T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ÇOK BOYUTLU Q-DEFORME FERMİYONİK NEWTON SALINICISI İÇİN İNHOMOJEN KUANTUM DEĞİŞMEZLİK GRUBU

YÜKSEK LİSANS TEZİ

SEMRA ARLI

Enstitü Anabilim Dalı	**:**	**FİZİK**
Tez Danışmanı	**:**	**Yrd. Doç. Dr. Ali Serdar ARIKAN**

Haziran 2011

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ÇOK BOYUTLU Q-DEFORME FERMİYONİK NEWTON SALINICISI İÇİN İNHOMOJEN KUANTUM DEĞİŞMEZLİK GRUBU

YÜKSEK LİSANS TEZİ

SEMRA ARLI

Enstitü Anabilim Dalı : FİZİK

Bu tez 28 / 06 /2011 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Oybirliği ile kabul edilmiştir.

Yrd. Doç. Dr. Ali Serdar ARIKAN	Doç. Dr. Mehmet BEKTAŞOĞLU	Yrd. Doç. Dr. Metin YAMAN
....	....	....
Jüri Başkanı	**Üye**	**Üye**

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım boyunca yardımlarını benden esirgemeyen ve her zaman yol gösteren değerli hocam Yrd. Doç. Dr. Ali Serdar ARIKAN' çok teşekkür ederim

Zorlu geçen üç yıl boyunca sabırları ile bana destek olan, her zaman yanımda ve yardımcı olan canım aileme teşekkürler.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

ψ	: Dalga fonksiyonu
q	: Deformasyon parametresi
k	: Yay sabiti
V	: Potansiyel enerji fonksiyonu
$\mathcal{H}$	: Hamiltonyen operatörü
$\boldsymbol{p}_x$	: Momentum operatörü
$\boldsymbol{x}$	: Konum operatörü
m	: Kütle
F	: Kuvvet
ω	: Açısal frekans
$\hbar$	: Planck sabiti
a	: Yok etme operatörü
a^+	: Yaratma operatörü
$\{\ \}$	: Poisson parantezi
N	: Sayı operatörü
δ_{ij}	: Kronecker delta fonksiyonu
R	: R matrisi
$\dot{\otimes}$	: Matris tensor çarpımı
Δ	: ko-çarpım
$\in$	: ko-birim
S	: Antipod
c_i	: Fermiyonik yok etme operatörü
c_i^+	: Fermiyonik yaratma operatörü

$SU(n)$	: Özel birimsel dönüşüm grubu
$O(n)$	: Dik dönüşüm grubu
$GL(n,R)$	: Genel lineer grup
$SO(n)$	: Özel dik dönüşüm matrisi

ŞEKİLLER LİSTESİ

ÖZET

Anahtar kelimeler: Newton Salınıcısı, Deforme Fermiyon Cebiri, Simetri, Kuantum Matris Grupları, R-Matrisi

Bu çalışmada d boyutlu q deforme fermiyonik Newton Salınıcı sistemini göz önüne aldık ve bu sistemin inhomojen kuantum simetri grubunun varlığını inceledik. d=2 için kuantum matris grubunun elemanları arasındaki sıra değiştirme bağıntıları hakkındaki bilgiyi içeren R matrisini bulduk.

THE INHOMOGENEOUS QUANTUM INVARIANCE GROUP OF THE Q-DEFORMED FERMIONIC NEWTON OSCILLATOR

SUMMARY

Key Words: Newton Oscillator, Deformed Fermion Algebra, Symmetry, Quantum Matrix Groups, R-Matrix

In this study we consider d dimensional q deformed fermionic Newton oscillator system and investigate the existence of the inhomogeneous quantum symmetry group of this system. For d=2 case, we find the R matrix which includes all information about the commutation relations among the elements of quantum matrix group.

BÖLÜM 1. GİRİŞ

Mekanik, fiziğin en eski dalıdır. Makroskobik ölçekteki cisimlerin, yani gündelik hayatımızda karşılaştığımız boyutlardaki cisimlerin konumlarının zamanla değişmesi veya durum ve yapılarının bozulmadan kalabilmesiyle ilgili problemleri inceler. Newton yasaları adını alan üç temel yasa üzerine kurulan mekanik, 19.yy'da başta d'Alembert, Lagrange, Hamilton olmak üzere pek çok araştırmacının katkılarıyla nerdeyse kusursuz bir sistematik yapıya kavuşturulmuştur. Newton yasaları üzerine kurulan bütün yapı, bugün Klasik Mekanik veya Newton mekaniği olarak isimlendirilmektedir [1].

Klasik mekanik cisimlerin hareketlerini ancak cisimlerin boyutlarının ve süratlerinin belirli sınırlar içerisinde kalması durumunda, deney ve gözlem sonuçlarıyla tam olarak uyuşan bir biçimde açıklayabilir. Sınırların dışına çıkıldığında, verdiği sonuçlar deney ve gözlem sonuçlarıyla uyuşmaz. Bu sebeple de söz konusu sınırlarda Klasik Mekanik Teori yerini Özel Rölativite, Genel Rölativite, Kuantum Mekaniği veya Kuantum Alan Teorilerine bırakır.

Kuantum mekaniği, atom altı düzeydeki sistemlerin davranışlarının açıklanabilmesini sağlar. Işığın dalga ve tanecik modellerinin her ikisini de gerekli görür ve bu modelleri birbirinin tamamlayıcısı olarak ele alır.

Klasik fizikte dalgalar elektromanyetik dalgalar ve mekanik dalgalar olmak üzere iki ana grupta toplanır. De Broglie dalgaları ise karakter olarak her iki dalga türünden de farklı üçüncü bir dalga grubu oluşturmaktadır. Bu dalga türüne Schrödinger dalgası veya madde dalgası denilir [2].

De Broglie dalgaları bir olasılık dalgasıdır. Yani parçacığın belirli bir t anında x konumunda bulunma olasılığı hakkında bilgi verir. Bu tür dalgalar $\psi(x,t)$ fonksiyonu ile gösterilir ve bu fonksiyonun fiziksel anlamı yoktur. Yani $y(x,t)$ gibi bir uzunluk değildir. Ancak $|\psi(x,t)|^2$'nin fiziksel anlamı vardır ve parçacığın t anında x konumunda bulunma olasılığını ifade eder [2].

Ayırt edilemez iki parçacıklı bir sistem için $|\psi(q_1,q_2)|^2$ifadesi, parçacıklarınq_1'de ve q_2'de bulunma olasılığını verir. Parçacıkların yeniden sıralanması durumunda yani q' ların değiş tokuşu durumunda bu olasılık $|\psi(q_2,q_1)|^2$ olur. Parçacıklar ayırt edilemez olduğundan,

$$|\psi\ (q_1,q_2)|^2 = |\psi\ (q_2,q_1)|^2 \tag{1.1}$$

eşitliği yazılabilir. Bu eşitlik,

$$\psi(q_1,q_2) = \mp\psi\ (q_2,q_1) \tag{1.2}$$

ifadesini yazabilmeyi mümkün kılar.

Parçacıkların değiş tokuşu dalga fonksiyonunun işaretinde değişmeye neden olmuyorsa dalga fonksiyonu simetriktir ve bu parçacıklar bozon olarak isimlendirilir. Eğer parçacıkların yer değiştirmesi işaretinin değişmesi ile sonuçlanırsa dalga fonksiyonu antisimetriktir denilir ve böyle davranan parçacıklar fermiyonlar olarak adlandırılır [3]. Bilinen tüm fermiyonlar buçuklu spine sahiptirler.

Dalga fonksiyonunun antisimetrisi fermiyon sistemlerinin bazı önemli özelliklerini görmemizi sağlar. Öyle ki fermiyonların antisimetrik dalga fonksiyonuna sahip olmaları sebebiyle herhangi bir enerji durumunda spinleri de aynı olacak şekilde iki fermiyon bulmak mümkün değildir. Bu özellik ilk defa 1925 yılında elementlerin periyodik cetvelini açıklamak için Pauli tarafından ortaya atılmış ve bu sebeple de Pauli dışarlama ilkesi olarak isimlendirilmiştir. Bu ilkeye göre herhangi bir enerji durumunda spin yönelimleri zıt olacak şekilde en fazla iki elektron bulunabilir. Bütün elementlerin elektronik yerleşimleri bu ilkeye göre oluşmaktadır. Spini s olan bir fermiyon için $2s+1$ farklı spin yönelimi mümkündür. Bu durumda, aynı bir enerji düzeyinde spin yönelimleri farklı olacak şekilde en fazla $2s+1$ tane fermiyon bulunabilir. Yani aynı enerji durumunda bulunan iki fermiyonun en az birer kuantum sayıları farklı olmalıdır.

Bozon sistemleri için Pauli dışarlama ilkesinin geçerli olmadığı açıktır. Herhangi bir enerji durumunda keyfi sayıda bozon bulunabilir [4].

Gerek klasik mekanik, gerekse kuantum mekaniğinde harmonik salınıcı problemi önemli bir yere sahiptir. Moleküllerde, kristal yapılarda tek tek atomların denge konumu civarındaki titreşim hareketlerinin ve bir kovuk içindeki elektromanyetik alan salınımlarının kuantum mekaniksel incelemelerinde harmonik salınıcı önemli rol oynar [5].

