

**T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

LORENTZİYEN BOBİLLİER FORMÜLÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Nurten BAYRAK

Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK

Tez Danışmanı : Yrd. Doç. Dr. Soley ERSOY

Ocak 2011

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

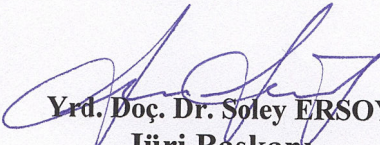
LORENTZİYEN BOBİLLER FORMÜLÜ

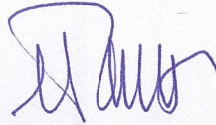
YÜKSEK LİSANS TEZİ

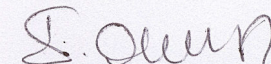
Nurten Bayrak

Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK

Bu tez 19.01.2011 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Oybirliği ile kabul edilmiştir.


Yrd. Doç. Dr. Soley ERSOY
Jüri Başkanı


Doç. Dr. Murat TOSUN
Üye


Prof. Dr. İbrahim OKUR
Üye

TEŐEKKÖR

Bu çalışmanın oluőmasında, bilgi ve tecrübesiyle yol gösteren, her adımda ilgi ve desteğini büyük bir özenle bana sunan sayın hocam Yrd. Doç. Dr. Soley ERSOY' a sonsuz teőekkör ve saygılarımı sunarım.

Beni yaőamımın her aőamasında, özellikle yüksek lisans eğitimim boyunca büyük bir sabırla destekleyen ve her zaman yanımda olan sevgili aileme teőekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR.....	ii
İÇİNDEKİLER	iii
SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ.....	v
ŞEKİLLER LİSTESİ	vi
ÖZET.....	vii
SUMMARY.....	viii
BÖLÜM 1.	
GİRİŞ.....	1
BÖLÜM 2.	
TEMEL KAVRAMLAR.....	
2.1. \mathbb{R}_1^2 Lorentz Düzleminde Vektörler.....	3
2.2. \mathbb{R}_1^2 Lorentz Düzleminde Açık Kavramı ve Dönme	7
2.3. \mathbb{R}_1^3 Lorentz 3-Uzayı ve Eğriler	9
BÖLÜM 3.	
LORENTZ ANLAMDA BİR PARAMETRELİ DÜZLEMSEL HAREKETLER.....	11
3.1. Lorentz Uzayında Bir Parametrelili Düzlemsel Hareketler.....	12
3.2. Lorentz Uzayında Türev Denklemleri.....	15
3.3. Hızlar ve Hızların Terkibi.....	17
3.3. Dönme Polü ve Pol Yörüngeleri.....	19

BÖLÜM 4.

1-PARAMETRELİ LORENTZİYEN DÜZLEM HAREKETİ İÇİN TEMEL KURAL OLARAK BOBILLIER FORMÜLÜ.....	23
4.1. Timelike Pol Eğrileri için Lorentziyen Bobillier Formülü.....	23
4.1.1. Timelike pol eğrileri için Lorentziyen Euler-Savary formülü	26
4.1.2. Timelike pol eğrileri için Lorentziyen Euler-Savary formülünden Lorentziyen Bobillier formülüne geçiş.....	31
4.1.3. Lorentziyen Bobillier formülünün hız ve ivme vektörleri vasıtasıyla elde edilmesi	33
4.1.4. Timelike pol eğrileri için Lorentziyen Bobillier formülünde eğrilik yarıçapları arasındaki ilişki.....	44
4.1.5. Lorentziyen I. ve II. Formların timelike pol eğrileri için birlikte kullanımı.....	47
4.2. Spacelike Pol Eğrileri için Lorentziyen Bobillier Formülü.....	48
4.2.1. Spacelike pol eğrileri için Lorentziyen Euler-Savary formülü.....	51
4.2.2. Spacelike pol eğrileri için Lorentziyen Euler-Savary formülünden Lorentziyen Bobillier formülüne geçiş.....	55
4.2.3. Lorentziyen Bobillier formülünün hız ve ivme vektörleri vasıtasıyla elde edilmesi	58
4.2.4. Spacelike pol eğrileri için Bobillier formülünde eğrilik yarıçapları arasındaki ilişki.....	66
4.2.5. Lorentziyen I. ve II. Formların spacelike pol eğrileri için birlikte kullanımı.....	68

BÖLÜM 5.

SONUÇLAR VE ÖNERİLER.....	70
KAYNAKLAR.....	71
ÖZGEÇMİŞ.....	73

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

\mathbb{E}^2	: 2-boyutlu Öklid uzayı (Öklidyen düzlem)
\mathbb{R}_1^2	: 2-boyutlu Lorentz uzayı (Lorentziyen düzlem)
\mathbb{R}_1^3	: 3-boyutlu Lorentz uzayı
$\ \cdot \ $: \mathbb{R}_1^2 Lorentz uzayında norm
P_1	: Hareketli Lorentz düzlemi
C_1	: Hareketli Lorentz düzlemindeki pol eğrisi
H_1^2	: Hiperbolik birim çember
ω	: Hiperbolik veya merkezci açısız hız
$\langle \cdot, \cdot \rangle$: Lorentziyen iç çarpımı
S_1^2	: Lorentziyen birim çember
\vec{V}_a	: Mutlak hız vektörü
P_1 / P_0	: P_1 in P_0 a göre hareketi
\vec{V}_r	: Relatif hız vektörü
P_0	: Sabit Lorentz düzlemi
C_0	: Sabit Lorentz düzlemindeki pol eğrisi
\vec{V}_f	: Sürüklenme hız vektörü

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 2.1.	\mathbb{R}_1^2 uzayında vektörler.....	4
Şekil 2.2.	Lorentziyen ve hiperbolik birim çemberler.....	6
Şekil 2.3.	Future ve past pointing timelike vektörler.....	7
Şekil 3.1.	$\overline{O_0M}$ spacelike vektör.....	13
Şekil 3.2.	$\overline{O_0M}$ timelike vektör.....	13
Şekil 3.3.	Hiperbolik ve merkezci dönme	14
Şekil 4.1.	\overline{IM} ve $\overline{IM'}$ vektörleri.....	24
Şekil 4.2.	\overline{X} , $\overline{X'}$ ve $\overline{X''}$ vektörleri.....	24
Şekil 4.3.	R_0 ve R_1 uzunlukları.....	27
Şekil 4.4.	Q noktaları.....	27
Şekil 4.5.	$\overline{IQ} - \overline{IQ'}$ ve $\overline{IQ'} - \overline{IQ''}$ vektörleri.....	31
Şekil 4.6.	Hız ve ivme vektörleri.....	37
Şekil 4.7.	\overline{IM} ve $\overline{IM'}$ vektörleri.....	49
Şekil 4.8.	\overline{X} , $\overline{X'}$ ve $\overline{X''}$ vektörleri.....	49
Şekil 4.9.	R_0 ve R_1 uzunlukları.....	52
Şekil 4.10.	Q noktaları.....	52
Şekil 4.11.	$\overline{IQ} - \overline{IQ'}$ ve $\overline{IQ'} - \overline{IQ''}$ vektörleri.....	56
Şekil 4.12.	Hız ve ivme vektörleri.....	61

ÖZET

Anahtar Kelimeler: Euler-Savary Formülü, Lorentz Uzayı, Bobillier Formülü, 1-parametrelî düzlem hareketi

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmıştır. İkinci bölümde Öklid ve Lorentz uzayında temel kavramlar tanıtılmıştır. Ayrıca, Lorentz düzleminde temel tanım ve teoremler verilmiştir.

Üçüncü bölümde Lorentz anlamda 1-parametrelî düzlemsel hareket verilmiş olup harekete ait türev denklemleri, hızlar ve hızların terkibi, dönme polü ve pol yörüngelerine ait karakterizasyonlar verilmiştir.

Dördüncü bölüm bu çalışmanın orijinal kısmını oluşturmaktadır. Bu bölümde Lorentz düzleminde 1-parametrelî düzlem hareketi sonucu oluşan timelike ve spacelike pol eğrileri ayrı ayrı göz önüne alınmış ve Lorentziyen Euler-Savary formülünden Lorentziyen Bobillier formülü elde edilmiştir. Ayrıca, Lorentziyen düzlem hareketi için temel kural olarak Lorentziyen Bobillier formülünün Euler-Savary formülünden bağımsız olarak hızlar ve ivmeler arasındaki bağıntılardan da elde edilebileceği gösterilmiştir.

Beşinci bölümde tüm çalışmanın geniş bir özeti yapılmış ve bundan sonra yapılacak araştırmalara yönelik öneride bulunulmuştur.

LORENTZIAN BOBILLIER FORMULA

SUMMARY

Key words: The Euler-Savary Formula, Lorentz Space, The Bobillier Formula, 1-parameter planar motion

This thesis consists of five chapters. The first chapter is devoted to the introduction. In the second chapter, basic concepts in the Euclidean and Lorentzian space are introduced. The fundamental definitions and theorems in Lorentz plane are given.

In the third chapter, Lorentzian 1-parameter planar motion is defined. The characterizations of the derivative equations, velocities and their compositions, rotation pole and trajectory of rotation with related to this motion are defined.

The fourth chapter is the original part of this study. In this chapter, timelike and spacelike pole curves of 1-parameter planar motion in Lorentz plane are taken into consideration, separately, and Lorentzian Bobillier formula is obtained with respect to Lorentzian Euler-Savary formula. Also, the Lorentzian Bobillier formula as a fundamental law for Lorentzian planar motion is derived from the relationships between the velocities and accelerations independently from Euler-Savary formula.

In the fifth chapter of this thesis, a brief summary of the study is given and a suggestion is proposed for investigations in future.

BÖLÜM 1. GİRİŞ

E^2 , 2-boyutlu Öklid uzayında 1-parametrelî düzlemsel hareketler, bu hareketlerin türev denklemleri, hızlar ve hızların lineer birleşimi, ivmeler ve ivmelerin lineer birleşimi ile birlikte pol noktaları [11] de H. R. Müller tarafından incelenmiştir. Ayrıca, H. R. Müller, E^3 3-boyutlu Öklid uzayında küresel hareketleri tanıtmış bu hareketler için türev denklemleri, hızlar, ivmeler ve pol noktalarını vermiştir. 2 ve 3 boyutlu Öklid uzayında Euler-Savary formülü [3, 11] de tanımlanmıştır.

1-parametrelî Lorentziyen düzlem hareketi A. A. Ergin tarafından [4] de incelenmiş ve bu hareketlerin ivmeleri ve pol noktaları çalışılmıştır. Lorentz düzleminde hareket geometrisi, [8] de çalışılmıştır. Ayrıca [5] de, 2-boyutlu Lorentz düzleminde 1-parametrelî hareketler ve kanonik izafe sistemin geometrisi verilmiştir.

Bu çalışmaların devamı olarak Öklid kinematığının en önemli formüllerinden biri olan Euler-Savary formülünün Lorentziyen karşılığı [1] de verilmiş ve geometrik olarak yorumlanmıştır.

Ayrıca literatürde 2 ve 3 boyutlu Öklid ve Lorentz uzayında 1-parametrelî hareketler, 1-parametrelî küresel hareketler ve dual hareketler için Euler-Savary Formülü ile ilgili çalışmalar mevcuttur, [1, 9, 13].

M. Fayet, [6] da Euler-Savary formülünü genelleştirmiş 1-parametrelî harekette üç farklı noktanın eğriliklerinin birbirine göre durumlarını veren Bobillier formülünü tanımlamıştır. Daha sonra [7] de Bobillier formülünü Euler-Savary formülünden bağımsız bir direkt yol ile elde etmiştir. Bobillier formülü ile ilgili özellikler [10] da da incelenmiştir.

Bu tezde ilk olarak M. Fayet in Öklid düzleminde tanımladığı Bobillier formülünün Lorentziyen karşılığı araştırılmış ve bunun için Lorentz anlamda Euler-Savary formülü genelleştirilerek, Euler-Savary formülü kullanılmadan da aynı sonuçlar elde edilmiştir. Bunun için pol eğrilerinin timelike ya da spacelike olması durumları ayrı ayrı göz önüne alınmış ve Lorentziyen Bobillier formülü geometrik olarak da açıklanmıştır.

BÖLÜM 2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1. \mathbb{R}_1^2 Lorentz Düzleminde Vektörler

Öklid iç çarpımı pozitif tanımlı olduğundan, E^2 Öklid uzayında vektörlerin karakterleri aynıdır. Fakat Lorentz iç çarpımı ile donatılmış \mathbb{R}_1^2 Lorentz 2-uzayı ele alınırsa, bu uzaydaki vektörler, timelike, spacelike ve lightlike (null) vektörler olarak sınıflandırılır. Bu sınıflandırma, Lorentziyen geometride son derece önemlidir. Bu bölümde, temel kavramlar ve bunlarla ilgili temel özellikler verilecektir.

Tanım 2.1.1. \mathbb{R}^2 standart reel vektör uzayı üzerinde

$$\begin{aligned} \langle \cdot \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (\vec{a}, \vec{b}) &\rightarrow \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 \quad ; \quad \vec{a} = (a_1, a_2), \vec{b} = (b_1, b_2) \end{aligned} \quad (2.1.1)$$

Öklid iç çarpımı tanımlanırsa, \mathbb{R}^2 afin uzayına, Öklid 2-uzay denir ve E^2 ile gösterilir.

Tanım 2.1.2. \mathbb{R}^2 standart reel vektör uzayı üzerinde, Öklid iç çarpımı yerine

$$\begin{aligned} \langle \cdot \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (\vec{a}, \vec{b}) &\rightarrow \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = a_1 b_1 - a_2 b_2 \quad ; \quad \vec{a} = (a_1, a_2), \vec{b} = (b_1, b_2) \end{aligned} \quad (2.1.2)$$

biçiminde tanımlı Lorentz iç çarpımı alınırsa \mathbb{R}^2 afin uzayı, Lorentz 2-uzayı olarak isimlendirilir ve \mathbb{R}_1^2 ile gösterilir, [12].

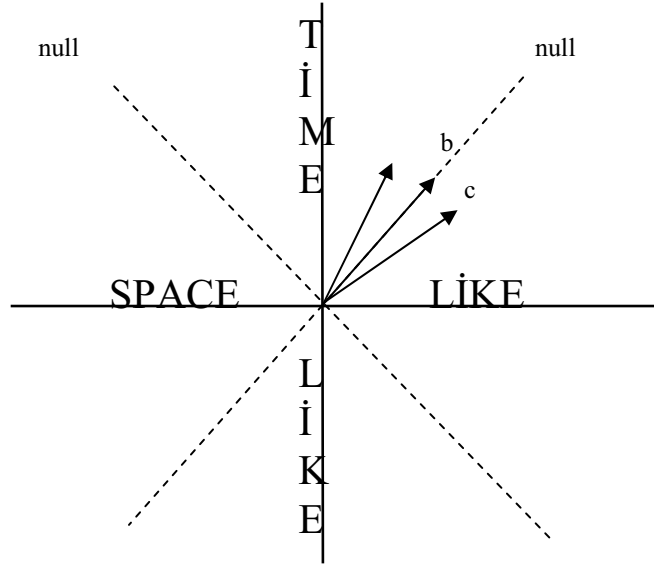
Lorentz iç çarpımı pozitif tanımlı olmadığından, bu uzaydaki vektörler aşağıdaki biçimde sınıflara ayrılır.

Tanım 2.1.3. $\vec{a} = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}_1^2$ olsun. Eğer

$\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle > 0$ veya $\vec{a} = 0$ ise \vec{a} ya spacelike vektör,

$\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle < 0$ ise \vec{a} ya timelike vektör,

$\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle = 0$ ve $\vec{a} \neq 0$ ise \vec{a} ya lightlike (veya null) vektör denir (Şekil 2.1) [12].



Şekil 2.1. \mathbb{R}_1^2 uzayında vektörler

Tanım 2.1.4. $\vec{a} \in \mathbb{R}_1^2$ için \vec{a} nın normu,

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{|\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle|} \quad (2.1.3)$$

olarak tanımlanır. Buna göre

- \vec{a} timelike ve $\|\vec{a}\| = 1$ ise \vec{a} ya birim timelike vektör
- \vec{a} spacelike ve $\|\vec{a}\| = 1$ ise \vec{a} ya birim spacelike vektör denir.

Teorem 2.1.5. $\vec{a} \in \mathbb{R}_1^2$ için

- $\|\vec{a}\| > 0$ dır.
- $\|\vec{a}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{a}$ bir null vektördür.
- \vec{a} bir timelike vektör ise $\|\vec{a}\|^2 = -\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle$ dır.

d. \vec{a} bir spacelike vektör ise $\|\vec{a}\|^2 = \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle$ dır [2].

Tanım 2.1.6. \mathbb{R}_1^2 Lorentz 2-uzayında iki vektör \vec{a} ve \vec{b} olsun.

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 0$$

ise \vec{a} ve \vec{b} vektörlerine Lorentz anlamında diktirler denir [12].

Bu tanıma göre, 1. ve 2. açıortaya göre simetrik olan vektörler Lorentz anlamında diktirler.

Teorem 2.1.7. \mathbb{R}_1^2 uzayında iki timelike (veya spacelike) vektör dik olamaz [12].

Sonuç 2.1.8. \mathbb{R}_1^2 uzayında iki vektörün dik olması için birinin timelike diğerinin spacelike olması gerekir [12].

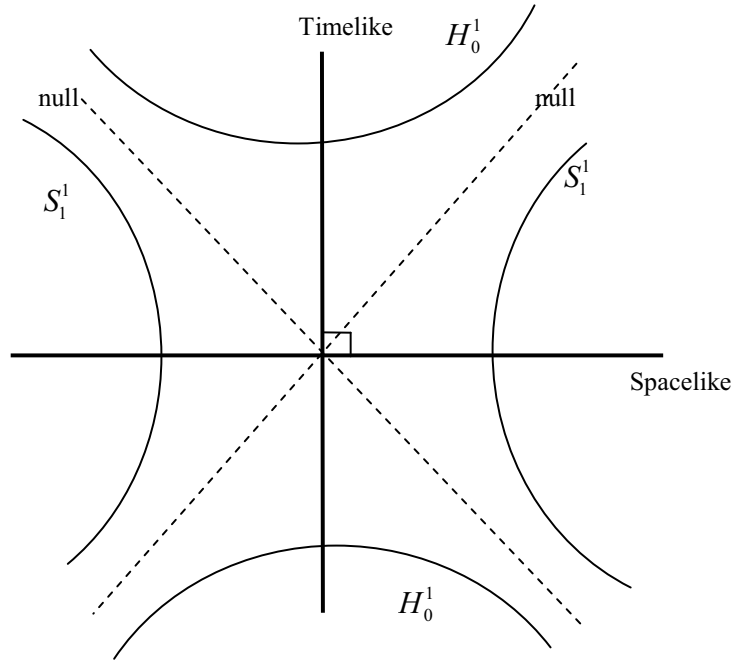
Tanım 2.1.9. \mathbb{R}_1^2 uzayında Lorentziyen birim çember

$$S_1^1 = \{ \vec{a} \in \mathbb{R}_1^2; \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle = 1 \}$$

biçiminde tanımlanır. Bu çemberin teğetleri daima timelike vektörlerdir. Benzer olarak hiperbolik birim çember de

$$H_0^1 = \{ \vec{a} \in \mathbb{R}_1^2; \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle = -1 \}$$

biçiminde tanımlı olup bu çemberin teğetleri de spacelike vektörlerdir (Şekil 2.2).



