T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ROSENBLOOM-TSFASMAN (RT) AĞIRLIK SAYAÇLARI İÇİN MACWILLIAMS ÖZDEŞLİKLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

N. Tuğba ÖZZAİM

Enstitü Anabilim Dalı	**:**	**MATEMATİK**
Enstitü Bilim Dalı	**:**	**CEBİR VE SAYILAR TEORİSİ**
Tez Danışmanı	**:**	**Doç. Dr. Mehmet ÖZEN**

Mayıs 2012

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ROSENBLOOM-TSFASMAN (RT) AĞIRLIK SAYAÇLARI İÇİN MACWILLIAMS ÖZDEŞLİKLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

N. Tuğba ÖZZAİM

Enstitü Anabilim Dalı	**:**	**MATEMATİK**
Enstitü Bilim Dalı	**:**	**CEBİR VE SAYILAR TEORİSİ**

Bu tez 23 / 05 /2012 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Oybirliği ile kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Metin BAŞARIR **Jüri Başkanı**	**Doç. Dr. Mehmet ÖZEN** **Üye**	**Doç. Dr. Sıtkı DUMAN** **Üye**

TEŞEKKÜR

Bana her zaman fikirleriyle yön gösteren ve bu çalışmamda da yardımlarını eksik etmeyen hocam Sayın Doç. Dr. Mehmet ÖZEN'e teşekkürü bir borç bilirim.
Ayrıca maddi ve manevi desteklerini hiçbir zaman esirgemeyen çok değerli aileme de teşekkür ediyorum.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR

G	: Grup
| |	: Mertebe
R	: Halka
I	: İdeal
F	: Cisim
F_2	: İkili cisim
F_q	: q elemanlı sonlu cisim
V	: Vektör uzayı
SpA	: A kümesinin bütün lineer birleşimlerinin kümesi
$\langle u,v \rangle$	: u ile v nin iç çarpımı
V(n,q)	: Elemanları F_q dan alınan n-lilerin kümesi
C	: Kod
[n,k,d]	: n uzunluğunda, k boyutunda, d minimum uzaklığa sahip lineer kod
$C^{\perp}$	: C kodunun dik tümleyeni
w	: Ağırlık
$W_C(z)$	: C kodunun ağırlık sayacı
χ	: Halkanın bir karakteri
$\tilde{f}$	: Hadamard transformu
$S_C(X,Y)$	: Split ağırlık sayacı
RT	: Rosenbloom-Tsfasman

TABLOLAR LİSTESİ

ÖZET

Anahtar kelimeler: Lineer Kodlar, Non-Hamming Metrik, Tam Ağırlık Sayacı, Split ρ Ağırlık Sayacı.

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm diğer bölümlere hazırlık amaçlı olup bazı temel kavram ve teoremler, lineer kodların yapısı, Hamming metriği ve MacWilliams özdeşliği hakkında bilgi verilmiştir. Bu bölümün sonunda non-Hammnig metriğinde minimum uzaklık, minimum ağırlık ve lineer kodların duali incelenmiştir..

İkinci bölümde $R_2 = F_2 + uF_2 + vF_2 + uvF_2$ halkasının yapısı, R_2 üzerinde lineer kodlar ve halkanın karakter yapısı verilmiştir.

Üçüncü bölümde non-Hammnig metriğine göre $M_{nxs}(R_2)$ üzerinde lineer kodların yapısı ve tam ağırlık sayacı verildi. Bölümün sonunda da tam ağırlık sayacı kullanılarak MacWilliams özdeşliği $M_{nxs}(R_2)$ üzerindeki lineer kodlar için sağlandığı görüldü ve örneklendirildi.

Dördüncü bölümde non-Hamming metriğine göre $M_{nxs}(F_2)$ üzerindeki lineer kodlar için split ρ ağırlık sayacı tanımlanmış ve MacWilliams özdeşliği ispatlanmış ve örneklendirilmiştir.

MACWILLIAMS IDENTITIES FOR ROSENBLOOM TSFASMAN(RT) WEIGHT ENUMERATORS

SUMMARY

Keywords: Linear Codes, Non-Hammning Metric, Complete Weight Enumerator, Split ρ Weight Enumerator.

This thesis consist of four chapter. The first chapter is a preparation for the followings. Some basic definitions and theorems, structure of linear codes, Hamming metric and MacWilliams identity are given. End of the this chapter, minimum distance, minimum weight and dual of linear codes with respect to non-Hamming metric are investigated.

In the second chapter, the structure of $R_2 = F_2 + uF_2 + vF_2 + uvF_2$, linear codes over R_2 and the ring's character are given.

In the third chapter, the structure of linear codes over $M_{nxs}(R_2)$ with respect to non-Hamming metric and complete weight enumerator are investigated. Finally, MacWilliams identity for complete weight enumerator of linear codes over $M_{nxs}(R_2)$ with respect to non-Hamming metric is provided and examples are given.

In the fourth chapter, split ρ weight enumerator for linear codes over $M_{nxs}(F_2)$ is defined and MacWilliams identity is proved and examples are given.

BÖLÜM 1 . GİRİŞ

1.1. Cebirsel Yapılar ve Özellikleri

Bu kısımda temel kodları inşa ederken kullanacağımız cebirsel yapılar ve özellikler işlenmektedir.

Tanım 1.1.1: G *boş* olmayan bir küme ve $*$, G de bir ikili işlem olsun. $(G,*)$ cebirsel yapısı aşağıdaki dört aksiyomu sağlıyorsa G grup olarak adlandırılır [1].
G1: Kapalılık: $\forall a,b \in G$ için $c = a * b \in G$ dır.
G2: Birleşme: $\forall a,b,c \in G$ için $a * (b * c) = (a * b) * c$ dır.
G3: Birim eleman: $\forall a \in G$ için, $a * e = e * a = a$ olacak şekilde $\exists\, e \in G$ vardır.
G4: Ters eleman: $\forall a \in G$ için $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$ olacak şekilde $\exists a^{-1} \in G$ vardır.

Ayrıca $\forall a,b \in G$ için $a*b = b*a$ değişme özelliği de sağlanıyorsa gruba değişmeli (abel) grup denir.

Tanım 1.1.2: G sonlu bir küme ise $(G,*)$ grubuna bir sonlu grup ve eleman sayısına da grubun mertebesi denir. Grubun mertebesi $|G|$ ile gösterilir [1].

Tanım 1.1.3: G bir grup ve H, G grubunun boş olmayan bir alt kümesi olsun.
Eğer H, G grubundaki işleme göre kendi başına bir grup ise H ye, G nin bir alt grubu denir ve $H < G$ ile gösterilir [1].

Tanım 1.1.4: $(G,\circ)$ ve $(H,*)$ iki grup ve $f: G \to H$ bir fonksiyon olsun. $\forall a,b \in G$ için $f(a \circ b) = f(a) * f(b)$ ise f fonksiyonuna G grubundan H grubuna bir homomorfizma denir. Aynı zamanda f birebir ve örten bir homomorfizma ise f izomorfizma olarak adlandırılır [1].

Eğer G ve H grupları arasında bir izomorfizma varsa bu gruplara izomorf gruplar denir ve $G \cong H$ ile gösterilir.

Tanım 1.1.5: $R \neq \varnothing$ kümesi üzerinde tanımlı iki ikili işlem toplama (+) ve çarpma (.) olsun. Aşağıdaki aksiyomları sağlayan $(R,+,.)$ cebirsel yapısına halka denir [1].

H1: $(R,+)$ bir değişmeli bir gruptur.

H2: Çarpma işleminin birleşme özelliği vardır.

H3: Çarpma işleminin toplama işlemi üzerine sağdan ve soldan dağılma özellikleri vardır. Yani,

$$a,b,c \in R \text{ için } a\,.\,(b+c) = a\,.\,b + a\,.\,c \text{ ve } (a+b)\,.\,c = a\,.\,c + b\,.\,c$$

dır.

Halkanın toplama işlemine göre etkisiz elemanına halkanın sıfır elemanı denir ve 0_R ile gösterilir. Eğer çarpma işlemine göre de etkisiz eleman varsa böyle bir halkaya birimli halka denir ve bu etkisiz elemana da halkanın birim elemanı denir ve 1_R ile gösterilir.

Tanım 1.1.6: R bir halka ve $\varnothing \neq I \subset R$ olsun. Aşağıdaki iki aksiyom sağlanıyorsa I ya R nin ideali denir [1].

I1 : $\forall a,b \in I$ için $a-b \in I$ ve

I 2: $\forall\, s \in I$ ve $\forall r \in R$ için $sr \in I$ ve $rs \in I$ dır.

Tanım 1.1.7: R ve S iki halka ve $f : R \to S$ bir fonksiyon olsun. Eğer $\forall a,b \in R$ için;

1) $f(a+b) = f(a) + f(b)$
2) $f(ab) = f(a)f(b)$

ise f ye R den S ye bir halka homomorfizması denir [1] .

Tanım 1.1.8: $f : R \to S$ bir homomorfizma ise f nin çekirdeği

$$Çek\ f = \{a \in R : f(a) = 0_S\} = f^{-1}(0_S)$$

ile tanımlanır [1].

Homomorfizma Teoremi 1.1.1: $f : R \to S$ bir halka homomorfizması ise

1) $Çek\ f = I, R$ nin bir idealidir.

2) $\forall r \in R$ için $\phi(r)=r+I$ ile tanımlı $\phi : R \to R/I$ fonksiyonu bir örten homomorfizmasıdır. ϕ ye doğal homomorfizma denir.

3) $R/I \cong f(R)$ dir [1].

Tanım 1.1.9: R birimli ve değişmeli bir halka ve $R-\{0_R\}=R^*$ ikinci işlem çarpmaya göre bir grup ise R ye bir cisim denir. Bir cisimde sıfırdan farklı her elemanın tersi vardır [1].

Tanım 1.1.10: R bir halka, x bir bilinmeyen ve $a_0, a_1, ..., a_n \in R$ olmak üzere,

$$a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n$$

şeklindeki bir ifadeye R den katsayılı bir polinom denir. R den katsayılı tüm polinomlar kümesi $R[x]$ ile gösterilir [1] .

Eğer $a_n \neq 0$ ise a_n e polinomun başkatsayısı ve n yede polinomun derecesi denir.

1.2. Lineer Kodlar

Bu bölümde çok önemli bir sınıf teşkil eden lineer kodlar ve lineer kodlarla ilgili temel kavramlar verilmektedir.

Tanım 1.2.1: F cismi üzerinde tanımlı elemanları vektörler olan V kümesi aşağıdaki aksiyomları sağlıyorsa V kümesine vektör uzayı denir [2].

V1: V kümesi toplama işlemine göre değişmeli bir gruptur.

V2: $\forall a \in F$ ve $u \in V$ için $au \in V$ dır.

V3: $\forall a,b \in F$ ve $\forall u,v \in V$ için $a(u+v) = au + av$ ve $(a+b)v = av + bv$ dır.

V4: $\forall a,b \in F$ ve $\forall u \in V$ için $(ab)u = a(bu)$

V5: $\forall u \in V$ için $1u = u$ dır.

Tanım 1.2.2: V bir vektör uzayı olsun ve $W \neq \varnothing$ da V nin bir alt kümesi olsun. Eğer W vektör uzayının bütün aksiyomlarını sağlıyorsa W ya V nin bir alt uzayı denir [2].

Teorem 1.2.1: V bir vektör uzayı ve $\varnothing \neq W \subset V$ alt kümesi olsun. W aşağıdaki aksiyomları sağlıyorsa V vektör uzayının bir alt uzayıdır [2].

1) $\forall x, y \in W$ için $x + y \in W$ dır.
2) $\forall a \in F$ ve $\forall x \in W$ için $ax \in W$ dır.

Tanım 1.2.3: a_i ler skalerler (yani cisim elemanları) olmak üzere, r tane $v_1, v_2, ..., v_r$ vektörlerinin lineer birleşimi

$$v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + ... + a_r v_r$$

şeklindedir. Eğer $A = \{v_1, v_2, ..., v_r\}$ ise A kümesinin bütün lineer birleşimlerinin kümesi $Sp(A)$ olarak gösterilir. Ayrıca $Sp(A)$,V vektör uzayının bir alt uzayıdır [2].

Tanım 1.2.4: $A = \{v_1, v_2, ..., v_r\}$ olsun. $Sp(A)$, A kümesinin bütün lineer birleşimlerinin kümesi olmak üzere, $Sp(A)$ uzayına A kümesinin gerdiği (ürettiği) alt uzay denir. E kümesine de, $Sp(A)$ alt uzayının bir üreteci denir [2].

