T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DEĞİŞMELİ TRİPOTENT MATRİSLERİN LİNEER BİLEŞİMLERİNİN AYRIK İDEMPOTENT AYRIŞIMI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Emre KİŞİ

Enstitü Anabilim Dalı	:	MATEMATİK
Tez Danışmanı	:	Prof. Dr. Halim ÖZDEMİR

Aralık 2011

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DEĞİŞMELİ TRİPOTENT MATRİSLERİN LİNEER BİLEŞİMLERİNİN AYRIK İDEMPOTENT AYRIŞIMI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Emre KİŞİ

Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK

Bu tez 02/01/2012 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Oybirliği ile kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Halim ÖZDEMİR	**Doç. Dr. Elman HAZAR**	**Yrd. Doç. Dr. Nesrin GÜLER**
Jüri Başkanı	**Üye**	**Üye**

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ ii
İÇİNDEKİLER iii
SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ v
ÖZET vi
SUMMARY vii

BÖLÜM 1.
GİRİŞ 1

BÖLÜM 2.
TEMEL KAVRAMLAR 5
2.1. Matrisin Rankı, İzi, Tersi ve Determinantı 5
2.2. Özdeğer, Özvektör, ve Köşegenleştirme 8

BÖLÜM 3.
İDEMPOTENT VE TRİPOTENT MATRİSLER 11
3.1.İdempotent Matrisler 11
3.2. Tripotent Matrisler 20

BÖLÜM 4.
İKİ TANE DEĞİŞMELİ TRİPOTENT MATRİSTEN ELDE EDİLEN LİNEER BİLEŞİM İÇİN AYRIK İDEMPOTENT AYRIŞIM 24
4.1.Giriş 24
4.2. İki Değişmeli Tripotent Matris ve Çarpımlarından Elde Edilen Lineer Bileşimin Ayrık İdempotent Ayrışımı 25

BÖLÜM 5.
SONLU SAYIDA DEĞİŞMELİ TRİPOTENT MATRİSTEN ELDE EDİLEN LİNEER BİLEŞİM İÇİN AYRIK İDEMPOTENT AYRIŞIM 33
5.1.Giriş 33
5.2. Sonlu Sayıda Değişmeli Tripotent Matris ve Çarpımlarından Elde Edilen Lineer Bileşimin Ayrık İdempotent Ayrışımı............................. 34
5.3. Ayrık İdempotent Ayrışımı Elde Etmek İçin Bir Algoritma 54
5.3.1 J_i Matrislerinin ve r_i Skalerlerinin Belirlenmesi 55
5.3.2 Algoritma 58
5.4.Sayısal Örnekler 59

BÖLÜM 6.
TARTIŞMA VE ÖNERİLER 65

KAYNAKLAR 67
EKLER 72
ÖZGEÇMİŞ 96

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

$\mathbb{F}$	: Genel bir cisim
$\mathbb{R}^m$	: *m* boyutlu reel sayılar cisim
$\sum$	: Toplam sembolü
$\in$	: Elemanıdır
$\notin$	: Elemanı değildir
0	: Sıfır matrisi
I	: Birim matris
A, B, C vs	: Matrisler
M^{-1}	: M matrisinin tersi
$M^{\#}$	: M matrisinin grup tersi
M^T	: M matrisinin transpozesi
M^k	: M matrisinin *k*. kuvveti
$rk(M)$	: M matrisinin rankı
$iz(M)$	: M matrisinin izi
det(*M*)	: M matrisinin determinantı

ÖZET

Anahtar Kelimeler: İdempotent matris, involutif matris, tripotent matris, lineer bileşim, ayrık idempotent ayrışım.

İlk bölümde matrisler ve bazı özel tipli matrislerle ilgili kısa bir literatür bilgisi verilmektedir.. İkinci bölümde bazı temel kavram ve özellikler verilmektedir. Üçüncü bölümde idempotent ve tripotent matrislerin tanımları verilip özellikleri ayrıntılı olarak incelenmektedir. Bu çalışmaya ilham kaynağı olan literatürdeki bir çalışma dördüncü bölümde incelenmektedir.

Beşinci bölümde, $A_1,...,A_n$ $m \times m$ mertebeli karşılıklı olarak değişmeli tripotent matrisler olmak üzere

$$M = a_0 I + \sum_{i=1}^{n} (a_1^i A_i + a_2^i A_i^2) + \sum_{\substack{j=1 \\ j<k}}^{n-1} \sum_{k=2}^{n} (b_{11}^{jk} A_j A_k + b_{12}^{jk} A_j A_k^2 + b_{21}^{jk} A_j^2 A_k + b_{22}^{jk} A_j^2 A_k^2),$$

lineer bileşimi için bir 3^n terimli ayrık idempotent ayrışım olduğu gösterilmekte ve bu ayrık idempotent ayrışımı elde etmek için bir algoritma verilmektedir. Son bölüm ise tartışma ve önerilerden oluşmaktadır.

ON A DISJOINT IDEMPOTENT DECOMPOSITION FOR LINEAR COMBINATIONS OF *n* COMMUTATIVE TRIPOTENT MATRICES

SUMMARY

Key Words: Idempotent matrix, involutive matrix, tripotent matrix, linear combination, disjoint idempotent decomposition.

It has been given a short literature information about matrices and some special type matrices in the first chapter. Some fundamental concepts and properties have been given in the second chapter. Definitions of idempotent and tripotent matrices whether to give, properties of them have been discussed in detail in the chapter three. A study from literature, which is a source of inspiration for his work, has been examined in the fourth chapter.

It has been shown that there is a 3^n-term disjoint idempotent decomposition for the linear combination

$$M = a_0 I + \sum_{i=1}^{n} (a_1^i A_i + a_2^i A_i^2) + \sum_{\substack{j=1 \\ j<k}}^{n-1} \sum_{k=2}^{n} (b_{11}^{jk} A_j A_k + b_{12}^{jk} A_j A_k^2 + b_{21}^{jk} A_j^2 A_k + b_{22}^{jk} A_j^2 A_k^2),$$

where $A_1, ..., A_n$ are mutually commutative tripotent matrices of order $m \times m$ and it has been given an algorithm for getting this disjoint idempotent decomposition in the chapter five. The last chapter consists of discussion and proposals.

BÖLÜM 1. GİRİŞ

Lineer denklem sistemlerinin çözümü oldukça eskiye, M.Ö.300 yıllarına kadar gider. Bu denklem sistemlerini ilk çözen Babillilerdir. Lineer denklem sistemlerinin çözümü, Çin hanedan kitaplarından Chiu Chang Suan Shu (Matematik Sanatında Dokuz Bölüm) adındaki ve M.Ö.100 yıllarına ait olan yapıtta yer almaktadır [37]. Burada ilginç olan nokta, Çinliler bu denklem sistemlerini Babillilerden ve Yunanlılardan daha kolay ve mekanik bir yolla çözerler. Kullandıkları yöntem bugün çok iyi bildiğimiz matris bloklarıdır. Örneğin, bugünkü dille

$$\begin{aligned} x+2y+3z&=26\\ 2x+3y+z&=34\\ 3x+2y+z&=39 \end{aligned}$$

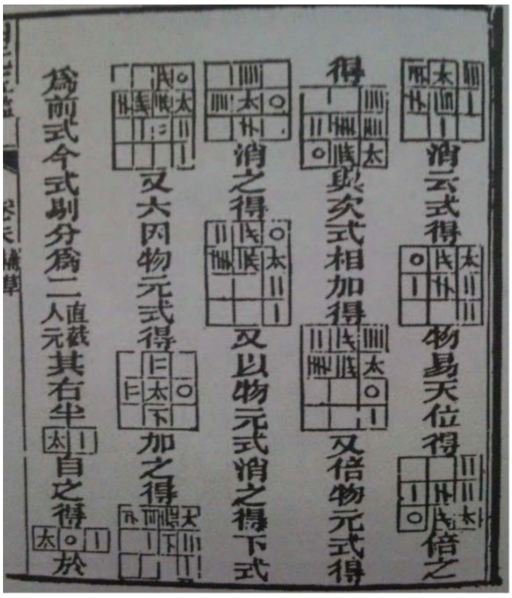
şeklinde, eş zamanlı olarak sağlanan lineer denklemler sistemini,

1	2	3
2	3	2
3	1	1
26	34	39

biçiminde bloklarla yazarlardı. Ondan sonra Gauss indirgeme ya da yok etme yöntemi dediğimiz yolun aynısını kullanarak denklemi kolayca çözerlerdi. Şöyle ki,

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 26 & 34 & 39 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 2 & 9 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \\ 26 & 102 & 39 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 7 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 26 & 63 & 39 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 26 & 24 & 39 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 2 \\ 36 & 1 & 1 \\ 99 & 24 & 39 \end{bmatrix}$$

olup, buradan $36z = 99,\ 5y + z = 24,\ 3x + 2y + z = 39$ denklemleri elde edilir ve buradan da x, y ve z kolayca bulunurdu.



Çin' de matris bloklarıyla problem çözümleri

Matris bloklarını kullanmadan denklem sistemlerini çözen ve Çinlilerden bağımsız bir yol izleyen Japonların büyük matematikçisi Seki Kova, 1683 yılında yazdığı "Kai Fukudai No Ho" (Determinant ile Problem Çözme Yöntemleri) adlı kitabında determinantları kullanarak denklem sistemlerini çözmüştür. Oysa determinantların Avrupa' da tanıtılması 1693 yılında Alman matematikçi Leibniz tarafından yapılmış ve determinant kullanarak denklem çözümü ise, ilk olarak 1750'de Gabriel Cramer tarafından gösterilmiştir.

Matris teorisinin batı Avrupa'daki gelişiminde daha çok determinant kavramına önem verilmekteydi. Determinanttan bağımsız olarak matris matematiğinin geliştirilmesi 1858’ de Arthur Cayley tarafından “Memoir on the theory of matrices” (Matris teorisi hakkında bir not) adındaki eserle başlamıştır. Matris terimi, isim olarak ilk defa J.J. Syvester adlı İngiliz matematikçisi tarafından kullanılmıştır. Bu matematikçi determinantları açıp sayısal değerlerini bulmak için sütun ve satırları silip, gittikçe daha küçük determinantlar (minor) elde ederek sonuca ulaşmıştır. Sanki bir “ana” determinanttan gittikçe küçülen "çocuk" determinantların bulunmasından ilham alarak, simdi matris olarak adlandırdığımız kavrama, Latince kökten mater (anne) sözcüğünden çıkardığı matrix adını vermiştir [12].

O günden bu güne matrisler, başta matematik olmak üzere, gerek fen gerek sosyal birçok bilim dalı ve araştırma alanında kullanılmış ve hala da kullanılmaktadır. Bunlara örnek olarak, oyun teorisi [13], kuaterniyonlar teorisi [42], kriptoloji [38], bilgisayar grafikleri [1], grafik teorisi [15, 33], analiz [26, 30], diferansiyel denklemler [14], fizikteki simetri ve dönüşümler [9, 23], kuantum durumların lineer bileşimleri [8, 36, 43], geometrik optik [19], ekonomi [17], sayılar teorisi [11], fizik [44] ve istatistik [16, 20, 27, 29] verilebilir.

Bazı özel tipli matrisler ise özellikleri itibariyle uygulamalı bilimler ve matris teorisinde ayrıca bir öneme sahiptirler. Örneğin tripotent, idempotent ve involutif matrisler ve bu matrislerin lineer bileşimleri birçok alanda kullanışlı olup, literatürde yoğun bir şekilde çalışılmaktadır [2-7, 10, 18, 24, 28, 31, 32, 35, 39, 40].

İdempotent ve tripotent matrisli kuadratik formlar istatistik teorisinde önemli bir yere sahiptir. Şöyle ki, A bir $m \times m$ boyutlu reel simetrik matris ve $\mathbf{x}$ çok değişkenli normal dağılıma sahip $m \times 1$ boyutlu bir reel vektör olmak üzere, $\mathbf{x}^T A \mathbf{x}$ kuadratik formunun bir ki-kare dağılımına sahip olmasının veya iki bağımsız ki-kare dağılımının farkı olarak yazılmasının gerekli ve yeterli koşulu sırasıyla, A matrisinin idempotent veya tripotent olmasıdır [16].

Bu çalışmada, iki değişmeli tripotent matrisin lineer bileşimi için [39]' da elde edilen sonuçlar herhangi sonlu sayıdaki değişmeli tripotent matrisin lineer bileşimi için genelleştirilmiştir. Ayrıca, [39]' da ele alınan lineer bileşimin tripotentliği, idempotentliği, tersinirliği ve grup tersinirliği gibi bazı sonuçlar genelleştirilmiş ve esas sonuçları elde etmek adına bir algoritma verilmiştir.

Bu çalışmada elde edilen sonuçlar sadece cebirsel açıdan değil aynı zamanda istatiksel açıdan da önemlidir. $A_1,...,A_n$ $m \times m$ boyutlu simetrik tripotent matrisler ve $\mathbf{x}$ çok değişkenli normal dağılıma sahip $m \times 1$ boyutlu bir reel vektör ise,

$$\mathbf{x}^T A_1 \mathbf{x},...,\mathbf{x}^T A_n \mathbf{x}\,, \tag{1.1}$$

kuadratik formlarının her birnini, iki bağımsız ki-kare dağılımının farkı olarak yazılabildiği vurgulanmıştı. Bu çalışmada elde edilen bazı sonuçlar ise, (1.1)' deki kuadratik formların lineer bileşimlerinin ne zaman bir ki-kare dağılımına sahip olduğu veya iki bağımsız ki-kare dağılımının farkı olarak yazılabildiği problemi ile ilişkilidir.

BÖLÜM 2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, sonraki bölümlerde kullanılacak olan bazı temel kavramlar ve ispatsız olarak bazı özellikler, $\mathbb{R}$ cismi üzerinde, verilmektedir. Bu bölümün dahil edilmesinin amacı uygulama aşamasında bütünlük sağlanmasıdır.

