T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GENELLEŞTİRİLMİŞ JACOBSTHAL SAYILARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Serap AVCIOĞLU

Enstitü Anabilim Dalı	**:**	**MATEMATİK**
Tez Danışmanı	**:**	**Yrd. Doç. Dr. Serpil HALICI**

Haziran 2011

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GENELLEŞTİRİLMİŞ JACOBSTHAL SAYILARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Serap AVCIOĞLU

Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK

Bu tez 28/06/2011 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği ile kabul edilmiştir.

Yrd. Doç. Dr. Serpil HALICI	**Prof. Dr. Refik KESKİN**	**Doç. Dr. Mehmet BEKTAŞOĞLU**
Jüri Başkanı	**Üye**	**Üye**

ÖNSÖZ

Bu tezin konusunu belirleyen tez danışmanım Yrd. Doç. Dr. Serpil HALICI' ya teşekkür ederim. Ayrıca, beni bugünlere getiren, hayat boyu her türlü sıkıntımda yanımda olan, manevi destekleriyle beni hiçbir zaman yalnız bırakmayan aileme en içten saygı ve teşekkürlerimi sunmayı borç bilirim.

Serap AVCIOĞLU

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

$\det(A)$	: A matrisinin determinantı
D	: k-boyutlu companion matris
F	: Jacobsthal matrisi
E	: Jacobsthal-Lucas matrisi
F_n	: n. Fibonacci sayısı
L_n	: n. Lucas sayısı
P_n	: n. Pell sayısı
Q_n	: n. Pell Lucas sayısı
J_n	: n. Jacobsthal sayısı
j_n	: n. Jacobsthal-Lucas sayısı
$J_k(n)$	: n. Jacobsthal k-sayısı
B	: Jacobsthal k-sayıları için üreteç matris
α	: Genelleştirilmiş Jacobsthal dizilerinin karakteristik kökü
β	: Genelleştirilmiş Jacobsthal dizilerinin karakteristik kökü
A_n	: Genelleştirilmiş Jacobsthal matris
$J_{k,n}$	: Genelleştirilmiş k-Basamak Jacobsthal sayısının n. terimi
S_n	: Genelleştirilmiş k-Basamak Jacobsthal sayılarının toplamı
$F_k(x)$	: Genelleştirilmiş k-Basamak Jacobsthal sayılarının üreteç fonksiyonu
$G_k(x)$	: Genelleştirilmiş k-Basamak Jacobsthal-Lucas sayılarının üreteç fonksiyonu

TABLOLAR LİSTESİ

ÖZET

Anahtar kelimeler: Tam Sayı Dizileri, Fibonacci, Lucas, Jacobsthal ve Jacobsthal-Lucas Sayıları, Jacobsthal k-Sayıları, Genelleştirilmiş k-Basamak Jacobsthal ve Jacobsthal-Lucas Sayıları, Matris Yöntemi

Bu çalışmada, Jacobsthal ve Jacobsthal-Lucas sayılarının genel özellikleri incelenerek, bu sayı dizilerinin genelleştirilmesi olan k-basamak Jacobsthal ve k-basamak Jacobsthal-Lucas dizilerinin tanımları ve özellikleri verildi. Birinci bölümde tam sayı dizilerinin temeli olarak düşünülen Fibonacci ve Lucas dizilerinin tarihçesinden ve bu sayılarla matrisler arasındaki ilişkilerden bahsedildi. İkinci bölümde literatürde önemli bir yere sahip olan bazı tam sayı dizilerinin tanımları verilerek, temel kavramları üzerinde duruldu. Üçüncü bölümde Jacobsthal ve Jacobsthal-Lucas sayılarının özelliklerine ek olarak, elde ettiğimiz toplam özellikleri ve matris gösterimi verildi. Son bölümde ise Jacobsthal k-sayıları ve genelleştirilmiş k-basamak Jacobsthal sayılarının tanımları, üreteç matrisleri, özdeğerleri ve Binet formüllerinin yanı sıra üreteç fonksiyonları ve kombinatoryal gösterimleri elde edildi.

GENERALIZED JACOBSTHAL NUMBERS

SUMMARY

Key Words: Integer Sequences, Fibonacci, Lucas, Jacobsthal and Jacobsthal-Lucas Numbers, Jacobsthal k-Numbers, Generalized Order-k Jacobsthal and Jacobsthal-Lucas Numbers, Matrix Method

In this study, by considering general properties of Jacobsthal and Jacobsthal-Lucas numbers, definitions and properties of order-k Jacobsthal and order-k Jacobsthal-Lucas sequences, which are the generalizations of Jacobsthal and Jacobsthal-Lucas sequences, are given. In the first chapter, history of Fibonacci and Lucas sequences that is considered as foundation of integer sequences and relations between these numbers and matrices are mentioned. In the second chapter, after definitions of some integer sequences which are important in the literature are given, some fundamental concepts of these sequences are stated. In addition to properties of Jacobsthal and Jacobsthal-Lucas numbers, summation properties and matrix representation are obtained in the third chapter. In the last chapter, in addition to definitions, generating matrices, eigenvalues and Binet formulas of generalized order-k Jacobsthal numbers and Jacobsthal k-numbers, their generating functions and combinatorial representations are obtained.

BÖLÜM 1. GİRİŞ

1.1. Tam Sayı Dizilerinin Tarihçesi

İtalya'nın Pisa şehrinde doğan Leonardo Fibonacci 12. yüzyılda yaşamış bir matematikçidir. Küçük yaşlarda eğitim aldığı müslüman matematikçilerden Arap sayı sistemini öğrenen Fibonacci, 1201 yılında yazmış olduğu "Liber Abaci" isimli kitapta bu sayı sistemini tanıtmıştır. Cebir ve aritmetiği içeren, ticaret konulu bu kitap zamanla Arap sayı sisteminin Batı Avrupa'ya girmesinde çok etkili olmuştur.

Bu kitapta bulunan "Tavşan Problemi" Fibonacci'nin yüzyıllar sonra meşhur hale gelmesini sağlamıştır. Bu problem; biri dişi, biri erkek olan yeni doğmuş iki tavşanın 1 ayda ergenliğe ulaştıkları, 2. aydan sonra her çiftin, her ay bir çift yavru doğurduğu ve yıl boyunca hiçbir tavşanın ölmediği varsayımlarıyla bir yılda doğan tavşan çiftlerinin sayısının ne olacağı düşüncesinden doğmuştur. Bu durumda belli bir aydaki çift sayısı önceki iki ayın toplamına eşittir. Bu durumda bir yıl içinde tavşan çiftlerinin sayısı aylara göre 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144 olacaktır. Bu sayı dizisi yetişkin çiftler, yavru çiftler ve toplam çiftler arasında bağıntılar olduğunu göstermektedir.

Fibonacci dizisi, $n \geq 1$ için $F_0 = 0$ ve $F_1 = 1$ başlangıç koşulları ile verilen $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ bağıntısı ile tanımlanır. Farklı başlangıç koşulları ile Fibonacci sayı dizisinden tamamen farklı diziler elde etmek mümkündür. Fransız matematikçi Edward Lucas $L_0 = 2$ ve $L_1 = 1$ başlangıç koşullarını seçerek $L_{n+1} = L_n + L_{n-1}$ bağıntısı ile Fibonacci dizisine benzer bir sayı dizisi olan Lucas dizisini elde etmiştir. Fibonacci ve Lucas sayı dizileri arasında pek çok ilginç bağıntı bulunmaktadır. Doğada ve bilimsel alanlarda bu sayıları görebilmek mümkündür.

Fibonacci dizisinin her bir terimi öncekine bölündüğünde, $n \to \infty$ için bölüm "altın oran" denilen $\left(1+\sqrt{5}\right)/2 = 1,61803398...$ sayısına yakınsamaktadır. Bu sayı, oyun kartlarının biçiminden Mısır piramitlerine kadar pek çok yapının matematiksel temelini oluşturmaktadır. Bununla beraber 123 sağ sarmalı ve 76 sol sarmalı olan Lucas ayçiçekleri olduğu bilinmektedir.

Fibonacci sayılarıyla matrisler arasında ilişkiler olduğunu kanıtlayan çalışmaların öncüsü, Charles H. King olmuştur. Yazar, 1960 yıllarında;

$$Q = \begin{pmatrix} F_2 & F_1 \\ F_1 & F_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

matrisi üzerinde çalışarak u_n, $n.$ Fibonacci sayısı olmak üzere, Q matrisi için,

$$Q^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$$

eşitliğini göstermiştir ve bu matrisi kullanarak;

$$Q^n = \begin{pmatrix} u_{n+1} & u_n \\ u_n & u_{n-1} \end{pmatrix} \text{ ve } \det(Q) = -1$$

eşitliklerini elde etmiştir. Bu matris yardımıyla; Cassini formülü olarak bilinen,

$$u_{n+1}u_{n-1} - u_n{}^2 = (-1)^n$$

formülünü elde etmiştir. Ayrıca, bu matrisi genelleştirerek, Fibonacci ve Lucas sayılarının genelleştirmesine uygulamıştır.

Belçikalı matematikçi Eugene Charles Catalan ve Alman matematikçi E. Jacobsthal 19. yüzyılda tamsayı dizilerinin ilgili polinomları üzerine çalışmışlardır. Catalan, $n \geq 0$ için $F_0(x)=0$ ve $F_1(x)=1$ başlangıç koşulları ile verilen, $F_{n+2}(x)=xF_{n+1}(x)+F_n(x)$ rekürans bağıntısı ile tanımlanan $F_n(x)$ polinomları üzerine çalışırken, Jacobsthal, $n \geq 2$ için $J_0(x)=0$ ve $J_1(x)=1$ başlangıç koşulları ile verilen $J_n(x)=J_{n-1}(x)+2xJ_{n-2}(x)$ rekürans bağıntısı ile tanımlanan $J_n(x)$ Jacobsthal polinomları ve $j_0(x)=2$ ve $j_1(x)=1$ başlangıç koşulları ile verilen $j_n(x)=j_{n-1}(x)+2xj_{n-2}(x)$ rekürans bağıntısı ile tanımlanan $j_n(x)$ Jacobsthal-Lucas polinomları üzerine çalışmıştır.

BÖLÜM 2. TAM SAYI DİZİLERİ VE ÖZELLİKLERİ

Tanım 2.1 (Fibonacci Dizisi). $n \geq 0$ olmak üzere, $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ ve $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ lineer rekürans bağıntısı ile verilen $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ şeklindeki tam sayı dizisine Fibonacci dizisi denir. Fibonacci dizisinde, her n doğal sayısına karşılık gelen değere n. Fibonacci sayısı denir.

Fibonacci sayıları için Binet formülü;

$$F_n = \frac{\left(1+\sqrt{5}\right)^n - \left(1-\sqrt{5}\right)^n}{2^n \sqrt{5}}$$

biçimindedir. Fibonacci sayılarının üreteç fonksiyonu,

$$\sum_{i=1}^{\infty} F_i x^i = \frac{x}{1-x-x^2}$$

dır. Bu dizi için Simpson formülü,

$$F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$$

ve toplam formülü,

$$\sum_{i=1}^{n} F_i = F_{n+2} - 1$$

şeklinde verilir [14].

Tanım 2.2 (Lucas Dizisi). $n \geq 0$ olmak üzere, $L_0 = 2$, $L_1 = 1$ ve $L_{n+2} = L_{n+1} + L_n$ lineer rekürans bağıntısı ile verilen $\{L_n\}_{n=1}^{\infty}$ şeklindeki tam sayı dizisine Lucas dizisi denir. Lucas dizisinde, her n doğal sayısına karşılık gelen değere n. Lucas sayısı denir.

Lucas sayıları için Binet formülü;

$$L_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

şeklindedir. Lucas sayılarının üreteç fonksiyonu,

$$\sum_{i=1}^{\infty} L_i x^i = \frac{2x^2 + x}{1 - x - x^2}$$

dır ve Simpson formülü,

$$L_{n+1} L_{n-1} - L_n^2 = 5(-1)^{n-1}$$

olup, toplam formülü,

$$\sum_{i=1}^{n} L_i = L_{n+2} - 3$$

olarak verilir [14].

Tanım 2.3 (Pell Dizisi). $n \geq 0$ olmak üzere, $P_0 = 0$, $P_1 = 1$ ve $P_{n+2} = 2P_{n+1} + P_n$ lineer rekürans bağıntısı ile verilen $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ şeklindeki tam sayı dizisine Pell dizisi denir. Pell dizisinde, her n doğal sayısına karşılık gelen değere n. Pell sayısı denir.

Pell sayıları için Binet formülü;

$$P_n = \frac{\left(1+\sqrt{2}\right)^n - \left(1-\sqrt{2}\right)^n}{2\sqrt{2}}$$

şeklindedir. Pell sayılarının üreteç fonksiyonu,

$$\sum_{i=1}^{\infty} P_i x^i = \frac{x}{1-2x-x^2}$$

dır. Simpson formülü,

$$P_{n+1}P_{n-1} - P_n^2 = \left(-1\right)^n$$

ve toplam formülü,

$$\sum_{i=0}^{n} P_i = \frac{1}{2}\left(P_{n+1} + P_n - 1\right)$$

şeklinde verilir [19].

Tanım 2.4 (Pell-Lucas Dizisi). $n \geq 0$ olmak üzere, $Q_0 = 2$, $Q_1 = 2$ ve $Q_{n+2} = 2Q_{n+1} + Q_n$ lineer rekürans bağıntısı ile verilen $\left\{Q_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ şeklindeki tam sayı dizisine Pell-Lucas dizisi denir. Pell-Lucas dizisinde, her n doğal sayısına karşılık gelen değere n. Pell-Lucas sayısı denir.

Pell-Lucas sayıları için Binet formülü;

$$Q_n = \left(1-\sqrt{2}\right)^n + \left(1+\sqrt{2}\right)^n$$

biçimindedir. Pell-Lucas sayılarının üreteç fonksiyonu,

$$\sum_{i=0}^{\infty} Q_i x^i = \frac{2-2x}{1-2x-x^2}$$

dır. Simpson formülü,

$$Q_{n+1}Q_{n-1} - Q_n^2 = 8(-1)^{n-1}$$

ve toplam formülü,

$$\sum_{i=0}^{n} Q_i = \frac{1}{2}\left(Q_{n+1} + Q_n - 2\right)$$

şeklinde verilir [19] .

Tanım 2.5 (Jacobsthal Dizisi). $n \geq 0$ olmak üzere, $J_0 = 0$, $J_1 = 1$ ve $J_{n+2} = J_{n+1} + 2J_n$ lineer rekürans bağıntısı ile verilen $\{J_n\}_{n=1}^{\infty}$ şeklindeki tam sayı dizisine Jacobsthal dizisi denir. Jacobsthal dizisinde, her n doğal sayısına karşılık gelen değere $n.$ Jacobsthal sayısı denir.

Jacobsthal sayıları için Binet formülü;

$$J_n = \frac{1}{3}\left(2^n - (-1)^n\right)$$

biçimindedir. Jacobsthal sayılarının üreteç fonksiyonu,

$$\sum_{i=0}^{\infty} J_{i+1} x^i = \frac{1}{1-x-2x^2}$$

dır. Simpson formülü,

$$J_{n+1}J_{n-1} - J_n^2 = (-1)^n \, 2^{n-1}$$

ve toplam formülü,

$$\sum_{i=2}^{n} J_i = \frac{1}{2}\left(J_{n+2} - 3\right)$$

şeklinde verilir [7].

Tanım 2.6 (Jacobsthal-Lucas Dizisi). $n \geq 0$ olmak üzere, $j_0 = 2$, $j_1 = 1$ ve $j_{n+2} = j_{n+1} + 2j_n$ lineer rekürans bağıntısı ile verilen $\{j_n\}_{n=1}^{\infty}$ şeklindeki tam sayı dizisine Jacobsthal-Lucas dizisi denir. Bu dizide, her n doğal sayısına karşılık gelen değere $n.$ Jacobsthal-Lucas sayısı denir.