Tanım 1.2.5: V vektör uzayında $v_1, v_2, ..., v_r$ vektörleri verilsin. Eğer

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + ... + a_r v_r = 0$$

olacak biçimde en az biri sıfırdan farklı olan $a_1, a_2, ..., a_r$ sayıları varsa $\{v_1, v_2, ..., v_r\}$ vektörlerinin kümesi lineer bağımlıdır denir. Lineer bağımlı olmayan kümeye lineer bağımsız küme denir [2]. Yani

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + ... + a_r v_r = 0 \Rightarrow a_1 = a_2 = ... = a_r$$

Tanım 1.2.6: V bir vektör uzayı ve $A = \{v_1, v_2, ..., v_r\}$ olsun. Eğer A kümesi aşağıdaki iki koşulu sağlıyorsa A ya V nin bir tabanı veya bazı denir [2].

1) A lineer bağımsız bir kümedir.
2) A, V yi geren bir kümedir.

Tanım 1.2.7: V vektör uzayının herhangi bir tabanındaki vektörlerin sayısına V nin boyutu denir ve boy$V$ ile gösterilir [2].

Tanım 1.2.8: V bir vektör uzayı olsun. Aşağıdaki aksiyomlar sağlanıyorsa bu vektör uzayına iç çarpım uzayı denir [2]. c bir skaler ve $u,v,w \in V$ olmak üzere;

1) $\langle u,u\rangle \geq 0$;$\langle u,u\rangle = 0 \Leftrightarrow u = 0_V$

2) $\langle u,v\rangle = \langle v,u\rangle$ dır.

3) $\langle u+v,w\rangle = \langle u,w\rangle + \langle v,w\rangle$ ve $\langle u,v+w\rangle = \langle u,v\rangle + \langle u,w\rangle$ dır.

4) $\langle cu,v\rangle = c\langle u,v\rangle$ ve $\langle u,cv\rangle = c\langle u,v\rangle$ dır.

Tanım 1.2.9: V iç çarpım uzayında $\langle u,v\rangle = 0$ ise u vektörü, v vektörüne diktir (veya ortogonaldir) denir [2].

Tanım 1.2.10: R bir halka olsun. M kümesi aşağıda verilen dört aksiyomu sağlıyorsa M kümesine R halkası üzerinde sol modül denir [3].

M1: M kümesi toplama işlemine göre değişmeli bir gruptur.

M2: $\forall m \in M$ ve $\forall r, s \in R$ icin $(r + s)m = rm + sm$ dır.

M3: $\forall m \in M$ ve $\forall r, s \in R$ icin $(rs)m = r(sm)$ dır.

M4: $\forall m, n \in M$ ve $\forall r \in R$ icin $r(m + n) = rm + rn$ dır.

Eğer R halkası birimli bir halka ise aşağıdaki ek aksiyom da sağlanır.

M5: $\forall m \in M$ icin $1m = m$ dır.

Tanım da verilen “sol” ifadesi halkanın elemanlarının sol taraftan çarpıldığını gösterir. Eğer halkanın elemanları “sağ” taraftan çarpılıyorsa sağ modül tanımı elde edilir.

Tanım 1.2.11: M , R üzerinde bir modül ve N , M modülünün bir toplama işlemine göre alt grubu olsun. $\forall r \in R$ ve $\forall n \in N$ icin $rn \in N$ ise N , M modülünün alt modülü olarak adlandırılır [3].

Tanım 1.2.12: $x=(x_1,x_2,...,x_n)$ ve $y=(y_1,y_2,...,y_n)$ vektörleri olsun. x ve y nin farklı bileşenlerinin sayısına Hamming uzaklığı denir ve $d(x,y)$ ile gösterilir [4].

Tanım 1.2.13: Bir $x=(x_1,x_2,...,x_n)$ vektörünün sıfırdan farklı elemanlarının sayısı x vektörünün Hamming ağırlığını verir ve $w(x)$ ile gösterilir.
Buradan

$$d(x,y)=w(x-y)$$

olduğu görülür [4].

Tanım 1.2.14: $A=\{a_1,a_2,...,a_q\}$ sonlu bir cümle ve A^n de A cümlesinden alınan n-lileri temsil etsin. A^n nin herhangi C altkümesine kod, C nin her bir elemanında kodsöz denir [4].

Tanım 1.2.15: C kodunun minimum uzaklığı

$$d(C)=\min_{x,y\in C,x\neq y} d(x,y)$$

şeklinde tanımlanır [4].

Tanım 1.2.16: Bir C kodunun sıfırdan farklı kodsözlerinin ağırlıklarının en küçüğüne o kodun minimum ağırlığı denir [4].

Tanım 1.2.17: Eğer $C\subset V(n,q)$ altkümesi $V(n,q)$ vektör uzayının bir alt uzayı ise C ye lineer kod denir. Eğer C nin boyutu k ise C ye [n,k]-kodu denir. Eğer C nin ayrıca minimum uzaklığı d ise o zaman C ye [n,k,d] kodu denir [4].

Teorem1.2.2: Eğer C lineer bir kod ise $d(C)=w(C)$ dir [4].

Tanım 1.2.18: $V(n,q)$ vektör uzayında doğal olan bir iç çarpım tanımlıdır. Eğer $u=(u_1,u_2,...,u_n)$ ve $v=(v_1,v_2,...,v_n)\in V(n,q)$ olmak üzere u ve v nin iç çarpımı

$$\langle u,v\rangle = u_1v_1+u_2v_2+...+u_nv_n$$

şeklinde tanımlanır [4].

Tanım1.2.19: C bir [n,k]- kodu olsun.

$$C^{\perp} = \{u \in V(n,q) \mid \langle u,c\rangle = 0, \forall c \in C\}$$

şeklinde tanımlanan $C^{\perp}$ koduna lineer kodun dik tümleyeni denir [4].

1.3. Ağırlık Sayaçları

Bu bölümde kodlama teorisinin en önemli sonuçlarından biri olan MacWilliams özdeşliği ispatında yardımcı olacak kavramlar verilecektir. Bu özdeşlik C nin ağırlık sayacı bilindiğinde $C^{\perp}$ in ağırlık sayacının tamamen tanımlı olduğunu gösterir.

Tanım 1.3.1: C bir [n,k,d] lineer kod olsun ve W_i ,C de Hamming ağırlığı i olan kodsözlerin sayısını göstersin. Burada açıkça görülür ki $W_i = 0 \ (1 \le i \le d)$ ve $W_0 = 1$ dir. Aşağıda verilen

$$W_C(z) = \sum_{i=0}^{n} W_i z^i$$

ifadesine C nin Hamming ağırlık sayacı denir [5].

Örnek 1.3.1: [5,2,-] parametrelerine sahip F_2 sonlu cismi üzerinde

$C = \{00000, 10110, 01011, 11101\}$ kodu için

$C^{\perp} = \{00000, 10100, 11010, 01001, 01110, 11101, 10011, 00111\}$ olup C ve $C^{\perp}$ kodları için ağırlık sayaçları sırasıyla aşağıdaki gibi elde edilir:

$$W_C(z) = 1 + 2z^3 + z^4$$

$$W_{C^{\perp}}(z) = 1 + 2z^2 + 4z^3 + z^4$$

1.3.1. Karakterler

Tanım 1.3.1.1: (G,+) bir grup ve ($\mathbb{C} - \{0\}$,.) kompleks sayıların çarpımsal grubu olsun. $\chi : G \to \mathbb{C} - \{0\}$ homomorfizması varsa χ , G grubunun karakteri denir. χ homomorfizma olduğundan her $u,v \in G$ için,

$$\chi(u+v) = \chi(u).\chi(v) \text{ ve } \chi(0) = 1$$

dır. Eğer $\forall\, u \in G$ icin $\chi(u) = 1$ ise χ özel olarak G grubunun temel karakteridir [4].

Teorem 1.3.1.1: *G* bir grup ve χ da *G* grubunun bir karakteri olsun. O halde,

$$\sum_{u\in G}\chi(u)=\begin{cases}|G| & \chi \text{ temel karakter ise}\\ 0 & \text{Diğer}\end{cases}$$

$\chi : F_q \to \mathbb{C}-\{0\}$ karakteri $(F_q,+)$ grubu üzerinde temel karakter olmasın. $u\in V(n,q)$ olmak üzere herhangi bir $C \subset V(n, q)$ lineer kodu için $\chi_u : C \to \mathbb{C}-\{0\}$ fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanabilir [4]. $c=(c_1,c_2,...,c_n)$ ve $u=(u_1,u_2,...,u_n)$ olmak üzere

$$\chi_u(c)=\chi(\langle c,u\rangle)=\chi\left(c_1u_1+c_2u_2+...+c_nu_n\right)$$

şeklindedir. İç çarpım özellikleri ve χ_u için verilen tanım kullanılarak χ_u fonksiyonunun *C* kodu için karakter olduğu aşağıdaki gibi gösterilebilir [4]:

$$\chi_u(c+d)=\chi(\langle c+d,u\rangle)=\chi\left(\langle c,u\rangle\right)+\chi\left(\langle d,u\rangle\right)$$
$$=\chi\left(\langle c,u\rangle\right).\chi\left(\langle d,u\rangle\right)=\chi_u(c).\chi_u(d)$$

Teorem 1.3.1.2: $\chi_u : C \to \mathbb{C}-\{0\}$ karakterinin temel karakter olabilmesi için gerek ve yeter şart $u\in C^{\perp}$ olmasıdır [4].

Bundan sonra χ_u karakteri, temel olmayan karakter olarak ele alınacaktır.

Sonuç 1.3.1.1: $C \subset V(n, q)$ lineer kod olsun. Bu taktirde $u\in V(n,q)$ icin,

$$\sum_{c\in C}\chi_u(c)=\begin{cases}|C| & u\in C^{\perp}\\ 0 & u\notin C^{\perp}\end{cases} \quad \text{dır [4].}$$

Tanım 1.3.1.2: *f*, *F* üzerinde *n* uzunluklu tüm vektörlerin uzayı olan *V(n,q)* üzerinde tanımlanmış bir fonksiyon olsun. Ayrıca *f* toplamanın ve çıkarmanın tanımlı olduğu bir cümle üzerinde değerler alsın yani *f(u)* toplanabilir ve çıkarılabilir olsun [6]. Bu durumda *f* nin Hadamard dönüşümü;

$$\tilde{f}(u)=\sum_{v\in V(n,q)}\chi(\langle u,v\rangle).f(v) \quad , \quad u\in V(n,q)$$

Önerme 1.3.1.1: Eğer C $V(n,q)$ üzerinde bir $[n,k.-]$ lineer kod ise

$$\sum_{v\in C^{\perp}} f(v)=\frac{1}{|C|}\sum_{u\in C}\tilde{f}(u)$$

dır [6].

İspat:

$$\sum_{u\in C}\tilde{f}(u)=\sum_{u\in C}\left[\sum_{v\in V(n,q)}\chi(\langle u,v\rangle).f(v)\right]=\sum_{v\in C^{\perp}} f(v).\sum_{u\in C}\chi(\langle u,v\rangle)+\sum_{v\notin C^{\perp}} f(v).\sum_{u\in C}\chi(\langle u,v\rangle)$$

toplama işleminin sağ tarafındaki ifade sonuç 1.3.1.1 den dolayı sıfırdır ve sol tarafındaki $\sum_{u\in C}\chi(\langle u,v\rangle)=|C|$ dir.

O halde;

$$\sum_{u\in C}\tilde{f}(u)=|C|\sum_{v\in C^{\perp}} f(v)$$

elde edilir.

Teorem 1.3.1.3: (MacWilliams Özdeşliği) F_q üzerinde tanımlı C $[n,k,d]$ lineer kodu olsun . Bu taktirde;

$$W_{C^{\perp}}(z)=\frac{1}{|C|}\sum_{c\in C}(1+(q-1)z)^{n-w(c)}(1-z)^{w(c)}$$

dır [5] **.**

ispat: $C^{\perp}$ kodunun tanım 1.3.1 den dolayı ağırlık sayacı

$$W_{C^{\perp}}(z)=\sum_{u\in C^{\perp}} z^{w(u)}$$

şeklindedir. Buradan

$$W_{C^{\perp}}(z)=\frac{1}{|C|}\sum_{u\in F_q^n}\left(\sum_{c\in C}\chi\left(\langle u,c\rangle\right)z^{w(u)}\right)$$

$$=\frac{1}{|C|}\sum_{c\in C}\left(\sum_{u\in F_q^n}\chi\left(\langle u,c\rangle\right)z^{w(u)}\right)$$

elde edilir.

