T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BAZI I VE I^* YAKINSAK ÇİFT İNDİSLİ DİZİ UZAYLARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Orhan TUĞ

Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Metin BAŞARIR

Haziran 2011

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BAZI I VE I^* YAKINSAK ÇİFT İNDİSLİ DİZİ UZAYLARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Orhan TUĞ

Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK

Bu tez 20/06/2011 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği ile kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Metin Başarır	**Doç. Dr. B.Tamer Tonguç**	**Doç. Dr. Ö.Faruk Gözükızıl**
Jüri Başkanı	**Üye**	**Üye**

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın her safhasında bana zaman ayırıp ilgi, teşvik ve yardımlarını esirgemeyen çok değerli hocam Sayın Prof. Dr. Metin BAŞARIR'a sonsuz teşekkür ve şükranlarımı sunarım. Ayrıca bu çalışmanın hazırlanışı esnasında yol gösteren, destek olan değerli hocalarım Sayın Yrd. Doç. Dr. Selma ALTUNDAĞ'a ve Öğr. Gör. Dr. Mahpeyker ÖZTÜRK'e teşekkürü bir borç bilirim. Başarılarımın ve becerilerimin iyi günde kötü günde hep destekçisi olan dünyadaki en değerli hazinem biricik eşim ve çok değerli aileme de canı gönülden teşekkür ve şükranlarımı sunarım

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	: Kompleks sayılar kümesi
$\mathbb{Q}$	: Rasyonel sayılar kümesi
A≈B	: A kümesi B kümesiyle eş güçlüdür
$A\Delta B$	: {x : x∈A\B veya x∈B\A}
A^c	: A kümesinin tümleyeni
χ_A	: A kümesinin karakteristik fonksiyonu
$card$(A)	: A kümesinin eleman sayısı ya da kardinalitesi
diam(A)	: A kümesinin çapı
$\aleph_0$	: Sayılabilir sonsuz kümenin eleman sayısı
log-limit	: Logaritmik limit
stat-limit	: İstatistiksel limit
P-yakınsak	: Pringsheim anlamda yakınsaklık
P-limit	: Pringsheim limiti
$I_2(\Gamma_x)$	: $x=(x_{nk})$ çift dizisinin tüm I −yığılma noktaları kümesi
L_x^2	: $x=(x_{mn})_{m,n\in\mathbb{N}}$ çift dizisinin tüm P-limit noktaları kümesi
$\overline{d}_2(A)$	: A kümesinin üst doğal yoğunluğu
$\underline{d}_2(A)$	: A kümesinin alt doğal yoğunluğu
$d_2(A)$	: A kümesinin doğal yoğunluğu
$\overline{\delta}_2(A)$	: A kümesinin üst asimptotik yoğunluğu
$\underline{\delta}_2(A)$	: A kümesinin alt asimptotik yoğunluğu
$\delta_2(A)$	: A kümesinin asimptotik yoğunluğu
$\overline{\rho}_2$(A)	: A kümesinin üst logaritmik yoğunluğu
$\underline{\rho}_2$(A)	: A kümesinin alt logaritmik yoğunluğu

ρ_2(A) : A kümesinin logaritmik yoğunluğu

$F(I)$: I idealiyle alakalı süzgeç

I_0 : $\{A \in \mathbb{N}x\mathbb{N}: \exists\, m(A) \in \mathbb{N}\ için\ (i,j \geq m(A) \Rightarrow (i,j) \notin A)\}$

I_d : $\{A \subset \mathbb{N}x\mathbb{N}: d_2(A) = 0\}$

$I(f)$: ℕ'nin tüm sınırlı alt kümelerinin sınıfı

$I_2(p)$: $\mathbb{N}x\mathbb{N}$'nin 0 doğal yoğunluklu alt kümelerinin bir sınıfı

$I_2(p^*)$: $\mathbb{N}x\mathbb{N}$'nin 0 logaritmik yoğunluklu alt kümelerinin bir sınıfı

Z_2 : $\mathbb{N}x\mathbb{N}$ nin tüm uygun ideallerinin sınıfı

Z_{0_2} : $\mathbb{N}x\mathbb{N}$ nin tüm I-yakınsak uygun ideallerinin sınıfı

Ω : Kompleks yada reel terimli tüm diziler uzayı

C^P : Pringsheim anlamda yakınsak çift diziler uzayı

$(l_\infty)_2$: Sınırlı çift diziler uzayı

C^{PB} : Pringsheim anlamda yakınsak ve sınırlı çift diziler uzayı

C^{PR} : Pringsheim anlamda yakınsak ve regüler yakınsak çift diziler uzayı

C_0^{PR} : Pringsheim anlamda 0 a regüler yakınsak çift dizilerin cümlesi

$(C^I)_2^P$: Pringsheim anlamda I- yakınsak çift diziler uzayı.

$(C_0^I)_2^P$: Pringsheim anlamda yakınsak I- sıfır diziler uzayı.

$(C^I)_2^R$: Regüler I- yakınsak çift diziler uzayı.

$(C_0^I)_2^R$: Regüler yakınsak I- sıfır diziler uzayı.

$(C^I)_2^{BP}$: Pringsheim anlamda sınırlı, I-yakınsak çift diziler uzayı

$(C_0^I)_2^{BP}$: Pringsheim anlamda sınırlı I-null çift diziler uzayı

$(C^I)_2^{BR}$: Sınırlı, regular, I- yakınsak çift diziler uzayı

$(C_0^I)_2^{BR}$: Sınırlı regüler I-sıfır çift diziler uzayı

$(X, \|.,\ldots,.\|)$: *n*-normlu uzay

$(X, \|.,.\|)$: *2*-normlu uzay

$S''(2-X)$: *2*-normlu $(X, \|.,.\|)$ uzayında tanımlı istatistiksel yakınsak çift indisli diziler uzayı.

ÖZET

Anahtar kelimeler: Çift indisli dizi, *P*-Yakınsaklık, *I*-Yakınsaklık, I^*-Yakınsaklık, *I*-Limit noktası, *I*-Yığılma noktası, *I*-Sınırlılık, *I*-Üst limit, *I*-Alt limit.

“Bazı *I* ve I^*-yakınsak çift indisli dizi uzayları” adlı bu tez çalışması altı bölümden meydana gelmektedir. Bu altı bölüm bu konu ile yapılmış bazı çalışmaların bir kısmının derlemesinden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, sonraki bölümlerde kullanılacak olan temel tanım ve teoremler verildi.

İkinci bölümde, ilk olarak çift indisli dizi ve Pringsheim anlamda yakınsaklık tanıtıldı. Daha sonra da çift indisli diziler için bazı yoğunluk kavramları verilerek bu yoğunlukların yakınsaklıkla ilişkileri verildi.

Üçüncü bölümde, *I*-yakınsaklık, I^*-yakınsaklık, AP ve AP2 şartları tanıtıldı. Sonra da I^*-yakınsaklık ile *I*-yakınsaklık arasındaki bazı bağıntılar verildi.

Dördüncü bölümde, *I*-limit noktası, *I*-yığılma noktası, *I*-sınırlılık tanıtıldıktan sonra *I*-üst limit, *I*-alt limit ve bunların bazı ilişkileri verildi.

Beşinci bölümde, bazı *I* ve I^*-yakınsak çift indisli dizi uzayları tanımlandı ve bu uzayların bazı topolojik özellikleri verildi.

Altıncı bölümde, *n*-normlu uzaylarda Orlicz fonksiyonu ve ideal yakınsaklık yardımıyla tanımlanmış bazı çift indisli dizi uzayları verilerek bu uzaylarla ilgili bazı sonuçlar incelenmiştir.

Son bölümde ise, elde edilen bazı genel sonuçlar verilmiştir.

SOME *I* AND I^* CONVERGENT DOUBLE SEQUENCE SPACES

SUMMARY

Key Words: Double sequence, *P*-Convergence, *I*-Convergence, I^*-Convergence, *I*-limit point, *I*-Cluster point, *I*-Boundedness, *I*-Limit superior, *I*-limit inferior

This study which is entitled “Some *I* and I^* Convergent Double Sequence Spaces” contains six chapters. These six chapters are compiled of a collection of some study on this subject.

In the first chapter, some basic definition and theorems which will be used in the following chapter, are given.

In the second chapter, firstly the concept of convergence of double sequences in Pringsheim sense is introduced. Then some densities for double sequence are identified and the relations between densities and convergence of double sequences are given.

In the third chapter, *I*-convergence, I^*-convergence, AP and AP2 are introduced. Then the common conclusions between *I*-convergence and I^*-convergence are given.

In the fourth chapter, *I*-limit point, *I*-cluster point, *I*-boundedness are introduced. Then *I*-limit superior and *I*-limit inferior definitions and common results of them are given.

In the fifth chapter, some *I* and I^*-convergent double sequence spaces are introduced and some topological properties of this spaces are given.

In the sixth chapter, some new double sequence spaces defined by Orlicz function and ideal convergence are introduced and some result related to this spaces are given.

The final chapter gives some general results which are obtained.

BÖLÜM 1. TEMEL TANIMLAR VE TEOREMLER

1.1. Temel Kavramlar

Bu bölümde, diğer bölümlerde kullanılacak olan genel tanım ve teoremler verilecektir.

Tanım 1.1.1. X boş olmayan bir küme ve bir

$$\begin{aligned} d: X \times X &\to \mathbb{R} \\ (x,y) &\to d(x,y) \end{aligned}$$

dönüşümü verilsin. Eğer her $x, y, z \in X$ için,

$(M1)$ $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
$(M2)$ $d(x,y) = d(y,x)$
$(M3)$ $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ (üçgen eşitsizliği)

özellikleri sağlanıyorsa, d ye X üzerinde bir metrik yada uzaklık fonksiyonu, d ile birlikte X e metrik uzay denir. (X,d) ikilisi ile ya da X ile gösterilir [45].

Örnek 1.1.2. $\forall x, y \in \mathbb{R}$ için $d(x,y) = |x-y|$ şeklinde tanımlanan $d: \mathbb{R} x \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $\mathbb{R}$ üzerinde bir metriktir. Bu metriğe $\mathbb{R}$ nin mutlak değer (alışılmış, doğal, salt değer) metriği denir [35].

Tanım 1.1.4. $X = (X, d)$ bir metrik uzay ve $\{x_n\}$ bu uzayda bir dizi olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $m, n > n_0$ olduğunda

$$d(x_m, x_n) < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $n_0 = n_0(\varepsilon)$ sayısı varsa, $\{x_n\}$ dizisine Cauchy dizisi denir [35].

Örnek 1.1.5. $\mathbb{R}$ üzerinde mutlak değer metriği verilsin. $\mathbb{R}$ deki $\{x_n\} = \{1/n\}$ dizisi $0 \in \mathbb{R}$ noktasına yakınsar. Dolayısıyla $\{x_n\}$ bir Cauchy dizisidir [28].

Tanım 1.1.6. $X = (X, d)$ bir metrik uzay olsun. X deki her $\{x_n\}$ Cauchy dizisi yakınsak ise, (X, d) metrik uzayına tam metrik uzay denir [45].

Örnek 1.1.7. $\mathbb{R}$ kümesi, üzerindeki mutlak değer metriğine göre tamdır. $\mathbb{C}$ kümesi de üzerindeki mutlak değer metriğine göre tamdır [35].

Örnek 1.1.8. $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesi $\mathbb{R}$ üzerindeki $d(x, y) = |x - y|$ metriğine göre tam değildir [46].

Tanım 1.1.9. $X = (X, d)$ bir metrik uzay olsun. X deki her dizi yakınsak bir alt diziye sahipse (X, d) uzayına kompakt metrik uzay denir [45].

Tanım 1.1.10. (X, d) bir metrik uzay ve $S \subseteq X$ olsun. S kümesinin tüm açık alt kümelerinin birleşimine S nin içi denir ve S^o veya $\mathrm{int}S$ ile gösterilir. Eğer $S = S^o$ ise S ye X de açık bir küme denir [45].

Tanım 1.1.11. (X, d) bir metrik uzay ve $S \subseteq X$ olsun. S kümesini kapsayan tüm kapalı kümelerinin arakesitine S nin kapanışı denir ve $\bar{S}$ olarak gösterilir. Eğer $S = \bar{S}$ ise S ye X de kapalı bir küme denir [45].

Tanım 1.1.12. (X, d) bir metrik uzay ve $S \subset \mathrm{X}$ olsun. $\overline{S} = \mathrm{X}$ ise S kümesine X de yoğundur denir. Eğer $\left(\overline{S}\right)^{o} = \emptyset$ ise S hiçbir yerde yoğun olmayan kümedir denir [45].

Tanım 1.1.15. $\{x_n\}, (X, d)$ metrik uzayında bir dizi olsun. $x \in X$ olmak üzere $\lim_n d(x_n, x) = 0$ ise $\{x_n\}$ dizisi x e yakınsaktır denir ve $\lim_n x_n = x$ veya $x_n \to x$ $(n \to \infty)$ şeklinde gösterilir [35].

Tanım 1.1.16. X boş olmayan bir küme ve τ, X in alt kümelerinin bir ailesi olsun. Eğer,

i) $X, \emptyset \in \tau$ dur.
ii) τ ya ait sonlu sayıda kümenin kesişimi, τ ya aittir.
iii) τ ya ait herhangi sayıda kümenin birleşimi, τ ya aittir.

şartları sağlanıyorsa τ ya X için bir topoloji ve (X, τ) ikilisine de bir topolojik uzay denir [36].

Tanım 1.1.17. X boş olmayan bir küme, F bir cisim olsun.

$$+: X \times X \to X \qquad \cdot: F \times X \to X$$
$$(x, y) \to x + y \qquad (\lambda, x) \to \lambda . x$$

ikili işlemleri $\forall \alpha, \beta \in F$ ve $\forall x, y, z \in X$ için

1) $x + y = y + x$
2) $x + (y + z) = (x + y) + z$
3) $\forall x \in X$ için $x + e = e + x = x$ olacak şekilde bir $e \in X$ vardır.
4) $\forall x \in X$ için $x + (-x) = (-x) + x = e$ olacak şekilde $(-x) \in X$ vardır.
5) $1 \cdot x = x$
6) $\alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$
7) $(\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$

8) $(\alpha \cdot \beta) \cdot x = \alpha \cdot (\beta \cdot x)$

şartlarını sağlıyorsa $(X, +, .)$ üçlüsüne F cismi üzerinde lineer uzay (vektör uzayı) denir [45].

$F = \mathbb{R}$ ise X e reel lineer uzay, $F = \mathbb{C}$ ise X e kompleks lineer uzay adı verilir.

Tanım 1.1.18. X, F cismi($F = \mathbb{R}$ veya $F = \mathbb{C}$) üzerinde bir lineer uzay olsun.

$$\begin{aligned} \|.\|: X &\to \mathbb{R} \\ x &\to \|x\| \end{aligned}$$

dönüşümü $\forall\, x, y \in X$ ve $\forall\, \alpha \in F$ için,

(N1) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$
(N2) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$
(N3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (üçgen eşitsizliği)

şartlarını sağlıyorsa $\|.\|$fonksiyonuna X de (veya X üzerinde) norm, $(X, \|.\|)$ ikilisine de bir normlu vektör uzayı denir [45].

Tanım 1.1.19. Bir $(X, \|.\|)$ normlu lineer uzayındaki her Cauchy dizisi X içinde bir limite sahip ise bu uzaya tam normlu uzay ya da Banach uzayı denir [45].

X in reel veya kompleks lineer uzay oluşuna göre Banach uzayı reel veya kompleks Banach uzayı olarak adlandırılır.

Tanım 1.1.20. V bir F skaleri üzerinde tanımlanan lineer bir vektör uzayı ve V kümesi üzerinde bir topoloji $\mathcal{B}$ olsun. $(V, \mathcal{B})$ bir Hausdorff uzayı ve çarpım topolojilere göre her $\alpha \in F$ ve $u, v \in V$ için

i) skalerle çarpma işlemi, yani $\alpha u \to v$ sürekli,
ii) vektörlerin toplamı işlemi, yani $(u, v) \to u + v$ sürekli

ise $(V, \mathcal{B})$ uzayı bir topolojik vektör uzayı ya da bir lineer topolojik uzay adını alır [45].

Tanım 1.1.21. λ bir lineer topolojik uzay olsun. $\forall i \in \mathbb{N}$ için $P_i(x) = x_i$ şeklinde tanımlanan $P_i : \lambda \to \mathbb{C}$ dönüşümü sürekli ise λ ya bir $K -$uzayı denir. Tam lineer metrik bir $K -$uzayına $FK -$uzayı, normlu $FK -$uzayına da $BK -$uzayı denir [19].

Örnek 1.1.22. $l_\infty, c\ ve\ c_0$ uzayları $\|x\|_\infty = \sup_k |x_k|$ normuna göre bir $BK -$uzayıdır [30].

Tanım 1.1.23. (X, τ) topolojik uzay ve $A \subseteq X$ olsun. A kümesi X de hiçbir yerde yoğun olmayan kümelerin sonlu bileşimi ise birinci kategoridendir denir. A kümesi böyle bir bileşimle ifade edilemiyorsa ikinci kategoridendir[45].

Örnek 1.1.24. $\mathbb{Q}$, rasyonel sayılar kümesi ve $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesi birinci kategoriden, $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi ikinci kategoridendir [45].

Teorem 1.1.25. (Baire teoremi) Her tam metrik uzay ikinci kategoridendir [45].

Tanım 1.1.26. E herhangi bir dizi uzayı olsun. Eğer $(x_k), (y_k) \in E$ iken $(x_k . y_k) \in E$ oluyorsa E ye dizi cebiri denir [50].

Tanım 1.1.27. I herhangi bir küme ve her bir $i \in I$ için bir A_i kümesi var olsun. i, I kümesini taradığında A_i lerin birleşimi ve arakesitleri sırasıyla $\bigcup_{i \in I} A_i$ ve $\bigcap_{i \in I} A_i$ ile gösterilir. I kümesine de damga (indis) kümesi denir [21].

Tanım 1.1.28. A bir küme ve I indis kümesi olmak üzere $\forall\ i \in I$ için A_i kümeleri, A nın alt kümeleri olsunlar.

(i) $\forall i \in I$ için $A_i \neq \emptyset$,
(ii) $(A_i)_{i \in I}$ ailesi ikişer ikişer ayrık,
(iii) $A = \bigcup_{i \in I} A_i$,

şartları sağlanıyorsa $(A_i)_{i\in I}$ ailesine A nın bir ayrışımı denir [19].

Örnek 1.1.29. $A=\{1,2,3,4,5\}$ kümesinin bir ayrışımı olarak, $A_1=\{1\}$, $A_2=\{2,3\}$, $A_3=\{4,5\}$ olmak üzere, $\{A_1,A_2,A_3\}$ alınabilir [43].

Tanım 1.1.30. A bir küme, S de bir küme ailesi olsun. Eğer $A\subset\bigcup_{X\in S}X$ ise S ye A nın bir örtüsü denir [21].

Tanım 1.1.31. Bir öz alt kümesiyle eş güçlü yani bir alt kümesiyle arasında bire bir ve örten bir fonksiyon olan kümeye sonsuz küme denir [35].