Şekil 2.2. Lorentziyen ve hiperbolik birim çemberler

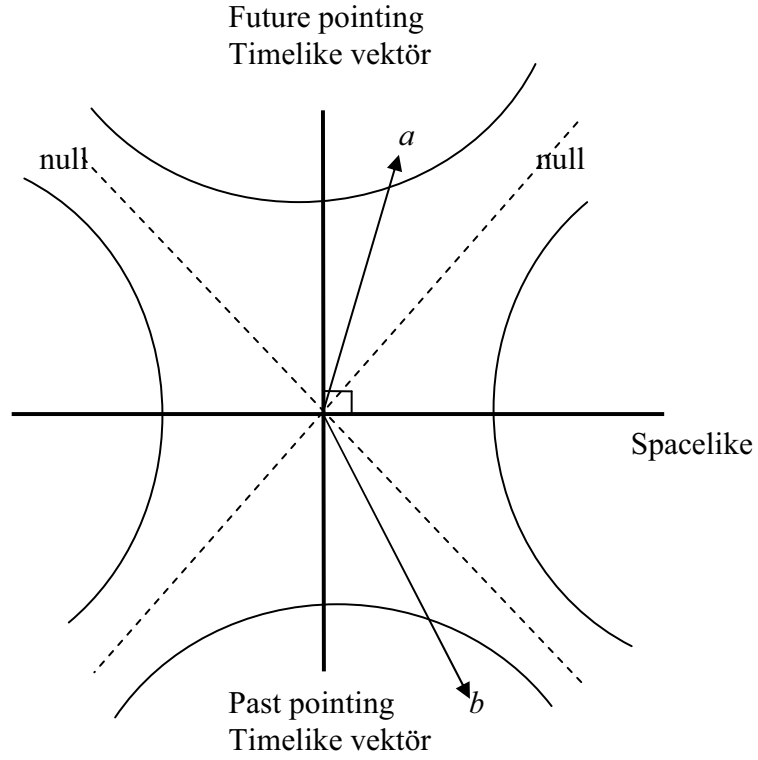
Timelike vektörler için zaman yönlendirmesi aşağıdaki gibi tanımlanır.

Tanım 2.1.10. $\vec{a} \in \mathbb{R}_1^2$ timelike vektör olsun. $e = (0,1)$ olmak üzere,

- $\langle \vec{a}, e \rangle < 0$ ise \vec{a} ya future pointing timelike vektör,
- $\langle \vec{a}, e \rangle > 0$ ise \vec{a} ya past pointing timelike vektör denir, [2].

Sonuç 2.1.11:

- $\vec{a} = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}_1^2$ vektörünün future pointing timelike vektör olması için gerek ve yeter şart $|a_1| < a_2$ olmasıdır.
- $\vec{a} = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}_1^2$ vektörünün past pointing timelike vektör olması için gerek ve yeter şart $a_1 < |a_2|$ olmasıdır (Şekil 2.1.3) [2].



Şekil 2.3. Future ve past pointing timelike vektörler

Lemma 2.1.12. $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}_1^2$ ya future pointing timelike vektörler olsun. Bu durumda

- $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle \leq 0$
- $\vec{a} + \vec{b}$, future pointing timelike vektördür (Kapalılık).
- $-\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle \geq \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|$ (Lorentz uzayında Schwartz eşitsizliği)
- $\|\vec{a} + \vec{b}\| \geq \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|$ (Lorentz uzayında üçgen eşitsizliği)

dır [2].

2.2. \mathbb{R}_1^2 Lorentz Düzleminde Açık Kavramı ve Dönme

Düzlemsel, küresel ve uzay hareketlerinde en önemli kavram açı kavramıdır. Lorentziyen geometride açı kavramı, Öklidyen geometride olduğundan tamamen farklıdır. Bu farklılık vektörlerin karakterinden ortaya çıkmaktadır.

Tanım 2.2.1. \mathbb{R}_1^2 uzayında dönme hareketinin matrisi

$$\begin{bmatrix} \cosh \theta & \sinh \theta \\ \sinh \theta & \cosh \theta \end{bmatrix} \quad (2.2.1)$$

biçimindedir [2].

Tanım 2.2.2. \vec{a} ve \vec{b} , \mathbb{R}_1^2 uzayında future pointing (veya past pointing) timelike iki birim vektör olsun.

$$\begin{bmatrix} \cosh \theta & \sinh \theta \\ \sinh \theta & \cosh \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \quad (2.2.2)$$

eşitliği sağlanacak şekilde $\theta \in \mathbb{R}$ sayısına \vec{a} dan \vec{b} ye (yönlendirilmiş) hiperbolik açı denir ve $\theta = (\vec{a}, \vec{b})$ şeklinde gösterilir [2].

Lemma 2.2.3. \vec{a} ve \vec{b} , future pointing timelike birim vektörler olsun. θ , \vec{a} dan \vec{b} ye hiperbolik açı ise

$$\cosh \theta = -\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle \quad (2.2.3)$$

dir [12].

İspat: \vec{a} dan \vec{b} ye hiperbolik açı θ ise

$$\begin{bmatrix} \cosh \theta & \sinh \theta \\ \sinh \theta & \cosh \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

dir. Buradan

$$\begin{aligned} a_1 \cosh \theta + a_2 \sinh \theta &= b_1 \\ a_1 \sinh \theta + a_2 \cosh \theta &= b_2 \end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned}
 \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle &= \langle (a_1, a_2), (b_1, b_2) \rangle \\
 &= \langle (a_1, a_2), (a_1 \cosh \theta + a_2 \sinh \theta, a_1 \sinh \theta + a_2 \cosh \theta) \rangle \\
 &= (a_1^2 - a_2^2) \cosh \theta \\
 &= -\|\vec{a}\|^2 \cosh \theta \\
 &= -\cosh \theta
 \end{aligned}$$

elde edilir.

2.3. \mathbb{R}_1^3 Lorentz 3-Uzayı ve Eğriler

Tanım 2.3.1. \mathbb{R}^3 standart vektör uzayı üzerinde

$$\begin{aligned}
 \langle \cdot \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R} \\
 (\vec{a}, \vec{b}) &\rightarrow \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 - a_3 b_3; \vec{a} = (a_1, a_2, a_3), \vec{b} = (b_1, b_2, b_3)
 \end{aligned} \tag{2.3.1}$$

biçiminde Lorentz iç çarpımı alınırsa \mathbb{R}^3 afin uzayı, Lorentz 3-uzayı olarak isimlendirilir ve \mathbb{R}_1^3 ile gösterilir [12].

(2.3.1) ile verilen Lorentz iç çarpımı \mathbb{R}_1^3 uzayındaki vektörleri üç sınıfa ayırır. Timelike vektörler ışık konisinin içinde, lightlike (veya null) vektörler ışık konisinin üzerinde ve spacelike vektörler ışık konisinin dışında bulunurlar.

Lorentz ve hiperbolik birim çemberlerin tanımlarına benzer olarak \mathbb{R}_1^3 uzayındaki Lorentziyen ve hiperbolik birim küreler, sırasıyla,

$$S_1^2 = \{ \vec{a} \in \mathbb{R}_1^3; \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle = 1 \}$$

ve

$$H_0^2 = \{\vec{a} \in \mathbb{R}_1^3; \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle = -1\}$$

şeklinde ifade edilirler.

Tanım 2.3.2. \mathbb{R}_1^3 Lorentz 3-uzayında iki vektör \vec{a} ve \vec{b} olsun. $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ ve $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ olmak üzere,

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_3 b_2 - a_2 b_3, a_1 b_3 - a_3 b_1, a_1 b_2 - a_2 b_1) \quad (2.3.2)$$

vektörüne \vec{a} ve \vec{b} nin vektörel çarpımı denir.

$$\partial_{ij} = \begin{cases} 1 & , \quad i = j \text{ ise} \\ 0 & , \quad i \neq j \text{ ise} \end{cases} \quad \text{ve} \quad \vec{e}_i = (\partial_{i1}, \partial_{i2}, \partial_{i3})$$

olmak üzere

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\det \begin{bmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & -\vec{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} \quad (2.3.3)$$

ile verilir. Burada $\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3$, $\vec{e}_2 \times \vec{e}_3 = -\vec{e}_1$ ve $\vec{e}_3 \times \vec{e}_1 = \vec{e}_2$ dir [12].

Tanım 2.3.3. (c) , \mathbb{R}_1^3 uzayında bir eğri olsun. $\vec{c}'(t)$, c nin $c(t)$ noktasındaki teğet vektörü olmak üzere $\forall t \in I \subset \mathbb{R}$ için

- $\langle \vec{c}'(t), \vec{c}'(t) \rangle > 0$ ve $\vec{c}'(t) \neq 0$ ise (c) ye spacelike eğri,
- $\langle \vec{c}'(t), \vec{c}'(t) \rangle < 0$ ise (c) ye timelike eğri,
- $\langle \vec{c}'(t), \vec{c}'(t) \rangle = 0$ ve $\vec{c}'(t) \neq 0$ ise (c) ye lightlike(null) eğri denir.

BÖLÜM 3. LORENTZ ANLAMDA BİR PARAMETRELİ DÜZLEMSEL HAREKETLER

3.1. Lorentz Uzayında Bir Parametrelî Düzlemsel Hareketler

P_0 ve P_1 düzlemleri, Lorentz uzayında, sırasıyla, sabit ve hareketli düzlemler olsunlar. P_0 düzleminde Lorentz anlamında ortonormal bir koordinat sistemi $\{O_0; \vec{p}_{01}, \vec{p}_{02}(\text{timelike})\}$ olsun. Bu koordinat sistemine sabit koordinat sistemi denir. Benzer şekilde $\{O_1; \vec{p}_{11}, \vec{p}_{12}(\text{timelike})\}$ sistemi de, P_1 düzlemindeki bir koordinat sistemi olsun. Bu koordinat sistemleri, sırasıyla, P_0 ve P_1 Lorentz düzlemlerinin temsilcisi olarak kabul edilecek ve hareketli koordinat sisteminin sabit koordinat sistemine göre hareketi incelenecektir.

Bu iki koordinat sisteminin birbirlerine göre durumları aşağıdaki iki büyüklük yardımıyla tanımlanacaktır.

1. Sabit sistemin başlangıç noktasından hareketli sistemin başlangıç noktasına giden

$$\overline{O_0O_1} = \vec{u}$$

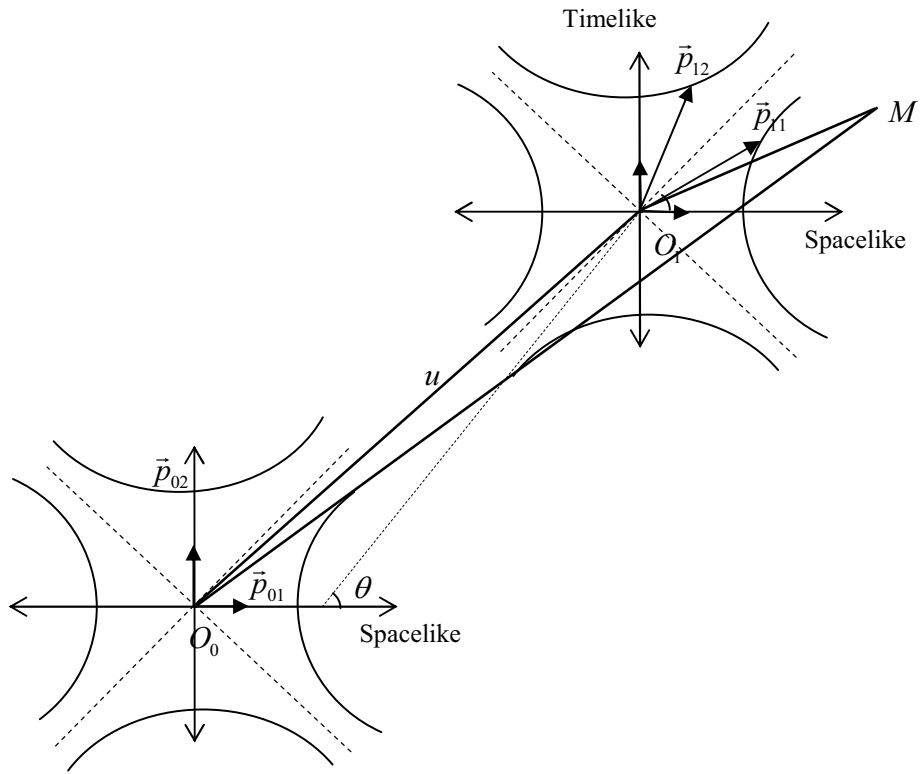
vektörü olsun.

2. Her iki koordinat çatısının birbirine göre Lorentz anlamındaki dönmesi (Şekil 3.1 ve Şekil 3.2) verilsin.

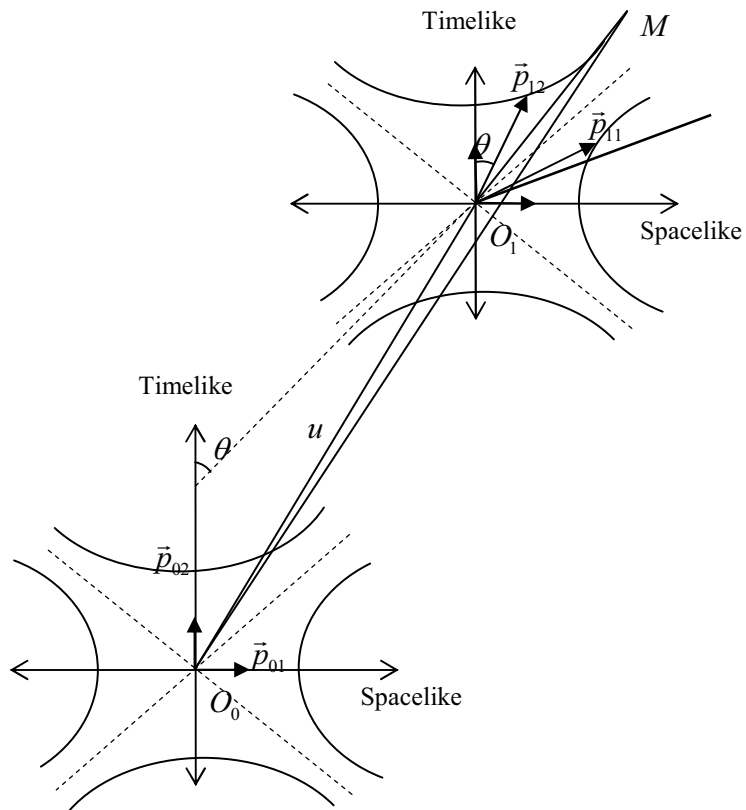
$\overline{O_0O_1} = \vec{u}$ vektörü hareketli koordinat sisteminde bir vektör olarak düşünülürse,

$$\overline{O_0O_1} = \vec{u} = u_1\vec{p}_{11} + u_2\vec{p}_{12} \quad (3.1.1)$$

yazılabilir.



Şekil 3.1. $\vec{O_0M}$ spacelike vektör

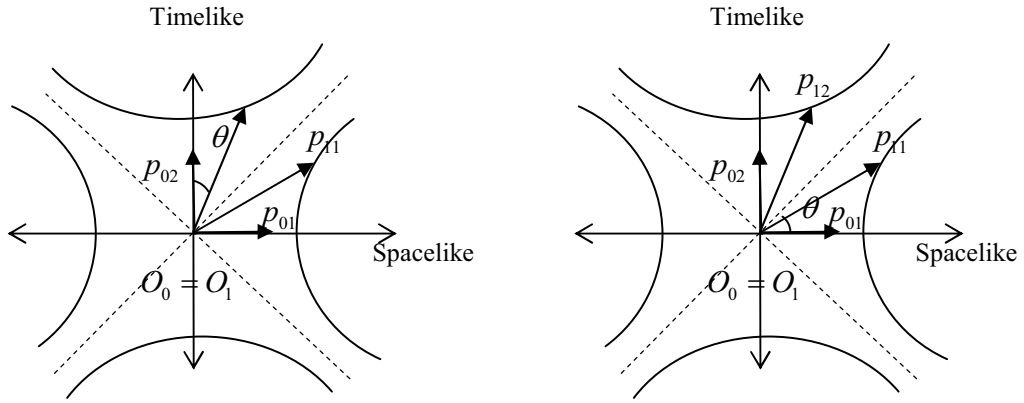


Şekil 3.2 $\vec{O_0M}$ timelike vektör

Her iki koordinat sistemi, O_0 ve O_1 başlangıç noktaları çakışacak şekilde ötelenmiş olarak düşünülürse, \vec{p}_{11} ve \vec{p}_{12} vektörleri, p_{01} ve p_{02} baz vektörleri cinsinden

$$\begin{aligned}\vec{p}_{11} &= \cosh \theta \vec{p}_{01} + \sinh \theta \vec{p}_{02} \\ \vec{p}_{12} &= \sinh \theta \vec{p}_{01} + \cosh \theta \vec{p}_{02}\end{aligned}\quad (3.1.2)$$

biçiminde tek türlü yazılabilir.



Şekil 3.3. Hiperbolik ve merkezci dönüşüm

Şekil 3.3. de görüldüğü gibi Lorentziyen düzlemin hareketinde timelike eksen θ hiperbolik açılık dönerken, spacelike eksen θ merkez açılık dönme yapar.

Burada u_1 , u_2 ve θ büyüklükleri, “ t ” reel parametresinin C^∞ -sınıfından türevlenebilen fonksiyonları olduğu düşünülecektir. Bu parametre genel olarak zaman parametresini belirtir.

