)\left(r(s)-\kappa_\xi(s)\right)^3-(c-s)\kappa_\xi^{2}(s)k(s)k'(s)\left(r(s)-\kappa_\xi(s)\right)' \end{bmatrix}}{\dfrac{(c-s)^2\kappa_\xi^{2}(s)}{\sqrt{\kappa_\xi^{2}(s)+k^2(s)}}\left[k^4(s)\left(r(s)-\kappa_\xi(s)\right)^2+\kappa_\xi^{2}(s)k^2(s)\left(r(s)-\kappa_\xi(s)\right)^2+\left(\kappa_\xi'(s)k(s)-\kappa_\xi(s)k'(s)\right)^2\right]}$$

şeklinde elde edilir.

Sonuç 4.2.4. $\xi : I \to \mathbb{Q}$, kuaterniyonik eğrisi $s \in I$ yay-parametresi cinsinden verilsin. Eğer $\xi(s)$ kuaterniyonik eğrisi kuaterniyonik $w-$eğrisi olarak alınırsa Frenet 4-ayaklısı

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{T}_\phi(s^*)=\boldsymbol{N}_\xi(s) \\ &\boldsymbol{N}_\phi(s^*)=\frac{-\kappa_\xi(s)}{\sqrt{\kappa_\xi^{2}(s)+k^2(s)}}\boldsymbol{T}_\xi(s)+\frac{k(s)}{\sqrt{\kappa_\xi^{2}(s)+k^2(s)}}\boldsymbol{B}_\xi(s) \\ &\boldsymbol{B}_\phi(s^*)=\eta\boldsymbol{E}_\xi(s) \\ &\boldsymbol{E}_\phi(s^*)=\eta\left[\frac{k(s)}{\sqrt{\kappa_\xi^{2}(s)+k^2(s)}}\boldsymbol{T}_\xi(s)+\frac{\kappa_\xi(s)}{\sqrt{\kappa_\xi^{2}(s)+k^2(s)}}\boldsymbol{B}_\xi(s)\right] \end{aligned} \tag{4.2.12}$$

şeklindedir.

İspat: $s \in I$ yay-parametresi cinsinden verilen $\xi(s)$ kuaterniyonik eğrisi, kuaterniyonik $w-$eğrisi olsun. O halde $\xi(s)$ kuaterniyonik eğrisinin eğrilikleri sabit olacağından

$$\kappa_\xi'(s)=k'(s)=\left(r(s)-\kappa_\xi(s)\right)'=\kappa_\xi''(s)=k''(s)=\left(r(s)-\kappa_\xi(s)\right)''=0$$

olur. Dolayısıyla, Teorem 4.2.2' nin bir sonucu olarak $\xi(s)$ kuaterniyonik $w-$ eğrisinin Frenet $4-$ayaklısı

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{T}_{\phi}(s^*) = \boldsymbol{N}_{\xi}(s)\\
&\boldsymbol{N}_{\phi}(s^*) = \frac{-\kappa_{\xi}(s)}{\sqrt{\kappa_{\xi}^2(s)+k^2(s)}}\boldsymbol{T}_{\xi}(s) + \frac{k(s)}{\sqrt{\kappa_{\xi}^2(s)+k^2(s)}}\boldsymbol{B}_{\xi}(s)\\
&\boldsymbol{B}_{\phi}(s^*) = \eta \boldsymbol{E}_{\xi}(s)\\
&\boldsymbol{E}_{\phi}(s^*) = \eta\left[\frac{k(s)}{\sqrt{\kappa_{\xi}^2(s)+k^2(s)}}\boldsymbol{T}_{\xi}(s) + \frac{\kappa_{\xi}(s)}{\sqrt{\kappa_{\xi}^2(s)+k^2(s)}}\boldsymbol{B}_{\xi}(s)\right]
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur.

Teorem 4.2.4. $\phi, \xi : I \to \mathbb{Q}$ kuaterniyonik eğrileri, sırasıyla, $s^*, s \in I$ yay-parametreleri ile verilen kuaterniyonik involüt-evolüt eğri çifti olsun. $\xi(s)$ kuaterniyonik evolüt eğrisi kuaterniyonik $w-$eğrisi olmak üzere,

$$\xi(s) = \phi(s^*) + \rho(s^*)\boldsymbol{N}_{\phi}(s^*) - \rho(s^*)\frac{k(s)}{\kappa_{\xi}(s)}\boldsymbol{E}_{\phi}(s^*)$$

dir. Burada $\rho(s^*)$, $\phi(s^*)$ kuaterniyonik eğrisinin eğrilik yarıçapıdır.

İspat: $s^* \in I$ yay-parametresi ile verilen $\phi(s^*)$ kuaterniyonik eğrisinin kuaterniyonik evolütü, $s \in I$ yay-parametreli $\xi(s)$ kuaterniyonik $w-$eğrisi olsun. $\xi(s) - \phi(s^*)$ vektörü $\boldsymbol{T}_{\phi}(s^*)$ vektörüne dik olduğundan $\xi(s) - \phi(s^*)$ vektörü $\boldsymbol{N}_{\phi}(s^*)$, $\boldsymbol{B}_{\phi}(s^*)$ ve $\boldsymbol{E}_{\phi}(s^*)$ vektörleri cinsinden

$$\xi(s) - \phi(s^*) = \lambda(s^*)\boldsymbol{N}_{\phi}(s^*) + \mu(s^*)\boldsymbol{B}_{\phi}(s^*) + \gamma(s^*)\boldsymbol{E}_{\phi}(s^*) \tag{4.2.13}$$

$$\xi(s) = \phi(s^*) + \lambda(s^*)\boldsymbol{N}_{\phi}(s^*) + \mu(s^*)\boldsymbol{B}_{\phi}(s^*) + \gamma(s^*)\boldsymbol{E}_{\phi}(s^*)$$

şeklinde yazılabilir. Burada $\lambda(s^*)$, $\mu(s^*)$ ve $\gamma(s^*)$, $s^* \in I$ yay-parametresine bağlı keyfi fonksiyonlardır. Bu son denklemin $s^* \in I$ yay-parametresine göre (2.2.7) ve (2.2.11) denklemleri kullanılarak 1. mertebeden türevi alınırsa

$$\boldsymbol{T}_{\xi}(s)\frac{ds}{ds^*}=\boldsymbol{T}_{\phi}(s^*)+\lambda'(s^*)\boldsymbol{N}_{\phi}(s^*)+\lambda(s^*)\left(\boldsymbol{t}^*(s^*)\times\boldsymbol{T}_{\phi}(s^*)\right)'+\mu'(s^*)\boldsymbol{B}_{\phi}(s^*)$$
$$+\mu(s^*)\left(\boldsymbol{n}^*(s^*)\times\boldsymbol{T}_{\phi}(s^*)\right)'+\gamma'(s^*)\boldsymbol{E}_{\phi}(s^*)+\gamma(s^*)\left(\boldsymbol{b}^*(s^*)\times\boldsymbol{T}_{\phi}(s^*)\right)'$$