Örnek 1.1.32. $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesi sonsuz bir kümedir [35].

Tanım 1.1.33. $A=\{1,2,3,\dots,n\}$ $(n\in\mathbb{N})$ kümesi ile denk olan kümeye sonlu küme denir [35].

Tanım 1.1.34. $A=\emptyset$ yada A sonlu yada $A\approx\mathbb{N}$ (eş güçlü) ise A sayılabilir bir kümedir [35].

Tanım 1.1.35. $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesiyle denk olan kümeye sayılabilir sonsuz küme denir [35].

Tanım 1.1.36. Bir kümenin eleman sayısına o kümenin kardinalitesi (eleman sayısı) ya da kardinal sayısı denir [45].

Teorem 1.1.37. Sayılabilir bir kümenin her alt kümesi de sayılabilirdir [45].

Teorem 1.1.38. $\mathbb{N}x\mathbb{N}$ kümesi sayılabilir sonsuz bir kümedir [45].

Teorem 1.1.39. Sayılabilir kümelerin sayılabilir ailelerinin bileşimi de sayılabilirdir [45].

BÖLÜM 2. ÇİFT İNDİSLİ DİZİLER VE *P*-YAKINSAKLIK

2.1. Çift İndisli Diziler

Bu bölümde çift indisli dizi ve P-yakınsaklık kavramları incelenmiştir.

Tanım 2.1.1. Tanım kümesi ℕxℕ olan bir fonksiyona çift indisli dizi veya kısaca çift dizi denir [1].

Değer kümesi reel sayılar kümesi ise reel çift dizi, kompleks sayılar kümesi ise kompleks çift dizi olarak adlandırılır. Kompleks veya reel terimli bütün çift dizilerin kümesi Ω ile ifade edilecektir. Buna göre;

$$\Omega = \{x = (x_{mn}) : \forall m, n \in \mathbb{N} \ için \ x_{mn} \in \mathbb{C}\}$$

olup bu küme $\forall \alpha \in \mathbb{C}$ ve $\forall x, y \in \Omega$ için $\alpha . x = (\alpha x_{mn})$ ve $x + y = (x_{mn} + y_{mn})$ işlemleri altında bir vektör uzayıdır.

Tanım 2.1.2. $m \leq m'$ ve $n \leq n'$ olduğunda $x_{mn} \leq x_{m'n'}$ oluyorsa (x_{mn}) dizisine monoton artan çift dizi $m \geq m'$ ve $n \geq n'$ olduğunda $x_{mn} \leq x_{m'n'}$ oluyorsa (x_{mn}) dizisine monoton azalan çift dizi denir [18].

Teorem 2.1.3. Artan bir çift dizi üstten sınırlı ise limiti supremumuna, azalan bir çift dizi alttan sınırlı ise limiti infimumuna eşittir [16].

Tanım 2.1.4. $X \neq \emptyset$ bir küme ve

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{N}x\mathbb{N} \to X \\ (n,k) &\to f(n,k) = x_{nk} \end{aligned}$$

dizisi verilmiş olsun.

$$i:\mathbb{N}\to\mathbb{N} \qquad \text{ve} \qquad j:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$$
$$k\to i(k)=j_k \qquad\qquad n\to j(n)=i_n$$

artan iki fonksiyon (dizi) olmak üzere;

$$h:\mathbb{N}x\mathbb{N}\to X$$
$$(n,k)\to h(n,k)=(i_n,j_k)$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda,

$$f\circ h:\mathbb{N}x\mathbb{N}\to X$$
$$(n,k)\to f\circ h(n,k)=x_{i_n j_k}$$

bileşke fonksiyonuna (x_{nk}) dizisinin bir alt dizisi denir [38].

$\mathbb{N}x\mathbb{N}$ kümesinin sonsuz çoklukta (i_n,j_k) elemanı olduğundan, bir (x_{nk}) dizisinin sonsuz çoklukta alt dizisi vardır. Burada alt dizi, orijinal diziden artan sırada satır ve sütundan bazı elemanlar atılarak elde edilmektedir. (i_n,j_k) alt dizisinin her teriminin (x_{nk}) dizisinin bir terimi olduğu açıktır.

Önerme 2.1.5. Yakınsak bir çift indisli dizinin her alt dizisi yakınsaktır [38].

2.2. *P*-Yakınsaklık

Tek indisli dizilerdeki durumun tersine çift dizilerde birden fazla yakınsaklık kavramı mevcuttur. Bunlardan en fazla bilineni Pringsheim ve regüler yakınsaklıktır. Bu çalışmada yalnızca Pringsheim yakınsaklık ve onunla ilgili yakınsaklık türleri verilmiştir.

Tanım 2.2.1. Eğer m ve n birbirinden bağımsız olarak sonsuza yaklaşırken

$\lim_{m,n} x_{mn} = \ell$

olacak şekilde bir ℓ sayısı varsa $x = (x_{mn})_{m,n\in\mathbb{N}}$ çift dizisine Pringsheim anlamda yakınsak kısaca P-yakınsaktır denir. Yani her $\varepsilon > 0$ ve $(m,n) \in \mathbb{N}x\mathbb{N}$ için $\min\{m,n\} \geq N$ ve

$|x_{mn} - \ell| < \varepsilon$

olacak şekilde $N = N(\varepsilon)$ tamsayısı vardır. Burada ℓ değerine $x = (x_{mn})_{m,n\in\mathbb{N}}$ çift dizisinin Pringsheim limiti denir [39].

P-yakınsak dizilerin kümesi C^P ile gösterilir. C^P kümesi koordinatsal toplama ve skaler ile çarpma işlemlerine göre bir vektör uzayıdır.

Tanım 2.2.2. Keyfi bir $G > 0$ için $n_1 \leq n$ ve $m_1 \leq m$ iken $|x_{mn}| > G$ olacak şekilde $n_1\ ve\ m_1$ doğal sayıları var ise $x = (x_{mn})_{m,n\in\mathbb{N}}$ çift dizisine kesin ıraksak dizi denir ve $P - \lim_{m,n} x_{mn} = \infty$ şeklinde ifade edilir [39].

Tanım 2.2.3. $x = (x_{mn})_{m,n\in\mathbb{N}}$ çift dizisi verilsin. $\forall\varepsilon > 0$ için $m,n \geq k$ ve $i,j \geq k$ iken

$\left|x_{mn} - x_{ij}\right| < \varepsilon$

olacak şekilde bir $k \in \mathbb{N}$ sayısı var ise $x = (x_{mn})_{m,n\in\mathbb{N}}$ çift dizisine Cauchy dizisi denir [39].

Teorem 2.2.4. $x = (x_{mn})_{m,n\in\mathbb{N}}$ çift dizisinin P −yakınsak olması için gerek ve yeter şart $\forall\varepsilon > 0$ için

$\min\{m,n,i,j\} \geq N$ ve $\left|x_{ij} - x_{mn}\right| < \varepsilon$

olacak şekilde bir $N = N(\varepsilon)$ pozitif tamsayısının var olmasıdır [32].

Tanım 2.2.5. Reel sayıların bir $x = (x_{mn})_{m,n\in\mathbb{N}}$ çift dizisi için M>0 reel sayısı vardır öyleki tüm $m, n \in \mathbb{N}$ için $|x_{mn}|$ <M ise $(x_{mn})_{m,n\in\mathbb{N}}$ dizisine sınırlı dizi denir. Yani

$$\|x\|_{(\infty,2)} = sup_{m,n\geq 0}|x_{mn}| < \infty$$

ise $x = (x_{mn})_{m,n\in\mathbb{N}}$ çift dizisi sınırlıdır [31].

Bütün sınırlı çift dizilerin kümesi $(l_\infty)_2$ ile ifade edilecektir. Buna göre;

$$(l_\infty)_2 = \{x = (x_{mn}) \in \Omega : \ \|x\|_\infty = sup_{m,n\geq 0}|x_{mn}| < \infty\}$$

şeklinde tanımlanır. Pringsheim anlamda yakınsak bir çift dizisi sınırlı olmak zorunda değildir.

Tanım 2.2.6. Pringsheim anlamda yakınsak ve sınırlı olan çift dizilerin kümesi C^{PB} ile gösterilir. Yani

$$C^{PB} = \{x = (x_{mn}) \in c_2 : \ \|x\|_{(\infty,2)} = sup_{m,n\geq 0}|x_{mn}| < \infty\} = C^P \cap (l_\infty)_2$$

şeklinde ifade edilir. Bu uzay $\|x\|_{(\infty,2)}$ normu ile bir Banach uzayı teşkil eder [32].

Tek indisli dizilerin alışılmış yakınsaklığı ile çift dizilerin Pringsheim anlamda yakınsaklığı arasındaki temel fark şudur: Pringsheim anlamda yakınsak bir çift dizinin sınırlı olması gerekmez.

2.3. Pringsheim Limit Noktası, Pringsheim Alt Limit ve Üst Limit

Burada öncelikle $x = (x_{kl})$ çift dizisinin Pringsheim limit noktası, sonra da Pringsheim alt ve üst limit noktası tanımları verilecektir.

Tanım 2.3.1. $x = (x_{kl})$, (X, d) metrik uzayında bir çift dizi olsun. Eğer $x = (x_{kl})$ çift dizisinin $l \in X$ noktasına $P -$yakınsak bir alt dizisi var ise $l \in X$ noktasına $x = (x_{kl})$ çift dizisinin Pringsheim limit noktası denir [52].

$x = (x_{kl})$ çift dizisinin tüm Pringsheim limit noktaları kümesini L_x^2 ile göstereceğiz.

Tanım 2.3.2. $x = (x_{kl})$ reel sayıların bir çift dizisi ve

$$\alpha_n(x) = \sup\{x_{kl} : k, l \geq n\} \text{ ve } \beta_n(x) = \inf\{x_{kl} : k, l \geq n\}$$

olsun. Bu durumda en az bir $n \in \mathbb{N}$ için $\alpha_n(x) < \infty$ ve $\beta_n(x) > -\infty$ ise $x = (x_{kl})$ dizisi Pringsheim anlamda bir alt ve bir üst limite sahiptir. Buna göre; bir $x = (x_{kl})$ dizisinin Pringsheim üst limiti,

1. Eğer her bir $n \in \mathbb{N}$ için $\alpha_n(x) = +\infty$ ise $P - \limsup x_{kl} = +\infty$,
2. Eğer bazı $n \in \mathbb{N}$'ler için $\alpha_n(x) < \infty$ ise $P - \limsup x_{kl} = \inf_n\{\alpha_n(x)\}$

ve Pringsheim alt limiti,

1. Eğer her bir $n \in \mathbb{N}$ için $\beta_n(x) = -\infty$ ise $P - \liminf x_{kl} = -\infty$,
2. Eğer bazı $n \in \mathbb{N}$'ler için $\beta_n(x) > -\infty$ ise $P - \liminf x_{kl} = \sup_n\{\beta_n(x)\}$

şeklinde tanımlanır [37].

Aşağıdaki örnekle, bir çift dizinin alttan ve üstten sınırsız olmasına rağmen Pringsheim üst ve alt limitlerinin var olacağı görülür.

Örnek 2.3.3. $x = (x_{kl})$ çift dizisi,

$$x_{kl} = \begin{cases} k, & l=0 \quad için, \\ -l, & k=0 \quad için, \\ (-1)^k, & l=k>0 \quad için, \\ 0, & diğer\ hallerde \end{cases}$$

şeklinde tanımlanırsa $\sup x_{kl} = +\infty$ ve $\inf x_{kl} = -\infty$ olduğu halde $n \geq 2$ için $\alpha_n(x) = 1$ ve $\beta_n(x) = -1$ bulunduğundan, $P - \liminf x_{kl} = -1$ ve $P - \limsup x_{kl} = 1$ olur [37].

Teorem 2.3.4. $i)$ $\lim_{N\to\infty}(\sup_{n,k\geq N} x_{nk}) = L$ olması için gerek ve yeter şart verilen $\forall \varepsilon > 0$ için,

a) Yeteri kadar büyük seçilebilen her $n, k \geq N$ için $x_{nk} < L + \varepsilon$ ve
b) Sonsuz çoklukta (n, k) için $x_{nk} > L + \varepsilon$ olmasıdır.

$ii)$ $\lim_{N\to\infty}(\inf_{n,k\geq N} x_{nk}) = K$ olması için gerek ve yeter şart verilen $\forall \varepsilon > 0$ için,

a) Yeteri kadar büyük seçilebilen her $n, k \geq N$ için $x_{nk} > L + \varepsilon$ ve
b) Sonsuz çoklukta (n, k) için $x_{nk} < L + \varepsilon$ olmasıdır [38].

Teorem 2.3.5. $x = (x_{kl})$ reel değerli bir çift dizi olsun. Bu durumda dizinin P −limitleri arasında aşağıdaki bağıntılar mevcuttur;

1) $\liminf x \leq \limsup x$,
2) $P - \lim x = L \Leftrightarrow \liminf x = L = \limsup x$,
3) $\limsup(-x) = -\liminf x$,
4) $\limsup(x + y) \leq \limsup x + \limsup y$,
5) $\liminf(x + y) \geq \liminf x + \liminf y$,
6) Eğer z, x çift dizisinin bir alt dizisi ise

$\liminf x \leq \liminf z \leq \limsup z \leq \limsup x$ [37].

2.4. Bazı Yoğunluk Kavramları ve Aralarındaki İlişkiler

Tanım 2.4.1. $A \subset \mathbb{N}x\mathbb{N}$ ve $(m, n) \in \mathbb{N}x\mathbb{N}$ için $j \leq n, k \leq m$ olacak şekilde $(j, k) \in A$ ların sayısı $A(m, n)$ olsun. Eğer $\left\{\frac{A(m,n)}{m.n}\right\}_{m,n\in\mathbb{N}}$ dizisi Pringsheim anlamda bir limite sahipse A doğal çift yoğunluğa sahiptir denir. Yani alt doğal çift yoğunluk

$$\underline{d}_2(A) = \lim_{m,n\to\infty} inf\, \frac{A(m,n)}{m.n}$$

ve üst doğal çift yoğunluk

$$\overline{d}_2(A) = \lim_{m,n\to\infty} sup\, \frac{A(m,n)}{m.n}$$

olmak üzere alt ve üst doğal çift yoğunlukları mevcut ve birbirine eşit ise

$$d_2(A) = \lim_{m,n\to\infty} \frac{A(m,n)}{m.n}$$

mevcuttur ve $d_2(A)$ sayısına A kümesinin doğal çift yoğunluğu denir [6].

Tanım 2.4.2. $A \subset \mathbb{N}x\mathbb{N}$ ve χ_A, A kümesinin karakteristik fonksiyonu olmak üzere

$$\underline{\delta}_2(A) = \lim_{m,n\to\infty} inf\, \frac{1}{m.n} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \chi_A\,(i,j)$$

A kümesinin alt asimptotik yoğunluğu,

$$\overline{\delta}_2(A) = \lim_{m,n\to\infty} sup\, \frac{1}{m.n} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \chi_A\,(i,j)$$

A kümesinin üst asimptotik yoğunluğu olmak üzere alt ve üst asimptotik yoğunluk mevcut ve birbirine eşit ise

$$\delta_2(A) = \lim_{m,n\to\infty} \frac{1}{m.n} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \chi_A\,(i,j)$$

mevcuttur. Bu durumda $\delta_2(A)$ sayısına A kümesinin çift asimptotik yoğunluğu denir [22].

Tanım 2.4.3. $A \subset \mathbb{N}x\mathbb{N}$ ve χ_A, A kümesinin karakteristik bir fonksiyonu olmak üzere

$$\underline{\rho}_2(A) = \lim_{m,n\to\infty} inf \frac{1}{\ln m . \ln n} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \frac{\chi_A(i,j)}{m.n}$$

A kümesinin alt logaritmik yoğunluğu,

$$\overline{\rho}_2(A) = \lim_{m,n\to\infty} sup \frac{1}{\ln m . \ln n} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \frac{\chi_A(i,j)}{m.n}$$

A kümesinin üst logaritmik yoğunluğu olmak üzere alt ve üst logaritmik yoğunluklar mevcut ve birbirine eşit ise

$$\rho_2(A) = \lim_{m,n\to\infty} \frac{1}{\ln m . \ln n} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \frac{\chi_A(i,j)}{m.n}$$

mevcuttur. ρ_2(A) sayısına A kümesinin çift logaritmik yoğunluğu denir [22].

Keyfi bir $A \subset \mathbb{N}x\mathbb{N}$ için

$$\underline{\delta_2}(A) \leq \underline{\rho}_2(A) \leq \overline{\rho}_2(A) \leq \overline{\delta}_2(A)$$

eşitsizliği sağlanır.

2.5. Çift İndisli Dizilerin Bazı Yakınsaklık Tanımları

Tanım 2.5.1. $x = (x_{mn})_{m,n\in\mathbb{N}}$ çift dizisi verildiğinde her $\varepsilon > 0$ için her $m, i \geq z$ ve $n, j \geq k$ iken

$$\{(m,n) \in \mathbb{N}x\mathbb{N}: \left|x_{mn} - x_{ij}\right| \geq \varepsilon\}$$

kümesinin doğal çift yoğunluğu 0 olacak şekilde $k, z \in \mathbb{N}$ sayılar var ise $x = (x_{mn})_{m,n\in\mathbb{N}}$ dizisine istatistiksel Cauchy çift dizisi denir [34].

Tanım 2.5.2. Reel sayıların bir çift dizisi $x = (x_{mn})_{m,n\in\mathbb{N}}$ için herhangi bir $\varepsilon > 0$ sayısı alındığında

$A(\varepsilon) = \{(m,n) \in \mathbb{N}x\mathbb{N} | \, |x_{mn} - \ell| \geq \varepsilon\}$

kümesi için $d_2\big(A(\varepsilon)\big) = 0$ oluyorsa $x = (x_{mn})_{m,n\in\mathbb{N}}$ çift dizisi $\ell \in \mathbb{R}$ ye Pringsheim anlamda istatistiksel yakınsaktır denir ve $\mathrm{stat} - \lim_{m,n\to\infty} x_{mn} = \ell$ ile gösterilir [34].

Teorem 2.5.3. $x = (x_{mn})_{m,n\in\mathbb{N}}$ reel çift dizisinin istatistiksel yakınsak olması için gerek ve yeter şart $x = (x_{mn})_{m,n\in\mathbb{N}}$ çift dizisinin istatistiksel Cauchy dizisi olmasıdır [34].

Tanım 2.5.4. Reel sayıların bir çift indisli dizisi $x = (x_{mn})_{m,n\in\mathbb{N}}$ herhangi bir $\varepsilon > 0$ alındığında

$A(\varepsilon) = \{(m,n) \in \mathbb{N}x\mathbb{N} : \, |x_{mn} - \ell| \geq \varepsilon\}$

kümesi için $\rho_2(A) = 0$ ise $x = (x_{mn})_{m,n\in\mathbb{N}}$ çift dizisi $\ell \in \mathbb{R}$ sayısına Pringsheim anlamda logaritmik yakınsaktır denir ve $\log - \lim_{mn} x_{mn} = \ell$ şeklinde gösterilir [22].