Burada $u=(u_1,u_2,...,u_n)$ ve $c=(c_1,c_2,...,c_n)$ olmak üzere

$$\begin{aligned}\chi\left(\langle u,c\rangle\right) &= \chi\left(u_1c_1+u_2c_2+...+u_nc_n\right)\\ &= \chi(u_1c_1)\chi(u_2c_2)...\chi(u_nc_n)\\ &= \prod_{j=1}^{n}\chi(u_jc_j)\end{aligned}$$

böylece

$$\begin{aligned}W_{C^\perp}(z) &= \frac{1}{|C|}\sum_{c\in C}\sum_{u\in F_q^n}\prod_{j=1}^{n}(\chi(u_jc_j)z^{w(u_j)})\\ &= \frac{1}{|C|}\sum_{c\in C}\prod_{j=1}^{n}\left(\sum_{u\in F_q}\chi(uc_j)z^{w(u)}\right) \qquad (0.1)\end{aligned}$$

olur.

$F_q^*=F_q-\{0\}$ olsun. Teorem1.3.1.1 den dolayı biliyoruz ki χ temel karakter olmadığından

$$\sum_{u\in F_q^*}\chi\left(uc_j\right)=\begin{cases}q-1 & c_j=0\\ -1 & \text{diğer}\end{cases}$$

bu nedenle

$$\sum_{u\in F_q}\chi\left(uc_j\right)z^{w(u)}=\chi\left(0\right)+z\sum_{u\in F_q^*}\chi\left(uc_j\right)=\begin{cases}1+(q-1)z & c_j=0\\ 1-z & \text{diğer}\end{cases}$$

olur.

O halde C deki her bir $c=(c_1,c_2,...,c_n)$ kodsözü için

$$\prod_{j=1}^{n}\left(\sum_{u\in F_q}\chi\left(uc_j\right)z^{w(u)}\right)=(1+(q-1)z)^{n-w(c)}(1-z)^{w(c)}$$

bulabiliriz. Son eşitliği (0.1) de yerine yazarsak

$$W_{C^\perp}(z)=\frac{1}{|C|}\sum_{c\in C}(1+(q-1)z)^{n-w(c)}(1-z)^{w(c)}$$

MacWilliams özdeşliği elde edilir.

1.4. Non-Hamming (Rosenbloom-Tsfasman) Metriğine Göre Lineer Kodların Yapısı

ρ non-Hamming (Rosenbloom-Tsfasman) metriği [7] de sunulmuş ve minimum uzaklık için üst sınırlar hesaplanmıştır. Bu bölümde de non-hamming (RT) metriği üzerinde lineer kodların minimum uzaklığı, minimum ağırlığı, duali ve iç çarpımı incelenecektir. Daha ayrıntılı bilgi için [8]'e bakılabilir.

Tanım 1.4.1: $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_{s-1}) \in C$ kod sözün non-hamming ağırlığı ;

$$w_N(\alpha) = \begin{cases} \max\{i \mid \alpha_i \neq 0\} + 1 & \alpha \neq 0 \\ 0 & \alpha = 0 \end{cases}$$

Herhangi $\alpha, \beta \in C$ için $\rho(\alpha, \beta) = w_N(\alpha - \beta)$ şeklinde tanımlanan ρ fonksiyonuna α ve β kodsözlerinin non-Hamming uzaklığı denir. ρ bir metriktir.

Tanım 1.4.2: Non-Hamming metriğinde minimum uzaklık

$$d_N(C) = \min_{\alpha,\beta\in C}\{\rho(\alpha,\beta) \mid \rho(\alpha,\beta) \neq 0\}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 1.4.3: Non-Hamming metriğinde minimum ağırlık;

$$w_N(C) = \min_{\alpha\in C}\{w_N(\alpha) \mid \alpha \neq 0\}$$

şeklinde tanımlanır.
Hamming metriğinde olduğu gibi C lineer kod ise $d_N(C) = w_N(C)$ olur.

Tanım 1.4.4: C nin herhangi iki kodsözü $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_{s-1})$ ve $\beta = (\beta_0, \beta_1, ..., \beta_{s-1})$ olmak üzere non-Hamming metriğine göre iç çarpım

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \sum_{i=0}^{s-1} \alpha_i \beta_{s-1-i}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 1.4.5: C bir $[n,k,d]$ lineer kod olsun ve W_i ,C de non-Hamming ağırlığı i olan kodsözlerin sayısını göstersin. O halde

$$W_C(z) = \sum_{i=0}^{n} W_i z^i$$

polinomuna C nin non-Hamming ağırlık sayacı denir.

BÖLÜM 2 . $F_2+uF_2+vF_2+uvF_2$ HALKASI ÜZERİNDE LİNEER KODLAR

Bu bölümde ilk olarak $R_2 = F_2 + uF_2 + vF_2 + uvF_2$ halkasının elemanları ve idealleri verilecek daha sonra lineer kodlar tanımlanacaktır. Bu halka yapısı ile ilgili daha ayrıntılı bilgi için [9] e bakılabilir.

2.1. $R_2 = F_2+uF_2+vF_2+uvF_2$ Halkası

R_2 halkası aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$R_2 = \left\{ a + bu + cv + duv \mid a,b,c,d \in F_2, u^2 = v^2 = 0 \text{ ve } uv = vu \right\}$$

Buradan R_2 nin F_2 üzerinde 4 boyutlu olduğu görülür

R_2 nin elemanlarını aşağıdaki gibi listeleyebiliriz:

$$R_2 = \begin{Bmatrix} 0,u,v,u+v,uv,u+uv,v+uv,u+v+uv,1,1+u,1+v,1+u+v,1+uv,1+u+uv \\ 1+v+uv,1+u+v+uv \end{Bmatrix}$$

Buradan $|R_2| = 16$ olduğu görülür.

R_2 deki toplama ve çarpma ise, $\delta_1 = a_1 + b_1u + c_1v + d_1uv$ ve $\delta_2 = a_2 + b_2u + c_2v + d_2uv$ olmak üzere;

$$\delta_1 + \delta_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)u + (c_1 + c_2)v + (d_1 + d_2)uv$$

$$\delta_1\delta_2 = (a_1a_2) + (a_1b_2 + b_1a_2)u + (c_1a_2 + c_2a_1)v + (a_1d_2 + a_2d_1 + c_1b_2 + b_1c_2)uv$$

Şeklindedir. Ayrıca R_2 nin birimleri kolay bir şekilde bulunabilir ve bunlar aşağıdaki gibidir.

$$\left(F_2 + uF_2 + vF_2 + uvF_2\right)^* = \begin{Bmatrix} 1,1+u,1+v,1+u+v,1+u+uv \\ 1+v+uv,1+uv,1+u+v+uv \end{Bmatrix}$$

Önerme 2.1.1: Herhangi bir $r \in R_2$ için $r^2 = \begin{cases} 1 & r \text{ birim ise} \\ 0 & \text{diğer} \end{cases}$

2.2. R_2 nin İdeal Yapısı

Halkanın ideal yapısı kodlar üzerinde çalışırken önemli bir role sahiptir. R_2 nin idealleri aşağıdaki gibi listelenebilir.

$$J_u = u(F_2 + uF_2 + vF_2 + uvF_2) = \{0, u, uv, u+v\}$$
$$J_v = v(F_2 + uF_2 + vF_2 + uvF_2) = \{0, v, uv, v+v\}$$
$$J_{u+v} = (u+v)(F_2 + uF_2 + vF_2 + uvF_2) = \{0, u+v, uv, u+v+uv\}$$
$$J_{u,v} = \{0, u, v, u+v, uv, u+uv, v+uv, u+v+uv\}$$

Buradan $J_0 = \{0\} \subseteq J_{uv} \subseteq J_u, J_v, J_{u+v} \subseteq J_{u,v} \subseteq J_1 = R_2$ olduğu görülür.

2.3. F_2+uF_2+vF_2+uvF_2 Üzerinde Lineer Kodlar

Tanım 2.3.1: $F_2 + uF_2 + vF_2 + uvF_2$ üzerinde n uzunluğunda bir C lineer kodu $(F_2 + uF_2 + vF_2 + uvF_2)^n$ nin bir altmodülüdür.

Bu halkanın bir dezavantajı üreteç matrisinin oluşturulamamasıdır. Fakat en azından üreteçleri sınıflandırmak mümkün olmuştur. $F_2 + uF_2 + vF_2 + uvF_2$ üzerinde lineer kodlar için 6 sınıf üreteçler vardır. Bunları $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}, \overline{d}, \overline{e}, \overline{f}$ olarak gösterirsek;

$$\overline{a} \in \left(F_2 + uF_2 + vF_2 + uvF_2\right)^n \setminus (J_{u,v})^n$$
$$\overline{b} \in (J_{u,v})^n;\ \overline{b} \notin (J_u)^n, (J_v)^n, (J_{u+v})^n$$
$$\overline{c} \in (J_u)^n \setminus (J_{uv})^n$$
$$\overline{d} \in (J_v)^n \setminus (J_{uv})^n$$
$$\overline{e} \in (J_{u+v})^n \setminus (J_{uv})^n$$
$$\overline{f} \in (J_{uv})^n = \{0, uv\}^n$$

Tanım 2.3.2: Eğer $\alpha_i \in R_2$, $\beta_j \in F_2 + uF_2 + vF_2$, $\gamma_m \in F_2 + vF_2$
$\mu_t \in F_2 + uF_2$, $\eta_r \in F_2 + uF_2$ ve $\zeta_s \in F_2$ olmak üzere;

$$\sum_{i=1}^{k_1} \alpha_i \overline{a}_i + \sum_{j=1}^{k_2} \beta_j \overline{b}_j + \sum_{m=1}^{k_3} \gamma_m \overline{c}_m + \sum_{t=1}^{k_4} \mu_t \overline{d}_t + \sum_{r=1}^{k_5} \eta_r \overline{e}_r + \sum_{s=1}^{k_6} \zeta_s \overline{f}_s = 0$$

eşitliği sadece $\alpha_i, \beta_j, \gamma_m, \mu_t, \eta_r, \zeta_s = 0$ için sağlanıyorsa R_2^n in alt kümesi olan

$$S = \left\{ \left\{ \overline{a}_i \right\}_1^{k_1}, \left\{ \overline{b}_j \right\}_1^{k_2}, \left\{ \overline{c}_m \right\}_1^{k_3}, \left\{ \overline{d}_t \right\}_1^{k_4}, \left\{ \overline{e}_r \right\}_1^{k_5}, \left\{ \overline{f}_s \right\}_1^{k6} \right\}$$

lineer bağımsızdır denir.

Tanım 2.3.3: Kabul edelim ki

$$S = \left\{ \left\{ \overline{a}_i \right\}_1^{k_1}, \left\{ \overline{b}_j \right\}_1^{k_2}, \left\{ \overline{c}_m \right\}_1^{k_3}, \left\{ \overline{d}_t \right\}_1^{k_4}, \left\{ \overline{e}_r \right\}_1^{k_5}, \left\{ \overline{f}_s \right\}_1^{k6} \right\}$$

Kümesi yukarıdaki gibi tanımlanan lineer bağımsız üreteçlerin kümesi olsun. O halde *S* tarafından üretilen *n* uzunluğundaki *C* lineer kodu

$$\{ \sum_{i=1}^{k_1} \alpha_i \overline{a}_i + \sum_{j=1}^{k_2} \beta_j \overline{b}_j + \sum_{m=1}^{k_3} \gamma_m \overline{c}_m + \sum_{t=1}^{k_4} \mu_t \overline{d}_t + \sum_{r=1}^{k_5} \eta_r \overline{e}_r + \sum_{s=1}^{k_6} \zeta_s \overline{f}_s \,|\, \alpha_i \in R_2$$
$$\beta_j \in F_2 + uF_2 + vF_2, \gamma_m \in F_2 + vF_2, \mu_t \in F_2 + uF_2, \eta_r \in F_2 + uF_2, \zeta_s \in F_2 \}$$

Bu durumda diyebiliriz ki C $(16)^{k_1}(8)^{k_2}(u)^{k_3}(v)^{k_4}(u+v)^{k_5}(2)^{k_6}$ tipindedir.

Örnek 2.3.1: $\langle (0,u,0,u+v,uv),(0,0,uv,uv,0) \rangle$ nin ürettiği *C* kodunu bulalım:

Çözüm: Bu iki kodun lineer kombinasyonlarına bakmalıyız. Öncelikli kodların elemanlarının hangi üreteç sınıfından alındığına bakalım. Birinci kodun elemanları $\overline{b}$ sınıfından ikinci kodun elemanları ise $\overline{f}$ sınıfındandır.

Tanım 2.3.2 den dolayı $\overline{b}$ sınıfından olan kodun katsayıları;

$$\beta_j \in F_2 + uF_2 + vF_2 = \{0, u, v, u+v, 1, 1+u, 1+v, 1+u+v\}$$

ve $\overline{f}$ sınıfından olan kodun katsayıları

$$\zeta_s \in F_2 = \{0,1\}$$

olacaktır.