$$=\boldsymbol{T}_{\phi}(s^*)+\lambda'(s^*)\boldsymbol{N}_{\phi}(s^*)+\lambda(s^*)\Big(\boldsymbol{t}^{*\prime}(s^*)\times\boldsymbol{T}_{\phi}(s^*)+\boldsymbol{t}^*(s^*)\times\boldsymbol{T}_{\phi}'(s^*)\Big)+\mu'(s^*)\boldsymbol{B}_{\phi}(s^*)$$
$$+\mu(s^*)\Big(\boldsymbol{n}^{*\prime}(s^*)\times\boldsymbol{T}_{\phi}(s^*)+\boldsymbol{n}^*(s^*)\times\boldsymbol{T}_{\phi}'(s^*)\Big)+\gamma'(s^*)\boldsymbol{E}_{\phi}(s^*)$$
$$+\gamma(s^*)\Big(\boldsymbol{b}^{*\prime}(s^*)\times\boldsymbol{T}_{\phi}(s^*)+\boldsymbol{b}^*(s^*)\times\boldsymbol{T}_{\phi}'(s^*)\Big)$$

$$=\boldsymbol{T}_{\phi}(s^*)+\lambda'(s^*)\boldsymbol{N}_{\phi}(s^*)+\lambda(s^*)\left(k^*(s^*)\boldsymbol{n}^*(s^*)\times\boldsymbol{T}_{\phi}(s^*)+\boldsymbol{t}^*(s^*)\times\kappa_{\phi}(s^*)\boldsymbol{N}_{\phi}(s^*)\right)$$
$$+\mu'(s^*)\boldsymbol{B}_{\phi}(s^*)+\mu(s^*)\left(\left(-k^*(s^*)\boldsymbol{t}^*(s^*)+r^*(s^*)\boldsymbol{b}^*(s^*)\right)\times\boldsymbol{T}_{\phi}(s^*)+\boldsymbol{n}^*(s^*)\times\kappa_{\phi}(s^*)\boldsymbol{N}_{\phi}(s^*)\right)$$
$$+\gamma'(s^*)\boldsymbol{E}_{\phi}(s^*)+\gamma(s^*)\left(-r^*(s^*)\boldsymbol{n}^*(s^*)\times\boldsymbol{T}_{\phi}(s^*)+\boldsymbol{b}^*(s^*)\times\kappa_{\phi}(s^*)\boldsymbol{N}_{\phi}(s^*)\right)$$

$$=\boldsymbol{T}_{\phi}(s^*)+\lambda'(s^*)\boldsymbol{N}_{\phi}(s^*)+\lambda(s^*)\left(k^*(s^*)\boldsymbol{B}_{\phi}(s^*)+\kappa_{\phi}(s^*)\boldsymbol{t}^*(s^*)\times\boldsymbol{t}^*(s^*)\times\boldsymbol{T}_{\phi}(s^*)\right)$$
$$+\mu'(s^*)\boldsymbol{B}_{\phi}(s^*)+\mu(s^*)\begin{pmatrix}-k^*(s^*)\left(\boldsymbol{t}^*(s^*)\times\boldsymbol{T}_{\phi}(s^*)\right)+r^*(s^*)\left(\boldsymbol{b}^*(s^*)\times\boldsymbol{T}_{\phi}(s^*)\right)\\ +\kappa_{\phi}(s^*)\boldsymbol{n}^*(s^*)\times\boldsymbol{t}^*(s^*)\times\boldsymbol{T}_{\phi}(s^*)\end{pmatrix}$$
$$+\gamma'(s^*)\boldsymbol{E}_{\phi}(s^*)+\gamma(s^*)\left(-r^*(s^*)\boldsymbol{B}_{\phi}(s^*)+\kappa_{\phi}(s^*)\boldsymbol{b}^*(s^*)\times\boldsymbol{t}^*(s^*)\times\boldsymbol{T}_{\phi}(s^*)\right)$$

$$=\boldsymbol{T}_{\phi}(s^*)+\lambda'(s^*)\boldsymbol{N}_{\phi}(s^*)+\lambda(s^*)\left(k^*(s^*)\boldsymbol{B}_{\phi}(s^*)-\kappa_{\phi}(s^*)\boldsymbol{T}_{\phi}(s^*)\right)+\mu'(s^*)\boldsymbol{B}_{\phi}(s^*)$$
$$+\mu(s^*)\left(-k^*(s^*)\boldsymbol{N}_{\phi}(s^*)+r^*(s^*)\boldsymbol{E}_{\phi}(s^*)+\kappa_{\phi}(s^*)\boldsymbol{E}_{\phi}(s^*)\right)+\gamma'(s^*)\boldsymbol{E}_{\phi}(s^*)$$
$$+\gamma(s^*)\left(-r^*(s^*)\boldsymbol{B}_{\phi}(s^*)+\kappa_{\phi}(s^*)\boldsymbol{B}_{\phi}(s^*)\right)$$

$$=\left(1-\lambda(s^*)\right)\boldsymbol{T}_{\phi}(s^*)+\left(\lambda'(s^*)+\mu(s^*)k^*(s^*)\right)\boldsymbol{N}_{\phi}(s^*)$$
$$+\left(\lambda(s^*)k^*(s^*)+\mu'(s^*)-\gamma(s^*)\left(r^*(s^*)-\kappa_{\phi}(s^*)\right)\right)\boldsymbol{B}_{\phi}(s^*)$$
$$+\mu(s^*)\left(r^*(s^*)-\kappa_{\phi}(s^*)\right)\boldsymbol{E}_{\phi}(s^*)$$

elde edilir. Son denkleme $\boldsymbol{T}_{\phi}(s^*)$ vektörü ile kuaterniyonik iç çarpım uygulanırsa

$$h\left(\boldsymbol{T}_{\xi}(s)\frac{ds}{ds^*},\boldsymbol{T}_{\phi}(s^*)\right)=h\left(\begin{bmatrix}\left(1-\lambda(s^*)\right)\boldsymbol{T}_{\phi}(s^*)+\left(\lambda'(s^*)+\mu(s^*)k^*(s^*)\right)\boldsymbol{N}_{\phi}(s^*)\\ +\left(\lambda(s^*)k^*(s^*)+\mu'(s^*)-\gamma(s^*)\left(r^*(s^*)-\kappa_{\phi}(s^*)\right)\right)\boldsymbol{B}_{\phi}(s^*)\end{bmatrix},\boldsymbol{T}_{\phi}(s^*)\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(1 - \lambda(s^*)\kappa_\phi(s^*)\right) h\left(\boldsymbol{T}_\phi(s^*), \boldsymbol{T}_\phi(s^*)\right) \\
&\quad + \left(\lambda'(s^*) + \mu(s^*)k^*(s^*)\right) h\left(\boldsymbol{N}_\phi(s^*), \boldsymbol{T}_\phi(s^*)\right) \\
&\quad + \left(\lambda(s^*)k^*(s^*) + \mu'(s^*) - \gamma(s^*)\left(r^*(s^*) - \kappa_\phi(s^*)\right)\right) h\left(\boldsymbol{B}_\phi(s^*), \boldsymbol{T}_\phi(s^*)\right) \\
&\quad + \mu(s^*)\left(r^*(s^*) - \kappa_\phi(s^*)\right) h\left(\boldsymbol{E}_\phi(s^*), \boldsymbol{T}_\phi(s^*)\right) \qquad (4.2.14)
\end{aligned}
$$

bulunur. Kuaterniyonik involüt-evolüt tanımı gereği

$$
h\left(\boldsymbol{T}_\xi(s)\frac{ds}{ds^*}, \boldsymbol{T}_\phi(s^*)\right) = \frac{ds}{ds^*} h\left(\boldsymbol{T}_\xi(s), \boldsymbol{T}_\phi(s^*)\right) = 0
$$

olduğundan (4.2.14) denklemi

$$
\begin{aligned}
&1 - \lambda(s^*)\kappa_\phi(s^*) = 0 \\
&\lambda(s^*) = \frac{1}{\kappa_\phi(s^*)} = \rho(s^*)
\end{aligned}
$$