Harmonik salınıcı hareketinde denge konumundan çıkarılan parçacığın denge konumuna geri çağırıcı kuvveti, denge konumundan ayrılan parçacığın denge konumundan ayrılma miktarı ile doğru orantılıdır. Yani söz konusu kuvvet; k yay sabiti, x denge konumundan ayrılma miktarını göstermek üzere,

$$F = -kx \tag{1.3}$$

eşitliği ile ifade edilebilir. Kuvvetin $(-)$ eksi işarete sahip olması, söz konusu kuvvetin geri çağırıcı kuvvet olmasından kaynaklanmaktadır. Parçacığa etkiyen kuvvet, potansiyel enerjinin negatif gradyanı ile

$$F = -\frac{\partial V}{\partial x} = -kx \tag{1.4}$$

şeklinde gösterilebilir. Bu ifadenin integrali alınarak potansiyel enerji fonksiyonu için,

$$V = \frac{1}{2}kx^2 \tag{1.5}$$

eşitliği elde edilebilir.

Kuantum harmonik salınıcı problemi için sistemin Hamiltonyeni, $\boldsymbol{p}_x$ momentum, $\boldsymbol{x}$ konum işlemcisi olmak üzere,

$$\mathcal{H} = \frac{\boldsymbol{p}_x^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\boldsymbol{x}^2 \tag{1.6}$$

eşitliği ile ifade edilebilir. Bu sistemin çarpanlara ayırma metodu olarak bilinen bir metod çerçevesinde incelenmesi mümkündür. Bu metod hem sade bir matematik içermesi hem de alan teorisi ile ilgili dikkate değer yaklaşımlara ufuk açması bakımından önemlidir[2,6]. Kuantum harmonik salınıcı problemi için, Hamiltonyen operatörü,

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{m\omega^2}{2}}\left(\boldsymbol{x} - \frac{i\boldsymbol{p}_x}{m\omega}\right)\sqrt{\frac{m\omega^2}{2}}\left(\boldsymbol{x} + \frac{i\boldsymbol{p}_x}{m\omega}\right) + \sqrt{\frac{m\omega^2}{2}}\left(\boldsymbol{x} + \frac{i\boldsymbol{p}_x}{m\omega}\right)\sqrt{\frac{m\omega^2}{2}}\left(\boldsymbol{x} - \frac{i\boldsymbol{p}_x}{m\omega}\right)\right) \tag{1.7}$$

şeklinde yeniden yazıldığında, $\boldsymbol{x}$ ve $\boldsymbol{p}_x$ işlemcilerinden oluşan hermitik olmayan bir a operatörünü

$$a = \frac{\alpha}{\sqrt{2}}\left(\boldsymbol{x} + i\frac{\boldsymbol{p}_x}{\hbar\alpha^2}\right) \tag{1.8}$$

eşitliği ile tanımlamak mümkün olur. Bu operatörün hermitik eşleniği,

$$a^+ = \frac{\alpha}{\sqrt{2}}\left(\boldsymbol{x} - i\frac{\boldsymbol{p}_x}{\hbar\alpha^2}\right) \tag{1.9}$$

eşitliği ile ifade edilebilirken [5], α sabiti,

$$\alpha = \left(\frac{\mathrm{m}\omega}{\hbar}\right)^{1/2} \tag{1.10}$$

şeklinde yazılabilir. a ve a^+ işlemcilerinin sıra değiştirme bağıntıları

$$[\boldsymbol{p}_x, \boldsymbol{x}] = -i\hbar \tag{1.11}$$

eşitliği kullanılarak

$$[\,a, a^+] = 1 \tag{1.12}$$

şeklinde bulunur. Bu eşitlikteki a^{+} ve a işlemcileri sırasıyla yaratma ve yok etme işlemcileri olarak da bilinir. Bu cebirsel ifade bozon olarak isimlendirilen parçacıkların cebirsel yapısı hakkında bilgi vermesi açısından da oldukça önemlidir.

$$a^2 = 0 \tag{1.13}$$

eşitliği ile beraber (1.12) eşitliğindeki çıkarma işlemi yerine toplama işlemi göz önüne alındığında, fermiyon olarak isimlendirilen parçacıkları cebirsel olarak ifade eden eşitlikleri elde etmek mümkün olur. (1.13) eşitliğinin hermitik eşleniğinin, Pauli dışarlama ilkesinin matematiksel bir ifadesi olduğunu görmek hiç de zor değildir.

Çalışmamızın ikinci bölümünde, deforme parçacık cebirlerinden q-deforme Newton salınıcısı olarak bilinen cebirsel sistem hakkında özet bir bilgi verildi.

Göz önüne aldığımız problemin d-boyutlu q-deforme fermiyonik Newton salınıcısının inhomojen simetrisinin varlığının araştırılması olması sebebiyle de, bu araştırmanın hangi yaklaşımlar çerçevesinde gerçekleştirildiği hakkında bilgi verebilmek için; üçüncü bölümde, simetri kavramı, simetrinin matematiği ve kuantum matris grupları ile ilgili özet bir bilgi verilmiştir.

Çalışmanın dördüncü bölümünde de d-boyutlu q-deforme fermiyonik Newton salınıcısı sisteminin inhomojen kuantum simetrisinin varlığının nasıl incelendiği, detaylı bir şekilde ortaya konulmuştur.

BÖLÜM 2. Q DEFORME NEWTON SALINICISI

Bu bölümde Newton salınıcısı olarak isimlendirilen sistemin, bu isimlendirmenin yapılmasına sebep olan özellikleri hakkında bilgi verilecektir. Kuantum harmonik salınıcı sisteminin çözümünün nasıl elde edildiğine bakıldığında, bu çözümün elde edilişinde sıklıkla iki yaklaşım ile karşılaşılır. Bunlardan birincisi, sistemi tanımlayan diferansiyel denklemin kuvvet serisi yöntemi ile çözülmesidir. Diğeri ise, sistemin Hamiltonyenini merdiven operatörleri olarak isimlendirilen operatörler yardımı ile çarpanlara ayırarak elde edilen çözüm metodudur [7].

Newton salınıcısı olarak isimlendirilen sistemde de harmonik salınıcı sistemini tanımlayan

$$V(q) = \frac{1}{2}kq^2 \tag{2.1}$$

potansiyel fonksiyonu için Newton'un ikinci yasasını kullanılarak,

$$F = m\ddot{q} = -\frac{\partial V}{\partial q} = -kq \tag{2.2}$$

eşitliği yazılmış ve kuantizasyon işlemine sistemin Hamiltonyeni yerine Newton denkleminden hareketle başlanmıştır [8,9,10]. (2.2) eşitliğinde q konum, m kütle, k'da yay sabitini ifade etmektedir. İleride işlemlerde kolaylık sağlaması açısından,

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{2.3}$$

eşitliği ile tanımlanan açısal frekans, $\omega = 1$ seçilirse, (2.1) eşitliğinde ifade edilen potansiyel enerjiye sahip klasik bir sistem için Newton denklemi,

$$\ddot{q} = -q \tag{2.4}$$

şeklinde yeniden yazılabilir.

Hamilton mekaniğinden bilinmektedir ki bir sistemin dinamiğini Newton denklemlerinin yanı sıra,

$$\dot{q}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \tag{2.5}$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \tag{2.6}$$

eşitlikleri ile ifade edilen Hamilton denklemleri ile de ifade etmek mümkündür. Bu eşitliklerde q_i genelleştirilmiş koordinatları, p_i genelleştirilmiş momentumu, $\mathcal{H}$ 'de Hamilton fonksiyonunu temsil etmek için kullanılmıştır [11].

q_i genelleştirilmiş koordinatlarına, p_i genelleştirilmiş momentumlarına ve t zamanına bağlı olan bir $\mathcal{F}(q,p,t)$ fonksiyonun zamana göre türevinin,

$$\frac{d\mathcal{F}}{dt} = \sum_i \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial p_i}\dot{p}_i\right) + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} \tag{2.7}$$

eşitliği ışığında hesaplanabileceği bilinmektedir. Bu eşitlikteki $\dot{q}_i$ ve $\dot{p}_i$ ifadeleri için Hamilton denklemleri kullanıldığında, eşitlik (2.7)'yi

$$\frac{d\mathcal{F}}{dt} = \sum_i \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial q_i}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial p_i}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i}\right) + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} \tag{2.8}$$

şeklinde yeniden yazmak mümkün olur. Bu eşitlikteki toplam ifadesi,

$$\sum_i \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial q_i}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial p_i}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i}\right) \equiv \{\mathrm{F}, \mathcal{H}\} \tag{2.9}$$

eşitliği ile tanımlanan ve ilk defa Poisson tarafından kullanılan bir kısaltma olduğu için de Poisson parantezi olarak bilinen bir ifadedir.