Jacobsthal-Lucas sayıları için Binet formülü;

$$j_n = 2^n + (-1)^n$$

şeklindedir. Jacobsthal-Lucas sayılarının üreteç fonksiyonu,

$$\sum_{i=0}^{\infty} j_{i+1} x^i = \frac{1+4x}{1-x-2x^2}$$

dır. Simpson formülü,

$$j_{n+1} j_{n-1} - j_n^2 = 9(-1)^n \, 2^{n-1}$$

ve toplam formülü,

$$\sum_{i=1}^{n} j_i = \frac{1}{2}\left(j_{n+2} - 5\right)$$

olarak verilir [7].

BÖLÜM 3. JACOBSTHAL VE JACOBSTHAL-LUCAS SAYILARI

Bu bölümde Jacobsthal ve Jacobsthal-Lucas sayıları ile ilgili teoremler ispatlarıyla birlikte verilecektir.

Teorem 3.1 [11]. Jacobsthal sayılarının ilk n tanesinin toplamı,

$$\sum_{i=2}^{n} J_i = \frac{1}{2}\left(J_{n+2} - 3\right)$$

dir.

İspat. İspatı n üzerinden tümevarım kullanarak yapalım. $n=2$ için $J_2 = \frac{1}{2}\left(J_4 - 3\right)$, $J_2 = 1$ ve $J_4 = 5$ olduğundan iddia doğrudur. $n=k$ için iddia doğru olsun. Yani , $\sum_{i=2}^{k} J_i = \frac{1}{2}\left(J_{k+2} - 3\right)$ olsun. Şimdi $n = k+1$ için iddianın doğruluğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=2}^{k+1} J_i = \sum_{i=2}^{k} J_i + J_{k+1} &= \frac{1}{2}\left(J_{k+2} - 3\right) + J_{k+1} \\
&= \frac{1}{2}\left(J_{k+2} + 2J_{k+1} - 3\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(J_{k+3} - 3\right)
\end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 3.2 [11]. Jacobsthal-Lucas sayılarının ilk n tanesinin toplamı,

$$\sum_{i=1}^{n} j_i = \frac{1}{2}\left(j_{n+2} - 5\right)$$

dir.

İspat. İspatı n üzerinden tümevarım kullanarak yapalım. $n=1$ için $j_1 = \frac{1}{2}\left(j_3 - 5\right)$, $j_1 = 1$ ve $j_3 = 7$ olduğundan iddia doğrudur. $n=k$ için iddia doğru olsun. Yani, $\sum_{i=1}^{k} j_i = \frac{1}{2}\left(j_{k+2} - 5\right)$ olsun. Şimdi $n = k+1$ için iddianın doğruluğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k} j_i = \sum_{i=1}^{k} j_i + j_{k+1} &= \frac{1}{2}\left(j_{k+2} - 5\right) + j_{k+1} \\
&= \frac{1}{2}\left(j_{k+2} + 2j_{k+1} - 5\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(j_{k+3} - 5\right)
\end{aligned}$$

elde edilir.

Çift indisli Jacobsthal sayılarının toplamı, aşağıdaki teorem yardımıyla verilebilir.

Teorem 3.3 [11]. Herhangi bir n pozitif tam sayısı için,

$$\sum_{i=0}^{n} J_{2i} = \frac{1}{3}\left(J_{2n+2} - n - 1\right)$$

dir.

İspat. Jacobsthal dizisi için verilen Binet formülü kullanılarak,

$$\sum_{i=0}^{n} J_{2i} = \sum_{i=0}^{n}\left(2^{2i}-(-1)^{2i}\right)\Big/3$$
$$=\frac{1}{3}\left[\frac{2^{2n+2}-(-1)^{2n+2}}{3}-(n+1)\right]$$
$$=\frac{1}{3}\left(J_{2n+2}-n-1\right)$$

elde edilir.

Çift indisli Jacobsthal-Lucas sayılarının toplamı, aşağıdaki teorem yardımıyla verilebilir.

Teorem 3.4 [11]. J_n ve j_n sırası ile n. Jacobsthal ve Jacobsthal-Lucas sayısı ise,

$$\sum_{i=1}^{n} j_{2i} = J_{2n+2}+n+1$$
$$=\frac{1}{2}\left(5J_{2n}+j_{2n}\right)+n+1$$
$$=\frac{1}{2}\left[5j_nJ_n+j_n^2+(-2)^{n+1}\right]+n+1$$

eşitlikleri gerçeklenir.

İspat. Eşitliğin sol yanındaki Jacobsthal-Lucas sayısını Binet formülünü kullanarak ifade edip, toplamın değeri geometrik toplam olarak kullanıldığında,

$$\sum_{i=1}^{n} j_{2i} = \sum_{i=1}^{n}\left(2^{2i}+(-1)^{2i}\right)$$

$$=\frac{\left(2^2\right)^{n+1}-1}{2^2-1}+n+1$$

$$=J_{2n+2}+n+1$$

elde edilir. $J_{2n+2}=\frac{1}{2}\left(J_{2n}j_2+J_2j_{2n}\right)$ değeri yerine yazılırsa,

$$\sum_{i=1}^{n} j_{2i}=\frac{1}{2}\left(5J_{2n}+j_{2n}\right)+n+1$$

bulunur. Öte yandan, $J_{2n}=J_nj_n$ ve $j_{2n}=j_n^2+\left(-2\right)^{n+1}$ eşitlikleri kullanılarak,

$$\sum_{i=1}^{n} j_{2i}=\frac{1}{2}\left[5j_nJ_n+j_n^2+\left(-2\right)^{n+1}\right]+n+1$$

elde edilir.

Tek indisli Jacobsthal sayılarının toplamı, aşağıdaki teorem yardımıyla verilebilir.

Teorem 3.5 [11]. Herhangi bir n pozitif tam sayısı için,

$$\sum_{i=0}^{n} J_{2i+1}=\frac{1}{3}\left(2J_{2n+2}+n+1\right)$$

dir.

İspat. Binet formülü ve geometrik seri toplam formülünden,

$$\sum_{i=0}^{n} J_{2i+1}=\sum_{i=0}^{n}\left(2^{2i+1}-\left(-1\right)^{2i+1}\right)\Big/3$$

$$=\frac{1}{3}\left[2\cdot\frac{2^{2n+2}-1}{2^2-1}-(-1)(n+1)\right]$$

$$=\frac{1}{3}\left(2J_{2n+2}+n+1\right)$$

elde edilir.

Tek indisli Jacobsthal-Lucas sayılarının toplamı, aşağıdaki teorem yardımıyla verilebilir.

Teorem 3.6 [11]. J_n ve j_n sırasıyla n. Jacobsthal ve Jacobsthal-Lucas sayısı ise,

$$\sum_{i=0}^{n} j_{2i+1} = 2J_{2n+2}-n-1$$

$$=5J_{2n}+j_{2n}-n-1$$

$$=5J_n j_n + j_n^2 + (-2)^{n+1}-n-1$$

eşitlikleri sağlanır.

İspat. Binet formülü kullanılarak toplamın içindeki Jacobsthal Lucas sayısının değeri yazıldığında,

$$\sum_{i=0}^{n} j_{2i+1} = \sum_{i=0}^{n}\left(2^{2i+1}+(-1)^{2i+1}\right)$$

$$=2\left[\frac{2^{2n+2}-(-1)^{2n+2}}{3}\right]-(n+1)$$

$$=2J_{2n+2}-n-1$$

elde edilir. Bu son eşitlikte, $J_{2n+2}=\frac{1}{2}\left(J_{2n}j_2+J_2 j_{2n}\right)$ eşitliği kullanıldığında,

$$\sum_{i=0}^{n} j_{2i+1} = 5J_{2n} + j_{2n} - n - 1$$

ifadesine ulaşılır. $J_{2n} = J_n j_n$ ve $j_{2n} = j_n^2 + (-2)^{n+1}$ değerleri yerlerine yazılırsa,

$$\sum_{i=0}^{n} j_{2i+1} = 5J_n j_n + j_n^2 + (-2)^{n+1} - n - 1$$

eşitliği elde edilir.

Jacobsthal sayılarının kareler toplamı, aşağıdaki teorem yardımıyla verilebilir.

Teorem 3.7 [11]. Herhangi bir n pozitif tam sayısı için,

$$\sum_{i=0}^{n} J_i^2 = \frac{1}{9}\left[J_{2n+2} + 2(-1)^{n+1} J_{n+1} + n + 1 \right]$$

eşitliği geçerlidir.

İspat. Toplamın içindeki ifade Binet formülü kullanılarak yazılırsa,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n} J_i^2 &= \sum_{i=0}^{n} \left[\frac{2^i - (-1)^i}{3} \right]^2 \\
&= \frac{1}{9}\left[\left(\frac{2^{2n+2} - (-1)^{2n+2}}{3} \right) + 2(-1)^{n+1} \left(\frac{2^{n+1} - (-1)^{n+1}}{3} \right) + n + 1 \right] \\
&= \frac{1}{9}\left[J_{2n+2} + 2(-1)^{n+1} J_{n+1} + n + 1 \right]
\end{aligned}$$

olduğundan ispat tamamlanır.

Jacobsthal-Lucas sayılarının kareler toplamı, aşağıdaki teorem yardımıyla verilebilir.

Teorem 3.8 [11]. J_n ve j_n sırasıyla $n.$ Jacobsthal ve Jacobsthal-Lucas sayısı ise,

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n} j_i^2 &= J_{2n+2} + 2(-1)^{n+1} J_{n+1} + n + 1 \\ &= \frac{1}{2}(5J_{2n} + j_{2n}) + 2(-1)^{n+1} J_{n+1} + n + 1 \\ &= \frac{1}{2}\left[5J_n j_n + j_n^2 + (-2)^{n+1}\right] + 2(-1)^{n+1} J_{n+1} + n + 1\end{aligned}$$

eşitlikleri gerçeklenir.

İspat. Toplamın içindeki ifade Binet formülünü kullanarak yazıldığında,

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n} j_i^2 &= \sum_{i=0}^{n}\left(2^i + (-1)^i\right)^2 \\ &= \left[\frac{2^{2n+2} - (-1)^{2n+2}}{3}\right] + 2(-1)^{n+1}\left[\frac{2^{n+1} - (-1)^{n+1}}{3}\right] + n + 1 \\ &= J_{2n+2} + 2(-1)^{n+1} J_{n+1} + n + 1\end{aligned}$$

olur. Bu son eşitlikte, $J_{2n+2} = \frac{1}{2}(J_{2n} j_2 + J_2 j_{2n})$ olduğu kullanılarak,

$$\sum_{i=0}^{n} j_i^2 = \frac{1}{2}(5J_{2n} + j_{2n}) + 2(-1)^{n+1} J_{n+1} + n + 1$$

bulunur. $J_{2n} = J_n j_n$ ve $j_{2n} = j_n^2 + (-2)^{n+1}$ eşitlikleri yerlerine yazılırsa,

$$\sum_{i=0}^{n} j_i^2 = \frac{1}{2}\left[5J_n j_n + j_n^2 + \left(-2\right)^{n+1}\right] + 2\left(-1\right)^{n+1} J_{n+1} + n + 1$$

elde edilir.

Teorem 3.9 [11]. Her n doğal sayısı için,

$$\sum_{i=0}^{n} J_{4i+1} = \frac{1}{15}\left(2J_{4n+4} + 5n + 5\right)$$

dir.

İspat. Toplam içindeki Jacobsthal sayısının Binet formülü kullanılarak, geometrik seri toplam değeri yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n} J_{4i+1} &= \sum_{i=0}^{n} \frac{2^{4i+1} - \left(-1\right)^{4i+1}}{3} \\
&= \frac{2}{3}\sum_{i=0}^{n} 2^{4i} + \frac{1}{3}\sum_{i=0}^{n} \left(-1\right)^{4i} \\
&= \frac{2}{3} \cdot \frac{\left(2^4\right)^{n+1} - 1}{2^4 - 1} + \frac{1}{3}\left(n+1\right) \\
&= \frac{2}{15} \cdot \frac{2^{4n+4} - \left(-1\right)^{4n+4}}{3} + \frac{1}{3}\left(n+1\right) \\
&= \frac{1}{15}\left(2J_{4n+4} + 5n + 5\right)
\end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 3.10 [11]. Herhangi bir n pozitif tam sayısı için,

$$\sum_{i=0}^{n} j_{4i+1} = \frac{2}{5} J_{4n+4} - n - 1$$

eşitliği mevcuttur.

İspat. Jacobsthal ve Jacobsthal-Lucas sayılarının Binet formülleri kullanılarak,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n} j_{4i+1} &= \sum_{i=0}^{n} \left(2^{4i+1} + (-1)^{4i+1}\right) \\
&= 2\sum_{i=0}^{n} \left(2^4\right)^i - \sum_{i=0}^{n} (-1)^{4i} \\
&= 2 \cdot \frac{\left(2^4\right)^{n+1} - 1}{2^4 - 1} - n - 1 \\
&= \frac{2}{5} J_{4n+4} - n - 1
\end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 3.11 [11]. Her n doğal sayısı için,

$$\sum_{i=0}^{n} J_{4i+3} = \frac{1}{15}\left(8J_{4n+4} + 5n + 5\right)$$

dir.

İspat. Toplam içindeki Jacobsthal sayısının Binet formülü yazılıp, rekürans bağıntısı kullanılarak geometrik seri toplam değeri yerine yazılırsa,

$$\sum_{i=0}^{n} J_{4i+3} = \sum_{i=0}^{n} \frac{2^{4i+3} - (-1)^{4i+3}}{3}$$

$$=\frac{2^3}{3}\sum_{i=0}^{n}2^{4i}+\frac{1}{3}\sum_{i=0}^{n}(-1)^{4i}$$

$$=\frac{8}{3}\cdot\frac{\left(2^4\right)^{n+1}-1}{2^4-1}+\frac{1}{3}(n+1)$$

$$=\frac{8}{15}\cdot\frac{2^{4n+4}-(-1)^{4n+4}}{3}+\frac{1}{3}(n+1)$$

$$=\frac{1}{15}\left(8J_{4n+4}+5n+5\right)$$

elde edilir.

Teorem 3.12 [11]. Herhangi bir n pozitif tam sayısı için,

$$\sum_{i=0}^{n}j_{4i+3}=\frac{8}{5}J_{4n+4}-n-1$$

dir.

İspat. Jacobsthal ve Jacobsthal-Lucas sayıları için verilen Binet formülleri kullanılarak,

$$\sum_{i=0}^{n}j_{4i+3}=\sum_{i=0}^{n}\left(2^{4i+3}+(-1)^{4i+3}\right)$$

$$=2^3\sum_{i=0}^{n}\left(2^4\right)^i-\sum_{i=0}^{n}(-1)^{4i}$$

$$=2^3\cdot\frac{\left(2^4\right)^{n+1}-1}{2^4-1}-n-1$$

$$=\frac{8}{5}J_{4n+4}-n-1$$

elde edilir.

Teorem 3.13 [12]. Her n pozitif tam sayısı için $F=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ ise,

$$F^{n}=\begin{pmatrix}J_{n+1} & 2J_{n}\\ J_{n} & 2J_{n-1}\end{pmatrix}$$

dir.

İspat. İspatı n üzerinden tümevarım kullanarak yapalım. $n=1$ için $F=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}J_2 & 2J_1\\ J_1 & 2J_0\end{pmatrix}$ olup iddia doğrudur. $n=k$ için iddia doğru olsun. Yani, $F^{k}=\begin{pmatrix}J_{k+1} & 2J_{k}\\ J_{k} & 2J_{k-1}\end{pmatrix}$ olsun. $n=k+1$ için iddianın doğruluğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}F^{k+1}=F^{k}.F&=\begin{pmatrix}J_{k+1} & 2J_{k}\\ J_{k} & 2J_{k-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}J_{k+1}+2J_{k} & 2J_{k+1}\\ J_{k}+2J_{k-1} & 2J_{k}\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}J_{k+2} & 2J_{k+1}\\ J_{k+1} & 2J_{k}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

elde edilir.

Şimdi Jacobsthal sayıları için, Cassini formülünü vereceğiz.

Sonuç 3.1 [12]. $n\geq 1$ için $J_{n+1}J_{n-1}-J_{n}^{2}=\left(-1\right)^{n}2^{n-1}$ dir.