O halde bu katsayılarla kodu çarpıp birbirleriyle toplarsak yani lineer kombinasyonlarını alırsak;

$$C = \begin{Bmatrix} (0,0,0,0,0),(0,0,0,uv,0),(0,uv,0,uv,0),(0,uv,0,0,0),(0,u,0,u+v,uv) \\ (0,u,0,u+v+uv,uv),(0,u+uv,0,u+v+uv,uv),(0,u+uv,0,u+v,uv) \\ (0,0,uv,uv,0),(0,0,uv,0,0),(0,uv,uv,0,0),(0,uv,uv,uv,0) \\ (0,u,uv,u+v+uv,uv),(0,u,uv,u+v,uv),(0,u+uv,uv,u+v,uv), \\ (0,u+uv,uv,u+v+uv,uv) \end{Bmatrix}$$

Buradan $|C| = 8.2 = 16$ olduğu görülür.

Bu kodun non-Hamming (Rosenbloom-Tsfasman) minimum ağırlığı Tanım 1.4.3 den $w_N(C) = 2$ olduğu görülür.

Tanım 2.3.4: $a+bu+cv+duv \in R_2$ olsun. $\overline{c} = (a,b,c,d)$ de 4 uzunluğundaki bir ikili vektör olarak düşünülebilir. $wt(\overline{c})$ de bu vektörün Hamming ağırlığı olmak üzere;

$$\chi(a+bu+cv+duv) = (-1)^{wt(\overline{c})}$$

R_2 halkasının üreteç karakteridir. Buradan görülebilir ki ;

$$\chi(0) = 1$$

$$\chi(1) = \chi(u) = \chi(v) = \chi(uv) = -1$$

$$\chi(1+u) = \chi(1+v) = \chi(1+uv) = \chi(u+v) = \chi(u+uv) = \chi(v+uv) = 1$$

$$\chi(1+u+v) = \chi(1+u+uv) = \chi(1+v+uv) = \chi(u+v+uv) = -1$$

$$\chi(1+u+v+uv) = 1$$

şeklindedir.

BÖLÜM 3. NON-HAMMİNG *RT* METRİĞİNE GÖRE $M_{nxs}(R_2)$ ÜZERİNDEKİ LİNEER KODLAR İÇİN TAM AĞIRLIK SAYACI VE MACWILLIAMS ÖZDEŞLİĞİ

$R_2 = F_2 + uF_2 + vF_2 + uvF_2$ 16 elemanlı halka olsun. $M_{nxs}(R_2)$ R_2'nin tüm nxs matrislerini göstersin. Tekrardan ρ (Rosenbloom-Tsfasman) ağırlığını tanımlamak gerekirse ;

$\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_{s-1}) \in M_{1xs}(R_2)$ olsun. Böylece;

$$w_N(\alpha) = \begin{cases} \max\{i \mid \alpha_i \neq 0\} + 1 & , \quad \alpha_i \neq 0 \\ 0 & , \quad \alpha = 0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır. Non-Hamming metriğini kullanarak ρ metriği
$\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_{s-1})$ ve $\beta = (\beta_0, \beta_1, ..., \beta_{s-1})$ için,

$$\rho(\alpha, \beta) = w_N(\alpha - \beta)$$

olarak tanımlanır.

Şimdide bu tanımı matrislere genişletirsek;

$\xi_i = (\varepsilon_{i0}, \varepsilon_{i1}, ..., \varepsilon_{i,s-1})$ $(1 \leq i \leq n)$ olmak üzere $\xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)^T \in M_{nxs}(R_2)$ olsun. Bu durumda

$$w_N(\xi) = \sum_{i=1}^{n} w_N(\xi_i)$$

şeklindedir.

Tanım 3.1: $M_{nxs}(R_2)$ nin bir R_2 altmodülü C, n uzunluğunda bir lineer kod olarak adlandırılır. $C \subset M_{nxs}(R_2)$ bir lineer kod olsun.

$$w_r(C) = \left|\{\xi \in C \mid w_N(\xi) = r\}\right| \qquad 0 \le r \le ns$$

kodun ρ ağırlık spektrumu olarak adlandırılır ve ρ ağırlık sayacı

$$W_C(z) = \sum_{r=0}^{ns} w_r(C) z^r = \sum_{\xi \in C} z^{w_N(\xi)}$$

ile gösterilir.

Tanım 3.2: $\xi_i = (\varepsilon_{i0}, \varepsilon_{i1}, ..., \varepsilon_{is-1})$ ve $\Delta_i = (\delta_{i0}, \delta_{i1}, ..., \delta_{is-1}) \in M_{1xs}(R_2)$ olsun. ξ_i ve Δ_i için iç çarpım ;

$$< \xi_i, \Delta_i >= \sum_{j=0}^{s-1} \varepsilon_{ij} \delta_{i,s-1-j}$$

olarak tanımlanır.

Şimdi bu iç çarpımı matrisler için genişletirsek;

$\xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)^T$ ve $\Delta = (\Delta_1, \Delta_2, ..., \Delta_n)^T \in M_{nxs}(R_2)$ olmak üzere

$$< \xi, \Delta >= \sum_{i=1}^{n} < \xi_i, \Delta_i >$$

olarak genişletilebilir.

Tanım 3.3: C kodu n uzunluğunda bir lineer kod olsun. C nin dual kodu;

$$C^{\perp} = \left\{\Delta \in M_{nxs}(R_2) \mid < \xi, \Delta >= 0 \ , \ \forall \xi \in C\right\}$$

olarak tanımlanır ve $C^{\perp}$ de n uzunluğunda lineer bir koddur.

Örnek 3.1: Kodsözleri $M_{1x2}(R_2)$ den olan C kodu aşağıdaki gibi olsun. $C=\{(0,0),(0,uv),(0,u+v),(0,u+v+uv),(uv,uv),(uv,0),(uv,u+v+uv),(uv,u+v)\}$

Bu C kodunun Rosenbloom Tsfasman metriğine göre duali ise;

$$C=\begin{Bmatrix} (0,0),(0,u),(0,v),(0,uv),(0,u+v),(0,u+uv),(0,v+uv),(0,u+v+uv),(u+v,0), \\ (u+v,u),(u+v,v),(u+v,uv)(u+v,u+v),(u+v,u+uv),(u+v,v+uv), \\ (u+v,u+v+uv),(uv,0),(uv,u),(uv,v),(uv,uv),(uv,u+v),(uv,u+uv)(uv,v+uv), \\ (uv,u+v+uv),(u+v+uv,0),(u+v+uv,u),(u+v+uv,v),(u+v+uv,uv), \\ (u+v+uv,u+v),(u+v+uv,u+uv),(u+v+uv,v+uv),(u+v+uv,u+v+uv) \end{Bmatrix}$$

3.1. Tam Ağırlık Sayacı

Ağırlık sayacına geçilmeden önce aşağıdaki tanımlar verilmelidir. Bu bölümde kodsözler polinom olarak verilecektir.

$\xi_i=(\varepsilon_{i0},\varepsilon_{i1},...,\varepsilon_{is-1}) \in M_{1xs}(R_2)$ ve $\xi=(\xi_1,\xi_2,...,\xi_n)^T \in M_{nxs}(R_2)$ olsun.

$$\varphi: M_{nxs}(R_2) \to M_{nx1}(R_2[x]/<x^s>)$$

$$\xi \to (\varepsilon_{10}+\varepsilon_{11}x+...+\varepsilon_{1,s-1}x^{s-1},...,\varepsilon_{n0}+\varepsilon_{n1}x+...+\varepsilon_{n,s-1}x^{s-1})^T$$

Yukarıda tanımlanan dönüşüm R-modül izomorfizmasıdır. $\varepsilon(x)\in(R_2[x]/<x^s>)$ polinomunun w_N ağırlığı de$r(\varepsilon(x))+1$ olduğu görülür. Yani

$$w_N(\varepsilon(x))=\text{der}(\varepsilon(x))+1$$

Tanım 3.1.1: $\varepsilon(x)=\varepsilon_0+\varepsilon_1x+...+\varepsilon x^{s-1}\in(R_2[x]/<x^s>)$ olsun $\varepsilon(x)$ in l.inci katsayısı

$$c_l(\varepsilon(x))=\varepsilon_l \qquad (0\le l\le s-1)$$

olarak tanımlanır.

$\xi(x)=(\xi_1(x),\xi_2(x),...,\xi_n(x))^T$ ve $\Delta(x)=(\Delta_1(x),\Delta_2(x),...,\Delta_n(x))^T \in M_{nx1}(R_2[x]/<x^s>)$ olsun. Burada $\xi_i(x)=\varepsilon_{i0}+\varepsilon_{i1}x+...+\varepsilon_{i,s-1}x^{s-1}$ ve $\Delta_i(x)=\delta_{i0}+\delta_{i1}x+...+\delta_{i,s-1}x^{s-1}$ dır.

Yukarıda tanımlanan $\xi(x)$ ve $\Delta(x)$ in iç çarpımı polinomlar cinsinden

$$<\xi(x),\Delta(x)>=\sum_{i=1}^{n} c_{s-1}(\xi_i(x),\Delta_i(x)) \text{ olur}$$

Bir $a\in R_2$ elemanının Hamming ağırlığı ;

$$\omega(a)=\begin{cases}0 & , \ a=0\\ 1 & , \ diğer\end{cases}$$

olarak tanımlanır.

$1\le i\le n$ ve $0\le j\le s-1$ için $\xi=(\varepsilon_{ij})_{nxs}$ ve $Y_{ns}=y_{10},y_{11},...,y_{1,s-1},...,y_{n0},y_{n1},...,y_{n,s-1}$ olsun. Bir C kodunun tam ρ ağırlık sayacı;

$$W_C(Y_{ns})=\sum_{\xi\in C} y_{10}^{\omega(\varepsilon_{10})}y_{11}^{\omega(\varepsilon_{11})}...y_{1,s-1}^{\omega(\varepsilon_{1,s-1})}...y_{n0}^{\omega(\varepsilon_{n0})}y_{n1}^{\omega(\varepsilon_{n1})}...y_{n,s-1}^{\omega(\varepsilon_{n,s-1})}$$

olarak tanımlanır. Tam ρ ağırlık sayacının *ns* değişkenli bir polinom olduğuna dikkat çekilir. Ayrıca tam ρ ağırlık sayacında değişkenler dönüşümü yapılarak ρ ağırlık sayacını elde etmek mümkündür.

Örnek 3.1.1: Örnek 3.1 deki *C* ve $C^{\perp}$ kodlarının ağırlık sayaçlarını yazalım:

$$W_C(Y)=1+y_1+3y_2+3y_1y_2$$
$$W_{C^{\perp}}(Y)=1+3y_1+7y_2+21y_1y_2$$

Önerme 3.1.1 : χ R_2 nin karakteri olmak üzere

$$\sum_{\alpha\in R_2}\chi(\alpha)=0$$

şeklindedir.

Önerme 3.1.2: $\forall a+ub+vc+uvd \in R_2$ olsun. $\bar{c}=(a,b,c,d)$ 4 uzunluğunda ikili kod gibi düşünülebilir. O halde bu $\bar{c}$ vektörünün Hamming ağırlığı $w_H(c)$ olsun. $\chi(a+ub+vc+uvd)=(-1)^{w_H(c)}$ karakteri olsun. $H \neq \{0\}$, R_2 nin bir alt modülü olsun.

$$\sum_{a+ub+vc+uvd \in H} \chi(a+ub+vc+uvd) = \sum_{a+ub+vc+uvd \in H} (-1)^{w_H(c)} = \begin{cases} 1 & , \ H=0 \\ 0 & , \ Diğer \end{cases}$$

Yukarıdaki önerme kullanılarak aşağıdaki önerme gösterilebilir.

