T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TİMELİKE TANJANT AÇILABİLİR YÜZEYLER VE BONNET YÜZEYLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Kemal EREN

Enstitü Anabilim Dalı	**:**	**MATEMATİK**
Enstitü Bilim Dalı	**:**	**GEOMETRİ**
Tez Danışmanı	**:**	**Doç. Dr. Soley ERSOY**

Haziran 2012

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TİMELİKE TANJANT AÇILABİLİR YÜZEYLER VE BONNET YÜZEYLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Kemal EREN

Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK

Enstitü Bilim Dalı GEOMETRİ

Bu tez 29/06/2012 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Oybirliği ile kabul edilmiştir.

Doç. Dr. Soley ERSOY	Prof. Dr. Murat TOSUN	Doç. Dr. Sadık BAĞCI
Jüri Başkanı	Üye	Üye

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans danışmanlığımı üstlenip, bilgi ve tecrübesiyle destek veren, çalışmamın her safhasında yardımını esirgemeyen sayın hocam Doç. Dr. Soley ERSOY'a şükran ve saygılarımı sunarım.

Tez çalışmam sırasında bana yardımcı olan Arş. Gör. Abdullah İNALCIK'a teşekkürü borç bilirim.

Desteğini her zaman yanımda hissettiğim değerli eşim Halime EREN'e ve sevgili aileme teşekkür ederim.

Kemal EREN

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

$\mathbb{R}_1^3$	: 3 – boyutlu Minkowski uzayı
S_1^2	: $\mathbb{R}_1^3$ uzayında Lorentziyen birim küre
H_0^2	: $\mathbb{R}_1^3$ uzayında hiperbolik birim küre
M	: Minkowski uzayında timelike yüzey
K	: Gauss eğriliği
H	: Ortalama eğriliği
w_j^i	: Minkowski uzayı çatı alanının bağ formları
w^i	: Minkowski uzayında dual 1- formlar
A	: M timelike yüzeyinin şekil operatörü
a	: M yüzeyinin birinci asli eğriliği
c	: M yüzeyinin ikinci asli eğriliği
∇H	: Ortalama eğriliğin gradiyenti
$*$	: Hodge operatörü
$\bar{M}$	: M nin asli eğriliklerini koruyan deformasyonu
Φ	: Non-trivial izometri
$X(s,t)$	: Timelike tanjant açılabilir yüzey
$\eta(s)$	: $X(s,t)$ tanjant açılabilir yüzeyinin dayanak eğrisi
$\kappa(s)$	: $\eta(s)$ eğrisinin eğriliği
$\tau(s)$	: $\eta(s)$ eğrisinin burulması
I	: Yüzeyin birinci temel formu
$Y(\tilde{s},\tilde{t})$	: $X(s,t)$ yüzeyinin asli eğriliklerini koruyan izometrik deformasyonu
$\tilde{\eta}(\tilde{s})$	: $Y(\tilde{s},\tilde{t})$ tanjant açılabilir yüzeyinin dayanak eğrisi

ÖZET

Anahtar Kelimeler: Minkowski Uzayı, Timelike Yüzeyler, Timelike Tanjant Açılabilir Yüzeyler, Timelike Bonnet Yüzeyler.

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmıştır. İkinci bölümde iki ve üç boyutlu Minkowski uzaylarında açı ve vektör kavramları, temel tanımlar ve gerekli teoremler verilmiştir. Üçüncü bölümde Minkowski uzayında timelike yüzeyler ve timelike Bonnet yüzeyler iki alt bölümde tanıtılmıştır. Ayrıca, bir timelike yüzeyin Bonnet yüzey olması için bir ölçüt verilmiştir.

Dördüncü bölüm bu çalışmanın orijinal kısmını oluşturmaktadır ve iki alt bölüm halinde düzenlenmiştir. Dördüncü bölümün birinci alt bölümünde Minkowski uzayında timelike tanjant açılabilir yüzeyin dayanak eğrisinin eğrilik ve burulmasının sabit olmama koşulu altında timelike tanjant açılabilir yüzeyin timelike Bonnet yüzey olması için gerek ve yeter şart verilmiştir. İkinci alt bölümünde ise Minkowski uzayında timelike tanjant açılabilir yüzeyin dayanak eğrisinin eğrilik ve burulmasının sabit olması yani dayanak eğrisinin helis olması durumu ele alınmış ve bu özelliğe sahip timelike tanjant açılabilir yüzeyin yani düz helikodial yüzeyin sahip olduğu ortalama eğriliği koruyan non trivial izometri bulunmuştur.

Beşinci bölümde tüm çalışmanın kısa bir özeti yapılmış ve bundan sonra yapılacak yeni araştırmalara yönelik öneride bulunulmuştur.

TIMELIKE TANGENT DEVELOPABLE SURFACES AND BONNET SURFACES

SUMMARY

Keywords: Minkowski Space, Timelike Surfaces, Timelike Tangent Developable Surfaces, Timelike Bonnet Surfaces.

This thesis consists of five chapters. The first chapter is devoted to the introduction. In the second chapter, the concepts of the angle and vector, basic definitions and necessary theorems in two and three dimensional Minkowski spaces are introduced. Third chapter is arranged as two subsections. Timelike surfaces and timelike Bonnet surfaces are summarized in these two subsections of the third chapter. A criterion is given for a timelike surface to be a Bonnet surface.

The fourth chapter is the original part of this study and it is organized as two subsections. In the first part of the fourth chapter, a necessary and sufficient condition for a timelike tangent developable surface to be a timelike Bonnet surface is obtained under the condition of the curvature and torsion of the base curve of the timelike developable surface being non constant. In the second part, the curvature and torsion of the base curve of a timelike developable surface are considered as constant that is the base curve is considered as circular helix and the non-trivial isometry that preserves the mean curvature is obtained for a timelike developable surface which is a flat helicodial surface.

In fifth chapter of this thesis, a brief summary of the study is given and a suggestion is proposed for new investigations.

BÖLÜM 1. GİRİŞ

3-boyutlu Öklid uzayında ortalama eğriliği koruyan bir izometrik deformasyon kabul eden yüzeye Bonnet yüzey adı verilir. 1987 de O. BONNET yüzeyin ortalama eğrilik korunarak izometrik olarak tasvir edilmesi probleminin genel halde çözülebilir olmadığını ve sabit ortalama eğrilikli yüzeylerin birbirine izometrik olarak tasvir edilebildiğini göstermiştir [1]. Bu nitelikteki yüzeylerle ilgili daha detaylı sonuçları ise E. CARTAN [2] çalışmasında elde etmiştir.

B. H. LAWSON, Bonnet'in sonuçlarını sabit eğrilikli Riemann uzayında sabit ortalama eğrilikli yüzeylere genişletmiş ve sabit olmayan ortalama eğrilikli Bonnet yüzeylerin altı keyfi sabite bağlı olduğunu göstermiştir [3].

S. S. CHERN asli eğrilikleri koruyan yüzeylerin izometrik deformasyonu için diferansiyel formlar yardımıyla bir karakterizasyon elde etmiştir [4].

Konu ile ilgili pek çok çalışması olan I.M. ROUSSOS, sırasıyla, [5], [6] ve [7] çalışmalarında helikodial yüzey olan Bonnet yüzeyleri, tanjant açılabilir olan Bonnet yüzeyleri ve Bonnet yüzeyler üzerinde global sonuçları araştırmıştır. I.M. ROUSSOS, Chern'in yöntemini kullanarak ortalama eğriliği koruyan izometri için bir karakterizasyon vermiştir.

Z. SOYUÇOK bir yüzeyin Bonnet yüzey olması için özel bir izotermal parametreli sisteme sahip olmasının gerek ve yeter koşul olduğunu göstermiştir [8]. Ayrıca Z. SOYUÇOK bir diğer çalışmasında 4-boyutlu Öklid uzayında 3-boyutlu bir hiperyüzeyin Bonnet yüzeyi olması için gerek ve yeter koşulun ortogonal şebekeye sahip olması gerektiğini kanıtlamıştır [9]. Z. SOYUÇOK danışmanlığında H. BAĞDATLI, bir hiperyüzeyin ortalama eğriliğini koruyan izometrisi problemini doktora tezinde ele almıştır [10]. $\mathbb{R}^{n+1}$ de bir hiperyüzeyin bir Bonnet hiperyüzeyi olması için gerek ve yeter koşulun A-şebekesi adı verilen özel bir ortogonal şebekeye sahip olması gerektiğini göstermiştir.

BÖLÜM 2. MİNKOWSKİ UZAYINDA TEMEL KAVRAMLAR

Tanım 2.1. $\mathbb{R}^2$ standart reel vektör uzayı üzerinde $\vec{a}=(a_1,a_2)$, $\vec{b}=(b_1,b_2)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} &\cdot : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ &(\vec{a},\vec{b}) \to \vec{a}.\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 \end{aligned}$$

şeklinde Öklid iç çarpımı tanımlanırsa, $\mathbb{R}^2$ afin uzayına, Öklidyen 2-uzay denir ve $\mathbb{E}^2$ ile gösterilir.

Tanım 2.2. $\mathbb{R}^2$ standart vektör uzayı üzerinde, Öklid iç çarpımı yerine $\vec{a}=(a_1,a_2)$, $\vec{b}=(b_1,b_2)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} &\langle , \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ &(\vec{a},\vec{b}) \to \langle \vec{a},\vec{b} \rangle = a_1b_1 - a_2b_2 \end{aligned}$$

biçiminde tanımlı Lorentz iç çarpımı alınırsa, $\mathbb{R}^2$ afin uzayına, Minkowski 2-uzayı olarak isimlendirilir ve $\mathbb{R}^2_1$ ile gösterilir.

Tanım 2.3. $\mathbb{R}^2_1$ uzayında herhangi bir vektör $\vec{a}=(a_1,a_2)$ olmak üzere

$\vec{a}=\vec{0}$ veya $\langle \vec{a},\vec{a} \rangle > 0$ ise $\vec{a}$ ya spacelike vektör,

$\langle \vec{a},\vec{a} \rangle < 0$ ise $\vec{a}$ ya timelike vektör,

$\vec{a} \neq \vec{0}$ iken $\langle \vec{a},\vec{a} \rangle = 0$ ise $\vec{a}$ ya lightlike (veya null) vektör

denir [11].

Tanım 2.4. $\vec{a} \in \mathbb{R}_1^2$ için $\vec{a}$ vektörünün normu

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{|\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle|}$$

biçiminde tanımlıdır [12].

Teorem 2.5. $\vec{a} \in \mathbb{R}_1^2$ için

i) $\|\vec{a}\| > 0$ dır,

ii) $\vec{a} \neq \vec{0}$ iken $\|\vec{a}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{a}$ bir null vektördür,

iii) $\vec{a}$ bir timelike vektör ise $\|\vec{a}\|^2 = -\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle$ dır,

iv) $\vec{a}$ bir spacelike vektör ise $\|\vec{a}\|^2 = \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle$

dır [12].

Tanım 2.6. $\mathbb{R}_1^2$ uzayında iki vektör $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ olsun.

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 0$$

ise $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ vektörlerine Lorentz anlamında diktirler denir. $\mathbb{R}_1^2$ uzayında Lorentziyen birim çember

$$S_1^1 = \left\{ \vec{a} \in \mathbb{R}_1^2 \,\middle|\, \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle = 1 \right\}$$

biçiminde tanımlıdır. Bu çemberin teğetleri daima timelike vektörlerdir. Benzer olarak, hiperbolik birim çember de

$$H_1^1 = \left\{ \vec{a} \in \mathbb{R}_1^2 \,\middle|\, \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle = -1 \right\}$$

biçiminde tanımlı olup, bu eğrinin teğetleri de spacelike vektörlerdir [12].

Teorem 2.7. $\mathbb{R}_1^2$ uzayında iki spacelike (veya timelike) vektör dik olamaz.

Tanım 2.8. $\vec{a} \in \mathbb{R}_1^2$ timelike vektör olsun. $\vec{e} = (0,1)$ olmak üzere,

i) $\langle \vec{a}, \vec{e} \rangle < 0$ ise $\vec{a}$ ya future-pointing timelike vektör,

ii) $\langle \vec{a}, \vec{e} \rangle > 0$ ise $\vec{a}$ ya past-pointing timelike vektör

denir [12].

Teorem 2.9. $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}_1^2$ future-pointing timelike vektörler olsun. Bu durumda

i) $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle \leq 0$,

ii) $\vec{a} + \vec{b}$ future-pointing timelike vektördür,

iii) $-\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle \geq \|\vec{a}\|.\|\vec{b}\|$ (Minkowski uzayında Schwartz eşitsizliği),

iv) $\|\vec{a} + \vec{b}\| \geq \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|$ (Minkowski uzayında üçgen eşitsizliği)

dır [12].