2.1. Bir Matrisin Rankı, İzi, Tersi ve Determinantı

Tanım 2.1.1. A, $m \times n$ boyutlu bir matris olsun. A matrisinin a^1, $a^2, ..., a^n$ sütunları tarafından üretilen $\mathbb{R}^m$' nin alt uzayına A' nın sütun uzayı denir. Sütun uzayının boyutuna A' nın sütun rankı denir [41].

Tanım 2.1.2. A, $m \times n$ boyutlu bir matris olsun. A matrisinin a_1, $a_2, ..., a_m$ satırları tarafından üretilen $\mathbb{R}^n$' nin alt uzayına A' nın satır uzayı denir. Satır uzayının boyutuna A' nın satır rankı denir [41].

Tanım 2.1.3. Bir A matrisinin satır indirgenmiş eşelon biçimindeki sıfırdan farklı satırlarının sayısına A' nın rankı denir ve $rk(A)$ ile gösterilir [41].

Teorem 2.1.4. A bir matris ve C matrisi A' nın satır indirgenmiş eşelon biçimi olsun. A matrisinin satır uzayı ile C' nin satır uzayı aynıdır [41].

Teorem 2.1.5. A bir matris olsun. A' nın satır rankı, sütun rankı ve rankı eşittir [41].

Tanım 2.1.6. A bir $n \times n$ boyutlu matris olmak üzere, köşegen elamanlarının toplamına A matrisinin izi denir ve $iz(A)$ ile gösterilir. Yani,

$$iz(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

dir [9].

Tanım 2.1.7. A bir kare matris olsun. Eğer $AB = BA = I$ olacak biçimde bir B matrisi varsa A' ya tersinir (tekil olmayan) matris denir. B matrisine de A' nın tersi denir ve $B = A^{-1}$ ile gösterilir. Eğer A' nın bir tersi yoksa A matrisine tersinir olmayan (tekil) matris denir [41].

Teorem 2.1.8. Eğer bir A kare matrisi tersinir ise tersi tektir [41].

Tanım 2.1.9. A bir kare matris olsun. X uygun boyutlu bir matris olmak üzere, eğer X matrisi

a) $AXA = A$

b) $XAX = X$

c) $AX = XA$

eşitliklerini sağlıyor ise X matrisine A matrisinin grup tersi denir ve $A^{\#}$ ile gösterilir [22].

Teorem 2.1.10. A bir kare matris olmak üzere

a) A tersinir bir matris ise $A^{-1} = A^{\#}$,

b) $\left(A^{\#}\right)^{\#} = A$,

c) $(A^{T})^{\#} = (A^{\#})^{T}$,

d) her pozitif k tamsayısı için $(A^k)^\# = (A^\#)^k$ dır [22].

Tanım 2.1.11. A bir $n \times n$ boyutlu matris olmak üzere A' nın determinantı

a) n=1 için $\det(A) = a_{11}$

b) n=2 için $\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

c) $n > 2$ için
$$\begin{aligned}\det(A) &= a_{11}\det A_{11} - a_{12}\det A_{12} + \cdots + (-1)^{1+n} a_{1n}\det A_{1n} \\ &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{1+i} a_{1i}\det A_{1i}\end{aligned}$$

ile verilir [41].

Teorem 2.1.12. A bir $n \times n$ boyutlu matris olmak üzere, eğer A üst üçgensel, alt üçgensel veya köşegen matris ise $\det(A) = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$ dir [41].

Sonuç 2.1.13. I birim matris olmak üzere $\det(I) = 1$ dir.

Teorem 2.1.14. A ve B kare matrisler olmak üzere $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ dir [41].

Sonuç 2.1.15. A tersinir bir matris olmak üzere $\det(A) = \dfrac{1}{\det(A^{-1})}$ dir.

2.2. Özdeğer, Özvektör ve Köşegenleştirme

Tanım 2.2.1. A ve B $n \times n$ boyutlu matrisler olsun. Eğer $B = P^{-1}AP$ olacak biçimde bir P tersinir matrisi var ise, B matrisine, A matrisine benzerdir denir [41].

Tanım 2.2.2. A bir $n \times n$ boyutlu matris olmak üzere sıfırdan farklı bir $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ vektörü için $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ eşitliğini sağlayan λ skalerine A matrisinin bir özdeğeri ve $\mathbf{x}$ vektörüne de λ özdeğerine karşılık gelen bir özvektör denir [41].

Teorem 2.2.3. A bir $n \times n$ boyutlu matris ve I aynı boyutlu birim matris olsun. Bu durumda,

a) A matrisinin özdeğerleri, $\det(A - \lambda I) = 0$ denklemini sağlayan λ skalerleridir.

b) A matrisinin λ_0 özdeğerine karşılık gelen bir $\mathbf{x}$ özvektörü, $(A - \lambda_0 I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ homojen lineer denklem sisteminin aşikâr olmayan (sıfırdan farklı) bir çözümüdür [41].

Tanım 2.2.4. λ_0, bir A kare matrisinin özdeğeri olmak üzere, $(A - \lambda_0 I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ homojen lineer denklem sisteminin tüm çözümlerinin kümesine λ_0 özdeğerinin öz uzayı denir [41].

Teorem 2.2.5. Üst üçgensel, alt üçgensel veya köşegen bir matrisin özdeğerleri ile köşegen elemanları özdeştir, yani aynıdır [41].

Tanım 2.2.6. Eğer bir A kare matrisi köşegen bir matrise benzer ise, A matrisine köşegenleştirilebilir denir [41].

Teorem 2.2.7. A bir $n \times n$ boyutlu matris olsun. A matrisinin köşegenleştirilebilir olmasının gerekli ve yeterli koşulu A matrisinin tam olarak n tane lineer bağımsız özvektöre sahip olmasıdır [41].

Teorem 2.2.8. A bir $n \times n$ boyutlu matris olsun. Eğer A matrisinin n tane farklı özdeğeri var ise, A köşegenleştirilebilirdir [41].

Tanım 2.2.9. Bir A kare matrisine, transpozesine eşit ise simetriktir denir [41].

Teorem 2.2.10. A bir simetrik matris olmak üzere, $\mathbf{x}_1$ ve $\mathbf{x}_2$ vektörleri sırasıyla A matrisinin farklı λ_1 ve λ_2 özdeğerlerine karşılık gelen özvektörleri olsun. Bu durumda $\mathbf{x}_1$ ve $\mathbf{x}_2$ vektörleri ortogonaldir [41].

Tanım 2.2.11. P bir $n \times n$ boyutlu matris olsun. Eğer $PP^T = I$ ise P matrisine bir ortogonal matris denir [41].

Teorem 2.2.12. P bir $n \times n$ boyutlu matris olsun. P matrisinin ortogonal olmasının gerekli ve yeterli koşulu P matrisinin sütunları olan $\{\mathbf{p}^1, \mathbf{p}^2, ..., \mathbf{p}^n\}$ kümesinin bir ortonormal küme olmasıdır [41].

Tanım 2.2.13. A bir kare matris olmak üzere eğer A matrisini köşegenleştiren ortogonal bir P matrisi varsa A matrisine ortogonal olarak köşegenleştirilebilir denir [41].

Teorem 2.2.14. A bir simetrik matris olsun. Bu durumda $P^T AP$ matrisi köşegen bir matris olacak şekilde bir ortogonal P matrisi vardır [41].

Tanım 2.2.15 A ve B matrisleri uygun boyutlu matrisler olmak üzere, A ve B matrislerine $AB = BA$ ise değişmeli matrisler ve $AB = BA = \mathbf{0}$ ise ayrık matrisler denir.

Tanım 2.2.16. A ve B matrisleri köşegenleştirilebilir olsun. Eğer bir tek tersinir P matrisi için $P^{-1}AP$ ve $P^{-1}BP$ köşegen oluyorsa, A ve B matrislerine eş zamanlı köşegenleştirilebilir matrisler denir [21].

Teorem 2.2.17. A ve B matrisleri köşegenleştirilebilir olsun. Bu matrislerin eş zamanlı köşegenleştirilebilir olmasının gerekli ve yeterli koşulu A ve B matrislerinin değişmeli olmasıdır [21].

BÖLÜM 3. İDEMPOTENT VE TRİPOTENT MATRİSLER

Bu bölümde idempotent ve tripotent matrisler ile onların bazı özellikleri verilmektedir. Özelliklerin bazılarının ispatları verilmektedir. Bir kısmının ispatı kolay olduğundan ve bir kısmının ispatı ise, hacmin genişlememesi adına, verilmemektedir.

3.1. İdempotent Matrisler

Tanım 3.1.1. A bir kare matris olmak üzere, $A = A^2$ ise A matrisine idempotent denir [16].

Teorem 3.1.2. A bir $n \times n$ boyutlu idempotent matris olsun. Eğer $rk(A) = n$ ise $A = I$ dır [16].

İspat. A matrisi tam ranklı olduğundan tersi vardır. $A^2 = A$ eşitliği soldan A^{-1} ile çarpılırsa $A = I$ elde edilir. □

Teorem 3.1.3. A bir idempotent matris olsun. Bu durumda $rk(A) = iz(A)$ dır [16].

Teorem 3.1.4. A bir $n \times n$ boyutlu matris ve $rk(A) = p$ olsun. Bu durumda aşağıdakiler doğrudur.

a) A idempotent ise A matrisinin p tane sıfırdan farklı özdeğeri vardır ve bunların hepsi 1' e eşittir.

b) A simetrik bir matris olmak üzere A matrisinin idempotent olmasının gerekli ve yeterli koşulu A matrisinin p tane sıfırdan farklı özdeğerinin mevcut olması ve bunların hepsinin 1'e eşit olmasıdır [16].

İspat. İlk önce a)' yı ispatlayalım. λ, A matrisinin bir özdeğeri olsun. Bu durumda, $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ olacak şekilde sıfırdan farklı bir $\mathbf{x}$ vektörü vardır. Eşitlik soldan A ile çarpılırsa

$$A(A\mathbf{x}) = A^2\mathbf{x} = \lambda(A\mathbf{x}) = \lambda(\lambda\mathbf{x}) = \lambda^2\mathbf{x}$$

elde edilir. Ayrıca A idempotent olduğundan

$$\lambda^2\mathbf{x} = A^2\mathbf{x} = A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$$

ve buradan da

$$\lambda(\lambda - 1)\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

elde edilir. Böylece $\mathbf{x}$ vektörü sıfırdan farklı olduğundan $\lambda = 1$ veya $\lambda = 0$ olması gerektiği görülür. Dolayısıyla bir idempotent matrisin özdeğerleri 1' e veya 0' a eşit olmalıdır. Ayrıca A' nın p ranklı matris olması kabulünden ve Teorem 3.1.3' ten

$$rk(A) = iz(A) = \sum \lambda_i = p$$

olur. Böylece A' nın tam olarak p tane sıfırdan farklı özdeğeri olduğu ve bunların da 1'e eşit olduğu görülür.

Şimdi b)' yi ispatlayalım. A matrisinin simetrik olması kabulünden ve Teorem 2.2.14' ten dolayı, D köşegen elemanları A matrisinin özdeğerleri olan bir köşegen matris olmak üzere $P^T AP = D$ olacak şekilde ortogonal bir P matrisi vardır. $D = D^2$ dir ancak ve ancak sıfırdan farklı köşegen elemanları 1' e eşittir ve $D = D^2$ dir ancak ve ancak $A = A^2$ dir. □

Teorem 3.1.5. A $n \times n$ boyutlu bir simetrik matris olsun. En az bir t pozitif tamsayısı için $A^t = A^{t+1}$ eşitliği sağlanıyor ise A matrisi idempotenttir [16].

Teorem 3.1.6. A bir $n \times n$ boyutlu (simetrik) idempotent matris olsun. Bu durumda aşağıdakiler doğrudur.

a) A^T (simetrik) idempotent matristir.

b) P ortogonal bir matris ise $P^T AP$ (simetrik) idempotent matristir.

c) P tersinir bir matris ise $P^{-1}AP$ (simetrik) idempotent matristir.

d) $I - A$ (simetrik) idempotent matristir.

e) Ayrıca A bir normal matris ise, yani $A^T A = AA^T$ ise, $A^T A$ ve AA^T matrisleri (simetrik) idempotent matrislerdir.

f) n, bir pozitif tam sayı olmak üzere A^n (simetrik) idempotent matristir [16].

Tanım 3.1.7. A bir $n \times n$ boyutlu simetrik matris olsun. Sıfırdan farklı her $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ vektörü için, $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} \geq 0$ ise A matrisine pozitif yarı kararlı, $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} > 0$ ise A matrisine pozitif kararlı matris denir [16].

Tanım 3.1.8 A matrisi, pozitif yarı kararlı ya da pozitif kararlı matris ise, A' ya nonnegatif kararlı matris denir [16].

Teorem 3.1.9. $A_i,\ i = 1,2,...,k,$ $n \times n$ boyutlu simetrik matrisler olmak üzere $A_0 = \sum_{i=1}^{k} A_i$ olsun. O halde aşağıdaki üç koşuldan herhangi ikisi diğer koşulu sağlar.

a) $A_0 = A_0^2$,

b) $A_i = A_i^2,\ i = 1,2,...,k,$

c) $A_i A_j = \mathbf{0},\ i \neq j;\ i,j = 1,2,...,k$ [16].