Buraya kadar göz önüne alınan bilgiler ışığında, açısal frekansı $\omega = 1$ olan birim kütleli bir harmonik salınıcı sistemi için Newton denklemini, Poisson parantezlerini kullanarak,

$$\ddot{q} = \{\mathcal{H}, \{\mathcal{H}, q\}\} = -q \tag{2.10}$$

eşitliği ile ifade etmek mümkündür. Newton denkleminin Poisson parantezleri ile ifade edilmesi,

$$[A, B] = i\hbar\{A, B\} \tag{2.11}$$

eşitliği çerçevesinde sistemin kuantizasyon işlemini gerçekleştirmeyi mümkün kılar [12]. Eşitlik (2.11) ışığında $\hbar = 1$ için,

$$\{\mathcal{H}, q\} = -i[H, Q] \tag{2.12}$$

$$\{\mathcal{H}, \{\mathcal{H}, q\}\} = -[H, [H, Q]] \tag{2.13}$$

eşitlikleri yazılabileceğinden, eşitlik (2.10)'da Poisson parantezleri ile ifade edilen harmonik salınıcı sistemi için Newton denkleminin kuantizasyon işlemi,

$$[H, [H, Q]] = Q \tag{2.14}$$

şeklinde gerçekleşir. (2.12), (2.13) ve (2.14) eşitliklerindeki H, Q gösterimleri sırasıyla Hamiltonyen ve konum işlemcilerini temsil etmek için kullanılmıştır. P momentum işlemcisinin,

$$P \equiv i[H, Q] \tag{2.15}$$

eşitliği ile tanımlanması durumunda, eşitlik (2.14)'ü,

$$[H, P] = iQ \tag{2.16}$$

şeklinde yeniden yazmak mümkündür [10].

f, g, h ile gösterilen üç fonksiyonun Poisson parantezi için,

$$\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0 \tag{2.17}$$

eşitliği ile ifade edilen bir özdeşliğin sağlandığı bilinmektedir [1]. Bu özdeşlik $\mathcal{H}, q$ ve p klasik nicelikleri için göz önüne alındığında, bu klasik niceliklere karşı gelen işlemcilerin Jacobi özdeşliği [13] olarak bilinen,

$$[H, [Q, P]] + [Q, [P, H]] + [P, [H, Q]] = 0 \tag{2.18}$$

eşitliğini sağlayacağını söylemek mümkün olur. Eşitlik (2.16) ışığında,

$$[Q, [P, H]] = 0 \tag{2.19}$$

eşitliğini görmek hiç de zor değildir. Öte yandan (2.15) tanımı ışığında,

$$[P, [H, Q]] = 0 \tag{2.20}$$

olacağından, (2.18) eşitliği ile ifade edilen Jacobi özdeşliğinde toplanan her bir terimin ayrı ayrı sıfıra eşit olacağını söylemek mümkündür. Yani,

$$[H, [Q, P]] = 0 \tag{2.21}$$

eşitliği sağlanır. H ve $[Q,P]$ arasındaki sıra değiştirme bağıntısının eşitlik (2.21)'i sağlaması; Q ile P arasındaki sıra değiştirme bağıntısının,

$$[Q,P] = if(H) \tag{2.22}$$

şeklinde ifade edilebilmesinin mümkün olduğu sonucunu doğurur [10,14].

Daha öncede belirttiğimiz gibi, kuantum harmonik salınıcı probleminin çözümü, sistemin Hamiltonyeni merdiven operatörleri olarak isimlendirilen operatörler yardımı ile çarpanlara ayrılarak da bulunabilir. $\omega = 1$, $\hbar = 1$ birim sisteminde çalışılan birim kütleli bir harmonik salınıcı sistemi için söz konusu merdiven işlemcilerinin,

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}}(Q + iP) \tag{2.23}$$

$$A^{+} = \frac{1}{\sqrt{2}}(Q - iP) \tag{2.24}$$

eşitlikleri ile ifade edileceği bilinmektedir [14]. Bu eşitlikler ile ifade edilen merdiven işlemcileri arasındaki sıra değiştirme bağıntısı, eşitlik (2.22)'yi kullanarak,

$$[A, A^{+}] = f(H) \tag{2.25}$$

şeklinde yazılabilir.

Öte yandan H ile $A^{+}A$ arasındaki sıra değiştirme bağıntısına bakılacak olursa,

$$[H, A^{+}A] = [H, Q^{2}] + [H, P^{2}] + i\big[H, [Q,P]\big] \tag{2.26}$$

eşitliği elde edilebilir. Bu ifadenin sağ yanındaki son terimin sıfıra eşit olduğu denklem (2.21)'de ifade edilmişti. Bu durumda (2.26) ifadesi,

$$[H, A^{+}A] = [H, Q^2] + [H, P^2] \tag{2.27}$$

şeklinde yeniden yazılabilir. H ile Q^2 işlemcileri arasındaki sıra değiştirme bağıntısı,

$$[H, Q^2] = Q[H, Q] + [H, Q]Q \tag{2.28}$$

denklem (2.15)'i kullanarak,

$$[H, Q^2] = -iQP - iPQ \tag{2.29}$$

şeklinde yazılabilirken; H ile P^2 işlemcileri arasındaki sıra değiştirme bağıntısı,

$$[H, P^2] = P[H, P] + [H, P]P \tag{2.30}$$

denklem (2.16)'yı kullanarak,

$$[H, P^2] = iPQ + iQP \tag{2.31}$$

şeklinde yazılabilir. Bu durumda,

$$[H, Q^2] + [H, P^2] = 0 \tag{2.32}$$

ifadesinin sağlandığını söylemek hiç de zor olmayacaktır. Böylece H işlemcisinin $A^{+}A$ işlemcisi ile sıra değiştirme özelliğine sahip olduğu sonucuna da ulaşılabilir. Yani,

$$A^{+}A = g(H) \tag{2.33}$$

eşitliğini yazmak mümkündür. Eğer bu $g(H)$ fonksiyonu analitik ise,

$$AA^{+}A = Ag(H) = g(H+1)A \tag{2.34}$$

eşitliği yazılabileceğinden, eşitlik (2.25), (2.33) ve (2.34) ışığında,

$$f(H) = g(H+1) - g(H) \tag{2.35}$$

fark denklemi elde edilir [8,14].

(2.25) denkleminin $f(H) = 1$ için standart kuantum harmonik salınıcı cebirini verdiğini akılda tutarak,

$$H\ |0\rangle = h_0\ |0\rangle \tag{2.36}$$

$$\mathrm{A}\ |0\rangle = 0 \tag{2.37}$$

eşitliklerini sağlayan bir taban durumunun varlığının,

$$N = H - h_0\mathbb{1} \tag{2.38}$$

şeklinde bir sayı işlemcisini tanımlamayı mümkün kıldığını da yine standart kuantum harmonik salınıcı ile ilgili yapılan çalışmalar çerçevesinde fark etmek hiç de zor değildir [10]. Bu durumda (2.35) eşitliğinde söz konusu edilen fonksiyonlar H yerine N cinsinden,

$$f(N + h_0) = g(N + h_0 + 1) - g(N + h_0) \tag{2.39}$$

şeklinde yazılabilir. Bu ifadeyi daha sade bir şekilde,

$$f^{'}(N) = g^{'}(N+1) - g^{'}(N) \tag{2.40}$$

şeklinde de yazmak mümkündür [10].

Bir boyutlu sistemler göz önüne alındığında; (2.40) eşitliği, sistemlerin birbirlerinden ayrılmasına yarayacak nitelikte bir sınıflandırmayı mümkün kılmamaktadır. Çünkü göz önüne alınan birçok sistem söz konusu fark denklemini sağlamaktadır [8,10]. Ancak Newton denkleminin sahip olduğu birimsel simetriye sahip çok boyutlu sistemler göz önüne alındığında bu fark denklemi istenilen tarzda bir sınıflandırmayı yapabilmeyi mümkün kılmaktadır. Yani sınıflandırmayı sonlandırmak için fark denklemi yeterli olmamış, sistemin sahip olacağı simetri de bu konuda önemli bir etken olmuştur.

Bu çerçevede gerçekleştirilen çalışmalar ışığında elde edilen [14,15] ve

$$a_i a_j^+ - q a_j^+ a_i = q^N \delta_{ij} \qquad i,j = 1,2,\ldots\ldots\ldots,d \qquad (2.41)$$

$$a_i a_j - a_j a_i = 0 \qquad i,j = 1,2,\ldots\ldots\ldots,d \qquad (2.42)$$

$$a_i N = (N+1) a_i \qquad i = 1,2,\ldots\ldots\ldots,d \qquad (2.43)$$

eşitlikleri ile ifade edilen cebirsel yapı, q-deforme Bosonik Newton salınıcısı olarak isimlendirilmiştir. Bu cebirsel yapıyı H Hermitsel bir işlemci ve q pozitif reel bir parametre olmak üzere,

$$a_i a_j^+ - q a_j^+ a_i = H \delta_{ij} \qquad i,j = 1,2,\ldots\ldots\ldots,d \qquad (2.44)$$

$$a_i a_j - a_j a_i = 0 \qquad i,j = 1,2,\ldots\ldots\ldots,d \qquad (2.45)$$

$$a_i H = q H a_i \qquad i = 1,2,\ldots\ldots\ldots,d \qquad (2.46)$$

şeklinde de yazmak mümkündür. Burada δ_{ij} Kronecker delta sembolüdür. $i = 1$ için söz konusu cebirsel yapı,

$$a a^+ - q a^+ a = H \qquad (2.47)$$

$$a H = q H a \qquad (2.48)$$

şeklinde yeniden yazılabilir. Deformasyon parametresi q'nun bire eşit olması durumunda, Hermitsel H işlemcisinin de 1 olması ile; göz önüne alınan cebirsel yapının standart kuantum harmonik salınıcı cebirini vereceğini görmek mümkündür.

(2.41), (2.42) ve (2.43) eşitlikleri yardımı ile ifade edilen deforme bozon cebirinin fermiyonik karşılığı; c_i ve c_i^+ sırasıyla fermiyonik yok etme ve yaratma işlemcilerini temsil etmek üzere,

$$c_i c_j^+ + q c_j^+ c_i = q^N \delta_{ij} \qquad i,j = 1,2,\dots\dots\dots,d \tag{2.49}$$

$$c_i c_j + c_j c_i = 0 \qquad i,j = 1,2,\dots\dots\dots,d \tag{2.50}$$

$$c_i N = (N+1) c_i \qquad i = 1,2,\dots\dots\dots,d \tag{2.51}$$

eşitlikleri ile ifade edilebilir. Bu sistem literatürde d-boyutlu fermiyonik Newton salınıcısı olarak isimlendirilmektedir [10,14,16]. (2.44) ile (2.46) eşitliklerinde olduğu gibi yukarıdaki fermiyonik sistemde uygun bir ölçeklendirme ile

$$c_i c_j^+ + q^2 c_j^+ c_i = H \delta_{ij} \qquad i,j = 1,2,\dots\dots\dots,d \tag{2.52}$$

$$c_i c_j + c_j c_i = 0 \qquad i,j = 1,2,\dots\dots\dots,d \tag{2.53}$$

$$c_i H = q^2 H c_i \qquad i = 1,2,\dots\dots.\dots,d \tag{2.54}$$

şeklinde yeniden yazılabilir. Öyle ki bu eşitliklerle tanımlanan d-boyutlu sistemin, $d = 2$ için matris temsili,

$$\mathrm{c}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{q} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.55}$$

$$c_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -q \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.56}$$

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q^4 \end{pmatrix} \tag{2.57}$$

ifade edilir.