Tanım 2.10. $\mathbb{R}_1^2$ uzayında future-pointing (veya past-pointing) iki timelike birim vektör $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ olsun.

$$\begin{bmatrix} \cosh\theta & \sinh\theta \\ \sinh\theta & \cosh\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

eşitliği sağlanacak şekilde $\theta \in \mathbb{R}$ sayısına $\vec{a}$ dan $\vec{b}$ ye (yönlendirilmiş) hiperbolik açı denir ve $\theta = (\vec{a}, \vec{b})$ biçiminde gösterilir [12].

Tanım 2.11. $\vec{a}$ ve $\vec{b}$, sırasıyla future-pointing ve past-pointing timelike iki birim vektör olsun. $-\vec{b}$ future-pointing bir vektördür. Tanım 2.10. a göre, $\theta = (-\vec{b}, \vec{a})$ ise, $\vec{a}$ dan $\vec{b}$ ye (yönlendirilmiş) açı $(\vec{a}, \vec{b}) = -\theta$ dır. $\vec{a}$ ile $\vec{b}$ arasındaki (yönlendirilmiş) açı da $|\theta|$ ile gösterilir [12].

Teorem 2.12. $A(\theta)$ matrisi altında, timelike vektörler timelike vektörlere, spacelike vektörler spacelike vektörlere, lightlike vektörler lightlike vektörlere dönüşür [12].

Teorem 2.13. $A(\theta)$ matrisi zaman yönlendirmesini korur. Yani, $\vec{a} \in \mathbb{R}_1^2$ future-pointing (veya past-pointing) timelike vektör ise $A(\theta)\vec{a}$ da future-pointing (veya past-pointing) timelike vektördür [12].

Teorem 2.14. $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ future-pointing timelike iki birim vektör olsun. θ, $\vec{a}$ dan $\vec{b}$ ye hiperbolik açı ise,

$$\cosh\theta = -\left\langle \vec{a}, \vec{b} \right\rangle$$

dır $[12]$.

Teorem 2.15. $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ future-pointing timelike iki birim vektör olmak üzere,

i) $(\vec{a}, -\vec{a}) = 0$,

ii) $\left(\vec{a}, \vec{b}\right) + \left(\vec{b}, \vec{c}\right) = (\vec{a}, \vec{c})$,

iii) $(\vec{a}, \vec{a}) = 0$,

iv) $\left(\vec{b}, \vec{a}\right) = -\left(\vec{a}, \vec{b}\right)$,

v) $\left(-\vec{a}, \vec{b}\right) = \left(\vec{a}, \vec{b}\right)$,

vi) $\left(\vec{a}, -\vec{b}\right) = \left(\vec{a}, \vec{b}\right)$

eşitlikleri geçerlidir $[12]$.

Tanım 2.16. $\mathbb{R}^3$ standart reel vektör uzayı üzerinde $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \langle , \rangle &: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \\ \left(\vec{a}, \vec{b}\right) &\to \vec{a}, \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 - a_3 b_3 \end{aligned}$$

biçiminde Lorentz iç çarpım alınırsa, $\mathbb{R}^3$ afin uzayı, Minkowski 3-uzay olarak isimlendirilir ve $\mathbb{R}_1^3$ ile gösterilir [11].

Lorentz iç çarpımı $\mathbb{R}_1^3$ uzayındaki vektörleri üç sınıfa ayırır. Timelike vektörler, lightlike (veya null) vektörler ve spacelike vektörlerdir.

$\mathbb{R}_1^3$ uzayındaki Lorentz ve hiperbolik birim küreler, sırasıyla,

$$S_1^2 = \left\{ \vec{a} \in \mathbb{R}_1^3 \middle| \left\langle \vec{a}, \vec{a} \right\rangle = 1 \right\}$$

ve

$$H_0^2 = \left\{ \vec{a} \in \mathbb{R}_1^3 \middle| \left\langle \vec{a}, \vec{a} \right\rangle = -1 \right\}$$

biçiminde ifade edilirler [16].

Tanım 2.17. $\mathbb{R}_1^3$ uzayında iki vektör $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ olsun. $\vec{a} = \left(a_1, a_2, a_3\right)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ olmak üzere

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \left(a_3b_2 - a_2b_3,\ a_1b_3 - a_3b_1,\ a_1b_2 - a_2b_1\right)$$

vektörüne $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ nin vektörel çarpımı denir [13].

Teorem 2.18. $\mathbb{R}_1^3$ uzayında üç vektör $\vec{a} = \left(a_1, a_2, a_3\right)$, $\vec{b} = \left(b_1, b_2, b_3\right)$, $\vec{c} = \left(c_1, c_2, c_3\right)$ olsun. Bu durumda

i) $\left\langle \vec{a} \wedge \vec{b}, \vec{c} \right\rangle = -\det\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right)$,

ii) $\left(\vec{a} \wedge \vec{b}\right) \wedge \vec{c} = -\left\langle \vec{a}, \vec{c} \right\rangle \vec{b} + \left\langle \vec{b}, \vec{c} \right\rangle \vec{a}$,

iii) $\left\langle \vec{a} \wedge \vec{b}, \vec{a} \right\rangle = 0 \ ve \ \left\langle \vec{a} \wedge \vec{b}, \vec{b} \right\rangle = 0$,

iv) $\left\langle \vec{a} \wedge \vec{b}, \vec{a} \wedge \vec{b} \right\rangle = -\left\langle \vec{a}, \vec{a} \right\rangle \left\langle \vec{b}, \vec{b} \right\rangle + \left\langle \vec{a}, \vec{b} \right\rangle^2$

dir [16].

Tanım 2.19. $y = y(u, v)$, $\mathbb{R}_1^3$ uzayında bir yüzey olsun. Eğer $p \in y(u, v)$ için

$$\langle , \rangle | p : y(u,v) | p \times y(u,v) | p \to \mathbb{R}$$

indirgenmiş iç çarpımı bir Lorentz iç çarpım ise $y(u,v)$ ye timelike yüzey denir [16].

Tanım 2.20. (Gauss Eğriliği) $\mathbb{R}_1^3$, 3-boyutlu Minkowski uzayında bir yüzey M ve M nin şekil operatörüne karşılık gelen matris S olsun. $p \in M$ için

$$K(p) = \varepsilon \, detS_p$$

M yüzeyinin p noktasındaki Gauss eğriliği ve $K : M \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna M yüzeyinin Gauss eğrilik fonksiyonu denir. Burada $\varepsilon = \langle N, N \rangle = \pm 1$ dir ve N, M yüzeyinin birim normal vektör alanıdır [16].

Tanım 2.21. (Ortalama Eğrilik) $\mathbb{R}_1^3$, 3-boyutlu Minkowski uzayında bir yüzey M ve M nin şekil operatörüne karşılık gelen matris S olsun. $p \in M$ için

$$H = \varepsilon \, \dot{I}zS_p$$

M yüzeyinin p noktasındaki ortalama eğriliği ve $H : M \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna M yüzeyinin ortalama eğrilik fonksiyonu denir. Burada $\varepsilon = \langle N, N \rangle = \pm 1$ dir. N, M yüzeyinin birim normal vektör alanıdır [16].

BÖLÜM 3. MİNKOWSKİ UZAYINDA TİMELİKE BONNET YÜZEYLER

3.1. Minkowski Uzayında Timelike Yüzeyler

$\mathbb{R}^3_1$, 3-boyutlu Minkowski uzayı ve M umbilik nokta içermeyen timelike yüzey olsun. $p \in M$ noktasında $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\}$ ortonormal vektörler olmak üzere $\overrightarrow{e_1}$ timelike, $\overrightarrow{e_2}$ spacelike birim vektör ve $\overrightarrow{e_3}$ yüzeyin spacelike birim normal vektörü olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}
&\left\langle \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_1} \right\rangle = -1,\ \left\langle \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_2} \right\rangle = 1,\ \left\langle \overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{e_3} \right\rangle = 1,\\
&\left\langle \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2} \right\rangle = \left\langle \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3} \right\rangle = \left\langle \overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{e_1} \right\rangle = 0,\\
&\overrightarrow{e_1} \wedge \overrightarrow{e_2} = -\overrightarrow{e_3},\ \overrightarrow{e_2} \wedge \overrightarrow{e_3} = \overrightarrow{e_1},\ \overrightarrow{e_3} \wedge \overrightarrow{e_1} = -\overrightarrow{e_2}
\end{aligned}$$

dir. $\mathbb{R}^3_1$, 3-boyutlu Minkowski uzayında $\left\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\right\}$ ortonormal çatı alanının bağ formları w^i_j, $1 \le i, j \le 3$ ve dual 1-formları w^i, $1 \le i \le 3$, olmak üzere

$$\begin{aligned}
dx &= w^1 \overrightarrow{e_1} + w^2 \overrightarrow{e_2}\\
d\overrightarrow{e_1} &= w^2_1 \overrightarrow{e_2} + w^3_1 \overrightarrow{e_3}\\
d\overrightarrow{e_2} &= w^1_2 \overrightarrow{e_1} + w^3_2 \overrightarrow{e_3}\\
d\overrightarrow{e_3} &= w^1_3 \overrightarrow{e_1} + w^2_3 \overrightarrow{e_2}
\end{aligned} \tag{3.1.1}$$

dır, burada $w^3_1 = w^1_3,\ w^3_2 = -w^2_3,\ w^2_1 = w^1_2$ eşitlikleri vardır [15]. M timelike yüzeyinin şekil operatörü $A : T_pM \to T_pM$ şeklinde verilsin. Bu durumda

$$A\overrightarrow{e_1} = -a\overrightarrow{e_1} - b\overrightarrow{e_2},\ A\overrightarrow{e_2} = b\overrightarrow{e_1} - c\overrightarrow{e_2}$$

yazılabilir. M timelike yüzeyin şekil operatörüne karşılık gelen matrisin reel öz vektörlerinin var olması için gerek ve yeter şart

$$\frac{(a+c)^2}{4}-(ac+b^2)\geq 0 \text{ ve } H^2-K=\frac{(a-c)^2}{4}-b^2\geq 0$$

olmasıdır öyle ki $H=\dfrac{a+c}{2}$ ve $K=ac+b^2$, sırasıyla, ortalama eğrilik ve Gauss eğriliğidir [15]. Çalışmamızda aksi belirtilmedikçe $H^2>K$ (yani M nin umbilik nokta içermediğini) ve $\vec{e}_1,\vec{e}_2$ asli vektörler olduğunu kabul edeceğiz. Dolayısıyla, $b=0$ ve

$$\begin{aligned} w_1^2 &= hw^1+kw^2 \\ w_1^3 &= -aw^1 \\ w_2^3 &= cw^2 \end{aligned} \tag{3.1.2}$$

olur. Burada açıkça görebiliriz ki sırasıyla, $\vec{e}_1$ ve $\vec{e}_2$ boyunca a ve c asli eğriliklerdir. Ayrıca M yüzeyinin ortalama ve Gauss eğrilikleri, sırasıyla,

$$H=\frac{a+c}{2} \text{ ve } K=ac \tag{3.1.3}$$

dir. Ayrıca $J=\dfrac{a-c}{2}>0$ alalım. $\mathbb{R}_1^3$ de $\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$ çatı alanının bağ formları w_j^i ve dual 1-formları w^i olmak üzere birinci tür Cartan yapı denklemleri

$$\begin{aligned} dw^1 &= w^2\wedge w_2^1 \\ dw^2 &= w^1\wedge w_1^2 \end{aligned} \tag{3.1.4}$$

dır. Ayrıca ikinci tür Cartan yapı denklemleri

$$dw_1^2 = w_1^3\wedge w_3^2 = -Kw^1\wedge w^2 \tag{3.1.5}$$

$$dw_1^3 = w_1^2\wedge w_2^3,\ dw_2^3 = w_2^1\wedge w_1^3 \tag{3.1.6}$$

dir. Bu denklemler, sırasıyla, Gauss ve Codazzi denklemleri olarak adlandırılır [15]. Codazzi denklemlerinde (3.1.2) denklemleri yerine yazılırsa

$$dw_1^3 = hcw^1\wedge w^2 \tag{3.1.7}$$

elde edilir. Ayrıca (3.1.2) nin ikinci denkleminin dış türevinde (3.1.2) ve (3.1.4) ün ilk eşitlikleri yerine yazıldığında

$$dw_1^3 = -da \wedge w^1 - ahw^2 \wedge w^1 \tag{3.1.8}$$

bulunur. Benzer şekilde

$$dw_2^3 = -akw^2 \wedge w^1 \tag{3.1.9}$$

ve

$$dw_2^3 = dc \wedge w^2 + ckw^1 \wedge w^2 \tag{3.1.10}$$

elde edilir. Sırasıyla (3.1.7) ile (3.1.8) ve (3.1.9) ile (3.1.10) denklemleri eşitlenerek

$$\begin{aligned} \left(da + (a-c)hw^2\right) \wedge w^1 &= 0, \\ \left(dc + (c-a)kw^1\right) \wedge w^2 &= 0 \end{aligned} \tag{3.1.11}$$