İspat. İlk olarak a) ve b) doğru olsun. O halde

$$A_0^2 = \left(\sum_{i=1}^{k} A_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{k} A_i^2 + \sum_{\substack{j=1 \\ i\neq j}}^{k} \sum_{i=1}^{k} A_i A_j = \sum_{i=1}^{k} A_i + \sum_{\substack{j=1 \\ i\neq j}}^{k} \sum_{i=1}^{k} A_i A_j = A_0 = \sum_{i=1}^{k} A_i$$

olur. Buradan

$$\sum_{\substack{j=1 \\ i\neq j}}^{k} \sum_{i=1}^{k} A_i A_j = \mathbf{0}$$

elde edilir. Buradan da

$$iz\left(\sum_{\substack{j=1 \\ i\neq j}}^{k} \sum_{i=1}^{k} A_i A_j \right) = 0 \qquad (3.1)$$

bulunur. Her A_i matrisi simetrik ve idempotent olduğundan nonnegatif kararlı matristir [8, Teorem 12.2.1] ve eğer bir nonnegatif kararlı matrisler kümesi (3.1) eşitliğini sağlar ise $i \neq j$ için $A_i A_j = \mathbf{0}$ dır [8, Teorem 12.2.4].

İkinci olarak a) ve c) doğru olsun. Bu durumda,

$$A_0 = A_0^2 = \left(\sum_{i=1}^{k} A_i \right)^2 = \sum_{i=1}^{k} A_i^2 \text{ veya } \sum_{i=1}^{k} A_i = \sum_{i=1}^{k} A_i^2$$

olur. $q \neq 0$ ve $i \neq q$ için $A_q A_i = \mathbf{0}$ olduğundan son eşitliğin iki tarafını da A_q ile çarparak

$$A_q^2 = A_q^3,$$

elde edilir. Teorem 3.1.5' ten dolayı A_q matrisi idempotenttir. A_q ile çarpma işlemi $q = 1, 2, ..., k$ için tekrarlanırsa a) ve c)'nin b)'yi sağladığı görülür.

Son olarak b) ve c) doğru olsun. O halde

$$A_0^2 = \left(\sum_{i=1}^{k} A_i \right)^2 = \sum_{i=1}^{k} A_i^2 + \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{k} \sum_{i=1}^{k} A_i A_j = \sum_{i=1}^{k} A_i = A_0$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur. □

Teorem 3.1.10. $A_i,\ i = 1,2,...,k,\ n \times n$ boyutlu ve n_i ranklı simetrik matrisler olmak üzere, $\sum_{i=1}^{k} A_i = I$ olsun. Eğer $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$ ise

a) $A_i A_j = \mathbf{0},\ i \neq j;\ i, j = 1,2,...,k,$

b) $A_i = A_i^2,\ i = 1,2,...,k,$

dır [16].

Teorem 3.1.11. A bir $n \times n$ boyutlu simetrik idempotent matris olsun. Bu durumda

$$B = I - 2A$$

bir simetrik ortogonal matristir [16].

Teorem 3.1.12. P, $n \geq m$ olmak üzere $m \times n$ boyutlu bir matris ve $PP^T = I$ olsun. Bu durumda $P^T P$ matrisi $n \times n$ boyutlu simetrik idempotent bir matristir [16].

İspat. $(P^T P)^T = P^T P$ olduğu açıktır. Ayrıca $(P^T P)(P^T P) = P^T IP = P^T P$ dır. □

Teorem 3.1.13. A bir $n \times n$ boyutlu simetrik matris olsun. Bu durumda A matrisi, her birinin rankı 1 olan simetrik ayrık idempotent matrislerin lineer bileşimi olarak, yani

$$A = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i A_i$$

şeklinde yazılabilir. Burada her $i \neq j$ için $A_i^2 = A_i$, $A_i^T = A_i$, $A_i A_j = \mathbf{0}$ dir ve λ_i skalerleri A matrisinin özdeğerleridir [16].

İspat. Teorem 2.2.15' ten dolayı, $d_{ii} = \lambda_i$ skalerleri A matrisinin özdeğerleri olmak üzere $P^T AP = D$ olacak şekilde ortogonal bir P matrisi vardır. Buradan $A = PDP^T$ şeklinde elde edilir. p_i, P matrisinin i. sütunu olmak üzere $P = [p_1, p_2, ..., p_n]$ olarak alınırsa

$$PD = [\lambda_1 p_1, \lambda_2 p_2, ..., \lambda_n p_n]$$

olur. $A_i = p_i p_i^T$ olarak tanımlanırsa

$$A = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i p_i p_i^T = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i A_i$$

elde edilir. Buradan $A_i = A_i^T$, $A_i^2 = A_i$ ve ayrıca $i \neq j$ için $p_i^T p_j = \mathbf{0}$ olduğundan $A_i A_j = p_i p_i^T p_j p_j^T = \mathbf{0}$ elde edilir. Ayrıca p_i, i =1,2,…,n, $n \times 1$ boyutlu vektör olduğundan $rk(A_i)$=1 dir. Böylece ispat tamamlanmış olur. □

Teorem 3.1.14. A ve B $n \times n$ boyutlu matrisler olsun. Eğer

a) *ABA=A*

veya

b) *BAB=B*

ise *AB* ve *BA* matrisleri idempotenttir [16].

İspat. a)' yı soldan *B* ile çarparak *AB*'nin idempotent olduğunu görülür. b)' de benzer şekilde gösterilir. □

Teorem 3.1.15. A ve B $n \times n$ boyutlu idempotent matrisler olsun. Eğer *AB*=*BA* ise *AB* ve *BA* idempotenttir [16].

Teorem 3.1.16. A bir $m \times n$ boyutlu matris olsun. $A^T A$ matrisinin idempotent olmasının gerekli ve yeterli koşulu AA^T matrisinin idempotent olmasıdır [16].

Teorem 3.1.17. A matrisi $n \times n$ boyutlu ve r ranklı simetrik bir matris olsun. Bu durumda A matrisi, her birinin rankı 1 olan karşılıklı olarak ayrık r tane simetrik idempotent matrisin lineer bileşimi olarak, yani her $i \neq j$ için $A_i^2 = A_i$, $A_i^T = A_i$, $A_i A_j = \mathbf{0}$ olmak üzere,

$$A = \sum_{i=1}^{r} d_i A_i$$

Şeklinde yazılabilir [16].

İspat. D, $r \times r$ boyutlu ve köşegeni üzerinde A matrisinin sıfırdan farklı özdeğerlerini bulunduran bir matris olmak üzere,

$$P^T A P = \begin{bmatrix} D & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

olacak şekilde ortogonal bir P matrisi vardır. p_i, P matrisinin $i.$ sütunu olmak üzere, $P = [p_1, p_2, ..., p_n]$ ve d_i, $i = 1, ..., r$, D' nin köşegen elemanları olsun. Buradan,

$$A = P \begin{bmatrix} D & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} P^T = [p_1, p_2, ..., p_n] \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1^T \\ \vdots \\ p_n^T \end{bmatrix}$$

olur. Buradan da, $A_i = p_i p_i^T$ olmak üzere,

$$A = \sum_{i=1}^{r} d_i p_i p_i^T = \sum_{i=1}^{r} d_i A_i$$

elde edilir. Burada A_i matrislerinin ayrık, simetrik ve idempotent olduğu açıktır. □

3.2. Tripotent Matrisler

Tanım 3.2.1. *C* bir kare matris olmak üzere, $C = C^3$ ise *C* matrisine tripotent matris denir [16].

Teorem 3.2.2. *C* bir $n \times n$ boyutlu (simetrik) tripotent matris olsun. Bu durumda aşağıdakiler doğrudur.

a) *P* ortogonal bir matris ise $P^T AP$ (simetrik) tripotent matristir.

b) *P* tersinir bir matris ise $P^{-1}AP$ (simetrik) tripotent matristir.

c) C^2 (simetrik) idempotent matristir.

d) –*C* (simetrik) tripotent matristir [16].

Teorem 3.2.3. *C* bir $n \times n$ boyutlu tripotent matris olsun. *C* matrisinin özdeğerleri -1, 0 veya 1 sayılarından oluşur [16].

İspat. λ, *C* matrisinin bir özdeğeri olsun. Bu durumda en az bir sıfırdan farklı **x** vektörü için

$$C\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$$

dir. Eşitlik soldan C^2 ile çarpılırsa

$$C^3\mathbf{x} = \lambda C^2\mathbf{x} = \lambda C(C\mathbf{x}) = \lambda^2 C\mathbf{x} = \lambda^3\mathbf{x}$$

elde edilir. $C = C^3$ olduğundan

$$\lambda\mathbf{x} = \lambda^3\mathbf{x}$$

olur. Buradan

$$\lambda(1-\lambda^2)\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

elde edilir. $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ olduğundan λ sayısı -1, 0 veya 1'e eşittir. □

Teorem 3.2.4. *C* bir $n \times n$ boyutlu simetrik matris olsun. *C* matrisinin simetrik tripotent olmasının gerek ve yeter koşulu *C*=*A*-*B* olacak biçimde $n \times n$ boyutlu simetrik ayrık idempotent *A* ve *B* matrislerinin mevcut olmasıdır. Bu iki matris tek türlü olup

$$A = \frac{1}{2}\left(C^2 + C\right),\ \mathrm{B} = \frac{1}{2}\left(C^2 - C\right)$$

dır [16].

Teorem 3.2.5. C matrisi, n_1 tane özdeğeri 1'e, n_2 tane özdeğeri 0'a ve n_3 tane özdeğeri -1'e eşit olan bir $n \times n$ boyutlu tripotent matris olsun. Bu durumda

a) $\frac{1}{2} iz(C^2 + C) = n_1$,

b) $\frac{1}{2} iz(C^2 - C) = n_2$,

c) $\frac{1}{2} iz(I - C^2) = n_3$,

d) $iz(C) = n_1 - n_2$

dir [16].

Teorem 3.2.6. A ve B $n \times n$ boyutlu simetrik matrisler olsun. Bu durumda aşağıdakiler doğrudur.

a) A ve B idempotent ve AB=BA ise A-B simetrik tripotent matristir.

b) A idempotent ise $-A$ ve A tripotenttir.

c) A matrisinin tripotent olmasının gerekli ve yeterli koşulu A^2 matrisinin idempotent olmasıdır [16].

Teorem 3.2.7. C bir $n \times n$ boyutlu tersinir tripotent matris ise

$$C^{-1} = C,\ C^2 = I \text{ ve } (C+I)(C-I) = \mathbf{0}$$

dır [16].

BÖLÜM 4. İKİ TANE DEĞİŞMELİ TRİPOTENT MATRİSTEN ELDE EDİLEN LİNEER BİLEŞİM İÇİN AYRIK İDEMPOTENT AYRIŞIM

Bu bölümde, Yongge Tian tarafından yapılmış olan çalışma incelenmektedir [39]. O çalışmada, iki değişmeli tripotent matris ve çarpımlarından elde edilen lineer bileşimin ayrık idempotent ayrışımı problemi ele alınmaktadır. Burada ele alınan problemin sonlu tane değişmeli tripotent matrise genelleştirilmesi Bölüm 5' te verilecektir. Dolayısıyla bu bölüm sonraki bölümün anlaşılması için yararlı olacaktır.

4.1. Giriş

$\mathbb{F}$ genel bir cismi belirtsin ve ele alınan matrisler bu cismin üzerinde tanımlı olsunlar. $\delta(.)$ fonksiyonu $x = 0$ için $\delta(x) = 0$ ve $x \neq 0$ için $\delta(x) = 1$ biçiminde tanımlanan fonksiyon olsun. A ve B,

$$A^3 = A,\ B^3 = B \text{ ve } AB = BA \tag{4.1}$$

eşitliklerini sağlayan $m \times m$ boyutlu matrisler olsunlar. Bu durumda matris çarpımı altında muhtemel altı farklı matristen, A^2, B^2, AB, AB^2, A^2B ve A^2B^2, bahsedebiliriz. I birim matrisini, A ve B matrislerini ve yukarıdaki altı matrisi de alarak, $a_0, a_1, a_2, b_1, b_2, c_{11}, c_{12}, c_{21}, c_{22} \in \mathbb{F}$ olmak üzere,

$$M = a_0 I + a_1 A + a_2 A^2 + b_1 B + b_2 B^2 + c_{11} AB + c_{12} AB^2 + c_{21} A^2 B + c_{22} A^2 B^2 \tag{4.2}$$

lineer bileşimi yazılabilir.

4.2. İki Değişmeli Tripotent Matris ve Çarpımlarından Elde Edilen Lineer Bileşimin Ayrık İdempotent Ayrışımı

Bu bölümün amacı (4.2) lineer bileşimi için dokuz terimli ayrık idempotent ayrışım vermektir. Teorem 3.2.4' ten bir tripotent matrisin tek türlü biçimde ayrık iki idempotent matrisin farkı olarak yazılabildiği bilinmektedir. Buna göre, (4.2) lineer bileşimindeki *A* ve *B* tripotent matrisleri,

$$P_A = \frac{1}{2}(A^2 + A),\ Q_A = \frac{1}{2}(A^2 - A),\ P_B = \frac{1}{2}(B^2 + B),\ Q_B = \frac{1}{2}(B^2 - B), \tag{4.3}$$

olmak üzere,

$$A = P_A - Q_A,\ B = P_B - Q_B \tag{4.4}$$

şeklinde yazılır. Burada P_A, P_B, Q_A ve Q_B matrisleri

$$\begin{aligned} &P_A^2 = P_A,\ Q_A^2 = Q_A,\ P_A Q_A = Q_A P_A = \mathbf{0}, \\ &P_B^2 = P_B,\ Q_B^2 = Q_B,\ P_B Q_B = Q_B P_B = \mathbf{0}, \\ &P_A P_B = P_B P_A,\ P_A Q_B = Q_B P_A,\ Q_A P_B = P_B Q_A,\ Q_A Q_B = Q_B Q_A, \end{aligned}$$

özelliklerini sağlar. Ayrıca (4.3)' ten

$$A^2 = P_A + Q_A,\ B^2 = P_B + Q_B \tag{4.5}$$

olduğu kolaylıkla görülür. Bu durumda, (4.3) ve (4.5)' ten (4.2) lineer bileşimi

$$
\begin{aligned}
M &= a_0 I + a_1(P_A - Q_A) + a_2(P_A + Q_A) + b_1(P_B - Q_B) + b_1(P_B + Q_B) \\
&\quad + c_{11}(P_A - Q_A)(P_B - Q_B) + c_{12}(P_A - Q_A)(P_B + Q_B) \\
&\quad + c_{21}(P_A + Q_A)(P_B - Q_B) + c_{22}(P_A + Q_A)(P_B + Q_B) \\
&= a_0 I + p_1 P_A + p_2 Q_A + q_1 P_B + q_2 Q_B + d_{11} P_A P_B + d_{12} P_A Q_B \\
&\quad + d_{21} Q_A P_B + d_{22} Q_A Q_B \\
&= (a_0 I + p_1 P_A + p_2 Q_A) + (q_1 I + d_{11} P_A + d_{21} Q_A) P_B \\
&\quad + (q_2 I + d_{12} P_A + d_{22} Q_A) Q_B
\end{aligned}
\tag{4.6}
$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada

$$
\begin{aligned}
&p_1 = a_1 + a_2,\ p_2 = -a_1 + a_2,\ q_1 = b_1 + b_2,\ q_2 = -b_1 + b_2, \\
&d_{11} = c_{11} + c_{12} + c_{21} + c_{22},\ d_{12} = -c_{11} + c_{12} - c_{21} + c_{22}, \\
&d_{21} = -c_{11} - c_{12} + c_{21} + c_{22},\ d_{22} = c_{11} - c_{12} - c_{21} + c_{22}
\end{aligned}
$$

dir.