BÖLÜM 3. SİMETRİ VE KUANTUM MATRİS GRUPLARI

Simetri gerek günlük hayatımızda, gerekse kimya, biyoloji, fizyoloji ve astronomi olmak üzere bilimlerin tümünde sıklıkla karşımıza çıkan bir kavramdır.

Fizik bilimi açısından simetri kavramı; göz önüne alınan bir değişiklik ışığında bir sistemin bu değişikliklerden etkilenmeden önceki durumunda kalması olarak ifade edilebilir. Sistemde yapılan bu değişikliğe simetri işlemi ya da simetri transformasyonu da denir. Buna göre simetri için, bir nesne ya da sistemin bir transformasyon karşısındaki değişmezliğidir de denilebilir. Değişmezlik, sistemin biçiminde, görünüşünde, bileşiminde, düzenlenmesinde ya da diğer başka özelliklerinde aynılık ya da sabitliktir [17].

Yirminci yüzyıldan önce fizikçiler, simetriyi daha çok, özel bir fizik probleminin çözümünü kolaylaştıran ve kendisini simetrik bir düzenleniş olarak ortaya koyan bugünkü öneminden uzak bir olay olarak görmekteydiler. Ancak ilerleyen yıllarda, simetri kavramının oldukça önemli kavramlarla ilişkileri ortaya konmuştur. Temel kuvvetlerin birleştirilmesi, ayar simetrisi denilen bir kavram yardımı ile açıklanmıştır. Özellikle Noether ortaya koyduğu teori çerçevesinde simetri ile korunum yasası kavramlarını birleştirerek; simetri ve fizik arasındaki ilişkiyi matematiksel bir dil ile ortaya koymuştur. Teorem fiziğin karmaşık dinamikleriyle simetriyi birleştirerek fizik ve matematik arasına bir köprü inşa etmiştir. Uzayın sürekli bir öteleme simetrisine sahip olması fizik yasalarının uzayın her noktasında aynı olduğu gerçeğini tekrarlamaktadır ki buna da korunum denilmektedir. Doğada her bir simetri bir korunumlu niceliği verirken, her korunum yasası da bir simetriyi belirtmektedir [17].

Fizik yasalarının uzaysal ötelemeler karşısında değişmez olduğu kabul edilen bir gerçektir. Bu değişmezlik cismin öteleme hareketine karşı gösterdiği simetridir. Herhangi bir cismi uzayda ötelediğimizde onu meydana getiren madde atomları ve atomların moleküler olarak düzenlenişi hiçbir değişiklik göstermez. Cismin rengi, uzunluğu ve kütlesi de değişmez. Uzayın öteleme simetrisi de lineer momentumun korunduğunu göstermektedir. Aynı zamanda zamanın ötelenme simetrisi enerjinin korunumunu, dönme simetrisi ise açısal momentumun korunumunu gündeme getirir [17].

Uzay da tıpkı üç boyutlu kusursuz bir kürenin sahip olduğu gibi, tam bir döndürülme simetrisine sahiptir. Bir küre, merkezinden geçen herhangi bir eksen etrafında döndürülebilir. Döndürmeden sonra kürenin görüntüsünde değişiklik olmaz. Küre için bu döndürme işlemi sonsuz sayıda olabilir. Bu nedenle kürenin sahip olduğu simetri süreklidir. Bunun aksine sınırlı dönme açıları ile simetrik yapılarını koruyan sistemlere de süreksiz sistemler denilmektedir [17]. Burada söz konusu edilen simetriler, matrisler kullanılarak da ifade edilebilir. Ancak simetrinin matrisler kullanılarak nasıl ifade edildiğine bir örnek vermeden önce grup kavramından kısaca bahsetmek uygun olacaktır.

Grup teorisi, simetrinin matematiksel bir dil ile ifade edilmesine yardımcı olması açısından fizikte oldukça önemli bir yere sahiptir. Göz önüne alınan bir kümenin elemanlarının tanımlı bir işlem altında grup oluşturduğunu söyleyebilmek için söz konusu elemanların göz önüne alınan işlem ışığında kapalılık ve birleşme özelliğine sahip olması gerekir. Bu kümenin elemanlarından bir tanesinin birim eleman olması ve bu kümedeki her elemanın tersinin varlığı da, söz konusu kümeye, tanımlı işlem ışığında, grup diyebilmek için bir zorunluluktur [18,19].

$a, b, c, d \in R$ olmak üzere $2x2$'lik bir kare matrisin,

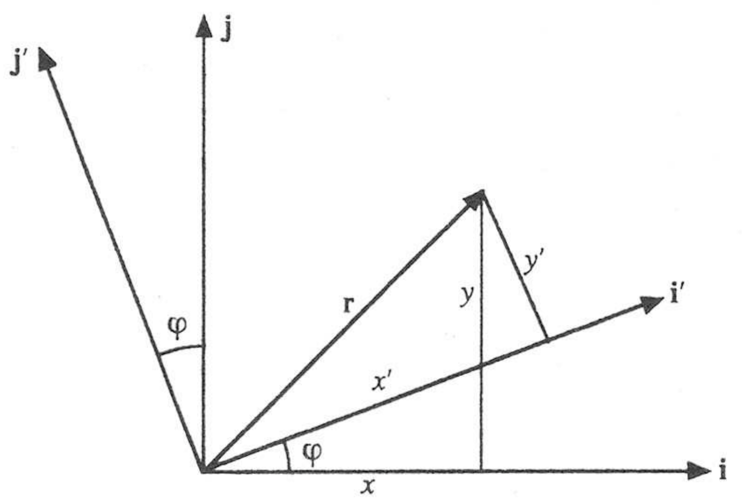
$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \tag{3.1}$$

eşitliği ile ifade edilebileceği bilinmektedir. Bu matrisin tersinin var olması durumunda; yani,

$$\det A \neq 0 \tag{3.2}$$

olması halinde, elemanları A matrisi ile ifade edilen bir kümenin matris çarpımı altında bir grup oluşturacağı söylenebilir. Bu grup literatürde Genel Lineer Grup olarak isimlendirilir ve matrislerin $2x2$'lik kare matrisler olması sebebiyle de $GL(2)$ kısaltması ile gösterilir.

Herhangi bir vektör, bir noktanın koordinatları vasıtasıyla temsil edilir. Noktaların yerlerini tanımlamada kullanılan koordinat çerçevesi ise tamamen keyfidir. Ancak vektör bileşenlerinin bir çerçeveden diğerine dönüştürülmesi mümkündür. i', j' sistemi aşağıdaki şekildeki gibi i, j sistemine göre saat yönünün tersi yönde φ açısı kadar döndürülmüş olsun.



Şekil 3.1. Bir $\vec{r}$ vektörünün bileşenlerinin xy ve $x'y'$ koordinat sisteminde gösterilmesi

$\vec{r}$ vektörünün i,j sistemindeki yani, xy-koordinat sistemindeki bileşenleri (x, y); i', j' sistemindeki yani $x'y'$-koordinat sistemindeki bileşenleri (x', y') olursa, bu bileşenler arasındaki ilişki,

$$x' = \cos\varphi\, x + \sin\varphi\, y \tag{3.3}$$

$$y' = -\sin\varphi\, x + \cos\varphi\, y \tag{3.4}$$

eşitlikleri ile ifade edileceği gibi

$$M = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \tag{3.5}$$

dönüşüm matrisi yardımı ile

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{3.6}$$

eşitliği ile de ifade edilebilir. Söz konusu dönüşüm, vektörün bileşenlerini değiştirirken, vektörün boyunu değişmez bırakmaktadır. (3.6) eşitliğindeki M matrisi,

$$MM^T = M^T M = \mathbb{1} \tag{3.7}$$

eşitliğini sağladığından ve bu matrisin determinantı bire eşit olduğundan Özel Dik Dönüşüm matrisi olarak isimlendirilir ve bu matrisin ait olduğu grup $SO(2)$ ile gösterilir. Bu gruptaki matrislerin elemanları $0 - 2\pi$ arasında değişen sürekli bir ϕ parametresine bağlıdır ve bu ϕ parametresine göre türev almak mümkündür. Sahip olunan bu özellikleri vurgulamak için; bu tip gruplar, Lie grupları olarak da isimlendirilir [19].