Önerme 3.1.3: χ yukarıdaki gibi tanımlansın ve i, j sabit olsun $\xi(x)=\varepsilon_{i0}+\varepsilon_{i1}x+...+\varepsilon_{i,s-1}x^{s-1} \in (R_2[x]/<x^s>)$ olsun.

$$\sum_{\alpha \in R_2} \chi(<\varepsilon(x), \alpha x^j>) y_{ij}^{\omega(\alpha)} = (1+15y_{ij})^{1-\omega(\varepsilon_{i,s-1-j})}(1-y_{ij})^{\omega(\varepsilon_{i,s-1-j})}$$

İspat: $\sum_{\alpha \in R_2} \chi(<\varepsilon(x), \alpha x^j>) y_{ij}^{\omega(\alpha)} = \sum_{\alpha \in R_2} \chi(c_{s-1}(\varepsilon(x), \alpha x^j)) y_{ij}^{\omega(\alpha)}$

$$= \sum_{\alpha \in R_2} \chi(\varepsilon_{i,s-1-j}.\alpha) y_{ij}^{\omega(\alpha)}$$

Şimdi bu son eşitliği $\varepsilon_{i,s-1-j}$ ve α nın durumlarına göre inceleyelim:

$$\left.\begin{matrix} \varepsilon_{i,s-1-j}=0 \\ \alpha=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \sum_{\alpha=0} \chi(0) y_{ij}^0 = 1 \qquad \text{ve} \qquad \left.\begin{matrix} \varepsilon_{i,s-1-j}=0 \\ \alpha \neq 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \sum_{\substack{\alpha \neq 0 \\ \alpha \in R_2}} \chi(0) y_{ij}^1 = 15y_{ij}$$

Buradan $\varepsilon_{i,s-1-j}=0$ iken

$$\sum_{\alpha \in R_2} \chi(\varepsilon_{i,s-1-j}.\alpha) y_{ij}^{\omega(\alpha)} = 1+15y_{ij}$$

elde edilir.

$$\left.\begin{array}{l}\varepsilon_{i,s-1-j} \neq 0 \\ \alpha = 0\end{array}\right\} \Rightarrow \sum_{\alpha=0} \chi(0) y_{ij}^{0} = 1 \quad \text{ve} \quad \left.\begin{array}{l}\varepsilon_{i,s-1-j} \neq 0 \\ \alpha \neq 0\end{array}\right\} \Rightarrow \sum_{\substack{\alpha\neq 0 \\ \alpha\in R_2}} \chi(\varepsilon_{i,s-1-j}.\alpha) y_{ij} = -y_{ij}$$

Buradan $\varepsilon_{i,s-1-j} \neq 0$ iken

$$\sum_{\alpha\in R_2} \chi(\varepsilon_{i,s-1-j}.\alpha) y_{ij}^{\omega(\alpha)} = 1 - y_{ij}$$

elde edilir. Yani

$$\sum_{\alpha\in R_2} \chi(\varepsilon_{i,s-1-j}.\alpha) y_{ij}^{\omega(\alpha)} = \begin{cases} 1+15y_{ij} & , \varepsilon_{i,s-1-j} = 0 \\ 1-y_{ij} & , \varepsilon_{i,s-1-j} \neq 0 \end{cases}$$

elde edilir. Başka bir deyişle

$$\sum_{\alpha\in R_2} \chi(<\varepsilon(x), \alpha x^{j}>) y_{ij}^{\omega(\alpha)} = (1+15y_{ij})^{1-\omega(\varepsilon_{i,s-1-j})} (1-y_{ij})^{\omega(\varepsilon_{i,s-1-j})}$$

Önerme 3.1.4: χ yukarıdaki gibi tanımlansın. O zaman

$$\sum_{\xi(x)\in C} \chi(<\xi(x), \Delta(x)>) = \begin{cases} 0 & , \quad \Delta(x) \notin C^{\perp} \\ |C| & , \quad \Delta(x) \in C^{\perp} \end{cases}$$

İspat: Eğer $\Delta(x) \in C^{\perp}$ ise dual tanımından dolayı $<\xi(x), \Delta(x)>= 0$ dır.

$$\sum_{\xi(x)\in C} \chi(0) = \sum_{\xi(x)\in C} (-1)^{0} = \sum_{\xi(x)\in C} 1 = |C|$$

olduğu görülür. Eğer $\Delta(x) \notin C^{\perp}$ ise o zaman en az bir tane $\xi(x) \in C$ vardır öyleki $<\xi(x), \Delta(x)>\neq 0$ dır. $<\xi(x), \Delta(x)>= \gamma$ olsun. O halde

$$\varphi_{\Delta(x)} : C \to R$$

$$\xi(x) \to \quad <\xi(x), \Delta(x)>= \sum_{i=0}^{n} c_{s-1}(\xi_i(x)\Delta_i(x))$$

Dönüşümü bir homomorfizmadır ve $\operatorname{Im}\varphi_{\Delta(x)}$ R nin bir alt grubudur.

Homomorfizma teoreminden dolayı $C\Big|_{Ker(\varphi_{\Delta(x)})} \cong \operatorname{Im}\varphi_{\Delta(x)}$ olur.

Bundan dolayı önerme 3.1.2 den

$$\sum_{\xi(x)\in C} \chi(<\xi(x),\Delta(x)>) = \left|Ker(\varphi_{\Delta(x)})\right| . \sum_{\alpha\in \operatorname{Im}\varphi_{\Delta(x)}} \chi(\alpha) = 0$$

elde edilir.

Önerme 3.1.5: $f : M_{nx1}(R_2[x]/<x^s>) \to \mathbb{C}[y_{10},...,y_{n,s-1}]$ ve χ yukarıda tanımlandığı gibi olsun.

$$\tilde{f}(\xi(x)) = \sum_{\Delta(x)\in M_{nx1}(R_2[x]/<x^s>)} \chi(<\xi(x),\Delta(x)>) f(\Delta(x))$$

ve $\xi(x) = (\xi_1(x),\xi_2(x),...,\xi_n(x))^T$ ve $\Delta(x) = (\Delta_1(x),\Delta_2(x),...,\Delta_n(x))^T$ olmak üzere;

$$\sum_{\Delta(x)\in C^\perp} f(\Delta(x)) = \frac{1}{|C|}\sum_{\xi(x)\in C} \tilde{f}(\xi(x))$$

İspat: $\sum_{\xi(x)\in C} \tilde{f}(\xi(x)) = \sum_{\xi(x)\in C} \sum_{\Delta(x)\in M_{nx1}(R_2[x]/<x^s>)} \chi(<\xi(x),\Delta(x)>) f(\Delta(x))$

$$= \sum_{\xi(x)\in C} \sum_{\Delta(x)\in C^\perp} \chi(<\xi(x),\Delta(x)>) f(\Delta(x)) + \sum_{\xi(x)\in C} \sum_{\Delta(x)\notin C^\perp} \chi(<\xi(x),\Delta(x)>) f(\Delta(x))$$

$$= \sum_{\Delta(x)\in C^\perp} f(\Delta(x)) \sum_{\xi(x)\in C} \chi(<\xi(x),\Delta(x)>) + \sum_{\Delta(x)\notin C^\perp} f(\Delta(x)) \sum_{\xi(x)\in C} \chi(<\xi(x),\Delta(x)>)$$

Önerme 3.1.4 den

$$\sum_{\xi(x)\in C} \tilde{f}(\xi(x)) = |C| \sum_{\Delta(x)\in C^\perp} f(\Delta(x))$$

elde edilir.

Teorem3.1.1: $\sum_{\Delta(x)\in C^{\perp}} y_{10}^{\omega(\delta_{10})}...y_{1,s-1}^{\omega(\delta_{1,s-1})}...y_{n0}^{\omega(\delta_{n0})}...y_{n,s-1}^{\omega(\delta_{n,s-1})} =$

$$\frac{1}{|C|}\left(\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=0}^{s-1}(1+15y_{ij}\right)\sum_{\xi(x)\in C}\prod_{k=1}^{n}\prod_{l=0}^{s-1}\left(\frac{1-y_{kl}}{1+15y_{kl}}\right)^{\omega(\varepsilon_{k.s-1-l})}$$

İspat: $1\le i\le n$ için $\xi_i(x)=\varepsilon_{i0}+\varepsilon_{i1}x+...+\varepsilon_{i,s-1}x^{s-1}$ ve $\Delta_i(x)=\delta_{i0}+\delta_{i1}x+...+\delta_{i,s-1}x^{s-1}$

Ve $\xi(x)=(\xi_1(x),\xi_2(x),...,\xi_n(x))^T$ ve $\Delta(x)=(\Delta_1(x),\Delta_2(x),...,\Delta_n(x))^T$ olsun.

$f((\Delta_1(x),\Delta_2(x),...,\Delta_n(x))^T)= y_{10}^{\omega(\delta_{10})}...y_{1,s-1}^{\omega(\delta_{1,s-1})}...y_{n0}^{\omega(\delta_{n0})}...y_{n,s-1}^{\omega(\delta_{n,s-1})}$ olsun.

$$\tilde{f}(\xi(x))=\sum_{\Delta(x)\in M_{nx1}(R_2[x]/<x^s>)}\chi(<\xi(x),\Delta(x)>)\ y_{10}^{\omega(\delta_{10})}...y_{1,s-1}^{\omega(\delta_{1,s-1})}...y_{n0}^{\omega(\delta_{n0})}...y_{n,s-1}^{\omega(\delta_{n,s-1})}$$

$$=\sum_{\substack{\Delta(x)\in\\ M_{nx1}(R_2[x]/<x^s>)}}\chi(<\xi_1(x),\Delta_1(x)>+...+<\xi_n(x),\Delta_n(x)>)\ y_{10}^{\omega(\delta_{10})}..y_{1,s-1}^{\omega(\delta_{1,s-1})}..y_{n0}^{\omega(\delta_{n0})}..y_{n,s-1}^{\omega(\delta_{n,s-1})}$$

$$=\sum_{\substack{\Delta(x)\in\\ M_{nx1}(R_2[x]/<x^s>)}}\chi(<\xi_1(x),\Delta_1(x)>)...\chi(<\xi_n(x),\Delta_n(x)>)\ y_{10}^{\omega(\delta_{10})}..y_{1,s-1}^{\omega(\delta_{1,s-1})}..y_{n0}^{\omega(\delta_{n0})}..y_{n,s-1}^{\omega(\delta_{n,s-1})}$$

$$=\sum_{\delta_{10}\in R_2}\chi(<\xi_1(x),\delta_{10}>)y_{10}^{\omega(\delta_{10})}...\sum_{\delta_{1,s-1}\in R_2}\chi(<\xi_1(x),\delta_{1,s-1}x^{s-1}>)y_{1,s-1}^{\omega(\delta_{1,s-1})}$$

$$\vdots$$

$$\sum_{\delta_{n0}\in R_2}\chi(<\xi_n(x),\delta_{n0}>)y_{n0}^{\omega(\delta_{n0})}...\sum_{\delta_{n,s-1}\in R_2}\chi(<\xi_n(x),\delta_{n,s-1}x^{s-1}>)y_{n,s-1}^{\omega(\delta_{n,s-1})}$$

$$=\prod_{j=0}^{s-1}\sum_{\delta_{1j}\in R_2}\chi(<\xi_1(x),\delta_{1j}x^j>)y_{1j}^{\omega(\delta_{1j})}$$

$$\prod_{j=0}^{s-1}\sum_{\delta_{2j}\in R_2}\chi(<\xi_2(x),\delta_{2j}x^j>y_{2j}^{\omega(\delta_{2j})}$$

$$\vdots$$

$$\prod_{j=0}^{s-1}\sum_{\delta_{nj}\in R_2}\chi(<\xi_n(x),\delta_{nj}x^j>y_{nj}^{\omega(\delta_{nj})} = \prod_{i=1}^{n}\prod_{j=0}^{s-1}\sum_{\delta_{ij}\in R_2}\chi(<\xi_i(x),\delta_{ij}x^j>y_{ij}^{\omega(\delta_{ij})}$$

Önerme 3.1.3 uygulanırsa;

$$\tilde{f}(\xi(x))=\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=0}^{s-1}(1+15y_{ij})^{1-\omega(\varepsilon_{i,s-1-j})}(1-y_{ij})^{\omega(\varepsilon_{i,s-1-j})}$$

$$=\prod_{i=1}^{n}\begin{bmatrix}\left(1+15y_{i0}\right)\left(1+15y_{i0}\right)^{-\omega(\varepsilon_{i,s-1})}\left(1-y_{i0}\right)^{\omega(\varepsilon_{i,s-1})}\\ \vdots \\ \left(1+15y_{i,s-1}\right)\left(1+15y_{i,s-1}\right)^{-\omega(\varepsilon_{i0})}\left(1-y_{i,s-1}\right)^{\omega(\varepsilon_{i0})}\end{bmatrix}$$

$$=\prod_{i=1}^{n}\left[\left(1+15y_{i0}\right)\ldots\left(1+15y_{i,s-1}\right)\left(\frac{1-y_{i0}}{1+15y_{i0}}\right)^{\omega(\varepsilon_{i,s-1})}\ldots\left(\frac{1-y_{i,s-1}}{1+15y_{i,s-1}}\right)^{\omega(\varepsilon_{i0})}\right]$$

$$=\left(\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=0}^{s-1}(1+15y_{ij})\right)\prod_{k=1}^{n}\prod_{l=0}^{s-1}\left(\frac{1-y_{kl}}{1+15y_{kl}}\right)^{\omega(\varepsilon_{k,s-1-l})}$$

Önerme 3.1.5 de son eşitliği yerine yazarsak ;

$$\sum_{\Delta(x)\in C^{\perp}} f(\Delta(x))=\frac{1}{|C|}\sum_{\xi(x)\in C}\tilde{f}(\xi(x))$$

$$\sum_{\Delta(x)\in C^{\perp}} y_{10}^{\omega(\delta_{10})}..y_{1,s-1}^{\omega(\delta_{1,s-1})}..y_{n0}^{\omega(\delta_{n0})}..y_{n,s-1}^{\omega(\delta_{n,s-1})}$$

$$=\frac{1}{|C|}\sum_{\xi(x)\in C}\left(\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=0}^{s-1}(1+15y_{ij})\right)\prod_{k=1}^{n}\prod_{l=0}^{s-1}\left(\frac{1-y_{kl}}{1+15y_{kl}}\right)^{\omega(\varepsilon_{k,s-1-l})}$$

$$=\frac{1}{|C|}\left(\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=0}^{s-1}(1+15y_{ij}\right)\sum_{\xi(x)\in C}\prod_{k=1}^{n}\prod_{l=0}^{s-1}\left(\frac{1-y_{kl}}{1+15y_{kl}}\right)^{\omega(\varepsilon_{k.s-1-l})}$$

elde edilir. Bu özdeşliğin en genel halinin ispatı için [10] a bakılabilir. Ayrıca [11] da $R=F_q\left[u\right]/\left(u^r-a\right)$ olmak üzere $M_{nxs}(R)$ üzerindeki kodlar için ρ tam ağırlık sayacı kullanarak yapılan bu özdeşliğin ispatına bakılabilir.