şeklinde bulunur. Burada $\rho(s^*)$, $\phi(s^*)$ kuaterniyonik eğrisinin eğrilik yarıçapıdır. Şimdi $\mu(s^*)$ ve $\gamma(s^*)$ fonksiyonlarını bulalım. Bunun için (4.2.13) denklemine, sırasıyla, $\boldsymbol{N}_\phi(s^*)$, $\boldsymbol{B}_\phi(s^*)$ ve $\boldsymbol{E}_\phi(s^*)$ vektörleriyle kuaterniyonik iç çarpım uygulanırsa

$$
\begin{aligned}
h\left(\boldsymbol{N}_\phi(s^*), \xi(s) - \phi(s^*)\right) &= h\left(\boldsymbol{N}_\phi(s^*), \left[\rho(s^*)\boldsymbol{N}_\phi(s^*) + \mu(s^*)\boldsymbol{B}_\phi(s^*) + \gamma(s^*)\boldsymbol{E}_\phi(s^*)\right]\right) \\
&= \rho(s^*)h\left(\boldsymbol{N}_\phi(s^*), \boldsymbol{N}_\phi(s^*)\right) + \mu(s^*)h\left(\boldsymbol{N}_\phi(s^*), \boldsymbol{B}_\phi(s^*)\right) + \gamma(s^*)h\left(\boldsymbol{N}_\phi(s^*), \boldsymbol{E}_\phi(s^*)\right) \\
&= \rho(s^*) \qquad (4.2.15)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
h\left(\boldsymbol{B}_\phi(s^*), \xi(s) - \phi(s^*)\right) &= h\left(\boldsymbol{B}_\phi(s^*), \left[\rho(s^*)\boldsymbol{N}_\phi(s^*) + \mu(s^*)\boldsymbol{B}_\phi(s^*) + \gamma(s^*)\boldsymbol{E}_\phi(s^*)\right]\right) \\
&= \rho(s^*)h\left(\boldsymbol{B}_\phi(s^*), \boldsymbol{N}_\phi(s^*)\right) + \mu(s^*)h\left(\boldsymbol{B}_\phi(s^*), \boldsymbol{B}_\phi(s^*)\right) + \gamma(s^*)h\left(\boldsymbol{B}_\phi(s^*), \boldsymbol{E}_\phi(s^*)\right) \\
&= \mu(s^*) \qquad (4.2.16)
\end{aligned}
$$

$$
h\left(\boldsymbol{E}_\phi(s^*), \xi(s) - \phi(s^*)\right) = h\left(\boldsymbol{E}_\phi(s^*), \left[\rho(s^*)\boldsymbol{N}_\phi(s^*) + \mu(s^*)\boldsymbol{B}_\phi(s^*) + \gamma(s^*)\boldsymbol{E}_\phi(s^*)\right]\right)
$$

$$= \rho(s^*)h\left(\boldsymbol{E}_\phi(s^*), \boldsymbol{N}_\phi(s^*)\right) + \mu(s^*)h\left(\boldsymbol{E}_\phi(s^*), \boldsymbol{B}_\phi(s^*)\right) + \gamma(s^*)h\left(\boldsymbol{E}_\phi(s^*), \boldsymbol{E}_\phi(s^*)\right)$$

$$= \gamma(s^*) \tag{4.2.17}$$

elde edilir. $\xi(s)$ kuaterniyonik eğrisi kuaterniyonik $w-$eğrisi olduğundan (4.2.12) denklemleri göz önüne alınırsa, (4.2.15), (4.2.16) ve (4.2.17) denklemleri

$$\rho(s^*) = \frac{-\kappa_\xi(s)}{\sqrt{\kappa_\xi^2(s) + k^2(s)}} h\left(\boldsymbol{T}_\xi(s), \xi(s) - \phi(s^*)\right) + \frac{k(s)}{\sqrt{\kappa_\xi^2(s) + k^2(s)}} h\left(\boldsymbol{B}_\xi(s), \xi(s) - \phi(s^*)\right)$$

$$\mu(s^*) = h\left(\boldsymbol{E}_\xi(s), \xi(s) - \phi(s^*)\right) \tag{4.2.18}$$

$$\gamma(s^*) = \frac{k(s)}{\sqrt{\kappa_\xi^2(s) + k^2(s)}} h\left(\boldsymbol{T}_\xi(s), \xi(s) - \phi(s^*)\right) + \frac{\kappa_\xi(s)}{\sqrt{\kappa_\xi^2(s) + k^2(s)}} h\left(\boldsymbol{B}_\xi(s), \xi(s) - \phi(s^*)\right)$$

şeklinde bulunur. $\xi(s)$ kuaterniyonik eğrisinin teğeti $\boldsymbol{T}_\xi(s)$ vektörü $\xi(s) - \phi(s^*)$ vektörü ile lineer bağımlı olduğundan, $\xi(s) - \phi(s^*)$ vektörü $\boldsymbol{N}_\xi(s)$, $\boldsymbol{B}_\xi(s)$ ve $\boldsymbol{E}_\xi(s)$ vektörlerine diktir. Dolayısıyla,

$$h\left(\boldsymbol{N}_\xi(s), \xi(s) - \phi(s^*)\right) = h\left(\boldsymbol{B}_\xi(s), \xi(s) - \phi(s^*)\right) = h\left(\boldsymbol{E}_\xi(s), \xi(s) - \phi(s^*)\right) = 0$$

dır. O halde (4.2.18) denklemleri

$$\rho(s^*) = \frac{-\kappa_\xi(s)}{\sqrt{\kappa_\xi^2(s) + k^2(s)}} h\left(\boldsymbol{T}_\xi(s), \xi(s) - \phi(s^*)\right) \tag{4.2.19}$$

$$\mu(s^*) = 0 \tag{4.2.20}$$

$$\gamma(s^*) = \frac{k(s)}{\sqrt{\kappa_\xi^2(s) + k^2(s)}} h\left(\boldsymbol{T}_\xi(s), \xi(s) - \phi(s^*)\right) \tag{4.2.21}$$

şeklinde bulunur. Burada gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$-\frac{\rho(s^*)}{\kappa_\xi(s)} = \frac{h\left(\boldsymbol{T}_\xi(s), \xi(s) - \phi(s^*)\right)}{\sqrt{\kappa_\xi^2(s) + k^2(s)}}$$

$$\frac{\gamma(s^*)}{k(s)} = \frac{h\left(\boldsymbol{T}_\xi(s), \xi(s) - \phi(s^*)\right)}{\sqrt{\kappa_\xi^{\,2}(s) + k^2(s)}}$$

$$-\frac{\rho(s^*)}{\kappa_\xi(s)} = \frac{\gamma(s^*)}{k(s)}$$

$$\gamma(s^*) = -\frac{\rho(s^*)k(s)}{\kappa_\xi(s)} \qquad (4.2.22)$$

elde edilir. O halde sonuç olarak (4.2.13) denkleminde (4.2.20) ve (4.2.22) denklemleri yerlerine yazılırsa

$$\xi(s) = \phi(s^*) - \rho(s^*)\boldsymbol{N}_\phi(s^*) - \frac{\rho(s^*)k(s)}{\kappa_\xi(s)}\boldsymbol{E}_\phi(s^*)$$

elde edilir.