Tanım 3.1.1. $u_1 = u_1(t)$, $u_2 = u_2(t)$ ve $\theta_2 = \theta_2(t)$ fonksiyonları ortak bir tanım bölgesine sahipse, bu durumda $\{O_1, \vec{p}_{11}, \vec{p}_{12}(\text{timelike})\}$ koordinat sistemine göre ve dolayısıyla P_1 düzleminin P_0 düzlemine göre P_1/P_0 şeklinde ifade edilen 1-parametrelili Lorentziyen hareketi tanımlanmış olur.

Düzlemin herhangi bir M noktası, hem hareketli sistemdeki (m_{11}, m_{12}) koordinatları hem de sabit sistemdeki (m_{01}, m_{02}) koordinatları yardımıyla göz önüne alınabilir. Her iki sistemde, M noktasına ait yer vektörleri,

$$\begin{aligned}\vec{m}_1 &= \overline{O_1 M} = m_{11} \vec{p}_{11} + m_{12} \vec{p}_{12} \\ \vec{m}_0 &= \overline{O_0 M} = m_{01} \vec{p}_{01} + m_{02} \vec{p}_{02}\end{aligned}$$

olarak yazılabilir. Şekil 3.1 ve Şekil 3.2 dikkate alınır

$$\begin{aligned}\overline{O_0 M} &= \overline{O_0 O_1} + \overline{O_1 M} = -\overline{O_1 O_0} + \overline{O_1 M} \\ \vec{m}_0 &= -\vec{u} + \vec{m}_1 \\ \vec{m}_0 &= (-u_1 + m_{11}) \vec{p}_{11} + (-u_2 + m_{12}) \vec{p}_{12}\end{aligned}\tag{3.1.3}$$

olarak karşımıza çıkar.

3.2. Lorentz Uzayında Türev Denklemleri

Bir M noktasının P_0 ve P_1 Lorentz düzlemlerine göre hızlarını araştırmak için öncelikle, hareketin türev denklemleri hesaplanacaktır. Bunun için (3.1.2) denklemlerinin türevleri alınıp \vec{p}_{01} ve \vec{p}_{02} vektörlerinin sabit oldukları göz önünde bulundurulacaktır. Burada t ye göre türevler “ $\dot{\cdot}$ ” ile gösterilecektir. (3.1.2) denklemlerinden

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{p}_{11}}{dt} &= \dot{\vec{p}}_{11} = \dot{\theta} \sinh \theta \vec{p}_{01} + \dot{\theta} \cosh \theta \vec{p}_{02} = \dot{\theta} (\sinh \theta \vec{p}_{01} + \cosh \theta \vec{p}_{02}) \\ \frac{d\vec{p}_{12}}{dt} &= \dot{\vec{p}}_{12} = \dot{\theta} \cosh \theta \vec{p}_{01} + \dot{\theta} \sinh \theta \vec{p}_{02} = \dot{\theta} (\cosh \theta \vec{p}_{01} + \sinh \theta \vec{p}_{02})\end{aligned}$$

bulunur. Bu eşitlikler (3.1.2) denklemleri ile karşılaştırılırsa

$$\begin{aligned}\dot{\vec{p}}_{11} &= \dot{\theta} \vec{p}_{12} \\ \dot{\vec{p}}_{12} &= \dot{\theta} \vec{p}_{11}\end{aligned}\tag{3.2.1}$$

olduğu görülür. Benzer biçimde (3.1.1) ifadesinin türevini alırsak

$$\dot{\vec{u}} = u_1 \dot{\vec{p}}_{11} + \dot{u}_1 \vec{p}_{11} + u_2 \dot{\vec{p}}_{12} + \dot{u}_2 \vec{p}_{12}$$

bulunur. \dot{p}_{11} ve \dot{p}_{12} nin (3.2.1) ile verilen değerleri yerlerine yazılacak olursa

$$\dot{\vec{u}} = (\dot{u}_1 + u_2 \dot{\theta}) \vec{p}_{11} + (\dot{u}_2 + u_1 \dot{\theta}) \vec{p}_{12} \quad (3.2.2)$$

elde edilir.

Tanım 3.2.1. (3.2.1) ve (3.2.2) ile verilen

$$\begin{aligned} \dot{\vec{p}}_{11} &= \dot{\theta} \vec{p}_{12} \\ \dot{\vec{p}}_{12} &= -\dot{\theta} \vec{p}_{11} \\ \dot{\vec{u}} &= (\dot{u}_1 + u_2 \dot{\theta}) \vec{p}_{11} + (\dot{u}_2 + u_1 \dot{\theta}) \vec{p}_{12} \end{aligned}$$

eşitliklerine P_1/P_0 bir parametrelili Lorentz hareketinin türev denklemleri denir. (3.2.1) yerine

$$\begin{aligned} d\vec{p}_{11} &= \vec{p}_{12} d\theta \\ d\vec{p}_{12} &= -\vec{p}_{11} d\theta \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

ve (3.2.2) yerine de

$$d\vec{u} = (du_1 + u_2 d\theta) \vec{p}_{11} + (du_2 + u_1 d\theta) \vec{p}_{12} \quad (3.2.4)$$

ifadeleri daha uygun ve kullanışlıdır.

3.3. Hızlar ve Hızların Terkibi

P_1 hareketli Lorentz düzleminin kendisi P_0 sabit Lorentz düzlemine göre 1-parametrelili hareket yaparken bir M noktası da hareketli P_1 düzlemindeki yerini bir t parametresine bağlı olarak değiştirirsin. Bu durumda M noktasına ait iki hareket meydana gelmektedir. Bu harekette hızlar arasında nasıl bir bağıntı olduğu aşağıda incelenecektir.

Tanım 3.3.1. M noktasının P_1 Lorentz düzlemine göre hız vektörüne, yani M noktası P_1 deki yörüngesini çizirken sahip olduğu vektörel hıza, M noktasının relatif (izafi) hızı denir ve \vec{V}_r ile gösterilir.

Bu tanıma göre, M noktasının P_1 hareketli Lorentz düzlemindeki yer vektörü

$$\vec{M} = m_1 \vec{p}_{11} + m_2 \vec{p}_{12}$$

olduğundan, M nin P_1 deki relatif hızı,

$$\vec{V}_r = \dot{m}_1 \vec{p}_{11} + \dot{m}_2 \vec{p}_{12} \quad (3.3.1)$$

olur.

Tanım 3.3.2. M noktasının P_0 Lorentz düzlemine göre hız vektörüne, M noktasının mutlak hızı denir ve \vec{V}_a ile gösterilir.

Bu tanıma göre mutlak hız vektörü

$$\vec{V}_a = (\vec{M}_0) = -\dot{u} + \dot{M}$$

olur. (3.2.2) den

$$\vec{V}_a = -(\dot{u}_1 + u_2 \dot{\theta}) \vec{p}_{11} - (\dot{u}_2 + u_1 \dot{\theta}) \vec{p}_{12} + \dot{p}_{11} m_1 + \dot{m}_1 \vec{p}_{11} + m_2 \dot{\vec{p}}_{12} + \dot{m}_2 \vec{p}_{12}$$

olur. Burada $\dot{\vec{p}}_{11}$ ve $\dot{\vec{p}}_{12}$ yerine (3.2.1) deki eşitlikler yazılırsa,

$$\vec{V}_a = (-\dot{u}_1 - (u_2 - m_2) \dot{\theta}) \vec{p}_{11} + (-\dot{u}_2 - (u_1 - m_1) \dot{\theta}) \vec{p}_{12} + \vec{V}_r \quad (3.3.2)$$

olarak elde edilir.

Tanım 3.3.3. $\vec{V}_a = (-\dot{u}_1 - (u_2 - m_2) \dot{\theta}) \vec{p}_{11} + (-\dot{u}_2 - (u_1 - m_1) \dot{\theta}) \vec{p}_{12} + \vec{V}_r$ mutlak hız eşitliğinde yer alan,

$$(-\dot{u}_1 - (u_2 - m_2) \dot{\theta}) \vec{p}_{11} + (-\dot{u}_2 - (u_1 - m_1) \dot{\theta}) \vec{p}_{12} \quad (3.3.3)$$

vektörüne M noktasının sürüklenme hız vektörü denir. Bu vektör \vec{V}_f ile gösterilecektir ve bu vektörün büyüklüğüne sürüklenme hızı denir.

Eğer M noktası P_1 hareketli düzleminde sabit bir nokta ise $\vec{V}_r = \vec{0}$ olacağından bu noktalar için

$$\vec{V}_a = \vec{V}_f$$

dir.

(3.3.2) eşitliğinde verilen $\vec{V}_a, \vec{V}_f, \vec{V}_r$ vektörleri arasında

$$\vec{V}_a = \vec{V}_f + \vec{V}_r \quad (3.3.4)$$

bağıntısı mevcuttur. Böylece hızların terkibi ile ilgili şu teorem verilebilir.

Teorem 3.3.4. Bir noktanın mutlak hız vektörü, relatif hız vektörü ile sürüklenme hız vektörünün toplamına eşittir [11].

Tanım 3.3.5. Türev formüllerinde geçen $\frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}$ türevine 1-parametrelili P_1/P_0 Lorentziyen düzlem hareketinin açısal hızı denir.

Bundan sonra daima $\dot{\theta} \neq 0$ olduğu kabul edilecektir.

3.4. Dönme Polü ve Pol Yörüngeleri

1-parametrelili Lorentziyen düzlem hareketinin her t anında \vec{V}_f sürüklenme hızının sıfır olduğu noktaların araştırılması, Lorentz anlamda dönme polü kavramını ortaya çıkaracaktır. Bu şekildeki noktalar, t anında yalnız hareketli P_1 düzleminde değil aynı zamanda P_0 Lorentz düzleminde de sabittirler.

Teorem 3.4.1. Açısal hızı sıfır olmayan bir P_1/P_0 hareketinde, her t anında sürüklenme hızı sıfır olan, yani her iki düzlemde sabit kalan bir tek nokta vardır [1].

İspat: Bir P_1/P_0 hareketinde sürüklenme hızı,

$$\vec{V}_f = \vec{0}$$

olsun. (3.3.3) eşitliğine göre,

$$\begin{aligned} \dot{u}_1 + (u_2 - m_2)\dot{\theta} &= 0 \\ \dot{u}_2 + (u_1 - m_1)\dot{\theta} &= 0 \end{aligned} \quad (3.4.1)$$

olmalıdır. t anında $\dot{\theta} \neq 0$ olacağından (3.4.1) eşitliklerinden, bir tek

$$m_1 = \frac{\dot{u}_2}{\dot{\theta}} + u_1$$

$$m_2 = \frac{\dot{u}_1}{\dot{\theta}} + u_2$$

çözümü elde edilir. Bu çözümler, sırasıyla, I_1 ve I_2 ile gösterilirse

$$I_1 = u_1 + \frac{\dot{u}_2}{\dot{\theta}}$$

$$I_2 = u_2 + \frac{\dot{u}_1}{\dot{\theta}}$$

veya buna denk olarak,

$$I_1 = u_1 + \frac{du_2}{d\theta}$$

$$I_2 = u_2 + \frac{du_1}{d\theta}$$
(3.4.2)

elde edilir.

Tanım 3.4.2. (3.4.2) ile gösterilen $I = (I_1, I_2)$ noktasına 1-parametrelili P_1 / P_0 Lorentziyen düzlem hareketinin t anındaki polü veya ani dönme merkezi denir.

(3.3.3) ile verilen \vec{V}_f sürüklenme hız vektörünün diğer bir yazılış tarzı da

$$\dot{u}_2 = (I_1 - u_1)\dot{\theta}$$

$$\dot{u}_1 = (I_2 - u_2)\dot{\theta}$$

şeklinde olur. Bu eşitlikler (3.3.3) te yerlerine yazılırsa

$$\vec{V}_f = \left[(m_2 - I_2) \vec{p}_{11} + (m_1 - I_1) \vec{p}_{12} \right] \dot{\theta}$$
(3.4.3)

bulunur.

Teorem 3.4.3. \vec{V}_f sürüklenme hız vektörünün boyu

$$V_f = \|\dot{\theta}\| \|\overline{IM}\|$$

dir [4].

Teorem 3.4.5. Hareketli P_1 düzleminin her M noktası t anında I merkezli ve $\dot{\theta}$ açısal hızlı bir Lorentziyen dönme hareketi yapar [4].

M , P_1 nin keyfi bir noktası olduğundan aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.4.6. P_1/P_0 1-parametrel Lorentziyen düzlem hareketi, t anında hareketli P_1 düzleminin I ani dönme polü etrafında $\dot{\theta}$ açısal hızı ile dönmesinden ibarettir [4].

Teorem 3.4.7. P_1/P_0 1-parametrel Lorentziyen hareketinde P_1 hareketli Lorentz düzleminin M noktaları, P_0 sabit Lorentz düzleminde normalleri I ani dönme polünden geçen yörüngeler çizerler [4].

Tanım 3.4.8. P_1/P_0 1-parametrel Lorentziyen hareketinde, her t anına karşılık gelen I pol noktalarının geometrik yerine P_1/P_0 Lorentziyen hareketinin P_1 düzlemindeki hareketli pol eğrisi denir ve (C_1) ile gösterilir.

I noktasının P_0 düzlemindeki geometrik yerine sabit pol eğrisi denir ve (C_0) ile gösterilir.

I pol noktası P_1 hareketli düzlemi üzerinde hareket eden bir noktadır. Dolayısıyla I noktası, (C_1) ve (C_0) pol eğrilerini çizerken bir hıza sahiptir.

Teorem 3.4.9. Sabit ve hareketli Lorentz düzlemlerindeki pol eğrilerini çizen I ani dönme polünün, her t anındaki hızları birbirinin aynısıdır [4].

Tanım 3.4.10. Her t anında (C_1) ve (C_0) pol eğrileri teğet ve aldıkları ds_1 ve ds_0 yolları aynı ise, (C_1) ve (C_0) pol eğrileri birbiri üzerinde kaymaksızın yuvarlanıyor denir.

Teorem 3.4.11. 1-parametrelili bir P_1/P_0 Lorentziyen düzlem hareketinde P_1 Lorentz düzleminin (C_1) hareketli pol eğrisi P_0 Lorentz düzleminin (C_0) sabit pol eğrisi üzerinde kaymaksızın yuvarlanır. [4]

Böylece zamandan bahsetmeyen bir Lorentziyen düzlem hareketi, P_1 Lorentz düzleminin (C_1) hareketli pol eğrisinin, P_0 Lorentz düzleminin (C_0) sabit pol eğrisi üzerinde kaymaksızın yuvarlanması ile tanımlanabilir.

BÖLÜM 4. 1-PARAMETRELİ LORENTZİYEN DÜZLEM HAREKETİ İÇİN TEMEL KURAL OLARAK BOBİLLIER FORMÜLÜ

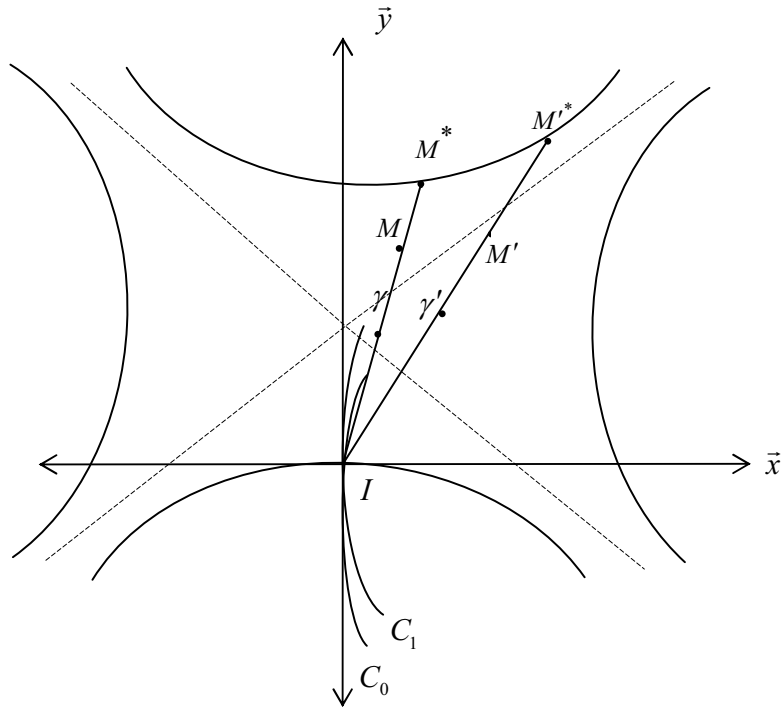
Bu bölümde 1-parametrelili Lorentziyen düzlem hareketinde timelike ve spacelike eğriler için Bobillier Formülü elde edilmiştir. Bu formüllerin elde edilmesi için kanonik izafe sistemi ve yörünge eğrilerinin eğrilikleri yardımıyla tanımlanan Euler-Savary formülü dikkate alınmıştır.

4.1. Timelike Pol Eğrileri için Lorentziyen Bobillier Formülü

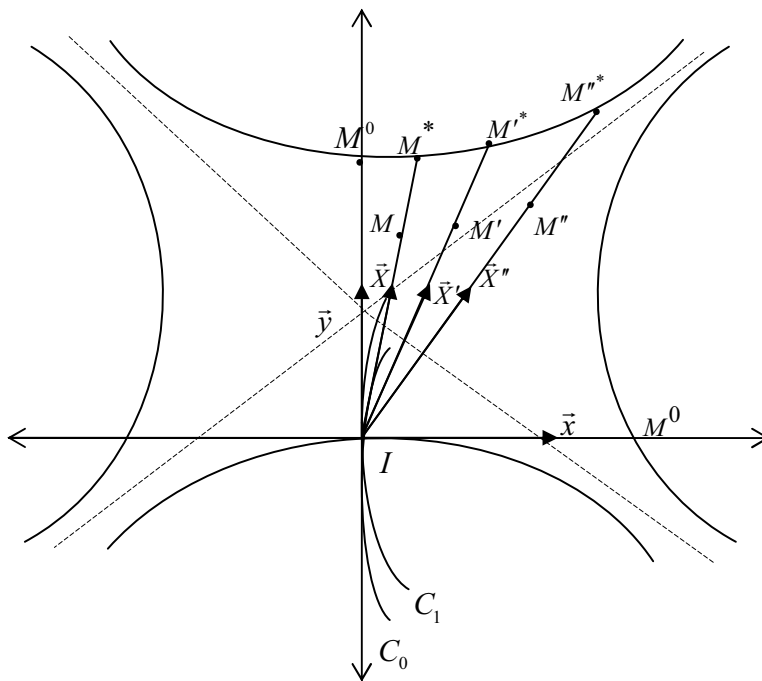
P_1 hareketli Lorentz düzleminin P_0 sabit Lorentz düzlemine göre 1- parametrelili hareketini incelemek için, başlangıcını I ani dönme polü ile çakışan $\{I, \bar{x}, \bar{y}\}$ hareketli koordinat sistemini ele alalım. $\{I, \bar{y}\}$ eksenini C_0 ve C_1 , sırasıyla, sabit ve hareketli timelike pol eğrilerinin ortak teğeti ile çakışacak şekilde seçelim.