Tanım 2.5.5. Reel sayıların bir çift dizisi $x = (x_{mn})_{m,n\in\mathbb{N}}$ Pringsheim anlamda bir limite sahip ve

$\lim_{n\to\infty} x_{mn} = x_m \qquad m = 1,2,\ldots$

$\lim_{m\to\infty} x_{mn} = x_n \qquad n = 1,2,\ldots$

limitleri mevcut ise $(x_{mn})_{m,n\in\mathbb{N}}$ çift dizisi regüler yakınsaktır denir [32].

Regüler yakınsak bir $x = (x_{mn})_{m,n\in\mathbb{N}}$ çift dizisi için $\lim_{n\to\infty} x_{mn}$ ve $\lim_{m\to\infty} x_{mn}$ limitleri mevcut ve Pringsheim limite eşittirler. Tüm regüler yakınsak çift dizilerin kümesi C^{PR} ile, 0 a regüler yakınsak çift dizilerin kümesi de C_0^{PR} ile gösterilir [17].

Bir çift dizinin regüler yakınsaklığı, Pringsheim anlamda yakınsaklığını gerektirdiği gibi aynı zamanda çift dizinin sınırlılığını da gerektirir. Fakat tersi doğru değildir.

Tanım 2.5.6. Reel sayıların bir çift dizisi $x = (x_{mn})_{m,n\in\mathbb{N}}$ Pringsheim anlamda logaritmik yakınsak ve

log-$\lim_{n\to\infty} x_{mn} = L_m \qquad m = 1,2,\ldots$

log-$\lim_{m\to\infty} x_{mn} = M_n \qquad n = 1,2,\ldots$

limitleri mevcut ise $x = (x_{mn})_{m,n\in\mathbb{N}}$ çift dizisi logaritmik regüler yakınsaktır denir [22].

Tanım 2.5.7. Reel sayıların bir çift dizisi $x = (x_{mn})_{m,n\in\mathbb{N}}$ Pringsheim anlamda istatistiksel yakınsak ve

stat-$\lim_{n\to\infty} x_{mn} = K_m \qquad m = 1,2,\ldots$

stat-$\lim_{m\to\infty} x_{mn} = N_n \qquad n = 1,2,\ldots$

limitleri mevcut ise x=$(x_{mn})_{m,n\in\mathbb{N}}$ çift dizisi istatistiksel regüler yakınsaktır denir [22].

BÖLÜM 3. I VE I^* YAKINSAKLIK

3.1. İdeal ve Süzgeç

Bu bölümde ideal ve süzgeç tanımları, I-yakınsaklık ve I-yakınsaklık ile ilgili genel tanım ve teoremler verildikten sonra I^* −yakınsaklık tanımlanarak bazı şartlar altında I ve I^* −yakınsaklığın denkliği incelenmiştir.

Tanım 3.1.1. 2^X, $X \neq \emptyset$ kümesinin kuvvet kümesi olmak üzere $I \subseteq 2^X$ ailesi için,

$i)$ $\emptyset \in I$
$ii)$ $A, B \in I$ için $A \cup B \in I$ (toplamsallık)
$iii)$ $A \in I$ ve $B \subset A$ ise $B \in I$ (kalıtsallık)

şartları sağlanıyorsa I ya X de bir ideal denir [26].

Tanım 3.1.2.Eğer $X \notin I$ ise I ya öz (nontrivial) ideal denir. Buna göre 2^X dışındaki tüm idealler öz idealdir [3].

Tanım 3.1.3. $\forall x \in X$ için $\{x\} \in I$ ise yani I ideali X nin tüm sonlu alt kümelerini içeriyor ise uygun (admissible) ideal olarak adlandırılır [25].

Tanım 3.1.4. Eğer I ideali kapsamaya göre maksimal olan bir öz ideal ise maksimal ideal olarak adlandırılır [25].

Tanım 3.1.5. 2^X, $X \neq \emptyset$ kümesinin kuvvet kümesi olmak üzere $F \subseteq 2^X$ ailesi için,

$i)$ $\emptyset \notin F$

$ii)$ $A, B \in F$ için $A \cap B \in F$

$iii)$ $A \in F$ ve $A \subset B$ için $B \in F$

şartları sağlanıyorsa F ye X de bir süzgeç ya da filtre denir [36].

Önerme 3.1.6. I, X de bir öz ideal olsun.

$F(I) = \{M \subset X : \exists\ A \in I$ vardır öyle ki $M = X/A\}$

şeklinde tanımlanan $F(I)$ kümesine X üzerinde I ideali ile ilgili süzgeç denir [25].

Biz bu tezde çift dizileri inceleyeceğimizden aldığımız I ideali ℕxℕ nin idealidir. Bu bölümde kullanacağımız ideal aksi belirtilmedikçe ℕxℕ nin uygun öz ideali olacaktır. Yani $\forall(m,n) \in$ ℕxℕ için $\{(m,n)\} \in I$ ve ℕxℕ $\notin I$ olacaktır.

Tanım 3.1.7. I, ℕxℕ nin bir öz ideali olsun. $i \in \mathbb{N}$ için ℕx$\{i\}$ ve $\{i\}$xℕ kümeleri I kümesine ait ise I ya kuvvetli uygun ideal denir [3].

Buradan kuvvetli uygun idealin, uygun bir ideal olduğunu söyleyebiliriz. Örneğin,

$I_0 = \{A \subset \mathbb{N}x\mathbb{N} : \exists\ m(A) \in \mathbb{N}\ için\ (i,j \geq m(A) \Rightarrow (i,j) \notin A)\}$

şeklinde tanımlanan I_0 ideali kuvvetli uygun bir öz idealdir. Bu durumda I kuvvetli uygun idealdir $\Leftrightarrow$ $I_0 \subset I$ dır [3].

Tanım 3.1.8. I, $\mathbb{N}x\mathbb{N}$ nin bir ideali olsun. Eğer $\forall A \subset \mathbb{N}x\mathbb{N}$ için $A \in I$ yada $(\mathbb{N}x\mathbb{N} / A) \in I$ ise I ya maksimal ideal denir [3].

3.2. I −Yakınsaklık

Tanım 3.2.1. I, $\mathbb{N}x\mathbb{N}$ nin bir ideali olsun. Reel sayıların bir çift dizisi $x = (x_{mn})_{m,n \in \mathbb{N}}$ olmak üzere, her $\varepsilon > 0$ için

$A(\varepsilon) = \{(m, n) \in \mathbb{N}x\mathbb{N}: |x_{mn} - \ell| \geq \varepsilon\} \in I$

ise $x = (x_{mn})_{m,n\in\mathbb{N}}$ çift dizisi $\ell \in \mathbb{R}$ ye I-yakınsaktır denir ve $\ell \in \mathbb{R}$ sayısına $x = (x_{mn})_{m,n\in\mathbb{N}}$ çift dizisinin I −limiti denir, $I - \lim_{m,n\to\infty} x_{mn} = \ell$ şeklinde gösterilir [3].

Eğer I ideali I_0 ideali ise I −yakınsaklık ile Pringsheim anlamda yakınsaklık aynıdır. Fakat I idealini $I_d = \{A \subset \mathbb{N}x\mathbb{N}: d_2(A) = 0\}$ ideali olarak alırsak I_d ideali ℕxℕ de uygun bir ideal olur ve I_d-yakınsaklık, istatistiksel yakınsaklık olur.

Tek indisli dizilerin bilinen anlamda yakınsaklığı dizinin sınırlı olmasını gerektirir. Fakat çift dizilerin yakınsaklığı (Pringsheim anlamda yakınsaklık) dizinin sınırlı olmasını gerektirmez. Yani I-yakınsak bir çift dizi sınırlı olmayabilir.

Örnek 3.2.2. ℕxℕ nin I_0 idealini alalım. $x = (x_{mn})_{m,n\in\mathbb{N}}$ çift dizisini de

$$x_{mn} = \begin{cases} n & , m = 1 \\ 2 & , m \neq 1 \end{cases}$$

olarak tanımlayalım. Bu durumda $x = (x_{mn})_{m,n\in\mathbb{N}}$ çift dizisi I-yakınsaktır ancak sınırlı değildir [3].

Tanım 3.2.3. Reel sayıların $x = (x_{mn})_{m,n\in\mathbb{N}}$ çift dizisi verilsin. $\forall\varepsilon > 0$ için,

$$\{(n, m) \in \mathbb{N}x\mathbb{N}: \left|x_{mn} - x_{ij}\right| \geq \varepsilon\} \in I$$

olacak şekilde $i = i(\varepsilon), j = j(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sayıları var ise $x = (x_{mn})_{m,n\in\mathbb{N}}$ çift dizisine $I -$ Cauchy dizisi denir [22].

Tanım 3.2.4. $x = (x_{mn})_{m,n\in\mathbb{N}}$ çift dizisi 0 a Pringsheim anlamda I-yakınsak ise $x = (x_{mn})_{m,n\in\mathbb{N}}$ çift dizisine Pringsheim anlamda I −null (I-sıfır) çift dizi denir [22].

Tanım 3.2.5. I, ℕ de bir ideal olsun. $x = (x_{mn})_{m,n\in\mathbb{N}}$ çift dizisi Pringsheim anlamda I-yakınsak ve her $\varepsilon > 0$ için

$\{n \in \mathbb{N}: |x_{mn} - L_m| \geq \varepsilon\} \in I$ her $m \in \mathbb{N}$ için $L_m \in c$

ve

$\{m \in \mathbb{N}: |x_{mn} - M_n| \geq \varepsilon\} \in I$ her $n \in \mathbb{N}$ için $M_n \in c$

ise $x = (x_{mn})_{m,n\in\mathbb{N}}$ çift dizisi regüler I- yakınsaktır [22].

Tanım 3.2.6. I, ℕ de bir ideal olsun. $x = (x_{mn})_{m,n\in\mathbb{N}}$ çift dizisi Pringsheim anlamda I-null ve her $\varepsilon > 0$ için

$\{n \in \mathbb{N}: |x_{mn}| \geq \varepsilon\} \in I$ (her $m \in \mathbb{N}$ için)

ve

$\{m \in \mathbb{N}: |x_{mn}| \geq \varepsilon\} \in I$ (her $n \in \mathbb{N}$ için)

ise $x = (x_{mn})_{m,n\in\mathbb{N}}$ çift dizisi regüler I- null dur [22].

3.3. Bazı İdeal Yakınsak Dizi Örnekleri

Örnek 3.3.1. $I_2(P)$, ℕxℕ nin tüm alt kümelerinin bir sınıfı olsun. $n_0, k_0 \in \mathbb{N}$ için $D \subset \mathbb{N}x\mathbb{N} - \{(n,k) \in \mathbb{N}x\mathbb{N}: n \geq n_0, k \geq k_0\}$ olsun. $D \in I_2(P)$ dir. Bu durumda $I_2(P)$, ℕxℕ nin bir idealidir ve $x = (x_{mn})_{m,n\in\mathbb{N}}$ çift dizisinin I −yakınsaklığı bilinen anlamda Pringsheim yakınsaklık olur [22].

Örnek 3.3.2. Eğer $I_2(P)$ ile beraber ℕ nin tüm sınırlı alt kümelerinin sınıfı olan $I(f)$ de ℕ nin bir ideali ise o zaman $x = (x_{mn})_{m,n\in\mathbb{N}}$ çift dizisi için I −yakınsaklık bilinen regüler I −yakınsaklık olacaktır [22].

Örnek 3.3.3. $I_2(p)$, ℕxℕ nin tüm alt kümelerinin bir sınıfı ve 0 doğal yoğunluklu olsun. O halde $I_2(p)$, ℕxℕ nin bir idealidir ve $x = (x_{mn})_{m,n\in\mathbb{N}}$ çift dizisi için I −yakınsaklık bildiğimiz istatistiksel yakınsaklık olacaktır [22].

Örnek 3.3.4. $I_2(p^*)$, ℕxℕ nin tüm alt kümelerinin sınıfı ve 0 logaritmik yoğunluklu olsun. $I_2(p^*)$ ın ℕxℕ'nin ideali olduğu kolayca görülebilir. Bu durumda $x = (x_{mn})_{m,n\in\mathbb{N}}$ çift dizisinin I-yakınsaklığı logaritmik yakınsaklık olacaktır [22].

3.4. Bazı Sonuçlar

Teorem 3.4.1. I, $\mathbb{N}x\mathbb{N}$ nin uygun bir ideali olsun. $x = (x_{ij})_{i,j\in\mathbb{N}}$ çift dizisinin I-yakınsak olması için gerek ve yeter şart I-Cauchy olmasıdır [22].

Z_2, $\mathbb{N}x\mathbb{N}$ nin tüm uygun ideallerinin sınıfı, Z_{0_2} de $\mathbb{N}x\mathbb{N}$ nin tüm I-yakınsak uygun ideallerinin sınıfı olsun. Z_2 sınıfı kapsamadan dolayı kısmen sıralıdır. Eğer $Z_{0_2} \subset Z_2$ boş olmayan tam sıralı bir alt kümesi ise $\bigcup Z_{0_2}$, $\mathbb{N}x\mathbb{N}$ nin, Z_{0_2} nin bir üst sınırı olan uygun bir idealidir. Bu yüzden Zorn Lemma sı gereği Z_2 maksimal elemana yani maksimal uygun ideale sahiptir.

Lemma 3.4.2. I_0, $\mathbb{N}x\mathbb{N}$ nin uygun bir ideali olsun. Eğer her $A \subset \mathbb{N}x\mathbb{N}$ için $A \in I_0$ yada $\mathbb{N}x\mathbb{N} \ / \ A \in I_0 \Leftrightarrow I_0$ maksimal idealdir [6].

Teorem 3.4.3. I, $\mathbb{N}x\mathbb{N}$ nin bir ideali olmak üzere kompleks sayıların (a_{nk}) çift dizisi I −yakınsaktır $\Leftrightarrow I$ −Cauchy dizisidir [6].

3.5. I^* −Yakınsaklık

Tanım 3.5.1. $x = (x_{mn})_{m,n\in\mathbb{N}}$ reel sayıların bir çift dizisi olsun.

$$F(I) = \{M \subset \mathbb{N}x\mathbb{N} \mid \exists A \in I, M = \mathbb{N}x\mathbb{N} \ / \ A\}$$

olmak üzere $\mathbb{N}x\mathbb{N}\ /\ M \in I$ olacak şekilde bir $M \in F(I)$ kümesi var ve $(m,n) \in M$ için

$$\lim_{\substack{m,n\to\infty \\ (m,n)\in M}} x_{mn} = \ell$$

olacak şekilde $\ell \in \mathbb{R}$ sayısı varsa $x = (x_{mn})_{m,n\in\mathbb{N}}$ çift indisli dizisi $\ell \in \mathbb{R}$ ye I^*-yakınsaktır denir ve $I^* - \lim_{m,n\to\infty} x_{mn} = \ell$ şeklinde yazılır [3].

Teorem 3.5.2. I, $\mathbb{N}x\mathbb{N}$ nin kuvvetli uygun bir ideali olsun. Eğer

$$I^* - \lim_{m,n\to\infty} x_{mn} = \ell \text{ ise } I - \lim_{m,n\to\infty} x_{mn} = \ell$$

dir [3].

İspat: Kabulümüz gereği

$$I^* - \lim_{m,n\to\infty} x_{mn} = \ell$$

olduğundan $\mathbb{N}x\mathbb{N}\ /\ M = H \in I$ olacak şekilde $M \subset F(I)$ ve $\forall (m,n) \in M$ için

$$\lim_{m,n\to\infty} x_{mn} = \ell$$

limiti vardır. Bu durumda $\forall (m,n) \in M$ ve $\forall m,n \geq n_0$ için

$$|x_{mn} - \ell| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı vardır. Şimdi

$$A(\varepsilon) = \{(m,n) \in \mathbb{N}x\mathbb{N} :\ |x_{mn} - \ell| \geq \varepsilon\}$$

kümesini alalım,

$$A(\varepsilon) \subset H \cup \left[M \cap \left((\{1,2,\ldots,n_0-1\}x\mathbb{N}) \cup (\mathbb{N}x\{1,2,\ldots,n_0-1\})\right)\right] \in I$$

olduğundan $A(\varepsilon) \in I$ dır. Bu da $I - \lim_{m,n\to\infty} x_{mn} = \ell$ olmasını gerektirir.

Bu teoremin tersi doğru değildir. Bunu bir örnekle açıklayabiliriz.

Örnek 3.5.3. $\mathbb{N} = \bigcup_{i=1}^{\infty} N_i$ olacak şekilde N_i ler $\mathbb{N}$ nin ayrık ayrışımı olsun. Her i için N_i sonsuz bir kümedir. Bu durumda $\mathbb{N}x\mathbb{N} = \bigcup_{i=1}^{\infty}\bigcup_{j=1}^{\infty}\left(N_i x N_j\right)$ olacak şekilde $N_i x N_j$ ler $\mathbb{N}x\mathbb{N}$ nin ayrık bir ayrışımıdır.

$$I = \left\{A \subset \mathbb{N}x\mathbb{N} : baz\imath\ p,q \in \mathbb{N}^+\ i\c{c}in\ A \in \left(\mathbb{N}x\left(\bigcup_{i=1}^{p} N_i\right)\right) \cup \left(\left(\bigcup_{j=1}^{q} N_j\right)x\mathbb{N}\right)\right\}$$

dır. Bu durumda açıktır ki I, $\mathbb{N}x\mathbb{N}$ nin uygun bir idealidir. Yani H, $\mathbb{N}$ nin sonlu bir alt kümesi olmak üzere $\mathbb{N}xH \in I$ ve $Hx\mathbb{N} \in I$ dır. Şimdi $(m,n) \in N_i x N_j$ olmak üzere $x = (x_{mn})_{m,n\in\mathbb{N}}$ çift indisli dizisini

$$x_{mn} = \frac{1}{i} + \frac{1}{j},\ i,j = 1,2,3,\ldots$$

olarak tanımlayalım. Açıkça görülüyor ki $\lim_{m,n\to\infty} x_{mn} = 0$ ve dolayısıyla idealin tanımından dolayı $I - \lim_{m,n\to\infty} x_{mn} = 0$ dır. Şimdi $I^* - \lim_{m,n\to\infty} x_{mn} = 0$ olmadığını gösterelim. Kabul edelim ki

$$I^* - \lim_{m,n\to\infty} x_{mn} = 0$$

olsun. $m,n = 1,2,\ldots$ ve $K \subset F(I)$ olacak şekilde bir $K = \{(m,n)\}$ kümesi alalım. Bu durumda

$$\lim_{\substack{m,n\to\infty \\ (m,n)\in K}} x_{mn} = 0$$

dır. $K \subset F(I)$ olduğundan $K = \mathbb{N}x\mathbb{N} \,/\, B$ olacak şekilde bir $B \in I$ kümesi vardır. I idealinin tanımından

$(\mathbb{N}x(\bigcup_{i=1}^{p} N_i) \cup (\bigcup_{j=1}^{q} N_j)x\mathbb{N}) \subset B$

olacak şekilde p ve q pozitif tamsayıları vardır. Bu durumda $N_{p+1}xN_{q+1} \subset K$ ve bu yüzden sonsuz çoklukta $(m,n) \in N_{p+1}xN_{q+1} \subset K$ için

$$x_{mn} = \frac{1}{p+1} + \frac{1}{q+1}$$

olur. Buradan da anlaşılır ki $(m,n) \in K$ için $\lim_{m,n\to\infty} x_{mn}$ limiti bulunamaz. O halde bu

$I^* - \lim_{m,n\to\infty} x_{mn} = 0$ olması ile çelişir [6].