Şimdi esas sonuçların elde edilmesinde kullanılacak olan yardımcı bir sonuç verilmektedir.

Lemma 4.1. X ve Y matrisleri $X^2 = X,\ Y^2 = Y$ ve $XY = YX = \mathbf{0}$ özelliklerini sağlasın. Bu durumda, a_0, a_1, a_2 birer skaler olmak üzere $a_0 I + a_1 X + a_2 Y$ lineer bileşimi

$$
a_0 I + a_1 X + a_2 Y = c_1 L_1 + c_2 L_2 + c_3 L_3 \tag{4.7}
$$

şeklinde yazılabilir. Burada $c_1 = a_0,\ c_2 = a_0 + a_1,\ c_3 = a_0 + a_2$ ve $L_1 = I - X - Y$, $L_2 = X,\ L_3 = Y$ olup

$$
L_1 + L_2 + L_3 = I,\ L_i^2 = L_i,\ L_i L_j = L_j L_i = \mathbf{0}\quad i \neq j,\ i,j = 1,2,3,
$$

eşitlikleri gerçeklenmektedir. L_1, L_2 ve L_3 matrisleri idempotent ve karşılıklı olarak ayrık olduklarından (4.7) ifadesine $a_0 I + a_1 X + a_2 Y$ lineer bileşiminin ayrık idempotent ayrışımı (AİA) denir [39].

Teorem 4.2. *A* ve *B* matrisleri (4.1)' de ve *M* lineer bileşimi (4.2)' de verildiği gibi olsun. Bu durumda *M* lineer bileşiminin bir AİA' ı

$$M = \sum_{i=1}^{9} s_i J_i \tag{4.8}$$

şeklindedir. Buradaki $s_1, ..., s_9$ skalerleri

$$\begin{aligned}
&s_1 = a_0,\ s_2 = a_0 + a_1 + a_2,\ s_3 = a_0 - a_1 + a_2,\\
&s_4 = a_0 + b_1 + b_2,\ s_7 = a_0 - b_1 + b_2,\\
&s_5 = a_0 + a_1 + a_2 + b_1 + b_2 + c_{11} + c_{12} + c_{21} + c_{22},\\
&s_6 = a_0 - a_1 + a_2 + b_1 + b_2 - c_{11} - c_{12} + c_{21} + c_{22},\\
&s_8 = a_0 + a_1 + a_2 - b_1 + b_2 - c_{11} + c_{12} - c_{21} + c_{22},\\
&s_9 = a_0 - a_1 + a_2 - b_1 + b_2 + c_{11} - c_{12} - c_{21} + c_{22},
\end{aligned} \tag{4.9}$$

ve $J_1, ..., J_9$ matrisleri

$$\begin{aligned}
&J_1 = (I - A^2)(I - B^2),\ J_2 = \frac{1}{2}(A^2 + A)(I - B^2),\ J_3 = \frac{1}{2}(A^2 - A)(I - B^2),\\
&J_4 = \frac{1}{2}(I - A^2)(B^2 + B),\ J_5 = \frac{1}{4}(A^2 + A)(B^2 + B),\ J_6 = \frac{1}{4}(A^2 - A)(B^2 + B),\\
&J_7 = \frac{1}{2}(I - A^2)(B^2 - B),\ J_8 = \frac{1}{4}(A^2 + A)(B^2 - B),\ J_9 = \frac{1}{4}(A^2 - A)(B^2 - B)
\end{aligned} \tag{4.10}$$

biçimindedir. Ayrıca yukarıdaki $J_1, ..., J_9$ matrisleri

$$\sum_{i=1}^{9} J_i = I,\; J_i^2 = J_i,\; J_iJ_j = J_jJ_i = \mathbf{0},\; i \neq j;\; i,j = 1,\dots,9$$

eşitliklerini gerçekler.

İspat: $L = I - P_B - Q_B = I - B^2$ olmak üzere, Lemma 4.1, (4.6)’ daki M lineer bileşimine uygulanırsa,

$$M = N_1 L + N_2 P_B + N_3 Q_B \tag{4.11}$$

eşitliği elde edilir. Burada

$$N_1 = a_0 I + p_1 P_A + p_2 Q_A, \tag{4.12}$$

$$N_2 = (a_0 + q_1)I + (p_1 + d_{11})P_A + (p_2 + d_{21})Q_A, \tag{4.13}$$

$$N_3 = (a_0 + q_2)I + (p_1 + d_{12})P_A + (p_2 + d_{22})Q_A \tag{4.14}$$

dır. $K = I - P_A - Q_A = I - A^2$ olmak üzere Lemma 4.1, N_1, N_2 ve N_3'e uygulanırsa

$$N_1 = s_1 K + s_2 P_A + s_3 Q_A,$$
$$N_2 = s_4 K + s_5 P_A + s_6 Q_A,$$
$$N_3 = s_7 K + s_8 P_A + s_9 Q_A$$

eşitlikleri bulunur. Burada

$$s_1 = a_0,\; s_2 = a_0 + p_1,\; s_3 = a_0 + p_2, \tag{4.15}$$

$$s_4 = a_0 + q_1,\; s_5 = a_0 + p_1 + q_1 + d_{11},\; s_6 = a_0 + p_2 + q_1 + d_{21}, \tag{4.16}$$

$$s_7 = a_0 + q_2,\; s_8 = a_0 + p_1 + q_2 + d_{12},\; s_9 = a_0 + p_2 + q_2 + d_{22} \tag{4.17}$$

dir. (4.12)-(4.17) eşitlikleri (4.11)' de yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned} M &= (s_1K + s_2P_A + s_3Q_A)L + (s_4K + s_5P_A + s_6Q_A)P_B + (s_7K + s_8P_A + s_9Q_A)Q_B \\ &= s_1KL + s_2P_AL + s_3Q_AL + s_4KP_B + s_5P_AP_B + s_6Q_AP_B + s_7KQ_B \\ &\quad + s_8P_AQ_B + s_9Q_AQ_B \end{aligned}$$

elde edilir. Burada

$$\begin{aligned} &KL = (I - A^2)(I - B^2),\ P_AL = \frac{1}{2}(A^2 + A)(I - B^2),\ Q_AL = \frac{1}{2}(A^2 - A)(I - B^2), \\ &KP_B = \frac{1}{2}(I - A^2)(B^2 + B),\ P_AP_B = \frac{1}{4}(A^2 + A)(B^2 + B),\ Q_AP_B = \frac{1}{4}(A^2 - A)(B^2 + B), \\ &KQ_B = \frac{1}{2}(I - A^2)(B^2 - B),\ P_AQ_B = \frac{1}{4}(A^2 + A)(B^2 - B),\ Q_AQ_B = \frac{1}{4}(A^2 - A)(B - B) \end{aligned}$$

dir ve $s_1,...,s_9$ skalerleri (4.9)' da verildiği gibidir. □

Özel tipli matrislerin lineer bileşimlerinin tersinirliği ve grup tersinirliği problemi son yıllarda bazı yazarlar tarafından yoğun olarak çalışılmıştır [3, 4, 10, 18, 24, 28, 40]. Şimdi de bu tür çalışmalarla doğrudan ya da dolaylı olarak ilişkili olan, bu ayrık idempotent ayrışımı kullanarak elde edilen M matrisinin determinantı, rankı, izi, kuvveti, tersi ve grup tersi ile ilgili önemli bazı sonuçları verilecektir.

Sonuç 4.3. M matrisi (4.8)' de verildiği gibi ve $t_i = rk(J_i),\ i = 1,2,...,9,$ olsun. Bu durumda aşağıdakiler doğrudur.

a) $t_1 + t_2 + \cdots + t_9 = m$.

b) Eğer $J_i \neq 0,\ i = 1,2,...,9$ ise M matrisinin (4.8)' deki açılımı tek türlüdür.

c) $s_1, s_2,..., s_9$ skalerleri M matrisinin özdeğerleri olup

$$M = P\mathrm{diag}(s_1I_{t_1}, s_2I_{t_2},..., s_9I_{t_9})P^{-1}$$

olacak şekilde bir P tersinir matrisi vardır.

d) Eğer $s_1 s_2 \cdots s_9 \neq 0$ ise

$$\det(M) = s_1^{t_1} s_2^{t_2} \cdots s_9^{t_9}$$

dır.

e) $rk(M) = \delta(s_1)t_1 + \cdots + \delta(s_9)t_9,\ iz(M) = s_1 t_1 + \cdots + s_9 t_9$

dır.

f) k>1 tamsayı olmak üzere

$$M^k = s_1^k J_1 + s_2^k J_2 + \cdots + s_9^k J_9$$

dır.

g) Eğer $s_1 s_2 \cdots s_9 \neq 0$ ise M tersinirdir ve

$$M^{-1} = \frac{1}{s_1} J_1 + \frac{1}{s_2} J_2 + \cdots + \frac{1}{s_9} J_9$$

dır.

h) Eğer $s_1 s_2 \cdots s_9 = 0$ ise M matrisinin grup tersi vardır ve

$$M^{\#} = s_1^{\#} J_1 + s_2^{\#} J_2 + \cdots + s_9^{\#} J_9$$

dır. Burada $s_i \neq 0$ için $s_i^{\#} = \dfrac{1}{s_i}$ ve s_i=0 için $s_i^{\#} = 0,\ i = 1,2,...,9,$ dır [39].

İdempotent, involutif ve tripotent gibi özel tipli matrislerin lineer bileşimlerinin idempotentliği, involutifliği ve tripotentliği problemleri bugüne kadar birçok yazar tarafından çalışılmış olan problemlerdir [2, 5-7, 31, 32, 35]. Bu çalışmada ele alınan (4.8) lineer bileşiminin idempotentliği, involutifliği ve tripotentliği problemi ile ilgili aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 4.4. M matrisi (4.8)' deki gibi olsun. $J_i \neq 0,\ i = 1,2,...,9,$ olmak üzere aşağıdakiler doğrudur.

a) M involutiftir ancak ve ancak $s_i \in \{-1,1\}$, $i = 1,2,...,9$, dir. Ayrıca, bu durumda (4.8) lineer bileşiminden $2^9 = 512$ tane involutif matris elde edilebilir.

b) M idempotenttir ancak ve ancak $s_i \in \{0,1\}$, $i = 1,2,...,9$, dir. Ayrıca, bu durumda (4.8) lineer bileşiminden $2^9 = 512$ tane idempotent matris elde edilebilir.

c) M tripotenttir ancak ve ancak $s_i \in \{-1,0,1\}$, $i = 1,2,...,9$, dir. Ayrıca, bu durumda (4.8) lineer bileşiminden $3^9 = 19683$ tane tripotent matris elde edilebilir [39].

Şimdi de (4.2)' nin bir özel hali olan

$$M = aA + bB \tag{4.18}$$

lineer bileşimi ele alınsın. Bu lineer bileşim ile ilgili bazı problemler daha önce ele alınmıştır [31,35]. Teorem 4.2' den, (4.18)' deki M lineer bileşim matrisinin,

$$M = \sum_{i=2}^{9} s_i J_i \tag{4.19}$$

şeklinde sekiz terimli bir AİA' ı vardır. Burada

$$\begin{aligned} &s_2 = a,\ s_3 = -a,\ s_4 = b,\ s_5 = a+b,\ s_6 = -a4b,\ s_7 = -b, \\ &s_8 = a-b,\ s_9 = -a-b \end{aligned} \tag{4.20}$$

dir ve $J_2,...,J_9$ matrisleri (4.10)' da verildiği gibidir.