Teorem 4.2.5. $\phi, \xi : I \to \mathbb{Q}$ kuaterniyonik eğrileri, sırasıyla, $s^*, s \in I$ yay-parametreleri ile verilsin. $\phi(s^*)$ ve $\xi(s)$ kuaterniyonik eğrileri kuaterniyonik $w-$ eğrisi olmak üzere, $\xi(s)$ kuaterniyonik eğrisinin Frenet vektör alanları $\left\{\boldsymbol{T}_\xi(s), \boldsymbol{N}_\xi(s), \boldsymbol{B}_\xi(s), \boldsymbol{E}_\xi(s)\right\}$, $\phi(s^*)$ kuaterniyonik eğrisinin Frenet vektör alanları $\left\{\boldsymbol{T}_\phi(s^*), \boldsymbol{N}_\phi(s^*), \boldsymbol{B}_\phi(s^*), \boldsymbol{E}_\phi(s^*)\right\}$ cinsinden yazılabilir.

İspat: $\phi(s^*)$ kuaterniyonik eğrisi ile bu eğrinin kuaterniyonik evolütü, $\xi(s)$ kuaterniyonik eğrisi kuaterniyonik $w-$eğrisi olarak verilsin. Teorem 4.2.4' den

$$\xi(s) = \phi(s^*) + \rho(s^*)\boldsymbol{N}_\phi(s^*) - \rho(s^*)\frac{k(s)}{\kappa_\xi(s)}\boldsymbol{E}_\phi(s^*)$$

dir. Bu denklemin (2.2.11) Frenet formüllerini kullanarak $s^* \in I$ yay-parametresine göre 1. mertebeden türevi hesaplanırsa

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{T}_\xi(s)\frac{ds}{ds^*} &= \boldsymbol{T}_\phi(s^*) + \rho(s^*)\left(\boldsymbol{t}^*(s^*)\times\boldsymbol{T}_\phi(s^*)\right)' - \rho(s^*)\frac{k(s)}{\kappa_\xi(s)}\left(\boldsymbol{b}^*(s^*)\times\boldsymbol{T}_\phi(s^*)\right)' \\
&= \boldsymbol{T}_\phi(s^*) + \rho(s^*)\Big(\boldsymbol{t}^{*\prime}(s^*)\times\boldsymbol{T}_\phi(s^*) + \boldsymbol{t}^*(s^*)\times\boldsymbol{T}_\phi'(s^*)\Big) \\
&\quad - \rho(s^*)\frac{k(s)}{\kappa_\xi(s)}\Big(\boldsymbol{b}^{*\prime}(s^*)\times\boldsymbol{T}_\phi(s^*) + \boldsymbol{b}^*(s^*)\times\boldsymbol{T}_\phi'(s^*)\Big) \\
&= \boldsymbol{T}_\phi(s^*) + \rho(s^*)\Big(k^*(s^*)\boldsymbol{n}^*(s^*)\times\boldsymbol{T}_\phi(s^*) + \boldsymbol{t}^*(s^*)\times\kappa_\phi(s^*)\boldsymbol{N}_\phi(s^*)\Big) \\
&\quad - \rho(s^*)\frac{k(s)}{\kappa_\xi(s)}\Big(-r^*(s^*)\boldsymbol{n}^*(s^*)\times\boldsymbol{T}_\phi(s^*) + \boldsymbol{b}^*(s^*)\times\kappa_\phi(s^*)\boldsymbol{N}_\phi(s^*)\Big) \\
&= \boldsymbol{T}_\phi(s^*) + \rho(s^*)\Big(k^*(s^*)\boldsymbol{B}_\phi(s^*) + \kappa_\phi(s^*)\boldsymbol{t}^*(s^*)\times\boldsymbol{t}^*(s^*)\times\boldsymbol{T}_\phi(s^*)\Big) \\
&\quad - \rho(s^*)\frac{k(s)}{\kappa_\xi(s)}\Big(-r^*(s^*)\boldsymbol{B}_\phi(s^*) + \kappa_\phi(s^*)\boldsymbol{b}^*(s^*)\times\boldsymbol{t}^*(s^*)\times\boldsymbol{T}_\phi(s^*)\Big) \\
&= \boldsymbol{T}_\phi(s^*) + \rho(s^*)\Big(k^*(s^*)\boldsymbol{B}_\phi(s^*) - \kappa_\phi(s^*)\boldsymbol{T}_\phi(s^*)\Big) \\
&\quad - \rho(s^*)\frac{k(s)}{\kappa_\xi(s)}\Big(-r^*(s^*)\boldsymbol{B}_\phi(s^*) + \kappa_\phi(s^*)\boldsymbol{B}_\phi(s^*)\Big) \\
&= \boldsymbol{T}_\phi(s^*) - \rho(s^*)\kappa_\phi(s^*)\boldsymbol{T}_\phi(s^*) + \rho(s^*)k^*(s^*)\boldsymbol{B}_\phi(s^*) \\
&\quad + \frac{\rho(s^*)k(s)}{\kappa_\xi(s)}\Big(r^*(s^*) - \kappa_\phi(s^*)\Big)\boldsymbol{B}_\phi(s^*)
\end{aligned}
$$

bulunur. Buradan $\rho(s^*) = \dfrac{1}{\kappa_\phi(s^*)}$ olduğu göz önüne alınır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$
\boldsymbol{T}_\xi(s)\frac{ds}{ds^*} = \frac{\kappa_\xi(s)k^*(s^*) + k(s)\Big(r^*(s^*) - \kappa_\phi(s^*)\Big)}{\kappa_\xi(s)\kappa_\phi(s^*)}\boldsymbol{B}_\phi(s^*) \tag{4.2.23}
$$

elde edilir. Böylece $\left\{\boldsymbol{T}_\xi(s), \boldsymbol{B}_\phi(s^*)\right\}$ vektörlerinin lineer bağımlı olduğu görülür. O halde $\xi(s)$, kuaterniyonik $w-$eğrisi ile $\phi(s^*)$ kuaterniyonik eğrisi yay-parametreli verildiğinden

$$
\boldsymbol{T}_\xi(s) = \boldsymbol{B}_\phi(s^*) \tag{4.2.24}
$$

alınabilir. Ayrıca,

$$\frac{ds}{ds^*}=\frac{\kappa_\xi(s)k^*(s^*)+k(s)\left(r^*(s^*)-\kappa_\phi(s^*)\right)}{\kappa_\xi(s)\kappa_\phi(s^*)} \tag{4.2.25}$$

bulunur.

Buradan da görüldüğü üzere, ξ ve ϕ kuaterniyonik eğrileri $w-$eğrisi olduğundan $\frac{ds^*}{ds}$ sabittir.