İspat. Teorem 3.13'e göre $F=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ ise $\det\left(F\right)=-2$ dir. Ayrıca,

$$\left(-2\right)^{n}=\left(\det F\right)^{n}=\det\left(F^{n}\right)=\begin{vmatrix} J_{n+1} & 2J_{n} \\ J_{n} & 2J_{n-1} \end{vmatrix}$$

olduğundan,

$$2J_{n+1}J_{n-1}-2J_{n}^{2}=\left(-2\right)^{n}$$

bulunur. Bu son eşitlikte gerekli sadeleştirmeler yapılarak,

$$J_{n+1}J_{n-1}-J_{n}^{2}=\left(-1\right)^{n}2^{n-1}$$

elde edilir.

Teorem 3.14 [13]. Her n pozitif tam sayısı için $E=\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ ise,

$$E^{n}=\begin{cases} 3^{n}\begin{pmatrix} J_{n+1} & 2J_{n} \\ J_{n} & 2J_{n-1} \end{pmatrix}, & n \ \ \text{çift} \\ 3^{n-1}\begin{pmatrix} j_{n+1} & 2j_{n} \\ j_{n} & 2j_{n-1} \end{pmatrix}, & n \ \ \text{tek} \end{cases}$$

dir.

İspat. İspat n üzerinden, n'yi tek veya çift sayı seçerek ayrı ayrı tümevarım metodu ile yapılacaktır.

İlk olarak, n tek sayı olsun. $n=1$ için $E=\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} j_{2} & 2j_{1} \\ j_{1} & 2j_{0} \end{pmatrix}$ olup iddia doğrudur.

$n = k$ için iddia doğru olsun. Yani, $E^k = 3^{k-1}\begin{pmatrix} j_{k+1} & 2j_k \\ j_k & 2j_{k-1} \end{pmatrix}$ olsun. $n = k+2$ için iddianın doğruluğunu gösterelim.

$$E^{k+2} = E^k.E^2 = 3^{k-1}\begin{pmatrix} j_{k+1} & 2j_k \\ j_k & 2j_{k-1} \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 27 & 18 \\ 9 & 18 \end{pmatrix}$$

$$= 3^{k-1}\begin{pmatrix} j_{k+1} & 2j_k \\ j_k & 2j_{k-1} \end{pmatrix}.3^2\begin{pmatrix} J_3 & 2J_2 \\ J_2 & 2J_1 \end{pmatrix}$$

$$= 3^{k+1}\begin{pmatrix} j_{k+3} & 2j_{k+2} \\ j_{k+2} & 2j_{k+1} \end{pmatrix}$$

elde edilir.

İkinci olarak, n çift sayı olsun. $n = 2$ için $E^2 = \begin{pmatrix} 27 & 18 \\ 9 & 18 \end{pmatrix} = 3^2\begin{pmatrix} J_3 & 2J_2 \\ J_2 & 2J_1 \end{pmatrix}$ olup iddia doğrudur. $n = k$ için iddia doğru olsun. Yani, $E^k = 3^k\begin{pmatrix} J_{k+1} & 2J_k \\ J_k & 2J_{k-1} \end{pmatrix}$ olsun. $n = k+2$ için iddianın doğruluğunu gösterelim.

$$E^{k+2} = E^k.E^2 = 3^k\begin{pmatrix} J_{k+1} & 2J_k \\ J_k & 2J_{k-1} \end{pmatrix}.3^2\begin{pmatrix} J_3 & 2J_2 \\ J_2 & 2J_1 \end{pmatrix}$$

$$= 3^{k+2}\begin{pmatrix} J_{k+2} & 2J_{k+1} \\ J_{k+1} & 2J_k \end{pmatrix}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 3.2 [13]. Teorem 3.14’te verilen E^n matrisi ve $n \geq 1$ sayısı için,

$$\det\left(E^n\right)=\begin{cases}\left(-1\right)^n 3^{2n}2^n \ , & n \ \ çift\\ \left(-1\right)^{n+1} 3^{2n}2^n, & n \ \ tek\end{cases}$$

ve

$$J_{n+1}J_{n-1}-J_n^2=\left(-1\right)^n 2^{n-1}$$

$$j_{n+1}j_{n-1}-j_n^2=9\left(-1\right)^{n+1} 2^{n-1}$$

özellikleri geçerlidir.

İspat. İlk özellik için n tek ve çift sayı seçilerek n üzerinden tümevarım kullanılacaktır.

İlk olarak n tek sayı olsun. $n=1$ için $\det\left(E\right)=3^2 2^1$ olduğundan iddia doğrudur.

$n=k$ için iddia doğru olsun. Yani, $\det\left(E^k\right)=3^{2k}2^k$ olsun. $n=k+2$ için iddianın doğruluğunu gösterelim.

$$\det\left(E^{k+2}\right)=\det\left(E^k\right)\det\left(E^2\right)=3^{2k+4}2^{k+2}$$

elde edilir.

Şimdi n'yi çift sayı olarak alalım. $n=2$ için $\det\left(E^2\right)=3^4 2^2$ olup iddia doğrudur.

$n=k$ için iddia doğru olsun. Yani, $\det\left(E^k\right)=3^{2k}2^k$ olsun. $n=k+2$ için iddianın doğruluğunu gösterelim.

$$\det\left(E^{k+2}\right)=\det\left(E^k\right)\det\left(E^2\right)=3^{2k+4}2^{k+2}$$

bulunur.

Diğer iki özdeşlik ise, E ve E^n matrislerinin determinant özellikleri kullanılarak,

$$\det\left(E^n\right)=\begin{cases}(-1)^n 3^{2n}2^n = 3^{2n}\left(2J_{n+1}J_{n-1}-2J_n{}^2\right) & , \ n \ \textit{çift} \\ (-1)^{n+1} 3^{2n}2^n = 3^{2n-2}\left(2j_{n+1}j_{n-1}-2j_n{}^2\right), & n \ \textit{tek}\end{cases}$$

olduğundan, n’nin tek veya çift olmasına göre elde edilir. Fakat kolayca görülebilir ki her iki eşitlik her n tam sayısı için geçerlidir.

Teorem 3.15 [13]. Pozitif n ve m sayıları için,

$$J_{n+m}=J_mJ_{n+1}+2J_{m-1}J_n$$

dir.

İspat. Teorem 3.13’e göre $F=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ ise $F^{m+n}=F^m.F^n$ olduğundan,

$$\begin{pmatrix}J_{m+n+1} & 2J_{m+n}\\ J_{m+n} & 2J_{m+n-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}J_{m+1} & 2J_m\\ J_m & 2J_{m-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}J_{n+1} & 2J_n\\ J_n & 2J_{n-1}\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}J_{m+1}J_{n+1}+2J_mJ_n & 2\left(J_{m+1}J_n+2J_mJ_{n-1}\right)\\ J_mJ_{n+1}+2J_{m-1}J_n & 2\left(J_nJ_m+2J_{n-1}J_{m-1}\right)\end{pmatrix}$$

bulunur. Bu matrisler eşit olduğundan karşılıklı elemanları da birbirine eşit olacaktır. O halde,

$$J_{n+m}=J_mJ_{n+1}+2J_{m-1}J_n$$

elde edilir.

Sonuç 3.3 [13]. Pozitif n tam sayısı için,

$$J_{2n} = J_n J_{n+1} + 2J_n J_{n-1}$$

dir.

İspat. Teorem 3.15'te $m = n$ alınırsa, $J_{n+n} = J_{2n} = J_n J_{n+1} + 2J_n J_{n-1}$ elde edilir.

Sonuç 3.4 [13]. Pozitif n tam sayısı için,

$$J_{2n+1} = J_{n+1}^2 + 2J_n^2$$

dir.

İspat. Teorem 3.15'te $m = n+1$ alınırsa,

$$\begin{aligned} J_{n+1+n} = J_{2n+1} &= J_{n+1} J_{n+1} + 2J_{n+1-1} J_n \\ &= J_{n+1}^2 + 2J_n^2 \end{aligned}$$

bulunur.

Teorem 3.16 [11]. j_n, n. Jacobsthal-Lucas sayısı ise,

$$j_{m+n} = j_m j_n - (-2)^n j_{m-n}$$

dir.

İspat. Eşitliğin sol yanındaki Jacobsthal-Lucas sayısının Binet formülü kullanılarak,

$$j_{m+n} = 2^{m+n} + (-1)^{m+n}$$
$$= \left(2^m + (-1)^m\right)\left(2^n + (-1)^n\right) - 2^n (-1)^n \left(2^{m-n} + (-1)^{m-n}\right)$$
$$= j_m j_n - (-2)^n j_{m-n}$$

elde edilir.

Sonuç 3.5 [11]. j_n, n. Jacobsthal-Lucas sayısı olmak üzere,

$$j_{2n} = j_n^2 + (-2)^{n+1}$$

dir.

İspat. Teorem 3.16'da m yerine n alınarak ispat kolayca gösterilebilir.

Sonuç 3.6 [11]. j_n, n. Jacobsthal-Lucas sayısı ise,

$$j_{2n+1} = j_n j_{n+1} - (-2)^n$$

dir.

İspat. Teorem 3.16'da m yerine $n+1$ alındığında istenen elde edilir.

Teorem 3.17 [13]. Pozitif n ve m sayıları için,

$$(-1)^n 2^{n-1} J_{m-n} = J_m J_{n-1} - J_{m-1} J_n$$

eşitliği geçerlidir.

İspat. Jacobsthal F matrisi için $F^{m+n} = F^m.F^n$ eşitliğinin sağlandığı gösterilmişti. F^{-n} matrisi hesaplanacak olursa,

$$F^{-n} = \frac{1}{(-2)^n}\begin{pmatrix} 2J_{n-1} & -2J_n \\ -J_n & J_{n+1} \end{pmatrix}$$

elde edilir. Dolayısıyla $F^{m-n} = F^m.F^{-n}$ matris eşitliğinden,

$$\begin{pmatrix} J_{m-n+1} & 2J_{m-n} \\ J_{m-n} & 2J_{m-n-1} \end{pmatrix} = \frac{1}{(-2)^n}\begin{pmatrix} 2(J_{m+1}J_{n-1} - J_mJ_n) & -2(J_{m+1}J_n - J_mJ_{n+1}) \\ 2(J_mJ_{n-1} - J_{m-1}J_n) & -2(J_mJ_n - J_{m-1}J_{n+1}) \end{pmatrix}$$

olur. Bu iki matrisin karşılıklı elemanları eşitlendiğinde, istenen elde edilir.

Teorem 3.18 [13]. Herhangi m ve n tam sayıları için,

$$(-1)^{n+1}2^{n-1}j_{m-n} = J_mj_{n-1} - J_{m-1}j_n$$

$$(-1)^n2^{n-1}J_{m-n} = J_mJ_{n-1} - J_{m-1}J_n$$

$$9(-1)^{n+1}2^{n-1}J_{m-n} = j_{n-1}j_{m+1} - j_nj_m$$

eşitlikleri sağlanır.

İspat. Jacobsthal-Lucas E matrisi için E^{-n} matrisi hesaplandığında,

$$E^{-n} = \begin{cases} \dfrac{(-1)^n}{6}\begin{pmatrix} 2J_{n-1} & -2J_n \\ -J_n & J_{n+1} \end{pmatrix}, & n \text{ çift} \\[2ex] \dfrac{(-1)^{n+1}}{3.6^n}\begin{pmatrix} 2j_{n-1} & -2j_n \\ -j_n & j_{n+1} \end{pmatrix}, & n \text{ tek} \end{cases}$$

olur. $E^{m-n} = E^{m}.E^{-n}$ matris eşitliğinde karşılıklı elemanlar birbirine eşitlenerek istenen eşitlikler elde edilir.

Teorem 3.19 [11]. J_n ve j_n sırasıyla n. Jacobsthal ve n. Jacobsthal-Lucas sayısı olmak üzere,

$$J_{m+n} = J_m j_n - (-2)^n J_{m-n}$$

dir.

İspat. Eşitliğin sol yanındaki Jacobsthal sayısı için Binet formülü kullanılarak,

$$\begin{aligned} J_{m+n} &= \frac{2^{m+n} - (-1)^{m+n}}{3} \\ &= \frac{2^m - (-1)^m}{3}\left(2^n + (-1)^n\right) - 2^n(-1)^n \frac{\left(2^{m-n} - (-1)^{m-n}\right)}{3} \\ &= J_m j_n - (-2)^n J_{m-n} \end{aligned}$$

elde edilir.

Sonuç 3.7 [11]. J_n ve j_n sırasıyla n. Jacobsthal ve n. Jacobsthal-Lucas sayısı olmak üzere,

$$J_{m-n} = (-2)^{-n}\left(J_m j_n - J_{m+n}\right)$$

dir.

İspat. Teorem 3.19'da gerekli yer değiştirmeler yapılarak ispat kolayca tamamlanır.

Sonuç 3.8 [11]. J_n ve j_n sırasıyla $n.$Jacobsthal ve $n.$ Jacobsthal-Lucas sayısı olmak üzere,

$$J_{2n+1} = J_{n+1} j_n - (-2)^n = J_n j_{n+1} + (-2)^n$$

dir.

İspat. Teorem 3.19'da $m = n+1$ alınırsa,

$$J_{2n+1} = J_{n+1} j_n - (-2)^n$$

olduğu görülür. Aynı eşitlikte $m = n$ ve $n = n+1$ alınırsa,

$$J_{2n+1} = J_n j_{n+1} + (-2)^n$$

bulunur. Bu iki eşitlikten istenen elde edilir.

Sonuç 3.9 [11]. J_n ve j_n sırasıyla $n.$Jacobsthal ve $n.$ Jacobsthal-Lucas sayısı olmak üzere,

$$J_{2n} = J_n j_n$$

dir.

İspat. Teorem 3.19'da $m = n$ alınırsa ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.20 [12]. n tam sayı olmak üzere, Jacobsthal sayılarının Binet formülü,

$$J_n = \frac{2^n - (-1)^n}{3}$$

dir.

İspat. Jacobsthal F -matrisi, $F = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ olmak üzere, bu matrisin karakteristik denklemi,

$$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$$

dir. Bu matrisin özdeğerleri de,

$$\lambda_1 = 2 \text{ ve } \lambda_2 = -1$$

dir. Bu öz değerlere karşılık gelen öz vektörler sırasıyla,

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ ve } v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

şeklindedir. Şimdi F matrisinin özdeğerlerinden oluşturulan $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ köşegen matrisi ile öz vektörlerinden oluşturulan $A = \begin{pmatrix} v_1^T \\ v_2^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ matrisi kullanılarak, F matrisinin $D = A^{-1}FA$ şeklindeki köşegenleştirmesini göz önüne alalım. $D = A^{-1}FA$ eşitliği, soldan A matrisi ile, sağdan A^{-1} matrisi ile çarpılırsa $F = ADA^{-1}$ olur. Buradan F ve D matrislerinin benzer olduğu söylenebilir. Benzer matrislerin kuvvetleri de birbirine benzer olduğundan ve köşegen matrislerin $D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix}$

özelliğinden $F^n = AD^n A^{-1}$ yazılabilir. O halde, $F^n = \begin{pmatrix} J_{n+1} & 2J_n \\ J_n & 2J_{n-1} \end{pmatrix}$ ve

$A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ olduğundan, bu değerler son eşitlikte yerlerine yazılırsa,

$$F^n = \begin{pmatrix} J_{n+1} & 2J_n \\ J_n & 2J_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix} . \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

olup, matris çarpımı işlemi yapıldığında,

$$\begin{pmatrix} J_{n+1} & 2J_n \\ J_n & 2J_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{2^{n+1} + (-1)^n}{3} & 2\dfrac{2^n - (-1)^n}{3} \\ \dfrac{2^n - (-1)^n}{3} & 2\dfrac{2^{n-1} + (-1)^n}{3} \end{pmatrix}$$

bulunur. Bu matrislerin karşılıklı elemanları birbirine eşit olduğundan,

$$J_n = \frac{2^n - (-1)^n}{3}$$

elde edilir.

Teorem 3.21 [13]. n tam sayı olmak üzere, Jacobsthal-Lucas sayılarının Binet formülü,

$$j_n = 2^n + (-1)^n$$

dir.