Örnek 3.1.2: Örnek 3.1 deki C ve $C^{\perp}$ kodları için MacWilliams özdeşliğinin sağlandığını gösterelim:

$$W_{C^{\perp}}(Y)=\frac{1}{8}\prod_{i=1}^{2}(1+15y_i)\left[\sum_{\varepsilon(x)\in C}\prod_{i=1}^{2}\left(\frac{1-y_i}{1+15y_i}\right)^{\omega(\varepsilon_{2-i})}\right]$$

$$=\frac{1}{8}\prod_{i=1}^{2}(1+15y_i)\left[\sum_{\varepsilon(x)\in C}\left(\frac{1-y_1}{1+15y_1}\right)^{\omega(\varepsilon_1)}\left(\frac{1-y_2}{1+15y_2}\right)^{\omega(\varepsilon_0)}\right]$$

$$=\frac{1}{8}(1+15y_1)(1+15y_2)\left[1+3\left(\frac{1-y_1}{1+15y_1}\right)+\left(\frac{1-y_2}{1+15y_2}\right)+3\left(\frac{1-y_1}{1+15y_1}\right)\left(\frac{1-y_2}{1+15y_2}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{8}(1+15y_1)(1+15y_2)\left[\frac{(1+15y_1)(1+15y_2)+(3-3y_1)(1+15y_2)+(1-y_2)(1+15y_1)+(3-3y_1)(1-y_2)}{(1+15y_1)(1+15y_2)}\right]$$

$$=\frac{1}{8}\left[8+24y_1+56y_2+168y_1y_2\right]=1+3y_1+7y_2+21y_1y_2$$

elde edilir. Böylece eşitlik sağlanmış olur.

BÖLÜM 4. NON-HAMMİNG (ROSENBLOOM-TSFASMAN) METRİĞİNE GÖRE $M_{nxs}(F_2)$ ÜZERİNDEKİ LİNEER KODLAR İÇİN SPLİT ρ AĞIRLIK SAYACI VE MACWILLIAMS ÖZDEŞLİĞİ

Tanım 4.1: $(X,Y)=(x_1,x_2,...,x_n,y_1,y_2,...,y_n)$ olsun. $M_{nxs}(F_2)$ deki lineer C kodunun Split ρ ağırlık sayacı $S_C(X,Y)$ ile gösterilir ve

$$S_C(X,Y)=\sum_{\xi\in C}\prod_{i=1}^{n} x_i^{w_\rho(\varepsilon_i)} y_i^{s-w_\rho(\varepsilon_i)}$$

Şeklide tanımlanır. Burada $\xi=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,...,\varepsilon_n)^T\in C$ ve $\varepsilon_i\in M_{1xs}(F_2)$ dir.

Şimdide ε_i ve $\delta_i\in M_{1xs}(F_2)$ nin ağırlıklarına göre karakterin davranışı incelensin:

F_2^3 ün tüm elemanları;

$$\{(000),(100),(010),(001),(110),(101),(011),(111)\}$$

şeklindedir. Bu elemanların birbirleriyle iç çarpımlarına bakılırsa:

Tablo 4.1 : F_2^3 deki elemanların non-Hamming iç çarpımı

$\langle\varepsilon,\delta\rangle$	ε_1 **=000**	ε_2 **=100**	ε_3 **=010**	ε_4 **=001**	ε_5 **=110**	ε_6 **=101**	ε_7 **=011**	ε_8 **=111**
δ_1 **=000**	0	0	0	0	0	0	0	0
δ_2 **=100**	0	0	0	1	0	1	1	1
δ_3 **=010**	0	0	1	0	1	0	1	1
δ_4 **=001**	0	1	0	0	1	1	0	1
δ_5 **=110**	0	0	1	1	1	1	0	0
δ_6 **=101**	0	1	0	1	1	0	1	0
δ_7 **=011**	0	1	1	0	0	1	1	0
δ_8 **=111**	0	1	1	1	0	0	0	1

Herhangi bir ε elemanı sabitlensin ve $w_\rho(\delta)=l \quad (1\le l\le 3)$ olan kodlarla ilişkisine bakılsın:

1.durum: Öncelikle $w_\rho(\varepsilon)=1$ olan elemanlar ele alınsın.

a) $w_\rho(\delta)=1$ olsun. $\varepsilon_2=100$ ve $\delta_2=100$ kodları alınsın:

$$\sum_{\delta\in M_{1xs}(F_2^3)}\chi\left(\left\langle \varepsilon_2,\delta\right\rangle\right)=\chi\left(\left\langle \varepsilon_2,\delta_2\right\rangle\right)=\chi(0)=1$$

elde edilir. Burada $s-l+1=3-1+1=3$ olup $w_\rho(\varepsilon)<s-l+1$ olduğu görülür.

b) $w_\rho(\delta)=2$ olsun. $\varepsilon_2=100$ ve $\delta_3=010$, $\delta_5=110$ kodları alınsın:

$$\sum_{\delta\in M_{1xs}(F_2^3)}\chi\left(\left\langle \varepsilon_2,\delta\right\rangle\right)=\chi(\left\langle \varepsilon_2,\delta_3\right\rangle)+\chi\left(\left\langle \varepsilon_2,\delta_5\right\rangle\right)=\chi\left(0\right)+\chi\left(0\right)=2$$

elde edilir. Burada $s-l+1=3-2+1=2$ olup $w_\rho(\varepsilon)<s-l+1$ olduğu görülür.

c) $w_\rho(\delta)=3$ olsun. $\varepsilon_2=100$ ve $\delta_4=001, \delta_6=101, \delta_7=011$, $\delta_8=111$ kodları alınsın:

$$\sum_{\delta\in M_{1xs}(F_2^3)}\chi\left(\left\langle \varepsilon_2,\delta\right\rangle\right)=\chi(\left\langle \varepsilon_2,\delta_4\right\rangle)+\chi\left(\left\langle \varepsilon_2,\delta_6\right\rangle\right)+\chi(\left\langle \varepsilon_2,\delta_7\right\rangle)+\chi\left(\left\langle \varepsilon_2,\delta_8\right\rangle\right)$$

$$=\chi\left(1\right)+\chi\left(1\right)+\chi\left(1\right)+\chi\left(1\right)=-4$$

elde edilir. Burada $s-l+1=3-3+1=1$ olup $w_\rho(\varepsilon)=s-l+1$ olduğu görülür.

2.durum: $w_\rho(\varepsilon)=2$ olan elemanlar ele alınsın:

a) $w_\rho(\delta)=1$ olsun. $\varepsilon_3=010$, $\varepsilon_5=110$ ve $\delta_2=100$ kodları alınsın:

$$\sum_{\delta\in M_{1xs}(F_2^3)}\chi\left(\left\langle \varepsilon_3,\delta\right\rangle\right)=\chi\left(\left\langle \varepsilon_3,\delta_2\right\rangle\right)=\chi(0)=1$$

$$\sum_{\delta\in M_{1xs}(F_2^3)}\chi\left(\left\langle \varepsilon_5,\delta\right\rangle\right)=\chi\left(\left\langle \varepsilon_5,\delta_2\right\rangle\right)=\chi(0)=1$$

elde edilir. Burada $s-l+1=3-1+1=3$ olup $w_\rho(\varepsilon)<s-l+1$ olduğu görülür.

b) $w_\rho(\delta)=2$ olsun. $\varepsilon_3=010$, $\varepsilon_5=110$ ve $\delta_3=010$, $\delta_5=110$ kodları alınsın:

$$\sum_{\delta\in M_{1xs}(F_2^3)}\chi\left(\langle\varepsilon_3,\delta\rangle\right)=\chi(\langle\varepsilon_3,\delta_3\rangle)+\chi\left(\langle\varepsilon_3,\delta_5\rangle\right)=\chi(1)+\chi(1)=-2$$

$$\sum_{\delta\in M_{1xs}(F_2^3)}\chi\left(\langle\varepsilon_5,\delta\rangle\right)=\chi(\langle\varepsilon_5,\delta_3\rangle)+\chi\left(\langle\varepsilon_5,\delta_5\rangle\right)=\chi(1)+\chi(1)=-2$$

elde edilir. Burada $s-l+1=3-2+1=2$ olup $w_\rho(\varepsilon)=s-l+1$ olduğu görülür.

c) $w_\rho(\delta)=3$ olsun. $\varepsilon_3=010$, $\varepsilon_5=110$ ve $\delta_4=001, \delta_6=101, \delta_7=011$, $\delta_8=111$ kodları alınsın:

$$\sum_{\delta\in M_{1xs}(F_2^3)}\chi\left(\langle\varepsilon_3,\delta\rangle\right)=\chi(\langle\varepsilon_3,\delta_4\rangle)+\chi\left(\langle\varepsilon_3,\delta_6\rangle\right)+\chi(\langle\varepsilon_3,\delta_7\rangle)+\chi\left(\langle\varepsilon_3,\delta_8\rangle\right)$$

$$=\chi(0)+\chi(0)+\chi(1)+\chi(1)=0$$

$$\sum_{\delta\in M_{1xs}(F_2^3)}\chi\left(\langle\varepsilon_5,\delta\rangle\right)=\chi(\langle\varepsilon_5,\delta_4\rangle)+\chi\left(\langle\varepsilon_5,\delta_6\rangle\right)+\chi(\langle\varepsilon_5,\delta_7\rangle)+\chi\left(\langle\varepsilon_5,\delta_8\rangle\right)$$

$$=\chi(1)+\chi(1)+\chi(0)+\chi(0)=0$$

elde dilir. Burada $s-l+1=3-3+1=1$ olup $w_\rho(\varepsilon)>s-l+1$

3.durum: $w_\rho(\varepsilon)=3$ olan elemanlar ele alınsın:

a) $w_\rho(\delta)=1$ olsun. $\varepsilon_4=001, \varepsilon_6=101, \varepsilon_7=011, \varepsilon_8=111$ ve $\delta_2=100$ kodları alınsın:

$$\sum_{\delta\in M_{1xs}(F_2^3)}\chi\left(\langle\varepsilon_4,\delta\rangle\right)=\chi\left(\langle\varepsilon_4,\delta_2\rangle\right)=\chi(1)=-1$$

$$\sum_{\delta\in M_{1xs}(F_2^3)}\chi\left(\langle\varepsilon_6,\delta\rangle\right)=\chi\left(\langle\varepsilon_6,\delta_2\rangle\right)=\chi(1)=-1$$

$$\sum_{\delta\in M_{1xs}(F_2^3)}\chi\left(\langle\varepsilon_7,\delta\rangle\right)=\chi\left(\langle\varepsilon_7,\delta_2\rangle\right)=\chi(1)=-1$$

$$\sum_{\delta\in M_{1xs}(F_2^3)}\chi\left(\langle\varepsilon_8,\delta\rangle\right)=\chi\left(\langle\varepsilon_8,\delta_2\rangle\right)=\chi(1)=-1$$

elde edilir. Burada $s-l+1=3-1+1=3$ olup $w_\rho(\varepsilon)=s-l+1$

b) $w_\rho(\delta)=2$ olsun. $\varepsilon_4=001, \varepsilon_6=101, \varepsilon_7=011, \varepsilon_8=111$ ve $\delta_3=010$, $\delta_5=110$ kodları alınsın:

$$\sum_{\delta\in M_{1xs}(F_2^3)} \chi\left(\left\langle \varepsilon_4,\delta\right\rangle\right)=\chi(\left\langle \varepsilon_4,\delta_3\right\rangle)+\chi\left(\left\langle \varepsilon_4,\delta_5\right\rangle\right)=\chi\left(0\right)+\chi\left(1\right)=0$$

$$\sum_{\delta\in M_{1xs}(F_2^3)} \chi\left(\left\langle \varepsilon_6,\delta\right\rangle\right)=\chi(\left\langle \varepsilon_6,\delta_3\right\rangle)+\chi\left(\left\langle \varepsilon_6,\delta_5\right\rangle\right)=\chi\left(0\right)+\chi\left(1\right)=0$$

$$\sum_{\delta\in M_{1xs}(F_2^3)} \chi\left(\left\langle \varepsilon_7,\delta\right\rangle\right)=\chi(\left\langle \varepsilon_7,\delta_3\right\rangle)+\chi\left(\left\langle \varepsilon_7,\delta_5\right\rangle\right)=\chi\left(1\right)+\chi\left(0\right)=0$$

$$\sum_{\delta\in M_{1xs}(F_2^3)} \chi\left(\left\langle \varepsilon_8,\delta\right\rangle\right)=\chi(\left\langle \varepsilon_8,\delta_3\right\rangle)+\chi\left(\left\langle \varepsilon_8,\delta_5\right\rangle\right)=\chi\left(1\right)+\chi\left(0\right)=0$$

elde edilir. Burada $s-l+1=3-2+1=2$ olup $w_\rho(\varepsilon)>s-l+1$ olduğu görülür.