P_1 hareketli Lorentz düzlemi üzerinde timelike M ve M' noktaları alalım. Bu noktalar P_0 sabit Lorentz düzleminde ani eğrilik merkezleri γ ve γ' timelike noktaları olan bir yörünge çizerler. P_1/P_0 1-parametrelili Lorentz hareketinde bu yörüngelerin normalleri I ani dönme merkezinden geçerler.

Şekil 4.1 de timelike pol eğrileri için $\gamma, \gamma', M, M', M^*, M^*$ noktaları gösterilmiştir. Burada C_0 ve C_1 sabit ve hareketli pol eğrileri için \bar{y} ortak teğet, \bar{x} ortak normaldir.



Şekil 4.1. $\overline{IM}, \overline{IM'}$ vektörleri



Şekil 4.2. $\overline{X}, \overline{X'}$ ve $\overline{X''}$ vektörleri

Şekil 4.2.'de gösterilen ve P_1 hareketli Lorentz düzlemi üzerinde bulunan M, M' ve M'' noktalarını I ani dönme merkezine bağlayan vektörler, sırasıyla, $\overline{IM}, \overline{IM'}$ ve $\overline{IM''}$ timelike vektörleridir. M, M' ve M'' noktalarının yer vektörleri, sırasıyla, $\overline{X}, \overline{X'}$ ve $\overline{X''}$ ile gösterelim. Bu durumda

$$\begin{aligned}\overline{X} &= \frac{\overline{IM}}{\|\overline{IM}\|}, \\ \overline{X'} &= \frac{\overline{IM'}}{\|\overline{IM'}\|}, \\ \overline{X''} &= \frac{\overline{IM''}}{\|\overline{IM''}\|}\end{aligned}\tag{4.1.1}$$

dır. $h, \rho_0, \rho_1, \rho, \rho'$ ve ρ'' , sırasıyla, $M^0, \gamma, M, M^*, M'^*$ ve M''^* noktalarının I noktasına olan uzaklıkları olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}\langle \overline{IM^0}, \vec{x} \rangle &= -h, \\ \langle \overline{I\gamma}, \overline{X} \rangle &= -\rho_0, \\ \langle \overline{IM}, \overline{X} \rangle &= -\rho_1, \\ \langle \overline{IM^*}, \overline{X} \rangle &= -\rho, \\ \langle \overline{IM'^*}, \overline{X'} \rangle &= -\rho', \\ \langle \overline{IM''^*}, \overline{X''} \rangle &= -\rho''\end{aligned}\tag{4.1.2}$$

bağıntıları vardır.

4.1.1. Timelike pol eğrileri için Lorentziyen Euler- Savary formülü

Lorentz düzleminde bir parametrelili düzlemsel hareketleri göz önüne alarak, bu hareketlerin mutlak hız vektörü, sürüklenme hız vektörü ve relatif hız vektörü arasındaki bağıntı $\vec{V}_a = \vec{V}_f + \vec{V}_r$ olarak verilir [8]. Burada \vec{V}_a mutlak hız vektörü, \vec{V}_f sürüklenme hız vektörü ve \vec{V}_r relatif hız vektörüdür. Büküm dairesinin çapı h olmak üzere bu uzunluk büküm dairesi üzerinde ortak normal doğrultusunda bulunan noktanın I merkezi ile birleştirilmesiyle elde edilir. h uzunluğu ile ρ arasında

$$h \sinh \theta = \rho$$

bağıntısı mevcuttur. Burada θ açısı \vec{y} eksenini ile \vec{X} vektörü arasındaki hiperbolik açıdır.

Lorentz düzleminde 1-parametrelili hareketler için yörünge eğrilerinin eğrilikleri arasındaki ilişkiyi veren Lorentziyen Euler-Savary formülü

$$\left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_0} \right) \sinh \theta = \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_0} \quad (4.1.3)$$

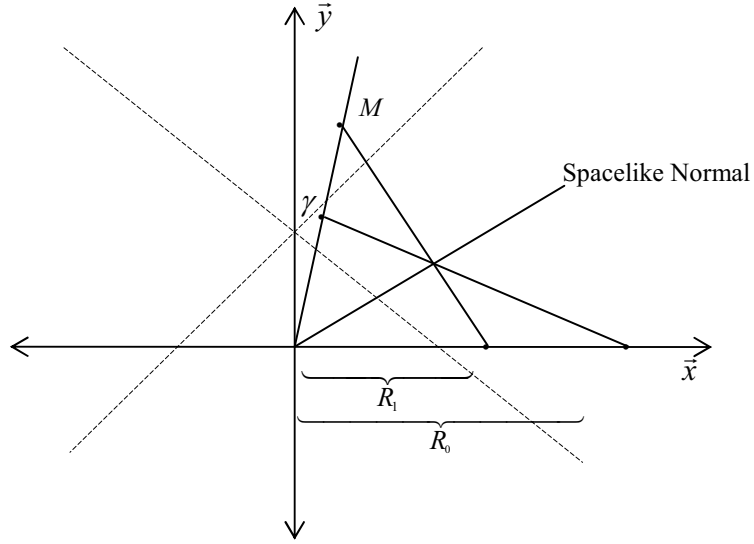
şeklinde verilmiştir [1]. Burada R_1 ve R_0 büyüklükleri, sırasıyla, C_1 ve C_0 eğrilerinin yarıçaplarını göstermektedir. ρ_1, ρ_0 , ve ρ , sırasıyla, M, γ , ve M^* noktalarının I merkezine olan uzaklıklarını göstermektedir. Bu uzaklıklar θ açısıyla birlikte negatif ya da pozitif yönlendirilmiş olabilirler. Burada

$$\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_0} = \frac{1}{\rho}$$

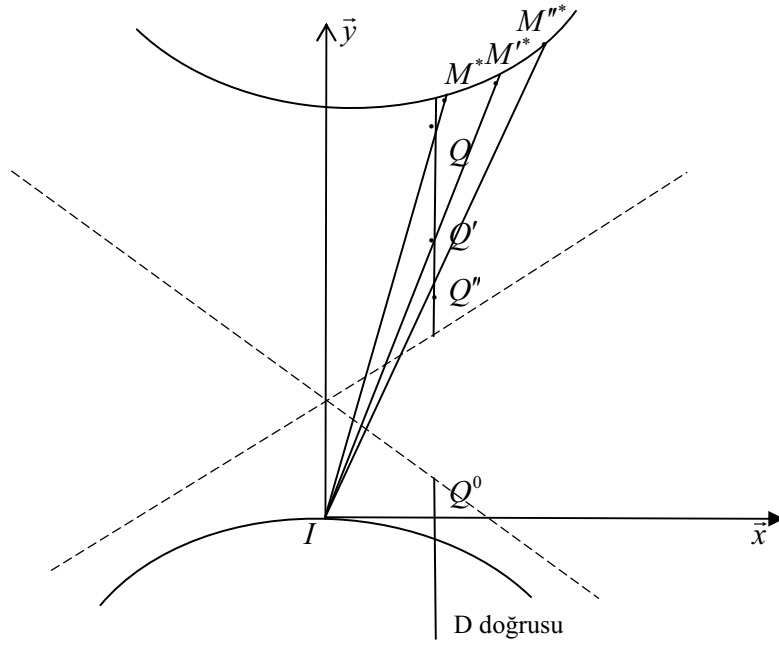
dır. Böylece (4.1.3) bağıntısı

$$\left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_0} \right) \sinh \theta = \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_0} = \frac{1}{\rho} \sinh \theta = \frac{1}{h}$$

olarak verilebilir.



Şekil 4.3 R_0 ve R_1 uzunlukları



Şekil 4.4. Q noktaları

Şimdi Euler-Savary formülü vasıtasıyla Şekil 4.4' de gösterilen Q noktalarını inceleyelim. Sırasıyla, $Q, Q', Q'',$ ve Q^0 noktaları $(I, \bar{X}), (I, \bar{X}'), (I, \bar{X}''),$ ve (I, \bar{x}) doğrultusu boyunca büküm dairesi üzerindeki noktaların bir inversiyonla görüntüleridir. D doğrusu $Q, Q', Q'',$ ve Q^0 noktalarının geometrik yerini temsil etmektedir. Bu durum;

$$\begin{aligned}\langle \overline{IQ}, \bar{X} \rangle &= -\frac{1}{\rho}, \\ \langle \overline{IQ'}, \bar{X} \rangle &= -\frac{1}{\rho'}, \\ \langle \overline{IQ''}, \bar{X} \rangle &= -\frac{1}{\rho''}, \\ \langle \overline{IQ^0}, \bar{x} \rangle &= -\frac{1}{h}\end{aligned}\tag{4.1.4}$$

şeklindeki bağıntılardan açıkça görülebilir. (4.1.3) den $\frac{1}{\rho} \sinh \theta = \frac{1}{h}$ ve (4.1.4) den

$\overline{IQ} = \frac{1}{\rho} \bar{X}$ denklemlerini göz önüne alırsak

$$\overline{IQ} \sinh \theta = \frac{1}{\rho} \bar{X} \sinh \theta = \frac{1}{h} \bar{X}$$

elde edilir. Benzer biçimde $\frac{1}{\rho'} \sinh \theta = \frac{1}{h} = \frac{1}{\rho''} \sinh \theta$ yazılarak

$$\overline{IQ'} \sinh \theta' = \frac{1}{\rho'} \bar{X}' \sinh \theta' = \frac{1}{h} \bar{X}'$$

$$\overline{IQ''} \sinh \theta'' = \frac{1}{\rho''} \bar{X}'' \sinh \theta'' = \frac{1}{h} \bar{X}''$$

olacağı görülür. Böylece

$$\langle \overline{IQ}, \overline{X} \rangle \sinh \theta = \langle \overline{IQ'}, \overline{X'} \rangle \sinh \theta' = \langle \overline{IQ''}, \overline{X''} \rangle \sinh \theta'' = \frac{1}{h}$$

dır. Bu ilişki Q noktalarının Şekil 4.3. de gösterilen \bar{y} eksenine paralel bir D doğrusu üzerinde bulunduğunu göstermektedir.

Tanım 4.1.1. Lorentziyen Euler-Savary formülünün büküm dairesinin çapının uzunluğu olan h cinsinden

$$\left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_0} \right) \sinh \theta = \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_0} = \frac{1}{h} \quad (4.1.3)'$$

şeklindeki ifadesine Lorentziyen I. form adı verilir.

P_1 / P_0 hareketinde noktalar I merkezli bir yörünge etrafında hareket edeceğinden I noktasının yer değişim miktarı büküm dairesine olan uzaklığı ile açısız yer değişim miktarının çarpımına eşit olacaktır; öyle ki

$$\Delta I = h \cdot \Delta \theta$$

yazılabilir. Bu yer değişim belirli bir t zamanı için düşünülürse

$$\frac{\Delta I}{\Delta t} = h \cdot \frac{\Delta \theta}{\Delta t}$$

olacaktır. $\Delta t \rightarrow 0$ için limit alınırsa

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta I}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} h \cdot \frac{\Delta \theta}{\Delta t}$$

olur. Ayrıca

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta I}{\Delta t} = \frac{dI}{dt}$$

ve

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} h \cdot \frac{\Delta \theta}{\Delta t} = h \cdot \frac{d\theta}{dt}$$

olduğundan yukarıdaki eşitlik

$$\frac{dI}{dt} = h \cdot \frac{d\theta}{dt}$$

şeklini alır. Sonuç olarak

$$V(I) = h\omega \quad (4.1.4)$$

bağıntısı elde edilir. Böylece

$$\frac{1}{h} = \frac{\omega}{V}$$

bulunur ki burada V , I noktasının hızı ω ise I noktasının açısal hızıdır. Yönlendirme durumu da göz ardı edilmeksizin

$$\frac{1}{h} = \pm \frac{\omega}{V}$$

olacağı açıktır. Bu eşitlikte (4.1.3) kullanılırsa

$$\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_0} = \frac{1}{h} = \pm \frac{\omega}{V}$$

olur.

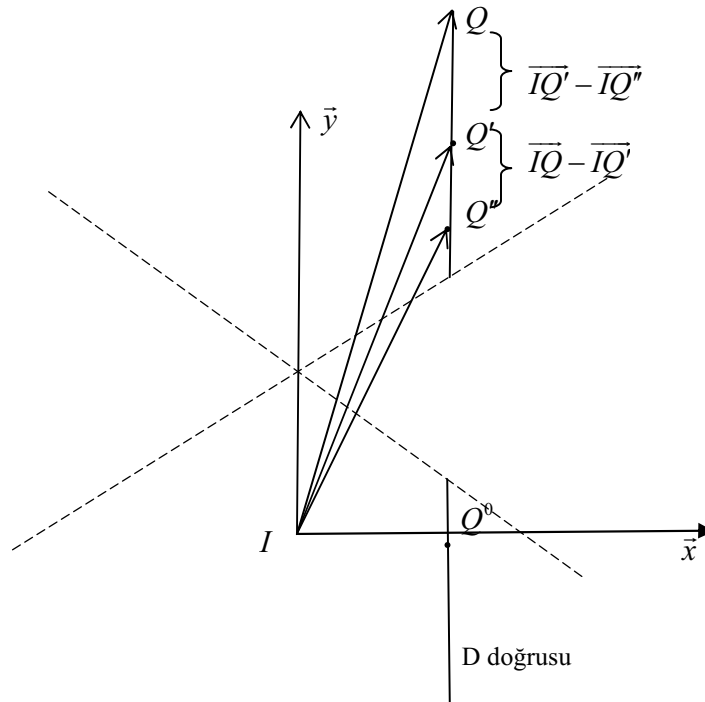
Tanım 4.1.2. Lorentziyen Euler-Savary formülünün büküm dairesinin yarıçapı olan h , I noktasının V hızı ve w açısal hızı cinsinden

$$\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_0} = \frac{1}{h} = \pm \frac{\omega}{V}$$

şeklindeki ifadesine Lorentziyen II. form denir.

4.1.2. Timelike pol eğrileri için Lorentziyen Euler-Savary formülünden Lorentziyen Bobillier formülüne geçiş

Pol eğrilerinin timelike olma durumunu incelemiş bulunuyoruz. Şimdi Q noktalarının yerlerini ayrıntılı olarak inceleyelim. Q, Q', Q'' ve Q^0 noktalarının, sırasıyla, $(I, \bar{X}), (I, \bar{X}'), (I, \bar{X}'')$, ve (I, \bar{x}) doğrultusu boyunca büküm dairesi üzerindeki noktaların bir inversiyonla görüntüleri olduğu belirtilmişti. Şimdi bu noktalar arasındaki ilişkiyi inceleyelim.



Şekil 4.5. $\overline{IQ} - \overline{IQ'}$ ve $\overline{IQ'} - \overline{IQ''}$ vektörleri

Şekil 4.5.'de görüldüğü gibi $(\overline{IQ} - \overline{IQ}')$ ve $(\overline{IQ}' - \overline{IQ}'')$ vektörleri aynı doğrultudadır.

Bu durumda bu iki vektörün Lorentziyen vektörel çarpımı

$$(\overline{IQ} - \overline{IQ}') \times (\overline{IQ}' - \overline{IQ}'') = \vec{0}$$

dır. Bu vektörel çarpımı düzenlersek

$$(\overline{IQ} \times \overline{IQ}') - (\overline{IQ}' \times \overline{IQ}') - (\overline{IQ} \times \overline{IQ}'') + (\overline{IQ}' \times \overline{IQ}'') = \vec{0}$$

olur. Ayrıca $(\overline{IQ}' \times \overline{IQ}') = \vec{0}$ olduğundan

$$(\overline{IQ} \times \overline{IQ}') - (\overline{IQ} \times \overline{IQ}'') + (\overline{IQ}' \times \overline{IQ}'') = \vec{0} \quad (4.1.5)$$

elde edilir. Bu son denklem düzenlenirse

$$(\overline{IQ} \times \overline{IQ}') + (\overline{IQ}'' \times \overline{IQ}') + (\overline{IQ}' \times \overline{IQ}'') = \vec{0}$$

olacaktır. (4.1.2) eşitlikleri

$$\overline{IQ} = \frac{1}{\rho} \overline{X},$$

$$\overline{IQ}' = \frac{1}{\rho'} \overline{X}',$$

$$\overline{IQ}'' = \frac{1}{\rho''} \overline{X}'' ,$$

olarak düzenlenip (4.1.5) denkleminde yerine yazılırsa

$$\left(\frac{1}{\rho'} \overline{X} \times \frac{1}{\rho} \overline{X}' \right) + \left(\frac{1}{\rho} \overline{X}'' \times \frac{1}{\rho''} \overline{X} \right) + \left(\frac{1}{\rho''} \overline{X}' \times \frac{1}{\rho'} \overline{X}'' \right) = \vec{0}$$

$$\frac{1}{\rho\rho'} (\overline{X} \times \overline{X}') + \frac{1}{\rho''\rho} (\overline{X}'' \times \overline{X}) + \frac{1}{\rho'\rho''} (\overline{X}' \times \overline{X}'') = \vec{0}$$

bulunur ki $\rho\rho'\rho'' \neq 0$ olduğundan

$$\rho''(\bar{X} \times \bar{X}') + \rho'(\bar{X} \times \bar{X}'') + \rho(\bar{X}' \times \bar{X}'') = \vec{0}$$

olarak elde edilir. Lorentz uzayında vektörel çarpım tanımından

$$\rho'' \|\bar{X}'\| \|\bar{X}\| \sinh(\bar{X}, \bar{X}') + \rho' \|\bar{X}\| \|\bar{X}''\| \sinh(\bar{X}'', \bar{X}) + \rho \|\bar{X}''\| \|\bar{X}'\| \sinh(\bar{X}', \bar{X}'') = 0$$

eşitliği elde edilir. \bar{X}, \bar{X}' ve \bar{X}'' timelike birim vektörler olduğundan

$$\|\bar{X}\| = \|\bar{X}'\| = \|\bar{X}''\| = 1 \text{ dir. Böylece}$$

$$\rho \sinh(\bar{X}', \bar{X}'') + \rho' \sinh(\bar{X}'', \bar{X}) + \rho'' \sinh(\bar{X}, \bar{X}') = 0 \quad (4.1.6)$$

Lorentziyen Bobillier formülü elde edilir. Görüldüğü gibi bu formülün temeli Lorentziyen Euler-Savary formülüne dayanır.