bulunur. Bu son denklem düzenlenirse

$$\begin{aligned} da &= (c-a)\left(pw^1 + hw^2\right), \\ dc &= (a-c)(kw^1 + qw^2) \end{aligned} \tag{3.1.12}$$

eşitlikleri elde edilir. Ortalama eğriliğin türevinden $dH = \dfrac{da+dc}{2}$ olduğu göz önüne alınarak son iki eşitlikten

$$2dH = (a-c)\left((k-p)w^1 + (q-h)w^2\right)$$

olduğu görülür. Eğer burada u ve v fonksiyonları

$$u = k - p \text{ ve } v = q - h$$

şeklinde tanımlanırsa

$$2dH = (a-c)(uw^1 + vw^2) \tag{3.1.13}$$

veya

$$dH = J(uw^1 + vw^2)$$

bulunur. Ayrıca (3.1.12) de verilen eşitlikler

$$\begin{aligned} \frac{da}{a-c} &= \left(u-k\right)w^1 - hw^2, \\ \frac{dc}{a-c} &= kw^1 + (v+h)w^2 \end{aligned} \qquad (3.1.14)$$

olarak düzenlenebilir. Böylece son iki eşitliğin farkından

$$d\ln\left(a-c\right) = \left(u-2k\right)w^1 - (v+2h)w^2 \qquad (3.1.15)$$

bulunur. (3.1.13) denklemi dikkate alınarak H nin gradiyenti

$$\nabla H = \frac{a-c}{2}(-u\vec{e_1} + v\vec{e_2})$$

şeklinde yazılır. Buradan

$$\left\langle \nabla H, \nabla H \right\rangle = (gradH)^2 = \left(\frac{a-c}{2}\right)^2 (-u^2 + v^2)$$

elde edilir, öyle ki gerekli düzenlemeler sonucunda

$$4\left\langle \nabla H, \nabla H \right\rangle = 4(gradH)^2 = \left(a-c\right)^2 (-u^2 + v^2) \qquad (3.1.16)$$

veya

$$\left\langle \nabla H, \nabla H \right\rangle = (gradH)^2 = \left(H^2 - K\right)(-u^2 + v^2)$$

yazılabilir. Aksi söylenmedikçe çalışmanın tamamında ∇H null olmadığını kabul edelim. Yani, $-u^2 + v^2 \neq 0$ olsun. $\varepsilon = sgn\left\langle \nabla H, \nabla H \right\rangle = \pm 1$ olmak üzere

$$\varepsilon\left(-u^2 + v^2\right) = \frac{\left|\left\langle \nabla H, \nabla H \right\rangle\right|}{H^2 - K} = A^2$$

şeklinde yazabiliriz. Böylece

$$\begin{aligned}\theta^1 &= uw^1 + vw^2,\\ \theta^2 &= vw^1 + uw^2\end{aligned} \tag{3.1.17}$$

ve

$$\begin{aligned}\alpha^1 &= uw^1 - vw^2,\\ \alpha^2 &= -vw^1 + uw^2\end{aligned} \tag{3.1.18}$$

1-formlarını tanımlayabiliriz. Hodge $*$ operatörü

$$*w^1 = w^2, * w^2 = w^1, *^2 = 1 \tag{3.1.19}$$

olarak tanımlıdır [15]. Böylece (3.1.2) de verilen w_1^2 bağ formuna Hodge operatörü uygulayarak

$$*w_1^2 = h * w^1 + k * w^2 = kw^1 + hw^2 \tag{3.1.20}$$

bulunur. Ayrıca (3.1.17) ve (3.1.18) denklemlerinden de

$$\begin{aligned}*\theta^1 &= u * w^1 + v * w^2 = vw^1 + uw^2 = \theta^2,\\ *\theta^2 &= v * w^1 + u * w^2 = uw^1 + vw^2 = \theta^1\end{aligned} \tag{3.1.21}$$

ve

$$\begin{aligned}*\alpha^1 &= u * w^1 - v * w^2 = -vw^1 + uw^2 = \alpha^2,\\ *\alpha^2 &= -v * w^1 + u * w^2 = uw^1 - vw^2 = \alpha^1\end{aligned} \tag{3.1.22}$$

eşitlikleri verilebilir. (3.1.21) nin ikinci eşitliği göz önüne alınarak (3.1.13) denklemi yeniden düzenlenirse

$$2dH = (a - c)\theta^1 \tag{3.1.23}$$

olarak yazılabilir. Benzer şekilde, (3.1.18) ve (3.1.20) yardımıyla (3.1.15) denklemi de

$$d\ln\left(a-c\right)=\left(uw^{1}-vw^{2}\right)-2(kw^{1}+hw^{2})$$

olur. Dolayısıyla

$$d\ln\left(a-c\right)=\alpha^{1}-2*w_{1}^{2} \tag{3.1.24}$$

elde edilir.

3.2. Minkowski Uzayında Timelike Bonnet Yüzeyler

$\mathbb{R}_{1}^{3}$, Minkowski uzayında asli doğrultulara sahip olan bir diğer timelike yüzey $\overline{M}$ olsun. Öyle ki $\overline{M}$, M nin asli eğriliklerini koruyan bir izometrik deformasyonu olduğunu kabul edelim. $\overline{M}$ üzerinde ortonormal asli çatı alanı $\left\{\vec{\overline{e}}_{1}, \vec{\overline{e}}_{2}, \vec{\overline{e}}_{3}\right\}$ olsun. $\left\{\vec{\overline{e}}_{1}, \vec{\overline{e}}_{2}\right\}$ çatı alanına karşılık gelen dual asli çatı $\left\{\overline{w}^{1}, \overline{w}^{2}\right\}$ olmak üzere $\overline{M}$ nin birinci temel formu

$$-\left(\overline{w}^{1}\right)^{2}+\left(\overline{w}^{2}\right)^{2}=-\left(w^{1}\right)^{2}+\left(w^{2}\right)^{2} \tag{3.2.1}$$

dır. $\vec{\overline{e}}_{1}$ ve $\vec{\overline{e}}_{2}$ boyunca asli eğrilikler, sırasıyla

$$\overline{a}=a,\quad \overline{c}=c \tag{3.2.2}$$

olup $b=0$ dır. (3.2.1) denklemi ile verilen birinci temel formdan görülür ki $\overline{M}$ üzerinde

$$\begin{aligned}\overline{w}^{1}&=\cosh\varphi w^{1}+\sinh\varphi w^{2},\\ \overline{w}^{2}&=\sinh\varphi w^{1}+\cosh\varphi w^{2}\end{aligned} \tag{3.2.3}$$

olacak şekilde bir φ dönüşümü vardır. (3.2.3) denkleminin dış türevi alınır ve sırasıyla, aşağıdaki düzenlemeler yapılırsa

$$
\begin{aligned}
d\overline{w}^1 &= \sinh\varphi d\varphi \wedge w^1 + \cosh\varphi dw^1 + \cosh\varphi d\varphi \wedge w^2 + \sinh\varphi dw^2, \\
&= \sinh\varphi d\varphi \wedge w^1 + \cosh\varphi (w^2 \wedge w_1^2) + \cosh\varphi d\varphi \wedge w^2 + \sinh\varphi (w^1 \wedge w_1^2), \\
&= -\sinh\varphi w^1 \wedge d\varphi - \cosh\varphi w^2 \wedge d\varphi + (\cosh\varphi w^2 + \sinh\varphi w^1) \wedge w_1^2, \\
&= -(\sinh\varphi w^1 + \cosh\varphi w^2) \wedge d\varphi + (\cosh\varphi w^2 + \sinh\varphi w^1) \wedge w_1^2, \\
&= -\overline{w}^2 \wedge d\varphi + \overline{w}^2 \wedge w_1^2, \\
&= \overline{w}^2 \wedge (-d\varphi + w_1^2)
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
d\overline{w}^2 &= \cosh\varphi d\varphi \wedge w^1 + \sinh\varphi dw^1 + \sinh\varphi d\varphi \wedge w^2 + \cosh\varphi dw^2, \\
&= \cosh\varphi d\varphi \wedge w^1 + \sinh\varphi (w^2 \wedge w_1^2) + \sinh\varphi d\varphi \wedge w^2 + \cosh\varphi (w^1 \wedge w_1^2), \\
&= -\cosh\varphi w^1 \wedge d\varphi - \sinh\varphi w^2 \wedge d\varphi + \sinh\varphi w^2 \wedge w_1^2 + \cosh\varphi w^1 \wedge w_1^2, \\
&= -(\cosh\varphi w^1 + \sinh\varphi w^2) \wedge d\varphi + (\sinh\varphi w^2 + \cosh\varphi w^1) \wedge w_1^2, \\
&= -\overline{w}^1 \wedge d\varphi + \overline{w}^1 \wedge w_1^2, \\
&= \overline{w}^1 \wedge (-d\varphi + w_1^2)
\end{aligned}
$$

bulunur. Sonuç olarak $d\overline{w}^1 = \overline{w}^2 \wedge (-d\varphi + w_1^2)$ ve $d\overline{w}^2 = \overline{w}^1 \wedge (-d\varphi + w_1^2)$ elde edilir. Ayrıca bu son iki denklem, birinci tür Cartan yapı denklemlerinde verilen $d\overline{w}^1 = \overline{w}^2 \wedge \overline{w}_2^1$ ve $d\overline{w}^2 = \overline{w}^1 \wedge \overline{w}_1^2$ eşitlikleri ile karşılaştırıldığında

$$\overline{w}_1^2 = \overline{w}_2^1 = w_1^2 - d\varphi \tag{3.2.4}$$

bulunur. (3.1.24) denkleminden

$$d\ln\left(\overline{a} - \overline{c}\right) = \overline{\alpha}^1 - 2 * \overline{w}_1^2$$

yazabiliriz. (3.2.2) denkleminden $\overline{a} = a$ ve $\overline{c} = c$ olduğu bilindiğinden (3.1.24) ve son denklem yardımıyla

$$\alpha^1 - 2 * w_1^2 = \overline{\alpha}^1 - 2 * \overline{w}_1^2$$

elde edilmiş olur. Bu son eşitliğe Hodge $*$ operatörü uygulandığında

$$*\alpha^1 - 2w_1^2 = *\overline{\alpha}^1 - 2\overline{w}_1^2$$

elde edilir, öyle ki $*\alpha^1 = \alpha^2, *\alpha^2 = \alpha^1$ ve $*^2 = 1$ olduğundan

$$\alpha^2 - 2w_1^2 = \overline{\alpha}^2 - 2\overline{w}_1^2$$

bulunur. Gerekli düzenlemeler sonucu

$$2\left(\overline{w}_1^2 - w_1^2\right) = \overline{\alpha}^2 - \alpha^2$$

dır, yani

$$\left(\overline{w}_1^2 - w_1^2\right) = \frac{1}{2}\left(\overline{\alpha}^2 - \alpha^2\right)$$

eşitliği elde edilir. Buradan (3.2.4) göz önüne alınırsa

$$d\varphi = \frac{1}{2}\left(\alpha^2 - \overline{\alpha}^2\right) \tag{3.2.5}$$

bulunur. (3.1.23) denklemine benzer şekilde $\overline{M}$ için

$$2dH = (\overline{\alpha} - \overline{c})\overline{\theta}^1$$

verilebilir. (3.2.2) de göz önüne alınarak bu son eşitlik ile (3.1.23) karşılaştırılırsa $\overline{\theta}^1 = \theta^1$ bulunur. Böylece

$$\overline{u}\overline{w}^1 + \overline{v}\overline{w}^2 = uw^1 + vw^2$$

yazılabilir. (3.2.3) denklemi dikkate alınarak

$$\begin{aligned} \overline{u} &= u\cosh\varphi - v\sinh\varphi, \\ \overline{v} &= -u\sinh\varphi + v\cosh\varphi \end{aligned} \tag{3.2.6}$$

bulunur. (3.1.18) eşitliği dikkate alınarak

$$\overline{\alpha}^2 = -\overline{v}\,\overline{w}^1 + \overline{u}\,\overline{w}^2$$

denkleminde (3.2.3) ve (3.2.6) denklemleri yerine yazılırsa

$$\overline{\alpha}^2 = (u\sinh\varphi - v\cosh\varphi)(\cosh\varphi w^1 + \sinh\varphi w^2) + (u\cosh\varphi - v\sinh\varphi)(\sinh\varphi w^1 + \cosh\varphi w^2),$$

$$\overline{\alpha}^2 = \sinh 2\varphi(uw^1 - vw^2) + \cosh 2\varphi(uw^2 - vw^1),$$

$$\bar{\alpha}^2 = \sinh 2\varphi\alpha^1 + \cosh 2\varphi\alpha^2 \tag{3.2.7}$$

elde edilir.