Şimdiye kadar söz konusu edilen matris gruplarındaki matrislerin elemanları sıra değiştirme özelliğine sahipti. Ancak sıra değiştirme özelliğine sahip olmayan elemanlardan oluşan matris gruplarından da bahsetmek mümkündür. Bu matris grupları sahip oldukları bu özellik çerçevesinde kuantum matris grubu olarak isimlendirilirler. Mesela (3.1) eşitliğindeki A matrisinin elemanlarının,

$$ab = qba \tag{3.8}$$

$$ac = qca \tag{3.9}$$

$$bc = cb \tag{3.10}$$

$$bd = qdb \tag{3.11}$$

$$cd = qdc \tag{3.12}$$

$$ad - da = (q - q^{-1})bc \tag{3.13}$$

eşitlikleri ile ifade edilen özel bir cebirsel yapıyı sağlaması ile $GL_q(2)$ kuantum matris grubu elde edilir [20,21,22]. Eşitlik (3.13) yeniden düzenlenerek, A matrisinin q-determinantı,

$$det_q A = ad - qbc = da - q^{-1}bc \tag{3.14}$$

şeklinde elde edilebilir. Dikkat edilirse $q = 1$ için bütün eşitlikler $GL(2)$ matris grubunun elemanları için geçerli olan bağıntıları verir. Burada dikkat edilmesi gereken bir diğer önemli nokta A matrisinin elemanlarının sağladığı cebirsel yapının değişmeli olmayan Hopf cebiri yapısında olmasıdır [23]. (3.8) – (3.13) eşitlikleri ile ifade edilen cebirsel yapının bicebir yapısına sahip olduğu Faddev ve Takhtajan'ın çalışmalarında [24,25] göz önüne aldıkları,

$$\Delta(a) = a\otimes a + b\otimes c \tag{3.15}$$
$$\Delta(b) = a\otimes b + b\otimes d \tag{3.16}$$
$$\Delta(c) = c\otimes a + d\otimes c \tag{3.17}$$
$$\Delta(d) = c\otimes b + d\otimes d \tag{3.18}$$
$$\Delta(\mathbb{1}) = \mathbb{1}\otimes\mathbb{1} \tag{3.19}$$

ko-çarpımları ve

$$\in (a) = \in (d) = \in (1) = 1 \tag{3.20}$$
$$\in (b) = \in (c) = 0 \tag{3.21}$$

ko-birimleri çerçevesinde görülebilir. Öyle ki, bu tanımlar ışığında,

$$(\Delta\otimes id)\Delta = (id\otimes\Delta)\Delta \tag{3.22}$$
$$(id\otimes \in)\otimes\Delta = (\in \otimes id)\otimes\Delta = id \tag{3.23}$$

eşitlikleri sağlanır. Söz konusu ko-çarpım ve ko-birimler A matrisi göz önüne alındığında,

$$\Delta(A) = A\dot{\otimes} A \tag{3.24}$$
$$\in (A) = \mathbb{1} \tag{3.25}$$

eşitlikleri ile ifade edilebilir. (3.24) eşitliğindeki $\dot{\otimes}$ notasyonu matris tensör çarpımını göstermektedir. A matrisinin elemanları arasındaki cebirsel işlemler,

$$A_1 = A \otimes \mathbb{1} \tag{3.26}$$
$$A_2 = \mathbb{1} \otimes A \tag{3.27}$$

olmak üzere,

$$RA_1A_2 = A_2A_1R \tag{3.28}$$

eşitliğini sağlayan,

$$R = \begin{pmatrix} q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & q - q^{-1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q \end{pmatrix} \tag{3.29}$$

matrisi ile de ifade edilebilir [22,26]. Burada (3.8) – (3.13) eşitlikleri ile ifade edilen cebirsel yapı,

$$m(id \otimes S)\Delta = m(S \otimes id)\Delta \tag{3.30}$$

eşitliğini sağlayacak şekilde tanımlanan ve

$$S(A) = A^{-1} \tag{3.31}$$

eşitliği ile ifade edilen antipod'un varlığı ile Hopf cebiri yapısındadır.

BÖLÜM 4. ÇOK BOYUTLU Q-DEFORME FERMİYONİK NEWTON SALINICISI İÇİN İNHOMOJEN KUANTUM DEĞİŞMEZLİK GRUBU

Bu bölümde,

$$c_i c_j^+ + q^2 c_j^+ c_i = \mathcal{H}\delta_{ij} \qquad i,j = 1,2,\dots\dots\dots,d \tag{4.1}$$

$$c_i c_j + c_j c_i = 0 \qquad i,j = 1,2,\dots\dots\dots,d \tag{4.2}$$

$$c_i\mathcal{H} = q^2\mathcal{H}c_i \qquad i = 1,2,\dots\dots\dots,d \tag{4.3}$$

eşitlikleri ile ikinci bölümde ifade edilmiş olan d-boyutlu deforme fermiyonik Newton cebirininin inhomojen kuantum değişmezlik grubunun varlığının nasıl araştırıldığı detaylı bir şekilde ortaya konmuştur. Söz konusu *d*-boyutlu sistem için yapılacak hesaplamalarda karşılaşılabilecek olası bir karmaşadan kaçınmak için öncelikle iki boyutlu sistem çalışılmış, daha sonra bu iki boyutlu sistem için elde edilen sonuçlar *d*-boyutlu sisteme genelleştirilmiştir.

* işlemini,

$$c^* = c^+ \tag{4.4}$$

şeklinde tanımlayarak; $d = 2$ için. (4.1) - (4.3) eşitlikleri ile ifade edilen cebirsel yapıyı,

$$c_1 c_1^* + q^2 c_1^* c_1 = \mathcal{H} \tag{4.5}$$

$$c_2 c_2^* + q^2 c_2^* c_2 = \mathcal{H} \tag{4.6}$$

$$c_1 c_2^* + q^2 c_2^* c_1 = 0 \tag{4.7}$$

$$c_1^2 = 0 \tag{4.8}$$

$$c_2^2 = 0 \tag{4.9}$$

$$c_1 c_2 + c_2 c_1 = 0 \tag{4.10}$$

$$c_1 \mathcal{H} = q^2 \mathcal{H} c_1 \tag{4.11}$$

$$c_2 \mathcal{H} = q^2 \mathcal{H} c_2 \tag{4.12}$$

şeklinde yeniden yazmak mümkündür. Bu cebirsel yapının simetrisinden bahsedebilmek için; işlemcilerin,

$$c_1' = \alpha_{11} \otimes c_1 + \alpha_{12} \otimes c_2 + \beta_{11} \otimes c_1^* + \beta_{12} \otimes c_2^* + \eta_1 \otimes \mathcal{H} + \gamma_1 \otimes \mathbb{1} \tag{4.13}$$

$$c_2' = \alpha_{21} \otimes c_1 + \alpha_{22} \otimes c_2 + \beta_{21} \otimes c_1^* + \beta_{22} \otimes c_2^* + \eta_2 \otimes \mathcal{H} + \gamma_2 \otimes \mathbb{1} \tag{4.14}$$

$$c_1^{*'} = \beta_{11}^* \otimes c_1 + \beta_{12}^* \otimes c_2 + \alpha_{11}^* \otimes c_1^* + \alpha_{12}^* \otimes c_2^* + \eta_1^* \otimes \mathcal{H} + \gamma_1^* \otimes \mathbb{1} \tag{4.15}$$

$$c_2^{*'} = \beta_{21}^* \otimes c_1 + \beta_{22}^* \otimes c_2 + \alpha_{21}^* \otimes c_1^* + \alpha_{22}^* \otimes c_2^* + \eta_2^* \otimes \mathcal{H} + \gamma_2^* \otimes \mathbb{1} \tag{4.16}$$

$$\mathcal{H}' = \chi_3 \otimes \mathcal{H} + \chi_4 \otimes \mathbb{1} \tag{4.17}$$

eşitlikleri ile ifade edilen bir dönüşüm altında, cebirsel yapıyı değişmez bıraktıklarını ortaya koymak gerekir. (4.13) – (4.17) eşitlikleri yardımı ile ortaya konulan dönüşümleri,

$$\begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \\ c_1^{*'} \\ c_2^{*'} \\ \mathcal{H}' \\ \mathbb{1}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \beta_{11} & \beta_{12} & \eta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \beta_{21} & \beta_{22} & \eta_2 & \gamma_2 \\ \beta_{11}^* & \beta_{12}^* & \alpha_{11}^* & \alpha_{12}^* & \eta_1^* & \gamma_1^* \\ \beta_{21}^* & \beta_{22}^* & \alpha_{21}^* & \alpha_{22}^* & \eta_2^* & \gamma_2^* \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \chi_3 & \chi_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \dot{\otimes} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_1^* \\ c_2^* \\ \mathcal{H} \\ \mathbb{1} \end{pmatrix} \tag{4.18}$$

şeklinde bir matris tensör çarpımı yardımıyla daha kısa bir şekilde ifade etmek mümkündür. Bu eşitliğin sağ tarafındaki *6x6*'lık ilk matris, dönüşümün nasıl gerçekleştiği hakkında bilgiyi içermesi sebebiyle de, dönüşüm matrisi olarak da isimlendirilmektedir. Bu matris, çalışmanın ilerleyen bölümlerinde M harfi ile temsil edilecektir.