İspat. Jacobsthal-Lucas E-matrisi, $E=\begin{pmatrix}5 & 2\\ 1 & 4\end{pmatrix}$ olmak üzere E-matrisinin karakteristik denklemi,

$$\lambda^2-9\lambda+18=0$$

biçimindedir. Bu matrisin özdeğerleri de,

$$\lambda_1=6 \text{ ve } \lambda_2=3$$

dür. Bu öz değerlere karşılık gelen öz vektörler sırası ile

$$v_1=\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix} \text{ ve } v_2=\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}$$

şeklindedir. Şimdi, E matrisinin özdeğerlerinden oluşturulan $D=\begin{pmatrix}6 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ köşegen matrisi ile öz vektörlerinden oluşturulan $A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ matrisi kullanılarak, E matrisinin $D=A^{-1}EA$ şeklindeki köşegenleştirmesini göz önüne alalım. $D=A^{-1}EA$ eşitliği soldan A matrisi ile, sağdan A^{-1} matrisi ile çarpılırsa, $E=ADA^{-1}$ olur. Buradan, E ve D matrislerinin benzer olduğu söylenebilir. Benzer matrislerin kuvvetlerinin de birbirine benzer olduğu ve köşegen matrislerin $D^n=3^n\begin{pmatrix}2^n & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ özelliği kullanılarak $E^n=AD^nA^{-1}$ yazabiliriz. Aynı zamanda $E^n=\begin{pmatrix}j_{n+1} & 2j_n\\ j_n & 2j_{n-1}\end{pmatrix}$ ve $A^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$ olup, bu değerler son eşitlikte yerlerine yazıldığında,

$$E^n = \begin{pmatrix} j_{n+1} & 2j_n \\ j_n & 2j_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} .3^n \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} . \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

olur. Gerekli işlemler yapılırsa,

$$\begin{pmatrix} j_{n+1} & 2j_n \\ j_n & 2j_{n-1} \end{pmatrix} = 3^{n-1} \begin{pmatrix} 2^{n+1}+1 & 2\left(2^n-1\right) \\ 2^n-1 & 2\left(2^{n-1}+1\right) \end{pmatrix}$$

elde edilir. Bu iki matrisin karşılıklı elemanları birbirine eşit olduğundan,

$$j_n = 2^n + (-1)^n$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.22 [11]. $F^n = \begin{pmatrix} J_{n+1} & 2J_n \\ J_n & 2J_{n-1} \end{pmatrix}$ matrisinin özdeğerleri,

$$\lambda_{1,2}^n = \left(j_n \pm 3J_n\right)/2$$

dir.

İspat. İlk olarak $j_n = J_{n+1} + 2J_{n-1}$ ve $J_{n+1}J_{n-1} - J_n^2 = (-1)^n 2^{n-1}$ eşitliklerini kullanarak F^n matrisinin karakteristik denklemini,

$$\begin{aligned} \det\left(F^n - \lambda^n I\right) &= \lambda^{2n} - \left(J_{n+1} + 2J_{n-1}\right)\lambda^n + 2\left(J_{n+1}J_{n-1} - J_n^2\right) \\ &= \lambda^{2n} - j_n.\lambda^n + (-2)^n \end{aligned}$$

şeklinde yazabiliriz. Dolayısıyla F^n matrisinin karakteristik polinomu $\lambda^{2n} - j_n.\lambda^n + (-2)^n = 0$ şeklinde olup, bu denklemin kökleri $\lambda_{1,2}^n = \dfrac{j_n \pm \sqrt{j_n^{\,2} - 4(-2)^n}}{2}$ olur. $\sqrt{j_n^2 - 4(-2)^n} = 9J_n^2$ olduğundan, $\lambda_{1,2}^n = (j_n \pm 3J_n)/2$ elde edilir.

Sonuç olarak Teorem 3.20'de bahsettiğimiz gibi Jacobsthal F-matrisinin öz değerleri $\lambda_1 = 2$ ve $\lambda_2 = -1$ olmak üzere,

$$\lambda_1^n = (j_n + 3J_n)/2 \text{ ve } \lambda_2^n = (j_n - 3J_n)/2$$

dir. Bu iki eşitlikten,

$$J_n = \frac{2^n - (-1)^n}{3} \text{ ve } j_n = 2^n + (-1)^n$$

Binet formülleri elde edilir.

Teorem 3.23 [11]. J_n, *n.* Jacobsthal sayısı olmak üzere , her pozitif k tam sayısı için,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{J_{n+1}}{J_n} = 2 \text{ ve } \lim_{n\to\infty} \frac{J_{n+k}}{J_n} = 2^k$$

dir.

İspat. Jacobsthal sayıları için Binet formülü kullanılarak,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{J_{n+1}}{J_n}=\frac{\left(2^{n+1}-(-1)^{n+1}\right)\big/3}{\left(2^{n}-(-1)^{n}\right)\big/3}=2$$

olduğu görülür.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{J_{n+k}}{J_n}&=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{J_{n+k}}{J_{n+k-1}}\cdot\frac{J_{n+k-1}}{J_{n+k-2}}\cdots\frac{J_{n+1}}{J_n}\right)\\&=\lim_{n\to\infty}(2.2\ldots2)\\&=\lim_{n\to\infty}2^k=2^k\end{aligned}$$

olarak bulunur.

Teorem 3.24 [11]. j_n, n. Jacobsthal-Lucas sayısı olmak üzere, her pozitif k tam sayısı için,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{j_{n+1}}{j_n}=2 \text{ ve } \lim_{n\to\infty}\frac{j_{n+k}}{j_n}=2^k$$

dir.

İspat. Jacobsthal-Lucas sayıları için Binet formülü kullanılarak,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{j_{n+1}}{j_n}=\frac{2^{n+1}+(-1)^{n+1}}{2^{n}+(-1)^{n}}=2$$

olduğu görülür.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{j_{n+k}}{j_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{j_{n+k}}{j_{n+k-1}}\cdot\frac{j_{n+k-1}}{j_{n+k-2}}\cdots\frac{j_{n+1}}{j_n}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}(2.2\ldots2)$$

$$=\lim_{n\to\infty}2^k=2^k$$

olarak bulunur.

Teorem 3.25 [11]. Pozitif n tam sayıları için,

i) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^{n-1}}{J_{n-1}J_n}=1$

ii) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^{n-1}}{J_{n+1}J_n}=\frac{1}{2}$

iii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2J_{n-1}}{J_{n+1}J_n}=1$

ifadeleri geçerlidir.

İspat. i) Jacobsthal sayılarının Simpson formülü toplam ifadesinde yerine yazılarak,

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^{n-1}}{J_{n-1}J_n}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{J_{n+1}J_{n-1}-J_n^2}{J_{n-1}J_n}$$

$$=\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{J_{n+1}}{J_n}-\frac{J_n}{J_{n-1}}\right)$$

bulunur. Bu serinin kısmi toplamlar dizisi alınarak,

$$S_k=\sum_{n=2}^{k}\left(\frac{J_{n+1}}{J_n}-\frac{J_n}{J_{n-1}}\right)$$

$$=\left(\frac{J_2}{J_1}-\frac{J_1}{J_0}\right)+\left(\frac{J_3}{J_2}-\frac{J_2}{J_1}\right)+\cdots+\left(\frac{J_{k+1}}{J_k}-\frac{J_k}{J_{k-1}}\right)$$

$$=\left(\frac{J_{k+1}}{J_k}-\frac{1}{1}\right)$$

elde edilir. Bu dizinin limiti ve ardışık terimler oranından,

$$\lim_{k\to\infty} S_k = \lim_{k\to\infty}\left(\frac{J_{k+1}}{J_k}-1\right)$$

$$=\lim_{k\to\infty}\frac{J_{k+1}}{J_k}-1$$

$$=2-1=1$$

elde edilir.

ii) (i)'deki ispata benzer olarak istenen elde edilir.

iii) Verilen toplamın içindeki ifadeyi basit kesirlere ayırmak suretiyle,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2J_{n-1}}{J_{n+1}J_n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{J_n}-\frac{1}{J_{n+1}}\right)$$

bulunur. Bu ifadenin kısmi toplamlar dizisi,

$$S_k=\sum_{n=1}^{k}\left(\frac{1}{J_n}-\frac{1}{J_{n+1}}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{J_1}-\frac{1}{J_2}\right)+\left(\frac{1}{J_2}-\frac{1}{J_3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{J_k}-\frac{1}{J_{k+1}}\right)$$

$$=\left(1-\frac{1}{J_{k+1}}\right)$$

olur. Bu dizinin limiti alınarak,

$$\lim_{k\to\infty} S_k = \lim_{k\to\infty}\left(1-\frac{1}{J_{k+1}}\right)$$

$$=1-\lim_{k\to\infty}\frac{1}{J_{k+1}}$$

$$=1$$

elde edilir.

Teorem 3.26 [11]. Her pozitif n tam sayısı için,

i) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}2^{n-1}}{j_{n-1}j_n}=\frac{1}{6}$

ii) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}2^{n-1}}{j_{n+1}j_n}=\frac{1}{12}$

iii) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2j_{n-1}}{j_{n+1}j_n}=\frac{1}{2}$

ifadeleri geçerlidir.

İspat. i) Jacobsthal-Lucas sayılarının $j_{n+1}j_{n-1}-j_n^2=9(-1)^{n+1}2^{n-1}$ Simpson formülü toplam ifadesinde yerine yazılarak,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}2^{n-1}}{j_{n-1}j_n}=\frac{1}{9}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{9(-1)^{n-1}2^{n-1}}{j_{n-1}j_n}\right)$$

$$=\frac{1}{9}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{j_{n+1}j_{n-1}-j_n^2}{j_{n-1}j_n}\right)$$

$$=\frac{1}{9}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{j_{n+1}}{j_n}-\frac{j_n}{j_{n-1}}\right)\right)$$

bulunur. Bu serinin kısmi toplamlar dizisi alınırsa,

$$S_k=\sum_{n=1}^{k}\left(\frac{j_{n+1}}{j_n}-\frac{j_n}{j_{n-1}}\right)$$

$$=\left(\frac{j_2}{j_1}-\frac{j_1}{j_0}\right)+\left(\frac{j_3}{j_2}-\frac{j_2}{j_1}\right)+\cdots+\left(\frac{j_{k+1}}{j_k}-\frac{j_k}{j_{k-1}}\right)$$

$$=\left(\frac{j_{k+1}}{j_k}-\frac{1}{2}\right)$$

elde edilir. Bu dizinin limiti ve ardışık terimler oranından,

$$\lim_{k\to\infty}S_k=\lim_{k\to\infty}\left(\frac{j_{k+1}}{j_k}-\frac{1}{2}\right)$$

$$=\lim_{k\to\infty}\frac{j_{k+1}}{j_k}-\frac{1}{2}$$

$$=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

bulunur. Bu değer yerine yazılırsa istenen elde edilir.

ii) Bu eşitliğin ispatı (i)'deki ispata benzer olarak kolayca yapılabilir.

iii) Verilen toplamın içindeki ifadeyi basit kesirlere ayırmak suretiyle,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2j_{n-1}}{j_{n+1}j_n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{j_n}-\frac{1}{j_{n+1}}\right)$$

bulunur. Bu ifadenin kısmi toplamlar dizisi,

$$\begin{aligned}S_k&=\sum_{n=0}^{k}\left(\frac{1}{j_n}-\frac{1}{j_{n+1}}\right)\\&=\left(\frac{1}{j_0}-\frac{1}{j_1}\right)+\left(\frac{1}{j_1}-\frac{1}{j_2}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{j_k}-\frac{1}{j_{k+1}}\right)\\&=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{j_{k+1}}\right)\end{aligned}$$

olur. Bu dizinin limiti alındığında,

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty}S_k&=\lim_{k\to\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{j_{k+1}}\right)\\&=\frac{1}{2}-\lim_{k\to\infty}\frac{1}{j_{k+1}}\\&=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

elde edilir.

BÖLÜM 4. GENELLEŞTİRİLMİŞ JACOBSTHAL SAYILARI

4.1. Jacobsthal k - Sayıları

Jacobsthal F matrisi $F=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ biçiminde idi. Teorem 3.13'e göre F matrisinin n. kuvvetinin ise $F^n=\begin{bmatrix}J_{n+1} & 2J_n\\ J_n & 2J_{n-1}\end{bmatrix}$ olduğu biliniyor. Bundan yola çıkarak; $n\geq 1$ için Sonuç 3.1 yardımıyla $\det\left(F^n\right)=J_{n+1}J_{n-1}-J_n^2=\left(-2\right)^n$ özelliği yazılabilir. Bu bağıntılara sahip olan Jacobsthal sayılarının $J_0=0$ ve $J_1=1$ başlangıç koşulları yardımıyla $J_{n+1}=J_n+2J_{n-1}$ lineer rekürans bağıntısına sahip olduğunu biliyoruz.

[18]'de Stakhov'un vermiş olduğu Fibonacci k-sayıları için, lineer rekürans bağıntısından yararlanarak Jacobsthal k-sayıları için lineer rekürans bağıntısı aşağıdaki gibi verilebilir.

$k\geq 0$ ve $n>k+1$ olmak üzere Jacobsthal k-sayıları,

$$J_k\left(1\right)=J_k\left(2\right)=\ldots=J_k\left(k\right)=J_k\left(k+1\right)=1 \tag{1}$$

başlangıç koşulları olup,

$$J_k\left(n\right)=J_k\left(n-1\right)+2J_k\left(n-k-1\right) \tag{2}$$

lineer rekürans bağıntısı ile tanımlanabilir.

(1)'deki başlangıç koşullarıyla verilen rekürans formülü, sonsuz tane tekrarlı dizi üretir. Özel olarak, $k=0$ için $n>1$ olup, bu bağıntı, $J_0(1)=1$ başlangıç şartı için $J_0(n)=J_0(n-1)+2J_0(n-1)$ bağıntısına dönüşür. $k=1$ için ise, $n>2$ olup, $J_1(1)=J_1(2)=1$ başlangıç koşulları yardımıyla $J_1(n)=J_1(n-1)+2J_1(n-2)$ yazılabilir. Bu tekrarlı bağıntı, $k=1$ için klasik $J_1(n)=J_n$ Jacobsthal sayılarını verir. Yani,

$$\{J_1(n)\}_{n>2}=\{1,1,3,5,11,21,\ldots\}$$

olur. Benzer şekilde, $k=2$ için $J_2(1)=J_2(2)=J_2(3)=1$ olup, bu dizi $n>3$ için,

$$\{J_2(n)\}_{n>3}=\{1,1,1,3,5,11,21,\ldots\}$$

olur.

$k>0$ için Jacobsthal k-sayıları, negatif n sayıları için de yazılabilir. $J_k(0), J_k(-1), J_k(-2),\ldots, J_k(-k),\ldots J_k(-2k+1)$ sayılarının hesabı için, (1) ve (2) eşitlikleri kullanılır.Bu sayıların (2)'deki gösterimi göz önüne alındığında, başlangıç koşullarını,

$$J_k(1)=J_k(2)=\ldots=J_k(k)=J_k(k+1)=1$$

alarak,

$$J_k(k+1)=J_k(k)+2J_k(0)$$

bağıntısı yazılabilir. Böylece,

$$J_k(0)=0$$

elde edilir. Bu işleme devam edilerek, $J_k(k), J_k(k-1), J_k(k-2), \ldots, J_k(2)$ yardımıyla,

$$J_k(0)=J_k(-1)=J_k(-2)=\ldots=J_k(-k+1)=0 \tag{3}$$

olur. Şimdi $J_k(1)$ sayısını,

$$J_k(1)=J_k(0)+2J_k(-k)$$

ile gösterelim. $J_k(1)=1$ ve $J_k(0)=0$ olduğundan,

$$J_k(-k)=\frac{1}{2}$$

olur. (2) formundaki Jacobsthal k-sayılarının (3) yardımıyla,

$$J_k(-k-1)=J_k(-k-2)=\ldots=J_k(-2k+1)=0$$

olduğu görülür. Örneğin, $k=1$ ve negatif n değerleri için,

$$J_k(0)=J_k(-1)=J_k(-2)=\ldots=J_k(-k+1)=0$$

ve

$$J_k(n)=J_k(n-1)+2J_k(n-k-1)$$

eşitlikleri yardımıyla,

$$J_1(0) = J_1(-1) + 2J_1(-2)$$

yani,

$$0 = \frac{1}{2} + 2J_1(-2)$$

olup,

$$J_1(-2) = -\frac{1}{2^2}$$

bulunur. Benzer şekilde,

$$J_1(-1) = J_1(-2) + 2J_1(-3)$$

yani,

$$\frac{1}{2} = -\frac{1}{2^2} + 2J_1(-3)$$

olup,

$$J_1(-3) = \frac{3}{2^3}$$

bulunur. Bu işleme devam ederek, n'nin negatif değerleri için $J_{k,n}$ Jacobsthal k-sayılarının tüm değerlerini aşağıdaki gibi elde ederiz.