Sonuç 4.5. M matrisi (4.19)' da ve $t_i = rk(J_i)$, $i = 1,2,...,9$, olmak üzere $J_2,...,J_9$ matrisleri (4.10)' da verildiği gibi olsun. Bu durumda aşağıdakiler doğrudur.

a) Eğer $J_i \neq 0$, $i = 2,3,...,9$, ise M matrisinin (4.19)' daki açılımı tek türlüdür.

b) $0, s_2,...,s_9$ nicelikleri M matrisinin özdeğerleri olup,

$$M = P\text{diag}(0I_{t_1}, s_2 I_{t_2},...,s_9 I_{t_9})P^{-1}$$

olacak şekilde bir P tersinir matrisi vardır.

c) Eğer $J_1 = 0$ ve $s_2 \cdots s_9 \neq 0$ ise

$$\det(M) = s_2^{t_2} \cdots s_9^{t_9} = (-1)^{t_3+t_6+t_7+t_9} a^{t_2+t_3} b^{t_4+t_7} (a+b)^{t_5+t_9} (a-b)^{t_6+t_8}$$

dır.

d) $rk(M) = \delta(s_1)t_1 + \cdots + \delta(s_9)t_9$ dır.

e) k>1 tamsayı olmak üzere

$$M^k = s_2^k J_2 + \cdots + s_9^k J_9$$

dır.

f) Eğer $J_1 = 0$ ve $s_2 \cdots s_9 \neq 0$ ise M tersinirdir ve

$$M^{-1} = \frac{1}{s_1} J_1 + \frac{1}{s_2} J_2 + \cdots + \frac{1}{s_9} J_9$$

dır.

g) Eğer $s_2 \cdots s_9 = 0$ ise M matrisinin grup tersi vardır ve

$$M^{\#} = s_1^{\#} J_1 + s_2^{\#} J_2 + \cdots + s_9^{\#} J_9$$

dır. Burada, $s_i \neq 0$ için $s_i^{\#} = \frac{1}{s_i}$ ve s_i=0 için $s_i^{\#} = 0$, $i = 1, 2, ..., 9$, dır [39].

BÖLÜM 5. SONLU SAYIDA DEĞİŞMELİ TRİPOTENT MATRİSTEN ELDE EDİLEN LİNEER BİLEŞİM İÇİN AYRIK İDEMPOTENT AYRIŞIM

Bu bölümde, iki değişmeli tripotent matris için önceki bölümde ele alınan problemin n $(n>2)$ tane değişmeli tripotent matrise genişletilmesi problemi incelenmektedir. 4. bölümde elde edilen sonuçlara benzer sonuçlar ortaya konulmaktadır. Ayrıca tripotent matrislerin lineer bileşimlerinin AİA' ını elde etmek için bir algoritma verilmekte ve bölüm iki sayısal örnek ile sonlandırılmaktadır.

5.1. Giriş

$A_1,...,A_n$ matrisleri $m\times m$ boyutlu tripotent ve karşılıklı olarak değişmeli, yani

$$A_i^3 = A_i,\ i=1,...,n;\ A_iA_j = A_jA_i\ ,\ i\neq j \tag{5.1}$$

eşitliklerini sağlayan matrisler olsun. Bu durumda matris çarpımı ile birlikte,

$$A_i^2,\ A_iA_j,\ A_iA_j^2,\ A_i^2A_j \text{ ve } A_i^2A_j^2;\ i\neq j,\ i,j=1,...,n, \tag{5.2}$$

biçiminde olası $2n^2-n$ farklı matris daha vardır. I birim matrisi ile (5.1) ve (5.2)' deki matrisleri de alarak, $a_0,\ a_1^i,\ a_2^i,\ b_{11}^{jk},\ b_{12}^{jk},\ b_{21}^{jk},\ b_{22}^{jk}\in\mathbb{F},\ i=1,...,n;$ $j=1,...,n-1;\ k=2,...,n,$ olmak üzere $2n^2+1$ terimli

$$M = a_0 I + \sum_{i=1}^{n} (a_1^i A_i + a_2^i A_i^2) + \sum_{\substack{j=1 \\ j\,<\,k}}^{n-1} \sum_{k=2}^{n} (b_{11}^{jk} A_j A_k + b_{12}^{jk} A_j A_k^2 + b_{21}^{jk} A_j^2 A_k + b_{22}^{jk} A_j^2 A_k^2) \qquad (5.3)$$

lineer bileşimi elde edilir.

5.2 Sonlu Sayıda Değişmeli Tripotent Matris ve Çarpımlarından Elde Edilen Lineer Bileşimin Ayrık İdempotent Ayrışımı

Bu kısımın başlıca amacı (5.3) lineer bileşimi için 3^n terimli bir AİA ortaya koymak ve sonraki kısımda da bu AİA’ ı elde etmek için bir algoritma vermektir.

İlk önce esas sonuçların ortaya konulmasında kullanılacak olan iki yardımcı sonuç verilmektedir. Bunların ispatları kolay olmaları nedeniyle verilmemektedir.

Lemma 5.1. $A_i,\, i = 1,...,n,$ matrisleri $A_i^2 = A_i$ ve $A_i A_j = A_j A_i,\, i, j = 1,...,n$, özelliklerini sağlayan matrisler ve $J = A_1 \cdots A_n$ ise $J^2 = J$ dir.

Lemma 5.2. A_i ve $B_i,\, i = 1,...,n,$ matrisleri $A_i A_j = A_j A_i,\, B_i B_j = B_j B_i,\, A_i B_i = B_i A_i,$ $i, j = 1,...,n,$ ve en az bir $p, q\ (p, q \le n)$ çifti için $A_p B_q = B_q A_p = \mathbf{0}$ özelliklerini sağlayan matrisler ve $J_1 = A_1 \cdots A_n, J_2 = B_1 \cdots B_n$ ise $J_1 J_2 = J_2 J_1 = \mathbf{0}$ dır.

Şimdi (5.3) lineer bileşiminin AİA’ ını elde etme problemi ele alınabilir. Hatırlanacağı üzere 4. bölümdeki esas sonuçların elde edilmesinde kullanılan Lemma 4.2, ayrık idempotent X ve Y matrislerinin lineer bileşimi için verilmiş ve buna göre tripotent matrislerin lineer bileşimi olan (4.2) lineer bileşimi $P_A,\, P_B,\, Q_A$ ve Q_B ayrık idempotent matrislerinin farkı ve toplamı olarak yazılıp düzenlenmişti. Benzer şekilde, (5.3) lineer bileşimindeki $A_i,\, i = 1,...,n$, tripotent matrisleri de düzenlenebilir.

Teorem 3.2.4’ ten

$$A_i = P_i - Q_i \tag{5.4}$$

olacak şekilde ayrık idempotent, yani $P_i^2 = P_i$, $Q_i^2 = Q_i$ ve $P_iQ_i = Q_iP_i = \mathbf{0}$, $i = 1,...,n$, matrisleri vardır. Ayrıca, buradaki P_i ve Q_i, $i = 1,...,n$, matrisleri

$$P_i = \frac{1}{2}(A_i^2 + A_i) \text{ ve } Q_i = \frac{1}{2}(A_i^2 - A_i) \tag{5.5}$$

ile verilir. Bunun yanı sıra, A_i matrisleri değişmeli olduğundan,

$$P_iP_j = P_jP_i,\ P_iQ_j = Q_jP_i,\ Q_iQ_j = Q_jQ_i,\ i \neq j;\ i, j = 1,...,n,$$

ve (5.5)’ ten

$$A_i^2 = P_i + Q_i \tag{5.6}$$

olduğu kolaylıkla görülür. (5.4) ve (5.6) ifadeleri, (5.3) lineer bileşiminde yerlerine yazılırsa, M lineer bileşim matrisi

$$M = a_0 I + \sum_{i=1}^{n} [a_1^i (P_i - Qi) + a_2^i (P_i + Qi)] + \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=2}^{n} [b_{11}^{jk} (P_j - Q_j)(P_k - Q_k)$$
$$+ b_{12}^{jk} (P_j - Q_j)(P_k + Q_k) + b_{21}^{jk} (P_j + Q_j)(P_k - Q_k) + b_{22}^{jk} (P_j + Q_j)(P_k + Q_k)] \qquad (5.7)$$

olarak elde edilir. M yeniden düzenlenirse,

$$M = a_0 I + \sum_{i=1}^{n} (p_1^i P_i + p_2^i Q_i) + \sum_{\substack{j=1 \\ j<}}^{n-1} \sum_{\substack{k=2 \\ k}}^{n} (m_{11}^{jk} P_j P_k + m_{12}^{jk} P_j Q_k + m_{21}^{jk} Q_j P_k + m_{22}^{jk} Q_j Q_k) \qquad (5.8)$$

olur. Burada $i = 1,...,n;\ j = 1,...,n-1;\ k = 2,...,n,$ ve $j < k$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}
p_1^i &= a_1^i + a_2^i,\ p_2^i = -a_1^i + a_2^i, \\
m_{11}^{jk} &= b_{11}^{jk} + b_{12}^{jk} + b_{21}^{jk} + b_{22}^{jk}, \\
m_{12}^{jk} &= -b_{11}^{jk} - b_{12}^{jk} + b_{21}^{jk} + b_{22}^{jk}, \\
m_{21}^{jk} &= -b_{11}^{jk} + b_{12}^{jk} - b_{21}^{jk} + b_{22}^{jk}, \\
m_{22}^{jk} &= b_{11}^{jk} - b_{12}^{jk} - b_{21}^{jk} + b_{22}^{jk}
\end{aligned} \qquad (5.9)$$

dır.

Çalışmanın esas sonucu tümevarım metodu ile ortaya konulmaktadır. n=2 durumu, 4. bölümde verilmişti. n=3 durumu için, (5.8) lineer bileşimi

$$\begin{aligned}
M &= a_0 I + \sum_{i=1}^{3} (p_1^i P_i + p_2^i Q_i) + \sum_{j=1}^{2} \sum_{k=2}^{3} (m_{11}^{jk} P_j P_k + m_{12}^{jk} P_j Q_k + m_{21}^{jk} Q_j P_k + m_{22}^{jk} Q_j Q_k) \\
&= a_0 I + p_1^1 P_1 + p_2^1 Q_1 + p_1^2 P_2 + p_2^2 Q_2 + m_{11}^{12} P_1 P_2 + m_{12}^{12} P_1 Q_2 + m_{21}^{12} Q_1 P_2 + m_{22}^{12} Q_1 Q_2 \\
&\quad (p_1^3 I + m_{11}^{13} P_1 + m_{21}^{12} Q_1 + m_{11}^{23} P_2 + m_{21}^{23} Q_2) P_3 + (p_2^3 I + m_{12}^{13} P_1 + m_{22}^{12} Q_1 + m_{12}^{23} P_2 + m_{22}^{23} Q_2) Q_3
\end{aligned}$$
$$(5.10)$$

şeklini alır. O halde, $H_3 = I - P_3 - Q_3 = I - A_3^2$ olmak üzere,

$$M = R_{3,1}H_3 + R_{3,2}P_3 + R_{3,3}Q_3$$

olur. Burada

$$\begin{aligned}
R_{3,1} &= a_0 I + p_1^1 P_1 + p_2^1 Q_1 + p_1^2 P_2 + p_2^2 Q_2 + m_{11}^{12} P_1 P_2 + m_{12}^{12} P_1 Q_2 + m_{21}^{12} Q_1 P_2 + m_{22}^{12} Q_1 Q_2, \\
R_{3,2} &= (a_0 + p_1^3) I + (p_1^1 + m_{11}^{13}) P_1 + (p_2^1 + m_{21}^{13}) Q_1 + (p_1^2 + m_{11}^{23}) P_2 + (p_2^2 + m_{21}^{23}) Q_2 \\
&\quad + m_{11}^{12} P_1 P_2 + m_{12}^{12} P_1 Q_2 + m_{21}^{12} Q_1 P_2 + m_{22}^{12} Q_1 Q_2, \\
R_{3,3} &= (a_0 + p_2^3) I + (p_1^1 + m_{12}^{13}) P_1 + (p_2^1 + m_{22}^{13}) Q_1 + (p_1^2 + m_{12}^{23}) P_2 + (p_2^2 + m_{22}^{23}) Q_2 \\
&\quad + m_{11}^{12} P_1 P_2 + m_{12}^{12} P_1 Q_2 + m_{21}^{12} Q_1 P_2 + m_{22}^{12} Q_1 Q_2
\end{aligned}$$

dır. $R_{3,1}, R_{3,2}$ ve $R_{3,3}$ ifadeleri yeniden düzenlenirse

$$\begin{aligned}
R_{3,1} &= a_0 I + p_1^1 P_1 + p_2^1 Q_1 + (p_1^2 I + m_{11}^{12} P_1 + m_{21}^{12} Q_1) P_2 + (p_2^2 I + m_{12}^{12} P_1 + m_{22}^{12} Q_1) Q_2, \\
R_{3,2} &= (a_0 + p_1^3) I + (p_1^1 + m_{11}^{13}) P_1 + (p_2^1 + m_{21}^{13}) Q_1 \\
&\quad + ((p_1^2 + m_{11}^{23}) I + m_{11}^{12} P_1 + m_{21}^{12} Q_1) P_2 + ((p_2^2 + m_{21}^{23}) I + m_{12}^{12} P_1 + m_{22}^{12} Q_1) Q_2, \\
R_{3,3} &= (a_0 + p_2^3) I + (p_1^1 + m_{12}^{13}) P_1 + (p_2^1 + m_{22}^{13}) Q_1 + ((p_1^2 + m_{12}^{23}) I \\
&\quad + m_{11}^{12} P_1 + m_{21}^{12} Q_1) P_2 + ((p_2^2 + m_{22}^{23}) I + m_{12}^{12} P_1 + m_{22}^{12} Q_1) Q_2
\end{aligned}$$