c) $w_\rho(\delta)=3$ olsun. $\varepsilon_4=001, \varepsilon_6=101, \varepsilon_7=011, \varepsilon_8=111$ ve $\delta_4=001$, $\delta_6=101, \delta_7=011$, $\delta_8=111$ kodları alınsın:

$$\sum_{\delta\in M_{1xs}(F_2^3)} \chi\left(\left\langle \varepsilon_4,\delta\right\rangle\right)=\chi(\left\langle \varepsilon_4,\delta_4\right\rangle)+\chi\left(\left\langle \varepsilon_4,\delta_6\right\rangle\right)+\chi(\left\langle \varepsilon_4,\delta_7\right\rangle)+\chi\left(\left\langle \varepsilon_4,\delta_8\right\rangle\right)$$
$$=\chi\left(0\right)+\chi\left(1\right)+\chi\left(0\right)+\chi\left(1\right)=0$$

$$\sum_{\delta\in M_{1xs}(F_2^3)} \chi\left(\left\langle \varepsilon_6,\delta\right\rangle\right)=\chi(\left\langle \varepsilon_6,\delta_4\right\rangle)+\chi\left(\left\langle \varepsilon_6,\delta_6\right\rangle\right)+\chi(\left\langle \varepsilon_6,\delta_7\right\rangle)+\chi\left(\left\langle \varepsilon_6,\delta_8\right\rangle\right)$$
$$=\chi\left(1\right)+\chi\left(0\right)+\chi\left(1\right)+\chi\left(0\right)=0$$

$$\sum_{\delta\in M_{1xs}(F_2^3)} \chi\left(\left\langle \varepsilon_7,\delta\right\rangle\right)=\chi(\left\langle \varepsilon_7,\delta_4\right\rangle)+\chi\left(\left\langle \varepsilon_7,\delta_6\right\rangle\right)+\chi(\left\langle \varepsilon_7,\delta_7\right\rangle)+\chi\left(\left\langle \varepsilon_7,\delta_8\right\rangle\right)$$
$$=\chi\left(0\right)+\chi\left(1\right)+\chi\left(1\right)+\chi\left(0\right)=0$$

$$\sum_{\delta\in M_{1xs}(F_2^3)} \chi\left(\left\langle \varepsilon_8,\delta\right\rangle\right)=\chi(\left\langle \varepsilon_8,\delta_4\right\rangle)+\chi\left(\left\langle \varepsilon_8,\delta_6\right\rangle\right)+\chi(\left\langle \varepsilon_8,\delta_7\right\rangle)+\chi\left(\left\langle \varepsilon_8,\delta_8\right\rangle\right)$$
$$=\chi\left(1\right)+\chi\left(0\right)+\chi\left(0\right)+\chi\left(1\right)=0$$

elde edilir.Burada $s-l+1=3-3+1=1$ olup $w_\rho(\varepsilon)>s-l+1$ olduğu görülür.

Bu durumlara bakarak bir modelleme yapmak gerekirse;

1. $w_\rho(\varepsilon)>s-l+1$ iken

$$\begin{cases} \text{2.durumda } l=3 \text{ için } \sum\limits_{\substack{\delta\in M_{1xs}(F_2^3) \\ w_\rho(\delta)=l}} \chi\left(\left\langle \varepsilon,\delta\right\rangle\right)=0 \\ \text{3. durumda } l=2 \text{ için } \sum\limits_{\substack{\delta\in M_{1xs}(F_2^3) \\ w_\rho(\delta)=l}} \chi\left(\left\langle \varepsilon,\delta\right\rangle\right)=0 \\ \qquad\qquad l=3 \text{ için } \sum\limits_{\substack{\delta\in M_{1xs}(F_2^3) \\ w_\rho(\delta)=l}} \chi\left(\left\langle \varepsilon,\delta\right\rangle\right)=0 \end{cases}$$

O halde ;

$w_\rho(\varepsilon)>s-l+1$ durumunda $\sum\limits_{\substack{\delta\in M_{1xs}(F_2^3) \\ w_\rho(\delta)=l}} \chi\left(\left\langle \varepsilon,\delta\right\rangle\right)=0$ dır.

2. $w_\rho(\varepsilon)=s-l+1$ iken

$$\begin{cases} \text{1.durumda } l=3 \text{ için } \sum\limits_{\substack{\delta\in M_{1xs}(F_2^3) \\ w_\rho(\delta)=l}} \chi\left(\left\langle \varepsilon,\delta\right\rangle\right)=-4=-2^2 \\ \text{2.durumda } l=2 \text{ için } \sum\limits_{\substack{\delta\in M_{1xs}(F_2^3) \\ w_\rho(\delta)=l}} \chi\left(\left\langle \varepsilon,\delta\right\rangle\right)=-2=-2^1 \\ \text{3. durumda } l=1 \text{ için } \sum\limits_{\substack{\delta\in M_{1xs}(F_2^3) \\ w_\rho(\delta)=l}} \chi\left(\left\langle \varepsilon,\delta\right\rangle\right)=-1=-2^0 \end{cases}$$

O halde ;

$w_\rho(\varepsilon)=s-l+1$ durumunda $\sum\limits_{\substack{\delta\in M_{1xs}(F_2^3) \\ w_\rho(\delta)=l}} \chi\left(\left\langle \varepsilon,\delta\right\rangle\right)=-2^{l-1}$ dir.

3. $w_\rho(\varepsilon) < s-l+1$ iken $\begin{cases} 1.\text{durumda } l=1 \text{ için } \sum\limits_{\substack{\delta\in M_{1xs}(F_2^3) \\ w_\rho(\delta)=l}} \chi(\langle \varepsilon,\delta\rangle) = 1 = 2^0 \\ \\ l=2 \text{ için } \sum\limits_{\substack{\delta\in M_{1xs}(F_2^3) \\ w_\rho(\delta)=l}} \chi(\langle \varepsilon,\delta\rangle) = 2 = 2^1 \\ \\ 2.\text{durumda } l=1 \text{ için } \sum\limits_{\substack{\delta\in M_{1xs}(F_2^3) \\ w_\rho(\delta)=l}} \chi(\langle \varepsilon,\delta\rangle) = 1 = 2^0 \end{cases}$

O halde;

$w_\rho(\varepsilon) < s-l+1$ durumunda $\sum\limits_{\substack{\delta\in M_{1xs}(F_2^3) \\ w_\rho(\delta)=l}} \chi(\langle \varepsilon,\delta\rangle) = 2^{l-1}$ dir.

Tanım 4.2: Sabit bir l $(1\le l\le s)$ için $\varphi_l : M_{1xs}(F_2) \to \mathbb{Z}$ fonksiyonu her $\varepsilon \in M_{1xs}(F_2)$ için aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\varphi_l(\varepsilon) = \begin{cases} 2^{l-1} & w_\rho(\varepsilon) \le s-l \\ -2^{l-1} & w_\rho(\varepsilon) = s-l+1 \\ 0 & w_\rho(\varepsilon) > s-l+1 \end{cases}$$

Lemma 4.1: Sabit bir $\varepsilon \in M_{1xs}(F_2)$ olsun.

$$\sum_{\delta\in M_{1xs}(F_2)} \chi(\langle \varepsilon,\delta\rangle) x^{w_\rho(\delta)} y^{s-w_\rho(\delta)} = y^s + \sum_{l=1}^{s} \varphi_l(\varepsilon) x^l y^{s-l}$$

İspat: $M_{1xs}(F_2)^* = M_{1xs}(F_2) \setminus \{0\}$ olmak üzere $\sum\limits_{\delta\in M_{1xs}(F_2)} \chi(\langle \varepsilon,\delta\rangle) x^{w_\rho(\delta)} y^{s-w_\rho(\delta)}$ toplamı

yeniden düzenlenirse;

$$\sum_{\delta\in M_{1xs}(F_2)} \chi(\langle \varepsilon,\delta\rangle) x^{w_\rho(\delta)} y^{s-w_\rho(\delta)} = y^s + \sum_{\delta\in M_{1xs}(F_2)^*} \chi(\langle \varepsilon,\delta\rangle) x^{w_\rho(\delta)} y^{s-w_\rho(\delta)}$$

$M_{1xs}(F_2)$ üzerinde δ lar değiştikçe $w_\rho(\delta)$ değeride 1 ile s arasında değişir. O halde yukarıdaki toplamı yeniden düzenlersek;

$$\sum_{\delta\in M_{1xs}(F_2)^*}\chi\left(\left\langle\varepsilon,\delta\right\rangle\right)x^{w_\rho(\delta)}y^{s-w_\rho(\delta)}=\sum_{l=1}^{s}\sum_{\substack{\delta\in M_{1xs}(F_2)^*\\ w_\rho(\delta)=l}}\chi\left(\left\langle\varepsilon,\delta\right\rangle\right)x^l y^{s-l}$$

şeklindedir. Bu toplamı hesaplamak için öncelikle $\delta=(\delta_0,\delta_1,...,\delta_{s-1})\in M_{1xs}(F_2)$ ve $w_\rho(\delta)=l$ olsun. O halde $\delta_{l-1}\neq 0$ ve $\delta_i=0\ (l\le i\le s)$ dir. Bu yüzden $\varepsilon=(\varepsilon_0,\varepsilon_1,...,\varepsilon_{s-1})\in M_{1xs}(F_2)$ ile δ iç çarpımı ;

$$\left\langle\varepsilon,\delta\right\rangle=\varepsilon_{s-l}\delta_{l-1}+\varepsilon_{s-l+1}\delta_{l-2}+...+\varepsilon_{s-1}\delta_0=\sum_{i=0}^{l-1}\varepsilon_{s-1-i}\delta_i$$

Eğer $F_2^*=F_2\backslash\{0\}$ ise

$$\sum_{\substack{\delta\in M_{1xs}(F_2)^*\\ w_\rho(\delta)=l}}\chi\left(\left\langle\varepsilon,\delta\right\rangle\right)=\sum_{\delta_0,\delta_1,...,\delta_{l-2}}\sum_{\delta_{l-1}\in F_2^*}\chi\left(\sum_{i=0}^{l-1}\varepsilon_{s-1-i}\delta_i\right)$$

$$=\sum_{\delta_{l-1}\in F_2^*}\chi\left(\varepsilon_{s-l}\delta_{l-1}\right)\prod_{i=0}^{l-2}\left(\sum_{\delta_i\in F_2}\chi\left(\varepsilon_{s-1-i}\delta_i\right)\right)$$

$\chi(0)=1$ ve $\sum_{\alpha\in F_2}\chi(\alpha)=0$ olduğunu kullanarak

$$\sum_{\substack{\delta\in M_{1xs}(F_2)^*\\ w_\rho(\delta)=l}}\chi\left(\left\langle\varepsilon,\delta\right\rangle\right)=\begin{cases}2^{l-1} & w_\rho(\varepsilon)\le s-l\\ -2^{l-1} & w_\rho(\varepsilon)=s-l+1\\ 0 & w_\rho(\varepsilon)>s-l+1\end{cases}$$

Eşittir ki buda tanım daki $\varphi_l(\delta)$ ya eşittir. O halde;

$$\sum_{\delta\in M_{1xs}(F_2)}\chi\left(\left\langle\varepsilon,\delta\right\rangle\right)x^{w_\rho(\delta)}y^{s-w_\rho(\delta)}=y^s+\sum_{l=1}^{s}\varphi_l(\varepsilon)x^l y^{s-l}$$

Lemma sağlanır.