Tablo 4.1. Jacobsthal k - Sayıları

n	6	5	4	3	2	1	0	–1	–2	–3	–4	–5
$J_1(n)$	21	11	5	3	1	1	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2^2}$	$\frac{3}{2^3}$	$-\frac{5}{2^4}$	$\frac{11}{2^5}$
$J_2(n)$	11	5	3	1	1	1	0	0	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$J_3(n)$	5	3	1	1	1	1	0	0	0	$\frac{1}{2}$	0	0
$J_4(n)$	3	1	1	1	1	1	0	0	0	0	$\frac{1}{2}$	0
$J_5(n)$	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	$\frac{1}{2}$

Buna göre $k=1$ olması durumunda Jacobsthal k-sayıları, klasik J_n Jacobsthal sayılarına dönüşür. Bu durumda,

$$\sum_{i=1}^{n} J_1(i) = J_1 + J_2 + J_3 + \ldots + J_n = \frac{J_{n+2} - 1}{2}$$

bağıntısı yazılabilir.

4.2. Jacobsthal F Matrisinin Bazı Özellikleri

$F^n = \begin{bmatrix} J_{n+1} & 2J_n \\ J_n & 2J_{n-1} \end{bmatrix}$ matrisi, tekrarlı bağıntı yardımıyla aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$F^n = \begin{bmatrix} J_n + 2J_{n-1} & 2J_{n-1} + 4J_{n-2} \\ J_{n-1} + 2J_{n-2} & 2J_{n-2} + 4J_{n-3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_n & 2J_{n-1} \\ J_{n-1} & 2J_{n-2} \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} J_{n-1} & 2J_{n-2} \\ J_{n-2} & 2J_{n-3} \end{bmatrix}$$

yani,

$$F^n = F^{n-1} + 2F^{n-2} \tag{4}$$

yazılarak,

$$F^{n-2} = \frac{1}{2}\left(F^n - F^{n-1}\right) \tag{5}$$

bağıntısı elde edilir. Şimdi, F matrisinin $F^n F^m = F^{n+m}$ özelliğinden yararlanarak, F^n matrislerinin $\left(n = 0, \mp 1, \mp 2, \ldots\right)$ (4) ve (5) tekrarlı bağıntıları yardımıyla elde edilişini tablo halinde yazabiliriz. Bu tabloda, F^n matrisleri doğrudan, F^{-n} matrisleri ise F^n matrislerinin tersleri olarak bulunur.

Tablo 4.2. Jacobsthal F^n matrisleri

n	0	1	2	3	4	5
F^n	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 11 & 10 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 21 & 22 \\ 11 & 10 \end{bmatrix}$
F^{-n}	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{2^2}\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{2^3}\begin{bmatrix} -2 & 6 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{2^4}\begin{bmatrix} 6 & -10 \\ -5 & 11 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{2^5}\begin{bmatrix} -10 & 22 \\ 11 & -21 \end{bmatrix}$

$n = 2k$ durumunda, F^n matrisinin tersini bulmak için, F^n matrisinin köşegen elemanları olan J_{n+1} ve J_{n-1} yer değiştirir ve J_n köşegen elemanları da zıt işaret alır. Böylece $n = 2k$ olduğunda F^n matrisinin tersinin,

$$F^{-2k} = \frac{1}{2^{2k}}\begin{bmatrix} 2J_{2k-1} & -2J_{2k} \\ -J_{2k} & J_{2k+1} \end{bmatrix}$$

şeklinde olduğu görülür. $n=2k+1$ durumunda, F^{n} matrisinden F^{-n} matrisini ele etmek için, J_{n+1} ve J_{n-1} köşegen elemanları yer değiştirmelidir ve ters işaret almalıdır. Yani,

$$F^{-(2k+1)}=\frac{1}{2^{2k+1}}\begin{bmatrix} -2J_{2k} & 2J_{2k+1} \\ J_{2k+1} & -J_{2k+2} \end{bmatrix}$$

olmalıdır.

4.3. Jacobsthal k - Sayıları İçin Üreteç Matris

Tanım 4.1. Verilen bir $k\geq 0$ tam sayısı ve $F=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ matrisi için Jacobsthal k - matrisini aşağıdaki şekilde tanımlayalım.

$$H_k=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Bu matris $(k+1)\times(k+1)$ boyutludur. $k=0,1,2,3,4$ için H_k matrisleri sırasıyla,

$$H_0=[1],H_1=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},H_2=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},H_3=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},H_4=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

biçimindedir.

Teorem 4.1. $n > k+1$ için

$$H_k^n = \begin{bmatrix} J_k(n+1) & 2J_k(n) & \dots & 2J_k(n-k+1) \\ J_k(n-k+1) & 2J_k(n-k) & \dots & 2J_k(n-2k+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ J_k(n) & 2J_k(n-1) & \dots & 2J_k(n-k) \end{bmatrix}$$

dir.

İspat. Tümevarım yardımıyla,

$k = 2$ için,

$$H_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_2(2) & 2J_2(1) & 2J_2(0) \\ J_2(0) & 2J_2(-1) & 2J_2(-2) \\ J_2(1) & 2J_2(0) & 2J_2(-1) \end{bmatrix}$$

dir. Bu matrisin karesini alırsak,

$$H_2^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_2(3) & 2J_2(2) & 2J_2(1) \\ J_2(1) & 2J_2(0) & 2J_2(-1) \\ J_2(2) & 2J_2(1) & 2J_2(0) \end{bmatrix}$$

elde ederiz. Gerçekten,

$$J_k(n) = J_k(n-1) + 2J_k(n-k-1)$$

ve

$$J_k(1) = J_k(2) = \ldots = J_k(k) = J_k(k+1) = 1$$

bağıntıları yardımıyla,

$$J_2(1) = J_2(2) = J_2(3) = 1$$

dir. Ayrıca,

$$J_k(-k-1) = J_k(-k-2) = \ldots = J_k(-2k+1) = 1$$

yardımıyla,

$$J_2(0) = J_2(-1) = 0$$

dir. Benzer şekilde, bu matrisin $4.$ kuvvetini alırsak,

$$H_2^4 = H_2^2 H_2^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_2(5) & 2J_2(4) & 2J_2(3) \\ J_2(3) & 2J_2(2) & 2J_2(1) \\ J_2(4) & 2J_2(3) & 2J_2(2) \end{bmatrix}$$

elde ederiz. Gerçekten, tekrarlı bağıntı yardımıyla,

$$J_2(4) = J_2(3) + 2J_2(1) = 1 + 2.1 = 3$$

ve

$$J_2(5) = J_2(4) + 2J_2(2) = 3 + 2.1 = 5$$

olur. Benzer şekilde, $k = 3$ için,

$$H_3=\begin{bmatrix}1&2&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}J_3(2)&2J_3(1)&2J_3(0)&2J_3(-1)\\J_3(-1)&2J_3(-2)&2J_3(-3)&2J_3(-4)\\J_3(0)&2J_3(-1)&2J_3(-2)&2J_3(-3)\\J_3(1)&2J_3(0)&2J_3(-1)&2J_3(-2)\end{bmatrix}$$

dir. Bu matrisin karesini alırsak,

$$H_3^2=\begin{bmatrix}1&2&2&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\1&2&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}J_3(3)&2J_3(2)&2J_3(1)&2J_3(0)\\J_3(0)&2J_3(-1)&2J_3(-2)&2J_3(-3)\\J_3(1)&2J_3(0)&2J_3(-1)&2J_3(-2)\\J_3(2)&2J_3(1)&2J_3(0)&2J_3(-1)\end{bmatrix}$$

elde ederiz. Bu matrisin 4. kuvvetini alırsak,

$$H_3^4=\begin{bmatrix}3&2&2&2\\1&2&0&0\\1&2&2&0\\1&2&2&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}J_3(5)&2J_3(4)&2J_3(3)&2J_3(2)\\J_3(2)&2J_3(1)&2J_3(0)&2J_3(-1)\\J_3(3)&2J_3(2)&2J_3(1)&2J_3(0)\\J_3(4)&2J_3(3)&2J_3(2)&2J_3(1)\end{bmatrix}$$

elde ederiz. Gerçekten, (1) ve (2) tekrarlı bağıntıları yardımıyla,

$$J_3(1)=J_3(2)=J_3(3)=J_3(4)=1$$

olduğundan,

$$J_3(5)=J_3(4)+2J_3(1)$$

olup,

$$J_3(5)=3$$

bulunur. Ayrıca,

$$J_k(-k)=\frac{1}{2}$$

olduğundan,

$$J_3(-3)=\frac{1}{2}$$

dir. Bu şekilde devam edilerek, H_k^n matrisleri için,

$$H_k^n=\begin{bmatrix} J_k(n+1) & 2J_k(n) & \dots & 2J_k(n-k+1) \\ J_k(n-k+1) & 2J_k(n-k) & \dots & 2J_k(n-2k+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ J_k(n) & 2J_k(n-1) & \dots & 2J_k(n-k) \end{bmatrix}$$

yazılabilir. $n+1$ için $H_k^{n+1}=H_k^n.H_k$ yazılabileceğinden ispat kolayca görülür.

(1) ve (2) eşitlikleriyle tanımlanan Jacobsthal k-sayılar dizisinin katsayılarından oluşan ve Jacobsthal k-matrisi olarak adlandırdığımız $(k+1)\times(k+1)$ boyutlu H_k matrisinin tanımından,

$$\begin{bmatrix} J_k(n+1) \\ J_k(n-k+1) \\ J_k(n-k+2) \\ \vdots \\ J_k(n-1) \\ J_k(n) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} J_k(n) \\ J_k(n-k) \\ J_k(n-k+1) \\ \vdots \\ J_k(n-2) \\ J_k(n-1) \end{bmatrix} \tag{6}$$

eşitliğini yazabiliriz. Yukarıdaki $(k+1)\times(k+1)$ boyutlu H_k matrisine B diyelim. Jacobsthal k-sayılarının oluşturduğu H_k^n matrisini ise $C_n=\left[c_{ij}\right]$ ile gösterelim.

$$C_n = \left[c_{ij}\right] = \begin{bmatrix} J_k(n+1) & 2J_k(n) & \dots & 2J_k(n-k+1) \\ J_k(n-k+1) & 2J_k(n-k) & \dots & 2J_k(n-2k+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ J_k(n) & 2J_k(n-1) & \dots & 2J_k(n-k) \end{bmatrix} \tag{7}$$

(6) eşitliğini $k+1$ sütun genişletirsek,

$$\begin{bmatrix} J_k(n+1) & 2J_k(n) & \dots & 2J_k(n-k+1) \\ J_k(n-k+1) & 2J_k(n-k) & \dots & 2J_k(n-2k+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ J_k(n) & 2J_k(n-1) & \dots & 2J_k(n-k) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_k(n) & 2J_k(n-1) & \dots & 2J_k(n-k) \\ J_k(n-k) & 2J_k(n-k-1) & \dots & 2J_k(n-2k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ J_k(n-1) & 2J_k(n-2) & \dots & 2J_k(n-k-1) \end{bmatrix}$$

yani,

$$C_n = BC_{n-1} \tag{8}$$

matris eşitliğini elde ederiz. Bu eşitlik yardımıyla aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 4.2. B ve C_n sırasıyla (6) ve (7) eşitliğinde verilen matrisler olmak üzere $n \geq 1$ tam sayıları için,

$$C_n = B^n$$

eşitliği geçerlidir.

İspat. (8) eşitliğinden $C_n = BC_{n-1}$ olduğunu biliyoruz. Bu ifadeyi daha açık bir şekilde yazacak olursak,

$C_2 = BC_1$

$C_3 = BC_2 = BBC_1 = B^2C_1$

$C_4 = BC_3 = BBC_2 = B^3C_1$

$\vdots$

$C_{m+1} = BC_m = B^mC_1$

elde ederiz. Jacobsthal k -sayılarının tanımından,

$$C_1 = \begin{bmatrix} J_k(2) & 2J_k(1) & \dots & 2J_k(2-k) \\ J_k(2-k) & 2J_k(1-k) & \dots & 2J_k(2-2k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ J_k(1) & 2J_k(0) & \dots & 2J_k(1-k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} = B$$

bulunur. $J_k(-k) = \dfrac{1}{2}$ olduğundan, bu iki matrisin karşılıklı elemanları eşit olup,

$$C_n = B^n$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.3. C_n matrisi,

$$C_n = \begin{bmatrix} J_k(n+1) & 2J_k(n) & \dots & 2J_k(n-k+1) \\ J_k(n-k+1) & 2J_k(n-k) & \dots & 2J_k(n-2k+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ J_k(n) & 2J_k(n-1) & \dots & 2J_k(n-k) \end{bmatrix}$$

şeklinde verilmiş olsun. O halde,

$$\det C_n = \begin{cases} 1 & , \quad k=0 \quad ise \\ -2 & , \quad k=1 \quad ise \\ 2 & , \quad diğer \quad durumlarda \end{cases}$$

dir.

İspat. Teorem 4.2'ye göre $C_n = B^n$ olduğunu biliyoruz.

$$\det B = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

olmak üzere,

$$\det C_n = \det B^n = (\det B)^n$$

olduğundan ispat kolayca görülür.

Teorem 4.4. $k \geq 0$ tam sayısı ve

$$C_n = \begin{bmatrix} J_k(n+1) & 2J_k(n) & \dots & 2J_k(n-k+1) \\ J_k(n-k+1) & 2J_k(n-k) & \dots & 2J_k(n-2k+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ J_k(n) & 2J_k(n-1) & \dots & 2J_k(n-k) \end{bmatrix}$$

matrisi için,

$$C_n = C_{n-1} + 2C_{n-k-1}$$

tekrarlı bağıntısı yazılabilir.

İspat. C_n matrisinin her bir elemanın tekrarlı bağıntısını yazmak suretiyle,

$$C_n=\begin{bmatrix} J_k(n+1) & 2J_k(n) & \dots & 2J_k(n-k+1) \\ J_k(n-k+1) & 2J_k(n-k) & \dots & 2J_k(n-2k+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ J_k(n) & 2J_k(n-1) & \dots & 2J_k(n-k) \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} J_k(n)+2J_k(n-k) & 2(J_k(n-1)+2J_k(n-k-1)) & \dots & 2(J_k(n-k)+2J_k(n-2k-1)) \\ J_k(n-k)+2J_k(n-2k-1) & 2(J_k(n-k-1)+2J_k(n-2k-2)) & \dots & 2(J_k(n-2k)+2J_k(n-2k-1)) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ J_k(n-1)+2J_k(n-k-1) & 2(J_k(n-2)+2J_k(n-k-2)) & \dots & 2(J_k(n-k-1)+2J_k(n-2k-2)) \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} J_k(n) & 2J_k(n-1) & \dots & 2J_k(n-k) \\ J_k(n-k) & 2J_k(n-k-1) & \dots & 2J_k(n-2k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ J_k(n-1) & 2J_k(n-2) & \dots & 2J_k(n-k-1) \end{bmatrix}+2\begin{bmatrix} J_k(n-k) & 2J_k(n-k-1) & \dots & 2J_k(n-2k-1) \\ J_k(n-2k-1) & 2J_k(n-2k-2) & \dots & 2J_k(n-2k-1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ J_k(n-k-1) & 2J_k(n-k-2) & \dots & 2J_k(n-2k-2) \end{bmatrix}$$

$$=C_{n-1}+2C_{n-k-1}$$

elde edilir.