(4.13) – (4.17) eşitlikleri ile ifade edilen işlemcilerin, (4.5) – (4.12) eşitlikleri ile ifade edilen sistem ile aynı cebirsel yapıya sahip olmaya zorlanması, dönüşüm matrisinin elemanları arasında bazı özel eşitliklerin varlığını da zorunlu kılmaktadır. Gerekli hesaplamalar yapıldığında, bu eşitliklerin $i, j, k, l = 1{,}2$ için,

$$\alpha_{ik}\alpha_{jl} - \alpha_{jl}\alpha_{ik} = 0 \tag{4.19}$$

$$\alpha_{ik}\beta_{jl} - q^{-2}\beta_{jl}\alpha_{ik} = 0 \tag{4.20}$$

$$\alpha_{ik}\eta_j + q^{-2}\eta_j\alpha_{ik} = 0 \tag{4.21}$$

$$\alpha_{ik}\gamma_j + \gamma_j\alpha_{ik} = 0 \tag{4.22}$$

$$\beta_{ik}\beta_{jl} - \beta_{jl}\beta_{ik} = 0 \tag{4.23}$$

$$\beta_{ik}\eta_j + q^2\eta_j\beta_{ik} = 0 \tag{4.24}$$

$$\beta_{ik}\gamma_j + \gamma_j\beta_{ik} = 0 \tag{4.25}$$

$$\eta_i\eta_j + \eta_j\eta_i = 0 \tag{4.26}$$

$$\eta_i^2 = 0 \tag{4.27}$$

$$\eta_i\gamma_j + \gamma_j\eta_i = -\frac{1}{2}(\alpha_{jk}\beta_{ik} + \alpha_{ik}\beta_{jk}) \tag{4.28}$$

$$\gamma_i\gamma_j + \gamma_j\gamma_i = 0 \tag{4.29}$$

$$\gamma_i^2 = 0 \tag{4.30}$$

$$\alpha_{ik}\chi_3 - \chi_3\alpha_{ik} = 0 \tag{4.31}$$

$$\alpha_{ik}\chi_4 - q^2\chi_4\alpha_{ik} = 0 \tag{4.32}$$

$$\beta_{ik}\chi_3 - q^4\chi_3\beta_{ik} = 0 \tag{4.33}$$

$$\beta_{ik}\chi_4 - q^2\chi_4\beta_{ik} = 0 \tag{4.34}$$

$$\eta_i\chi_3 - q^2\chi_3\eta_i = 0 \tag{4.35}$$

$$\eta_i\chi_4 - q^2\chi_4\eta_i = 0 \tag{4.36}$$

$$\gamma_i\chi_3 - q^2\chi_3\gamma_i = 0 \tag{4.37}$$

$$\gamma_i\chi_4 - q^2\chi_4\gamma_i = 0 \tag{4.38}$$

$$\alpha_{ik}\beta_{jl}^* - q^2\beta_{jl}^*\alpha_{ik} = 0 \tag{4.39}$$

$$\alpha_{ik}\alpha_{jl}^* - \alpha_{jl}^*\alpha_{ik} = 0 \tag{4.40}$$

$$\alpha_{ik}\eta_j^* + \eta_j^*\alpha_{ik} = 0 \tag{4.41}$$

$$\alpha_{ik}\gamma_j^* + q^2\gamma_j^*\alpha_{ik} = 0 \tag{4.42}$$

$$\beta_{ik}\beta_{jl}^* - q^4\beta_{jl}^*\beta_{ik} = 0 \tag{4.43}$$

$$\beta_{ik}\eta_j^* + q^4\eta_j^*\beta_{ik} = 0 \tag{4.44}$$

$$\beta_{ik}\gamma_j^* + q^2\gamma_j^*\beta_{ik} = 0 \tag{4.45}$$

$$\eta_i\eta_j^* + q^2\eta_j^*\eta_i = 0 \tag{4.46}$$

$$\eta_i\gamma_j^* + q^2\gamma_j^*\eta_i = \frac{1}{2}(\chi_3\delta_{ij} - q^2\beta_{jk}^*\beta_{ik} - \alpha_{ik}\alpha_{jk}^*) \tag{4.47}$$

$$\gamma_i\gamma_j^* + q^2\gamma_j^*\gamma_i = \chi_4\delta_{ij} \tag{4.48}$$

şeklinde ifade edilebileceğini görmek mümkündür. Burada dikkat edilmesi gereken nokta,

$$M = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \beta_{11} & \beta_{12} & \eta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \beta_{21} & \beta_{22} & \eta_2 & \gamma_2 \\ \beta_{11}^* & \beta_{12}^* & \alpha_{11}^* & \alpha_{12}^* & \eta_1^* & \gamma_1^* \\ \beta_{21}^* & \beta_{22}^* & \alpha_{21}^* & \alpha_{22}^* & \eta_2^* & \gamma_2^* \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \chi_3 & \chi_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{(6x6)} \tag{4.49}$$

eşitliği ile ifade edilen dönüşüm matrisinin elemanlarının farklı sıra değiştirme özelliklerine sahip işlemcilerden oluşmasıdır. Bu durum dönüşüm matrisinin yapısının, klasik bir matris ile açıklanamayacağı sonucunu da beraberinde getirmektedir. Söz konusu M matrisinin bir kuantum grubunun elemanı olduğunu söyleyebilmek ise, M matrisini elemanlarının sağlamış olduğu cebirsel yapının bir Hopf cebiri olduğunu söyleyebilmeyi gerektirir. (4.19) – (4.48) eşitlikleri ile ifade edilen cebirsel yapının Hopf cebiri olduğunu söyleyebilmek için, söz konusu eşitliklerdeki işlemciler için Hopf cebiri aksiyomlarını sağlayacak şekilde ko-çarpım, ko-birim ve antipodun tanımlanabildiğinin gösterilmesi gerekir. Söz konusu işlemcilerin aynı zamanda M ile gösterilen matrisin elemanlarını oluşturması, ko-çarpım, ko-birim ve antipod için bu tanımların, sırasıyla,

$$\Delta(M) = M\dot{\otimes}M \tag{4.50}$$

$$\in (M) = \mathbb{1} \tag{4.51}$$

$$S(M) = M^{-1} \tag{4.52}$$

eşitlikleri ışığında gerçekleştirilebilmesini mümkün kılar. Yani cebirdeki işlemcilerin ko-çarpımları $i, k = 1,2$

$$\Delta(\alpha_{ik}) = \sum_{m=1}^{2} \alpha_{im} \otimes \alpha_{mk} + \sum_{m=1}^{2} \beta_{im} \otimes \beta^{*}_{mk} \tag{4.53}$$

$$\Delta(\beta_{ik}) = \sum_{m=1}^{2} \alpha_{im} \otimes \beta_{mk} + \sum_{m=1}^{2} \beta_{im} \otimes \alpha^{*}_{mk} \tag{4.54}$$

$$\Delta(\eta_{i}) = \sum_{m=1}^{2} \alpha_{im} \otimes \eta_{m} + \sum_{m=1}^{2} \beta_{im} \otimes \eta^{*}_{m} + \eta_{i} \otimes \chi_{3} \tag{4.55}$$

$$\Delta(\gamma_{i}) = \sum_{m=1}^{2} \alpha_{im} \otimes \gamma_{m} + \sum_{m=1}^{2} \beta_{im} \otimes \gamma^{*}_{m} + \eta_{i} \otimes \chi_{4} + \gamma_{i} \otimes 1 \tag{4.56}$$

$$\Delta(\chi_{3}) = \chi_{3} \otimes \chi_{3} \tag{4.57}$$

$$\Delta(\chi_{4}) = \chi_{3} \otimes \chi_{4} + \chi_{4} \otimes 1 \tag{4.58}$$

eşitlikleri ile ifade edilebilir. Ancak söz konusu cebir için Hopf cebiri yapısından bahsedebilmek için, bu ko-çarpım ifadelerinin de (4.19) – (4.48) eşitlikleri ile ifade edilen cebirsel yapı ile tutarlılık göstermesi gerektiği unutulmamalıdır. Bu bilgiler ışığında yapılan hesaplamalarda (4.53) – (4.58) eşitlikleri ile ifade edilen ko-çarpımlarında (4.19) – (4.48) eşitlikleri ile ifade edilen cebirsel yapıyı sağladığı görülmüş ve bu hesaplamalar esnasında,

$$\chi_{3}\chi_{4} = \chi_{4}\chi_{3} \tag{4.59}$$

eşitliğinin de sağlanması gerektiği sonucu elde edilmiştir. $\Delta(\chi_{3})$ ve $\Delta(\chi_{4})$ arasındaki sıra değiştirme bağıntısı kontrol edildiğinde de, (4.59) eşitliği ile uyumlu olacak şekilde,

$$\Delta(\chi_{3})\Delta(\chi_{4}) = \Delta(\chi_{4})\Delta(\chi_{3}) \tag{4.60}$$

eşitliğinin sağlandığı görülmüştür. Dolayısıyla (4.19) – (4.48) ve (4.59) eşitlikleri ile ifade edilen yapının bir Hopf cebiri olduğunu göstermek ve (4.52) eşitliği ile tanımlanan antipodun varlığından bahsedebilmek için dönüşüm matrisi *M*'nin tersinin varlığını araştırmak gerekir. Ancak *M* matrisinin birbirleri ile sıra değiştirmeyen elemanlardan oluşması, bu matrisin tersini bulmayı oldukça güçleştirmektedir. Söz konusu güçlüğü aşabilmek ve matrisin tersinin varlığını daha kolay bir şekilde gösterebilmek için bu matrisi,

$$M = \left(\begin{array}{cccc:cc} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \beta_{11} & \beta_{12} & \eta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \beta_{21} & \beta_{22} & \eta_2 & \gamma_2 \\ \beta_{11}^* & \beta_{12}^* & \alpha_{11}^* & \alpha_{12}^* & \eta_1^* & \gamma_1^* \\ \beta_{21}^* & \beta_{22}^* & \alpha_{21}^* & \alpha_{22}^* & \eta_2^* & \gamma_2^* \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 0 & \chi_3 & \chi_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c:c} A & \Gamma \\ \hdashline 0 & B \end{array}\right) \tag{4.61}$$

şeklinde yazmak uygun olacaktır. Dikkat edilirse *M* matrisi bu şekilde yazıldığında, bu matrisin tersi,

$$M^{-1} = M^{-1}M = \mathbb{1} \tag{4.62}$$

eşitliği ışığında,

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & B\Gamma B^{-1} \\ 0 & B^{-1} \end{pmatrix} \tag{4.63}$$