Teorem 3.5.4. (X,d) bir metrik uzay olsun.

(i) Eğer X bir yığılma noktasına sahip değilse kuvvetli uygun I ideali için $I\ ve\ I^*$-yakınsaklık denktir (eşdeğerdir).

(ii) Eğer X bir ξ yığılma noktasına sahip ise kuvvetli uygun I ideali ve $x = (x_{mn})_{m,n\in\mathbb{N}}$ çift indisli dizisi için

$I - \lim_{m,n\to\infty} x_{mn} = \xi$ varken $I^* - \lim_{m,n\to\infty} x_{mn}$ yoktur [3].

İspat: (i) Teorem 3.5.2. dan dolayı $\xi \in X$ ve

$I^* - \lim_{m,n\to\infty} x_{mn} = \xi$ olduğunda $I - \lim_{m,n\to\infty} x_{mn} = \xi$

olduğunu biliyoruz. Göstermemiz gereken ise $\xi \in X$ için

$I - \lim_{m,n\to\infty} x_{mn} = \xi$ olduğunda $I^* - \lim_{m,n\to\infty} x_{mn} = \xi$

olduğudur. X bir yığılma noktasına sahip olmadığından bir $\delta > 0$ sayısı vardır öyle ki

$$B(\xi, \delta) = \{x \in X : d(x, \xi) < \delta\} = \{\xi\}$$

dir. $I - \lim_{m,n\to\infty} x_{mn} = \xi$

olduğundan dolayı

$$\{(m, n) \in \mathbb{N}x\mathbb{N}: d(x_{mn}, \xi) \geq \delta\} \in I$$

vardır. Bu durumda

$$\{(m, n) \in \mathbb{N}x\mathbb{N}: d(x_{mn}, \xi) < \delta\} = \{(m, n) \in \mathbb{N}x\mathbb{N} : \ x_{mn} = \xi\} \in F(I)$$

olduğundan dolayı $I^* - \lim_{m,n\to\infty} x_{mn} = \xi$

olur ispat biter.

(ii) ξ ,X de bir yığılma noktası olsun. Bir $\left(z_j\right)_{j\in\mathbb{N}}$ dizisi X in ξ den farklı tüm noktalarının dizisi olsun. Bu durumda $\left(z_j\right)_{j\in\mathbb{N}}$ dizisi ξ ye yakınsar yani $(d\left(z_j, \xi\right))_{j\in\mathbb{N}}$ dizisi 0 a yakınsar. $\left(E_j\right)_{j\in\mathbb{N}}$ $\mathbb{N}$ nin sonsuz ayrışımı olduğunda

$$\Delta_\mathrm{j} = \{(\mathrm{m}, \mathrm{n}) \in \mathbb{N}\mathrm{x}\mathbb{N} : \min\{\mathrm{m}, \mathrm{n}\} \in \mathrm{E_j}\}$$

şeklinde tanımlanan $\left(\Delta_\mathrm{j}\right)_{\mathrm{j}\in\mathbb{N}}$ $\mathbb{N}x\mathbb{N}$ nin bir ayrışımı olur.

$$I = \{A \subset \mathbb{N}x\mathbb{N} : A, \Delta_j \text{ nin sonlu bileşimlerindedir }\}$$

ideali de $\mathbb{N}x\mathbb{N}$ nin kuvvetli uygun bir idealidir. $x = (x_{mn})$ çift dizisini

$x_{mn} = z_j \Leftrightarrow (m,n) \in \Delta_j$

şeklinde tanımlayalım. $n \in \mathbb{N}$ için

$\varepsilon_n = d(z_n, \xi)$

alalım ve $\eta > 0$ verilmiş olsun. $\varepsilon_\nu < \eta$ olacak şekilde bir $\nu \in \mathbb{N}$ seçelim. Bu durumda,

$A(\eta) = \{(m,n) \in \mathbb{N}x\mathbb{N} : d(x_{mn}, \xi) \geq \eta\} \subset \Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \ldots \cup \Delta_\nu \in I$

olduğundan $A(\eta) \in I$, dolayısıyla da $I - \lim_{m,n\to\infty} x_{mn} = \xi$

olur. Şimdi kabul edelim ki $I^* - \lim_{m,n\to\infty} x_{mn} = \xi$

olsun. Bu durumda $M \subset F(I)$ ve $M = \mathbb{N}x\mathbb{N} \,/\, H$ olacak şekilde $H \in I$ vardır öyle ki

$\lim_{\substack{m,n\to\infty \\ (m,n)\in M}} x_{mn} = \xi$

dir. I idealinin tanımından dolayı bir $\ell \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki

$H \subset \Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \ldots \cup \Delta_\ell$

bulunur. Fakat $\Delta_{\ell+1} \subset$ ℕxℕ / H dir. $\Delta_{\ell+1}$ in yapısından dolayı bazı $n_0 \in \mathbb{N}$ için $\{m,n\} \geq n_0$ ve $(m,n) \in M$ ile sonsuz çoklukta (m,n) için

$d(x_{mn}, \xi) = \varepsilon_{\ell+1} > 0$

olur. Bundan dolayı $(m,n) \in M$ için $\lim_{m,n\to\infty} x_{mn} = \xi$

olması ile çelişir. (Burada $I^* - \lim_{m,n\to\infty} x_{mn} = p$ vardır ancak $p \neq \xi$ dir) O halde

$I^* - \lim_{m,n\to\infty} x_{mn}$ limiti yoktur.

3.6. AP ve AP2 Şartı

Tanım 3.6.1. (AP şartı) $I, \mathbb{N}$ nin uygun bir ideali olsun. O halde I ya ait ikişerli ayrık $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ kümelerinin her sayılabilir aileleri için $A_n \Delta B_n$ sonlu bir küme ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in I$ ve olacak şekilde I ya ait sayılabilir $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ kümeleri var ise I uygun ideali AP özelliğini sağlar denir [25].

Bu tanım $\mathbb{N}x\mathbb{N}$ nin uygun idealleri için de benzer şekildedir. Tek ve çift indisli dizilerde I −yakınsaklık benzerdir. Yani $\mathbb{N}$ ve $\mathbb{N}x\mathbb{N}$ arasındaki birebir ve örten bazı dönüşümler yardımıyla tek indisli dizilerden çift indisli dizilere, aynı zamanda $\mathbb{N}$ nin idealinden $\mathbb{N}x\mathbb{N}$ nin idealine I −yakınsama ve AP şartı korunur. Ancak I^* −yakınsaklık bu özelliği korumaz.

Tek indisli dizilerde (AP) özelliğini sağlayan uygun idealler için I ve I^* −yakınsaklık kavramlarının denk olduğu gösterilmiştir [25]. Ancak tek indisli dizilerden farklı olarak çift indisli dizilerde (AP) özelliğinin sağlanması I ve I^* −yakınsaklık kavramlarının denkliği için gerek şart değildir [1]. Eğer I, $\mathbb{N}x\mathbb{N}$ nin AP koşulunu sağlayan uygun bir ideali ise herhangi $x = (x_{mn})_{m,n\in\mathbb{N}}$ çift dizisi I- yakınsak ise I^*-yakınsaktır.

Örnek 3.6.2. $\mathbb{N}x\mathbb{N}$ nin I_0 ideali (I_0 ideali için I −yakınsaklık Pringsheim anlamda yakınsaklıkla örtüşür) için I ve I^*-yakınsaklık denktir. Ancak dikkat edilirse $\forall\ i \in \mathbb{N}$ için $B_i = \{i\}x\mathbb{N} \in I_0$ ve $(B_i)_{i\in\mathbb{N}}$ $\mathbb{N}x\mathbb{N}$ nin bir ayrışımı olsun. Eğer $\mathbb{N}x\mathbb{N}$ den her bir $(B_i)_{i\in\mathbb{N}}$ nin yalnızca sonlu elemanını çıkarırsak kalan son küme I_0 a ait olmaz. Bu durumda I_0 ideali AP şartını sağlamaz [3].

Yukarıdaki örnekten de anlaşılacağı üzere çift indisli dizilerin I ve I^*-yakınsaklığının denkliği için farklı bir özellik (şart) vermek gerekir.

Tanım 3.6.3. (AP2 şartı) I, $\mathbb{N}x\mathbb{N}$ nin uygun bir ideali olsun. Bu durumda I ya ait ikişerli ayrık $(A_j)_{j\in\mathbb{N}}$ kümelerinin her sayılabilir aileleri için $A_J\Delta B_j \in I_0$ (yani $\forall j \in \mathbb{N}$ için $A_j\Delta B_j$ kümesi $\mathbb{N}x\mathbb{N}$ nin satır ve sütunlarının sonlu bileşimlerine dahildir) ve $\forall j \in \mathbb{N}$ için $B = \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j \in I$ olacak şekilde I ya ait sayılabilir $(B_j)_{j\in\mathbb{N}}$ küme ailesi var ise I uygun ideali AP2 özelliğini sağlar denir [3].

Teorem 3.6.4. (X, d) keyfi bir metrik uzay ve $I, \mathbb{N}x\mathbb{N}$ nin AP2 şartını sağlayan uygun bir ideali olsun. Bu durumda X in keyfi bir $x = (x_{mn})_{m,n\in\mathbb{N}}$ çift dizisi için

$I - \lim_{m,n\to\infty} x_{mn} = \xi$ var ise $I^* - \lim_{m,n\to\infty} x_{mn} = \xi$

de vardır [3].

Teorem 3.6.5. (X, d) bir metrik uzay ve X en az bir yığılma noktasına sahip olsun. X in keyfi bir çift dizisi $x = (x_{mn})_{m,n\in\mathbb{N}}$ ve $\forall\ \xi \in X$ için

$I - \lim_{m,n\to\infty} x_{mn} = \xi$ iken $I^* - \lim_{m,n\to\infty} x_{mn} = \xi$

oluyorsa I ideali AP2 şartını sağlar [3].

Teorem 3.6.6. Çift dizilerin I_d-yakınsaklığı $I^*{}_d$-yakınsaklığını gerektirir [3].

İspat: Reel sayıların bir çift dizisi $x = (x_{mn})_{m,n\in\mathbb{N}}$ $\xi \in \mathbb{R}$ ye I_d-yakınsak olsun.

$A_1 = \{(m, n) \in \mathbb{N}x\mathbb{N} : d(x_{mn}, \xi) \geq 1\}$

ve

$A_k = \{(m, n) \in \mathbb{N}x\mathbb{N} : \frac{1}{k} \leq d(x_{mn}, \xi) < \frac{1}{k-1} \quad k = 2,3, \ldots\}$

olsun. Varsayımdan dolayı $\forall k \in \mathbb{N}$ için $d_2(A_k) = 0$ dır. I ideal tanımından $p \in \mathbb{N}$ için $d_2\left(\bigcup_{k=1}^{p} A_k\right) = 0$ dır. $p \in \mathbb{N}$ için $n \geq T_p, m \geq T_p$ olacak şekilde bir T_p doğal sayısı olsun öyle ki

$$\frac{1}{m.n} card\{(i,j) \in \mathbb{N}x\mathbb{N} : i \leq m \; ve \; j \leq n \; ve \; (i,j) \in \bigcup_{k=1}^{p} A_k\} < \frac{1}{p}$$

dir. Buradan açıkça söyleyebiliriz ki $\left(T_p\right)_{p\in\mathbb{N}}$ artan bir dizidir.

$$C_p = \{(i,j) \in \mathbb{N}x\mathbb{N} : \; T_p \leq \min\{i,j\} < T_{p+1}\}$$

ve $p \in \mathbb{N}$ için $D = \bigcup_{p=1}^{\infty} D_p$ olacak şekilde $D_p = C_p \cap \bigcup_{k=1}^{p} A_k$ vardır. Biz $d_2(D) = 0$ olduğunu göstermeliyiz. $\eta > 0$ ve $p \in \mathbb{N}$ için $\frac{1}{p} < \eta$ ise $(m,n) \in C_p$ için

$$(\{1,2,\dots,m\}x\{1,2,\dots,n\}) \cap D \subset (\{1,2,\dots,m\}x\{1,2,\dots,n\}) \cap \bigcup_{k=1}^{p} A_k$$

dır. Bu yüzden böyle (m,n) ler için

$$\frac{1}{m.n} card\{(i,j) \in \mathbb{N}x\mathbb{N} : i \leq m \; ve \; j \leq n \; ve \; (i,j) \in D\} < \frac{1}{p}$$

olur. Böylece $d_2(D) = 0$ olduğu görülür. Aynı zamanda $n \geq T_p, m \geq T_p$ ve $(m,n) \notin D$ için

$$|x_{mn} - \xi| < \frac{1}{p}$$

vardır. Yani x_{mn} dizisi $\xi \in \mathbb{R}$ ye $I^*{}_d -$ yakınsaktır. Bu durumda I_d ideali AP2 şartını sağlar. Şimdi de I_d idealinin AP şartını sağlamadığını gösterelim. İlk olarak $\left(E_p\right)_{p\in\mathbb{N}}$ $\mathbb{N}$ nin 0 doğal yoğunluklu alt kümelerinin bir dizisi olsun öyle ki $\bigcup_{p=1}^{\infty} E_p = \mathbb{N}$ dir. $p \in \mathbb{N}$ için $A_P = E_p x\mathbb{N}$ alalım. Açıkça görülüyor ki $p \in \mathbb{N}$ için $d_2\left(A_p\right) = 0$ dır. $(B_p)_{p\in\mathbb{N}}$ $\mathbb{N}x\mathbb{N}$ nin alt kümelerinin bir dizisi olsun öyle ki

$card(A_p \Delta B_p) < \aleph_0$

dır. Bu durum $\mathbb{N}x\mathbb{N}$ nin sonlu alt kümelerinin bir $\left(F_p\right)_{p\in\mathbb{N}}$ dizisi vardır öyle ki $A_p \ / \ F_p \subset B_p$ dir. Şimdi biz $d_2\left(\bigcup_{p=1}^{\infty} B_p\right) \neq 0$ olduğunu göstermeliyiz. Örneğin

$$\overline{d_2}\left(\bigcup_{p=1}^{\infty} B_p\right) = \overline{d_2}\left(A_p/F_p\right) = 1$$

olsun. $\forall n \in \mathbb{N}$ ve m keyfi bir doğal sayı için $n \geq m$ olsun. $\forall \eta > 0$ için

$$\frac{1}{m.n} card\{(i,j) \in \mathbb{N}x\mathbb{N} : i \leq m \ ve \ j \leq n \ ve \ (i,j) \in \bigcup_{p=1}^{\infty}\left(A_p \ / \ F_p\right)\} > 1 - \eta$$

dır. Şimdi bir $P_0 \in \mathbb{N}$ seçelim öyle ki $\{1,2,\dots,m\} \subset \bigcup_{i=1}^{P_0} E_{\mathrm{i}}$, $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_{\mathrm{i}} = \mathbb{N}$ olduğundan dolayı $\{1,2,\dots,m\}x\mathbb{N} \subset \bigcup_{i=1}^{P_0} A_i$ dir. Buradan açık bir şekilde F nin sonlu olduğu yerde

$$(\{1,2,\dots,m\}x\mathbb{N}) \ / \ F \subset \bigcup_{i=1}^{P_0}(A_i/F_i)$$

dir. Bu yüzden $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$(\{1,2,\dots,m\}x\{1,2,\dots,n\}) \ / \ F \subset (\{1,2,\dots,m\}x\{1,2,\dots,n\}) \cap \left(\bigcup_{i=1}^{P_0}(A_i/F_i)\right) \subset$$
$$(\{1,2,\dots,m\}x\{1,2,\dots,n\}) \cap (\bigcup_{i=1}^{\infty}(A_i/F_i)$$

dir. Ancak burada F, n ye bağlı değildir ve yeteri kadar büyük $n \in \mathbb{N}$ için

$$\frac{1}{m.n} card\{(\{1,2,\dots,m\}x\{1,2,\dots,\}) \cap \bigcup_{i=1}^{\infty}(A_i \ / \ F_i)\} > 1 - \eta$$

eşitsizliğine ulaşırız. Buradan da $\overline{d_2}\left(\bigcup_{p=1}^{\infty} B_p\right) = 1$ ve dolayısıyla $\bigcup_{p=1}^{\infty} B_p \notin I_d$ olur. Buda bize I_d idealinin AP şartını sağlamadığını gösterir.

Aşikar olarak çift diziler için AP şartı AP2 şartından daha kuvvetlidir. Örneğin I_0 idealini alırsak I_0 ideali AP2 şartını sağlar ama AP şartını sağlamaz. I_d idealini alırsak I_d ideali de AP2 şartını sağlar ama AP şartını sağlamaz.

BÖLÜM 4. I −ÜST LİMİT VE I −ALT LİMİT

Bu bölümde I idealiyle alakalı bazı genel tanımlar, örnekler ve teoremler verildikten sonra, I −üst limit ve I −alt limit tanımları ve genel sonuçları verilmiştir.

4.1. I −Sınırlılık, I −Limit ve I −Yığılma Noktası

Tanım 4.1.1. I_2, $\mathbb{N}x\mathbb{N}$'nin bir uygun ideali olsun. Eğer $\{(n,k) \in \mathbb{N}x\mathbb{N} : x_{nk} < K\} \in I_2$ olacak şekilde bir K reel sayısı var ise (x_{nk}) reel çift dizisi I −alttan sınırlı; $\{(n,k) \in \mathbb{N}x\mathbb{N} : x_{nk} > K\} \in I_2$ olacak şekilde bir K reel sayısı var ise (x_{nk}) reel çift dizisi $I-$ üstten sınırlıdır denir. Eğer (x_{nk}) reel çift dizisi hem alttan hem de üstten I −sınırlı ise (x_{nk}) reel çift dizisi I −sınırlıdır denir [24].

Tanım 4.1.2. I_2, $\mathbb{N}x\mathbb{N}$'nin bir ideali olsun. Eğer $\forall\varepsilon > 0$ için

$$\{(n,k) \in \mathbb{N}x\mathbb{N} : |x_{nk} - \zeta| < \varepsilon\} \notin I_2$$

ise ζ sayısına $x = (x_{nk})$ çift dizisinin Pringsheim anlamda I −yığılma noktası denir [16].

$x = (x_{nk})$ çift dizisinin tüm I −yığılma noktaları kümesini $I_2(\Gamma_x)$ ile göstereceğiz.

Tanım 4.1.3. I_2, $\mathbb{N}x\mathbb{N}$'nin bir öz (nontrivial) ideali olsun. Eğer $M \notin I_2$ olacak şekilde bir $M = \{n_1 < n_2 < \cdots\}x\{k_1 < k_2 < \cdots\} \subset Nx\mathbb{N}$, yani ,

$M = \{(n_i, k_j): i,j \in \mathbb{N}\; n_i < n_{i+1}, k_j < k_{j+1}\} \subset \mathbb{N}x\mathbb{N}$ kümesi var ise $P-\lim_{i,j\to\infty} x_{n_i k_j} = \xi$ olmak üzere $\xi \in \mathbb{R}$ noktasına $x = (x_{nk})$ çift dizisinin Pringsheim anlamda $I-$ limit noktası denir [16].