4.4. Genelleştirilmiş k - Basamak Jacobsthal Sayıları ve Üreteç Matris

Tanım 4.2. Verilen bir k $(k=1,2,\dots)$ sayısı ve $F=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ matrisi için,

$$F_k=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlanan $k \times k$ boyutlu kare matrise genelleştirilmiş Jacobsthal matris denir.

$k = 1, 2, 3, 4, 5$ için F matrisleri sırasıyla,

$$F_1 = [1],\ F_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\ F_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},\ F_4 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},\ F_5 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

biçimindedir.

Genelleştirilmiş k-basamak Jacobsthal sayılarının dizisi [21]'de $1-k \le n \le 0$ için,

$$J_{i,n} = \begin{cases} 1 \ , & i+n=1 \ \ ise \\ 0 \ , & diğer \end{cases}$$

başlangıç koşulları ile, $1 \le i \le k$ ve $n > 0$ için,

$$J_{i,n} = J_{i,n-1} + 2J_{i,n-2} + J_{i,n-3} + \ldots + J_{i,n-k} \tag{9}$$

olarak tanımlanmıştır. Burada $J_{i,n}$ i-inci genelleştirilmiş k-basamak Jacobsthal dizisinin n-inci terimini göstermektedir. Şimdi (9) ile tanımlanan $J_{i,n}$ sayı dizisine birkaç örnek verelim. $n = 3$ seçelim. O halde, $i = 1$ veya $i = 2$ seçilebilir. $i = 1$ olsun.

$$\begin{aligned} k = 2 \text{ için } J_{1,3} &= J_{1,2} + 2J_{1,1} \\ &= J_{1,1} + 2J_{1,0} + 2\left(J_{1,0} + 2J_{1,-1}\right) \\ &= J_{1,0} + 2J_{1,-1} + 2J_{1,0} + 2\left(J_{1,0} + 2J_{1,-1}\right) \end{aligned}$$

$$=1+2.0+2.1+2(1+2.0)$$

$$=5$$

$k=3$ için $J_{1,3}=J_{1,2}+2J_{1,1}+J_{1,0}$

$$=J_{1,1}+2J_{1,0}+J_{1,-1}+2\left(J_{1,0}+2J_{1,-1}+J_{1,-2}\right)+J_{1,0}$$

$$=J_{1,0}+2J_{1,-1}+J_{1,-2}+2J_{1,0}+J_{1,-1}+2\left(J_{1,0}+2J_{1,-1}+J_{1,-2}\right)+J_{1,0}$$

$$=1+2.0+0+2.1+0+2(1+2.0+0)+1$$

$$=6$$

olarak bulunur. $k=2$ ve $i=1$ alındığında, genelleştirilmiş k-basamak Jacobsthal dizisi $\{J_{i,n}\}$, klasik Jacobsthal $\{J_n\}$ dizisi olur. (9)'da verilen tanımdan,

$$\begin{bmatrix} J_{i,n+1} \\ J_{i,n} \\ J_{i,n-1} \\ \vdots \\ J_{i,n-k+3} \\ J_{i,n-k+2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_{i,n} \\ J_{i,n-1} \\ J_{i,n-2} \\ \vdots \\ J_{i,n-k+2} \\ J_{i,n-k+1} \end{bmatrix} \tag{10}$$

eşitliği yazılabilir.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{11}$$

Yukarıdaki (11) denklemindeki $k\times k$ companion matrisine D denirse, (10) eşitliğini bu kez k sütun için genelleştirebiliriz. Yani,

$$\begin{bmatrix} J_{1,n+1} & J_{2,n+1} & \cdots & J_{k,n+1} \\ J_{1,n} & J_{2,n} & \cdots & J_{k,n} \\ J_{1,n-1} & J_{2,n-1} & \cdots & J_{k,n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ J_{1,n-k} & J_{2,n-k} & \cdots & J_{k,n-k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_{1,n} & J_{2,n} & \cdots & J_{k,n} \\ J_{1,n-1} & J_{2,n-1} & \cdots & J_{k,n-1} \\ J_{1,n-2} & J_{2,n-2} & \cdots & J_{k,n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ J_{1,n-k+1} & J_{2,n-k+1} & \cdots & J_{k,n-k+1} \end{bmatrix} \tag{12}$$

matris eşitliği elde edilir. k-boyutlu A_n matrisi aşağıdaki gibi tanımlanırsa,

$$A_n = \begin{bmatrix} J_{1,n} & J_{2,n} & \cdots & J_{k,n} \\ J_{1,n-1} & J_{2,n-1} & \cdots & J_{k,n-1} \\ J_{1,n-2} & J_{2,n-2} & \cdots & J_{k,n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ J_{1,n-k+1} & J_{2,n-k+1} & \cdots & J_{k,n-k+1} \end{bmatrix}$$

(12) eşitliğinin,

$$A_{n+1} = DA_n \tag{13}$$

olarak yazılabileceği [21]'de gösterildi. Böylece, aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 4.5 [21]. D ve A_n sırasıyla (11) ve (12)'deki gibi olsun. O halde $2 \le k \le n$ koşulunu sağlayan n ve k doğal sayıları için $A_{n+1} = D^{n+1}$ dir.

İspat. (13) eşitliği yardımıyla,

$$A_{n+1} = DA_n = DDA_{n-1}$$

yazılabilir. Bu işlem $(n-1)$ kez tekrarlandığında,

$$A_2 = DA_1$$

$$A_3 = DA_2 = D^2 A_1$$

$$A_4 = DA_3 = D^3 A_1$$

$$\vdots$$

$$A_{n+1} = DD^{n-1}A_1 = D^n A_1 \tag{14}$$

elde edilir. Genelleştirilmiş k-basamak Jacobsthal sayılarının tanımından,

$$A_1 = \begin{bmatrix} J_{1,1} & J_{2,1} & \cdots & J_{k,1} \\ J_{1,0} & J_{2,0} & \cdots & J_{k,0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ J_{1,2-k} & J_{2,2-k} & \cdots & J_{k,2-k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix} = D$$

olduğu görülür. Böylece (14) eşitliği,

$$A_{n+1} = D^n A_1 = D^n D = D^{n+1}$$

olarak elde edilir.

Teorem 4.6 [21]. A_n matrisi,

$$A_n = \begin{bmatrix} J_{1,n} & J_{2,n} & \cdots & J_{k,n} \\ J_{1,n-1} & J_{2,n-1} & \cdots & J_{k,n-1} \\ J_{1,n-2} & J_{2,n-2} & \cdots & J_{k,n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ J_{1,n-k+1} & J_{2,n-k+1} & \cdots & J_{k,n-k+1} \end{bmatrix}$$

şeklinde verilsin. O halde,

$$\det A_n = \begin{cases} -2 \ , & k=2 \quad ise \\ 1 \ , & k \quad tek \quad ise \\ (-1)^n , & k \quad çift \quad ise \end{cases}$$

dir.

İspat. Teorem 4.5’e göre $A_n = D^n$ olduğunu biliyoruz. Buradan,

$$\det D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

olmak üzere,

$$\det A_n = \det\left(D^n\right) = \left(\det D\right)^n$$

dir. Ayrıca k boyutlu D companion matrisinin determinantı $\det D = (-1)^{k+1}$ olduğundan,

$$\det A_n = \begin{cases} 1 \ , k \quad tek \quad ise \\ (-1)^n , k \quad çift \quad ise \end{cases}$$

bulunur.

Teorem 4.7 [21]. $J_{i,n}$ n-inci genelleştirilmiş k-basamak Jacobsthal sayısı olsun. Bu durumda aşağıdaki eşitlikler geçerlidir.

$$J_{1,n+1} = J_{1,n} + J_{2,n}$$

$$J_{2,n+1} = 2J_{1,n} + J_{3,n}$$

$$J_{i,n+1} = J_{1,n} + J_{i+1,n} \quad , \quad 3 \le i \le k-1$$

$$J_{k,n+1} = J_{1,n}$$

İspat. Teorem 4.5'e göre, $A_{n+1} = A_n A$ olduğunu biliyoruz. O halde,

$$\begin{bmatrix} J_{1,n+1} & J_{2,n+1} & \cdots & J_{k,n+1} \\ J_{1,n} & J_{2,n} & \cdots & J_{k,n} \\ J_{1,n-1} & J_{2,n-1} & \cdots & J_{k,n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ J_{1,n-k} & J_{2,n-k} & \cdots & J_{k,n-k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{1,n} & J_{2,n} & \cdots & J_{k,n} \\ J_{1,n-1} & J_{2,n-1} & \cdots & J_{k,n-1} \\ J_{1,n-2} & J_{2,n-2} & \cdots & J_{k,n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ J_{1,n-k+1} & J_{2,n-k+1} & \cdots & J_{k,n-k+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

yazılır. Böylece, matris çarpımı işlemiyle,

$$J_{1,n+1} = J_{1,n} + J_{2,n}$$

$$J_{2,n+1} = 2J_{1,n} + J_{3,n}$$

$$J_{i,n+1} = J_{1,n} + J_{i+1,n} \quad , \quad 3 \le i \le k-1$$

$$J_{k,n+1} = J_{1,n}$$

olduğu görülür.

4.5. Genelleştirilmiş k-Basamak Jacobsthal Matrisinin Özdeğerleri

Burada Binet formülü, genelleştirilmiş Jacobsthal sayıları için elde edilecektir. Jacobsthal sayılarının karakteristik denklemi $x^2 - x - 2 = 0$ şeklinde olup, bu denklemin kökleri $\alpha = 2$ ve $\beta = -1$ dir. Jacobsthal sayıları için Binet formülü,

$$J_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \tag{15}$$

dir.

Şimdi Jacobsthal sayılarının Binet formülü olan (15) eşitliği, genelleştirilmiş k-basamak Jacobsthal sayıları için matris yöntemleri kullanılarak elde edilecektir. Companion matrislerden faydalanarak, D matrisinin karakteristik denkleminin, genelleştirilmiş k-basamak Jacobsthal sayılarının karakteristik denklemi olan

$$x^k - x^{k-1} - 2x^{k-2} - x^{k-3} - \ldots - x - 1 = 0$$

şeklinde olduğu söylenebilir. Bundan yararlanılarak, öncelikle D matrisinin öz değerlerinin katlılığı incelenecektir. Bunun için aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 4.8 [22]. Her $k \geq 3$ tam sayısı için $x^{k+1} - 2x^k - x^{k-1} + x^{k-2} + 1 = 0$ denkleminin katlı kökü yoktur.

İspat. Companion matrislerin özelliklerinden, D matrisinin karakteristik polinomunun, aynı zamanda genelleştirilmiş basamak Jacobsthal sayılarının karakteristik polinomu olduğunu biliyoruz. Yani,

$$f(x) = x^k - x^{k-1} - 2x^{k-2} - x^{k-3} - \ldots - x - 1 = 0$$

ifadesi, aynı zamanda genelleştirilmiş basamak Jacobsthal sayılarının da karakteristik denklemidir. $k \geq 3$ için $x = 1$'in, $f(x)$ polinomunun kökü olmadığı açıktır.

$$g(x) = (x-1) f(x)$$

olarak alınırsa,

$$g(x) = (x-1)f(x) = (x-1)\left(x^k - x^{k-1} - 2x^{k-2} - x^{k-3} - \ldots - x - 1\right)$$
$$= x^{k+1} - 2x^k - x^{k-1} + x^{k-2} + 1$$

olduğu kolayca görülür. Buradan, $k \geq 3$ ve $f(1) \neq 1$ olduğundan 1, $g(x)$'in bir köküdür, ancak katlı kökü değildir. $\alpha \neq 0$ ve $\alpha \neq 1$ olmak üzere α'nın $g(x)$'in bir katlı kökü olduğunu kabul edelim. α' nın katlı kök olması için gerek ve yeter şart $g(\alpha) = 0$ ve $g'(\alpha) = 0$'dır. α katlı kök olduğundan,

$$g(\alpha) = \alpha^{k+1} - 2\alpha^k - \alpha^{k-1} + \alpha^{k-2} + 1$$
$$= \alpha^{k-2}\left(\alpha^3 - 2\alpha^2 - \alpha + 1\right) + 1 = 0$$

ve

$$g'(\alpha) = (k+1)\alpha^k - 2k\alpha^{k-1} - (k-1)\alpha^{k-2} + (k-2)\alpha^{k-3}$$
$$= \alpha^{k-3}\left[(k+1)\alpha^3 - 2k\alpha^2 - (k-1)\alpha + k - 2\right] = 0$$

olmalıdır. Buradan, $\alpha \neq 0$ olduğundan, $(k+1)\alpha^3 - 2k\alpha^2 - (k-1)\alpha + k - 2 = 0$'dır. Bu ifadenin kökleri,

$$a = 28k^3 - 612k - 432k^2 - 216$$

ve

$$b = -147k^4 + 126k^3 + 1149k^2 + 1164k + 336$$

olmak üzere,

$$\alpha_1=\frac{1}{3(k+1)}\left[\frac{\left(a+12\sqrt{b}k+\sqrt{b}\right)^{1/3}}{2}+\frac{14k^2-6}{\left(a+12\sqrt{b}k+\sqrt{b}\right)^{1/3}}+2k\right]$$

ve

$$\alpha_{2,3}=-\frac{1}{3(k+1)}\left[\frac{\left(a+12\sqrt{b}k+\sqrt{b}\right)^{1/3}}{4}+\frac{7k^2-3}{\left(a+12\sqrt{b}k+\sqrt{b}\right)^{1/3}}+2k\right.$$
$$\left.\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i\left(\frac{\left(a+12\sqrt{b}k+\sqrt{b}\right)^{1/3}}{2}+\frac{14k^2-6}{\left(a+12\sqrt{b}k+\sqrt{b}\right)^{1/3}}\right)\right]$$

dır. α_i'lerin her birinin diğerinden farklı olduğu kolayca görülür. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned}0=-g(\alpha_i)&=\alpha_i^{k-2}\left(-\alpha_i^3+2\alpha_i^2+\alpha_i-1\right)-1\\&=u_{k,i}-1\end{aligned}$$

dir. $k=3$ ve $1\le i\le 3$ seçersek,

$$\begin{aligned}0=-g(\alpha_1)&=\alpha_1\left(-\alpha_1^3+2\alpha_1^2+\alpha_1-1\right)-1\\&=u_{3,1}-1=0\end{aligned}$$

ve $u_{3,1}=-0,8445476618\neq 1$ olup bu ise çelişkidir. Benzer olarak α_2 için,

$$\begin{aligned}0=-g(\alpha_2)&=\alpha_2\left(-\alpha_2^3+2\alpha_2^2+\alpha_2-1\right)-1\\&=u_{3,2}-1\end{aligned}$$

ve $u_{3,2} = 1,172273831 + 0,3253556687i \neq 1$ olup bu da çelişkidir. Yine benzer şekilde α_3 için,

$$0 = -g(\alpha_3) = \alpha_3\left(-\alpha_3^3 + 2\alpha_3^2 + \alpha_3 - 1\right) - 1$$
$$= u_{3,3} - 1$$

ve $u_{3,3} = 1,172273831 - 0,3253556687i \neq 1$ olup çelişkidir. Bu üç çelişkiden dolayı, $g(x) = 0$ denkleminin katlı köke sahip olmadığı görülür ve böylece ispat tamamlanır.

Sonuç itibariyle $x^k - x^{k-1} - 2x^{k-2} - x^{k-3} - \ldots - x - 1 = 0$ denklemi $k \geq 3$ için katlı köke sahip değildir.

4.6. Genelleştirilmiş k-Basamak Jacobsthal Sayıları İçin Binet Formülü

$f(\lambda) = \lambda^k - \lambda^{k-1} - 2\lambda^{k-2} - \lambda^{k-3} - \ldots - \lambda - 1$ polinomu, genelleştirilmiş k-basamak Jacobsthal sayılarının karakteristik polinomu olduğundan, $f(\lambda)$ genelleştirilmiş k-basamak Jacobsthal matrisi D'nin de karakteristik polinomudur.