Şimdi $\boldsymbol{N}_\phi(s^*)$ vektörünü bulalım. Bunun için ilk önce (2.2.11) Frenet formülleri kullanılır, (4.2.24) denkleminin türevi ve türevinin normu hesaplanırsa

$$\frac{d\boldsymbol{T}_\xi}{ds}\frac{ds}{ds^*}=\frac{d^2\xi}{ds^2}\frac{ds}{ds^*}=-k^*(s^*)\boldsymbol{N}_\phi(s^*)+\left(r^*(s^*)-\kappa_\phi(s^*)\right)\boldsymbol{E}_\phi(s^*) \tag{4.2.26}$$

$$\left\|\frac{d^2\xi}{ds^2}\frac{ds}{ds^*}\right\|^2=\left[-k^*(s^*)\boldsymbol{N}_\phi(s^*)+\left(r^*(s^*)-\kappa_\phi(s^*)\right)\boldsymbol{E}_\phi(s^*)\right]\times\left[-k^*(s^*)\widehat{\boldsymbol{N}}_\phi(s^*)+\left(r^*(s^*)-\kappa_\phi(s^*)\right)\widehat{\boldsymbol{E}}_\phi(s^*)\right]$$

$$=\begin{bmatrix} k^{*2}(s^*)\left(\boldsymbol{N}_\phi(s^*)\times\widehat{\boldsymbol{N}}_\phi(s^*)\right)-k^*(s^*)\left(r^*(s^*)-\kappa_\phi(s^*)\right)\left(\boldsymbol{N}_\phi(s^*)\times\widehat{\boldsymbol{E}}_\phi(s^*)\right) \\ -k^*(s^*)\left(r^*(s^*)-\kappa_\phi(s^*)\right)\left(\boldsymbol{E}_\phi(s^*)\times\widehat{\boldsymbol{N}}_\phi(s^*)\right)+\left(r^*(s^*)-\kappa_\phi(s^*)\right)^2\left(\boldsymbol{E}_\phi(s^*)\times\widehat{\boldsymbol{E}}_\phi(s^*)\right)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} k^{*2}(s^*)\left(\boldsymbol{N}_\phi(s^*)\times\widehat{\boldsymbol{N}}_\phi(s^*)\right) \\ -2k^*(s^*)\left(r^*(s^*)-\kappa_\phi(s^*)\right)\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{N}_\phi(s^*)\times\widehat{\boldsymbol{E}}_\phi(s^*)+\boldsymbol{E}_\phi(s^*)\times\widehat{\boldsymbol{N}}_\phi(s^*)\right) \\ +\left(r^*(s^*)-\kappa_\phi(s^*)\right)^2\left(\boldsymbol{E}_\phi(s^*)\times\widehat{\boldsymbol{E}}_\phi(s^*)\right)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} k^{*2}(s^*)h\left(\boldsymbol{N}_\phi(s^*),\boldsymbol{N}_\phi(s^*)\right)-2k^*(s^*)\left(r^*(s^*)-\kappa_\phi(s^*)\right)h\left(\boldsymbol{N}_\phi(s^*),\boldsymbol{E}_\phi(s^*)\right) \\ +\left(r^*(s^*)-\kappa_\phi(s^*)\right)^2 h\left(\boldsymbol{E}_\phi(s^*),\boldsymbol{E}_\phi(s^*)\right)\end{bmatrix}$$

$$=k^{*2}(s^*)+\left(r^*(s^*)-\kappa_\phi(s^*)\right)^2$$

olmak üzere,

$$\left\|\frac{d^2\xi}{ds^2}\frac{ds}{ds^*}\right\|=\sqrt{k^{*2}(s^*)+\left(r^*(s^*)-\kappa_\phi(s^*)\right)^2} \tag{4.2.27}$$

olur. $\xi(s)$ kuaterniyonik eğrisinin yay-parametreli olduğu göz önüne alınır ve (2.2.9) Frenet denklemlerinde (4.2.26) ile (4.2.27) denklemleri yerlerine yazılırsa $\boldsymbol{N}_\xi(s)$ vektörü

$$\boldsymbol{N}_\xi(s)=\frac{-k^*(s^*)}{\sqrt{k^{*2}(s^*)+\left(r^*(s^*)-\kappa_\phi(s^*)\right)^2}}\boldsymbol{N}_\phi(s^*)+\frac{\left(r^*(s^*)-\kappa_\phi(s^*)\right)}{\sqrt{k^{*2}(s^*)+\left(r^*(s^*)-\kappa_\phi(s^*)\right)^2}}\boldsymbol{E}_\phi(s^*)$$

şeklinde elde edilir.

Şimdi $\boldsymbol{E}_\xi(s)$ vektörünü bulalım. Bunun için ilk önce (2.2.11) Frenet formüllerinden yararlanarak (4.2.26) denkleminin 3. mertebeden türevi hesaplanırsa

$$\begin{aligned}
\frac{d^3\xi}{ds^3}\frac{ds^2}{ds^{*2}}&=-k^*(s^*)\left(\boldsymbol{t}^*(s^*)\times\boldsymbol{T}_\phi(s^*)\right)'+\left(r^*(s^*)-\kappa_\phi(s^*)\right)\left(\boldsymbol{b}^*(s^*)\times\boldsymbol{T}_\phi(s^*)\right)'\\
&=-k^*(s^*)\left(\boldsymbol{t}^{*\prime}(s^*)\times\boldsymbol{T}_\phi(s^*)+\boldsymbol{t}^*(s^*)\times\boldsymbol{T}_\phi'(s^*)\right)\\
&\quad+\left(r^*(s^*)-\kappa_\phi(s^*)\right)\left(\boldsymbol{b}^{*\prime}(s^*)\times\boldsymbol{T}_\phi(s^*)+\boldsymbol{b}^*(s^*)\times\boldsymbol{T}_\phi'(s^*)\right)\\
&=-k^*(s^*)\left(k^*(s^*)\boldsymbol{n}^*(s^*)\times\boldsymbol{T}_\phi(s^*)+\boldsymbol{t}^*(s^*)\times\kappa_\phi(s^*)\boldsymbol{N}_\phi(s^*)\right)\\
&\quad+\left(r^*(s^*)-\kappa_\phi(s^*)\right)\left(-r^*(s^*)\boldsymbol{n}^*(s^*)\times\boldsymbol{T}_\phi(s^*)+\boldsymbol{b}^*(s^*)\times\kappa_\phi(s^*)\boldsymbol{N}_\phi(s^*)\right)\\
&=-k^*(s^*)\left(k^*(s^*)\boldsymbol{B}_\phi(s^*)-\kappa_\phi(s^*)\boldsymbol{T}_\phi(s^*)\right)+\left(r^*(s^*)-\kappa_\phi(s^*)\right)\left(-r^*(s^*)\boldsymbol{B}_\phi(s^*)+\kappa_\phi(s^*)\boldsymbol{B}_\phi(s^*)\right)\\
&=\kappa_\phi(s^*)k^*(s^*)\boldsymbol{T}_\phi(s^*)-\left[k^{*2}(s^*)+\left(r^*(s^*)-\kappa_\phi(s^*)\right)^2\right]\boldsymbol{B}_\phi(s^*)
\end{aligned}\tag{4.2.28}$$

elde edilir. Böylelikle $\boldsymbol{T}_\xi(s)\wedge\boldsymbol{N}_\xi(s)\wedge\dfrac{d^3\xi}{ds^3}$ vektörü