$x = (x_{nk})$ çift dizisinin tüm I −limit noktaları kümesini $I_2(\Lambda_x)$ ile göstereceğiz.

Örnek 4.1.4. $I = \{A \subset \mathbb{N}x\mathbb{N} : d_2(A) = 0\}$ olmak üzere bir (x_{nk}) çift indisli dizisi

$$x_{nk} = \begin{cases} 1, & n = k \ \ ise, \\ k, & diğer, \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda $L_x^2 = \text{Pringsheim limit noktaları kümesi } = \{1\}$ bulunur fakat I −limit noktası yoktur. Yani $I_2(\wedge_x) = \emptyset$ dir [5].

Önerme 4.1.5. Çift dizinin I-limiti varsa tekdir [6].

İspat: Kabul edelim ki $x = (x_{ij})$ bir çift dizi, $\xi \neq \eta$ için $I - lim x_{ij} = \xi$ ve $I - lim x_{ij} = \eta$ olsun. $\xi > \eta$ için $\varepsilon = \frac{\xi - \eta}{3}$ olarak alalım. Bu durumda $(\eta - \varepsilon, \eta + \varepsilon)$ ve $(\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon)$ komşulukları ikişer ikişer ayrıktır. ξ ve η, $x = (x_{ij})$ dizisinin limitleri olduğundan

$$A = \{(i,j) \in \mathbb{N}x\mathbb{N} : |x_{ij} - \xi| \geq \varepsilon\} \in I$$

ve

$$B = \{(i,j) \in \mathbb{N}x\mathbb{N} : |x_{ij} - \eta| \geq \varepsilon\} \in I$$

yazılır. Buradan da

$$A^c = \{(i,j) \in \mathbb{N}x\mathbb{N} : |x_{ij} - \xi| < \varepsilon\} \in F(I)$$

ve

$$B^c = \{(i,j) \in \mathbb{N}x\mathbb{N} : |x_{ij} - \eta| < \varepsilon\} \in F(I)$$

olduğu görülür. $F(I)$, $\mathbb{N}x\mathbb{N}$ de bir filtre olduğundan $A^c \cap B^c \in F(I)$ ve $A^C \cap B^C \neq \emptyset$ olmalı ancak $(\eta - \varepsilon, \eta + \varepsilon)$ ve $(\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon)$ komşulukları ikişerli ayrık olduklarından $A^C \cap B^C = \emptyset$ dır. $\emptyset \notin F(I)$ olduğundan bu bir çelişkidir. Bu nedenle $\xi = \eta$ olmak zorundadır.

Önerme 4.1.6. (x_{ij}) ve (y_{ij}) iki çift dizisi için aşağıdaki ifadeler doğrudur.

i) Eğer $\forall\, n \in \mathbb{N}$ için I, $\mathbb{N}x\{n\}$ ve $\{n\}x\mathbb{N}$ formundaki tüm kümeleri içeriyor ve $P - \lim x_{ij} = \xi$ limiti mevcut ise $I - \lim x_{ij} = \xi$ mevcuttur.

ii) Eğer $I - \lim x_{ij} = \xi$ ve $I - \lim y_{ij} = \eta$ ise $I - \lim\left(x_{ij} + y_{ij}\right) = \xi + \eta$ dır.

iii) Eğer $I - \lim x_{ij} = \xi$ ve $I - \lim y_{ij} = \eta$ ise $I - \lim\left(x_{ij} y_{ij}\right) = \xi . \eta$ dır [25].

İspat: i) $\varepsilon > 0$ için $x = (x_{ij})$ Pringsheim anlamda ξ ye yakınsak ise bir m pozitif doğal sayısı vardır öyle ki $i, j \geq m$ için

$$\left|x_{ij} - \xi\right| < \varepsilon$$

olur. Bu durumda

$$A = \left\{(i,j) \in \mathbb{N}x\mathbb{N} :\ \left|x_{ij} - \xi\right| \geq \varepsilon\right\} \subset \mathbb{N}x\{1,2,\dots,m-1\} \cup \{1,2,\dots,m-1\}x\mathbb{N}$$

olur. Bu nedenle sağ taraf I ya ait olduğundan $A \in I$ dır. O halde $I - \lim x_{ij} = \xi$ dir.

ii) $\varepsilon > 0$ için $I - \lim x_{ij} = \xi$ ve $I - \lim y_{ij} = \eta$ olsun. Bu durumda

$$A = \{(i,j) \in \mathbb{N}x\mathbb{N} :\ \left|x_{ij} - \xi\right| \geq \tfrac{\varepsilon}{2}\}$$

ve

$$B = \{(i,j) \in \mathbb{N}x\mathbb{N} :\ \left|x_{ij} - \eta\right| \geq \tfrac{\varepsilon}{2}\}$$

kümeleri I ya aittir.

$$C = \{(i,j) \in \mathbb{N}x\mathbb{N} : \left|(x_{ij} + y_{ij}) - (\xi + \eta)\right| \geq \varepsilon\}$$

olarak tanımlayalım. Eğer $C \subset A \cup B$ olduğunu gösterirsek ideal tanımından ispat tamamlanır. $(i,j) \in C$ için

$$\varepsilon \leq \left|(x_{ij} + y_{ij}) - (\xi + \eta)\right| \leq \left|x_{ij} - \xi\right| + \left|x_{ij} - \eta\right|$$

olur. $\left|x_{ij} - \xi\right|, \left|x_{ij} - \eta\right|$ her ikisi de birlikte $\frac{\varepsilon}{2}$ den az olamaz. Bu yüzden

$$\left|x_{ij} - \xi\right| \geq \frac{\varepsilon}{2}$$

yada

$$\left|x_{ij} - \eta\right| \geq \frac{\varepsilon}{2}$$

olmalıdır. Bu da gösterir ki (i,j) ya A nın yada B nin elemanıdır. O halde $(i,j) \in A \cup B$ dir. Buradan da $C \subset A \cup B$ bulunur.

iii) $I - \lim x_{ij} = \xi$ olduğundan

$$A = \{(i,j) \in \mathbb{N}x\mathbb{N} : \left|x_{ij} - \xi\right| \geq 1\}$$

kümesi I ya aittir. Bu durumda

$$A^c = \{(i,j) \in \mathbb{N}x\mathbb{N} : \left|x_{ij} - \xi\right| < 1\} \in F(I)$$

olur. A daki bazı (i,j) ler için $\left|x_{ij}\right| < \varepsilon + 1$ yazabiliriz. $\varepsilon > 0$ için $\delta > 0$ seçelim öyle ki $0 < 2\delta < \frac{\varepsilon}{|\varepsilon|+|\delta|+1}$ olsun. Buradan

$B = \{(i,j) \in \mathbb{N}x\mathbb{N} : \left|x_{ij} - \xi\right| < \delta\} \in F(I)$

ve

$C = \{(i,j) \in \mathbb{N}x\mathbb{N} : \left|y_{ij} - \eta\right| < \delta\} \in F(I)$

kümeleri vardır. $F(I), \mathbb{N}x\mathbb{N}$ de bir süzgeç olduğundan $A \cap B \cap C \in F(I)$ dır. Her bir $(i,j) \in A \cap B \cap C$ için

$$
\begin{aligned}
\left|x_{ij}y_{ij} - \xi.\eta\right| &= \left|x_{ij}y_{ij} - x_{ij}\eta + x_{ij}\eta - \xi.\eta\right| \\
&\leq \left|x_{ij}\right|\left|y_{ij} - \eta\right| + |\eta|\left|x_{ij} - \xi\right| \\
&< (|\varepsilon| + 1)\delta + |\eta|\delta \\
&= (|\varepsilon| + |\delta| + 1)\delta \\
&< \varepsilon
\end{aligned}
$$

bulunur. Bu durumda

$I - \lim\left(x_{ij}y_{ij}\right) = \xi.\eta$ yani $\{(i,j) \in \mathbb{N}x\mathbb{N} : \left|x_{ij}y_{ij} - \xi.\eta\right| \geq \varepsilon\} \in I$ bulunur.

Teorem 4.1.7. (Sıkıştırma Teoremi) $(x_{ij}), (y_{ij})$ ve (z_{ij}) üç çift dizi olsun. $K \in F(I)$ ve $\forall\, (i,j) \in K$ için $x_{ij} \leq y_{ij} \leq z_{ij}$ ve $I - \lim x_{ij} = \xi,\ I - \lim z_{ij} = \xi$ ise $I - \lim y_{ij} = \xi$ dir [6].

İspat: $\varepsilon > 0$ olsun. $I - \lim x_{ij} = \xi$ ise

$A = \{(i,j) \in \mathbb{N}x\mathbb{N} : \left|x_{ij} - \xi\right| \geq \varepsilon\} \in I$ dir. $I - \lim z_{ij} = \xi$ ise

$A = \{(i,j) \in \mathbb{N}x\mathbb{N} : \left|z_{ij} - \xi\right| \geq \varepsilon\} \in I$

dir. Bu durumda

$A^c = \{(i,j) \in \mathbb{N}x\mathbb{N} : \left|x_{ij} - \xi\right| < \varepsilon\} \in F(I)$

ve

$C^c = \{(i,j) \in \mathbb{N}x\mathbb{N} : \left|z_{ij} - \xi\right| < \varepsilon\} \in F(I)$

olur.

$B^c = \{(i,j) \in \mathbb{N}x\mathbb{N} : \left|y_{ij} - \xi\right| < \varepsilon\}$

olarak tanımlayalım. Açıkça görülüyor ki $A^c \cap C^c \cap K \in F(I)$ dir. Buradan da $A^c \cap C^c \cap K \subset B^c$ olduğu görülmektedir. Çünkü bu kesişimdeki A^C en küçük kümedir ve $A^C \subset B^C$ dir. O halde süzgeç tanımından dolayı $B^C \in F(I)$ olacaktır. Bu durumda $B = \{(i,j) \in \mathbb{N}x\mathbb{N} : \left|y_{ij} - \xi\right| \geq \varepsilon\} \in I$ olur. Bu da

$I - \lim y_{ij} = \xi$ olduğunu gösterir.

4.2. I −Üst Limit ve I −Alt Limit

Öncelikle sonraki tanım ve teoremler içerisinde kullanacağımız şu iki kümeyi tanımlayalım. $\forall t \in \mathbb{R}$ için,

$M_t = \{(n,k) \in \mathbb{N}x\mathbb{N} : x_{nk} > t\}$

ve

$M^t = \{(n,k) \in \mathbb{N}x\mathbb{N} : x_{nk} < t\}$

olsun.

Tanım 4.2.1. a) Eğer,

1. $M_t \notin I_2$ olacak şekilde bir $t \in \mathbb{R}$ var ise

$$I - \limsup x_{nk} = \sup\{t \in \mathbb{R} : M_t \notin I_2\}$$

2. $\forall t \in \mathbb{R}$ için $M_t \in I_2$ ise bu durumda $I - \limsup x_{nk} = -\infty$ dur.

b) Eğer,

1. $M^t \notin I_2$ olacak şekilde bir $t \in \mathbb{R}$ var ise

$$I - \liminf x_{nk} = \inf\{t \in \mathbb{R} : M^t \notin I_2\} \text{ dir.}$$

2. $\forall t \in \mathbb{R}$ için $M^t \in I_2$ ise bu durumda $I - \liminf x_{nk} = +\infty$ dur [16].

Örnek 4.2.2. Bir $x = (x_{nk})$ çift dizisi

$$x_{nk} = \begin{cases} k, & k \quad \text{tek ve kare} \\ 2, & k \quad \text{çift ve kare} \\ 1, & k \quad \text{tek ve kare değil} \\ 0, & k \quad \text{çift ve kare değil} \end{cases}$$

yada

$$x_{nk} = \begin{cases} n, & n \quad \text{tek ve kare} \\ 2, & n \quad \text{çift ve kare} \\ 1, & n \quad \text{tek ve kare değil} \\ 0, & n \quad \text{çift ve kare değil} \end{cases}$$

olarak tanımlansın. Bu durumda $x = (x_{nk})$ çift dizisi üstten sınırsızdır fakat I −sınırlıdır. Ayrıca

$$\{t \in \mathbb{R} : M_t \notin I_2\} = (-\infty, 1) \text{ ve } \{t \in \mathbb{R} : M^t \notin I_2\} = (0, \infty)$$

ve böylece

$$I - \limsup x_{nk} = 1 \text{ ve } I - \liminf x_{nk} = 0$$

olur. Diğer taraftan $x = (x_{nk})$ çift dizisi Pringsheim anlamda I −yakınsak olmayabilir ve Pringsheim anlamda I −yığılma noktaları kümesi $\{0,1\}$ dir [16].

Eğer I_2, $I_2(f)$ ise tanım 4.1.3. ile $P - \limsup x_{nk}$ ve $P - \liminf x_{nk}$ nın tanımları örtüşür.

Teorem 4.2.3. I, $\mathbb{N}x\mathbb{N}$'nin kuvvetli uygun ideali olsun. (X, d) metrik uzayında herhangi $x = (x_{ij})$ çift dizisi için $I_2(\wedge_x) \subset I_2(\Gamma_\mathrm{x})$ dir [5].

Teorem 4.2.4. I, $\mathbb{N}x\mathbb{N}$'nin kuvvetli uygun (strongly admissible) ideali (X, d) bir metrik uzay olmak üzere;

i. $I_2(\Gamma_\mathrm{x})$, (X, d) metrik uzayında ki her $x = (x_{nk})$ çift dizisi için kapalı bir kümedir.

ii. (X, d) ayrılabilir bir metrik uzay, $A_n \subset \mathbb{N}x\mathbb{N}$ de ayrık kümelerin bir dizisi ve $n \in \mathbb{N}$ için $A_n \notin I$ olsun. Bu durumda her kapalı $P \subset X$ alt kümesi için $P = I_2(\Gamma_\mathrm{x})$ olacak şekilde bir $x = (x_{nk})$ çift dizisi vardır [5].

Teorem 4.2.5. i) $I - \limsup x_{nk} = \beta$ (sonlu) olması için gerek ve yeter şart $\forall\varepsilon > 0$ için

a) $\{(n, k) \in \mathbb{N}x\mathbb{N} :\ x_{nk} > \beta - \varepsilon\} \notin I$
b) $\{(n, k) \in \mathbb{N}x\mathbb{N} :\ x_{nk} > \beta + \varepsilon\} \in I$

olmasıdır.

ii) $I - \liminf x_{nk} = \alpha$ (sonlu) olması için gerek ve yeter şart $\forall\varepsilon > 0$ için

a) $\{(n, k) \in \mathbb{N}x\mathbb{N} :\ x_{nk} < \alpha + \varepsilon\} \notin I$
b) $\{(n, k) \in \mathbb{N}x\mathbb{N} :\ x_{nk} < \alpha - \varepsilon\} \in I$

olmasıdır [16].

Tanım 4.1.4. den dolayı $I-\limsup x_{nk}$, $x=(x_{nk})$ dizisinin Pringsheim anlamda en büyük $I-$yığılma noktası; $I-\liminf x_{nk}$ da $x=(x_{nk})$ dizisinin Pringsheim anlamda en küçük $I-$yığılma noktası olduğu söylenebilir. Bir sonraki teorem bu sonucu destekler niteliktedir.

Teorem 4.2.6. Her $x=(x_{nk})$ reel çift dizisi için

$$I-\liminf x_{nk} \leq I-\limsup x_{nk}$$

eşitsizliği sağlanır [16].

İspat: Eğer $x=(x_{nk})$ çift reel dizi ise üç durum söz konusudur.
1.Eğer $I-\limsup x_{nk}=+\infty$ ise ispat zaten acıktır.
2.Eğer $I-\limsup x_{nk}=-\infty$ ise bir $t\in\mathbb{R}$ vardır öyle ki $M_t\in I$ ve $M^t\notin I$ dır.
Bu durum da $I-\liminf x_{nk}=\inf\{t\in M^t\notin I\}=\inf\mathbb{R}=-\infty$ olur ve

$I-\liminf x_{nk} \leq I-\limsup x_{nk}$ sağlanır.

3. Eğer $-\infty< I-\limsup x_{nk}<+\infty$ ise bu durumda $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ vardır öyle ki

$$I-\limsup x_{nk}=\beta$$

dır. Bazı $t\in\mathbb{R}$ için $\beta<t$ ise $M_t\in I$ ve $M^t\notin I$ dır. Bunun anlamı

$$I-\liminf x_{nk}=\inf\{t\in\mathbb{R}:\ M^t\notin I\}\leq\beta$$

olmasıdır. Dolayısıyla da $I-\liminf x_{nk} \leq I-\limsup x_{nk}$ sağlanmış olur.

Teorem 4.2.7. Her $x=(x_{nk})$ çift reel dizisi için

$$P-\liminf x_{nk}\leq I-\liminf x_{nk}\leq I-\limsup x_{nk}\leq P-\limsup x_{nk}$$

eşitsizliği geçerlidir [16].

İspat: $P-\limsup x_{nk}=+\infty$ durumunda ispat açıktır. $P-\limsup x_{nk}=L<\infty$ olsun. Bu durumda bazı $t'>L$ olacak şekilde $t'\in\mathbb{R}$ vardır öyle ki $M_{t'}\in I$ olur. Ancak $t'\notin\{t\in\mathbb{R}:\ M_t\notin I\}$ yani

$$I-\limsup x_{nk}=\sup\{t\in\mathbb{R}:\ M_t\notin I\}<t'$$

ve

$$I-\limsup x_{nk}\leq L$$

olur. Bu da ikinci kısmı doğrular. Birinci kısım için ise eğer $P-\liminf x_{nk}=-\infty$ ise eşitsizlik açık olarak sağlanır. Kabul edelim ki $P-\liminf x_{nk}=L>-\infty$ olsun. O halde bazı $t'<T$ olacak şekilde $t'\in\mathbb{R}$ vardır öyle ki $M^{t'}\in I$ olur ancak $t'\notin\{t:\ M^t\notin I\}$ dır. Bu da şu anlama gelir ki

$$I-\liminf x_{nk}=\sup\{t\in\mathbb{R}:\ M^t\notin I\}>t'$$

ve

$I-\limsup x_{nk}\geq T$ dir.

Sonuç 4.2.8. Eğer $I-\lim x_{nk}$ mevcut ise o zaman $x=(x_{nk})$ çift dizisi $I-$sınırlıdır [16].

Sonuç 4.2.9. Eğer $x=(x_{nk})$ çift dizisi $I-$sınırlı ise bu $I-\liminf x_{nk}$ ve $I-\limsup x_{nk}$ nın sınırlı olduğu anlamına gelir [16].