Şimdi $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_k$'lar genelleştirilmiş k-basamak Jacobsthal matrisi olan D matrisinin özdeğerleri olsun. O halde Teorem 4.8'e göre, genelleştirilmiş k-basamak Jacobsthal sayılarının karakteristik denkleminin katlı kökü olmadığından, bu denklemin tüm kökleri birbirinden farklıdır. Dolayısıyla genelleştirilmiş k-basamak Jacobsthal matrisi olan D matrisinin özdeğerleri birbirinden farklı olur. Böylece D matrisinin köşegenleştirilebilir olduğu söylenebilir. O halde, aşağıdaki matrisler yardımıyla genelleştirilmiş k-basamak Jacobsthal sayıları için Binet formülü elde edilecektir.

$k \times k$ boyutlu Vandermonde matrisi [21]'de,

$$V = \begin{bmatrix} \lambda_{1,k-1} & \lambda_{1,k-2} & \cdots & \lambda_1 & 1 \\ \lambda_{2,k-1} & \lambda_{2,k-2} & \cdots & \lambda_2 & 1 \\ \lambda_{3,k-1} & \lambda_{3,k-2} & \cdots & \lambda_3 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \lambda_{k,k-1} & \lambda_{k,k-2} & \cdots & \lambda_k & 1 \end{bmatrix}$$

biçiminde idi. Ayrıca $w_{k,i}$; $k \times 1$ boyutlu sütun matrisi,

$$w_{k,i} = \begin{bmatrix} \lambda_{1,n+k-i} \\ \lambda_{2,n+k-i} \\ \vdots \\ \lambda_{k,n+k-i} \end{bmatrix}$$

şeklinde ve $V_{j,i}$, V kare matrisinin j-inci sütununun $w_{k,i}$ sütun matrisiyle yer değiştirmesiyle elde edilen kare matris olmak üzere genelleştirilmiş k-basamak Jacobsthal sayıları için Binet formülü aşağıdaki gibi verilmiştir.

Teorem 4.9 [21]. $J_{n,i}$, i-inci genelleştirilmiş k-basamak Jacobsthal dizisinin n-inci terimi olmak üzere $1 \le i \le k$ için,

$$J_{n-i+1,j} = \frac{\det\left(V_{j,i}\right)}{\det\left(V\right)}$$

dir.

İspat. D matrisinin özdeğerleri birbirinden farklı olduğu için, D köşegenleştirilebilirdir. Ayrıca $V^T = E$ denirse, E terslenebilir olur. E terslenebilir ve D köşegenleştirilebilir olduğundan,

$$E^{-1}DE=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_k\end{pmatrix}=\Lambda$$

yazılabilir. Bu durumda, D matrisinin Λ matrisine benzer olduğu söylenebilir. Benzer matrislerin kuvvetleri de benzer olduğundan $D^nE=E\Lambda^n$ elde edilir. Ayrıca $A_n=D^n$ olduğundan, a_{ij} ; A_n matrisinin i-inci satır j-inci sütun elemanını göstermek üzere aşağıdaki lineer denklem sistemi elde edilir.

$$\begin{aligned}
a_{i1}\lambda_{1,k-1}+a_{i2}\lambda_{1,k-2}+\ldots+a_{ik}&=\lambda_{1,n+k-i}\\
a_{i1}\lambda_{2,k-1}+a_{i2}\lambda_{2,k-2}+\ldots+a_{ik}&=\lambda_{2,n+k-i}\\
\vdots \qquad\qquad \vdots\\
a_{i1}\lambda_{k,k-1}+a_{i2}\lambda_{k,k-2}+\ldots+a_{ik}&=\lambda_{k,n+k-i}
\end{aligned}$$

Buradan her bir $j=1,2,\ldots,k$ için,

$$a_{ij}=\frac{\det\left(V_{j,i}\right)}{\det\left(V\right)}$$

elde edilir. Burada $a_{ij}=J_{n-i+1,j}$ olduğundan ispat tamamlanır.

Sonuç 4.1 [21]. $J_{n,k}$, n-inci genelleştirilmiş k-basamak Jacobsthal sayısını göstermek üzere,

$$J_{n,k}=\frac{\det\left(V_{k,1}\right)}{\det\left(V\right)}$$

dir.

İspat. a_{ij} , A_n matrisinin i-inci satır j-inci sütun elemanı olmak üzere $i=1$ ve $j=k$ alınırsa bir önceki teoremden sonuç kolayca görülür.

Böylece $1 \le i \le k$ koşulunu sağlayan her i tam sayısı için, genelleştirilmiş k-basamak Jacobsthal sayılarının genelleştirilmiş Binet formülü verildi. Gerçekten, $k=2$ olarak alınırsa, genelleştirilmiş k-basamak Jacobsthal sayıları, Jacobsthal sayılarına indirgenir. Bu durumda,

$$V = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 \\ \lambda_2 & 1 \end{bmatrix}, \; V^T = E = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

ve

$$A_n = D^n = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} J_{n+1} & 2J_n \\ J_n & 2J_{n-1} \end{bmatrix}$$

olmak üzere,

$$DE = E\Lambda$$

eşitliği sağlanır. Burada Λ köşegen matrisi,

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

olup, λ_1 ve λ_2 ise Jacobsthal sayılarının karakteristik denklemi olan $x^2 - x - 2 = 0$ denkleminin kökleridir. D matrisi Λ matrisine benzer olup, benzer matrislerin kuvvetleri de benzer olduğundan $D^n E = E\Lambda^n$ eşitliği sağlanır. Böylece,

$$\begin{bmatrix} J_{n+1} & 2J_n \\ J_n & 2J_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{bmatrix}$$

matrislerinin eşitliğinden,

$$J_{n+1}\lambda_1 + 2J_n = \lambda_1^{n+1}$$

$$J_{n+1}\lambda_2 + 2J_n = \lambda_2^{n+1}$$

lineer denklem sistemi elde edilir. Bu lineer denklem sistemi bir Cramer sistemi olup, Cramer yöntemi ile çözümü yapılırsa,

$$J_n = \frac{\begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_1^{n+1} \\ \lambda_2 & \lambda_2^{n+1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \lambda_1 & 2 \\ \lambda_2 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{\lambda_1\lambda_2\left(\lambda_2^n - \lambda_1^n\right)}{2\left(\lambda_1 - \lambda_2\right)} = \frac{\lambda_1^n - \lambda_2^n}{\lambda_1 - \lambda_2}$$

olur. Böylece n-inci Jacobsthal sayısı için Binet formülü,

$$J_n = \frac{\lambda_1^n - \lambda_2^n}{\lambda_1 - \lambda_2}$$

olarak elde edilir [21].

4.7. Genelleştirilmiş Jacobsthal Sayılarının Toplamlarının Matris Yöntemleriyle Hesabı

Burada D matrisinden yararlanılarak yeni bir matris tanımlanacak ve bu matrisin kuvvetleri alınarak genelleştirilmiş Jacobsthal sayılarının toplamları elde edilecektir. Genelleştirilmiş k-boyutlu Jacobsthal matrisi olan D matrisi [21]'de bir boyut genişletilerek,

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & & & & \\ 0 & & D & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & & & & \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlandı. Ayrıca $(k+1)\times(k+1)$ boyutlu W_n matrisi,

$$W_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ S_n & & & & \\ S_{n-1} & & A_n & & \\ \vdots & & & & \\ S_{n-k+1} & & & & \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlandı. Burada S_n , genelleştirilmiş k-basamak Jacobsthal sayılarının 1'den $(n+1)$'e kadar toplamı, yani

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} J_{i,1}$$

dir. $J_{n,1} = J_{n+1,k}$ olduğundan,

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} J_{i,k}$$

yazılabilir. $J_{n,1} = J_{n+1,k}$ olduğundan,

$$S_n = J_{n-1,1} + S_{n-1}$$

elde edilir. Dolayısıyla aşağıdaki tekrarlı bağıntının yazılabilceği [21]'de gösterilmiştir.

$$W_n = W_{n-1} T$$

olur. Böylece tümevarım hipotezinden,

$$W_n = W_1 T^{n-1}$$

eşitliği elde edilir. $1 \leq i \leq k$ için $T_{-i} = 0$ olduğundan ve genelleştirilmiş k-basamak Jacobsthal sayılarının tanımından $W_1 = E$ elde edilir ve genel olarak $W_n = E^n$ bulunur. O halde genelleştirilmiş k-basamak Jacobsthal sayılarının toplamları için üreteç matris elde edilmiş olur. W_1, W_n ile matris çarpımı işlemi altında değişmeli olup $W_{n+1} = W_n W_1 = W_1 W_n$ dir [21]. Böylece genelleştirilmiş k-basamak Jacobsthal sayılarının toplamı,

$$S_n = 1 + S_{n-1} + 2S_{n-2} + \sum_{i=3}^{k} S_{n-i}$$

olarak elde edilir. Ayrıca,

$$S_n = J_{n,1} + S_{n-1}$$

olduğundan Jacobsthal sayılarının toplamı,

$$\sum_{i=0}^{n-1} J_i = \frac{3J_{n-1} + 2J_{n-2} - 1}{2}$$

olur [21].

4.8. Genelleştirilmiş k-Basamak Jacobsthal ve Jacobsthal-Lucas Sayılarının Üreteç Fonksiyonları

Emrah Kılıç, [9] çalışmasında genelleştirilmiş Pell sayıları için üreteç fonksiyon elde etti. Şimdi, bundan yararlanarak genelleştirilmiş k-basamak Jacobsthal ve Jacobsthal-Lucas sayıları için üreteç fonksiyonları elde edeceğiz.
Katsayıları genelleştirilmiş Jacobsthal sayıları olan,

$$F_k(x) = 1.J_{1,k} + xJ_{2,k} + x^2 J_{3,k} + x^3 J_{4,k} + \ldots + x^{k-1} J_{k,k} + x^k J_{k+1,k} + \ldots + x^{n-1} J_{n,k} + \ldots$$

fonksiyonunu tanımlayalım. Buna göre aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 4.10. Genelleştirilmiş k-basamak Jacobsthal sayılarının üreteç fonksiyonu,

$$F_k(x) = \left(1 - x - 2x^2 - x^3 - \ldots - x^k\right)^{-1}$$

dir.

İspat.

$$\begin{aligned}
&\left(1 - x - 2x^2 - x^3 - \ldots - x^k\right) F_k(x) \\
&= J_{1,k} + xJ_{2,k} + x^2 J_{3,k} + \ldots + x^{k-1} J_{k,k} + \ldots + x^{n-1} J_{n,k} + \ldots \\
&\quad -xJ_{1,k} - x^2 J_{2,k} - x^3 J_{3,k} - \ldots - x^k J_{k,k} - \ldots - x^n J_{n,k} - \ldots \\
&\quad -2x^2 J_{1,k} - 2x^3 J_{2,k} - 2x^4 J_{3,k} - \ldots - 2x^{k+1} J_{k,k} - \ldots - 2x^{n+1} J_{n,k} - \ldots \\
&\quad -x^3 J_{1,k} - x^4 J_{2,k} - x^5 J_{3,k} - \ldots - x^{k+2} J_{k,k} - \ldots - x^{n+2} J_{n,k} - \ldots \\
&\qquad\qquad\qquad \vdots \\
&\quad -x^k J_{1,k} - x^{k+1} J_{2,k} - x^{k+1} J_{3,k} - \ldots - x^{2k-1} J_{k,k} - \ldots - x^{n+k-1} J_{n,k} - \ldots
\end{aligned}$$

eşitliğini elde ederiz. Gerekli katsayı düzenlemeleri yapıldığında,

$$\begin{aligned}
&\left(1-x-2x^2-x^3-\ldots-x^k\right)F_k\left(x\right)\\
&=J_{1,k}+\left(J_{2,k}-J_{1,k}\right)x+\left(J_{3,k}-J_{2,k}-2J_{1,k}\right)x^2+\left(J_{4,k}-J_{3,k}-2J_{2,k}-J_{1,k}\right)x^3+\ldots\\
&\quad+\left(J_{k,k}-J_{k-1,k}-2J_{k-2,k}-\ldots-J_{1,k}\right)x^{k-1}+\left(J_{k+1,k}-J_{k,k}-2J_{k-1,k}-\ldots-J_{1,k}\right)x^k+\ldots\\
&\quad+\left(J_{n,k}-J_{n-1,k}-2J_{n-2,k}-\ldots-J_{n-k,k}\right)x^{n-1}+\ldots
\end{aligned}$$

olur. Genelleştirilmiş k-basamak Jacobsthal sayılarının tanımından yararlanarak,

$$\left(1-x-2x^2-x^3-\ldots-x^k\right)F_k\left(x\right)=J_{1,k}=1$$

olduğu görülür. Buradan genelleştirilmiş k-basamak Jacobsthal sayılarının üreteç fonksiyonu $F_k\left(x\right)$,

$$\begin{aligned}
F_k\left(x\right)&=\frac{1}{1-x-2x^2-x^3-\ldots-x^k}\\
&=\left(1-x-2x^2-x^3-\ldots-x^k\right)^{-1}
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Emrah Kılıç, [9] çalışmasında, genelleştirilmiş k-basamak Pell sayılarının üreteç fonksiyonunu vererek, bunun üstel fonksiyon cinsinden ifade edilebileceğini göstermişti. Benzer düşünceyle, genelleştirilmiş k-basamak Jacobsthal sayılarını da üstel fonksiyon cinsinden ifade etmek mümkündür. Teorem 4.10'dan yola çıkarak $F_k\left(x\right)$ fonksiyonunu üstel fonksiyon cinsinden aşağıdaki teoremle ifade edebiliriz.

Teorem 4.11. Genelleştirilmiş Jacobsthal sayılarının üreteç fonksiyonu $F_k(x)$ olmak üzere,

$$F_k(x) = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n g^n(x)}{n}\right)$$

dir.

İspat. $0 \leq f(x) < 1$ için $f(x) = x + 2x^2 + x^3 + \ldots + x^k$ ve $g(x) = 1 + 2x + x^2 + \ldots + x^{k-1}$ olsun. Bu durumda $f(x) = xg(x)$ olur. $F_k(x)$ ve $f(x)$'i göz önüne alarak,

$$F_k(x) = (1 - f(x))^{-1} \tag{16}$$

yazabiliriz. Böylece (16) eşitliğinin her iki yanının doğal logaritması alınarak,

$$\begin{aligned} \ln F_k(x) &= \ln(1 - f(x))^{-1} \\ &= -\ln(1 - f(x)) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu fonksiyon Maclaurin serisine açılırsa,

$$\begin{aligned} \ln F_k(x) &= -\left(-f(x) - \frac{1}{2} f^2(x) - \frac{1}{3} f^3(x) - \ldots - \frac{1}{n} f^n(x) - \ldots\right) \\ &= f(x) + \frac{1}{2} f^2(x) + \frac{1}{3} f^3(x) + \ldots + \frac{1}{n} f^n(x) + \ldots \\ &= \left(1 + 2x + x^2 + \ldots + x^{k-1}\right)x + \frac{1}{2}\left(1 + 2x + x^2 + \ldots + x^{k-1}\right)x^2 \\ &\quad + \frac{1}{3}\left(1 + 2x + x^2 + \ldots + x^{k-1}\right)x^3 + \ldots + \frac{1}{n}\left(1 + 2x + x^2 + \ldots + x^{k-1}\right)x^n + \ldots \end{aligned}$$

bulunur. Son eşitlikte $g(x)$ değerleri yerlerine yazıldığında,

$$\ln F_k(x) = xg(x) + \frac{1}{2}x^2 g^2(x) + \frac{1}{3}x^3 g^3(x) + \ldots \frac{1}{n}x^n g^n(x) + \ldots$$

elde edilir. Böylece,

$$F_k(x) = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n g^n(x)}{n}\right)$$

veya

$$F_k(x) = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^n(x)}{n}\right)$$

olur ki bu da istenendir.