Kabul edelim ki $T = \coth\varphi$ olsun. T nin diferansiyeli alınırsa

$$dT = -\frac{1}{\sinh^2\varphi} d\varphi$$

elde edilir. (3.2.5) denklemi son denklemde yerine yazılırsa

$$dT = -\frac{1}{\sinh^2\varphi}\left[\frac{1}{2}\left(\alpha^2 - \bar{\alpha}^2\right)\right]$$

bulunur. Burada (3.2.7) denklemi yerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$dT = \coth\varphi\alpha^1 + \alpha^2$$

elde edilir. Son olarak $T = \coth\varphi$ olduğu göz önüne alınırsa

$$dT = T\alpha^1 + \alpha^2 \tag{3.2.8}$$

bulunur. Bu diferansiyel denklem izometrik deformasyonlar sonucu asli doğrultuların φ açısı kadar hiperbolik dönmesiyle sağlanır. Deformasyonun aşikâr olmaması için gerek ve yeter şart (3.2.8) denkleminin tam olarak integrallenebilir olmasıdır [15].

[15] de Weihuan Chen ve Haizhong Li tarafından timelike yüzeyin ortalama eğriliğini sabit kabul edilerek böyle bir yüzeyin timelike Bonnet yüzey olması ile ilgili aşağıdaki teoremi vermiştir.

Tanım 3.2.1. $\mathbb{R}_1^3$ de $H^2 > K$ olmak üzere sabit ortalama eğrilikli tüm timelike yüzeyler bir parametreli aşikâr olmayan izometrik deformasyon ailesi altında ortalama eğriliği koruyorsa bu yüzeylere timelike Bonnet yüzey denir [15].

Şimdi H nin sabit olma ve olmama durumlarını ayrı ayrı incelemek üzere

$$\begin{aligned} d\alpha^1 &= P\alpha^1 \wedge \alpha^2, \\ d\alpha^2 &= Q\alpha^1 \wedge \alpha^2 \end{aligned} \tag{3.2.9}$$

olacak şekilde P ve Q tanımlayalım. (3.2.8) denkleminin dış türevinde (3.2.9) eşitlikleri yazılarak

$$(TP+Q-1)\alpha^1 \wedge \alpha^2 = 0 \tag{3.2.10}$$

bulunur. Böylece yüzeyler

$C_1 : H =$ sabit olma durumu,

$C_2 : H \neq$ sabit, $P=0$ ve $Q=1$ olma durumu,

$C_3 : H \neq$ sabit, $P \neq 0$ ve $Q \neq 1$ olma durumu

olacak şekilde sınıflandırmalar yapılarak üç farklı kategoride incelenebilir. Bu durumları ayrı ayrı inceleyelim

C_1 de ortalama eğrilik sabit olduğundan (3.1.13) denkleminden $u=v=0$ olduğu açıktır. Dolayısıyla (3.1.18) dan $\alpha^1 = \alpha^2 = 0$ dır. Sonuç olarak (3.2.8) denkleminden T nin sabit olduğu görülür. H nin sabit olması durumunda Bonnet'in $\mathbb{E}^3$ de verdiği Bonnet teoreminin benzeri timelike Bonnet yüzeyler için [15] de incelenmiştir.

C_2 de ortalama eğrilik sabitten farklı olup eğer, $P=0$ ve $Q=1$ ise (3.2.10) denklemi her T için sağlanır.

C_3 de ise ortalama eğrilik sabitten farklı iken $P \neq 0$ ve $Q \neq 1$ ise (3.2.10) denkleminde

$$T = \frac{1-Q}{P} \tag{3.2.11}$$

elde edilir. Böylece (3.2.8) denkleminin bir tek çözümü vardır.

Şimdi sabit olmayan ortalama eğrilikli ve *gradH* null olmayan timelike yüzeyleri incelemek üzere C_3 durumunu göz önüne alalım. (3.2.11) denklemindeki T, umbilik noktası olmayan yani $H^2 > K$ olan herhangi timelike yüzey için tam anlamıyla hesaplanabilir. Ancak ortalama eğriliği koruyan Φ non-trivial izometriyi elde etmek için T nin (3.2.8) denklemini sağlaması gerekir. Bu durumda (3.2.11) denklemi (3.2.8) de yerine yazılırsa C_3 deki timelike Bonnet yüzeyler için bir kriter aşağıdaki teoremde verilebilir.

Teorem 3.2.2. $\mathbb{R}_1^3$ de $H^2 > K$ olmak üzere sabit olmayan ortalama eğrilikli timelike yüzeylerin Bonnet yüzey olması için gerek ve yeter şart

$$d\left(\frac{1-Q}{P}\right) = \left(\frac{1-Q}{P}\right)\alpha^1 + \alpha^2 \tag{3.2.12}$$

olmasıdır, öyle ki burada $P \neq 0$ ve $Q \neq 1$ dır ve $(TP + Q - 1)\alpha^1 \wedge \alpha^2 = 0$ dir.

BÖLÜM 4. TİMELİKE TANJANT AÇILABİLİR YÜZEYLER

Çalışmanın bu bölümünde dayanak eğrisi timelike ve doğrultmanı timelike olan timelike tanjant açılabilir yüzeyler incelenecektir. Benzer çalışma diğer timelike tanjant açılabilir yüzeyler içinde yapılabilir. Bu çalışmada hiç bir timelike tanjant açılabilir yüzeyin C_1 ve C_2 ye ait olmadığı bununla birlikte bazılarının C_3 e ait olduğu gösterilecektir. Ayrıca (3.2.12) de elde edilen koşulu sağlayan timelike tanjant açılabilir yüzeylerin Bonnet yüzey olduğunu göz önüne alınarak tanjant açılabilir yüzeyinin dayanak eğrisinin eğrilik ve burulmasının sabit olmama ve sabit olma durumları ayrı ayrı incelenecektir.

4.1. Dayanak Eğrisinin Eğrilik ve Burulması Sabit Olmayan Timelike Tanjant Açılabilir Yüzeyler

$\mathbb{R}_1^3$ de M yüzeyi

$$\begin{aligned} &X : \mathrm{I}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 \\ &(s,t) \to X(s,t) = \vec{\eta}(s) + t\overrightarrow{e_1}(s) \end{aligned} \tag{4.1.1}$$

parametrik denklemi ile verilen timelike tanjant açılabilir yüzey olsun. Öyle ki burada $\eta(s)$, s yay uzunluğu ile parametrelendirilmiş timelike bir eğri ve $\overrightarrow{e_1}(s) = \dot{\vec{\eta}}(s)$ timelike birim vektör alanı olsun. Burada $t > 0$ durumunu inceleyelim. (Benzer çalışma $t < 0$ hali için yapılabilir öyle ki bu durum tanjant açılabilir yüzeyin ikinci yaprağını verir). $\overrightarrow{e_2}(s)$, $\eta(s)$ eğrisinin asli normal vektör alanı ve spacelike olsun. O zaman $\dot{\vec{e}}_1(s) = \kappa(s)\overrightarrow{e_2}(s)$ dir. Burada $\kappa(s) \geq 0$, $\eta(s)$ dayanak eğrisinin eğriliğidir. (4.1.1) denkleminden

$$X_s(s,t) = \overrightarrow{e_1}(s) + t\kappa(s)\overrightarrow{e_2}(s), \qquad X_t(s,t) = \overrightarrow{e_1}(s)$$

olduğu görülür. Yüzeyin birinci temel formu

$$\mathrm{I} = (-1 + t^2\kappa^2(s))ds^2 - 2dsdt - dt^2$$

dır.

$$dX(s,t) = X_s ds + X_t dt$$

olduğundan

$$dX(s,t) = (\overrightarrow{e_1}(s) + t\kappa(s)\overrightarrow{e_2}(s))\, ds + \overrightarrow{e_1}(s)dt$$

dir. Gerekli düzenlemeler sonucu

$$dX(s,t) = (ds + dt)\overrightarrow{e_1}(s) + (t\kappa(s)ds)\overrightarrow{e_2}(s)$$

yazılır. Aynı zamanda

$$dX(s,t) = w^1\overrightarrow{e_1}(s) + w^2\overrightarrow{e_2}(s)$$

şeklinde yazılıp, bu son iki ifadenin eşitliğinden

$$w^1 = ds + dt, \quad w^2 = t\kappa(s)ds \tag{4.1.2}$$

dır. Ayrıca $w_1^2 = \left\langle d\overrightarrow{e_1}(s), \overrightarrow{e_2}(s) \right\rangle = \left\langle \kappa(s)\overrightarrow{e_2}(s)ds\ , \overrightarrow{e_2}(s) \right\rangle$ olduğundan $w_1^2 = \kappa(s)ds$ dir. Bununla birlikte $w^2 = t\kappa(s)ds$ olduğundan $\kappa(s)ds = \dfrac{w^2}{t}$ olup $w_1^2 = \dfrac{1}{t}w^2$ olarak elde edilir. $\overrightarrow{e_3}(s) = \overrightarrow{e_1}(s) \wedge \overrightarrow{e_2}(s)$ olmak üzere $\overrightarrow{e_3}(s)$, $\eta(s)$ eğrisinin binormal vektör alanı ve spacelike vektördür. $\tau(s)$, $\eta(s)$ eğrisinin burulması olmak üzere

$$\begin{aligned} d\overrightarrow{e_1}(s) &= \kappa(s)\overrightarrow{e_2}(s)ds, \\ d\overrightarrow{e_2}(s) &= \kappa(s)\overrightarrow{e_1}(s) - \tau(s)\overrightarrow{e_3}(s)ds \end{aligned}$$

Frenet-Serret formülleri yardımıyla

$$w_1^3 = \left\langle d\overrightarrow{e_1}(s), \overrightarrow{e_3}(s) \right\rangle = \left\langle \kappa(s)\overrightarrow{e_2}(s)ds, \overrightarrow{e_3}(s) \right\rangle = 0 = 0w^1$$

ve

$$w_2^3 = \left\langle d\overrightarrow{e_2}(s), \overrightarrow{e_3}(s) \right\rangle = \left\langle \kappa(s)\overrightarrow{e_1}(s) - \tau(s)\overrightarrow{e_3}(s)ds, \overrightarrow{e_3}(s) \right\rangle = -\tau(s)ds$$

elde edilir. Ayrıca $w^2 = t\kappa(s)ds$ olduğundan $ds = \dfrac{w^2}{t\kappa(s)}$ olup $w_2^3 = -\tau(s)\dfrac{w^2}{t\kappa(s)}$ bulunur. Bu gösterir ki $\left\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\right\}$ asli çatıya karşılık gelen $\left\{w^1, w^2\right\}$ dual çatıdır ve bunlara karşılık gelen eğrilikler $a = 0 > c = -\dfrac{\tau(s)}{t\kappa(s)}$, $t > 0$ olduğunda $\tau(s) > 0$ kabul edilir.

Asli eğriliklerin, dayanak eğrisinin eğrilik ve burulması cinsinden eşiklikleri göz önüne alınarak H ve J hesaplanırsa

$$H = \frac{1}{2}\left(\frac{-\tau(s)}{t\kappa(s)}\right) \text{ ve } J = \frac{1}{2}\left(\frac{\tau(s)}{t\kappa(s)}\right) \tag{4.1.3}$$

bulunur. Diğer taraftan (3.1.13) denkleminden

$$d\left(\frac{-\tau(s)}{2t\kappa(s)}\right) = \frac{1}{2}\frac{\tau(s)}{t\kappa(s)}\left(uw^1 + vw^2\right)$$

yazılabilir. Bu son eşitlikte (4.1.2) yerine yazılırsa

$$d\left(\frac{-\tau(s)}{t\kappa(s)}\right) = \frac{\tau(s)}{t\kappa(s)}\Big(u(ds + dt) + v\big(t\kappa(s)\big)ds\Big) \tag{4.1.4}$$

elde edilir. Ayrıca (4.1.3) denkleminden

$$(\ln J)' = \frac{dJ}{J} = \frac{d\left(\dfrac{\tau(s)}{t\kappa(s)}\right)}{\dfrac{\tau(s)}{t\kappa(s)}} = \left(\ln\frac{\tau(s)}{\kappa(s)}\right)'$$

bulunur. Burada

$$F(s)=\left(\ln\frac{\tau(s)}{\kappa(s)}\right)' \tag{4.1.5}$$

olarak alalım. (4.1.4) denklemi tekrar düzenlenirse

$$-d\left(\frac{\tau(s)}{t\kappa(s)}\right)=\frac{\tau(s)}{t\kappa(s)}\left[u(ds+dt)+v(t\kappa(s)ds)\right]$$

dır, yani

$$\left(\frac{-\tau'(s)t\kappa(s)+\tau(s)t\kappa'(s)}{t^2\kappa^2(s)}\right)ds+\left(\frac{\tau(s)\kappa(s)}{t^2\kappa^2(s)}\right)dt=\left(\frac{\tau(s)}{t\kappa(s)}u+v\tau(s)\right)ds+\left(\frac{\tau(s)}{t\kappa(s)}u\right)dt$$