4.1.3. Lorentziyen Bobillier formülünün hız ve ivme vektörleri vasıtasıyla elde edilmesi

P_1 hareketli Lorentz düzlemindeki M timelike noktasının açısal hız vektörü $\vec{\omega}$ olsun. \overline{IM} ile \vec{y} arasındaki hiperbolik açı θ olmak üzere; Lorentz uzayında düzlemsel dönme hareketinde açısal hız, dönme düzlemi içinde \overline{IM} doğru parçasının açısal konumunun birinci türevine eşittir. Bu eşitlik

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

şeklinde tanımlanmaktadır. P_0 ve P_1 düzlemlerine dik olan bir \vec{z} vektörü düzlemi alındığında açısal hız vektörü $\vec{\omega} = \omega\vec{z}$ olarak belirtilir.

Mutlak hız vektörünün sürüklenme hız vektörü ile relatif hız vektörünün toplamından oluştuğu belirtilmişti. Bu durumda $\vec{V}^0(M)$, M noktasının mutlak hız vektörü, $\vec{V}_1(M)$ sürüklenme hız vektörü ve $\vec{V}_1^0(I)$ relatif hız vektörü olmak üzere

$$\begin{aligned}\vec{V}_1^0(I) &= \vec{V}^0(M) \cosh \theta \\ \vec{V}_1(M) &= \vec{V}^0(M) \sinh \theta\end{aligned}$$

olarak alındığında;

$$\vec{V}^0(M) = \vec{V}_1^0(I) + \vec{V}_1(M)$$

olacağı görülür. Burada P_1/P_0 1-parametrelili Lorentziyen hareketi M noktasının P_1 hareketli Lorentz düzleminde sabit tutulmasıyla oluşan bir hareket olduğundan $\vec{V}_1^0(I) = \vec{0}$ olacaktır. Böylece

$$\vec{V}^0(M) = \vec{V}_1(M)$$

olur.

Teorem 4.1.3. Bir noktanın sürüklenme hız vektörü o noktayı merkeze bağlayan vektöre ve açısal hız vektörüne diktir. Dolayısıyla M noktasının sürüklenme hız vektörü $\vec{V}_1(M)$ olmak üzere

$$\vec{V}_1(M) = \vec{\omega} \times \overline{IM}$$

dir [11].

Bu durumda yukarıdaki eşitliklerden

$$\vec{V}^0(M) = \vec{V}_1^0(M) + (\vec{\omega} \times \overline{IM}) \quad (4.1.7)$$

bağıntısı vardır [14].

(4.1.7) denkleminin t zamanına göre türevini alırsak

$$\frac{d}{dt}(\vec{V}^0(M)) = \frac{d}{dt}(\vec{V}_1^0(M)) + \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \overline{IM})$$

yani

$$\frac{d}{dt}(\vec{V}^0(M)) = \frac{d}{dt}(\vec{V}_1^0(M)) + \left(\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \overline{IM} \right) + \left(\vec{\omega} \times \left(\frac{d\overline{IM}}{dt} \right) \right)$$

elde edilir. Burada $\vec{V}^0(M)$ mutlak hız vektörünün türevi olan $\frac{d}{dt}(\vec{V}^0(M))$ ifadesi

$\vec{J}^0(M)$ ivme vektörü ve $\vec{V}_1^0(M)$ relatif hız vektörünün türevi olan $\frac{d}{dt}(\vec{V}_1^0(M))$

ifadesi de $\vec{J}_1^0(I)$ ivme vektörüne eşittir. Bu durumda

$$\vec{J}^0(M) = \vec{J}_1^0(I) + \left(\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \overline{IM} \right) + \left(\vec{\omega} \times \left(\frac{d\overline{IM}}{dt} \right) \right)$$

dır. Burada $\frac{d\overline{IM}}{dt}$ türevi M noktasının relatif hız vektörüdür. Teorem 4.1.3 den de

görüldüğü üzere $\frac{d\overline{IM}}{dt} = \vec{\omega} \times \overline{IM}$ olacaktır. Yani

$$\vec{J}^0(M) = \vec{J}_1^0(I) + \left(\dot{\vec{\omega}} \times \overline{IM} \right) + \left(\vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \overline{IM} \right) \right)$$

dir.

P_0 ve P_1 Lorentz düzlemlerinin birim dikey vektörünü \vec{z} vektörü olarak alırsak

$\vec{\omega} = \omega \vec{z}$ ve $\dot{\vec{\omega}} = \dot{\omega} \vec{z}$ olacaktır. Böylece

$$\vec{J}^0(M) = \vec{J}_1^0(I) + (\dot{\omega}\vec{z} \times \overline{IM}) + (\omega\vec{z} \times (\omega\vec{z} \times \overline{IM})) \quad (4.1.8)$$

elde edilir. Lorentz uzayında vektörel çarpımın özelliklerinden (4.1.8) eşitliği

$$\vec{J}^0(M) = \vec{J}_1^0(I) + (\dot{\omega}\vec{z} \times \overline{IM}) - ((\omega\vec{z} \times \overline{IM}) \times \omega\vec{z})$$

halini alır. Ayrıca Lorentz uzayında Lagrange özdeşliğini kullanırsak

$$\vec{J}^0(M) = \vec{J}_1^0(I) + (\dot{\omega}\vec{z} \times \overline{IM}) + \langle \omega\vec{z}, \omega\vec{z} \rangle \overline{IM} - \langle \overline{IM}, \omega\vec{z} \rangle \omega\vec{z}$$

elde edilir. $\bar{\omega} = \omega\vec{z}$ olduğundan $\langle \overline{IM}, \omega\vec{z} \rangle = 0$ dır. Diğer taraftan \vec{z} vektörü spacelike birim vektör olduğundan

$$\|\omega\vec{z}\|^2 = \langle \omega\vec{z}, \omega\vec{z} \rangle = \omega^2$$

olacaktır. Bu bilgiler göz önüne alınarak

$$\vec{J}^0(M) = \vec{J}_1^0(I) + (\dot{\omega}\vec{z} \times \overline{IM}) + \omega^2 \overline{IM} \quad (4.1.9)$$

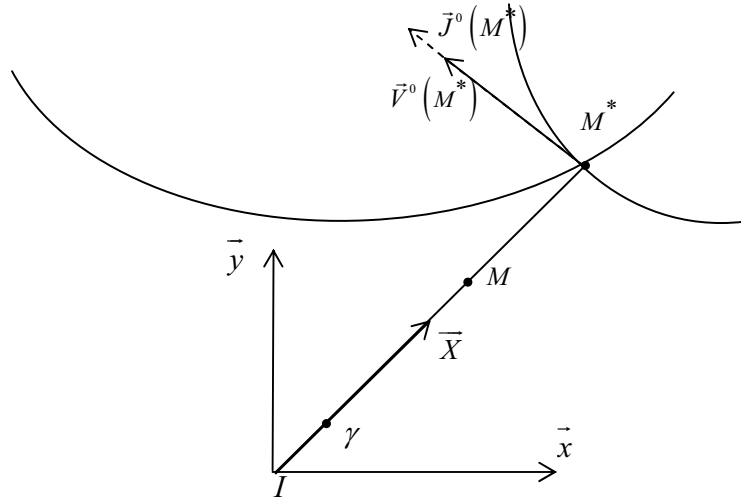
elde edilir. Başka bir deyişle mutlak ivme vektörünün teğet ve normal bileşenleri, sırasıyla,

$$\begin{aligned} \vec{J}_t(M) &= \vec{J}_1^0(I) + (\dot{\omega}\vec{z} \times \overline{IM}), \\ \vec{J}_n(M) &= \omega^2 \overline{IM}, \end{aligned}$$

alınırsa (4.1.8) eşitliğindeki $\vec{J}^0(M)$ ivme vektörü teğet ve normal bileşenleri cinsinden

$$\vec{J}^0(M) = \vec{J}_t(M) + \vec{J}_n(M) \quad (4.1.10)$$

biçiminde ifade edilmiş olur.



Şekil 4.6. Hız ve ivme vektörleri

Büküm dairesi üzerinde bulunan M^* noktasının mutlak hız vektörü ve mutlak ivme göz önüne alındığında bu vektörlerin aynı ya da ters yönlü oldukları görülecektir. Böylece

$$\vec{V}^0(M^*) \times \vec{J}^0(M^*) = \vec{0}$$

olur. (4.1.7) ve (4.1.8) denklemleri bu son eşitlikte yerine yazılırsa, hız ve ivme vektörlerinin yukarıda belirtilen bağıntıları ile birlikte

$$\left(\vec{V}_1^0(I) + \left(\omega \vec{z} \times \overline{IM^*} \right) \right) \times \left(\vec{J}_1^0(I) + \left(\dot{\omega} \vec{z} \times \overline{IM^*} \right) - \omega^2 \overline{IM^*} \right) = \vec{0}$$

bulunur. Ayrıca $\vec{V}_1^0(I) = \vec{0}$ olduğundan

$$\left(\omega \vec{z} \times \overline{IM^*} \right) \times \left(\vec{J}_1^0(I) + \left(\dot{\omega} \vec{z} \times \overline{IM^*} \right) + \omega^2 \overline{IM^*} \right) = \vec{0}$$

olur. Lorentz uzayında vektörel çarpım tanımı kullanılıp gerekli sadeleştirmeler yapıldığında

$$\begin{aligned} & \omega \left(\bar{z} \times \overline{IM^*} \right) \times \vec{J}_1^0(I) + \omega \dot{\omega} \left(\left(\bar{z} \times \overline{IM^*} \right) \times \left(\bar{z} \times \overline{IM^*} \right) \right) + \omega^3 \left(\left(\bar{z} \times \overline{IM^*} \right) \times \overline{IM^*} \right) = \vec{0} \\ & -\omega \langle \bar{z}, \vec{J}_1^0(I) \rangle \overline{IM^*} + \omega \langle \overline{IM^*}, \vec{J}_1^0(I) \rangle \bar{z} + \omega \dot{\omega} \left(\left(\bar{z} \times \overline{IM^*} \right) \times \left(\bar{z} \times \overline{IM^*} \right) \right) + \omega^3 \langle \bar{z} \times \overline{IM^*} \rangle \overline{IM^*} - \omega^3 \langle \overline{IM^*}, \overline{IM^*} \rangle \bar{z} = \vec{0} \end{aligned}$$

elde edilir. Burada

$$\begin{aligned} \langle \bar{z}, \vec{J}_1^0(I) \rangle &= 0 \\ \langle \bar{z}, \overline{IM^*} \rangle &= 0 \\ \|\overline{IM^*}\|^2 &= -\langle \overline{IM^*}, \overline{IM^*} \rangle \\ \left(\bar{z} \times \overline{IM^*} \right) \times \left(\bar{z} \times \overline{IM^*} \right) &= \vec{0}, \end{aligned}$$

eşitliklerinden

$$\langle \overline{IM^*}, \vec{J}_1^0(I) \rangle \bar{z} - \omega^2 \|\overline{IM^*}\|^2 \bar{z} = \vec{0}$$

denklemini elde edilir. $\vec{J}_1^0(I)$ ivmesi her zaman pol yörüngesinin normalini olan $\overline{IM^*}$ vektörü ile sabit bir hiperbolik açı oluşturur. Bu açığa α diyelim. $\vec{J}_1^0(I)$ ile $\overline{IM^*}$ timelike vektörleri arasındaki hiperbolik açı α olmak üzere Lorentz uzayında bu iki vektörün iç çarpımından

$$-\|\overline{IM^*}\| J_1^0(I) \cosh \alpha - \omega^2 \|\overline{IM^*}\|^2 = 0$$

elde edilir. (4.1.2)' den

$$-\rho J_1^0(I) \cosh \alpha - \omega^2 \rho^2 = 0$$

dır. Gerekli düzenlemeler yardımıyla ifade

$$\rho = -\frac{J_1^0(I) \cosh \alpha}{\omega^2}$$

şeklinde bulunur. Aynı zamanda bu eşitlik \bar{X} vektörünün timelike birim vektör ve $\bar{J}_1^0(I)$ ile \bar{X} arasındaki açının da α olmasından dolayı

$$\rho = \frac{\langle \bar{J}_1^0(I), \bar{X} \rangle}{\omega^2} \quad (4.1.11)$$

olur. ρ' ve ρ'' değerlerinin de yukarıdaki işlemlere benzer biçimde elde edilmesiyle

$$\rho' = \frac{\langle \bar{J}_1^0(I), \bar{X}' \rangle}{\omega^2} \quad (4.1.11)'$$

$$\rho'' = \frac{\langle \bar{J}_1^0(I), \bar{X}'' \rangle}{\omega^2} \quad (4.1.11)''$$

olarak bulunur.

Şimdi \bar{X}, \bar{X}' ve \bar{X}'' vektörleri arasındaki lineer bağıntıyı ifade edelim. Bu bağıntı için

$$\lambda \bar{X} + \mu \bar{X}' + \vartheta \bar{X}'' = \vec{0} \quad (4.1.12)$$

olacak biçimde sıfırdan farklı λ, μ, ϑ ifadelerini araştıralım. Burada \bar{X}, \bar{X}' ve \bar{X}'' vektörleri timelike birim vektörler olduğundan $\|\bar{X}\| = \|\bar{X}'\| = \|\bar{X}''\| = 1$ olması kullanılacaktır. (4.1.12) eşitliğini \bar{X} ile vektörel çarparsak

$$\lambda(\overline{X} \times \overline{X}) + \mu(\overline{X}' \times \overline{X}) + \varrho(\overline{X}'' \times \overline{X}) = \vec{0}$$

olur. $\overline{X} \times \overline{X} = \vec{0}$ olduğundan

$$\mu(\overline{X}' \times \overline{X}) + \varrho(\overline{X}'' \times \overline{X}) = \vec{0}$$

elde edilir. Lorentz uzayında vektörel çarpım tanımından

$$\mu \|\overline{X}'\| \|\overline{X}\| \sinh(\overline{X}', \overline{X}) + \varrho \|\overline{X}''\| \|\overline{X}\| \sinh(\overline{X}'', \overline{X}) = 0$$

olur. Buradan

$$\mu \sinh(\overline{X}', \overline{X}) + \varrho \sinh(\overline{X}'', \overline{X}) = 0 \quad (4.1.12)'$$

elde edilir. Benzer şekilde (4.1.12) eşitliğini \overline{X}' ile vektörel çarparak

$$\lambda(\overline{X} \times \overline{X}') + \mu(\overline{X}' \times \overline{X}') + \varrho(\overline{X}'' \times \overline{X}') = \vec{0}$$

bulunur ki $\overline{X}' \times \overline{X}' = \vec{0}$ olduğundan

$$\lambda(\overline{X} \times \overline{X}') + \varrho(\overline{X}'' \times \overline{X}') = \vec{0}$$

elde edilir. Lorentz uzayında vektörel çarpım tanımından

$$\lambda \|\overline{X}\| \|\overline{X}'\| \sinh(\overline{X}, \overline{X}') + \varrho \|\overline{X}''\| \|\overline{X}'\| \sinh(\overline{X}'', \overline{X}') = 0$$

olur. Buradan

$$\lambda \sinh(\bar{X}, \bar{X}') + \vartheta \sinh(\bar{X}'', \bar{X}') = 0 \quad (4.1.12)''$$

elde edilir. (4.1.12) eşitliğini \bar{X}'' ile vektörel çarparsak

$$\lambda(\bar{X} \times \bar{X}'') + \mu(\bar{X}' \times \bar{X}'') + \vartheta(\bar{X}'' \times \bar{X}'') = \vec{0}$$

olur. $\bar{X}'' \times \bar{X}'' = \vec{0}$ olduğundan

$$\lambda(\bar{X} \times \bar{X}'') + \mu(\bar{X}' \times \bar{X}'') = \vec{0}$$

ve

$$\lambda \|\bar{X}\| \|\bar{X}''\| \sinh(\bar{X}, \bar{X}'') + \mu \|\bar{X}'\| \|\bar{X}''\| \sinh(\bar{X}', \bar{X}'') = 0$$

bulunur. Böylece

$$\lambda \sinh(\bar{X}, \bar{X}'') + \mu \sinh(\bar{X}', \bar{X}'') = 0 \quad (4.1.12)'''$$

elde edilir. Sonuç olarak (4.1.12)', (4.1.12)'', (4.1.12)''' eşitliklerinden

$$\frac{\mu}{\vartheta} = -\frac{\sinh(\bar{X}'', \bar{X})}{\sinh(\bar{X}', \bar{X})} = \frac{\sinh(\bar{X}'', \bar{X})}{\sinh(\bar{X}, \bar{X}')}$$

$$\frac{\lambda}{\vartheta} = -\frac{\sinh(\bar{X}'', \bar{X}')}{\sinh(\bar{X}, \bar{X}')} = \frac{\sinh(\bar{X}', \bar{X}'')}{\sinh(\bar{X}, \bar{X}')}$$

$$\frac{\lambda}{\mu} = -\frac{\sinh(\bar{X}', \bar{X}'')}{\sinh(\bar{X}, \bar{X}'')} = \frac{\sinh(\bar{X}', \bar{X}'')}{\sinh(\bar{X}'', \bar{X})}$$

bağıntıları karşımıza çıkar. Bu bağıntılardan λ, μ, ϑ ifadeleri

$$\begin{aligned}
\lambda &= \sinh(\bar{X}', \bar{X}'') \\
\mu &= \sinh(\bar{X}'', \bar{X}) \\
\varrho &= \sinh(\bar{X}, \bar{X}')
\end{aligned} \tag{4.1.13}$$

olarak bulunur. (4.1.13) eşitlikleri (4.1.12)' de yerine konulursa

$$\sinh(\bar{X}', \bar{X}'')\bar{X} + \sinh(\bar{X}'', \bar{X})\bar{X}' + \sinh(\bar{X}, \bar{X}')\bar{X}'' = 0$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitliği $\frac{\bar{J}_1^0(X)}{\omega^2}$ vektörü ile iç çarparsak

$$\sinh(\bar{X}', \bar{X}'')\frac{\langle \bar{X}, \bar{J}_1^0(X) \rangle}{\omega^2} + \sinh(\bar{X}'', \bar{X})\frac{\langle \bar{X}', \bar{J}_1^0(X) \rangle}{\omega^2} + \sinh(\bar{X}, \bar{X}')\frac{\langle \bar{X}'', \bar{J}_1^0(X) \rangle}{\omega^2} = 0 \tag{4.1.14}$$

ifadesi karşımıza çıkar. (4.1.11), (4.1.11)', (4.1.11)'' ifadelerini (4.1.13) de yerine yazılırsa

$$\rho \sinh(\bar{X}', \bar{X}'') + \rho' \sinh(\bar{X}'', \bar{X}) + \rho'' \sinh(\bar{X}, \bar{X}') = 0$$

ifadesi elde edilir.