Şimdi, genelleştirilmiş k-basamak Jacobsthal-Lucas sayıları için üreteç fonksiyonu elde edelim. Bunun için, ilk olarak, genelleştirilmiş k-basamak Jacobsthal-Lucas sayılarının tanımını verelim. Genelleştirilmiş k-basamak Jacobsthal-Lucas sayılarının dizisini $1-k \le n \le 0$ için,

$$j_{i,n} = \begin{cases} 1 \;, & i+n=1 \;\; ise \\ 2 \;, & diğer \end{cases}$$

başlangıç koşulları ile, $0 \le i \le k$ ve $n > 0$ için,

$$j_{i,n} = j_{i,n-1} + 2j_{i,n-2} + j_{i,n-3} + \ldots + j_{i,n-k}$$

biçiminde tanımlayalım. Şimdi katsayıları genelleştirilmiş Jacobsthal-Lucas sayıları olan,

$$G_k(x) = 1.j_{0,k} + xj_{1,k} + x^2 j_{2,k} + x^3 j_{3,k} + \ldots + x^{k-1} j_{k-1,k} + x^k j_{k,k} + \ldots + x^n j_{n,k} + \ldots$$

fonksiyonunu tanımlayalım. Buna göre genelleştirilmiş k-basamak Jacobsthal-Lucas sayılarının üreteç fonksiyonunu bulmak için aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 4.12. Genelleştirilmiş k-basamak Jacobsthal-Lucas sayılarının üreteç fonksiyonu

$$G_k(x) = \frac{2-x}{1-x-2x^2-x^3-\ldots-x^k}$$

dir.

İspat.

$$\begin{aligned}
&\left(1-x-2x^2-x^3-\ldots-x^k\right)G_k(x) \\
&= j_{0,k} + xj_{1,k} + x^2 j_{2,k} + \ldots + x^k j_{k,k} + \ldots + x^n j_{n,k} + \ldots \\
&\quad -xj_{0,k} - x^2 j_{1,k} - x^3 j_{2,k} - \ldots - x^{k+1} j_{k,k} - \ldots - x^{n+1} j_{n,k} - \ldots \\
&\quad -2x^2 j_{0,k} - 2x^3 j_{1,k} - 2x^4 j_{2,k} - \ldots - 2x^{k+2} j_{k,k} - \ldots - 2x^{n+2} j_{n,k} - \ldots \\
&\quad -x^3 j_{0,k} - x^4 j_{1,k} - x^5 j_{2,k} - \ldots - x^{k+3} j_{k,k} - \ldots - x^{n+3} j_{n,k} - \ldots \\
&\qquad\qquad\qquad \vdots \\
&\quad -x^k j_{0,k} - x^{k+1} j_{1,k} - x^{k+2} j_{2,k} - \ldots - x^{2k} j_{k,k} - \ldots - x^{n+k} j_{n,k} - \ldots
\end{aligned}$$

eşitliğini elde ederiz. Gerekli katsayı düzenlemeleri yapıldığında,

$$\left(1-x-2x^2-x^3-\ldots-x^k\right)G_k\left(x\right)$$
$$= j_{0,k}+\left(j_{1,k}-j_{0,k}\right)x+\left(j_{2,k}-j_{1,k}-2j_{0,k}\right)x^2+\left(j_{3,k}-j_{2,k}-2j_{1,k}-j_{0,k}\right)x^3+\ldots$$
$$+\left(j_{k-1,k}-j_{k-2,k}-2j_{k-3,k}-\ldots-j_{0,k}\right)x^{k-1}+\left(j_{k,k}-j_{k-1,k}-2j_{k-2,k}-\ldots-j_{0,k}\right)x^k+\ldots$$
$$+\left(j_{n,k}-j_{n-1,k}-2j_{n-2,k}-\ldots-j_{n-k,k}\right)x^n+\ldots$$

olur. Genelleştirilmiş k-basamak Jacobsthal-Lucas sayılarının tanımından yararlanarak,

$$\left(1-x-2x^2-x^3-\ldots-x^k\right)G_k\left(x\right)= j_{0,k}+\left(j_{1,k}-j_{0,k}\right)x$$
$$=2-x$$

olduğu görülür. Buradan genelleştirilmiş k-basamak Jacobsthal-Lucas sayılarının üreteç fonksiyonu $G_k\left(x\right)$

$$G_k\left(x\right)=\frac{2-x}{1-x-2x^2-x^3-\ldots-x^k}$$

olarak bulunur. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Emrah Kılıç, [9] çalışmasında genelleştirilmiş k-basamak Pell sayıları ve genelleştirilmiş k-basamak Pell matrisini tanımlayarak, bu matrisin özdeğerleri ile genelleştirilmiş k-basamak Pell sayıları arasındaki ilişkiyi vermiştir. Şimdi, bundan yararlanarak, genelleştirilmiş k-basamak Jacobsthal matrisi D'nin karakteristik denklemi $\lambda^k-\lambda^{k-1}-2\lambda^{k-2}-\ldots-\lambda-1=0$ olmak üzere, genelleştirilmiş k-basamak Jacobsthal sayıları ile genelleştirilmiş k-basamak Jacobsthal matrisinin özdeğerleri arasındaki ilişkiyi vereceğiz. Bunun için; aşağıdaki $k\times k$ boyutlu genelleştirilmiş k-basamak Jacobsthal matrisini göz önüne alalım.

$$D=\begin{bmatrix}1 & 2 & \dots & 1 & 1\\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0\\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0\end{bmatrix}$$

Böylece aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 4.13. D matrisinin karakteristik denkleminin herhangi bir kökü λ ve $n \geq k > 3$ ise,

$$\lambda^n = J_{n-k+1,1}\lambda^{k-1} + 2J_{n-k+1,2}\lambda^{k-2} + \sum_{j=3}^{k} J_{n-k+1,j}\lambda^{k-j}$$

dir.

İspat. İspatı n üzerinden tümevarım kullanarak yapalım. $n \geq k > 3$ olacak şekildeki n ve k tam sayıları için ilk olarak $n = k = 4$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda genelleştirilmiş k-basamak Jacobsthal sayıları için $J_{n,1} = J_{n+1,4}$ eşitliğinden yararlanılarak,

$$\begin{aligned}\lambda^4 &= J_{1,1}\lambda^3 + 2J_{1,2}\lambda^2 + \sum_{j=3}^{4} J_{1,j}\lambda^{4-j}\\ &= J_{1,1}\lambda^3 + 2J_{1,2}\lambda^2 + J_{1,3}\lambda + J_{1,4}\\ &= \lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda + 1\end{aligned}$$

elde edilir. O halde $n = k = 4$ için k-basamak Jacobsthal sayılarının karakteristik denklemi bulunur ki, bu da iddianın doğru olduğunu gösterir. Şimdi n $(n > k)$ için ifadenin doğru olduğunu kabul edelim. $n+1$ için de doğru olduğunu göstereceğiz.

$$\lambda^{n+1} = \lambda^n \lambda = \left(J_{n-k+1,1}\lambda^{k-1} + 2J_{n-k+1,2}\lambda^{k-2} + \sum_{j=3}^{k} J_{n-k+1,j}\lambda^{k-j} \right)\lambda$$

olup kabulümüz gereği,

$$\begin{aligned}\lambda^{n+1} &= \left(J_{n-k+1,1}\lambda^{k-1} + 2J_{n-k+1,2}\lambda^{k-2} + J_{n-k+1,3}\lambda^{k-3} + \ldots + J_{n-k+1,k-1}\lambda + J_{n-k+1,k} \right)\lambda \\ &= J_{n-k+1,1}\lambda^{k} + 2J_{n-k+1,2}\lambda^{k-1} + J_{n-k+1,3}\lambda^{k-2} + \ldots + J_{n-k+1,k-1}\lambda^2 + J_{n-k+1,k}\lambda\end{aligned}$$

elde ederiz. Ayrıca, $\lambda^k = \lambda^{k-1} + 2\lambda^{k-2} + \ldots + \lambda + 1$ olduğundan,

$$\begin{aligned}\lambda^{n+1} &= J_{n-k+1,1}\lambda^{k} + 2J_{n-k+1,2}\lambda^{k-1} + J_{n-k+1,3}\lambda^{k-2} + \ldots + J_{n-k+1,k-1}\lambda^2 + J_{n-k+1,k}\lambda \\ &= J_{n-k+1,1}\left(\lambda^{k-1} + 2\lambda^{k-2} + \ldots + \lambda + 1\right) + 2J_{n-k+1,2}\lambda^{k-1} + \ldots + J_{n-k+1,k-1}\lambda^2 + J_{n-k+1,k}\lambda \\ &= J_{n-k+1,1}\lambda^{k-1} + 2J_{n-k+1,1}\lambda^{k-2} + J_{n-k+1,1}\lambda^{k-3} + \ldots + J_{n-k+1,1}\lambda + J_{n-k+1,1} \\ &\quad + 2J_{n-k+1,2}\lambda^{k-1} + J_{n-k+1,3}\lambda^{k-2} + \ldots + J_{n-k+1,k-1}\lambda^2 + J_{n-k+1,k}\lambda \\ &= \left(J_{n-k+1,1} + 2J_{n-k+1,2}\right)\lambda^{k-1} + \left(2J_{n-k+1,1} + J_{n-k+1,3}\right)\lambda^{k-2} + \ldots \\ &\quad + \left(J_{n-k+1,1} + J_{n-k+1,k}\right)\lambda + J_{n-k+1,1}\end{aligned}$$

sonucu bulunur. Ayrıca, Teorem 4.7'ye göre,

$$\begin{aligned}J_{n+1,i} &= J_{n,1} + J_{n,i+1} \\ J_{n+1,1} &= 2J_{n,1} + J_{n,2}\end{aligned}$$

olduğundan,

$$\begin{aligned}J_{n-k+1,1} + 2J_{n-k+1,2} &= J_{n-k+1,1} + J_{n-k+1,2} + J_{n-k+1,2} \\ &= J_{n-k+2,1} + J_{n-k+1,2}\end{aligned}$$

$$= 2J_{n-k+1,1} + J_{n-k+1,2}$$
$$= J_{n-k+2,1}$$

$$2J_{n-k+1,1} + J_{n-k+1,3} = J_{n-k+1,1} + J_{n-k+1,1} + J_{n-k+1,3}$$
$$= J_{n-k+1,1} + J_{n-k+2,2}$$
$$= 2J_{n-k+2,2}$$

$$\vdots$$

$$J_{n-k+1,1} + J_{n-k+1,k} = J_{n-k+2,k+1}$$

eşitliklerini buluruz. Böylece,

$$\lambda^{n+1} = J_{n-k+2,1}\lambda^{k-1} + 2J_{n-k+2,2}\lambda^{k-2} + \ldots + J_{n-k+2,k-2}\lambda^{2} + J_{n-k+2,k-1}\lambda + J_{n-k+1,1}$$

eşitliğini elde ederiz. Teorem 4.7'ye göre, her pozitif n tam sayısı için $J_{n+1,k} = J_{n,1}$ olup, $J_{n-k+2,k} = J_{n-k+1,1}$ yazarak,

$$\lambda^{n+1} = J_{n-k+2,1}\lambda^{k-1} + 2J_{n-k+2,2}\lambda^{k-2} + \ldots + J_{n-k+2,k-2}\lambda^{2} + J_{n-k+2,k-1}\lambda + J_{n-k+2,k}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

BÖLÜM 5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, Jacobsthal ve Jacobsthal-Lucas dizileri ele alındı. Bu sayı dizilerinin birçok özelliği incelendi. [12] ve [13]'de tanımlanan Jacobsthal F matrisi ile Jacobsthal-Lucas E matrisinin bu dizilerle bağlantısı verildi. Jacobsthal dizilerinin genelleştirilmeleri ve özellikleri incelendi. Genelleştirilmiş Jacobsthal dizilerinin Binet formülleri, özdeğerleri, toplam formülleri, üreteç matrisleri ve üreteç fonksiyonları çalışıldı. Bu özellikler kullanılarak benzer özellikler elde edilebilir. Ayrıca, Jacobsthal sayılarını eleman olarak içeren bazı özel matrislerin determinantları ve normları araştırılabilir. Bu sayılar için verilen genelleştirilmelerin türevleri ve integralleri ele alınabilir.

KAYNAKLAR

[1] CERIN, Z., Sums of Squares and Products of Jacobsthal Numbers, Journal of Integer Sequences, 10 (2007), 1-14.

[2] FREY, D. D., SELLERS, JAMES A., Jacobsthal Numbers and Alternating Sign Matrices, Journal of Integer Sequences, 3 (2000), 1-15.

[3] DJORDJEVIC, G. B., SRIVASTAVA, H. M., Incomplete Generalized Jacobsthal and Jacobsthal-Lucas Numbers, Mathematical and Computer Modelling, 42 (2005), 1049-1056.

[4] FALCON, S., PLAZA, A., On the Fibonacci k-Numbers, Chaos, Solitons and Fractals, 32 (2007), 1615-1624.

[5] FALCON, S., PLAZA, A., The k-Fibonacci Sequence and the Pascal 2-Triangle, Chaos, Solitons and Fractals, 33 (2007), 38-49.

[6] HORADAM, A. F., Basic Properties of a Certain Generalized Sequence of Numbers, The Fibonacci Quarterly, 3 (1965), 75-161.

[7] HORADAM, A. F., Jacobsthal Representation Numbers, Fibonacci Quarterly, 34 (1996), 40-54.

[8] KALMAN, D., Generalized Fibonacci Number by Matrix Methods, Universty of Wisconsin, 1980.

[9] KILIÇ, E., Genelleştirilmiş k-Basamak Pell Sayılarının Karakterizasyonu, Doktora Tezi, Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, 2006.

[10] KILIÇ, E., Sums Of Generalized Fibonacci Numbers By Matrix Methods, Ars Combinatoria, 84 (2007).

[11] KÖKEN, F., Jacobsthal ve Jacobsthal Lucas Sayılarının Özellikleri ve Uygulamaları, Yüksek Lisans Tezi, Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, 2008.

[12] KÖKEN, F., BOZKURT, D., On The Jacobsthal Numbers by Matrix Methods, Int. Jour. Contemp. Math. Sciences, 3 (2008), 605-614.

[13] KÖKEN, F., BOZKURT, D., On The Jacobsthal Lucas Numbers by Matrix Methods, Int. Jour. Contemp. Math. Sciences, 3 (2008), 1629-1633.

[14] KOSHY, T., Fibonacci and Lucas Numbers with Applications, A Wiley Pub., 2001.

[15] LEE, G. Y., LEE, S. G.,and SHIN, H. G., On the k-Generalized Fibonacci Matrix Q_k , Linear Algebra and Its Applications, 251 (1997), 73-88.

[16] ÖCAL, A., TUĞLU, N., ALTINIŞIK, E., On The Representation of k-generalized Fibonacci and Lucas Numbers, App. Math. and Comp., 170 (2005), 584-596.

[17] SILVESTER, J. R., Fibonacci Properties by Matrix Methods, The Mathematical Gazette, 63 (1979), 188-191.

[18] STAKHOV, A. P., Fibonacci Matrices, A Generalization of The ‘‘Cassini Formula’’, and A New Coding Theory, Chaos, Solitons and Fractals, 30 (2006), 56-66.

[19] SUN, ZHI-H., Expansions and Identities Concerning Lucas Sequences, The Fibonacci Quarterly, 44 (2006), 145-153.

[20] VAJDA, S., Fibonacci and Lucas Numbers, and The Golden Section, Theory and Applications. Ellis Horwood Limited; 1989.

[21] YILMAZ, F., BOZKURT, D., The Generalized Order k-Jacobsthal Numbers, Int. Jour. Contemp. Math. Sciences, 4 (2009), 1685-1694.

[22] YILMAZ, F., Sayı Dizilerinin Genelleştirilmesi, Yüksek Lisans Tezi, Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, 2009.

ÖZGEÇMİŞ

Serap AVCIOĞLU, 11.07.1987 tarihinde Balıkesir'in Bandırma ilçesinde doğdu. İlköğrenimini Adapazarı Erenler İlköğretim Okulu'nda, orta öğrenimini Niğde Cumhuriyet Lisesi'nde 2005 yılında tamamladı. Yine, 2005 yılında başladığı Ondokuzmayıs Üniversitesi Matematik Bölümü'nden 2009 yılında mezun oldu. Aynı yıl, Sakarya Üniversitesi Matematik Bölümü'nde yüksek lisansa başladı.