elde edilir. Bu son eşitlikten $\left(\frac{\tau(s)\kappa(s)}{t^2\kappa^2(s)}\right)=\frac{\tau(s)}{t\kappa(s)}u$ dır. Dolayısıyla $u=\frac{1}{t}$ bulunur. Ayrıca

$$\frac{-\tau'(s)t\kappa(s)+\tau(s)t\kappa'(s)}{t^2\kappa^2(s)}=\frac{\tau(s)}{t\kappa(s)}u+v\tau(s)$$

eşitliğinde, sırasıyla, aşağıdaki sadeleşmeler yapılarak

$$-d\left(\frac{\tau(s)}{\kappa(s)}\right)=\frac{\tau(s)}{\kappa(s)}\left(\frac{1}{t}+vt\kappa(s)\right),$$

$$\frac{d\left(\frac{\tau(s)}{\kappa(s)}\right)}{\frac{\tau(s)}{\kappa(s)}}=-\left(\frac{1}{t}+vt\kappa(s)\right),$$

$$\left(\ln\frac{\tau(s)}{\kappa(s)}\right)'=-\frac{1}{t}-vt\kappa(s),$$

bulunur. Böylece (4.1.5) den

$$F(s) = -\frac{1}{t} - vt\kappa(s),$$

$$F(s) + \frac{1}{t} = -vt\kappa(s)$$

bulunur. Buradan

$$v = \frac{-F(s)}{t\kappa(s)} - \frac{1}{t^2\kappa(s)}$$

olduğu görülür. Sonuç olarak

$$u = \frac{1}{t}, \quad v = \frac{-F(s)}{t\kappa(s)} - \frac{1}{t^2\kappa(s)} \tag{4.1.6}$$

bulunur. (3.1.18) denkleminde (4.1.2) ve (4.1.6) yerine yazılarak

$$\begin{aligned}
\alpha^1 &= uw^1 - vw^2, \\
&= \frac{1}{t}(ds + dt) - \left(\frac{-F(s)}{t\kappa(s)} - \frac{1}{t^2\kappa(s)}\right)(t\kappa(s)ds), \\
&= \left(\frac{1}{t} + \frac{F(s)}{t\kappa(s)}t\kappa(s) + \frac{t\kappa(s)}{t^2\kappa(s)}\right)ds + \frac{1}{t}dt, \\
&= \left(F(s) + \frac{2}{t}\right)ds + \frac{1}{t}dt
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\alpha^2 &= -vw^1 + uw^2, \\
&= \left(\frac{F(s)}{t\kappa(s)} + \frac{1}{t^2\kappa(s)}\right)(ds + dt) + \frac{1}{t}(t\kappa(s)ds), \\
&= \left(\frac{F(s)}{t\kappa(s)} + \frac{1}{t^2\kappa(s)} + \kappa(s)\right)ds + \frac{F(s)}{t\kappa(s)} + \frac{1}{t^2\kappa(s)})dt, \\
&= \left(\kappa(s) + \frac{F(s)}{t\kappa(s)} + \frac{1}{t^2\kappa(s)}\right)ds + \frac{F(s)}{t\kappa(s)} + \frac{1}{t^2\kappa(s)})dt
\end{aligned}$$

bulunur. Sonuç olarak

$$\alpha^1 = \left(F(s) + \frac{2}{t} \right) ds + \frac{1}{t} dt,$$
$$\alpha^2 = \left(\kappa(s) + \frac{F(s)}{t\kappa(s)} + \frac{1}{t^2\kappa(s)} \right) ds + \left(\frac{F(s)}{t\kappa(s)} + \frac{1}{t^2\kappa(s)} \right) dt \tag{4.1.7}$$

elde edilmiş olur. (4.1.7) deki eşitliklerin, sırasıyla, dış diferansiyeli alınırsa

$$\begin{aligned}
d\alpha^1 &= d\left(F(s) + \frac{2}{t} \right) \wedge ds + d(\frac{1}{t}) \wedge dt, \\
&= \left[F(s)' ds + \left(\frac{-2}{t^2} \right) dt \right] \wedge ds + (\frac{-1}{t^2} dt) \wedge dt, \\
&= \left(\frac{-2}{t^2} \right) dt \wedge ds, \\
&= \frac{2}{t^2} ds \wedge dt (\neq 0)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
d\alpha^2 &= d\left(\kappa(s) + \frac{F(s)}{t\kappa(s)} + \frac{1}{t^2\kappa(s)} \right) \wedge ds + d\left(\frac{F(s)}{t\kappa(s)} + \frac{1}{t^2\kappa(s)} \right) \wedge dt, \\
&= \left(\kappa'(s)ds + \frac{F'(s)t\kappa(s)ds - F(s)\kappa(s)dt - F(s)t\kappa'(s)ds}{t^2\kappa^2(s)} - \frac{2t\kappa(s)dt + t^2\kappa'(s)ds}{t^4\kappa^2(s)} \right) \wedge ds \\
&+ \left(\frac{F'(s)t\kappa(s)ds - F(s)\kappa(s)dt - F(s)t\kappa'(s)ds}{t^2\kappa^2(s)} - \frac{2t\kappa(s)dt + t^2\kappa'(s)ds}{t^4\kappa^2(s)} \right) \wedge dt, \\
&= \left(\kappa'(s)ds + \frac{F'(s)}{t\kappa(s)} ds - \frac{F(s)}{t^2\kappa(s)} dt - \frac{F(s)t\kappa'(s)}{t^2\kappa^2(s)} ds - \frac{2}{t^3\kappa(s)} dt \quad - \frac{\kappa'(s)}{t^2\kappa^2(s)} ds \right) \wedge ds \\
&+ \left(\frac{F'(s)}{t\kappa(s)} ds - \frac{F(s)}{t^2\kappa(s)} dt - \frac{F(s)\kappa'(s)}{t\kappa^2(s)} ds - \frac{2}{t^3\kappa(s)} dt \quad - \frac{\kappa'(s)}{t^2\kappa^2(s)} ds \right) \wedge dt, \\
&= -\frac{F(s)}{t^2\kappa(s)} dt \wedge ds - \frac{2}{t^3\kappa(s)} dt \wedge ds + \frac{F'(s)}{t\kappa(s)} ds \wedge dt - \frac{F(s)\kappa'(s)}{t\kappa^2(s)} ds \wedge dt - \frac{\kappa'(s)}{t^2\kappa^2(s)} ds \wedge dt, \\
&= \left(\frac{F(s)}{t^2\kappa(s)} + \frac{2}{t^3\kappa(s)} + \frac{F'(s)}{t\kappa(s)} - \frac{F(s)\kappa'(s)}{t\kappa^2(s)} - \frac{\kappa'(s)}{t^2\kappa^2(s)} \right) ds \wedge dt
\end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca $\left(\ln \kappa(s)\right)' = \dfrac{\kappa'(s)}{\kappa(s)}$ olduğundan $\kappa'(s) = \left(\ln \kappa(s)\right)' \kappa(s)$ olup bu denklem son eşitlikte yerine yazılırsa ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$d\alpha^2=\left(\frac{F(s)}{t^2\kappa(s)}+\frac{2}{t^3\kappa(s)}+\frac{F'(s)}{t\kappa(s)}-\frac{F(s)(\ln\kappa(s))'}{t\kappa(s)}-\frac{(\ln\kappa(s))'}{t^2\kappa(s)}\right)ds\wedge dt,$$
$$=\left(\frac{tF(s)+2+t^2F'(s)-F(s)t^2(\ln\kappa(s))'-(\ln\kappa(s))'t}{t^3\kappa(s)}\right)ds\wedge dt,$$
$$=\left(\frac{t^2F'(s)+tF(s)+2-t^2F(s)(\ln\kappa(s))'-(\ln\kappa(s))'t}{t^3\kappa(s)}\right)ds\wedge dt$$

olur. Böylece

$$d\alpha^1=\frac{2}{t^2}ds\wedge dt,$$
$$d\alpha^2=\left(\frac{t^2F'(s)+tF(s)+2-t^2F(s)(\ln\kappa(s))'-(\ln\kappa(s))'t}{t^3\kappa(s)}\right)ds\wedge dt \tag{4.1.8}$$

elde edilir. (4.1.7) de verilen eşitliklerden

$$\alpha^1\wedge\alpha^2=\left(\left(F(s)+\frac{2}{t}\right)ds+\frac{1}{t}dt\right)\wedge\left(\left(\kappa(s)+\frac{F(s)}{t\kappa(s)}+\frac{1}{t^2\kappa(s)}\right)ds+\frac{F(s)}{t\kappa(s)}+\frac{1}{t^2\kappa(s)})dt\right),$$
$$=\left(F(s)+\frac{2}{t}\right)\left(\frac{F(s)}{t\kappa(s)}+\frac{1}{t^2\kappa(s)}\right)ds\wedge dt+\left(\frac{1}{t}\right)\left(\kappa(s)+\frac{F(s)}{t\kappa(s)}+\frac{1}{t^2\kappa(s)}\right)dt\wedge ds,$$
$$=\left(\frac{F^2(s)}{t\kappa(s)}+\frac{F(s)}{t^2\kappa(s)}+\frac{2F(s)}{t^2\kappa(s)}+\frac{2}{t^3\kappa(s)}\right)ds\wedge dt+\left(\frac{\kappa(s)}{t}+\frac{F(s)}{t^2\kappa(s)}+\frac{1}{t^3\kappa(s)}\right)dt\wedge ds,$$
$$=\left(\frac{F^2(s)}{t\kappa(s)}+\frac{F(s)}{t^2\kappa(s)}+\frac{2F(s)}{t^2\kappa(s)}+\frac{2}{t^3\kappa(s)}-\frac{\kappa(s)}{t}-\frac{F(s)}{t^2\kappa(s)}-\frac{1}{t^3\kappa(s)}\right)ds\wedge dt,$$
$$=\left(\frac{F^2(s)}{t\kappa(s)}+\frac{2F(s)}{t^2\kappa(s)}-\frac{\kappa(s)}{t}+\frac{1}{t^3\kappa(s)}\right)ds\wedge dt$$

bulunur. Gerekli düzeltmeler sonucu

$$\alpha^1\wedge\alpha^2=\frac{t^2F^2(s)+2tF(s)+1-t^2\kappa^2(s)}{t^3\kappa(s)}ds\wedge dt \quad (\neq 0) \tag{4.1.9}$$

elde edilir. (3.2.9) denklemindeki ilk eşitlikte (4.1.8) ve (4.1.9) eşitlikleri yerine yazılırsa

$$\frac{2}{t^2}ds\wedge dt = P\left(\frac{t^2F^2(s)+2tF(s)+1-t^2\kappa^2(s)}{t^3\kappa(s)}\right)ds\wedge dt$$

elde edilir. Buradan

$$P=\frac{2t\kappa(s)}{t^2F^2(s)+2tF(s)+1-t^2\kappa^2(s)}$$

olduğu görülür. Benzer şekilde (3.2.9) deki ikinci eşitlikte (4.1.8) ve (4.1.9) yerine yazılırsa

$$\left(\frac{t^2F'(s)+tF(s)+2-t^2F(s)(\ln\kappa(s))'-(ln\kappa(s))'t}{t^3\kappa(s)}\right)ds\wedge dt = Q\left(\frac{t^2F^2(s)+2tF(s)+1-t^2\kappa^2(s)}{t^3\kappa(s)}\right)ds\wedge dt$$

elde edilir. Buradan

$$Q=\frac{F'(s)t^2+F(s)t+2-t^2F(s)(\ln\kappa(s))'-(\ln\kappa(s))'t}{t^2F^2(s)+2tF(s)+1-t^2\kappa^2(s)}$$

olduğu görülür. Böylece

$$\begin{aligned} P&=\frac{2t\kappa(s)}{t^2F^2(s)+2tF(s)+1-t^2\kappa^2(s)},\\ Q&=\frac{F'(s)t^2+F(s)t+2-t^2F(s)(\ln\kappa(s))'-(\ln\kappa(s))'t}{t^2F^2(s)+2tF(s)+1-t^2\kappa^2(s)} \end{aligned} \tag{4.1.10}$$

elde edilmiş olur.