Teorem 4.2.10. I, $\mathbb{N}x\mathbb{N}$'nin bir ideali olsun. Eğer $x=(x_{nk})$ ve $y=(y_{nk})$ çift dizileri Pringsheim anlamda $I-$sınırlı iseler,

1) $I-\limsup(x_{nk}+y_{nk})\leq I-\limsup x_{nk}+I-\limsup y_{nk}$
2) $I-\liminf(x_{nk}+\mathrm{y}_{\mathrm{nk}})\geq I-\liminf x_{nk}+I-\liminf y_{nk}$

eşitsizlikleri sağlanır [24].

4.3. Genel Sonuçlar

Bu bölümde I −üst limit ve I −alt limit ile I −yakınsaklık arasındaki ilişkiler ve genel sonuçlar verilmiştir.

Teorem 4.3.1. Reel bir $x = (x_{nk})$ çift dizisinin I −yakınsak olması için gerek ve yeter şart $I - \liminf x_{nk} = I - \limsup x_{nk}$ olmasıdır [16].

İspat: Öncelikle gerekli kısmı ispatlayalım. $L = I - \lim x_{nk}$ olsun. Bu durumda $\forall \varepsilon > 0$ için

$$\{(n,k) \in \mathbb{N}x\mathbb{N} : x_{nk} > L + \varepsilon\} \in I$$

ve

$$\{(n,k) \in \mathbb{N}x\mathbb{N} : x_{nk} < L - \varepsilon\} \in I$$

yazılır. Bu durumda bazı $t \geq L + \varepsilon$ ve bazı $t' < L - \varepsilon$ bulunur öyle ki $M_t \in I$ ve $M^{t'} \in I$ dır. Dolayısıyla da

$$\sup\{t \in \mathbb{R} : \ M_t \notin I\} \leq L + \varepsilon \text{ ve } \inf\{t \in \mathbb{R} : \ M^{t'} \notin I\} \geq L - \varepsilon$$

sonucuna varılır. Bu sonuç da bize $I - \liminf x_{nk} = L = I - \limsup x_{nk}$ olduğunu gösterir.

Şimdide yeterlilik kısmını gösterelim.

$$\varepsilon > 0 \text{ ve } I - \liminf x_{nk} = I - \limsup x_{nk} = \mathrm{L}$$

olsun. Buradan da

$\{(n,k) \in \mathbb{N}x\mathbb{N} : |x_{nk} - L| \geq \varepsilon\}$
$\subseteq \{(n,k) \in \mathbb{N}x\mathbb{N} : x_{nk} > L + \varepsilon\} \cup \{(n,k) \in \mathbb{N}x\mathbb{N} : x_{nk} < L - \varepsilon\}$

olduğundan ideal tanımı gereği

$\{(n,k) \in \mathbb{N}x\mathbb{N} : |x_{nk} - L| \geq \varepsilon\} \in I$

olur. Sonuç olarak da $I - \lim x_{nk} = L$ bulunur.

Tanım 4.3.2. Bir $x = (x_{nk})$ çift dizisi ve her bir $G > 0$ reel sayısı için

$\{(n,k) \in \mathbb{N}x\mathbb{N} : x_{nk} \leq G\} \in I$

yada

$\{(n,k) \in \mathbb{N}x\mathbb{N} : x_{nk} \geq -G\} \in I$

oluyor ise $x = (x_{nk})$ çift dizisi ∞ (yada $-\infty$)'a I −yakınsaktır denir [5].

Teorem 4.3.3. I, $\mathbb{N}x\mathbb{N}$'nin kuvvetli uygun ideali olsun. Eğer

$I - \limsup x_{nk} = p$

ise o zaman $x = (x_{nk})$ çift dizisinin p'ye I −yakınsak bir alt dizisi vardır [5].

Teorem 4.3.4. Eğer $I - \liminf x_{nk} = q$ ise $x = (x_{nk})$ çift dizisinin q ya Pringsheim anlamda I −yakınsak olan bir alt dizisi vardır [5].

Teorem 4.3.5. Her I −sınırlı $x = (x_{nk})$ reel çift dizisi sonlu bir reel sayıya Pringsheim anlamda I −yakınsak olan bir alt diziye sahiptir [5].

BÖLÜM 5. BAZI I VE I^* YAKINSAK ÇİFT İNDİSLİ DİZİ UZAYLARI VE BAZI TOPOLOJİK ÖZELLİKLERİ

5.1. Bazı I −Yakınsak Çift İndisli Dizi Uzayları

Bu bölümde bazı I-yakınsak reel çift indisli dizi uzayları tanımlanarak bu uzaylar ile ilgili bazı topolojik özellikler verilmiştir. Burada

$(\ell_\infty)_2 = \{x = (x_{nk}) \in \Omega : \|x\|_\infty = sup_{n,k}|x_{nk}| < \infty\}$
$(C^I)_2^P$ =Pringsheim anlamda I- yakınsak çift diziler uzayı.
$(C_0^I)_2^P$ =Pringsheim anlamda I- null çift diziler uzayı.
$(C^I)_2^R$ = Regüler I- yakınsak çift diziler uzayı.
$(C_0^I)_2^R$ = Regüler I- null çift diziler uzayı.
$(C^I)_2^{BP}$ =sınırlı Pringsheim anlamda I-yakınsak çift diziler uzayı
$(C_0^I)_2^{BP}$ = sınırlı Pringsheim anlamda I-null cift diziler uzayı
$(C^I)_2^{BR}$ = sınırlı regüler I- yakınsak çift diziler uzayı
$(C_0^I)_2^{BR}$ = sınırlı regüler I-null çift diziler uzayı
olarak gösterilir. Bu dizi uzayları arasında

$(C^I)_2^{BP} = (C^I)_2^P \cap (\ell_\infty)_2$,
$(C_0^I)_2^{BP} = (C_0^I)_2^P \cap (\ell_\infty)_2$,
$(C^I)_2^{BR} = (C^I)_2^R \cap (\ell_\infty)_2$ ve
$(C_0^I)_2^{BR} = (C_0^I)_2^R \cap (\ell_\infty)_2$

bağıntıları vardır.

Teorem 5.1.1. $I, \mathbb{N}x\mathbb{N}$ nin uygun bir ideali olsun. $(C^I)_2^P$, $(C_0^I)_2^P$, $(C^I)_2^R$, $(C_0^I)_2^R$, $(C^I)_2^{BP}$ ve $(C_0^I)_2^{BP}$ dizi uzayları lineer uzaylardır [22].

Teorem 5.1.2. $(C^I)_2^{BR}$, $(C_0^I)_2^{BR}$, $(C^I)_2^{BP}$ ve $(C_0^I)_2^{BP}$ dizi uzayları

$$\|x\| = sup_{n,k}|x_{nk}|$$

normu ile birlikte normlu lineer uzaylardır [33].

Teorem 5.1.3. $(C^I)_2^{BR}, (C_0^I)_2^{BR}, (C^I)_2^{BP}$ ve $(C_0^I)_2^{BP}$ dizi uzayları

$$\|(a_{nk})\| = sup_{n,k}|a_{nk}|$$

normu ile birlikte Banach uzayıdırlar [22].

İspat: Kabul edelim ki $\left(A^i\right)$, $(C^I)_2^{BR} \subset (l_\infty)_2$ de bir Cauchy dizisi olsun. Bu nedenle (A^i) dizisi $(l_\infty)_2$ uzayında yakınsaktır. Yani her $i \in \mathbb{N}$ için

$$\lim_{i\to\infty} A^i = A$$

dır.

$$I - \lim {a^i}_{nk} = L_i$$

olsun. Bu durumda

i) (L_i), L gibi bir sayıya yakınsaktır.
ii) $I - \lim a_{nk} = L$ dir.

ifadelerinin doğru olduğunu göstermeliyiz.

(A^i) bir Cauchy dizisi olduğundan her $\varepsilon > 0$ için bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı vardır öyle ki tüm $i, j \geq n_0$ için

$$\|A^i - A^j\| < \frac{\varepsilon}{3}$$

olur. Şimdi $\mathbb{N}x\mathbb{N}$ nin I idealine ait olan

$$E_i = \{(n,k) \in \mathbb{N}x\mathbb{N} : \left|a_{nk}^i - L_i\right| \geq \tfrac{\varepsilon}{3}\}$$

ve

$$E_j = \{(n,k) \in \mathbb{N}x\mathbb{N} : \left|a_{nk}^j - L_j\right| \geq \tfrac{\varepsilon}{3}\}$$

kümelerini alalım. $i,j \geq n_0$ ve $(n,k) \notin E_i \cap E_j$ olduğunu göz önüne aldığımızda

$$\left|L_i - L_j\right| \leq \left|a_{nk}^i - L_i\right| + \left|a_{nk}^j - L_j\right| + \left|a_{nk}^i - a_{nk}^j\right|$$

olacağından

$$\left|L_i - L_j\right| < \varepsilon$$

bulunur. Böylece (L_i) kompleks sayıların bir Cauchy dizisi olup yakınsaktır. Kabul edelim ki $\lim_{j\to\infty} L_j = L$ olsun. $\eta > 0$ için bir m_0 sayısı bulabiliriz öyle ki her $j > m_0$ için

$$\left|L_j - L\right| < \frac{\eta}{3} \tag{5.1}$$

olur. $i \to \infty$ iken $A^i \to A$ olduğunu biliyoruz. Tüm $i > m_0$ için

$$\|A^i - A\| < \frac{\eta}{3} \tag{5.2}$$

olur. $a^j{}_{nk}$ dizisi L_j ye I- yakınsak olduğundan her bir $(n,k) \notin D$ için $D \in I_2$ vardır öyle ki

$$\left|a^j{}_{nk} - L_j\right| < \frac{\eta}{3} \tag{5.3}$$

dir. Genellik kaybolmadan $j > m_0$ için tüm $(n,k) \notin D$ ve (5.1), (5.2) ve (5.3) eşitsizliklerinden

$$|a_{nk} - L| \leq \left|a_{nk} - a^j{}_{nk}\right| + \left|a^j{}_{nk} - L_j\right| + \left|L_j - L\right|$$

olur. Buradan da

$$|a_{nk} - L| < \eta$$

bulunur. Bu durumda (a_{nk}), L ye I- yakınsak olur. Böylece $(C^I)_2{}^{BP}$ bir Banach uzayı olmuş olur. Diğer uzaylarda benzer şekilde gösterilir.

Teorem 5.1.4. $I, \mathbb{N}x\mathbb{N}$ nin öz (nontrivial) ideali olsun. Bu durumda $(C^I)_2^{BP}$, $(\ell_\infty)_2$ normlu lineer uzayının kapalı lineer alt uzayıdır [3].

İspat: Önerme 4.1.6. dan açıkça görülüyor ki $(C^I)_2^{BP}$, $(\ell_\infty)_2$ normlu lineer uzayının lineer alt uzayıdır. Bu yüzden biz sadece $(C^I)_2^{BP}$ nin $(\ell_\infty)_2$ de kapalı olduğunu gösterelim.

$x^p \in (C^I)_2^{BP}$ $(p = 1,2,\ldots)$ ve $x^p \to x \in (\ell_\infty)_2$ dir. O halde $x \in (C^I)_2^{BP}$ olduğunu göstermeliyiz. $x^p \in (C^I)_2^{BP}$ olduğundan $x^p = (x^p{}_{mn})$ olmak üzere her $p \in \mathbb{N}$ için a_p reel sayısı vardır öyle ki

$I - lim x^p{}_{mn} = a_p \quad p = 1,2,\ldots$ olur. Bu durumda

a) $(a_p)_{p\in\mathbb{N}}$ dizisi bir a reel sayısına yakınsar.

b) $x = (x_{mn})_{m,n\in\mathbb{N}}$ olmak üzere $I - \lim x_{mn} = a$

ifadelerini gösterirsek ispat biter. O halde

a) $x^p \to x \in (\ell_\infty)_2$ olduğundan dolayı her $\varepsilon > 0$ için öyle bir $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki her $q \geq r \geq n(\varepsilon)$ için

$$\left\|x^{(q)} - x^{(r)}\right\| < \frac{\varepsilon}{3}$$

yazabiliriz. $x^{(q)}, x^{(r)} \in (C^I)_2^{BP}$ olduğundan

$$I - \lim x^{(q)}{}_{mn} = a_q$$

ve

$$I - \lim x^{(r)}{}_{mn} = a_r$$

dir. Bu nedenle

$$A_r = \{(m,n) \in \mathbb{N}x\mathbb{N} : \left|x_{mn}^{(r)} - a_r\right| < \tfrac{\varepsilon}{3}\} \in F(I)$$

ve

$$A_q = \{(m,n) \in \mathbb{N}x\mathbb{N} : \left|x_{mn}^{(q)} - a_q\right| < \tfrac{\varepsilon}{3}\} \in F(I)$$

vardır. Süzgeç tanımından dolayı da $A_r \cap A_q \in F(I)$ dır. I öz (nontrivial) ideal olduğundan $A_r \cap A_q$ sonsuz olmak zorundadır. $(m_0, n_0) \in A_r \cap A_q$ seçelim. O zaman

$$\left|x_{m_0 n_0}^{(r)} - a_r\right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

ve

$$\left|x_{m_0n_0}^{(q)} - a_q\right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

yazılabilir. Buradan da her $q \geq r \geq n(\varepsilon)$ için

$$\left|a_q - a_r\right| \leq \left|a_q - x_{m_0n_0}^{(q)}\right| + \left|x_{m_0n_0}^{(q)} - x_{m_0n_0}^{(r)}\right| + \left|x_{m_0n_0}^{(r)} - a_r\right| < \varepsilon$$

bulunur. Bu durumda $(a_p)_{p\in\mathbb{N}}$ reel bir Cauchy dizisi olmuş olur ve bir a reel sayısına yakınsar yani

$$\lim_{q\to\infty} a_q = a$$

dır.

b) $\eta > 0$ olsun. $x^{(p)} \to x$ olduğundan öyle bir $q \in \mathbb{N}$ sayısı vardır öyle ki

$$\left\|x^{(q)} - x\right\| < \frac{\eta}{3}$$

yazılır. Şimdi q sayısını öyle seçelim ki hem

$$\left\|x^{(q)} - x\right\| < \frac{\eta}{3}$$

hem de

$\left\|a_q - a\right\| < \frac{\eta}{3}$ olsun. $I - \lim x_{mn}^{(q)} = a_q$ olduğundan

$$A_q = \{(m,n) \in \mathbb{N}x\mathbb{N} : \left|x_{mn}^{(q)} - a_q\right| < \frac{\eta}{3}\} \in F(I)$$

yazılır ve $\forall(m,n) \in A_q$ için

$$|x_{mn} - a| \leq \left|x_{mn} - x_{mn}^{(q)}\right| + \left|x_{mn}^{(q)} - a_q\right| + \left|a_q - a\right| < \eta$$

bulunacağından dolayı $A_q \subset \{(m,n) \in \mathbb{N}x\mathbb{N} : \ |x_{mn} - a| < \eta\}$

dır. İdeal ve süzgeç tanımından dolayı

$$\{(m,n) \in \ \mathbb{N}x\mathbb{N} : \ |x_{mn} - a| \geq \eta\} \in I$$

dır. Bu da $I - \lim x_{mn} = a$ demektir.

Teorem 5.1.5. $I, \mathbb{N}x\mathbb{N}$ nin uygun bir ideali olsun. Bu durumda $(C^I)_2^{BP} = (\ell_\infty)_2 \Leftrightarrow I, \mathbb{N}x\mathbb{N}$ maksimal uygun idealidir [6].

İspat: $\Leftarrow$: Kabul edelim ki $I, \mathbb{N}x\mathbb{N}$ nin maksimal uygun ideali ve $x = (x_{mn}) \in (\ell_\infty)_2$ olsun. Göstermemiz gereken ise $I - \lim x_{mn} \in \mathbb{R}$ nin var olduğudur. $x = (x_{mn}) \in (\ell_\infty)_2$ olduğundan her $m,n \in \mathbb{N}$ için $a \leq x_{mn} \leq b$ koşulu sağlayacak şekilde $a,b \in \mathbb{R}$ reel sayıları vardır öyle ki

$$A_1 = \{(m,n) \in \mathbb{N}x\mathbb{N}: a \leq x_{mn} \leq \frac{a+b}{2}\}$$

$$B_1 = \{(m,n) \in \mathbb{N}x\mathbb{N}: \frac{a+b}{2} \leq x_{mn} \leq b\}$$

yazılabilir. Bu durumda $A_1 \cup B_1 = \mathbb{N}x\mathbb{N}$ olur. I uygun ideal olduğundan A_1 ve B_1 kümelerinin ikisi de I ya ait olmayabilir. Bu nedenle en az biri I ya ait değildir. I ya ait olmayan kümeyi D_1 ve bu kümeye karşılık gelen aralıkların kümesini $J_n = [a_n, b_n]$ olmak üzere J_1 ile gösterelim. Yani

$$D_1 = \{(m,n) \in \mathbb{N}x\mathbb{N} : \ x_{mn} \in J_1\} \notin I$$

olsun. Şimdi J_n kapalı aralıkların bir dizisini şu şekilde oluşturalım;

$J_1 \supset J_2 \supset \ldots \supset J_n \supset \ldots \qquad J_n = [a_n, b_n] \qquad \lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0$

ve

$D_k = \{(m,n) \in \mathbb{N}x\mathbb{N} : x_{mn} \in J_k\} \notin I \qquad (k = 1,2,\ldots)$

yazabiliriz. $\xi \in \bigcap_{k=1}^{\infty} J_k$ ve $\varepsilon > 0$ olduğunda

$M(k) = \{(m,n) \in \mathbb{N}x\mathbb{N} : |x_{mn} - \xi| < \varepsilon\}$

kümesini oluşturabiliriz. Yeterince büyük $m \in \mathbb{N}$ ler için $J_m = [a_m, b_m]$ var ve

$[a_m, b_m] \subset (\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon)$

dır. $D_k \notin I$ olduğundan $M(\varepsilon) \notin I$ dır. I maksimal ideal olduğundan $\mathbb{N}x\mathbb{N} \,/\, M(\varepsilon) \in I$ dır. O halde

$\{(m,n) \in \mathbb{N}x\mathbb{N} : |x_{mn} - \xi| \geq \varepsilon\} \in I$

olur. Bu durumda $I - \lim x_{mn} = \xi$ bulunur. O halde $x = (x_{mn}) \in (C^I)_2^{BP}$ dir. Sonuç olarak $(C^I)_2^{BP} = (\ell_\infty)_2$ olur.

$\Longrightarrow$: Kabul edelim ki I maksimal olmasın. Lemma 3.4.2. den dolayı bir $M \subset \mathbb{N}x\mathbb{N}$ kümesi vardır öyle ki $M \notin I$ ve $\mathbb{N}x\mathbb{N} \,/\, M \notin I$ dır. Şimdi $x = (x_{mn})$ çift dizisini

$$x_{mn} = \begin{cases} 1, & (m,n) \in M \\ 0, & (m,n) \notin M \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. Bu durumda $x = (x_{mn}) \in (\ell_\infty)_2$ ancak $I - \lim x_{mn}$ limiti yoktur. Gerçekten de $\xi \in \mathbb{R}$ için yeterince küçük $\varepsilon > 0$ sayısı vardır öyle ki

$\{(m,n) \in \mathbb{N}x\mathbb{N} : \ |x_{mn} - \xi| \geq \varepsilon\}$

kümesi ya M ye veya $\mathbb{N}x\mathbb{N}$ / M ye yada $\mathbb{N}x\mathbb{N}$ ye denktir ve bu kümelerin hiçbiri I ya ait değildir. Bu durumda $(C^I)_2^{BP} = (\ell_\infty)_2$ ise I maksimal ideal olur.