şeklini alır. Şimdi de, $H_2 = I - P_2 - Q_2 = I - A_2^2$ olmak üzere,

$$R_{3,1} = R_{2,1}H_2 + R^2_{2,2}P_2 + R^2_{2,3}Q_2,$$
$$R_{3,2} = R_{2,4}H_2 + R_{2,5}P_2 + R_{2,6}Q_2,$$
$$R_{3,3} = R_{2,7}H_2 + R_{2,8}P_2 + R_{2,9}Q_2,$$

olur. Burada da

$$R_{2,1} = a_0 I + p_1^1 P_1 + p_2^1 Q_1,$$
$$R_{2,2} = (a_0 + p_1^2)I + (p_1^1 + m_{11}^{12})P_1 + (p_2^1 + m_{21}^{12})Q_1,$$
$$R_{2,3} = (a_0 + p_2^2)I + (p_1^1 + m_{12}^{12})P_1 + (p_2^1 + m_{22}^{12})Q_1,$$
$$R_{2,4} = (a_0 + p_1^3)I + (p_1^1 + m_{11}^{13})P_1 + (p_2^1 + m_{21}^{13})Q_1,$$
$$R_{2,5} = (a_0 + p_1^3 + p_1^2 + m_{11}^{23})I + (p_1^1 + m_{11}^{13} + m_{11}^{12})P_1 + (p_2^1 + m_{21}^{13} + m_{21}^{12})Q_1,$$
$$R_{2,6} = (a_0 + p_1^3 + p_2^2 + m_{21}^{23})I + (p_1^1 + m_{11}^{13} + m_{12}^{12})P_1 + (p_2^1 + m_{21}^{13} + m_{22}^{12})Q_1,$$
$$R_{2,7} = (a_0 + p_2^3)I + (p_1^1 + m_{12}^{13})P_1 + (p_2^1 + m_{22}^{13})Q_1,$$
$$R_{2,8} = (a_0 + p_2^3 + p_1^2 + m_{12}^{23})I + (p_1^1 + m_{12}^{13} + m_{11}^{12})P_1 + (p_2^1 + m_{22}^{13} + m_{21}^{12})Q_1,$$
$$R_{2,9} = (a_0 + p_2^3 + p_2^2 + m_{12}^{23})I + (p_1^1 + m_{12}^{13} + m_{21}^{12})P_1 + (p_2^1 + m_{22}^{13} + m_{22}^{12})Q_1$$

dır. Son olarak, $H_1 = I - P_1 - Q_1 = I - A_1^2$ olmak üzere,

$$R_{2,1} = r_1 H_1 + r_2 P_1 + r_3 Q_1,\ \mathrm{R}^2_{2,4} = r_{10}H_1 + r_{11}P_1 + r_{12}Q_1,\ \mathrm{R}_{2,7} = r_{19}H_1 + r_{20}P_1 + r_{21}Q_1,$$
$$R_{2,2} = r_4 H_1 + r_5 P_1 + r_6 Q_1,\ \mathrm{R}_{2,5} = r_{13}H_1 + r_{14}P_1 + r_{15}Q_1,\ \mathrm{R}_{2,8} = r_{22}H_1 + r_{23}P_1 + r_{24}Q_1,$$
$$R_{2,3} = r_7 H_1 + r_8 P_1 + r_9 Q_1,\ \mathrm{R}_{2,6} = r_{16}H_1 + r_{17}P_1 + r_{18}Q_1,\ \mathrm{R}_{2,9} = r_{25}H_1 + r_{26}P_1 + r_{27}Q_1$$

olarak elde edilir. Buradaki r_i , $i = 1,...,27,$ katsayıları da

$$
\begin{aligned}
& r_1 = a_0,\ r_2 = a_0 + p_1^1,\ r_3 = a_0 + p_2^1, \\
& r_4 = a_0 + p_1^2,\ r_5 = a_0 + p_1^2 + p_1^1 + m_{11}^{12},\ r_6 = a_0 + p_1^2 + p_2^1 + m_{21}^{12}, \\
& r_7 = a_0 + p_2^2,\ r_8 = a_0 + p_2^2 + p_1^1 + m_{12}^{12},\ r_9 = a_0 + p_2^2 + p_2^1 + m_{22}^{12}, \\
& r_{10} = a_0 + p_1^3,\ r_{11} = a_0 + p_1^3 + p_1^1 + m_{11}^{13},\ r_{12} = a_0 + p_1^3 + p_2^1 + m_{21}^{13}, \\
& r_{13} = a_0 + p_1^3 + p_1^2 + m_{11}^{23},\ r_{14} = a_0 + p_1^3 + p_1^2 + m_{11}^{23} + p_1^1 + m_{11}^{13} + m_{11}^{12}, \\
& r_{15} = a_0 + p_1^3 + p_1^2 + m_{11}^{23} + p_2^1 + m_{21}^{13} + m_{21}^{12} \\
& r_{16} = a_0 + p_1^3 + p_2^2 + m_{21}^{23},\ r_{17} = a_0 + p_1^3 + p_2^2 + m_{21}^{23} + p_1^1 + m_{11}^{13} + m_{12}^{12}, \\
& r_{18} = a_0 + p_1^3 + p_2^2 + m_{21}^{23} + p_2^1 + m_{21}^{13} + m_{22}^{12}, \\
& r_{19} = a_0 + p_2^3,\ r_{20} = a_0 + p_2^3 + p_1^1 + m_{12}^{13},\ r_{21} = a_0 + p_2^3 + p_2^1 + m_{22}^{13}, \\
& r_{22} = a_0 + p_2^3 + p_1^2 + m_{12}^{23},\ r_{23} = a_0 + p_2^3 + p_1^2 + m_{12}^{23} + p_1^1 + m_{12}^{13} + m_{11}^{12}, \\
& r_{24} = a_0 + p_2^3 + p_1^2 + m_{12}^{23} + p_2^1 + m_{22}^{13} + m_{21}^{12}, \\
& r_{25} = a_0 + p_2^3 + p_2^2 + m_{22}^{23},\ r_{26} = a_0 + p_2^3 + p_2^2 + m_{22}^{23} + p_1^1 + m_{12}^{13} + m_{12}^{12}, \\
& r_{27} = a_0 + p_2^3 + p_2^2 + m_{22}^{23} + p_2^1 + m_{22}^{13} + m_{22}^{12}
\end{aligned}
\tag{5.11}
$$

şeklindedir. Gerekli düzenlemeler yapıldığında, r_i katsayıları (5.11)' deki gibi ve J_i matrisleri Tablo 5.1' deki gibi olmak üzere, (5.10) lineer bileşimi

$$
M = \sum_{i=1}^{27} r_i J_i \tag{5.12}
$$

biçiminde elde edilir.

Tablo 5.1 (5.10) ifadesindeki J_i matrisleri

i	J_i	J_{i+9}	J_{i+18}
1	$H_1H_2H_3$	$H_1H_2P_3$	$H_1H_2Q_3$
2	$P_1H_2H_3$	$P_1H_2P_3$	$P_1H_2Q_3$
3	$Q_1H_2H_3$	$Q_1H_2P_3$	$Q_1H_2Q_3$
4	$H_1P_2H_3$	$H_1P_2P_3$	$H_1P_2Q_3$
5	$P_1P_2H_3$	$P_1P_2P_3$	$P_1P_2Q_3$
6	$Q_1P_2H_3$	$Q_1P_2P_3$	$Q_1P_2Q_3$
7	$H_1Q_2H_3$	$H_1Q_2P_3$	$H_1Q_2Q_3$
8	$P_1Q_2H_3$	$P_1Q_2P_3$	$P_1Q_2Q_3$
9	$Q_1Q_2H_3$	$Q_1Q_2P_3$	$Q_1Q_2Q_3$

J_i matrisleri Lermma 5.1' den dolayı idempotent ve Lemma 5.2' den dolayı da ayrıktır.

J_i matrisleri H_i, P_i ve Q_i matrislerine göre açılıp toplandığında toplamın I olduğu görülür. Ayrıca Tablo 5.1' e dikkat edilirse 1., 2. ve 3. sütunlardaki J_i matrislerinin karşılıklı olarak ilk iki çarpan matrislerinin aynı olduğu ve bu çarpanların 4. bölümde verilen $J_1,...,J_9$ matrisleri olduğu görülür. Ayrıca bu $J_1,...,J_9$ matrislerinin toplamının I olduğu da 4. bölümde verilmişti. Bu matrislere, kısalık olsun diye, sırasıyla $J_1^*,...,J_9^*$ denilirse,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{27} J_i &= J_1 + \cdots + J_9 + J_{10} + \cdots + J_{18} + J_{19} + \cdots + J_{27} \\ &= (J_1^* + ... + J_9^*)H_3 + (J_1^* + ... + J_9^*)P_3 + (J_1^* + ... + J_9^*)Q_3 \\ &= H_3 + P_3 + Q_3 = I\end{aligned}$$

olur. Yani, J_i matrislerinin toplamlarının I olduğu bu şekilde de gösterilmiş olur.

Şimdi, iddia n tane değişmeli tripotent matris için doğru olsun. n+1 tanesinden elde edilen lineer bileşimi ele alınsın. Gösterilmesi gereken iddianın $n+1$ için de doğru olduğudur. Bu durumda (5.3) lineer bileşim matrisi M,

$$M = a_0 I + \sum_{i=1}^{n+1} (a_1^i A_i + a_2^i A_i^2) + \sum_{\substack{j=1 \\ j<k}}^{n} \sum_{k=2}^{n+1} (b_{11}^{jk} A_j A_k + b_{12}^{jk} A_j A_k^2 + b_{21}^{jk} A_j^2 A_k + b_{22}^{jk} A_j^2 A_k^2) \quad (5.13)$$

şeklinde olur. (5.13) lineer bileşimi (5.7)' deki gibi düzenlenirse,

$$M = a_0 I + \sum_{i=1}^{n+1} (p_1^i P_i + p_2^i Q_i) + \sum_{\substack{j=1 \\ j<k}}^{n} \sum_{k=2}^{n+1} (m_{11}^{jk} P_j P_k + m_{12}^{jk} P_j Q_k + m_{21}^{jk} Q_j P_k + m_{22}^{jk} Q_j Q_k) \quad (5.14)$$

olarak elde edilir. Buradan da

$$\begin{aligned} M = a_0 I &+ \sum_{i=1}^{n} (p_1^i P_i + p_2^i Q_i) + \sum_{\substack{j=1 \\ j<k}}^{n-1} \sum_{k=2}^{n} (m_{11}^{jk} P_j P_k + m_{12}^{jk} P_j Q_k + m_{21}^{jk} Q_j P_k + m_{22}^{jk} Q_j Q_k) \\ &+ (p_1^{n+1} I + \sum_{i=1}^{n} m_{11}^{i(n+1)} P_i + m_{21}^{i(n+1)} Q_i) P_{n+1} + (p_2^{n+1} I + \sum_{i=1}^{n} m_{12}^{i(n+1)} P_i + m_{22}^{i(n+1)} Q_i) Q_{n+1} \end{aligned} \quad (5.15)$$

yazılabilir. Böylece,

$$H_{n+1} = I - P_{n+1} - Q_{n+1} \quad (5.16)$$

olmak üzere, (5.15) lineer bileşimi

$$M = R_{n+1,1}H_{n+1} + R_{n+1,2}P_{n+1} + R_{n+1,3}Q_{n+1} \tag{5.17}$$

şeklini alır. Burada

$$R_{n+1,1} = a_0 I + \sum_{i=1}^{n}(p_1^i P_i + p_2^i Q_i) + \sum_{\substack{j=1 \\ j<k}}^{n-1}\sum_{k=2}^{n}(m_{11}^{jk}P_jP_k + m_{12}^{jk}P_jQ_k + m_{21}^{jk}Q_jP_k + m_{22}^{jk}Q_jQ_k),$$

$$\begin{aligned} R_{n+1,2} &= (a_0 + p_1^{n+1})I + \sum_{i=1}^{n}[(p_1^i + m_{11}^{i(n+1)})P_i + (p_2^i + m_{21}^{i(n+1)})Q_i] \\ &+ \sum_{\substack{j=1 \\ j<k}}^{n-1}\sum_{k=2}^{n}(m_{11}^{jk}P_jP_k + m_{12}^{jk}P_jQ_k + m_{21}^{jk}Q_jP_k + m_{22}^{jk}Q_jQ_k), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_{n+1,3} &= (a_0 + p_2^{n+1})I + \sum_{i=1}^{n}[(p_1^i + m_{12}^{i(n+1)})P_i + (p_2^i + m_{22}^{i(n+1)})Q_i] \\ &+ \sum_{\substack{j=1 \\ j<k}}^{n-1}\sum_{k=2}^{n}(m_{11}^{jk}P_jP_k + m_{12}^{jk}P_jQ_k + m_{21}^{jk}Q_jP_k + m_{22}^{jk}Q_jQ_k) \end{aligned} \tag{5.18}$$

dır.