$$\boldsymbol{T}_\xi(s)\wedge\boldsymbol{N}_\xi(s)\wedge\frac{d^3\xi}{ds^3}=\frac{ds^{*2}}{ds^2}\begin{vmatrix}\boldsymbol{T}_\phi(s^*) & \boldsymbol{N}_\phi(s^*) & \boldsymbol{B}_\phi(s^*) & \boldsymbol{E}_\phi(s^*)\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & \dfrac{-k^*(s^*)}{\sqrt{k^{*2}(s^*)+\left(r^*(s^*)-\kappa_\phi(s^*)\right)^2}} & 0 & \dfrac{\left(r^*(s^*)-\kappa_\phi(s^*)\right)}{\sqrt{k^{*2}(s^*)+\left(r^*(s^*)-\kappa_\phi(s^*)\right)^2}}\\ \kappa_\phi(s^*)k^*(s^*) & 0 & -\left[k^{*2}(s^*)+\left(r^*(s^*)-\kappa_\phi(s^*)\right)^2\right] & 0\end{vmatrix}$$

$$\boldsymbol{T}_\xi(s)\wedge\boldsymbol{N}_\xi(s)\wedge\frac{d^3\xi}{ds^3}=\frac{ds^{*2}}{ds^2}\left[-\frac{\kappa_\phi(s^*)k^*(s^*)\left(r^*(s^*)-\kappa_\phi(s^*)\right)}{\sqrt{k^{*2}(s^*)+\left(r^*(s^*)-\kappa_\phi(s^*)\right)^2}}\boldsymbol{N}_\phi(s^*)-\frac{\kappa_\phi(s^*)k^{*2}(s^*)}{\sqrt{k^{*2}(s^*)+\left(r^*(s^*)-\kappa_\phi(s^*)\right)^2}}\boldsymbol{E}_\phi(s^*)\right]$$

$$=\frac{ds^{*2}}{ds^2}\left[-\frac{\kappa_\phi(s^*)k^*(s^*)}{\sqrt{k^{*2}(s^*)+\left(r^*(s^*)-\kappa_\phi(s^*)\right)^2}}\left[\left(r^*(s^*)-\kappa_\phi(s^*)\right)\boldsymbol{N}_\phi(s^*)+k^*(s^*)\boldsymbol{E}_\phi(s^*)\right]\right]$$

(4.2.29)

elde edilir. Şimdi de bu ifadenin kuaterniyonik normu hesaplanırsa

$$\left\|\boldsymbol{T}_\xi(s)\wedge\boldsymbol{N}_\xi(s)\wedge\frac{d^3\xi}{ds^3}\right\|^2=\left|\frac{ds^{*2}}{ds^2}\right|^2\left(-\frac{\kappa_\phi(s^*)k^*(s^*)}{\sqrt{k^{*2}(s^*)+\left(r^*(s^*)-\kappa_\phi(s^*)\right)^2}}\right)^2\begin{pmatrix}k^{*2}(s^*)h\left(\boldsymbol{N}_\phi(s^*),\boldsymbol{N}_\phi(s^*)\right)\\+\left(r^*(s^*)-\kappa_\phi(s^*)\right)^2h\left(\boldsymbol{E}_\phi(s^*),\boldsymbol{E}_\phi(s^*)\right)\end{pmatrix}$$

olmak üzere,

$$\left\|\boldsymbol{T}_\xi(s)\wedge\boldsymbol{N}_\xi(s)\wedge\frac{d^3\xi}{ds^3}\right\|=\left|\frac{ds^{*2}}{ds^2}\right|\left|\kappa_\phi(s^*)k^*(s^*)\right| \qquad (4.2.30)$$

olduğu görülür. Son olarak (2.2.9) Frenet denklemlerinde (4.2.29) ve (4.2.30) denklemleri yerlerine yazılırsa $\boldsymbol{E}_\xi(s)$ vektörü

$$\boldsymbol{E}_\xi(s)=\eta\left[\frac{\left(r^*(s^*)-\kappa_\phi(s^*)\right)}{\sqrt{k^{*2}(s^*)+\left(r^*(s^*)-\kappa_\phi(s^*)\right)^2}}\boldsymbol{N}_\phi(s^*)+\frac{k^*(s^*)}{\sqrt{k^{*2}(s^*)+\left(r^*(s^*)-\kappa_\phi(s^*)\right)^2}}\boldsymbol{E}_\phi(s^*)\right]$$

şeklinde elde edilir.

Şimdi $\boldsymbol{B}_\xi(s)$ vektörünü bulalım. Bunun için (2.2.9) Frenet denklemlerinde $\boldsymbol{E}_\xi(s),\boldsymbol{T}_\xi(s)$ ve $\boldsymbol{N}_\xi(s)$ vektörleri yerlerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\boldsymbol{B}_\xi(s)=\begin{vmatrix}\boldsymbol{T}_\phi(s^*) & \boldsymbol{N}_\phi(s^*) & \boldsymbol{B}_\phi(s^*) & \boldsymbol{E}_\phi(s^*)\\ 0 & \dfrac{\left(r^*(s^*)-\kappa_\phi(s^*)\right)}{\sqrt{k^{*2}(s^*)+\left(r^*(s^*)-\kappa_\phi(s^*)\right)^2}} & 0 & \dfrac{k^*(s^*)}{\sqrt{k^{*2}(s^*)+\left(r^*(s^*)-\kappa_\phi(s^*)\right)^2}}\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & \dfrac{-k^*(s^*)}{\sqrt{k^{*2}(s^*)+\left(r^*(s^*)-\kappa_\phi(s^*)\right)^2}} & 0 & \dfrac{\left(r^*(s^*)-\kappa_\phi(s^*)\right)}{\sqrt{k^{*2}(s^*)+\left(r^*(s^*)-\kappa_\phi(s^*)\right)^2}}\end{vmatrix}$$

$$B_\xi(s)=\eta\frac{k^{*2}(s^*)+\left(r^*(s^*)-\kappa_\phi(s^*)\right)^2}{\sqrt{k^{*2}(s^*)+\left(r^*(s^*)-\kappa_\phi(s^*)\right)^2}}T_\phi(s^*)$$

$$B_\xi(s)=\eta\sqrt{k^{*2}(s^*)+\left(r^*(s^*)-\kappa_\phi(s^*)\right)^2}\,T_\phi(s^*)$$

elde edilir.

Teorem 4.2.6. $\phi,\xi:\to\mathbb{Q}$ kuaterniyonik eğrileri, sırasıyla, $s^*,s\in I$ yay-parametreleri ile verilsin. $\phi(s^*)$ kuaterniyonik eğrisi ile bu eğrinin evolütü, $\xi(s)$ kuaterniyonik eğrisi kuaterniyonik $w-$eğrisi olmak üzere, $\xi(s)$ kuaterniyonik eğrisinin Frenet eğrilikleri $\kappa_\xi(s),k(s),\left(r(s)-\kappa_\xi(s)\right)$, $\phi(s^*)$ eğrisinin Frenet eğrilikleri $\kappa_\phi(s^*),k^*(s^*),\left(r^*(s^*)-\kappa_\phi(s^*)\right)$ cinsinden yazılabilir.