Teorem 4.1.4. Lorentz uzayında timelike pol eğrileri için Lorentziyen Bobillier formülü

$$\rho \sinh(\bar{X}', \bar{X}'') + \rho' \sinh(\bar{X}'', \bar{X}) + \rho'' \sinh(\bar{X}, \bar{X}') = 0$$

şeklindedir.

Teorem 4.1.4 ün özel bir hali için I ani dönme merkezi ile çakışan ve P_1 hareketli düzleminde yer alan bir M_1 timelike noktası alalım. Bu durumda $\vec{V}^o(M_1) = \vec{0}$ olacaktır. Benzer biçimde $\vec{J}^o(M_1) = \vec{0}$ ivmesi de sıfırdır. Bu şart altında \vec{y} vektörü \vec{X}' vektörüne karşılık gelecektir. Bu durumda ρ' uzunluğu sıfır olup \vec{X}'' vektörü \vec{x} boyunca seçilirse Lorentziyen Bobillier formülü

$$\begin{aligned}\vec{X}' &= \vec{y} \\ \vec{X}'' &= \vec{x}\end{aligned}$$

şartları altında

$$\rho \sinh(\vec{y}, \vec{x}) + \rho' \sinh(\vec{x}, \vec{X}') + \rho'' \sinh(\vec{X}'', \vec{y}) = 0$$

olarak bulunur. Burada $\rho' = 0$ alınarak

$$\rho \sinh(\vec{y}, \vec{x}) + \rho'' \sinh(\vec{X}'', \vec{y}) = 0$$

yani

$$\rho \sinh(\vec{y}, \vec{x}) - \rho'' \sinh(\vec{y}, \vec{X}'') = 0$$

elde edilir. Burada \vec{x} ile \vec{y} nin Lorentz anlamda dik ve \vec{y} ile \vec{X}'' arasındaki hiperbolik açının θ olduğu açıktır. Bu bilgilerle birlikte yukarıdaki eşitlik

$$\rho \sinh(\vec{y}, \vec{x}) = \rho'' \sinh \theta$$

şeklinde ifade edilebilir. Bu eşitlik yukarıdaki şartlar altında Lorentziyen Bobillier formülünün özel bir halidir.

4.1.4. Timelike pol eğrileri için Lorentziyen Bobillier formülünde eğrilik yarıçapları arasındaki ilişki

M yönündeki eğriliğin yarıçapı r olmak üzere bu yarıçap $\overrightarrow{M\gamma}$ vektörü boyuncadır. Bu vektörü I ani dönme merkezi cinsinden

$$\|\overrightarrow{M\gamma}\| = -\|\overrightarrow{IM}\| + \|\overrightarrow{I\gamma}\|$$

olarak ifade edebiliriz. Burada (4.1.2) eşitlikleri göz önüne alınırsa eğrilik yarıçapı

$$r = \rho_0 - \rho_1$$

olarak karşımıza çıkar. Fizikteki klasik ilişkiden r ile M yönündeki normal ivme arasında

$$\frac{J_n(M)}{\|\vec{V}^0(M)\|^2} = \frac{1}{r}$$

bağıntısı mevcuttur [7]. Yani

$$\frac{J_n(M)}{\|\vec{V}^0(M)\|^2} = \frac{1}{\rho_0 - \rho_1} \quad (4.1.15)$$

dır. (4.1.14) eşitliğindeki $J_n(M)$ ve $\|\vec{V}^0(M)\|^2$ ifadelerini tek tek inceleyelim.

$\|\vec{V}^0(M)\|^2$ ifadesini incelersek

$$\|\vec{V}^0(M)\|^2 = \|\vec{V}_1(M)\|^2 = \omega^2(\rho_1)^2 \quad (4.1.16)$$

olacaktır.

Şimdi $\vec{J}^0(M)$ ivme vektörünü inceleyelim. (4.1.9) eşitliğinin \vec{X} üzerine izdüşümünü alırsak

$$\langle \vec{J}^0(M), \vec{X} \rangle = \langle \vec{J}_1^0(I), \vec{X} \rangle + \langle \dot{\omega} \vec{z} \times \overline{IM}, \vec{X} \rangle + \omega^2 \langle \overline{IM}, \vec{X} \rangle$$

olur. Lorentz anlamda vektörel çarpımın özelliklerinden

$$\langle \vec{J}^0(M), \vec{X} \rangle = \langle \vec{J}_1^0(I), \vec{X} \rangle - \dot{\omega} \cdot \det(\vec{z}, \overline{IM}, \vec{X}) + \omega^2 \langle \overline{IM}, \vec{X} \rangle$$

elde edilir. Burada \vec{z} , P_0 ve P_1 Lorentz düzlemlerinin birim dikey vektörü olduğundan

$$\det(\vec{z}, \overline{IM}, \vec{X}) = 0$$

dır. Böylece

$$\langle \vec{J}^0(M), \vec{X} \rangle = \langle \vec{J}_1^0(I), \vec{X} \rangle + \omega^2 \langle \overline{IM}, \vec{X} \rangle$$

bağıntısı elde edilir. (4.1.11) eşitliği $\langle \vec{J}_1^0(I), \vec{X} \rangle = \rho w^2$ şeklinde yazılıp (4.1.2) yerine yazılırsa

$$\langle \vec{J}^0(M), \vec{X} \rangle = \rho w^2 - \omega^2 \rho_1 \quad (4.1.17)$$

elde edilir.

Şimdi (4.1.10) eşitliğinin \vec{X} üzerine izdüşümünü alırsak

$$\langle \vec{J}^0(M), \vec{X} \rangle = \langle \vec{J}_i(M), \vec{X} \rangle + \langle \vec{J}_n(M), \vec{X} \rangle$$

bulunur. Bir noktanın teğetsel ivmesi her zaman konum vektörüne diktir. Dolayısıyla $\langle \bar{J}_t(M), \bar{X} \rangle = 0$ dır. Buradan

$$\langle \bar{J}^0(M), \bar{X} \rangle = J_n(M) \quad (4.1.18)$$

olur. Bu durumda (4.1.17) ve (4.1.18) denklemleri göz önüne alınırsa

$$J_n(M) = \rho w^2 - \omega^2 \rho_1 \quad (4.1.19)$$

ifadesi karşımıza çıkar.

Bu durumda (4.1.16) ve (4.1.19) denklemleri göz önüne alındığında (4.1.15) eşitliği

$$\frac{(\rho_1)^2 \omega^2}{\rho_0 - \rho_1} = \rho w^2 - \omega^2 \rho_1 \quad (4.1.20)$$

halini alır. Şimdi bu ifadeyi düzenleyelim. ω^2 ifadesi sadeleştirme yapılırsa

$$\frac{(\rho_1)^2}{\rho_0 - \rho_1} = \rho - \rho_1$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned} \rho_1^2 &= \rho_0 \rho - \rho_0 \rho_1 - \rho_1 \rho + \rho_1^2 \\ \rho_0 \rho - \rho_0 \rho_1 - \rho_1 \rho &= 0 \end{aligned}$$

şeklindeki düzenlemelerle

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_0} \quad (4.1.21)$$

ifadesi elde edilmiş olur. Bu ifade Lorentziyen Bobillier formülünde eğrilik yarıçapları arasındaki ilişkiyi açıkça ortaya koyar.

4.1.5. Lorentziyen I. ve II. formların timelike pol eğrileri için birlikte kullanımı

Lorentziyen Euler-Savary formülünün

$$\left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_0} \right) \sinh \theta = \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_0} = \frac{1}{h}$$

şeklindeki ifadesine Lorentziyen I. form,

$$\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_0} = \frac{1}{h} = \pm \frac{\omega}{V}$$

bağıntısına da Lorentziyen II. form adını vermiştik. Bu bağıntıların birlikte kullanımından

$$\frac{1}{h} = \pm \frac{\omega}{V} = \frac{1}{\rho} \sinh \theta \quad (4.1.22)$$

olduğu kolayca görülür. Şimdi $\pm \frac{\omega}{V} = \frac{1}{\rho} \sinh \theta$ eşitliğini bir de $\vec{J}_1^0(I)$ ivme vektörü cinsinden elde edelim. $\vec{J}_1^0(I)$ ivme vektörü

$$\vec{J}_1^0(I) = -\omega \vec{z} \times \vec{V}(I) \quad (4.1.23)$$

ile verilir. Buradan $\vec{J}_1^0(I)$ yörünge normaline boyunca olduğundan

$$\vec{J}_1^0(I) = -\omega V(I) \vec{x}$$

şeklinde yazılabilir. Ayrıca $\vec{x} = \vec{X} \sinh \theta$ olduğundan

$$\vec{J}_1^0(I) = -\omega V(I)\vec{X} \sinh \theta$$

elde edilir. Bu son denklemden

$$\frac{\langle \vec{J}_1^0(I), \vec{X} \rangle}{\omega^2} = -\frac{V}{\omega} \sinh \theta$$

bulunur. Ayrıca (4.1.11) göz önüne alınarak

$$\rho = -\frac{V}{\omega} \sinh \theta$$

$$\frac{1}{\rho} \sinh \theta = -\frac{\omega}{V}$$

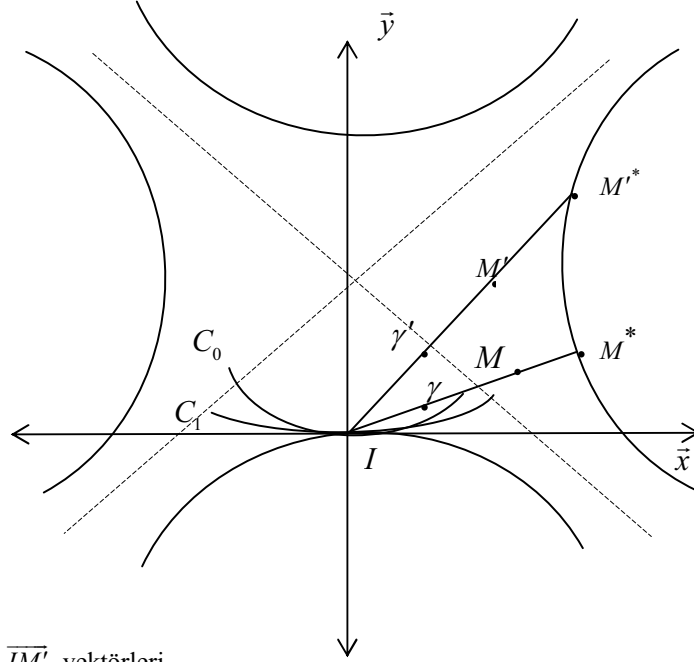
elde edilmiş olur. Bu eşitlik geometrik olarak Lorentziyen büküm dairesi üzerindeki noktaların I ani dönme merkezine olan uzaklıklarının hız ve açısal hız cinsinden ifadesini açıkça ortaya koyar. Aynı zamanda Lorentziyen Bobillier formülünde kullanılan bu uzaklıklar Lorentziyen Euler-Savary formülünün Lorentziyen formları yardımıyla şekillenmiş olur.

4.2. Spacelike Pol Eğrileri için Lorentziyen Bobillier Formülü

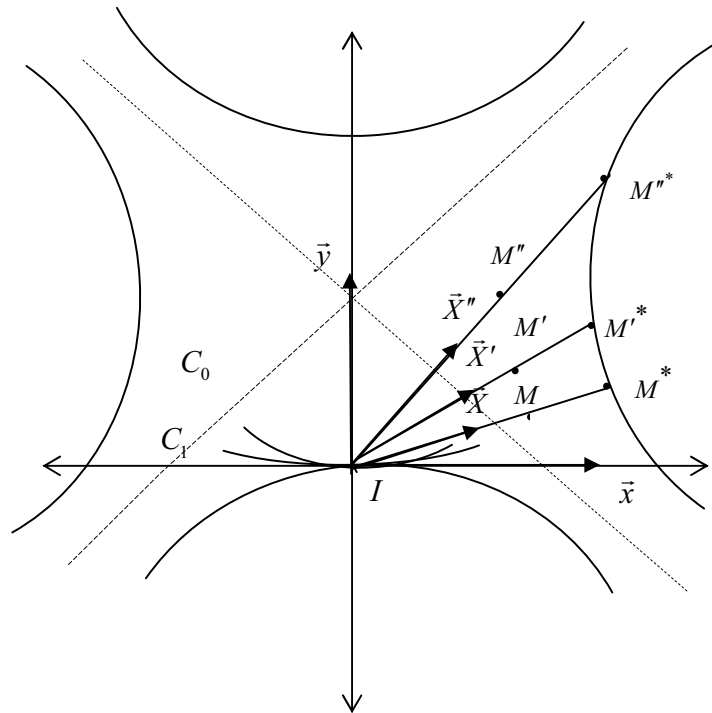
P_1 hareketli Lorentz düzleminin P_0 sabit Lorentz düzlemine göre 1- parametrelili hareketini incelemek için, başlangıcını I ani dönme polü ile çakışan $\{I, x, y\}$ hareketli koordinat sistemini ele alalım. $\{I, x\}$ eksenini pol teğeti ile yani C_0 ve C_1 sabit ve hareketli spacelike pol eğrilerinin ortak teğeti ile çakışacak şekilde seçelim.

P_1 hareketli Lorentz düzlemi üzerinde spacelike M ve M' noktaları alalım. Bu noktalar P_0 sabit Lorentz düzleminde ani eğrilik merkezleri γ ve γ' spacelike noktaları olan bir yörünge çizerler. P_1/P_0 hareketinde bu yörüngelerin normalleri I ani dönme merkezinden geçerler.

Şekil 4.7. de spacelike pol eğrileri için $\gamma, \gamma', M, M', M^*, M'^*$ noktaları gösterilmiştir. Burada C_0 ve C_1 sabit ve hareketli pol eğrileri için \vec{x} ortak teğet, \vec{y} ortak normaldir.



Şekil 4.7. \overline{IM} ve $\overline{IM'}$ vektörleri



Şekil 4.8. $\overline{X}, \overline{X'}$ ve $\overline{X''}$ vektörleri

P_1 hareketli düzlemi üzerinde bulunan M, M' ve M'' spacelike noktalarını I ani dönme merkezine bağlayan $\overline{IM}, \overline{IM'}$ ve $\overline{IM''}$ vektörleri spacelike vektörlerdir. M, M' ve M'' noktalarının yer vektörleri, sırasıyla, $\overline{X}, \overline{X'}$ ve $\overline{X''}$ ile gösterelim. Bu durumda

$$\begin{aligned}\overline{X} &= \frac{\overline{IM}}{\|\overline{IM}\|}, \\ \overline{X'} &= \frac{\overline{IM'}}{\|\overline{IM'}\|}, \\ \overline{X''} &= \frac{\overline{IM''}}{\|\overline{IM''}\|};\end{aligned}\tag{4.2.1}$$

yazılabilir. $h, \rho_0, \rho_1, \rho, \rho'$ ve ρ'' , sırasıyla, $M^0, \gamma, M, M^*, M'^*$ ve M''^* noktalarının I noktasına olan uzaklıkları olmak üzere

$$\begin{aligned}\langle \overline{IM^0}, \overline{y} \rangle &= h, \\ \langle \overline{I\gamma}, \overline{X} \rangle &= \rho_0, \\ \langle \overline{IM}, \overline{X} \rangle &= \rho_1, \\ \langle \overline{IM^*}, \overline{X} \rangle &= \rho, \\ \langle \overline{IM'^*}, \overline{X'} \rangle &= \rho', \\ \langle \overline{IM''^*}, \overline{X''} \rangle &= \rho''\end{aligned}\tag{4.2.2}$$

şeklinde tanımlanır.

4.2.1. Spacelike pol eğrileri için Lorentziyen Euler- Savary formülü

Lorentz düzleminin 1-parametrelili hareketi boyunca oluşan büküm dairesinin çapı h olmak üzere bu uzunluk büküm dairesi üzerinde ortak normal doğrultusunda bulunan noktanın I merkezi ile birleştirilmesiyle elde edilir. h uzunluğu ile ρ arasında

$$h \sinh \theta = \rho \quad (4.2.3)$$

bağıntısı mevcuttur. Burada θ açısı \bar{x} eksenini ile \bar{X} vektörü arasındaki merkezci açıdır.