Dikkat edilirse $R_{n+1,1}$, n tane tripotent matristen elde edilen (5.8) lineer bileşiminden başka bir şey değildir. $R_{n+1,2}$ ve $R_{n+1,3}$ lineer bileşimleri de bazı katsayılar hariç $R_{n+1,1}$ lineer bileşimi ile aynıdır. Şöyle ki, I, P_i ve Q_i matrislerinin katsayıları $R_{n+1,1}$ lineer bileşiminde sırasıyla a_0, p_1^i ve p_2^i iken $R_{n+1,2}$ lineer bileşiminde bu matrislerin katsayıları $a_0 + p_1^{n+1}$, $p_1^i + m_{11}^{i(n+1)}$ ve $p_2^i + m_{21}^{i(n+1)}$, $R_{n+1,3}$ lineer bileşiminde ise $a_0 + p_2^{n+1}$, $p_1^i + m_{12}^{i(n+1)}$ ve $p_2^i + m_{22}^{i(n+1)}$ şeklindedir. Dolayısıyla hipotez gereği

$R_{n+1,1}, R_{n+1,2}$ ve $R_{n+1,3}$ için birer 3^n terimli AİA vardır. Bu AİA' lar, genelliği bozmaksızın,

$$R_{n+1,1} = \sum_{l=1}^{3^n} q_l \widetilde{J}_l,\ R_{n+1,2} = \sum_{l=1}^{3^n} q_{3^n+l} \widetilde{J}_l,\ R_{n+1,3} = \sum_{l=1}^{3^n} q_{2\cdot 3^n+l} \widetilde{J}_l \tag{5.19}$$

biçiminde ifade edilebilir. Buna göre (5.14) lineer bileşimi

$$\begin{aligned} M &= R_{n+1,1}H_{n+1} + R_{n+1,2}P_{n+1} + R_{n+1,3}Q_{n+1} \\ &= \sum_{l=1}^{3^n} q_l \widetilde{J}_l H_{n+1} + \sum_{l=1}^{3^n} q_{3^n+l} \widetilde{J}_l P_{n+1} + \sum_{l=1}^{3^n} q_{2\cdot 3^n+l} \widetilde{J}_l Q_{n+1} \\ &= \sum_{i=1}^{3^{n+1}} r_i J_i \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. Burada $l = 1,...,3^n$ olmak üzere

$$J_i = \begin{cases} \widetilde{J}_l H_{n+1},\ i = 1,...,3^n \\ \widetilde{J}_l P_{n+1},\ i = 3^n+1,...,2\cdot 3^n \\ \widetilde{J}_l Q_{n+1},\ i = 2\cdot 3^n+1,...,3^{n+1} \end{cases} \tag{5.20}$$

ve

$$r_i = \begin{cases} q_l,\ i = 1,...,3^n \\ q_{3^n+l},\ i = 3^n+1,...,2\cdot 3^n \\ q_{2\cdot 3^n+l},\ i = 2\cdot 3^n+1,...,3^{n+1} \end{cases} \tag{5.21}$$

dır. (5.20)' deki J_i matrisleri, Lemma 5.1 den dolayı idempotent ve Lemma 5.2 den dolayı da ayrıktır. Ayrıca, hipotezden $\sum_{l=1}^{3^n} \widetilde{J}_l = I$ olduğu bilinmektedir. Dolayısıyla (5.20)' deki J_i matrislerinin toplamı ele alınırsa,

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{3^{n+1}} J_i &= \sum_{l=1}^{3^n} \widetilde{J}_l H_{n+1} + \sum_{l=1}^{3^n} \widetilde{J}_l P_{n+1} + \sum_{l=1}^{3^n} \widetilde{J}_l Q_{n+1} \\
&= \sum_{l=1}^{3^n} \widetilde{J}_l (H_{n+1} + P_{n+1} + Q_{n+1}) \\
&= H_{n+1} + P_{n+1} + Q_{n+1} \\
&= I
\end{aligned}
$$

olduğu kolaylıkla görülür.

Buraya kadar tartışılanların tamamı aşağıdaki teoremin ispatından başka bir şey değildir.

Teorem 5.3. $A_1, ..., A_n$ matrisleri $m \times m$ boyutlu değişmeli tripotent matrisler ve M matrisi $2n^2 + 1$ terimli (5.3)' deki lineer bileşim olsun. Bu durumda, M matrisi için 3^n terimli bir AİA vardır ve bu ayrışım

$$M = \sum_{i=1}^{3^n} r_i J_i \tag{5.22}$$

şeklindedir. Buradaki r_i katsayıları ve J_i matrisleri sırasıyla (5.21) ve (5.20)' de verildiği gibidir. Ayrıca, bu J_i matrisleri, $J_i^2 = J_i,\ J_iJ_j = J_jJ_i = \mathbf{0},$ $i \neq j,\ i,j = 1,...,3^n,$ ve $\sum_{i=1}^{3^n} J_i = I$, özelliklerini gerçekler. □

Böylece 4. bölümde, iki tripotent matrisin lineer bileşimi için ortaya konan esas sonucun benzeri, herhangi sonlu sayıdaki değişmeli tripotent matrisin lineer bileşimi için genişletilmiş oldu. Yani [39]' daki problemin bir genelleştirilmesi verilmiş oldu. Şimdi de 4. bölümde verilen diğer sonuçların genelleştirilmiş halleri ortaya koyulacaktır.

Sonuç 5.4. M matrisi (5.22)' de verildiği gibi ve $t_i = \text{rank}(J_i),\ i = 1,2,...,3^n,$ olsun. Bu durumda aşağıdakiler doğrudur.

a) $t_1 + t_2 + \cdots + t_{3^n} = m$.

b) Eğer $J_i \neq \mathbf{0},\ i = 1,2,...,3^n,$ ise M matrisinin (5.22)' deki açılımı tek türlüdür.

c) $r_1, r_2, ..., r_{3^n},$ M matrisinin özdeğerleri olup

$$M = P\text{diag}(r_1 I_{t_1}, r_2 I_{t_2}, ..., r_{3^n} I_{t_{3^n}})P^{-1}$$

olacak şekilde bir P tersinir matrisi vardır.

d) Eğer $r_1 r_2 \cdots r_{3^n} \neq 0$ ise

$$\det(M) = r_1^{t_1} r_2^{t_2} \cdots r_{3^n}^{t_{3^n}}$$

dır .

e) $rk(M) = \delta(r_1)t_1 + \cdots + \delta(r_{3^n})t_{3^n},\ iz(M) = r_1 t_1 + \cdots + r_{3^n} t_{3^n}$

dır.

f) k>1 tamsayı olmak üzere

$$M^k = r_1^k J_1 + r_2^k J_2 + \cdots + r_{3^n}^k J_{3^n}$$

dır.

g) Eğer $r_1 r_2 \cdots r_{3^n} \neq 0$ ise M tersinirdir ve

$$M^{-1} = \frac{1}{r_1} J_1 + \frac{1}{r_2} J_2 + \cdots + \frac{1}{r_{3^n}} J_{3^n}$$

dır.

h) Eğer $r_1 r_2 \cdots r_{3^n} = 0$ ise M matrisinin grup tersi vardır ve

$$M^{\#} = r_1^{\#} J_1 + r_2^{\#} J_2 + \cdots + r_{3^n}^{\#} J_{3^n}$$

dır. Burada $r_i \neq 0$ için $r_i^{\#} = \dfrac{1}{r_i}$ ve r_i=0 için $r_i^{\#} = 0,\ i = 1, 2, ..., 3^n,$ dır.

İspat.

a) Teorem 3.1.3' ten bir idempotent matrisin rankının izine eşit olduğu bilinmektedir. O halde

$$\begin{aligned} m = rk(I_m) = iz(I_m) = iz(J_1 + \cdots + J_{3^n}) &= iz(J_1) + \cdots + iz(J_{3^n}) \\ &= rk(J_1) + \cdots + rk(J_{3^n}) \\ &= t_1 + \cdots + t_{3^n} \end{aligned}$$

dır.

b) (5.22)' deki M lineer bileşimi $M = \sum_{i=1}^{3^n} r_i J_i$ ve $M = \sum_{i=1}^{3^n} s_i J_i$ olacak biçimde iki türlü yazılsın. Buradan,

$$\sum_{i=1}^{3^n} r_i J_i = \sum_{i=1}^{3^n} s_i J_i \tag{5.23}$$

eşitliği elde edilir. (5.23) eşitliği, i keyfi olmak üzere, J_i matrisi ile çarpılırsa J_i matrisleri ayrık olduğundan $r_i J_i^2 = s_i J_i^2$ ve idempotent olduğundan $r_i J_i = s_i J_i$ elde edilir. Buradan da $(r_i - s_i)J_i = \mathbf{0}$ olup $J_i \neq \mathbf{0}$, $i = 1,...,3^n$, kabulünden dolayı $r_i = s_i$ elde edilir. i indisi keyfi olduğundan, bu eşitlik tüm katsayılar için geçerlidir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

c) (5.22)' deki M matrisi için $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ olmak üzere,

$$(M - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0} \tag{5.24}$$

eşitliğini sağlayan λ değeri M matrisinin özdeğeridir. (5.24) eşitliği keyfi bir i indisi için J_i matrisi ile çarpılırsa, $(r_i J_i - \lambda J_i)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ olur. $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ olduğundan $r_i J_i - \lambda J_i = \mathbf{0}$ bulunur. Buradan da $r_i = \lambda$ elde edilir. Yani r_i skaleri M matrisinin özdeğeridir Böylece i indisi keyfi olduğundan tüm r_i skalerlerinin M matrisinin özdeğerleri olduğu gösterilmiş olur.

J_i, $i = 1,...,3^n$, matrisleri ayrık olduklarından aynı zamanda değişmelidirler. Dolayısıyla Teorem 2.2.17 gereği J_i matrisleri eş zamanlı köşegenleştirilebilir olduğu görülür. Yani, $P^{-1}J_i P = \Lambda_i$ olacak şekilde tersinir bir P matrisi ve Λ_i köşegen matrisleri vardır. J_i matrisleri idempotent olduğundan Λ_i matrisinin köşegeni üzerinde $rk(J_i) = t_i$ tane 1 vardır, diğer köşegen elemanları 0' dır. Ayrıca, J_i matrisleri ayrık olduğundan Λ_i köşegen matrisleri de ayrıktır. Dolayısıyla Λ_i matrislerinin köşegeni üzerindeki 1' ler aynı konumda bulunamazlar. Böylece

$$M = \sum_{i=1}^{3^n} r_i J_i = \sum_{i=1}^{3^n} r_i (P\Lambda_i P^{-1}) = P\left(\sum_{i=1}^{3^n} r_i \Lambda_i\right)P^{-1} = P diag(r_1 I_{t_1},...,r_{3^n} I_{t_{3^n}})P^{-1},$$

elde edilir.

d) c) şıkkından

$$M = Pdiag(r_1 I_{t_1},...,r_{3^n} I_{t_{3^n}})P^{-1} \tag{5.25}$$

olduğu bilinmektedir. (5.25)' in determinantı alınırsa,

$$\det(M) = \det\left(Pdiag(r_1 I_{t_1},...,r_{3^n} I_{t_{3^n}})P^{-1}\right) \tag{5.26}$$

olur. Teorem 2.1.14' ten, (5.26) eşitliği

$$\det(M) = \det(P)\det\left(diag(r_1 I_{t_1},...,r_{3^n} I_{t_{3^n}})\right)\det(P^{-1}) \tag{5.27}$$

şeklinde yazılabilir. Sonuç 2.1.15' ten (5.27) eşitliği ise

$$\det(M) = \det\left(diag(r_1 I_{t_1},...,r_{3^n} I_{t_{3^n}})\right)$$

şeklinde elde edilir. Buradan da

$$\begin{aligned}
\det(M) &= \det\Big(diag(r_1 I_{t_1},...,r_{3^n} I_{t_{3^n}})\Big) \\
&= r_1 \det\Big(diag(r_1 I_{t_1-1},...,r_{3^n} I_{t_{3^n}})\Big) \\
&= r_1^2 \det\Big(diag(r_1 I_{t_1-2},...,r_{3^n} I_{t_{3^n}})\Big) \\
&\vdots \\
&= r_1^{t_1} r_2^{t_2} \cdots r_{3^n}^{t_{3^n}}
\end{aligned}$$

olarak bulunur.

e) c) şıkkından $M = Pdiag(r_1 I_{t_1},...,r_{3^n} I_{t_{3^n}})P^{-1}$ olduğu bilinmektedir. Buradan

$$\begin{aligned}
rk\big(M\big) &= rk\Big(Pdiag(r_1 I_{t_1},...,r_{3^n} I_{t_{3^n}})P^{-1}\Big) \\
&= rk\Big(diag(r_1 I_{t_1},...,r_{3^n} I_{t_{3^n}})\Big) \\
&= \delta(r_1)t_1 + \cdots + \delta(r_{3^n})t_{3^n}
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
iz(M) &= iz\left(r_1 J_1 + \cdots + r_{3^n} J_{3^n}\right) \\
&= iz\left(r_1 J_1\right) + \cdots + iz\left(r_{3^n} J_{3^n}\right) \\
&= r_1 iz\left(J_1\right) + \cdots + r_{3^n} iz\left(J_{3^n}\right) \\
&= r_1 rk\left(J_1\right) + \cdots + r_{3^n} rk\left(J_{3^n}\right) \\
&= r_1 t_1 + \cdots + r_{3^n} t_{3^n}
\end{aligned}$$

olduğu görülmektedir.

f) $J_i,\ i = 1,...,3^n,$ matrisleri ayrık ve idempotent olduğundan her *k*>1 tam sayısı için

$$\begin{aligned} M^k &= \left(r_1 J_1 + \cdots + r_{3^n} J_{3^n}\right)^k \\ &= r_1^k J_1^k + \cdots + r_{3^n}^k J_{3^n}^k \\ &= r_1^k J_1 + \cdots + r_{3^n}^k J_{3^n} \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir.

g) $X = \frac{1}{r_1} J_1 + \cdots + \frac{1}{r_{3^n}} J_{3^n}$ olsun. $J_i,\ i = 1,...,3^n,$ matrisleri ayrık idempotent ve toplamları I olduğu için

$$MX = \left(r_1 J_1 + \cdots + r_{3^n} J_{3^n}\right)\left(\frac{1}{r_1} J_1 + \cdots + \frac{1}{r_{3^n}} J_{3^n}\right) = J_1 + \cdots + J_{3^n} = I$$

$$XM = \left(\frac{1}{r_1} J_1 + \cdots + \frac{1}{r_{3^n}} J_{3^n}\right)\left(r_1 J_1 + \cdots + r_{3^n} J_{3^n}\right) = J_1 + \cdots + J_{3^n} = I$$

şeklinde elde edilir. Dolayısıyla $X = M^{-1}$ dir. □

Sonuç 5.5. M matrisi (5.22) deki gibi olsun. $J_i \neq 0,\ i = 1,2,...,3^n,$ olmak üzere aşağıdakiler doğrudur.

a) M involutiftir ancak ve ancak $r_i \in \{-1,1\},\ i = 1,2,...,3^n,$ dir. Ayrıca, bu durumda (5.22) lineer bileşiminden 2^{3^n} tane involutif matris elde edilebilir.

b) M idempotenttir ancak ve ancak $r_i \in \{0,1\},\ i = 1,2,...,3^n,$ dir. Ayrıca, bu durumda (5.22) lineer bileşiminden 2^{3^n} tane idempotent matris elde edilebilir.

c) M tripotenttir ancak ve ancak $r_i \in \{-1,0,1\},\ i = 1,2,...,3^n,$ dir. Ayrıca, bu durumda (5.22) lineer bileşiminden 3^{3^n} tane tripotent matris elde edilebilir.