Teorem 4.1:$C, M_{nxs}(F_2)$ üzerinde bir lineer kod ve $(X,Y)=(x_1,x_2,...,x_n,y_1,y_2,...,y_n)$ olsun.

O halde;

$$S_{C^\perp}(X,Y)=\frac{1}{|C|}\sum_{\xi\in C}\prod_{i=1}^{n}\left\{y_i^s+\sum_{l=1}^{s}\varphi_i(\varepsilon_i)x_i^l y_i^{s-l}\right\}$$

dir. Burada $\xi=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,...,\varepsilon_n)\in C$ ve $\varepsilon_i\in M_{nxs}(F_2)$ ve $\varphi_l(\varepsilon)$ tanımdaki gibidir.

İspat: $\Delta=(\delta_0,\delta_1,...,\delta_{s-1})^T\in M_{nxs}(F_2)$ ve $\delta_i\in M_{1xs}(F_2)$ olsun. Ayrıca

$$f(\Delta)=\prod_{i=1}^{n}x_i^{w_\rho(\delta_i)}y_i^{s-w_\rho(\delta_i)}$$

olarak tanımlansın.

$$\tilde{f}(\xi)=\sum_{\Delta\in M_{nxs}(F_2)}\chi\left(\langle\xi,\Delta\rangle\right)\prod_{i=1}^{n}x_i^{w_\rho(\delta_i)}y_i^{s-w_\rho(\delta_i)}$$

$$=\sum_{\Delta\in M_{nxs}(F_2)}\chi\left(\langle\xi,\Delta\rangle\right)x_1^{w_\rho(\delta_1)}y_1^{s-w_\rho(\delta_1)}x_2^{w_\rho(\delta_2)}y_2^{s-w_\rho(\delta_2)}...x_n^{w_\rho(\delta_n)}y_n^{s-w_\rho(\delta_n)}$$

$$=\sum_{\Delta\in M_{nxs}(F_2)}\chi\left(\langle\varepsilon_1,\delta_1\rangle+\langle\varepsilon_2,\delta_2\rangle+...+\langle\varepsilon_n,\delta_n\rangle\right)x_1^{w_\rho(\delta_1)}y_1^{s-w_\rho(\delta_1)}x_2^{w_\rho(\delta_2)}y_2^{s-w_\rho(\delta_2)}...x_n^{w_\rho(\delta_n)}y_n^{s-w_\rho(\delta_n)}$$

$$=\sum_{\Delta\in M_{nxs}(F_2)}\chi\left(\langle\varepsilon_1,\delta_1\rangle\right)\chi\left(\langle\varepsilon_2,\delta_2\rangle\right)...\chi\left(\langle\varepsilon_n,\delta_n\rangle\right)x_1^{w_\rho(\delta_1)}y_1^{s-w_\rho(\delta_1)}x_2^{w_\rho(\delta_2)}y_2^{s-w_\rho(\delta_2)}...x_n^{w_\rho(\delta_n)}y_n^{s-w_\rho(\delta_n)}$$

$$=\sum_{\delta_1\in M_{1xs}(F_2)}\chi\left(\langle\varepsilon_1,\delta_1\rangle\right)x_1^{w_\rho(\delta_1)}y_1^{s-w_\rho(\delta_1)}\sum_{\delta_2\in M_{1xs}(F_2)}\chi\left(\langle\varepsilon_2,\delta_2\rangle\right)x_2^{w_\rho(\delta_2)}y_2^{s-w_\rho(\delta_2)}$$

$$\vdots$$

$$\sum_{\delta_n\in M_{1xs}(F_2)}\chi\left(\langle\varepsilon_n,\delta_n\rangle\right)x_n^{w_\rho(\delta_n)}y_n^{s-w_\rho(\delta_n)}$$

$$=\prod_{i=1}^{n}\sum_{\delta_i\in M_{1xs}(F_2)}\chi\left(\langle\varepsilon_i,\delta_i\rangle\right)x_i^{w_\rho(\delta_i)}y_i^{s-w_\rho(\delta_i)}$$

Lemma 4.1 den dolayı her i için;

$$\sum_{\delta_i \in M_{1xs}(F_2)} \chi\left(\left\langle \varepsilon_i, \delta_i \right\rangle\right) x_i^{w_\rho(\delta_i)} y_i^{s-w_\rho(\delta_i)} = y_i^{\,s} + \sum_{l=1}^{s} \varphi_l(\varepsilon_i) x_i^{\,l} y_i^{\,s-l}$$

şeklindedir. Buradan

$$\tilde{f}(\xi) = \prod_{i=1}^{n} \left\{ y_i^{\,s} + \sum_{l=1}^{s} \varphi_l(\varepsilon_i) x_i^{\,l} y_i^{\,s-l} \right\}$$

elde edilir.

$$\sum_{\xi \in C} \tilde{f}(\xi) = \sum_{\xi \in C} \prod_{i=1}^{n} \left\{ y_i^{\,s} + \sum_{l=1}^{s} \varphi_l(\varepsilon_i) x_i^{\,l} y_i^{\,s-l} \right\}$$

Önerme 3.1.5 den dolayı

$$S_{C^\perp}(X,Y) = \sum_{\Delta \in C^\perp} f(\Delta) = \frac{1}{|C|} \sum_{\xi \in C} \tilde{f}(\xi) = \frac{1}{|C|} \sum_{\xi \in C} \prod_{i=1}^{n} \left\{ y_i^{s} + \sum_{l=1}^{s} \varphi_i(\varepsilon_i) x_i^{l} y_i^{s-l} \right\}$$

şeklinde teorem ispatlanmış olur.

Örnek 4.1: $C = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ ve

$$C^\perp = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

olmak üzere split ağırlık sayaçları bulunsun ve eşitliğin sağlandığı gösterilsin.

Çözüm:

$$S_C(X,Y) = \sum_{\xi \in C} \prod_{i=1}^{2} x_i^{w_\rho(\varepsilon_i)} y_i^{2-w_\rho(\varepsilon_i)}$$

$$= \sum_{\xi \in C} \left(x_1^{w_\rho(\varepsilon_1)} y_1^{2-w_\rho(\varepsilon_1)} x_2^{w_\rho(\varepsilon_2)} y_2^{2-w_\rho(\varepsilon_2)} \right)$$

$$= x_1^0 y_1^2 x_2^0 y_2^2 + x_1 y_1 x_2^0 y_2^2 = y_1^2 y_2^2 + x_1 y_1 y_2^2$$

$$S_{C^{\perp}}(X,Y)=\sum_{\xi\in C}\prod_{i=1}^{2}x_i^{w_\rho(\varepsilon_i)}y_i^{2-w_\rho(\varepsilon_i)}=\sum_{\xi\in C}\left(x_1^{w_\rho(\varepsilon_1)}y_1^{2-w_\rho(\varepsilon_1)}x_2^{w_\rho(\varepsilon_2)}y_2^{2-w_\rho(\varepsilon_2)}\right)$$

$$=x_1^0y_1^2x_2^0y_2^2+x_1^0y_1^2x_2^2y_2^0+x_1^0y_1^2x_2y_2+x_1^0y_1^2x_2^2y_2^0+x_1y_1x_2^0y_2^2+x_1y_1x_2^2y_2^0$$
$$+x_1y_1x_2y_2+x_1y_1x_2^2y_2^0$$

$$=y_1^2y_2^2+y_1^2x_2^2+y_1^2x_2y_2+y_1^2x_2^2+x_1y_1y_2^2+x_1y_1x_2^2+x_1y_1x_2y_2+x_1y_1x_2^2$$

$$=y_1^2y_2^2+2y_1^2x_2^2+y_1^2x_2y_2+x_1y_1y_2^2+2x_1y_1x_2^2+x_1y_1x_2y_2$$

Şimdi de eşitliğin sağlandığı gösterilsin:

$$S_{C^{\perp}}(X,Y)=\frac{1}{2}\sum_{\xi\in C}\prod_{i=1}^{2}\left\{y_i^2+\sum_{l=1}^{2}\varphi_i(\varepsilon_i)x_i^l y_i^{2-l}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{\xi\in C}\prod_{i=1}^{2}\left\{y_i^2+\varphi_1(\varepsilon_i)x_i\,y_i\ +\varphi_2(\varepsilon_i)x_i^2\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{\xi\in C}\left\{\left(y_1^2+\varphi_1(\varepsilon_1)x_1\,y_1\ +\varphi_2(\varepsilon_1)x_1^2\right)\left(y_2^2+\varphi_1(\varepsilon_2)x_2y_2+\varphi_2(\varepsilon_2)x_2^2\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\begin{array}{l}\left(y_1^2+2^{1-1}(2-1)x_1\,y_1\ +2^{2-1}(2-1)x_1^2\right)\left(y_2^2+2^{1-1}(2-1)x_2y_2+2^{2-1}(2-1)x_2^2\right)+\\ \left(y_1^2+2^{1-1}(2-1)x_1\,y_1\ -2^{2-1}x_1^2\right)\left(y_2^2+2^{1-1}(2-1)x_2y_2+2^{2-1}(2-1)x_2^2\right)\end{array}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\left(y_1^2+x_1\,y_1\ +2x_1^2\right)\left(y_2^2+x_2y_2+2x_2^2\right)+\left(y_1^2+x_1\,y_1\ -2x_1^2\right)\left(y_2^2+x_2y_2+2x_2^2\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left(2y_1^2y_2^2+2x_2y_1^2y_2+4x_2^2y_1^2+2x_1\,y_1\,y_2^2+2x_1\,y_1\,x_2y_2+4x_1\,x_2^2y_1\ \right)$$

$$=y_1^2y_2^2+x_2y_1^2y_2+2x_2^2y_1^2+x_1\,y_1\,y_2^2+x_1\,y_1\,x_2y_2+2x_1\,x_2^2y_1$$

BÖLÜM 5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Rosenbloom-Tsfasman metriğine $M_{nxs}(R_2)$ üzerindeki kodlar için tam ağırlık sayacı tanımlandı ve MacWilliams özdeşliği gösterildi.

Ayrıca yine aynı metrik üzerinde $M_{nxs}(F_2)$ üzerindeki kodlar için split ρ ağırlık sayacı kullanılarak MacWilliams özdeşliği gösterildi.

Aynı metrik kullanılarak R değişmeli ve birimli sonlu bir halka olmak üzere split ρ ağırlık sayacı $M_{nxs}(R)$ üzerindeki kodlar için genişletilebilir.

KAYNAKLAR

[1] ÇALLIALP, F., Örneklerle Soyut Cebir, İstanbul, 2001

[2] HILL, R., KOLMAN, B,Elementary Linear Algebra, Prentice Hall,2000

[3] DUMMIT, S.D., FOOTE, R.M., Abstract algebra, John Wiley & Sons, Inc., 2004.

[4] ROMAN, S., Coding and Information Theory, Springer-Verlag, 1992.

[5] ROTH, R.M., Introduction To Coding Theory, Cambridge,2006

[6] MACWILLIAMS, F.J., SLOANE, N.J., The Theory of Error-Correcting Codes, North-Holland, 1977.

[7] ROSENBLOOM,M.YU., TSFASMAN M.A., Codes For The m-metric, Problems of Information Transmission, Vol. 33, (1), 45-52, 1997

[8] ÖZEN, M., ŞİAP, İ., ÇALLIALP,F., Non-Hamming (Rosenbloom-Tsfasman) Metriğine Göre Lineer Kodların Yapısı, Anadolu Üniversitesi Bilim ve Teknoloji Dergisi, Cilt/Vol.:5-Sayı/No: 2: 253-258, 2004

[9] YILDIZ, B.,KARADENİZ, S., Linear Codes Over $F_2 + uF_2 + vF_2 + uvF_2$, Designs, Codes and Cryptography, Volume 54, Number 1, 61-81, 2010

[10] ŞİAP İ., ÖZEN M., The Complete Weight Enumerator for Codes over $M_{nxs}(R)$,Applies Mathematics Letters , 17, no 1, 65-69, 2004

[11] ŞİAP.İ, A MacWilliams Type Identity, Turk J Math ,26, 465-473, 2002

ÖZGEÇMİŞ

N.Tuğba ÖZZAİM, 30.05.1988 de Ankara' da doğdu. İlk, orta ve lise eğitimini Ankara'da tamamladı. 2006 yılında Ankara Keçiören Kanuni Süper Lisesi'nden okul birincisi olarak mezun oldu. 2006 yılında başladığı Sakarya Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nü 2010 yılında bölüm ikincisi olarak bitirdi. 2010-2011 eğitim öğretim yılında Milli Eğitim Bakanlığı'na bağlı bazı okullarda vekil öğretmenlik yaptı. 2010 yılında Sakarya Üniversitesi Matematik Anabilim Dalında yüksek lisans eğitimine başladı.