Teorem 5.1.5. sınırsız diziler için sağlanmayabilir. Bunun için aşağıdaki örneği verelim.

Örnek 5.1.6. I, $\mathbb{N}x\mathbb{N}$ nin uygun bir ideali olsun. $x = (x_{mn})$ dizisini $x_{mn} = \max(m,n)$, $((m,n) \in \mathbb{N}x\mathbb{N})$ olarak tanımlayalım. Bu durumda $x = (x_{mn})$ dizisi I yakınsak olmayan sınırsız bir dizi olur [3].

Teorem 5.1.7. $(C^I)_2{}^{BR}, (C^I{}_0)_2{}^{BR}, (C^I)_2{}^{BP}$ ve $(C_0{}^I)_2{}^{BP}$ dizi uzayları birer K-uzaylarıdır [22].

Teorem 5.1.8. $I_2, \mathbb{N}x\mathbb{N}$ nin bir ideali olsun. $(C^I)_2^P, (C_0^I)_2^P, (C^I)_2{}^R$, $(C_0{}^I)_2{}^R$, $(C^I)_2{}^{BR}, (C^I)_2{}^{BP}$ ve $(C_0{}^I)_2{}^{BP}$ uzayları birer dizi cebiridir [22].

Kapsamadan dolayı $Z = (C_0{}^I)_2{}^{BR}$, $(C^I)_2{}^{BP}, (C^I)_2{}^{BR}$ ve $(C_0{}^I)_2{}^{BP}$ için $Z \subset (l_\infty)_2$ dir.

Teorem 5.1.9. I_2, $\mathbb{N}x\mathbb{N}$ nin bir ideali olsun. $(C^I)_2{}^{BR}, (C_0{}^I)_2{}^{BP}, (C^I)_2{}^{BP}$ ve $(C_0{}^I)_2{}^{BP}$ hiçbir yerde yoğun olmayan $(l_\infty)_2$ uzayının alt uzaylarıdır [22].

5.2. I^* −Yakınsak Çift İndisli Dizi Uzayları

Bu bölümde $(C^{I^*})_2^{BP}$ reel sayıların tüm I^* −yakınsak sınırlı çift dizilerinin kümesi olmak üzere bu uzayın bazı topolojik özellikleri verilmiştir.

Açıkça görünüyor ki $(C^{I^*})_2^{BP} \subset (l_\infty)_2$ dir.
I kuvvetli uygun ideal olduğunda $(C^{I^*})_2^{BP} \subset (C^I)_2^{BP}$ dir.

Eğer I ideali AP2 özelliğini sağlarsa $(C^{I^*})_2^{BP} = (C^I)_2^{BP}$ dir.
Eğer I maksimal olmayan kuvvetli uygun ideal ise $(C^{I^*})_2^{BP} \subset (C^I)_2^{BP} \subsetneq (l_\infty)_2$

Şimdi de I kuvvetli uygun ideal olduğunda $(C^{I^*})_2^{BP}$ nin $(l_\infty)_2$ de yoğun olduğunu gösterelim.

Teorem 5.2.1. $I, \mathbb{N}x\mathbb{N}$'nin kuvvetli uygun ideali olsun. $\overline{(C^{I^*})_2^{BP}}$, $(l_\infty)_2$ de $(C^{I^*})_2^{BP}$ nin kapanışı olmak üzere, $\overline{(C^{I^*})_2^{BP}} = (C^I)_2^{BP}$ dir [25].

İspat: Teorem 3.5.2. den dolayı $\overline{(C^{I^*})_2^{BP}} \subset (C^I)_2^{BP}$ olduğu açıktır. Bu durumda biz ispat için sadece $(C^I)_2^{BP} \subset \overline{(C^{I^*})_2^{BP}}$ olduğunu göstermeliyiz. $(l_\infty)_2$ de bir yuvar $\delta > 0$ ve $z \in (l_\infty)_2$ için

$$B(z,\delta) = \{x \in (l_\infty)_2 : \ \|x - z\| < \delta\}$$

şeklinde tanımlansın. İspat için $\forall y \in (C^I)_2^{BP}$ ve $\delta > 0$ için bir $B(y,\delta)$ yuvarı alındığında

$$B(y,\delta) \cap (C^{I^*})_2^{BP} \neq \emptyset$$

olduğunu göstermek yeterli olacaktır. Şimdi $I - \lim_{m,n\to\infty} y_{mn} = l$ ve keyfi bir $\varepsilon \in (0,\delta)$ olsun. Bu durumda

$$A(\varepsilon) = \{(m,n) \in \mathbb{N}x\mathbb{N} : \ |y_{mn} - l| \geq \varepsilon\} \in I$$

olur. $x = (x_{mn})_{m,n\in\mathbb{N}}$ çift dizisi

$$x_{mn} = \begin{cases} y_{mn}, & (m,n) \in A(\varepsilon) \\ l, & diğer\ durumlarda \end{cases}$$

olarak tanımlansın. Bu durumda $x \in (l_\infty)_2$, $I^* - \lim_{m,n\to\infty} x_{mn} = l$ ve $x \in B(y,\varepsilon)$ dur. Sonuç olarak da $B(y,\delta) \cap (C^{I^*})_2^{BP} \neq \emptyset$ olduğu açıktır.

BÖLÜM 6. *n*- NORMLU UZAYLARDA TANIMLI *I*-YAKINSAK BAZI ÇİFT İNDİSLİ DİZİ UZAYLARI

Bu bölümde, Savaş [43] tarafından tanımlanan *n*-normlu uzaylarda Orlicz fonksiyonu yardımıyla tanımlanan bazı çift dizi uzayları ve bu uzaylar ile ilgili varılan genel sonuçlar verildi.

6.1. *n*-Normlu Uzaylarda Orlicz Fonksiyonu Yardımıyla Tanımlanan Bazı Yeni Çift İndisli Dizi Uzayları

Tanım 6.1.1. Çift, konveks, sürekli, azalmayan, yani $M(0) = 0$, $x > 0$ için $M(x) > 0$ ve $x \to \infty$ için $M(x) \to \infty$ özelliklerine sahip bir $M: [0, \infty) \to [0, \infty)$ fonksiyonuna Orlicz fonksiyonu denir [27].

Orlicz fonksiyonunun konvekslik özelliğini $M(x + y) \leq M(x) + M(y)$ eşitsizliği ile yer değiştirilirse elde edilen fonksiyona Modülüs fonksiyonu denir [29].

Tanım 6.1.2. $\forall\, u_1, u_2 \in \mathbb{R}$ için $M\left(\frac{u_1+u_2}{2}\right) \leq \frac{1}{2}[M(u_1) + M(u_2)]$ eşitsizliğini sağlayan reel değerli M fonksiyonuna konvekstir denir. Bu eşitsizlik $0 \leq \alpha \leq 1$ için

$$M[\alpha u_1 + (1 - \alpha)u_2] \leq \alpha M(u_1) + (1 - \alpha)M(u_2)$$

eşitsizliğinin sağlanacağı anlamına gelir. Bu eşitsizliğe Jensen eşitsizliği denir [23].

Tanım 6.1.3. X, K cismi üzerinde bir lineer uzay olsun. Her $x, y \in X$ için

(i) $g(\theta) = 0$
(ii) $g(x) = g(-x)$
(iii) $g(x + y) \leq g(x) + g(y)$

(iv) $\lambda_n, \lambda_0 \in K\ ve\ x_n, x_0 \in X$ için $n \to \infty$ iken $\lambda_n \to \lambda_0$ ve $n \to \infty$ iken $g(x_n - x_0) \to 0$ olması $n \to \infty$ iken $g(\lambda_n x_n - \lambda_0 x_0) \to 0$ dır.

şartlarını sağlayan $g: X \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna bir paranorm, (X, g) ikilisine de paranormlu uzay denir. Eğer $g(x) = 0$ iken $x = \theta$ oluyorsa g ye total paranorm denir [28].

Tanım 6.1.4. $n \in \mathbb{N}$ ve $n \leq d$ olmak üzere X, d boyutlu bir vektör uzayı olsun. $\|.,\dots,.\| : XxXx \dots xX \to \mathbb{R}$ fonksiyonu

(i) $\|x_1, x_2, \dots, x_n\| = 0 \Leftrightarrow x_1, x_2, \dots, x_n$ lineer bağımlı
(ii) $\|x_1, x_2, \dots, x_n\|$ permütasyon altında değişmez
(iii)$\|\alpha x_1, x_2, \dots, x_n\| = |\alpha| \|x_1, x_2, \dots, x_n\|, \alpha \in \mathbb{R}$
(iv)$\|x_1 + y, x_2, \dots, x_n\| \leq \|x_1, x_2, \dots, x_n\| + \|y, x_2, \dots, x_n\|$

özelliklerini sağlıyorsa $\|.,\dots,.\|$ fonksiyonuna n-norm, $(X, \|.,\dots,.\|)$ ikilisine de n-normlu uzay denir [14].

Sonuç 6.1.5. Her n-normlu uzay aynı zamanda tüm $r = 1,2, \dots, n-1$ için $(n-r)$-normlu uzaydır [15].

Tanım 6.1.6. Herhangi n-normlu $(X, \|.,\dots,.\|)$ uzayında bir $x = (x_k)$ dizisi verilsin. $\forall x_1, x_2, \dots, x_{k-1} \in X$ için

$$\lim_{k\to\infty} \|x_1, x_2, \dots x_{k-1}, x_k - x\| = 0$$

olacak şekilde $x \in X$ varsa $x = (x_k)$ dizisi $x \in X$ noktasına yakınsaktır denir [15].

Tanım 6.1.7. Herhangi n-normlu $(X, \|.,\dots,.\|)$ uzayında bir $x = (x_k)$ dizisi verilsin. Eğer $\forall x_1, x_2, \dots, x_{k-1} \in X$ için

$$\lim_{k,l\to\infty} \|x_1, x_2, \dots x_{k-1}, x_k - x_l\| = 0$$

oluyorsa $x = (x_k)$ dizisi n-normlu $(X, \|., \dots, .\|)$ uzayında bir Cauchy dizisidir denir [47].

$(X, \|., \dots, .\|)$ herhangi bir n-normlu uzay olsun ve $S''(n - X)$ ile de X değerlikli çift dizi uzayını gösterelim. Aşikardır ki $S''(n - X)$ çift dizi uzayı toplama ve skaler ile çarpım altında bir lineer uzaydır.

Tanım 6.1.8. M bir Orlicz fonksiyonu ve $(X, \|., \dots, .\|)$ herhangi n-normlu uzay olsun. Ek olarak $p = (p_{k,l})$ pozitif reel sayıların sınırlı bir dizisi olsun. Bu durumda n-normlu uzayda Orlicz fonksiyonu yardımıyla yeni bir çift dizi uzayını aşağıdaki şekilde tanımlayalım. $\rho > 0$ ve $\forall z_1, z_2, \dots, z_{n-1} \in X$ için

$$l''(M, p, \|., \dots, .\|) = \left\{x \in S''(n - X) \colon \sum_{k,l=1,1}^{\infty,\infty} \left[M\left(\left\|\frac{x_{k,l}}{\rho}, z_1, z_2, \dots, z_{n-1}\right\|\right)\right]^{p_{k,l}} < \infty\right\}$$

[43].

Şimdi sonraki tanım ve genel sonuçlarda kullanılacak bazı eşitsizlikleri verelim. $p = (p_{k,l})$ pozitif reel sayıların sınırlı bir dizisi olsun ve

$$0 < p_{k,l} \leq \sup_{k,l} p_{k,l} = H \text{ ve } D = \max\{1, 2^{H-1}\}$$

olduğunda

$$\left|a_{k,l} + b_{k,l}\right|^{p_{k,l}} \leq D\left(\left|a_{k,l}\right|^{p_{k,l}} + \left|b_{k,l}\right|^{p_{k,l}}\right)$$

yazılabilir [41].

Teorem 6.1.9. $l''(M, p, \|., \dots, .\|)$ dizi uzayı lineer bir uzaydır [43].

İspat: Kabul edelim ki $x, y \in l''(M, p, \|., \dots, .\|)$ ve $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ olsun. Bu durumda bazı $\rho_1 > 0$ için

$\sum_{k,l=1,1}^{\infty,\infty}\left[M\left(\left\|\frac{x_{k,l}}{\rho_1},z_1,z_2,\dots,z_{n-1}\right\|\right)\right]^{p_{k,l}}<\infty$

ve bazı $\rho_2>0$ için

$\sum_{k,l=1,1}^{\infty,\infty}\left[M\left(\left\|\frac{y_{k,l}}{\rho_2},z_1,z_2,\dots,z_{n-1}\right\|\right)\right]^{p_{k,l}}<\infty$

yazılır. $\|.,\dots,.\|, X$ üzerinde n-norm ve M bir Orlicz fonksiyonu olduğundan

$$\sum_{k,l=1,1}^{\infty,\infty}\left[M\left(\left\|\frac{\alpha x_{k,l}+\beta y_{k,l}}{\max(|\alpha|\rho_1,|\beta|\rho_2)},z_1,z_2,\dots,z_{n-1}\right\|\right)\right]^{p_{k,l}}$$
$$\leq D\sum_{k,l=1,1}^{\infty,\infty}\left[\frac{|\alpha|}{|\alpha|\rho_1+|\beta|\rho_2}M\left(\left\|\frac{x_{k,l}}{\rho_1},z_1,z_2,\dots,z_{n-1}\right\|\right)\right]^{p_{k,l}}$$
$$+D\sum_{k,l=1,1}^{\infty,\infty}\left[\frac{|\beta|}{|\alpha|\rho_1+|\beta|\rho_2}M\left(\left\|\frac{y_{k,l}}{\rho_2},z_1,z_2,\dots,z_{n-1}\right\|\right)\right]^{p_{k,l}}$$

olur. Bu durumda

$F=\max\left\{1,\left(\frac{|\alpha|}{|\alpha|\rho_1+|\beta|\rho_2}\right)^H,\left(\frac{|\beta|}{|\alpha|\rho_1+|\beta|\rho_2}\right)^H\right\}$

alındığında

$$\sum_{k,l=1,1}^{\infty,\infty}\left[M\left(\left\|\frac{\alpha x_{k,l}+\beta y_{k,l}}{\max(|\alpha|\rho_1,|\beta|\rho_2)},z_1,z_2,\dots,z_{n-1}\right\|\right)\right]^{p_{k,l}}$$
$$\leq DF\sum_{k,l=1,1}^{\infty,\infty}\left[M\left(\left\|\frac{x_{k,l}}{\rho_1},z_1,z_2,\dots,z_{n-1}\right\|\right)\right]^{p_{k,l}}$$
$$+DF\sum_{k,l=1,1}^{\infty,\infty}\left[M\left(\left\|\frac{y_{k,l}}{\rho_2},z_1,z_2,\dots,z_{n-1}\right\|\right)\right]^{p_{k,l}}<\infty$$

olur ve ispat tamamlanır.

Teorem 6.1.10. $l''(M,p,\|.,\ldots,.\|)$ uzayı $g: l''(M,p,\|.,\ldots,.\|) \to \mathbb{R}$ şeklinde tanımlı $0 \leq p_{k,l} \leq \sup_{k,l} p_{k,l} = H, M^* = \max\{1,H\}$ için

$$g(x) = \inf\left\{\rho^{\frac{p_{k,l}}{H}} : \left(\sum_{k,l=1,1}^{\infty,\infty}\left[M\left(\left\|\frac{x_{k,l}}{\rho}, z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}\right\|\right)\right]^{p_{k,l}}\right)^{\frac{1}{M^*}} < \infty\right\}$$

dönüşümü ile bir paranormlu uzaydır [43].

İspat: Dönüşüm paranorm olma özelliklerini sağlamalıdır. (i) $g(\theta) = 0$ ve (ii) $g(-x) = g(x)$ olduğu aşikardır.

(iii) $x_{k,l}, y_{k,l} \in l''(M,p,\|.,\ldots,.\|)$ olsun. Herhangi $\rho_1, \rho_2 > 0$ sayıları vardır öyleki

$$\sum_{k,l=1,1}^{\infty,\infty}\left[M\left(\left\|\frac{x_{k,l}}{\rho_1}, z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}\right\|\right)\right]^{p_{k,l}} < \infty$$

ve

$$\sum_{k,l=1,1}^{\infty,\infty}\left[M\left(\left\|\frac{y_{k,l}}{\rho_2}, z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}\right\|\right)\right]^{p_{k,l}} < \infty$$

yazılabilir. Orlicz fonksiyonunun ve n-norm'un özelliklerinden

$$\begin{aligned} M\left(\left\|\frac{x_{k,l}+y_{k,l}}{\rho_1+\rho_2}, z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}\right\|\right) & \\ &\leq M\left(\left\|\frac{x_{k,l}}{\rho_1+\rho_2}, z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}\right\| + \left\|\frac{y_{k,l}}{\rho_1+\rho_2}, z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}\right\|\right) \\ &\leq \frac{\rho_1}{\rho_1+\rho_2} M\left(\left\|\frac{x_{k,l}}{\rho_1}, z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}\right\|\right) \\ &+ \frac{\rho_2}{\rho_1+\rho_2} M\left(\left\|\frac{y_{k,l}}{\rho_2}, z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}\right\|\right) \end{aligned}$$

olur. Buradan

$$g(x+y)=\inf\left\{(\rho_1+\rho_2)^{\frac{p_{k,l}}{H}}:\left(\sum_{k,l=1,1}^{\infty,\infty}\left[M\left(\left\|\frac{x_{k,l}+y_{k,l}}{\rho_1+\rho_2},z_1,z_2,\dots,z_{n-1}\right\|\right)\right]^{p_{k,l}}\right)^{\frac{1}{M^*}}\right\}$$

$$\leq \inf\left\{\rho_1^{\frac{p_{k,l}}{H}}:\left(\sum_{k,l=1,1}^{\infty,\infty}\left[M\left(\left\|\frac{x_{k,l}}{\rho_1},z_1,z_2,\dots,z_{n-1}\right\|\right)\right]^{p_{k,l}}\right)^{\frac{1}{M^*}}\right\}$$

$$+\inf\left\{\rho_2^{\frac{p_{k,l}}{H}}:\left(\sum_{k,l=1,1}^{\infty,\infty}\left[M\left(\left\|\frac{y_{k,l}}{\rho_2},z_1,z_2,\dots,z_{n-1}\right\|\right)\right]^{p_{k,l}}\right)^{\frac{1}{M^*}}\right\}$$

yazılabilir. Bu da

$$g(x+y)\leq g(x)+g(y)$$

demektir.