Şimdi Bölüm 3 de elde etmiş olduğumuz bir yüzeyin Bonnet yüzeyi olma koşulu olarak C_3 de verilen kriteri tekrar inceleyelim. (3.2.11) denkleminde (4.1.10) eşitlikleri yerine yazılırsa

$$T=\frac{1-Q}{P}=\frac{1-\left(\dfrac{F'(s)t^2+F(s)t+2-t^2F(s)(\ln\kappa(s))'-(\ln\kappa(s))'t}{t^2F^2(s)+2tF(s)+1-t^2\kappa^2(s)}\right)}{\dfrac{2t\kappa(s)}{t^2F^2(s)+2tF(s)+1-t^2\kappa^2(s)}},$$

$$T=\frac{-F'(s)t^2+t^2F(s)(\ln\kappa(s))'+t^2F^2(s)-t^2\kappa^2(s)+(\ln\kappa(s))'t+F(s)t-1}{2t\kappa(s)} \tag{4.1.11}$$

elde edilir. (4.1.5) denkleminde gerekli düzenlemeler yaparak

$$F(s)=(\ln\tau(s))'-(\ln\kappa(s))' \tag{4.1.12}$$

bulunur. Buradan

$$(\ln\kappa(s))'=(\ln\tau(s))'-F(s)$$

olduğu görülür. Bu eşitlik (4.1.11) denkleminde yerine yazılırsa

$$T=\frac{-F'(s)t^2+t^2F(s)\left((\ln\tau(s))'-F(s)\right)+t^2F^2(s)-t^2\kappa^2(s)+\left((\ln\tau(s))'-F(s)\right)t+F(s)t-1}{2t\kappa(s)}$$

olur ki gerekli sadeleştirmeler sonucu

$$T=\frac{t^2\left(-F'(s)+F(s)(\ln\tau(s))'-\kappa^2(s)\right)+t(\ln\tau(s))'-1}{2t\kappa(s)} \tag{4.1.13}$$

bulunur. Bu son denklemin diferansiyelinden

$$\begin{aligned}dT={}&\frac{2\kappa(s)\left(\left(-F'(s)+F(s)(\ln\tau(s))'-\kappa^2(s)\right)dt+t\left(-F'(s)+F(s)(\ln\tau(s))'-\kappa^2(s)\right)'ds\right)}{4\kappa^2(s)}\\&-\frac{2\kappa'(s)\left(t\left(-F'(s)+F(s)(\ln\tau(s))'-\kappa^2(s)\right)\right)ds}{4\kappa^2(s)}+\frac{2\left((\ln\tau(s))''\kappa(s)-(\ln\tau(s))'\kappa'(s)\right)ds}{4\kappa^2(s)}\\&+\frac{2\kappa dt+2tds}{4t^2\kappa^2(s)}\end{aligned}$$

elde edilir. Gerekli sadeleşmeler sonucu

$$dT=\left(\frac{t^2}{2t\kappa(s)}\left(-F'(s)+F(s)(\ln\tau(s))'-\kappa^2(s)\right)'-\frac{t^2}{2t\kappa(s)}\frac{\kappa'(s)}{\kappa(s)}\left(-F'(s)+F(s)(\ln\tau(s))'-\kappa^2(s)\right)\right.$$
$$\left.+\frac{t}{2t\kappa(s)}(\ln\tau(s))''-\frac{t}{2t\kappa(s)}\frac{\kappa'(s)}{\kappa(s)}(\ln\tau(s))'+\frac{1}{2t\kappa(s)}\frac{\kappa'(s)}{\kappa(s)}\right)ds \tag{4.1.14}$$
$$+\left(\frac{t^2}{2t\kappa(s)}\left(-F'(s)+F(s)(\ln\tau(s))'-\kappa^2(s)\right)+\frac{1}{2t^2\kappa(s)}\right)dt$$

bulunur. (3.2.8) de verilen eşitliğin sağ tarafı hesaplanmak üzere (4.1.7) ve (4.1.13) denklemleri göz önüne alınırsa

$$T\alpha^1+\alpha^2=\left(\frac{t^2\left(-F'(s)+F(s)(\ln\tau(s))'-\kappa^2(s)\right)+t(\ln\tau(s))'-1}{2t\kappa(s)}\right)\left(\left(F(s)+\frac{2}{t}\right)ds+\frac{1}{t}dt\right)$$
$$+\left(\left(\kappa(s)+\frac{F(s)}{t\kappa(s)}+\frac{1}{t^2\kappa(s)}\right)ds+\left(\frac{F(s)}{t\kappa(s)}+\frac{1}{t^2\kappa(s)}\right)dt\right)$$

elde edilir ve gerekli sadeleşmeler sonucu

$$T\alpha^1+\alpha^2=\left(\frac{t^2F(s)\left(-F'(s)+F(s)(\ln\tau(s))'-\kappa^2(s)\right)+t\left(3F(s)(\ln\tau(s))'-2F'(s)\right)+F(s)+2(\ln\tau(s))'}{2t\kappa(s)}\right)ds \tag{4.1.15}$$
$$+\left(\frac{t^2\left(-F'(s)+F(s)(\ln\tau(s))'-\kappa^2(s)\right)+t\left((\ln\tau(s))'+2F(s)\right)+1}{2t^2\kappa(s)}\right)dt$$

yazılır. $dT=T\alpha^1+\alpha^2$ olduğundan (4.1.14) ile (4.1.15) karşılaştırılırsa

$$(\ln\tau(s))'+2F(s)=0$$

bulunur. Böylece

$$(\ln\tau(s))'=-2F(s) \tag{4.1.16}$$

olduğu görülür. Bu eşitlik (4.1.12) de yerine yazılırsa

$$(\ln\kappa(s))'=-3F(s) \tag{4.1.17}$$

elde edilir. Ayrıca (4.1.16) denklemi (4.1.12) de yerine yazılırsa

$$\left(\ln\tau(s)\right)' = -2\left(\left(\ln\tau(s)\right)' - \left(\ln\kappa(s)\right)'\right)$$

bulunur. Buradan

$$3\left(\ln\tau(s)\right)' - 2\left(\ln\kappa(s)\right)' = 0$$

olup bu son denklemin integralinden

$$\ln\tau^3(s)A - \ln\kappa^2(s) = 0$$

elde edilir öyle ki burada A sayısı $A\tau > 0$ olacak şekilde sabittir.

$$\ln A\tau^3(s) = \ln\kappa^2(s)$$

dir. Buradan

$$A\tau^3(s) = \kappa^2(s) \tag{4.1.18}$$

bulunur. (4.1.16) ve (4.1.17) değerleri, (4.1.14) de yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned} dT = {} & \frac{t^2\left(-F'(s) - 2F^2(s) - \kappa^2(s)\right)' - t^2\left(-3F(s)\right)\left(-F'(s) - 2F^2(s) - \kappa^2(s)\right)}{2t\kappa(s)}ds \\ & + \frac{t(-2F'(s) - t(-3F(s))(-2F(s) + (-3F(s))}{2t\kappa(s)}ds \\ & + \frac{t^2\left(-F'(s) + F(s)\left(\ln\tau(s)\right)' - \kappa^2(s)\right) + 1}{2t^2\kappa(s)}dt \end{aligned}$$

bulunur ve gerekli sadeleştirmeler sonucu

$$\begin{aligned} dT = {} & \frac{t^2\left(\left(-F'(s) - 2F^2(s) - \kappa^2(s)\right)' + 3F(s)\left(-F'(s) - 2F^2(s) - \kappa^2(s)\right)\right) - t\left(2F'(s) + 6F^2(s)\right) - 3F(s)}{2t\kappa(s)}ds \\ & + \frac{t^2\left(F(s)\left(\ln\tau(s)\right)' - \kappa^2(s) - F'(s)\right) + 1}{2t^2\kappa(s)}dt \end{aligned} \tag{4.1.19}$$

olduğu görülür. (4.1.15) ile (4.1.19) karşılaştırıldığında

$$\left(-F'(s)-2F^2(s)-\kappa^2(s)\right)'+3F(s)\left(-F'(s)-2F^2(s)-\kappa^2(s)\right)=F(s)\left(-F'(s)+F(s)\left(\ln\tau(s)\right)'-\kappa^2(s)\right)$$

bulunur. Burada (4.1.16) yerine yazılırsa

$$\left(-F'(s)-2F^2(s)-\kappa^2(s)\right)'+3F(s)\left(-F'(s)-2F^2(s)-\kappa^2(s)\right)=F(s)\left(-F'(s)-2F^2(s)-\kappa^2(s)\right)$$

olur. Yani

$$\left(-F'(s)-2F^2(s)-\kappa^2(s)\right)'=-2F(s)\left(-F'(s)-2F^2(s)-\kappa^2(s)\right)$$

olduğu görülür. (4.1.16) den elde edilen $\dfrac{\tau'(s)}{\tau(s)}=-2F(s)$ eşitliği son denklemde yazılır ve düzenlenirse

$$\frac{\left(-F'(s)-2F^2(s)-\kappa^2(s)\right)'\tau(s)-\left(-F'(s)-2F^2(s)-\kappa^2(s)\right)\tau'(s)}{\tau^2(s)}=0$$

dır. Kolayca görülür ki

$$\left(\frac{-F'(s)-2F^2(s)-\kappa^2(s)}{\tau(s)}\right)'=0$$

dır ve

$$\left(\frac{-F'(s)-2F^2(s)-\kappa^2(s)}{\tau(s)}\right)=B$$

yazılabilir öyle ki burada B sabit sayıdır. Bu son denklemden

$$-F'(s)-2F^2(s)=\kappa^2(s)+B\tau(s) \tag{4.1.20}$$

elde edilir. (4.1.16) dan elde edilen $F(s)=\dfrac{-1}{2}\dfrac{\tau'(s)}{\tau(s)}$ eşitliğinden

$$F'(s) = -\frac{\tau''(s)\tau(s) - (\tau'(s))^2}{2\tau^2(s)} \text{ ve } F^2 = \frac{(\tau'(s))^2}{4\tau^2(s)}$$

bulunur ki bu eşitlikler yardımıyla (4.1.20) denklemi

$$\frac{\tau''(s)\tau(s) - (\tau'(s))^2}{2\tau^2(s)} - 2\frac{(\tau'(s))^2}{4\tau^2(s)} = \kappa^2(s) + B\tau(s)$$

olarak düzenlenir ve gerekli sadeleştirmeler sonucu

$$\tau''(s)\tau(s) - 2(\tau'(s))^2 = 2\tau^2(s)\left(\kappa^2(s) + B\tau(s)\right)$$

bulunur. Son denklemde (4.1.18) de verilen eşitlik yerine yazıldığında

$$\tau''(s)\tau(s) - 2(\tau'(s))^2 = 2\tau^2(s)\left(A\tau^3(s) + B\tau(s)\right)$$

yani

$$\tau''(s)\tau(s) - 2(\tau'(s))^2 = 2A\tau^5(s) + 2B\tau^3(s) \qquad (4.1.21)$$

elde edilir. Bu eşitliğin her iki tarafı $\dfrac{2}{\tau(s)}$ ile çarpılırsa

$$2\tau''(s) - \frac{4}{\tau(s)}(\tau'(s))^2 = 4A\tau^4(s) + 4B\tau^2(s) \qquad (4.1.22)$$

elde edilir. Burada $\dfrac{d\tau}{ds} = \tau'(s) = \sigma(\tau)$ diyelim. O halde aşağıdaki işlemler sırasıyla yapıldığında

$$\begin{aligned}
\tau''(s) &= \sigma'(\tau)\tau'(s),\\
\tau''(s) &= \sigma'(\tau)\sigma(\tau),\\
2\tau''(s) &= 2\sigma'(\tau)\sigma(\tau),\\
2\tau'' &= (\sigma^2)'
\end{aligned}$$

eşitliğinin var olduğu görülür. Böylece (4.1.22) denklemi

$$(\sigma^2)' - \frac{4}{\tau(s)}\sigma^2 = 4A\tau^4\left(s\right) + 4B\tau^2\left(s\right)$$

olarak düzenlenir. Tekrar $\sigma^2 = \beta$ alınarak

$$\beta' - \frac{4}{\tau(s)}\beta = 4A\tau^4\left(s\right) + 4B\tau^2\left(s\right)$$

birinci mertebeden lineer diferansiyel denklemi elde edilir. Burada integral çarpanı

$$\lambda = e^{-\int \frac{4}{\tau} d\tau} = \tau^{-4}$$

olmak üzere bu diferansiyel denklemin çözümü

$$\beta = \frac{1}{\tau^{-4}}\left(\int \tau^{-4}\left(4A\tau^4 + 4B\tau^2\right)d\tau + C\right), \; C = \text{sabit}$$

$$\beta = 4A\tau^5 - 4B\tau^3 + C\tau^4$$

bulunur. Ayrıca $\sigma^2 = \beta$ olduğundan

$$\sigma^2 = \left(\tau'\right)^2 = 4A\tau^5 + C\tau^4 - 4B\tau^3$$

olduğu görülür. Burada $\left(\tau'\right)^2 \geq 0$ ve $A\tau^3\left(s\right) = \kappa^2\left(s\right) > 0$ olduğundan

$$4\tau^2 + \frac{C}{A}\tau - 4\frac{B}{A} \geq 0$$

dır. Eğer $\Delta = C^2 - 4\left(4A\right)(-4B) > 0$ yani $C^2 > -64AB$ ise $\tau < r_1 < r_2$ veya $r_1 < r_2 < \tau$ ve $\tau \neq 0$ dır. Burada r_1 ve r_2, $4\tau^2 + \frac{C}{A}\tau - 4\frac{B}{A} = 0$ ikinci dereceden üç terimlinin kökleridir.