Lorentz düzleminde 1-parametrelili hareketler için yörünge eğrilerinin eğrilikleri arasındaki ilişkiyi veren

$$\left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_0} \right) \sinh \theta = \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_0} \quad (4.2.4)$$

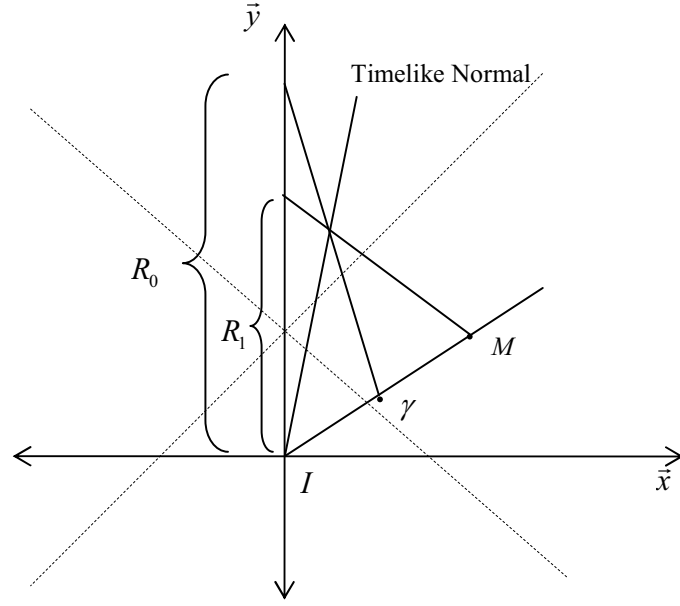
Lorentziyen Euler-Savary bağıntısında R_1 ve R_0 büyüklükleri sırasıyla C_1 ve C_0 spacelike pol eğrilerinin yarıçaplarını göstermektedir. Ayrıca ρ_1, ρ_0 , ve ρ , sırasıyla, M, γ , ve M^* noktalarının I merkezine olan uzaklıklarını göstermektedir. Bu uzaklıklar θ açısıyla birlikte negatif ya da pozitif yönlendirilmiş olabilirler. Burada

$$\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_0} = \frac{1}{\rho}$$

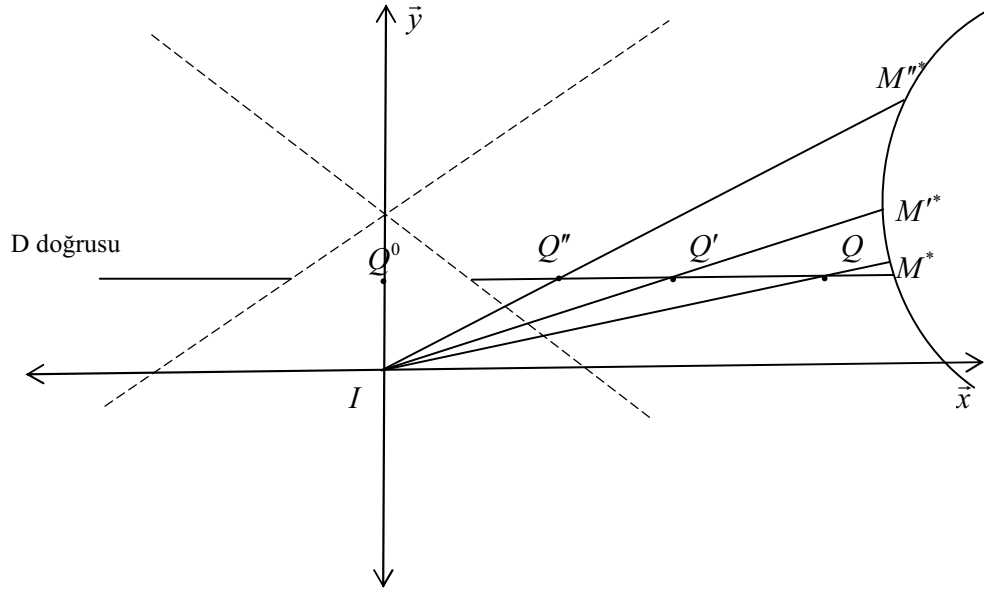
dır. Böylece

$$\left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_0} \right) \sinh \theta = \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_0} = \frac{1}{\rho} \sinh \theta = \frac{1}{h}$$

olur.



Şekil 4.9. R_0 ve R_1 uzunlukları



Şekil 4.10. Q noktaları

Şimdi Euler-Savary formülü vasıtasıyla Şekil 4.10' de gösterilen Q noktalarını inceleyelim. Sırasıyla, Q, Q', Q'' , ve Q^0 noktaları $(I, \bar{X}), (I, \bar{X}'), (I, \bar{X}'')$, ve (I, \bar{y}) doğrultusu boyunca büküm dairesi üzerindeki noktaların bir inversiyonla

görüntüleridir. D doğrusu Q, Q', Q'' , ve Q^0 noktalarının geometrik yerini temsil etmektedir. Bu durum

$$\begin{aligned}\langle \overline{IQ}, \overline{X} \rangle &= \frac{1}{\rho} \\ \langle \overline{IQ'}, \overline{X} \rangle &= \frac{1}{\rho'} \\ \langle \overline{IQ''}, \overline{X} \rangle &= \frac{1}{\rho''} \\ \langle \overline{IQ^0}, \overline{X} \rangle &= \frac{1}{h}\end{aligned}\tag{4.2.5}$$

şeklindeki bağıntılardan açıkça görülebilir. (4.2.4) den $\frac{1}{\rho} \sinh \theta = \frac{1}{h}$ ve (4.2.5) den

$\overline{IQ} = \frac{1}{\rho} \overline{X}$ ifadelerini ele alırsak

$$\overline{IQ} \sinh \theta = \frac{1}{\rho} \overline{X} \sinh \theta = \frac{1}{h} \overline{X}$$

elde edilir. Benzer biçimde $\frac{1}{\rho'} \sinh \theta = \frac{1}{h} = \frac{1}{\rho''} \sinh \theta$ olduğundan

$$\overline{IQ'} \sinh \theta' = \frac{1}{\rho'} \overline{X'} \sinh \theta' = \frac{1}{h} \overline{X'}$$

ve

$$\overline{IQ''} \sinh \theta'' = \frac{1}{\rho''} \overline{X''} \sinh \theta'' = \frac{1}{h} \overline{X''}$$

bulunur. Yani,

$$\langle \overline{IQ}, \overline{X} \rangle \sinh \theta = \langle \overline{IQ'}, \overline{X'} \rangle \sinh \theta' = \langle \overline{IQ''}, \overline{X''} \rangle \sinh \theta'' = \frac{1}{h}$$

dır. Bu ilişki Q noktalarının Şekil 4.10. da gösterilen \bar{x} eksenine paralel bir D doğrusu üzerinde bulunduğunu göstermektedir.

Tanım 4.2.1. Lorentziyen Euler-Savary formülünün büküm dairesinin çapının uzunluğu olan h cinsinden

$$\left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_0} \right) \sinh \theta = \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_0} = \frac{1}{h} \quad (4.2.4)'$$

şeklindeki ifadesine I. form adı verilir.

Tanım 4.2.2. P_1 / P_0 hareketinde noktalar I merkezli bir yörünge etrafında hareket edeceğinden I noktasının yer değişim miktarı büküm dairesine olan uzaklığı ile açısal yer değişim miktarının çarpımına eşit olacaktır öyle ki;

$$\Delta I = h \cdot \Delta \theta$$

dır. Bu yer değişim belirli bir t zamanı için düşünülürse

$$\frac{\Delta I}{\Delta t} = h \cdot \frac{\Delta \theta}{\Delta t}$$

olacaktır. $\Delta t \rightarrow 0$ için limit alınırsa

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta I}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} h \cdot \frac{\Delta \theta}{\Delta t}$$

olur.

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta I}{\Delta t} = \frac{dI}{dt}$$

ve

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} h \cdot \frac{\Delta \theta}{\Delta t} = h \cdot \frac{d\theta}{dt}$$

olduğundan yukarıdaki eşitlik

$$\frac{dI}{dt} = h \cdot \frac{d\theta}{dt}$$

şeklini alır. Buradan

$$V(I) = h\omega \quad (4.2.6)$$

bulunur. Burada $V(I)$ ifadesi I noktasının hızı ω ifadesi I noktasının açılmal hızıdır. Sonuç olarak yönlendirme durumu da göz ardı edilmeksizin

$$\frac{1}{h} = \pm \frac{\omega}{V}$$

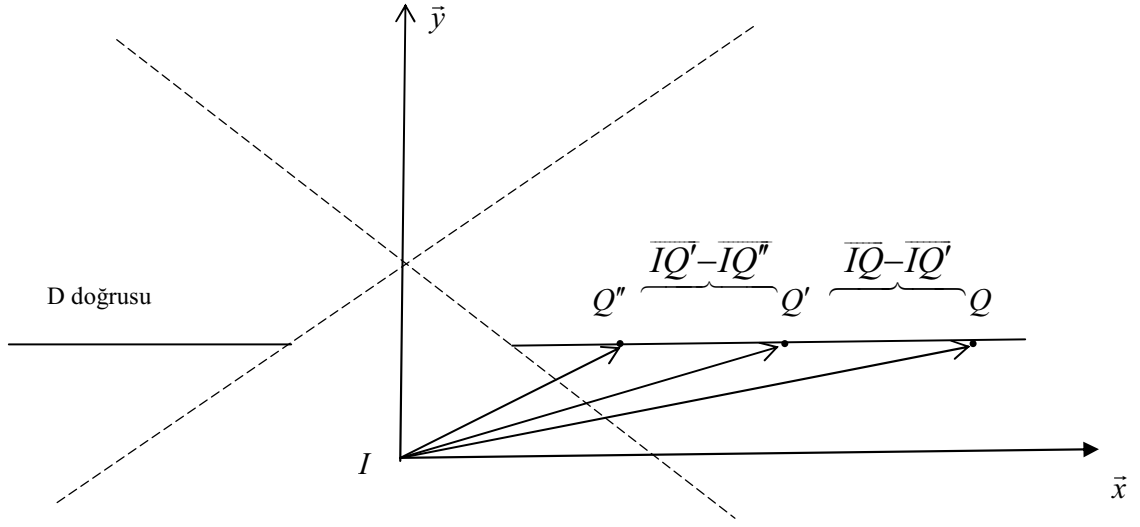
olacağı açıktır. Bu eşitlikte (4.2.4) kullanılırsa

$$\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_0} = \frac{1}{h} = \pm \frac{\omega}{V}$$

olur. Timelike pol eğrileri göz önüne alındığında da elde edilen bu son bağıntı Lorentziyen II. form olarak adlandırılmıştı.

4.2.2. Spacelike pol eğrileri için Lorentziyen Euler-Savary formülünden Lorentziyen Bobillier formülüne geçiş

Q, Q', Q'' ve Q^0 noktaları, sırasıyla, $(I, \bar{X}), (I, \bar{X}'), (I, \bar{X}'')$, ve (I, \bar{y}) doğrultusu boyunca büküm dairesi üzerindeki noktaların bir inversiyonla görüntüleri olduğu belirtilmişti. Şimdi bu noktalar arasındaki ilişkiyi inceleyelim.



Şekil 4.11. $\overline{IQ} - \overline{IQ'}$ ve $\overline{IQ'} - \overline{IQ''}$ vektörleri

Şekil 4.11. de görüldüğü gibi $(\overline{IQ} - \overline{IQ'})$ ve $(\overline{IQ'} - \overline{IQ''})$ vektörleri aynı doğrultudadır. Yani

$$(\overline{IQ} - \overline{IQ'}) \times (\overline{IQ'} - \overline{IQ''}) = \vec{0}$$

dır. Bu vektörel çarpımı düzenlersek

$$(\overline{IQ} \times \overline{IQ'}) - (\overline{IQ} \times \overline{IQ''}) + (\overline{IQ'} \times \overline{IQ''}) = \vec{0} \quad (4.2.7)$$

elde edilir. (4.2.7) düzenlenirse

$$(\overline{IQ} \times \overline{IQ'}) + (\overline{IQ''} \times \overline{IQ}) + (\overline{IQ'} \times \overline{IQ''}) = \vec{0}$$

olacaktır. Şimdi (4.2.5) eşitliklerini

$$\overline{IQ} = \frac{1}{\rho} \overline{X},$$

$$\overline{IQ'} = \frac{1}{\rho'} \overline{X'},$$

$$\overline{IQ''} = \frac{1}{\rho''} \overline{X''},$$

şeklinde yazıp (4.2.7) denkleminde yerine yazarsak

$$\left(\frac{1}{\rho'} \overline{X} \times \frac{1}{\rho} \overline{X'} \right) + \left(\frac{1}{\rho} \overline{X''} \times \frac{1}{\rho''} \overline{X} \right) + \left(\frac{1}{\rho''} \overline{X'} \times \frac{1}{\rho'} \overline{X''} \right) = \vec{0}$$

elde edilir. $\rho\rho'\rho'' \neq 0$ olduğundan

$$\rho''(\overline{X} \times \overline{X'}) + \rho'(\overline{X} \times \overline{X''}) + \rho(\overline{X'} \times \overline{X''}) = \vec{0}$$

bulunur. Lorentziyen vektörel çarpımın özelliklerinden

$$\rho'' \|\overline{X'}\| \|\overline{X}\| \sinh(\overline{X}, \overline{X'}) + \rho' \|\overline{X}\| \|\overline{X''}\| \sinh(\overline{X''}, \overline{X}) + \rho \|\overline{X''}\| \|\overline{X'}\| \sinh(\overline{X'}, \overline{X''}) = 0$$

eşitliği elde edilir. $\overline{X}, \overline{X'}$ ve $\overline{X''}$ spacelike birim vektörler olduğundan

$$\|\overline{X}\| = \|\overline{X'}\| = \|\overline{X''}\| = 1 \text{ dir. Böylece burada}$$

$$\rho \sinh(\overline{X'}, \overline{X''}) + \rho' \sinh(\overline{X''}, \overline{X}) + \rho'' \sinh(\overline{X}, \overline{X'}) = 0 \quad (4.2.8)$$

Lorentziyen Bobillier formülü elde edilir. Görüldüğü gibi bu formülün temeli Lorentziyen Euler-Savary formülüne dayanır.

4.2.3. Lorentziyen Bobillier formülünün hız ve ivme vektörleri vasıtasıyla elde edilmesi

P_1 hareketli düzlemindeki M spacelike noktasının açısal hız vektörü $\vec{\omega}$ olsun. \overline{IM} ile \vec{y} arasındaki açı merkez açısı θ olmak üzere \overline{IM} vektörünün açısal konumunun türevi

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

Açısal hız olarak tanımlanmaktadır. P_0 ve P_1 Lorentz düzlemlerine dik olan bir \vec{z} birim vektörü düzlemi alındığında açısal hız vektörü $\vec{\omega} = \omega\vec{z}$ olarak belirtilir.

Mutlak hız vektörünün sürüklenme hız vektörü ile relatif hız vektörünün toplamından oluştuğu belirtilmişti. $\vec{V}^0(M)$, M noktasının mutlak hız vektörü, $\vec{V}_1(M)$ sürüklenme hız vektörü ve $\vec{V}_1^0(M)$ relatif hız vektörü olmak üzere

$$\vec{V}^0(M) = \vec{V}_1^0(M) + \vec{V}_1(M)$$

olarak tanımlanır. P_1/P_0 hareketi, M spacelike noktasının P_1 hareketli Lorentz düzleminde sabit tutulmasıyla oluşan bir hareket olduğundan $\vec{V}_1^0(M) = \vec{0}$ olacaktır.

Bu durumda

$$\vec{V}^0(M) = \vec{V}_1(M)$$

dır.

Teorem 4.2.3. Bir noktanın sürüklenme hız vektörü o noktayı merkeze bağlayan vektöre ve açısal hız vektörüne diktir. $\vec{V}_1(M)$ M noktasının sürüklenme hız vektörü olmak üzere

$$\vec{V}_1(M) = \vec{\omega} \times \overline{IM}$$

bağıntısı vardır.

Bu durumda yukarıdaki eşitliklerden

$$\vec{V}^0(M) = \vec{V}_1^0(M) + (\vec{\omega} \times \overline{IM})$$

olur.

Bu son denklemin t zamanına göre türevi alınır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\frac{d}{dt}(\vec{V}^0(M)) = \frac{d}{dt}(\vec{V}_1^0(M)) + \left(\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \overline{IM} \right) + \left(\vec{\omega} \times \left(\frac{d\overline{IM}}{dt} \right) \right)$$

elde edilir. Burada $\vec{V}^0(M)$ mutlak hız vektörünün türevi olan $\frac{d}{dt}(\vec{V}^0(M))$ ifadesi

$\vec{J}^0(M)$ ivme vektörü, $\vec{V}_1^0(M)$ relatif hız vektörünün türevi olan $\frac{d}{dt}(\vec{V}_1^0(M))$

ifadesi de $\vec{J}_1^0(I)$ ivme vektörü olarak adlandırılır. Buradan son denklem

$$\vec{J}^0(M) = \vec{J}_1^0(I) + \left(\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \overline{IM} \right) + \left(\vec{\omega} \times \left(\frac{d\overline{IM}}{dt} \right) \right)$$

olarak ifade edilir. Burada $\frac{d\overline{IM}}{dt}$ türevi M noktasının relatif hız vektörüdür ve -

Teorem 4.2.3 den görüldüğü üzere $\frac{d\overline{IM}}{dt} = \vec{\omega} \times \overline{IM}$ olacaktır. Bu durumda

$$\vec{J}^0(M) = \vec{J}_1^0(I) + (\dot{\omega} \times \overline{IM}) + (\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \overline{IM}))$$

elde edilir. Bu bağıntıyı vektörel olarak ifade edebilmek için P_0 ve P_1 Lorentz düzlemlerinin birim dikey vektörü \vec{z} olmak üzere $\vec{\omega} = \omega\vec{z}$ ve $\dot{\vec{\omega}} = \dot{\omega}\vec{z}$ olarak yazılabilir. Böylece Lorentz uzayında Lagrange özdeşliği de kullanılarak

$$\vec{J}^0(M) = \vec{J}_1^0(I) + (\dot{\omega}\vec{z} \times \overline{IM}) + \langle \omega\vec{z}, \omega\vec{z} \rangle \overline{IM} - \langle \overline{IM}, \omega\vec{z} \rangle \omega\vec{z} \quad (4.2.9)$$

elde edilir. $\vec{\omega} = \omega\vec{z}$ olduğundan $\langle \overline{IM}, \omega\vec{z} \rangle = 0$ dır. Diğer taraftan \vec{z} vektörü timelike birim vektör olduğundan

$$\|\omega\vec{z}\|^2 = -\langle \omega\vec{z}, \omega\vec{z} \rangle = -\omega^2$$

olacaktır. Böylece (4.2.9) denklemi

$$\vec{J}^0(M) = \vec{J}_1^0(I) + (\dot{\omega}\vec{z} \times \overline{IM}) - \omega^2 \overline{IM} \quad (4.2.10)$$

olarak düzenlenir. Başka bir deyişle $\vec{J}^0(M)$ mutlak ivme vektörünün teğet ve normal bileşenleri, sırasıyla,

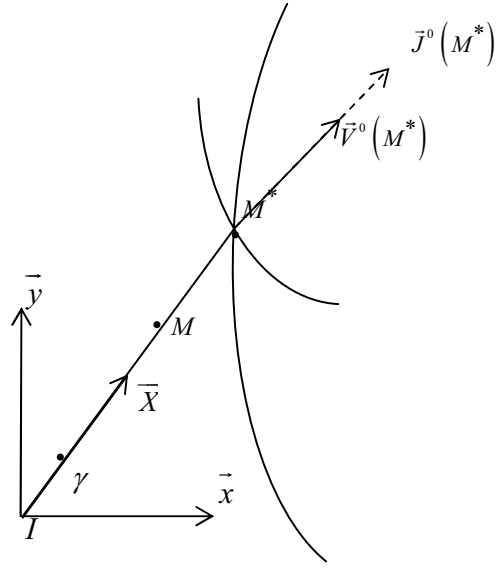
$$\vec{J}_t(M) = \vec{J}_1^0(I) + (\dot{\omega}\vec{z} \times \overline{IM})$$

$$\vec{J}_n(M) = -\omega^2 \overline{IM}$$

olmak üzere (4.2.10) denklemi

$$\vec{J}^0(M) = \vec{J}_t(M) + \vec{J}_n(M) \quad (4.2.11)$$

biçiminde ifade edilmiş olur.