şeklinde yazılabilir. Matris *B*, birbirleri ile sıra değiştiren χ_3 ve χ_4 elemanlarından oluştuğundan, bu matrisin tersini yazmak kolaydır. Bu durumda, *M* matrisinin tersinin varlığından bahsedebilmek için, *A* matrisinin tersinin var olduğunu göstermek yeterli olacaktır. *A* matrisinin tersi, Schirrmacher'in *GL(n)* grubunun çok parametreli deformasyonu [27] ile ilgili yapmış olduğu çalışma çerçevesinde incelenebilir. Schirrmacher'in söz konusu çalışmasında,

$$A = \begin{pmatrix} A_1^1 & A_2^1 & A_3^1 & A_4^1 \\ A_1^2 & A_2^2 & A_3^2 & A_4^2 \\ A_1^3 & A_2^3 & A_3^3 & A_4^3 \\ A_1^4 & A_2^4 & A_3^4 & A_4^4 \end{pmatrix}_{(4x4)} \tag{4.64}$$

şeklinde ifade edilen çok parametreli deforme *GL(4)* kuantum matris grubunun elemanları arasındaki sıra değiştirme bağıntıları *a*<*b* ve *i*<*j* için,

$$A_a^i A_b^i = P_{ab} A_b^i A_a^i$$

$$A_a^i A_a^j = q_{ij} A_a^j A_a^i$$

$$A_b^i A_a^j = \frac{q_{ij}}{p_{ab}} A_a^j A_b^i$$

$$A_a^i A_b^j = \frac{P_{ab}}{P_{ij}} A_b^j A_a^i + (P_{ab} - \frac{1}{q_{ab}}) A_b^i A_a^j$$

eşitlikleri ile ifade edilmiştir. (4.64) eşitliğindeki *A* matrisi ile (4.61) eşitliğinde tanımlanan ve

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \beta_{11} & \beta_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \beta_{21} & \beta_{22} \\ \beta_{11}^* & \beta_{12}^* & \alpha_{11}^* & \alpha_{12}^* \\ \beta_{21}^* & \beta_{22}^* & \alpha_{21}^* & \alpha_{22}^* \end{pmatrix}_{(4x4)} \tag{4.69}$$

şeklinde ifade edilen *A* matrisi, (4.19), (4.20), (4.23), (4.39), (4.40) ve (4.43) sıra değiştirme bağıntıları çerçevesinde eşleştirildiğinde; söz konusu eşleştirmenin ancak,

$$\mathrm{P}_{12} = \mathrm{P}_{34} = q_{12} = q_{34} = 1 \tag{4.70}$$

$$P_{13} = P_{14} = P_{23} = P_{24} = q^{-2} \tag{4.71}$$

$$q_{13} = q_{14} = q_{23} = q_{24} = q^{\,2} \tag{4.72}$$

eşitliklerinin sağlanması durumunda gerçekleştiği görülebilir. Böylece (4.69) eşitliğindeki *A* matrisinin, çok parametreli deforme *GL(4)* kuantum matris grubunun (4.70) - (4.72) eşitliklerini sağlayan bir parametreli özel bir hali olduğu söylenebileceği gibi *A* matrisinin tersinin varlığından da bahsetmenin mümkün olduğu ortaya konmuş olur.

Dönüşüm matrisi *M*'nin elemanları arasındaki sıra değiştirme bağıntılarını,

$$M_1 = M \otimes \mathbb{1} \tag{4.73}$$

$$M_2 = \mathbb{1} \otimes M \tag{4.74}$$

olmak üzere,

$$RM_1 M_2 = M_2 M_1 R \tag{4.75}$$

eşitliğini sağlayan bir R matrisi yardımı ile de ifade etmek mümkündür. Ancak söz konusu R matrisini (4.74) eşitliği ışığında elde etmek yerine,

$$RC_1C_2 = C_2C_1 \tag{4.76}$$

eşitliği ışığında da elde etmek mümkündür [28]. Bu eşitlikteki C_1C_2 ve C_2C_1 ifadeleri sırasıyla,

$$C_1C_2 = \begin{pmatrix} c_1^2 \\ c_1c_2 \\ c_1c_1^* \\ c_1c_2^* \\ c_1\mathcal{H} \\ c_1 \\ c_2c_1 \\ c_2^2 \\ c_2c_1^* \\ c_2c_2^* \\ c_2\mathcal{H} \\ c_2 \\ c_1^*c_1 \\ c_1^*c_2 \\ c_1^{*2} \\ c_1^*c_2^* \\ c_1^*\mathcal{H} \\ c_1^* \\ c_2^*c_1 \\ c_2^*c_2 \\ c_2^*c_1^* \\ c_2^{*2} \\ c_2^*\mathcal{H} \\ c_2^* \\ \mathcal{H}c_1 \\ \mathcal{H}c_2 \\ \mathcal{H}c_1^* \\ \mathcal{H}c_2^* \\ \mathcal{H}^2 \\ \mathcal{H} \\ c_1 \\ c_2 \\ c_1^* \\ c_2^* \\ \mathcal{H} \\ 1 \end{pmatrix} \tag{4.77}$$

$$C_2C_1 = \begin{pmatrix} c_1^2 \\ c_2c_1 \\ c_1^*c_1 \\ c_2^*c_1 \\ \mathcal{H}c_1 \\ c_1 \\ c_1c_2 \\ c_2^2 \\ c_1^*c_2 \\ c_2^*c_2 \\ \mathcal{H}c_2 \\ c_2 \\ c_1c_1^* \\ c_2c_1^* \\ c_1^{*2} \\ c_2^*c_1^* \\ \mathcal{H}c_1^* \\ c_1^* \\ c_1c_2^* \\ c_2c_2^* \\ c_1^*c_2^* \\ c_2^{*2} \\ \mathcal{H}c_2^* \\ c_2^* \\ c_1\mathcal{H} \\ c_2\mathcal{H} \\ c_1^*\mathcal{H} \\ c_2^*\mathcal{H} \\ \mathcal{H}^2 \\ \mathcal{H} \\ c_1 \\ c_2 \\ c_1^* \\ c_2^* \\ \mathcal{H} \\ 1 \end{pmatrix} \tag{4.78}$$

şeklinde yazılabilen sütun matrislerdir. (4.76) – (4.78) eşitlikleri ışığında, R matrisinin sıfırdan farklı elemanları,

$$R_1^1 = R_2^2 = R_7^7 = R_8^8 = R_{15}^{15} = R_{16}^{16} = R_{21}^{21} = R_{22}^{22} = -1 \tag{4.79}$$

$$R_3^3 = R_4^4 = R_9^9 = R_{10}^{10} = -\frac{1}{q^2} \tag{4.80}$$

$$R_5^5 = R_{11}^{11} = R_{27}^{27} = R_{28}^{28} = \frac{1}{q^2} \tag{4.81}$$

$$R_6^6 = R_{12}^{12} = R_{18}^{18} = R_{24}^{24} = R_{29}^{29} = R_{30}^{30} = 1 \tag{4.82}$$

$$R_{31}^{31} = R_{32}^{32} = R_{33}^{33} = R_{34}^{34} = R_{35}^{35} = R_{36}^{36} = 1 \tag{4.83}$$

$$R_{13}^{13} = R_{14}^{14} = R_{19}^{19} = R_{20}^{20} = -q^2 \tag{4.84}$$

$$R_{17}^{17} = R_{23}^{23} = R_{25}^{25} = R_{26}^{26} = q^2 \tag{4.85}$$

$$R_{30}^{3} = R_{35}^{3} = \frac{1}{2q^2} \tag{4.86}$$

$$R_{30}^{10} = R_{35}^{10} = \frac{1}{2q^2} \tag{4.87}$$

$$R_{30}^{13} = R_{35}^{13} = \frac{1}{2} \tag{4.88}$$

$$R_{30}^{20} = R_{35}^{20} = \frac{1}{2} \tag{4.89}$$

şeklinde bulunabilir. Bu eşitliklerdeki üst indisler satır sayılarını, alt indisler ise sütun sayılarını ifade etmektedir. Buraya kadar elde edilen sonuçlar,

$$c_i c_j^* + q^2 c_j^* c_i = \mathcal{H}\delta_{ij} \qquad i,j = 1,2,\dots\dots\dots,d \tag{4.90}$$

$$c_i c_j + c_j c_i = 0 \qquad i,j = 1,2,\dots\dots\dots,d \tag{4.91}$$

$$c_i \mathcal{H} = q^2 \mathcal{H} c_i \qquad i = 1,2,\dots\dots\dots,d \tag{4.92}$$

eşitlikleri ile ifade edilen d-boyutlu sisteme genelleştirilmek istenirse; cebirsel yapıyı

değişmez bırakacak şekilde,

$$c_i' = \sum_{i=1}^{d} \left(\alpha_{ik} \otimes c_k + \beta_{ik} \otimes c_k^* + \eta_i \otimes \mathcal{H} + \gamma_i \otimes \mathbb{1}\right) \tag{4.93}$$

$$c_i^{*\prime} = \sum_{i=1}^{d} \left(\beta_{ik}^* \otimes c_k + \alpha_{ik}^* \otimes c_k^* + \eta_i^* \otimes \mathcal{H} + \gamma_i^* \otimes \mathbb{1}\right) \tag{4.94}$$

$$\mathcal{H}' = \chi_3 \otimes \mathcal{H} + \chi_4 \otimes \mathbb{1} \tag{4.95}$$