Böylece aşağıdaki teorem verilebilir:

Teorem 4.1.1. $X(s,t)$ timelike tanjant açılabilir yüzeyin Bonnet yüzey olması için gerek ve yeter şartlar

$$\begin{aligned}
&\text{i) } A\tau^3(s)=k^2(s),\ A\tau(s)>0\ ,\ A=\text{sabit}\\
&\text{ii) } \tau''(s)\tau(s)-2\left(\tau'(s)\right)^2=2A\tau^5(s)+2B\tau^3(s),\ B=\text{sabit veya}\\
&\quad \left(\tau'\right)^2=A\tau^3\left(4\tau^2+\frac{C}{A}\tau-4\frac{B}{A}\right)\\
&\text{iii) } C^2>-64AB,\ C=\text{sabit}
\end{aligned} \tag{4.1.23}$$

dır.

4.2. Dayanak Eğrisinin Eğrilik ve Burulması Sabit Olan Timelike Tanjant Açılabilir Yüzeyler

$X(s,t)=\vec{\eta}(s)+t\vec{e_1}(s)$, $t>0$ timelike tanjant açılabilir yüzeyinin $\eta(s)$, dayanak eğrisinin eğrilik ve burulması sabit olsun. Bu durumda $X(s,t)$ yüzeyi $\eta(s)$ timelike dairesel helisin timelike açılabilir tanjant yüzeyidir. Bütün t-sabit eğrileri timelike helistir ve $X(s,t)$ timelike düz (flat) helikoidal yüzeydir. Bu bölümde $w^1, w^2, w_1^2, w_1^3, w_2^3$, a ve c ler Bölüm 4.1. deki gibi ifade edilir. O halde (4.1.5) denkleminden

$$F(s)=\left(\ln\frac{\tau(s)}{\kappa(s)}\right)'=\frac{\left(\dfrac{\tau(s)}{\kappa(s)}\right)'}{\dfrac{\tau(s)}{\kappa(s)}}$$

olduğu bilindiği üzere burada τ ve κ sabit olduğundan $F(s)=0$ bulunur. Ayrıca (4.1.12) ile verilen

$$T=\coth\varphi=\frac{t^2\left(-F'(s)+F(s)\left(\ln\tau(s)\right)'-\kappa^2(s)\right)+t\left(\ln\tau(s)\right)'-1}{2t\kappa(s)}$$

denkleminde $\tau(s)$ sabit olduğundan $\left(\ln\tau(s)\right)'=0$ ve $F(s)=0$ olduğundan $F'(s)=0$ dır. Dolayısıyla

$$T=\coth\varphi=\frac{-t^2\kappa^2-1}{2t\kappa}\quad,\quad \varphi\in(0,\infty)$$

bulunur. Bu son denklem yardımıyla

$$1-\left(\frac{-t^2\kappa^2-1}{2t\kappa}\right)^2=-\frac{1}{\sinh^2\varphi}$$

eşitliği verilebilir. Aşağıdaki düzenlemeler sonucu

$$\frac{4t^2\kappa^2-\left(t^4\kappa^4+2t^2\kappa^2+1\right)}{4t^2\kappa^2}=-\frac{1}{\sinh^2\varphi},$$
$$\frac{-t^4\kappa^2+2t^2\kappa^2-1}{4t^2\kappa^2}=-\frac{1}{\sinh^2\varphi},$$
$$\sinh^2\varphi=\frac{4t^2\kappa^2}{\left(t^2\kappa^2-1\right)^2},$$
$$\sinh\varphi=\frac{2t\kappa}{t^2\kappa^2-1}\quad,\quad \varphi\in(0,\infty)$$

bulunur. Ayrıca

$$\cosh^2\varphi-\frac{4t^2\kappa^2}{\left(t^2\kappa^2-1\right)^2}=1$$

yazılabileceğinden

$$\cosh^2\varphi=1+\frac{4t^2\kappa^2}{t^4\kappa^4-2t^2\kappa^2+1},$$
$$\cosh^2\varphi=\frac{t^4\kappa^4-2t^2\kappa^2+1+4t^2\kappa^2}{t^4\kappa^4-2t^2\kappa^2+1},$$

$$\cosh^2\varphi = \frac{t^4\kappa^4 + 2t^2\kappa^2 + 1}{t^4\kappa^4 - 2t^2\kappa^2 + 1},$$

$$\cosh^2\varphi = \frac{\left(t^2\kappa^2 + 1\right)^2}{\left(t^2\kappa^2 - 1\right)^2},$$

$$\cosh\varphi = -\frac{t^2\kappa^2 + 1}{t^2\kappa^2 - 1} \quad , \quad \varphi \in (0,\infty)$$

olduğu kolayca görülür. Böyle bir yüzeyin birinci temel formu

$$\bar{\mathrm{I}} = \left(-1 + t^2\kappa^2(s)\right)ds^2 - 2dsdt - dt^2$$

olarak elde edilir. Yüzey üzerindeki yansıma ihtimali de göz önüne alınarak

$$dX(s,t) = X_s\,ds + X_t\,dt$$

$$dX(s,t) = \left(\vec{e_1}(s) + t\kappa(s)\vec{e_2}(s)\right)ds + \vec{e_1}(s)\,dt$$

$$dX(s,t) = (ds + dt)\vec{e_1}(s) + \left(t\kappa(s)\,ds\right)\vec{e_2}(s)$$

elde edilir. Bu denklem aynı zamanda

$$dX(s,t) = w^1\vec{e_1}(s) + w^2\vec{e_2}(s)$$

şeklinde yazılıp, bu iki ifadenin eşitliğinden

$$w^1 = ds + dt,\ w^2 = t\kappa(s)\,ds$$

bulunur. w^1 ve w^2 değerleri (3.2.3) denkleminde yazılırsa

$$\begin{aligned}
\overline{w}^1 &= \pm\left(\cosh\varphi w^1 + \sinh\varphi w^2\right),\\
&= \pm\left(\left(-\frac{t^2\kappa^2+1}{t^2\kappa^2-1}\right)(ds+dt) + \left(\frac{2t\kappa}{t^2\kappa^2-1}\right)(t\kappa ds)\right),\\
&= \pm\left(\left(-\frac{t^2\kappa^2+1}{t^2\kappa^2-1} + \frac{2t^2\kappa^2}{t^2\kappa^2-1}\right)ds + \left(\frac{t^2\kappa^2+1}{t^2\kappa^2-1}\right)dt\right),
\end{aligned}$$

$$\overline{w}^1 = \pm\left(\left(\frac{t^2\kappa^2-1}{t^2\kappa^2-1}\right)ds+\left(\frac{t^2\kappa^2+1}{t^2\kappa^2-1}\right)dt\right),$$
$$= \pm\left(ds+\frac{t^2\kappa^2+1}{t^2\kappa^2-1}dt\right)$$

ve

$$\overline{w}^2 = \pm\left(\sinh\varphi w^1+\cosh\varphi w^2\right),$$
$$= \pm\left(\left(\frac{2t\kappa}{t^2\kappa^2-1}\right)(ds+dt)+\left(-\frac{t^2\kappa^2+1}{t^2\kappa^2-1}\right)(t\kappa ds)\right),$$
$$= \pm\left(\left(\frac{2t\kappa}{t^2\kappa^2-1}-\frac{t^2\kappa^2+1}{t^2\kappa^2-1}t\kappa\right)ds+\left(\frac{2t\kappa}{t^2\kappa^2-1}\right)dt\right),$$
$$= \pm\left(\left(\frac{2t\kappa-t^3\kappa^3-t\kappa}{t^2\kappa^2-1}\right)ds+\left(\frac{2t\kappa}{t^2\kappa^2-1}\right)dt\right),$$
$$= \pm\left(\left(\frac{t\kappa-t^3\kappa^3}{t^2\kappa^2-1}\right)ds+\left(\frac{2t\kappa}{t^2\kappa^2-1}\right)dt\right),$$
$$= \pm\left(-t\kappa\left(\frac{t^2\kappa^2-1}{t^2\kappa^2-1}\right)ds+\left(\frac{2t\kappa}{t^2\kappa^2-1}\right)dt\right),$$
$$= \pm\left(-t\kappa ds+\frac{2t\kappa}{t^2\kappa^2-1}dt\right)$$

bulunur. $\sinh\varphi = \dfrac{2t\kappa}{t^2\kappa^2-1}$ denkleminin diferansiyeli alındığında

$$\cosh\varphi d\varphi = \frac{(2t\kappa)'\left(t^2\kappa^2-1\right)-(2t\kappa)\left(t^2\kappa^2-1\right)'}{\left(t^2\kappa^2-1\right)^2},$$
$$\cosh\varphi d\varphi = \frac{2(\kappa' t ds+\kappa dt)\left(t^2\kappa^2-1\right)-(2t\kappa)\left(2t^2\kappa\kappa' ds+2t\kappa^2 dt\right)}{\left(t^2\kappa^2-1\right)^2},$$
$$\cosh\varphi d\varphi = \frac{\left(2t^2\kappa^3-2\kappa-4t^2\kappa^3\right)}{\left(t^2\kappa^2-1\right)^2}dt,$$

$$-\frac{t^2\kappa^2+1}{t^2\kappa^2-1}d\varphi=\frac{\left(-2\kappa-2t^2\kappa^3\right)}{\left(t^2\kappa^2-1\right)^2}dt,$$

$$-\frac{t^2\kappa^2+1}{t^2\kappa^2-1}d\varphi=-2\kappa\frac{\left(1+t^2\kappa^2\right)}{\left(t^2\kappa^2-1\right)^2}dt,$$

$$d\varphi=\frac{2\kappa}{t^2\kappa^2-1}dt$$

bulunur. $w_1^2=\kappa ds$ ve $d\varphi$ değerler $\overline{w}_1^2=\pm\left(-d\varphi+w_1^2\right)$ eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}\overline{w}_1^2&=\pm\left(-\frac{2\kappa}{t^2\kappa^2-1}dt+\kappa ds\right),\\&=\pm\frac{1}{t}\left(\kappa t ds-\frac{2\kappa t}{t^2\kappa^2-1}dt\right),\\&=\pm\frac{1}{t}\left(-\overline{w}^2\right),\\&=\pm\frac{1}{t}\overline{w}^2\end{aligned}$$

bulunur. $\overline{M}$ timelike yüzey ve M den $\overline{M}$ yüzeyine asli eğrilikleri koruyan izometri tanımlı olduğundan $\overline{a}=a$, $\overline{c}=c$ olup

$$\overline{w}_1^3=\overline{a}\overline{w}^1 \text{ ve } \overline{w}_2^3=\overline{c}\overline{w}^2$$

yazılabilir. $\overline{a}=a=0,\ \overline{c}=c=-\dfrac{\tau(s)}{t\kappa(s)}$ olduğundan

$$\overline{w}_1^3=0\overline{w}^1$$

ve

$$\begin{aligned}\overline{w}_2^3&=-\frac{\tau(s)}{t\kappa(s)}\overline{w}^2,\\&=-\frac{\tau(s)}{t\kappa(s)}\left[\pm\left(-t\kappa ds+\frac{2t\kappa}{t^2\kappa^2-1}dt\right)\right],\\&=\pm\left(\tau ds-\frac{2t\kappa}{t^2\kappa^2-1}dt\right)\end{aligned}$$

bulunur. Böylece sonuç olarak

$$\bar{\mathrm{I}}=\left(-1+t^2\kappa^2(s)\right)ds^2-2dsdt-dt^2,$$
$$\overline{w}^1=\pm\left(ds+\frac{t^2\kappa^2+1}{t^2\kappa^2-1}dt\right),\ \overline{w}^2=\pm\left(-t\kappa ds+\frac{2t\kappa}{t^2\kappa^2-1}dt\right), \qquad (4.2.1)$$
$$\overline{w}_1^2=\pm\frac{1}{t}\overline{w}^2,\ \overline{w}_1^3=0\overline{w}^1,\ \overline{w}_2^3=\pm\left(\tau ds-\frac{2t\kappa}{t^2\kappa^2-1}dt\right)$$

elde edilir. Ayrıca $\Phi\left(X(s,t)\right)$ timelike yüzeyin görüntüsü (flat) düzdür. Fakat silindir ve koniler için $d\alpha^1=0\Leftrightarrow P=0$ olduğundan $\Phi\left(X(s,t)\right)$ bir silindir veya bir koni olamaz. Bu nedenle $Y(\tilde{s},\tilde{t})=\tilde{\eta}(\tilde{s})+\tilde{t}\vec{\tilde{e}}_1(\tilde{s}),\ \tilde{t}>0$ ifadesi timelike açılabilir tanjant yüzeylerini verir. Burada