(iv) $\lambda\to 0$ ve $n\to\infty$ iken $g(x^n-x)\to 0$ olsun.

$$g(\lambda x)=\inf\left\{\left(\frac{\rho}{|\lambda|}\right)^{\frac{p_{k,l}}{H}}:\left(\sum_{k,l=1,1}^{\infty,\infty}\left[M\left(\left\|\frac{\lambda x_{k,l}}{\rho},z_1,z_2,\dots,z_{n-1}\right\|\right)\right]^{p_{k,l}}\right)^{\frac{1}{M^*}}<\infty\right\}$$

olur. Buradan da $n\to\infty$ iken $g(\lambda x^n)\to 0$ olduğu anlaşılır.

Teorem 6.1.11. Her k ve l için $0<p_{k,l}<q_{k,l}<\infty$ ise $l''(M,p,\|.,\dots,.\|)\subseteq l''(M,q,\|.,\dots,.\|)$ [43].

İspat: Eğer $x\in l''(M,p,\|.,\dots,.\|)$ ise

$$\sum_{k,l=1,1}^{\infty,\infty}\left[M\left(\left\|\frac{x_{k,l}}{\rho},z_1,z_2,\dots,z_{n-1}\right\|\right)\right]^{p_{k,l}}<\infty$$

olacak şekilde $\rho>0$ sayısı vardır. Bu da k ve l nin yeterince büyük değerleri için

$$M\left(\left\|\frac{x_{k,l}}{\rho}, z_1, z_2, \dots, z_{n-1}\right\|\right) < 1$$

olması demektir. M Orlicz fonksiyonu azalmayan olduğundan dolayı

$$\sum_{k,l=1,1}^{\infty,\infty}\left[M\left(\left\|\frac{x_{k,l}}{\rho}, z_1, z_2, \dots, z_{n-1}\right\|\right)\right]^{q_{k,l}} \leq \sum_{k,l=1,1}^{\infty,\infty}\left[M\left(\left\|\frac{x_{k,l}}{\rho}, z_1, z_2, \dots, z_{n-1}\right\|\right)\right]^{p_{k,l}} < \infty$$

olması demektir. Bu da bize $x \in l''(M, q, \|., \dots, .\|)$ olduğunu gösterir.

Sonuç 6.1.12. (i) Eğer $0 < p_{k,l} < 1$ ise her k, l için $l''(M, p, \|., \dots, .\|) \subseteq l''(M, \|., \dots, .\|)$

(ii) Eğer $p_{k,l} \geq 1$ ise her k, l için $l''(M, \|., \dots, .\|) \subseteq l''(M, p, \|., \dots, .\|)$ [43].

Teorem 6.1.13. M_1 ve M_2 Orlicz fonksiyonları için

$$l''(M_1, p, \|., \dots, .\|) \cap l''(M_2, p, \|., \dots, .\|) \subseteq l''(M_1 + M_2, p, \|., \dots, .\|)$$

dir [43].

İspat: Orlicz fonksiyonunun ve n-norm'un özelliğinden

$$\begin{aligned}
&\left[(M_1 + M_2)\left(\left\|\frac{x_{k,l}}{\rho}, z_1, z_2, \dots, z_{n-1}\right\|\right)\right]^{p_{k,l}} \\
&\qquad = \left[M_1\left(\left\|\frac{x_{k,l}}{\rho}, z_1, z_2, \dots, z_{n-1}\right\|\right) + M_2\left(\left\|\frac{x_{k,l}}{\rho}, z_1, z_2, \dots, z_{n-1}\right\|\right)\right]^{p_{k,l}} \\
&\qquad \leq D\left[M_1\left(\left\|\frac{x_{k,l}}{\rho}, z_1, z_2, \dots, z_{n-1}\right\|\right)\right]^{p_{k,l}} \\
&\qquad + D\left[M_2\left(\left\|\frac{x_{k,l}}{\rho}, z_1, z_2, \dots, z_{n-1}\right\|\right)\right]^{p_{k,l}}
\end{aligned}$$

yazabiliriz. $x \in l''(M_1, p, \|., \dots, .\|) \cap l''(M_2, p, \|., \dots, .\|)$ olsun. yukarıdaki eşitsizliği $k, l = 0{,}0$ dan ∞, ∞ a kadar toplarsak $x \in l''(M_1 + M_2, p, \|., \dots, .\|)$ olur.

Tanım 6.1.14. X herhangi bir dizi uzayı olsun. Eğer $(x_k) \in X$ ve $\forall k \in \mathbb{N}$ için $|\alpha_k| \leq 1$ olacak şekilde skaler bir (α_k) dizisi verildiğinde $(\alpha_k x_k) \in X$ oluyorsa X dizi uzayına solid uzay denir [42].

Teorem 6.1.15. $l''(M, p, \|., \dots, .\|)$ solid uzaydır [43].

İspat: $x_{k,l} \in l''(M, p, \|., \dots, .\|)$ olsun. Yani

$$\sum_{k,l=1,1}^{\infty,\infty} \left[M\left(\left\|\frac{x_{k,l}}{\rho}, z_1, z_2, \dots, z_{n-1}\right\|\right)\right]^{p_{k,l}} < \infty$$

dur. Tüm $k, l \in \mathbb{N}$ için $\left|\alpha_{k,l}\right| \leq 1$ olacak şekilde skalerlerin bir $\left(\alpha_{k,l}\right)$ dizisini alalım. Orlicz fonksiyonunun ve n-norm'un özelliğinden

$$\sum_{k,l=1,1}^{\infty,\infty} \left[M\left(\left\|\frac{\alpha_{k,l} x_{k,l}}{\rho}, z_1, z_2, \dots, z_{n-1}\right\|\right)\right]^{p_{k,l}} \leq \sum_{k,l=1,1}^{\infty,\infty} \left[M\left(\left\|\frac{x_{k,l}}{\rho}, z_1, z_2, \dots, z_{n-1}\right\|\right)\right]^{p_{k,l}}$$

eşitsizliğini yazabiliriz. Bu da ispatı tamamlar.

BÖLÜM 7. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu tezde; çift indisli dizi uzaylarında ideal yakınsak kavramı çalışıldı ve son bölümde bazı $n-$normlu dizi uzaylarında ideal yakınsaklık incelenmiştir. Orijinal çalışma olarak aşağıdaki dizi uzayları tanımlanarak, bazı topolojik özellikleri çalışılabilir.

Tanım 7.1. $\theta = (k_r)$ $r = 0,1,2,...$ pozitif tamsayıların artan bir dizisi olsun. $k_0 = 0$ olmak üzere $r \to \infty$ için $h_r = k_r - k_{r-1} \to \infty$ ise $\theta = (k_r)$ dizisine lacunary dizisi denir . $\theta = (k_r)$ lacunary dizisi tarafından belirlenen aralıklar $I_r = (k_{r-1}, k_r]$ ile, $\frac{k_r}{k_{r-1}}$ oranı da q_r ile gösterilir.

Tanım 7.2. Reel sayıların bir $x = (x_{k,l})$ çift dizisi için

$$P - \lim_{p,q\to\infty} \sup_{m,n\geq 0} \frac{1}{pq} \sum_{k=m}^{m+p-1} \sum_{l=n}^{n+q-1} \left|x_{k,l} - L\right| = 0$$

ise $x = (x_{k,l})$ çift dizisi L sayısına hemen hemen P-yakınsaktır denir.

Hemen hemen P- yakınsak dizi uzayı $[\hat{c}^2]$ ile gösterilir.

Tanım 7.3. k_r ve l_s pozitif tamsayıların artan iki lacunary dizisi olmak üzere $k_0 = 0$, $r \to \infty$ iken $h_r = k_r - k_{r-1} \to \infty$ ve $l_0 = 0$, $s \to \infty$ iken $\overline{h_s} = l_s - l_{s-1} \to \infty$ için $k_{r,s} = k_r l_s$, $h_{r,s} = h_r \overline{h_s}$ ve $\theta_{r,s} = \{(k_r, l_s)\}$ dizisine çift lacunary dizisi denir. Burada $I_{r,s} = \{(k,l): k_{r-1} < k < k_r, l_{s-1} < l < l_s\}$ ve $q_r = \frac{k_r}{k_{r-1}}$, $\overline{q_s} = \frac{l_s}{l_{s-1}}$ dir.

Tanım 7.4. M Orlicz fonksiyonu, $S''(2 - X)$ ise 2-normlu uzay değerli çift dizilerin kümesi ve $p = (p_{k,l})$ pozitif reel sayıların bir çift dizisi olsun. Bu durumda yeni bazı çift dizi uzayları şu şekilde tanımlanır: her $z \in X$ için

$$\left[AC_{\theta_{r,s}}, \|.,.\|\right] = \left\{\begin{matrix} x = (x_{k,l}): P - \lim_{r,s} \frac{1}{h_{r,s}} \sum_{k,l \in I_{r,s}} \left\| x_{k+m,l+n} - L, z \right\| = 0 \\ m \; ve \; n \text{ ye göre düzgün, bazı } L \text{ ve her } z \in X \text{ için} \end{matrix}\right\}$$

$$\left[AC_{\theta_{r,s}}, \|.,.\|\right]_0 = \left\{\begin{matrix} x = (x_{k,l}): P - \lim_{r,s} \frac{1}{h_{r,s}} \sum_{k,l \in I_{r,s}} \left\| x_{k+m,l+n}, z \right\| = 0 \\ m \; ve \; n \text{ ye göre düzgün ve her } z \in X \text{ için} \end{matrix}\right\}$$

$$\left[AC_{\theta_{r,s}}, M, p, \|.,.\|\right] =$$

$$\left\{\begin{matrix} x = (x_{k,l}): P - \lim_{r,s} \frac{1}{h_{r,s}} \sum_{k,l \in I_{r,s}} \left[M\left(\left\| \frac{x_{k+m,l+n} - L}{\rho}, z \right\|\right)\right]^{p_{k,l}} = 0 \\ m \; ve \; n \text{ ye göre düzgün, bazı } \rho > 0 \text{ ve } L \text{ ve her } z \in X \text{ için} \end{matrix}\right\}$$

$$\left[AC_{\theta_{r,s}}, M, p, \|.,.\|\right]_0 =$$

$$\left\{\begin{matrix} x = (x_{k,l}): P - \lim_{r,s} \frac{1}{h_{r,s}} \sum_{k,l \in I_{r,s}} \left[M\left(\left\| \frac{x_{k+m,l+n}}{\rho}, z \right\|\right)\right]^{p_{k,l}} = 0 \\ m \; ve \; n \text{ ye göre düzgün, bazı } \rho > 0 \text{ ve her } z \in X \text{ için} \end{matrix}\right\}$$

Eğer bu uzaylar içerisinde $M(x) = x$ ve tüm k, l için $p_{k,l} = 1$ alınırsa $\left[AC_{\theta_{r,s}}, M, p, \|.,.\|\right] = \left[AC_{\theta_{r,s}}, \|.,.\|\right]$ ve $\left[AC_{\theta_{r,s}}, M, p, \|.,.\|\right]_0 = \left[AC_{\theta_{r,s}}, \|.,.\|\right]_0$ olur.

Teorem 7.6. M, Orlicz fonksiyonu, $p = (p_{k,l})$ pozitif reel sayıların ayrılabilir bir çift dizisi olmak üzere $\left[AC_{\theta_{r,s}}, M, p, \|.,.\|\right]$ ve $\left[AC_{\theta_{r,s}}, M, p, \|.,.\|\right]_0$ uzayları lineer uzaylardır.

KAYNAKLAR

[1] APOSTOL, T., Mathematical Analysis, Addison-Welsey Pub.No.Co. Reading, Mass., 1974

[2] BOOS, J., Classical and Modern Methods in Summability, Oxford University Press., New York, Oxford, 2000

[3] BUCK, R.C., Generalized Asymptotic Density. Amer. J. Math., 75, 335-346, 1952

[4] ÇALLIALP, F., Örneklerle Soyut Cebir, Birsen Yayınevi, 2001

[5] DAS, P., MALIK P., On Extremal *I*-limit Points of Double Sequences, Tatra Mt. Math. Publ. 40, 91-102, 2008

[6] DAS, P., KOSTYRKO, P., WILCZYNSKI, W., MALIK, P., *I* and *I**-convergence of double sequences, Math. Slovaca 58, No: 5, 605-620, 2008

[7] DEMS, K., On *I*-Cauchy Sequences, Real Anal. Exchange 3, 123-128, 2004-2005

[8] FAST, H., : Sur la convergence statistique, Collog. Math. 2, 241-244, 1951

[9] FRIDY, J.A., On Statistical Convergence, Analysis, 5, 301-313, 1985

[10] FRIDY, J.A, ORHAN, C., Statistical limit superior and limit inferior, Proc. American. Math. Soc. Vol.125, No:12, 3626-3631, 1997

[11] GAHLER, S., 2-metrische Raume und Ihre Topologische Struktur, Math. Nachr. 26, 115-148, 1963

[12] GAHLER, S., Lineare 2-normietre Raume, Math. Nacr. 28, 335-347, 1964

[13] GAHLER, S., Unterschungen uber verallgemeinerte *m*-metrische Raume.II, Math. Nacr. 40, 229-264, 1969

[14] GUNAVAN, H., The space of *p*-summable sequences and its natural *n*-norm, Bull. Aust. Math. Soc., 64 (1), 137-147, 2001

[15] GUNAVAN, H. ve MASHADI, M., On *n*-normed spaces, Int. Math. and Math. Sci., 27 (10), 631-639, 2001

[16] GÜRDAL, M., ŞAHİNER A., Extremal *I*-Limit Points of Double Sequences, Applied Mathematics E-Notes, 8, 131-137, 2008

[17] HARDY, G.H., On the convergence of certain multiple series, Proc.Cambridge Philos.Soc., 19, 86-95, 1916-1919

[18] IYER, V.G., Mathematical Analysis 3^{rd} ed. Tata McGraw-Hill Publishing Company Ltd. New Delhi, 1985

[19] JECH, T., Set Theory, Springer Monographs in Mathematic, Springer-Verlages, 769, Berlin, 2003

[20] KELLEY, J.L., General Topology, Springer-Verlag, New York, 1955

[21] KIZMAZ, H., Fonksiyonel Analize Giriş, KTÜ Basımevi, Trabzon, 1993

[22] KOSTYRKO, P., SALAT, T., WILCZYNSKI,W., : *I*-convergence, Real Anal. Exchange, 26, 669-686, 2000

[23] KRASNOSELSKII, M.A., RUTISKY, Y.B., Convex Function and Orlicz Spaces, Noordhoff Ltd., Groningen, Netherlands, 1961

[24] KUMAR, V., *I*-Core of Double Sequences, Vol.2, No:23, 1137-1145, 2007

[25] KUMAR, V., On *I* and *I**-convergence of double sequences, Mathematical Communications, 12, 171-181, 2007

[26] KURATOWSKI, C., Topology, Volume I, PWN, Warszawa, 1966

[27] LINDBERG, K.J., On subspaces of Orlicz sequence spaces, Studia Mathematica, Vol.45, 119-146, 1973

[28] MADDOX, I.J., Elements of Functional Analysis, Cambridge University Press, 1970

[29] MADDOX, I.J., Sequence spaces defined by modulus, Math. Proc. Camb. Philos. Soc. 100, 161-166, 1986

[30] MOLKOWSKY, E., FK Spaces, Matrix Transformations and the Hausdorf measure of noncompactness, Seminar Notes, Van, Turkey, 2001

[31] MORICZ, F. ve RHOADES, B.E., Almost Convergence of Double

Sequences and Strong Regularity of Summability Matrices, Math. Proc. Camb. Phill. Soc., 104, 283-294, 1988

[32] MORICZ, F., Extensions of the Spaces *c* and c_0 From Single To Double Sequence, Acta Math. Hungerica 57 (1-2), 129-139, 1991

[33] MORICZ, F., Statistical convergence of multiple sequences, Arch.Math., 81, 82-89, 2003

[34] MURSALEEN-EDELY, O.H.H.: Statistical convergence of double sequences, J.Math.Anal.Appl., 288, 223-231, 2003

[35] MUSAYEV, B., ALP, M., Fonksiyonel Analiz, Balcı Yayınları, Kütahya, 2000

[36] NAGATA, J., Modern General Topology, North Holland Publ. Comp., Amsterdam, London, 1974

[37] PATTERSON, R.F., Double Sequence Core Theorems, International Journal of Mathematics and Mathematical Science, Vol:22, No:4, 785-793, 1999

[38] PATTERSON, R. F. Analogues of some fundamental theorems of summability theory, International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, Vol. 23, No:1, 1–9, 2000

[39] PRINGSHEIM, A., Zur Theorie der zweifach unendlichen zahlenfongen, Math.Ann. 53, 289-321, 1900

[40] RUCKLE, W.H., FK spaces in which the sequence of coordinate vectors in bounded, Canad. J. Math. 25, 973-978, 1973

[41] SALAT, T., TRIPATHY, B.C. ve ZIMAN, M., On *I*-convergence field, Italian J. Pure and Appl. Math., 17, 45-54, 2005

[42] SAVAŞ, E., Δ^m-Strongly summable sequences spaces in *2*-normed spaces defined by ideal convergence and an Orlicz function, App. Math. Comp., 217, 271-276, 2010

[43] SAVAŞ, E., Some new double sequence spaces defined by Orlicz function in *n*-normed spaces, Journal of Inequalities and Applications Vol.2011, Article ID 592840, 9 pages, 2011

[44] SZALAY, I., "On the Strong Cesaro Summability of Double Series", Analysis Mathematica, 15, 322-341, 1989

[45] ŞUHUBİ, E.S., Fonksiyonel Analiz, İTÜ Vakfı Yayınları, 2001

[46] ŞAHİNER, A., GÜRDAL, M., SALTAN, S., GUNAWAN, H., Ideal

convergence in *2*-normed spaces, Taiwanese J. Math. 11 (4), 1477-1484, 2007

[47] ŞAHİNER, A., GÜRDAL, M., YİĞİT, T., Ideal convergence characterization of the completion of linear *n*-normed spaces, Computers and Math. with Appl. 61, 683-689, 2011

[48] TRIPATHY, B.C., Statistically Convergent Double Sequences, Tamkang J. Math., 34 (3), 231-237, 2003

[49] TRIPATHY, C.-TRIPATHY, B.C., On *I*-convergent double sequences, Soochow J. Math., 31, 249-560, 2005

[50] TRIPATHY, B.C., ve ESİ, A. A new type of difference sequence spaces, International Journal of Science and Technology, Vol. 1, No:1, pp:11-14, 2006

[51] TRIPATHY, B.C., SARMA, B., Some paranormed difference double sequence spaces defined by Orlicz function, Fasc. Math. Nr.39, 113-124, 2008

[52] TRIPATHY, B.C., SARMA, B., On some classes of difference double sequence space, Fasc. Math. Nr. 41, 135-142, 2009

ÖZGEÇMİŞ

Orhan TUĞ, 01.04.1985 de Ordu' da doğdu. İlk, orta ve lise eğitimini Ordu'da tamamladı. 2004 yılında Ünye Yabancı Dil Ağırlıklı Lisesi, Sayısal Bölümünden mezun oldu. 2004 yılında başladığı Atatürk Üniversitesi Erzincan Fen Edebiyat Fakültesi Matematik bölümünü 2008 yılında bitirdi. 2008 yılında Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans eğitimine başladı.