İspat: $\phi(s^*)$ kuaterniyonik eğrisi ile bu eğrinin kuaterniyonik evolütü, $\xi(s)$ kuaterniyonik eğrisi kuaterniyonik $w-$eğrisi olarak verilsin. (4.2.27) denkleminden

$$\left\|\frac{d^2\xi}{ds^2}\right\|=\kappa_\xi(s)=\left|\frac{ds^*}{ds}\right|\sqrt{k^{*2}(s^*)+\left(r^*(s^*)-\kappa_\phi(s^*)\right)^2}$$

dir. Burada (3.2.28) denklemi göz önüne alınırsa $\kappa_\xi(s)$ kuaterniyonik eğriliği

$$\kappa_\xi(s)=\frac{\kappa_\phi(s^*)\sqrt{k^{*2}(s^*)+\left(r^*(s^*)-\kappa_\phi(s^*)\right)^2}-k(s)\left(r^*(s^*)-\kappa_\phi(s^*)\right)}{k^*(s^*)}$$

şeklinde bulunur. Şimdi $k(s)$ kuaterniyonik burulmasını bulalım. (2.2.10) Frenet denklemleri yardımıyla, $\xi(s)$ kuaterniyonik eğrisi yay-parametreli bir eğri olduğundan

$$k(s)=\frac{\left\|\boldsymbol{T}_{\xi}(s)\wedge\boldsymbol{N}_{\xi}(s)\wedge\frac{d^{3}\xi}{ds^{3}}\right\|}{\left\|\frac{d^{2}\xi}{ds^{2}}\right\|}$$

yazılabilir. Burada (4.2.27) ve (4.2.30) denklemleri yerlerine yazılırsa

$$k(s)=\frac{\left|\frac{ds^{*}}{ds}\right|\kappa_{\phi}(s^{*})k^{*}(s^{*})}{\sqrt{k^{*2}(s^{*})+\left(r^{*}(s^{*})-\kappa_{\phi}(s^{*})\right)^{2}}}$$

elde edilir. Ayrıca, (4.2.25) denklemi göz önüne alınırsa

$$k(s)=\frac{\frac{\kappa_{\xi}(s)\kappa_{\phi}(s^{*})}{\kappa_{\xi}(s)k^{*}(s^{*})+k(s)\left(r^{*}(s^{*})-\kappa_{\phi}(s^{*})\right)}\kappa_{\phi}(s^{*})k^{*}(s^{*})}{\sqrt{k^{*2}(s^{*})+\left(r^{*}(s^{*})-\kappa_{\phi}(s^{*})\right)^{2}}}$$

$$k(s)=\frac{\kappa_{\xi}(s)\kappa_{\phi}^{2}(s^{*})k^{*}(s^{*})}{\left(\kappa_{\xi}(s)k^{*}(s^{*})+k(s)\left(r^{*}(s^{*})-\kappa_{\phi}(s^{*})\right)\right)\sqrt{k^{*2}(s^{*})+\left(r^{*}(s^{*})-\kappa_{\phi}(s^{*})\right)^{2}}}$$

bulunur. Son denklemde $\kappa_{\xi}(s)$ değeri yerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa $k(s)$ kuaterniyonik burulması

$$k(s)=\frac{\kappa_{\phi}^{2}(s^{*})\sqrt{k^{*2}(s^{*})+\left(r^{*}(s^{*})-\kappa_{\phi}(s^{*})\right)^{2}}}{k^{*2}(s^{*})+\left(r^{*}(s^{*})-\kappa_{\phi}(s^{*})\right)^{2}+\kappa_{\phi}(s^{*})\left(r^{*}(s^{*})-\kappa_{\phi}(s^{*})\right)}$$

şeklinde bulunur. $\kappa_{\xi}(s)$ kuaterniyonik eğriliğini de $\phi(s^{*})$, kuaterniyonik involüt eğrisinin Frenet eğrilikleri cinsinden yazmak için $k(s)$ kuaterniyonik burulması $\kappa_{\xi}(s)$ eğriliğinde yerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa $\kappa_{\xi}(s)$ eğriliği

$$\kappa_{\xi}(s)=\frac{\kappa_{\phi}(s^{*})\sqrt{\left[k^{*2}(s^{*})+\left(r^{*}(s^{*})-\kappa_{\phi}(s^{*})\right)^{2}\right]^{3}}}{k^{*}(s^{*})\left[k^{*2}(s^{*})+\left(r^{*}(s^{*})-\kappa_{\phi}(s^{*})\right)^{2}+\kappa_{\phi}(s^{*})\left(r^{*}(s^{*})-\kappa_{\phi}(s^{*})\right)\right]}$$

şeklinde bulunur.

Son olarak $\left(r(s)-\kappa_{\xi}(s)\right)$, kuaterniyonik eğriliğini bulalım. Bunun için öncelikle $\xi(s)$ kuaterniyonik eğrisinin $s^{*}\in I$ yay-parametresine göre 4. mertebeden türevi hesaplanırsa

$$\begin{aligned}\frac{d^4\xi}{ds^4}\frac{ds^3}{ds^{*3}}&=\left[k^{*}(s^{*})\left(\kappa_{\phi}{}^{2}(s^{*})+k^{*2}(s^{*})+\left(r^{*}(s^{*})-\kappa_{\phi}(s^{*})\right)^{2}\right)\right]\boldsymbol{N}_{\phi}(s^{*})\\&-\left[k^{*2}(s^{*})+\left(r^{*}(s^{*})-\kappa_{\phi}(s^{*})\right)^{2}\right]\left(r^{*}(s^{*})-\kappa_{\phi}(s^{*})\right)\boldsymbol{E}_{\phi}(s^{*})\end{aligned}$$

elde edilir. Bu son denkleme $\boldsymbol{E}_{\xi}(s)$ vektörü ile kuaterniyonik iç çarpım uygulanırsa

$$h\left(\frac{d^4\xi}{ds^4},\boldsymbol{E}_{\xi}(s)\right)=\frac{ds^{*3}}{ds^3}h\left(\begin{bmatrix}=\left[k^{*}(s^{*})\left(\kappa_{\phi}{}^{2}(s^{*})+k^{*2}(s^{*})+\left(r^{*}(s^{*})-\kappa_{\phi}(s^{*})\right)^{2}\right)\right]\boldsymbol{N}_{\phi}(s^{*})\\-\left[k^{*2}(s^{*})+\left(r^{*}(s^{*})-\kappa_{\phi}(s^{*})\right)^{2}\right]\left(r^{*}(s^{*})-\kappa_{\phi}(s^{*})\right)\boldsymbol{E}_{\phi}(s^{*})\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\dfrac{\left(r^{*}(s^{*})-\kappa_{\phi}(s^{*})\right)}{\sqrt{k^{*2}(s^{*})+\left(r^{*}(s^{*})-\kappa_{\phi}(s^{*})\right)^{2}}}\boldsymbol{N}_{\phi}(s^{*})\\+\dfrac{k^{*}(s^{*})}{\sqrt{k^{*2}(s^{*})+\left(r^{*}(s^{*})-\kappa_{\phi}(s^{*})\right)^{2}}}\boldsymbol{E}_{\phi}(s^{*})\end{bmatrix}\right)$$

$$=\frac{ds^{*3}}{ds^3}\frac{\kappa_{\phi}{}^{2}(s^{*})k^{*}(s^{*})\left(r^{*}(s^{*})-\kappa_{\phi}(s^{*})\right)}{\sqrt{k^{*2}(s^{*})+\left(r^{*}(s^{*})-\kappa_{\phi}(s^{*})\right)^{2}}} \tag{4.2.31}$$