Şekil 4.12. Hız ve ivme vektörleri

Büküm dairesi üzerinde bulunan M^* noktasının mutlak hız vektörü ve mutlak ivme vektörü göz önüne alındığında bu vektörlerin aynı ya da ters yönlü oldukları görülecektir. Bu ilişkiden

$$\vec{V}^0(M^*) \times \vec{J}^0(M^*) = \vec{0}$$

olur. Hız ve ivme vektörlerinin yukarıda belirtilen ifadeleriyle birlikte bu eşitlik

$$\left(\vec{V}_1^0(I) + (\omega \vec{z} \times \overline{IM^*}) \right) \times \left(\vec{J}_1^0(I) + (\dot{\omega} \vec{z} \times \overline{IM^*}) - \omega^2 \overline{IM^*} \right) = \vec{0}$$

olarak verilir. $\vec{V}_1^0(I) = \vec{0}$ olduğundan

$$(\omega \vec{z} \times \overline{IM^*}) \times \left(\vec{J}_1^0(I) + (\dot{\omega} \vec{z} \times \overline{IM^*}) - \omega^2 \overline{IM^*} \right) = \vec{0}$$

olur. Lorentz uzayında vektörel çarpım tanımı kullanılıp gerekli sadeleştirmeler yapıldığında

$$-\omega \langle \bar{z}, \bar{J}_1^0(I) \rangle \overline{IM}^* + \omega \langle \overline{IM}^*, \bar{J}_1^0(I) \rangle \bar{z} + \omega \dot{\omega} \left((\bar{z} \times \overline{IM}^*) \times (\bar{z} \times \overline{IM}^*) \right) + \omega^3 \langle \bar{z} \times \overline{IM}^* \rangle \overline{IM}^* - \omega^3 \langle \overline{IM}^*, \overline{IM}^* \rangle \bar{z} = \vec{0}$$

elde edilir. Burada

$$\langle \bar{z}, \bar{J}_1^0(I) \rangle = 0$$

$$\langle \bar{z}, \overline{IM}^* \rangle = 0$$

$$\|\overline{IM}^*\|^2 = \langle \overline{IM}^*, \overline{IM}^* \rangle$$

$$(\bar{z} \times \overline{IM}^*) \times (\bar{z} \times \overline{IM}^*) = \vec{0},$$

eşitlikleri yerine yazılarak

$$\langle \overline{IM}^*, \bar{J}_1^0(I) \rangle \bar{z} - \omega^2 \|\overline{IM}^*\|^2 \bar{z} = \vec{0}$$

elde edilir. $\bar{J}_1^0(I)$ ivmesi her zaman pol yörüngesinin normalı olan \bar{X} vektörü ile sabit bir merkezci açığı oluşturur. Bu açığı α diyelim. $\bar{J}_1^0(I)$ ile \overline{IM}^* spacelike vektörleri arasındaki merkezci açığı α olmak üzere Lorentz uzayında bu iki vektörün iç çarpımından

$$\|\overline{IM}^*\| J_1^0(I) \cosh \alpha - \omega^2 \|\overline{IM}^*\|^2 = 0$$

elde edilir. (4.2.2)' den

$$\rho J_1^0(I) \cosh \alpha - \omega^2 \rho^2 = 0$$

dır. Gerekli düzenlemeler yardımıyla

$$\rho = \frac{J_1^0(I) \cosh \alpha}{\omega^2}$$

denklemini elde edilir. Aynı zamanda bu eşitlik, \bar{X} spacelike birim vektörü ile $\bar{J}_1^0(I)$ spacelike ivme vektörü arasında açının da α olmasından

$$\rho = \frac{\langle \bar{J}_1^0(I), \bar{X} \rangle}{\omega^2} \quad (4.2.12)$$

olarak verilir. ρ' ve ρ'' değerleri de benzer yolla

$$\rho' = \frac{\langle \bar{J}_1^0(I), \bar{X}' \rangle}{\omega^2} \quad (4.2.12)'$$

$$\rho'' = \frac{\langle \bar{J}_1^0(I), \bar{X}'' \rangle}{\omega^2} \quad (4.2.12)''$$

olarak bulunur. Bu eşitliklerin (4.1.11), (4.1.11)' ve (4.1.11)'' ile özdeş olduğuna dikkat edilmelidir.

Şimdi \bar{X}, \bar{X}' ve \bar{X}'' spacelike birim vektörleri arasındaki lineer bağıntı

$$\lambda \bar{X} + \mu \bar{X}' + \vartheta \bar{X}'' = \vec{0} \quad (4.2.13)$$

olacak biçimde sıfırdan farklı λ, μ, ϑ ifadelerini araştıralım. Burada \bar{X}, \bar{X}' ve \bar{X}'' vektörleri birim vektörler olduğundan $\|\bar{X}\| = \|\bar{X}'\| = \|\bar{X}''\| = 1$ dir. (4.2.13) eşitliğini \bar{X} ile vektörel çarparsak

$$\lambda(\bar{X} \times \bar{X}) + \mu(\bar{X}' \times \bar{X}) + \vartheta(\bar{X}'' \times \bar{X}) = \vec{0}$$

olur. $\bar{X} \times \bar{X} = \vec{0}$ olduğundan

$$\mu \sinh(\overline{X}', \overline{X}) + \mathcal{G} \sinh(\overline{X}'', \overline{X}') = 0 \quad (4.2.13)'$$

elde edilir. (4.2.13) eşitliğini \overline{X}' ile vektörel çarparsak

$$\lambda \sinh(\overline{X}, \overline{X}') + \mathcal{G} \sinh(\overline{X}'', \overline{X}') = 0 \quad (4.2.13)''$$

bulunur. En son olarak (4.2.13) eşitliğini \overline{X}'' ile vektörel çarparsak

$$\lambda \sinh(\overline{X}, \overline{X}'') + \mu \sinh(\overline{X}', \overline{X}'') = 0 \quad (4.2.13)'''$$

elde edilir. (4.2.13)', (4.2.13)'', (4.2.13)''' denklem sisteminin çözümünden $\lambda, \mu, \mathcal{G}$ ifadeleri

$$\begin{aligned} \lambda &= \sinh(\overline{X}', \overline{X}'') \\ \mu &= \sinh(\overline{X}'', \overline{X}) \\ \mathcal{G} &= \sinh(\overline{X}, \overline{X}') \end{aligned} \quad (4.2.14)$$

olarak bulunur. (4.2.14) eşitlikleri (4.2.13)' de yerine konulursa

$$\sinh(\overline{X}', \overline{X}'') \overline{X} + \sinh(\overline{X}'', \overline{X}) \overline{X}' + \sinh(\overline{X}, \overline{X}') \overline{X}'' = 0$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitliği $\frac{\overline{J}_1^0(X)}{\omega^2}$ vektörü ile iç çarpılırsa

$$\sinh(\overline{X}', \overline{X}'') \frac{\langle \overline{X}, \overline{J}_1^0(X) \rangle}{\omega^2} + \sinh(\overline{X}'', \overline{X}) \frac{\langle \overline{X}', \overline{J}_1^0(X) \rangle}{\omega^2} + \sinh(\overline{X}, \overline{X}') \frac{\langle \overline{X}'', \overline{J}_1^0(X) \rangle}{\omega^2} = 0 \quad (4.2.15)$$

ifadesi karşımıza çıkar. $(4.2.12), (4.2.12)', (4.2.12)''$ ifadelerini (4.2.15) de yerine koyarsak

$$\rho \sinh(\overline{X}', \overline{X}'') + \rho' \sinh(\overline{X}'', \overline{X}) + \rho'' \sinh(\overline{X}, \overline{X}') = 0$$

ifade edilmiş olur. Böylece spacelike pol eğrileri için elde edilen Lorentziyen Bobillier formülü ile timelike pol eğrileri için elde edilen formül aynıdır.

Timelike pol eğrilerinde olduğu gibi spacelike pol eğrilerinde de Lorentziyen Bobillier formülünün özel bir hali için I ani dönme merkezi ile çakışan ve P_1 hareketli düzleminde yer alan bir M_1 spacelike noktası alalım. Bu durumda $\vec{V}^o(M_1) = \vec{0}$ olacaktır. Benzer biçimde $\vec{J}^o(M_1) = \vec{0}$ ivmesi de sıfırdır. Bu şart altında \vec{x} vektörü bölüm 4.1. de bölümde verilen \overline{X}' vektörüne karşılık gelecektir. Bu durumda ρ' uzunluğu sıfır olup \overline{X}'' vektörü \vec{y} boyunca seçilirse Bobillier formülü

$$\overline{X}' = \vec{x} \quad , \quad \overline{X}'' = \vec{y}$$

şartları altında

$$\rho \sinh(\vec{x}, \vec{y}) + \rho' \sinh(\vec{y}, \overline{X}) + \rho'' \sinh(\overline{X}, \vec{x}) = 0$$

olarak karşımıza çıkar. Burada $\rho' = 0$ alınarak

$$\rho \sinh(\vec{x}, \vec{y}) + \rho'' \sinh(\overline{X}, \vec{x}) = 0$$

yani

$$\rho \sinh(\vec{x}, \vec{y}) - \rho'' \sinh(\vec{x}, \overline{X}) = 0$$

olur. Burada \bar{x} ile \bar{y} ' nin Lorentz anlamda dik ve \bar{y} ile \bar{X} arasındaki merkezci açının θ olduğu açıktır. Bu bilgilerle birlikte yukarıdaki eşitlik

$$\rho \sinh(\bar{x}, \bar{y}) = \rho'' \sinh \theta$$

şeklinde ifade edilebilir. Bu denklem spacelike pol eğrileri için Lorentziyen Bobillier formülünün belirtilen şartlar altında özel bir halidir.

4.2.4. Spacelike pol eğrileri için Lorentziyen Bobillier formülünde eğrilik yarıçapları arasındaki ilişki

M yönündeki eğriliğin yarıçapı r olmak üzere bu yarıçap $\overline{M\gamma}$ vektörü boyuncadır. Bu vektörü I ani dönme merkezi cinsinden timelike pol eğrilerinde olduğu gibi

$$\|\overline{M\gamma}\| = -\|\overline{IM}\| + \|\overline{I\gamma}\|$$

olarak ifade edebilir. Burada (4.2.2) eşitliklerinin de kullanımıyla eğrilik yarıçapı

$$r = \rho_0 - \rho_1$$

olarak karşımıza çıkar. Fizikteki klasik ilişkiden r ile M yönündeki normal ivme arasında

$$\frac{J_n(M)}{\|\vec{V}^0(M)\|^2} = \frac{1}{r}$$

bağıntısı mevcuttur[7]. Yani (4.1.15) tekrar elde edilir. Bu eşitlikteki $J_n(M)$ ve $\|\vec{V}^0(M)\|^2$ ifadelerinin de tek tek incelenmesiyle (4.1.16) yeniden elde edilir.

Şimdi $\vec{J}^0(M)$ ivme vektörünü incelenmesi için (4.2.10) eşitliğinin \vec{X} üzerine izdüşümünü alırsak

$$\langle \vec{J}^0(M), \vec{X} \rangle = \langle \vec{J}_1^0(I), \vec{X} \rangle + \langle \dot{\omega} \vec{z} \times \overline{IM}, \vec{X} \rangle - \omega^2 \langle \overline{IM}, \vec{X} \rangle$$

olur. Lorentz anlamda vektörel çarpımın özelliklerinden

$$\langle \vec{J}^0(M), \vec{X} \rangle = \langle \vec{J}_1^0(I), \vec{X} \rangle - \dot{\omega} \cdot \det(\vec{z}, \overline{IM}, \vec{X}) - \omega^2 \langle \overline{IM}, \vec{X} \rangle$$

elde edilir. Burada \vec{z} , P_0 ve P_1 düzlemlerinin birim dikey vektörü olduğundan

$$\det(\vec{z}, \overline{IM}, \vec{X}) = 0$$

dır. Böylece

$$\langle \vec{J}^0(M), \vec{X} \rangle = \langle \vec{J}_1^0(I), \vec{X} \rangle - \omega^2 \langle \overline{IM}, \vec{X} \rangle$$

ifadesi elde edilir. (4.1.11) yada onun eşiti olan (4.2.12) $\langle \vec{J}_1^0(I), \vec{X} \rangle = \rho w^2$ şeklinde yazılıp (4.2.2) yerine yazılırsa

$$\langle \vec{J}^0(M), \vec{X} \rangle = \rho w^2 - \omega^2 \rho_1 \quad (4.2.18)$$

olur. Bu denklemin (4.1.17) ile aynı olduğu görülür. (4.1.17), (4.1.18), (4.1.19) ve (4.1.20) denklemleri benzer biçimde elde edilip düzenlendiğinde

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_0}$$

olur. Bu eşitlikle birlikte timelike pol eğrileri için Lorentziyen Bobillier formülünde eğrilik yarıçapları arasındaki ilişkinin spacelike pol eğrileri için Lorentziyen Bobillier formülündekinin aynısı olduğu görülür.

4.2.5. Lorentziyen I. ve II. formların spacelike pol eğrileri için birlikte kullanımı

Lorentziyen Euler-Savary formülünün I. ve II. formlarının birlikte kullanımıyla Bölüm 4.1.5. de verilen (4.1.22) ve (4.1.23) eşitlikleri elde etmiştik. Ayrıca $\vec{J}_1^0(I)$ yörünge normalini boyunca olduğundan

$$\vec{J}_1^0(I) = -\omega V(I) \vec{y}$$

şeklinde yazılabilir. Ayrıca $\vec{y} = \bar{X} \sinh \theta$ olduğundan

$$\vec{J}_1^0(I) = -\omega V(I) \bar{X} \sinh \theta$$

elde edilir. Bu son denklemden

$$\frac{\langle \vec{J}_1^0(I), \bar{X} \rangle}{\omega^2} = -\frac{V}{\omega} \sinh \theta$$

bulunur. (4.2.12) ifadesinin kullanımıyla

$$\rho = -\frac{V}{\omega} \sinh \theta$$

$$\frac{1}{\rho} \sinh \theta = -\frac{\omega}{V}$$

elde edilmiş olur. Bu eşitlik timelike pol eğrilerinde olduğu gibi spacelike pol eğrilerinde de büküm dairesi üzerindeki noktaların I ani dönme merkezine olan uzaklıklarının hız ve açısal hız cinsinden ifadesini açıkça ortaya koyar. Aynı

zamanda Lorentziyen Bobillier formülünde kullanılan bu uzaklıklar Lorentziyen Euler-Savary formülünün Lorentziyen formları yardımıyla şekillenmiş olur.

BÖLÜM 5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, Lorentz düzleminde 1-parametrelî hareket sonucu oluşan timelike ve spacelike pol eğrileri ayrı ayrı göz önüne alınmış ve Lorentz düzleminde iyi bilinen Euler-Savary formülünden Lorentziyen Bobillier formülü elde edilmiştir öyle ki bu formül Lorentz düzleminde farklı üç noktanın eğrilikleri arasındaki ilişkiyi ortaya koymaktadır.

Ayrıca Lorentz anlamda Bobillier formülü, Lorentziyen Euler-Savary formülünden bağımsız bir direkt yolla da elde edilmiş ve geometrik olarak yorumlanmıştır.

Bu çalışmada elde edilen Lorentz düzlemde Bobillier formülünün kompleks düzlemdeki karşılığı bundan sonraki çalışmalarda araştırılabilir.

KAYNAKLAR

- [1] AYTUN, I., “1-Parametrelili Lorentziyen Düzlem Hareketi için Euler-Savary Formülü ve Lorentziyen Geometrik Yorumu”, Celal Bayar Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, Manisa, 2002.
- [2] BİRMAN, G. S., “Trigonometry in Lorentziyen Geometry”, Ann. Math. Month. 91, 534-549, 1984.
- [3] BLASCHKE, W., und MÜLLER, H.R., “Ebene Kinematik”, R. Oldenbourg, München, 1956.
- [4] ERGİN, A.A., “Lorentz Düzleminde Kinematik Geometri”, A.Ü Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktora Tezi, 1989.
- [5] ERGÜT, M., AYDIN, A. P., BİLDİK, N., “The Geometry of the Canonical System and One-parameter motions in 2-dimensional Lorentzian Space”, Fırat Üniversitesi Dergisi, 113-122, 1988.
- [6] FAYET, M., “Une Nouvelle Formule Relative Aux Courbures Dans Un Mouvement Plan” Mech. Mach. Theory, Volume 23, no.2, 135-139, 1988.
- [7] FAYET, M., “Bobillier Formula as a Fundamental Law in Planar Motion” Z. Angew. Math. Mech., 2002(3), 207-210.
- [8] GÖRMEZ, İ., “Lorentz Düzleminde Hareket Geometrisi”, Gazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, Ankara, 1990.
- [9] GÜNGÖR, M. A., PİRDAL, A. Z., TOSUN, M., “Euler-Savary Formula for the Lorentzian Planar Homothetic Motions” International J. Math. Combin., 2010.
- [10] MUMİNAGİC, A., “Bobillierova Formula”, Osjecka Mathematicka Skola, 77-81, 2004
- [11] MÜLLER, H. R., “Kinematik Dersleri (Çeviri)” Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları, no 96-Mat 27, 1963.
- [12] O’NEİLL, B., “Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity”, Academic Press, London, 1983.

- [13] TOSUN M. , GÜNGÖR M.A. , OKUR, I., “On the 1-parameter Lorentzian Spherical Motions and Euler-Savary Formula”, American Society of Mechanical Engineering (ASME), Journal of Applied Mechanic, Volume 75, Number 5, pp. 972-977, 2007.
- [14] WALDRON, K. J., KINZEL, G. L., “Kinematics, Dynamics, and Design of Machinery”, The Ohio State University, Department of Mechanical Engineering, 1996.

ÖZGEÇMİŞ

Nurten BAYRAK, 09.06.1987 tarihinde Düzce'nin Çilimli ilçesinde doğdu. İlköğrenimini Adapazarı Necdet Islar İlköğretim Okulu'nda, lise öğrenimini Adapazarı Mithatpaşa Şükrü Ayna Yabancı Dil Ağırlıklı Lisesi' de tamamladı. 2005 yılında Gazi Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik bölümünde başladığı lisans eğitimini 2009 yılında tamamlayıp aynı yıl Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünde yüksek lisans eğitimine başlamıştır.