$$\tilde{w}_1^2=-\left(-d\varphi+w_1^2\right)=d\varphi-w_1^2$$

dir. $\tilde{\kappa}d\tilde{s}=\dfrac{2\kappa}{t^2\kappa^2-1}dt-\kappa ds,\ \tilde{\kappa}=\kappa$ olduğundan

$$d\tilde{s}+ds=\frac{2}{t^2\kappa^2-1}dt,$$
$$\tilde{s}+s=\frac{2}{\kappa}\left(-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+t\kappa}{1-t\kappa}\right)\right),$$
$$\tilde{s}+s=-\frac{2}{\kappa}\operatorname{arctanh}(\kappa t),$$
$$\tilde{s}=-s-\frac{2}{\kappa}\operatorname{arctanh}(\kappa t)$$

dır. Burada $\tilde{s}$, $\tilde{\eta}(\tilde{s})$ timelike eğrisinin yay parametresidir ve $\dot{\tilde{\eta}}(\tilde{s})=\vec{\tilde{e}}_1(\tilde{s})$ timelike birim teğet vektörüdür. $Y(\tilde{s},\tilde{t})$ timelike yüzeyi için

$$Y(\tilde{s},\tilde{t})=\tilde{\eta}(\tilde{s})+\tilde{t}\vec{\tilde{e}}_1(\tilde{s}),$$
$$\dot{\tilde{\eta}}(\tilde{s})=\vec{\tilde{e}}_1(\tilde{s}),\ \dot{\vec{\tilde{e}}}_1(\tilde{s})=\tilde{\kappa}(\tilde{s})\vec{\tilde{e}}_2(\tilde{s}),$$
$$Y_{\tilde{s}}(\tilde{s},\tilde{t})=\vec{\tilde{e}}_1(\tilde{s})+\tilde{t}\tilde{\kappa}(\tilde{s})\vec{\tilde{e}}_2(\tilde{s}),\ Y_{\tilde{t}}(\tilde{s},\tilde{t})=\vec{\tilde{e}}_1(\tilde{s}),$$
$$\tilde{\mathrm{I}}=\left(-1+\tilde{t}^2\tilde{\kappa}^2(\tilde{s})\right)d\tilde{s}^2-2d\tilde{s}d\tilde{t}-d\tilde{t}$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$\begin{aligned}
dY(\tilde{s},\tilde{t}) &= Y_{\tilde{s}}(\tilde{s},\tilde{t})d\tilde{s} + Y_{\tilde{t}}(\tilde{s},\tilde{t})d\tilde{t},\\
dY(\tilde{s},\tilde{t}) &= \left(\vec{\tilde{e}}_1(\tilde{s}) + \tilde{t}\tilde{\kappa}(\tilde{s})\vec{\tilde{e}}_2(\tilde{s})\right)d\tilde{s} + \vec{\tilde{e}}_1(\tilde{s})d\tilde{t},\\
dY(\tilde{s},\tilde{t}) &= (d\tilde{s} + d\tilde{t})\vec{\tilde{e}}_1(\tilde{s}) + \left(\tilde{t}\tilde{\kappa}(\tilde{s})d\tilde{s}\right)\vec{\tilde{e}}_2(\tilde{s}),\\
dY(\tilde{s},\tilde{t}) &= \tilde{w}^1\vec{\tilde{e}}_1(\tilde{s}) + \tilde{w}^2\vec{\tilde{e}}_2(\tilde{s})
\end{aligned}$$

olup buradan

$$\tilde{w}^1 = d\tilde{s} + d\tilde{t},\ \tilde{w}^2 = \tilde{t}\tilde{\kappa}(\tilde{s})d\tilde{s}$$

yazılır. $\tilde{w}_1^2 = \tilde{\kappa}(\tilde{s})d\tilde{s}$ ifadesinde $\tilde{w}^2 = \tilde{t}\tilde{\kappa}(\tilde{s})d\tilde{s},\ \tilde{\kappa}(\tilde{s})d\tilde{s} = \dfrac{\tilde{w}^2}{\tilde{t}}$ değeri yerine yazılırsa

$$\tilde{w}_1^2 = \tilde{\kappa}(\tilde{s})d\tilde{s} = \frac{\tilde{w}^2}{\tilde{t}}$$

bulunur. $Y(\tilde{s},\tilde{t})$ timelike yüzey ve $X(s,t)$ den $Y(\tilde{s},\tilde{t})$ ye asli eğrilikleri koruyan izometri tanımlı olduğundan

$$\tilde{a} = a = 0,\ \ \tilde{c} = c = -\frac{\tilde{\tau}(\tilde{s})}{\tilde{t}\tilde{\kappa}(\tilde{s})}$$

yazılabilir. O halde

$$\tilde{w}_1^3 = 0\tilde{w}^1$$

ve

$$\tilde{w}_2^3 = -\frac{\tilde{\tau}(\tilde{s})}{\tilde{t}\tilde{\kappa}(\tilde{s})}\tilde{w}^2$$

elde edilir. Böylece sonuç olarak

$$\tilde{\mathrm{I}} = \left(-1+\tilde{t}^2\tilde{\kappa}^2\left(\tilde{s}\right)\right)d\tilde{s}^2 - 2d\tilde{s}d\tilde{t} - d\tilde{t},$$
$$\tilde{w}^1 = d\tilde{s} + d\tilde{t},\ \tilde{w}^2 = \tilde{t}\tilde{\kappa}\left(\tilde{s}\right)d\tilde{s}, \tag{4.2.2}$$
$$\tilde{w}_1^2 = \tilde{\kappa}\left(\tilde{s}\right)d\tilde{s} = \frac{\tilde{w}^2}{\tilde{t}},\ \tilde{w}_1^3 = 0\tilde{w}^1,\ \tilde{w}_2^3 = -\frac{\tilde{\tau}\left(\tilde{s}\right)}{\tilde{t}\tilde{\kappa}\left(\tilde{s}\right)}\tilde{w}^2$$

elde edilir. (4.2.1) de verilen formlar ile (4.2.2) de verilen formlar karşılaştırıldığında $\overline{w}^1$ için + ve $\overline{w}^2$ için − işaretinin alınması gerektiği görülür. Yani, bir Lorentzian yansıma gereklidir ve $\tilde{t} = t,\ \tilde{\kappa} = \kappa,\ \tilde{\tau} = \tau,\ \tilde{s} = -s - \frac{2}{\kappa}\operatorname{arctanh}\left(\kappa t\right)$ dir. Böylece, eşlenik timelike yüzey esas yüzeyin kendisi olur ve ortalama eğriliği koruyan non-trivial izometri

$$\Phi : X\left(s,t\right) \rightarrow X\left(s,t\right)$$
$$\left(s,t\right) \rightarrow \Phi\left(s,t\right) = \left(-s - \frac{2}{\kappa}\operatorname{arctanh}\left(\kappa t\right), t\right)$$

veya

$$\Phi\left(\eta\left(s\right) + t\overrightarrow{e_1}(s)\right) = \eta\left(-s - \frac{2}{\kappa}\operatorname{arctanh}\left(\kappa t\right)\right) + t\overrightarrow{e_1}\left(-s - \frac{2}{\kappa}\operatorname{arctanh}\left(\kappa t\right)\right)$$

olarak verilir. Böylece aşağıdaki sonuçlar verilebilir.

Sonuç 4.2.1. Ortalama eğriliği koruyan $\Phi : X\left(s,t\right) \rightarrow X\left(s,t\right)$ dönüşümü bir izometri olduğu direkt olarak gösterilebilir. Bu dönüşüme karşılık gelen ikinci temel formlar eşit değildir ve bu nedenle Φ trivial değildir.

Sonuç 4.2.2. $\tilde{s} = -s - \frac{2}{\kappa}\operatorname{arctanh}\left(\kappa t\right), \tilde{t} = -t < 0$ dönüşümü ortalama eğriliği koruyan X in diğer parçası üzerinde non-trivial izometridir fakat geometrik olarak farklı değildir.

BÖLÜM 5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmadaki orijinal kısım Bölüm 4 de verilmiş olup iki alt bölüm halinde düzenlenmiştir. Bölüm 3 de elde edilen timelike yüzeylerin Bonnet yüzey olma kriteri göz önüne alınmış ve timelike tanjant açılabilir yüzeylerin Bonnet yüzey olma koşulları araştırılmıştır. Bölüm 4 ün ilk alt bölümü olan 4.1'de timelike tanjant açılabilir yüzeylerin dayanak eğrilerinin eğrilik ve burulmalarının sabit olmadığı durum göz önüne alınarak timelike tanjant açılabilir yüzeyin Bonnet yüzey olması için gerek ve yeter şart elde edilmiştir. Alt Bölüm 4.2 de ise timelike tanjant açılabilir yüzeyin özel olarak düz helikodial olması yani dayanak eğrisinin eğrilik ve burulmasının sabit olması durumu araştırılmıştır. Bu durumda düz helikodial yüzeyin sahip olduğu ortalama eğriliği koruyan non-trivial izometri elde edilmiştir.

Bu çalışmada elde edilen teorem ve sonuçlar tanjant açılabilir null scrollar için de araştırılabilir.

KAYNAKLAR

[1] BONNET, O., Mémoire sur la théorie des surfaces applicables, J. École Polytechnique, 42 (1867), 72-92.

[2] CARTAN, E., Sur les couples de surfaces applicables avec conservation des courbures principales, Bull. Sc. Math. 66 (1942), 1-30; reprinted in: Oeuvres Completes, Partie III, vol.2, 1591-1620.

[3] LAWSON, H. B., Complete minimal surface in S^3, Ann. of Math. (2), 92 (1970), 335-374.

[4] CHERN, S.S., Deformation of surfaces preserving principal curvature, Differ. Geometry and Complex Analysis, H. E. Rauch Memorial volume, Springer-Verlag (1985), 155-163.

[5] ROUSSOS, I.M., The helicoidal surfaces as Bonnet surfaces, Tohoku Math. J. (2) 40 (1988), no. 3, 485–490.

[6] ROUSSOS, I.M., Tangent developable surfaces as Bonnet surfaces, Acta Math. Sin. (Engl. Ser.) 15 (1999), no. 2, 269–276.

[7] ROUSSOS, I.M., Global results on Bonnet surfaces, J. Geom. *65* (1999), no. 1-2, 151–168.

[8] SOYUÇOK, Z., The problem of non-trivial isometries of surfaces preserving principal curvatures, J. Geom. 52 (1995), no. 1-2, 173–188.

[9] SOYUÇOK, Z., The problem of isometric deformations of an Euclidean hypersurface preserving mean curvature, Bull. Tech. Univ. 49 (1996), no. 3-4, 551–562.

[10] BAĞDATLI, H., SOYUÇOK, Z., On the problem of isometry of a hypersurface preserving mean curvature, Proc. Indian *Acad. Sci. Math. Sci.* 117 (2007), no. 1, 49–59.

[11] O'NEILL, B., Semi-Riemannian Geometry with applications to relativity, Academic Press, London (1983).

[12] BIRMAN, G.S., NOMIZU, K., Trigonometry in Lorentzian Geometry, Amer. Math. Monthly 91 (1984), no. 9, 543–549.

[13] AKUTAGAWA, K., NISHIKAWA, S., The Gauss map and spacelike surfaces with prescribed mean curvature in Minkowski -space, Tohoku Math. J. (2) 42 (1990), no. 1, 67–82.

[14] BEEM, J.K., EHRLICH, P.E., Global Lorentzian Geometry, Marcel Dekker. Inc, New York (1981).

[15] CHEN, W., LI, H., On the classification of the timelike Bonnet surfaces, in: Geometry and Topology of Submanifolds 10, Differential Geometry in Honor of Professor S S Chern, Peking University, China and TU Berlin, Germany, (1999), 18-31.

[16] TURGUT, A., 3-Boyutlu Minkowski uzayında spacelike ve timelike regle yüzeyler, Ankara Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktora Tezi (1995).

ÖZGEÇMİŞ

Kemal EREN, 02.10.1981 tarihinde Ordu’nun Kabataş ilçesinde doğdu. İlköğrenimini Ordu’nun Kabataş ilçesinde Kabataş İlkokulunda, ortaöğrenimini Gümüşhane M. Ç. Anadolu Öğretmen Lisesinde tamamladı. 1997 yılında Ondokuz Mayıs Üniversitesi Eğitim Fakültesi Matematik Öğretmenliği bölümünde başladığı lisans eğitimini 2001 yılında tamamladı. 2001-2003 öğretim yıllarında Ordu’nun Gölköy İlçesi Karahasan İlköğretim Okulunda, 2004-2006 öğretim yıllarında Ordu’nun Kabataş İlçesi Osman Özyurt İlköğretim Okulunda Matematik Öğretmeni olarak görev yaptı. 2006 yılında Ordu’nun Kabataş İlçesi Kabataş Lisesine Matematik Öğretmeni olarak atandı. Halen, aynı okulda Matematik Öğretmeni olarak görev yapmaktadır. Kemal EREN evli ve iki çocuk babasıdır.