dönüşümler göz önüne alınabilir. Bu dönüşümler matris tensör çarpımı yardımı ile

$$\begin{pmatrix} c_i' \\ c_i^{*\prime} \\ \mathcal{H}' \\ \mathbb{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{ik} & \beta_{ik} & \eta_i & \gamma_i \\ \beta_{ik}^* & \alpha_{ik}^* & \eta_i^* & \gamma_i^* \\ 0 & 0 & \chi_3 & \chi_4 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix} \dot{\otimes} \begin{pmatrix} c_k \\ c_k^* \\ \mathcal{H} \\ \mathbb{1} \end{pmatrix} \tag{4.96}$$

yazılabilmektedir. Dolayısıyla dönüşüm matrisi indis notasyonu kullanılarak,

$$T = \begin{pmatrix} \alpha_{ik} & \beta_{ik} & \eta_i & \gamma_i \\ \beta_{ik}^* & \alpha_{ik}^* & \eta_i^* & \gamma_i^* \\ 0 & 0 & \chi_3 & \chi_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{4.97}$$

eşitliği ile ifade edilebilir. Burada yazılan T dönüşüm matrisi *(2d+2) x (2d+2)*'lik bir kare matristir ve bu matrisin sıra değiştirme bağıntıları $i, j, k, l = 1,2, \dots \dots \dots d$ için (4.19) – (4.47) ve (4.59) eşitliklerindeki gibidir. T dönüşüm matrisinin bir kuantum matrisi olduğunu göstermek için; T matrisinin elemanlarının ko-çarpımları, $i, k = 1,2, \dots \dots \dots d$ için, m indisi üzerinden toplamın *1*'den d ye kadar gerçekleştirilmesi kaydı ile yine (4.53) – (4.58) eşitlikleri ile ifade edilebilir. Öyle ki bu ko-çarpımlar; (4.19) – (4.47) ve (4.59) eşitlikleri ile ifade edilen sıra değiştirme bağıntıları ile tutarlı sıra değiştirme bağıntılarına sahiptir. Ancak bu durum $d = 2$ halinde de görüldüğü gibi T matrisinin bir kuantum matris grubunun elemanı olduğunu söyleyebilmek için yeterli değildir. Bunu söyleyebilmek için T matrisinin tersinin var olduğunun da gösterilmesi gerekir. T matrisinin tersinin varlığı (4.61) eşitliğine benzer şekilde, T matrisini,

$$T = \left(\begin{array}{cc:cc} \alpha_{ik} & \beta_{ik} & \eta_i & \gamma_i \\ \beta_{ik}^* & \alpha_{ik}^* & \eta_i^* & \gamma_i^* \\ \hdashline 0 & 0 & \chi_3 & \chi_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c:c} A' & \Gamma' \\ \hdashline 0 & B \end{array}\right) \tag{4.98}$$

şeklinde yazdıktan sonra, A' matrisinin Schirrmacher'in çok parametreli deforme *GL(n)* matris grubunun [27] özel bir hali olduğunun gösterilmesi ile ortaya konabilir. Söz konusu durum,

$$q_{ij} = p_{ij}^{-1} = \begin{cases} 1 & & i < j \leq d \\ q^2 & 1 \leq \ i \leq d \quad , & j > d \\ 1 & & d < i < j \leq 2d \end{cases} \tag{4.99}$$

eşitlikleri çerçevesinde görülebileceğinden, (4.90) – (4.92) eşitlikleri ile ifade edilen sistemin *T* matrisi ile gösterilen inhomojen kuantum değişmezlik simetrisine sahip olduğu söylenebilir.

BÖLÜM 5. SONUÇ

Bu çalışmada (4.1), (4.2) ve (4.3) denklemleri ile tanımlanan *d*-boyutlu deforme fermiyonik Newton cebirininin inhomojen kuantum değişmezlik grubunun varlığı gösterilmiştir. Söz konusu simetrinin ifade edilmesi için göz önüne alınan ve (4.97) eşitliği ile ifade edilen dönüşüm matrisinin bir kuantum matris grubunun elemanı olduğu da bu matrisin elemanları arasındaki cebirsel yapının Hopf cebiri olduğunun gösterilmesi ile ortaya konmuştur.

KAYNAKLAR

[1] RIZAOĞLU, E., SÜNEL, N., Klasik Mekanik, Sözkesen Matbaacılık, sf. 3, Ankara, 2008

[2] AYGÜN, E., ZENGİN, D.M., Kuantum Fiziği, Ankara Üniversitesi, Fen Fakültesi, Fizik Bölümü, sf. 85,111, Ankara, 1998

[3] LANDAU, L.D., LIFSHITZ, E.M., Kuantum Mekaniği, Çeviri Editörleri: M.ZENGİN, C.SELAM, S.KORCAK, Fizik Matematik Devlet Yayınevi, sf. 330, Moskova, 1963

[4] DERELİ, T., VERÇİN, A., Kuantum Mekaniği 2, ODTÜ Geliştirme Vakfı Yayıncılık ve İletişim A.Ş, sf. 66, 2000

[5] DERELİ, T., VERÇİN, A., Kuantum Mekaniği 1, ODTÜ Geliştirme Vakfı Yayıncılık ve İletişim A.Ş., sf. 125-141, sf. 1-14, 1998

[6] ALİM, H., İki Boyutlu Deforme Bozon Cebiri İçin İnhomojen Kuantum Değişmezlik Grubu, Yüksek Lisans Tezi, Sakarya Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, 2009

[7] GRIFFHTS, D.J., Kuantum Mekaniğine Giriş (Introductionto Quantum Mechanics), Çeviri Editörleri: H.ÖZBEK, S.D.FEYİZ, Nobel Yayın Dağıtım, 2010

[8] ARIK, M., Atakishiyev, N. M., and Wolf, K.B., Quantum Algebraic Structures Compatible with the Harmonic Oscillator Newton Equation, J.Phys A, Vol.32, pp. L371-L376, 1999

[9] DASKOLAYANNIS, C., Generalized Deformed Oscillatorand Nonlinear Algebras, J.Phys A, Vol.24, pp. L789-L794, 1991

[10] ARIKAN, A. S., Multiparameter Generalization of Deformed Particle Algebras, Doktora Tezi, Bogaziçi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, 2004

[11] KIBBLE, T.W., BERKSHIRE, F.H., Klasik Mekanik, Çeviri Editörü: Prof.Dr. Kemal ÇOLAKOĞLU, Palme Yayıncılık, Ankara, 1999 (4. Basım)

[12] OHANIAN, H.C., Principles of Quantum Mechanics, Prentice Hall, 1989

[13] GILMORE, R., Lie Groups, Lie Algebras, and Some of Their Applications, John Wileyand Sons, 1974

[14] ALGIN, A., q Deformed Newton Oscillators, Doktora Tezi, Osmangazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, 2001

[15] ALGIN, A., M. ARIK., N. M. ATAKİSHİYEV., SU(d) Invariant Multidimensional q-oscillators with Bosonic Degeneracy, Modern Physics Letters A, Vol.15, pp. 1237-1242, 2000

[16] ARIK, M., PEKER-DOBIE, Particle-antiparticle Symmetry of the Multi dimensional Fermionic Newton Oscillator, J.Phys A, Vol.34, pp. 725-730, 2001

[17] LEDERMAN, L. M., HILL, C. T., Simetri ve Evrenin Görkemli Güzelliğini Anlamak, Güncel Yayıncılık, İstanbul, 2005

[18] CORNWELL, J. F., Group Theory In Physıcs, An Introduction, Academic Press, London, 1997

[19] ROLNICK, W. B., The Fundamental Particles and Their Interactions, Addison-Wesley Publishing Company, 1994

[20] ÇELİK, S., Kuantum Matris Grupları ve Q Osilatörleri, Doktora Tezi, İstanbul Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, 1992

[21] SUDBERY, A., Non-Commuting Coordinates and Differential Operators, Workshop on Quantum Groups, Argonne IL, 1991

[22] ÖZKANLAR, A., Representations of The Quantum Matrix Group SL_q(2,R), Yüksek Lisans Tezi, Boğaziçi Üniversitesi, 2003

[23] TAHRİ, E. H., Quantum Group Structure On The Quantum Plane, Journal of Math. Phys., Vol.39, pp.2983, 1998

[24] FADEEV, L., TAKHTATAJAN, L., Preprint Universite Paris VI, 1985, In: Lect. Notes in Physics 246, 166-179, Berlin- Heidelberg-New York, 1986

[25] TAKHTAJAN, L. A., Introduction to Quantum Groups, Lecture Notes in Physics, Vol.370, pp.3-28, 1990

[26] VOKOS, S.P., ZOMINO, B., WESS, J., Analysis of The Basic Matrix Representation of GL_q(2,C), Zeit. F. Physik, C.48, pp.65-74, 1990

[27] SCHIRRMACHER, A., The Multiparametric Deformation of GL(n) and The Covariant Differential Calculus on the Quantum Vector Space, Z.Phys. C.50, pp.321, 1991

[28] ARIK, M., GÜN, S., YILDIZ, A., Invariance Quantum Group of the Fermionic Oscillator Eur. Phys. J.C., 22, pp.453-455, 2003

ÖZGEÇMİŞ

Semra ARLI 1983'de Bursa'da doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Bursa'da tamamladı. 2003 yılında başladığı Sakarya Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Fizik Bölümünü 2007 yılında tamamladı. 2007-2009 yılları arasında özel bir dershanede fizik öğretmeni olarak görev yaptı. 2010 yılında MEB'e bağlı bir okulda fen bilgisi öğretmeni olarak çalıştı. 2008 yılında Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Fizik Anabilim dalında yüksek lisansa başladı. Halen aynı üniversitede yüksek lisans eğitimine devam etmektedir.