bulunur. Son olarak (2.2.10) Frenet denklemlerinden yararlanarak (4.2.30) ve (4.2.31) denklemlerinin yardımıyla

$$\left(r(s)-\kappa_{\xi}(s)\right)=\frac{\left|\dfrac{ds^{*3}}{ds^3}\right|\dfrac{\kappa_{\phi}{}^{2}(s^{*})k^{*}(s^{*})\left(r^{*}(s^{*})-\kappa_{\phi}(s^{*})\right)}{\sqrt{k^{*2}(s^{*})+\left(r^{*}(s^{*})-\kappa_{\phi}(s^{*})\right)^{2}}}}{\left|\dfrac{ds^{*2}}{ds^2}\right|\left|\kappa_{\phi}(s^{*})k^{*}(s^{*})\right|}$$

$$\left(r(s)-\kappa_{\xi}(s)\right)=\frac{\left|\dfrac{ds^{*}}{ds}\right|\kappa_{\phi}(s^{*})\left(r^{*}(s^{*})-\kappa_{\phi}(s^{*})\right)}{\sqrt{k^{*2}(s^{*})+\left(r^{*}(s^{*})-\kappa_{\phi}(s^{*})\right)^{2}}}$$

bulunur. Buradan (4.2.25) denklemi göz önüne alınır ve $\kappa_{\xi}(s)$ ve $k(s)$ eğrilikleri kullanılırsa $\left(r(s)-\kappa_{\xi}(s)\right)$ kuaterniyonik eğriliği

$$\left(r(s)-\kappa_{\xi}(s)\right)=\frac{\kappa_{\phi}{}^{2}(s^{*})\left(r^{*}(s^{*})-\kappa_{\phi}(s^{*})\right)\sqrt{k^{*2}(s^{*})+\left(r^{*}(s^{*})-\kappa_{\phi}(s^{*})\right)^{2}}}{k^{*}(s^{*})\left(k^{*2}(s^{*})+\left(r^{*}(s^{*})-\kappa_{\phi}(s^{*})\right)^{2}+\kappa_{\phi}(s^{*})\left(r^{*}(s^{*})-\kappa_{\phi}(s^{*})\right)\right)}$$

şeklinde elde edilir.

BÖLÜM 5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, reel-kuaterniyonlar kümesi ve Öklid uzayında iyi bilinen involüt-evolüt eğri çiftleri temel alınmıştır. Öncelikle Öklid uzayındaki involüt-evolüt eğri çiftlerinin Frenet elemanları birbiri cinsinden $n=3$ ve $n=4$ için ayrı ayrı yazılmış ve daha sonra Öklid uzayındaki eğrilerin reel-kuaterniyonlar kümesindeki kuaterniyonik eğrilerle birebir eşleşmesi temel alınarak bu eğriler, $n=3$ ve $n=4$ için yeniden hesaplanmıştır. Bu hesaplamalar yapılırken kuaterniyonların özelliklerinden yararlanılmıştır. Ayrıca, $n=4$ için yapılan hesaplamalarda $w-$eğrilerinin kolaylığından faydalanılmıştır.

Bu çalışmada elde edilen kuaterniyonlar kümesindeki, reel kuaterniyonik involüt-evolüt eğri çiftinin Frenet elemanları arasındaki bağıntılar split kuaterniyonlar kullanılarak Lorentz uzayında araştırılabilir.

KAYNAKLAR

[1] BHARATHİ, K. & NAGARAJ, M., "Quaternion Valued Function of a Real Variable Serret-Frenet Formulae", Indian J. Pure Appl. Math., 18 (6), 507-511, 1987.

[2] BÜKCÜ, B., "Kuaterniyonlar, Oktanyonlar ve Uygulamaları", Yüksek Lisans Tezi, Ankara Üniversitesi, 1994.

[3] DEMİR, S., "Kompleks ve Dual Kuaterniyonların Fiziksel Uygulamaları", Doktora Tezi, Anadolu Üniversitesi, 2003.

[4] DEMİR, S. & ÖZDAŞ, K., "Reel Kuaterniyonlarla Serret-Frenet Formülleri", Süleyman Demirel Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi, 2005.

[5] GLUCK, H., "Higher Curvature of Curves in Euclidean Space", Amer. Math. Monthly, 73, 699-704, 1996.

[6] HACISALİHOĞLU, H. H. ve SABUNCUOĞLU, A., "Diferensiyel Geometri", Milli Eğitim Basımevi, İstanbul, 1983.

[7] HACISALİHOĞLU, H. H., "Hareket Geometrisi ve Kuaterniyonlar Teorisi", Gazi Üniversitesi Yayınları, 1983.

[8] HACISALİHOGLU, H. H., "Diferensiyel Geometri", Ankara Üniversitesi, 1998.

[9] HAMİLTON, W. R., "Elements of Quaternions", Chelsea, New York, 1899.

[10] KARADAĞ, M. & SİVRİDAĞ, A. İ. "Tek Değişkenli Kuaterniyon Değerli Fonksiyonlar ve Eğilim Çizgileri", Erciyes Üniversitesi, Fen Bilimleri Dergisi, 13 (1-2), 23-36, 1997.

[11] KASAP, E., "Bertrand Regle Yüzey Çiftleri ile ilgili Yeni Karakteristik Özellikler", Yüksek Lisans Tezi, Ondokuz Mayıs Üniversitesi, 1996.

[12] KILIÇ, A., "Kuaterniyonların Kuantum Fiziğine Uygulanması", Yüksek Lisans Tezi, Anadolu Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, 1999.

[13] O'NEİL, B., "Elementary Differential Geometri", Academic Press., New York, 1966.

[14] ÖZÇELİK, H., “(Split) Bölüntülü Kuaterniyonlarla Kuantum Mekaniği”, Yüksek Lisans Tezi, Anadolu Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, 2007.

[15] ÖZYILMAZ, E. & YILMAZ S., “Involute-Evolute Curve Couples in the Euclidean 4-Space”, Int. J. Open Problems Compt. Math., 2 (2), June 2009.

[16] SABUNCUOĞLU, A., “Diferensiyel Geometri”, Nobel Yayınları, Ankara, 2004.

[17] SOYDAŞ, M., “Bikuaterniyonların Modern Fiziğe Uygulaması”, Yüksek Lisans Tezi, Anadolu Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, 2003.

[18] TUNA, A., “Yarı Öklid uzayındaki Kuaterniyonik Eğriler İçin Serret-Frenet Formülleri”, Yüksek Lisans Tezi, Süleyman Demirel Üniversitesi, 2002.

ÖZGEÇMİŞ

Tülay SOYFİDAN, 25.05.1986 tarihinde İstanbul Eyüp'de doğdu. İlköğrenimini Eyüp Serdar Aksun İlköğretim Okulu'nda, lise öğrenimini Eyüp Refhan Tümer Yabancı Dil Ağırlıklı Lisesi' nde tamamladı. 2005 yılında Atatürk Üniversitesi Erzincan Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik bölümünde başladığı lisans eğitimini 2009 yılında tamamlayıp aynı yıl Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünde yüksek lisans eğitimine başlamıştır. Şuan Erzincan Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde Araştırma Görevlisi olarak çalışmaktadır.