İspat. Teorem 5.3' ten ve Sonuç 5.4' ten kolaylıkla görülür ki, *M* involutiftir ancak ve ancak

$$M^2 = r_1^2 J_1 + \cdots + r_{3^n}^2 J_{3^n} = J_1 + \cdots + J_{3^n} = I$$

dır. $J_i \neq 0,\ i = 1,2,...,3^n,$ koşulu altında $r_1^2 = \cdots = r_{3^n}^2 = 1$ olur. Buradan da $r_i \in \{-1,1\},\ i = 1,2,...,3^n,$ olduğu görülür. Böylece, bu nicelikler ile 2^{3^n} tane involutif matris üretilebilir. Ayrıca, *M* idempotenttir ancak ve ancak

$$M^2 = r_1^2 J_1 + \cdots + r_{3^n}^2 J_{3^n} = r_1 J_1 + \cdots + r_{3^n} J_{3^n} = M$$

dır. $J_i \neq 0,\ i = 1,2,...,9,$ koşulu altında $r_1^2 = r_1, \cdots, r_{3^n}^2 = r_{3^n}$ olur. Buradan da $r_i \in \{0,1\},\ i = 1,2,...,3^n,$ olduğu görülür. Böylece bu nicelikler ile 2^{3^n} tane idempotent matris üretilebilir. Son olarak *M* tripotenttir ancak ve ancak

$$M^3 = r_1^3 J_1 + \cdots + r_{3^n}^3 J_{3^n} = r_1 J_1 + \cdots + r_{3^n} J_{3^n} = M$$

dır. $J_i \neq 0,\ i = 1,2,...,3^n,$ koşulu altında $r_1^3 = r_1, \cdots, r_{3^n}^3 = r_{3^n}$ olur. Buradan da $r_i \in \{-1,0,1\},\ i = 1,2,...,3^n,$ olduğu görülür. Böylece bu nicelikler ile 3^{3^n} tane tripotent matris üretilebilir. □

Şimdi de (5.3)' ün bir özel hali olan

$$M = \sum_{i=1}^{n} a_1^i A_i \tag{5.28}$$

lineer bileşimi ele alınsın. (5.28) lineer bileşiminin AİA' ı

$$M = \sum_{i=2}^{3^n} s_i J_i \tag{5.29}$$

şeklinde olup (5.29) ifadesindeki J_i matrisleri (5.22) ifadesindekiler ile aynı matrislerdir. Fakat (5.29) ifadesindeki toplamın J_2 ile başladığına dikkat edilmelidir. s_i katsayıları ise r_i skalerlerinden biraz farklıdır Şöyle ki s_i katsayılarında a_0 ve m_{li}^{jk}, $i,l \in \{1,2\}$, $j = 1,...,n-1$, $k = 2,...,n; j < k$, skalerleri sıfırdır.

Sonuç 5.6. M matrisi (5.29)' da verildiği gibi ve $t_i = \text{rank}(J_i)$, $i = 1,2,...,3^n$, olsun. Bu durumda aşağıdakiler doğrudur.

a) Eğer $J_i \neq 0$, $i = 2,...,3^n$, ise M matrisinin (5.29)' daki açılımı tektir.

b) $0, s_2,..., s_{3^n}$ M matrisinin özdeğerleridir ve

$$M = P\text{diag}(0I_{t_1}, s_2 I_{t_2},..., s_{3^n} I_{t_{3^n}})P^{-1}$$

olacak şekilde bir P tersinir matrisi vardır.

c) Eğer $J_1 = 0$ ve $s_1 \cdots s_{3^n} \neq 0$ ise

$$\det(M) = s_2^{t_2} \cdots s_{3^n}^{t_{3^n}}$$

dır.

d) $rk(M) = \delta(s_2)t_2 + \cdots + \delta(s_{3^n})t_{3^n}$ dır.

e) k bir pozitif tamsayı olmak üzere,

$$M^k = s_2^k J_2 + s_3^k J_3 + \cdots + s_{3^n}^k J_{3^n}$$

dır.

f) Eğer $J_1 = 0$ ve $s_2 \cdots s_{3^n} \neq 0$ ise M matrisi tersinir olup

$$M^{-1} = \frac{1}{s_2} J_2 + \frac{1}{s_3} J_3 + \cdots + \frac{1}{s_{3^n}} J_{3^n}$$

dır.

g) Eğer $s_2 \cdots s_{3^n} = 0$ ise, M matrisinin grup tersi vardır ve

$$M^{\#} = s_2^{\#} J_2 + s_3^{\#} J_3 + \cdots + s_{3^n}^{\#} J_{3^n}$$

dır. Burada $s_i \neq 0$ için $s_i^{\#} = \dfrac{1}{s_i}$ ve s_i=0 için $s_i^{\#} = 0$, $i = 2,3,...,3^n$ dır.

İspat. Sonuç 5.4' ün ispatına benzer şekilde yapılır. □

P_i, Q_i ve H_i matrislerinin tanımı ve J_i' lerin inşası dikkate alındığında aşağıdaki sonuç kolaylıkla elde edilir.

Sonuç 5.7. M, (5.3)' de verildiği gibi ve n_1, $n_2 \leq n$ olacak şekilde pozitif tamsayılar olsun. Eğer (5.3) lineer bileşimindeki A_i, $i = 1,...,n$, matrislerinden

a) n_1 tanesi involutif ise, (5.3) lineer bileşimi $2n^2 + 1 - n_1(1 + 2(n-1) - \frac{n_1 - 1}{2})$ ve (5.22) AİA' ı $2^{n_1} 3^{n-n_1}$,

b) n_2 tanesi idempotent ise, (5.3) lineer bileşimi $2n^2 + 1 - n_2(1 + 2(n-1) - \frac{n_2 - 1}{2})$ ve (5.22) AİA' ı $2^{n_2} 3^{n-n_2}$,

c) n_1 tanesi involutif ve n_2 tanesi idempotent ise, (5.3) lineer bileşimi $2n^2 + 1 - n_1(1 + 2(n-1) - \frac{n_1 - 1}{2}) - n_2(1 + 2(n-1) - \frac{n_2 - 1}{2})$ ve (5.22) AİA' ı $2^{n_1+n_2} 3^{n-n_1-n_2}$ terimlidir.

Teorem 5.8. Teorem 5.3' de verilen M matrisinin AİA' ından elde edilen J_i, $i = 1,...,3^n$, matrislerinin sıfırdan farklı olanlarının sayısı M matrisinin mertebesini geçemez.

İspat. $J_i, i=1,...,3^n$, matrisleri $J_i^2 = J_i$, $J_iJ_k = J_kJ_i = \mathbf{0}$, $i \neq j$, $i,j=1,...,3^n$, ve $\sum_{i=1}^{3^n} J_i = I$ özelliklerini sağlamaktadır. Ayrıca $J_i, i=1,...,3^n$, matrisleri değişmeli olduklarından, eş zamanlı köşegenleştirilebilirler. O halde $J_i = P\Lambda_i P^{-1}$, $i=1,...,3^n$, olacak şekilde bir P tersinir matrisi ve Λ_i köşegen matrisleri vardır. Buradan

$$\sum_{i=1}^{3^n} J_i = \sum_{i=1}^{3^n} P\Lambda_i P^{-1} = P\left(\sum_{i=1}^{3^n} \Lambda_i\right)P^{-1} = I_n$$

olur. Buradan da $\sum_{i=1}^{3^n} \Lambda_i = I_n$ elde edilir. $J_i, i=1,...,3^n$, matrisleri idempotent olduğundan $\Lambda_i, i=1,...,3^n$, köşegen matrislerinin köşegeni üzerinde 1 ve 0' lar bulunur. Ayrıca $J_i, i=1,...,3^n$, matrisleri ayrık olduklarından, $\Lambda_i, i=1,...,3^n$, köşegen matrislerinin köşegenleri üzerindeki 1' ler aynı konumda bulunamazlar. Bu özellikte yazılabilecek matris sayısı en fazla M matrisinin mertebesi kadardır. □

5.3 Ayrık İdempotent Ayrışımı Elde Etmek İçin Bir Algoritma

Bu bölümün iki amacı vardır. Birincisi J_i matrislerini ve bu matrislere karşılık gelen r_i katsayılarını belirlemek ve ikincisi ise AİA' ı elde etmek için bir algoritma vermektir.

5.3.1 J_i Matrislerinin ve r_i Skalerlerinin Belirlenmesi

Bu kısıma $J_i,\ i=1,...,3^n$, matrislerinin çarpanlarının, yani $P_i,\ Q_i$ ve H_i matrislerinin, sırasını ve dolayısıyla J_i matrislerini belirleyen iki yöntem vererek başlayalım.

I. Yöntem: Bu yöntemde J_i matrislerinin indisleri kullanılmaktadır. Şöyle ki; ilk önce aşağıdaki algoritma ile i indisi için bir $(k_1,k_2,...,k_n)$ sıralı n' li tanımlanmaktadır:

$$\begin{aligned} i &= k_n 3^{n-1} + q_1 \\ q_1 &= k_{n-1} 3^{n-2} + q_2 \\ &\vdots \\ q_{n-2} &= k_2 3 + k_1. \end{aligned} \tag{5.30}$$

Sonra, $(k_1,k_2,...,k_n)$ sıralı n' lisi kullanılarak $K_j,\ j=1,...,n,$ matrisleri

$$K_1 = \begin{cases} H_1,\ k_1 = 1 \\ P_1,\ k_1 = 2 \\ Q_1,\ k_1 = 3 \end{cases} \text{ ve } K_j = \begin{cases} H_j,\ k_j = 0 \\ P_j,\ k_j = 1\ , j = 2,...,n \\ Q_j,\ k_j = 2 \end{cases} \tag{5.31}$$

şeklinde belirlenir. Buradan da

$$J_i = K_1 K_2 \cdots K_n \tag{5.32}$$

olarak elde edilir. Ancak dikkat edilmesi gereken bir durum vardır. Şöyle ki, (5.30) algoritması "*kalanlara*" bağlı olduğundan ve son adıma kadar devam etmesi gerektiğinden, eğer "*bölünen*" 3' ün herhangi bir kuvvetine kalansız bölünürse "*bölüm*" 1 azaltılarak algoritmaya devam edilmelidir. Örneğin, *n*=4 durumunda *i*=81 için $"81 = 3\cdot 3^3 + 0"$ yerine $"81 = 2\cdot 3^3 + 27"$ yazılmalıdır.

I. yöntem, J_i matrislerini tek tek veren uzun bir yöntemdir. Bu nedenle, tüm J_i matrislerinin bileşenlerinin sırasını aynı anda belirleyen aşağıdaki yöntem kullanılabilir.

II. Yöntem: Bu yöntem, AİA' ı elde edilecek lineer bileşimdeki tripotent matrislerin sayısı ile ilişkilidir. Şöyle ki; bu sayı *n* olmak üzere, *n*=1 durumu için

$$J_1 = H_1,\ J_2 = P_1,\ J_3 = Q_1 \tag{5.33}$$

dır. *n*=2 durumunda, $J_i^*,\ i = 1,...,9,$ matrisleri (karışıklık olmaması adına J_i^* ile gösterilmiştir), (5.33)' deki $J_1,\ J_2$ ve J_3 matrisleri kullanılarak belirlenmektedir. Şöyle ki, $J_1,\ J_2$ ve J_3 matrislerinin her birinin sırasıyla $H_2,\ P_2$ ve Q_2 matrisleri ile çarpılmasıyla

$$\begin{aligned}
&J_1^* = J_1H_2 = H_1H_2,\ J_4^* = J_1P_2 = H_1P_2,\ J_7^* = J_1Q_2 = H_1Q_2,\\
&J_2^* = J_2H_2 = P_1H_2,\ J_5^* = J_2P_2 = P_1P_2,\ J_8^* = J_2Q_2 = P_1Q_2,\\
&J_3^* = J_3H_2 = Q_1H_2,\ J_6^* = J_3P_2 = Q_1P_2,\ J_9^* = J_3Q_2 = Q_1Q_2
\end{aligned} \tag{5.34}$$

şeklinde elde edilir. Aynı yöntemle *n*=3 durumundaki $J_i,\ i = 1,...,27,$ matrisleri de (5.34)' deki $J_i^*,\ i = 1,...,9,$ matrisleri kullanılarak Tablo 5.2' deki gibi elde edilir.

Tablo 5.2

i	J_i	J_{i+9}	J_{i+18}
1	$J_1^* H_3 = H_1 H_2 H_3$	$J_1^* P_3 = H_1 H_2 P_3$	$J_1^* Q_3 = H_1 H_2 Q_3$
2	$J_2^* H_3 = P_1 H_2 H_3$	$J_2^* P_3 = H_1 H_2 P_3$	$J_2^* Q_3 = H_1 H_2 Q_3$
3	$J_3^* H_3 = Q_1 H_2 H_3$	$J_3^* P_3 = H_1 H_2 P_3$	$J_3^* Q_3 = H_1 H_2 Q_3$
4	$J_4^* H_3 = H_1 P_2 H_3$	$J_4^* P_3 = H_1 H_2 P_3$	$J_4^* Q_3 = H_1 H_2 Q_3$
5	$J_5^* H_3 = P_1 P_2 H_3$	$J_5^* P_3 = H_1 H_2 P_3$	$J_5^* Q_3 = H_1 H_2 Q_3$
6	$J_6^* H_3 = Q_1 P_2 H_3$	$J_6^* P_3 = H_1 H_2 P_3$	$J_6^* Q_3 = H_1 H_2 Q_3$
7	$J_2^* H_3 = H_1 Q_2 H_3$	$J_7^* P_3 = H_1 H_2 P_3$	$J_7^* Q_3 = H_1 H_2 Q_3$
8	$J_7^* H_3 = P_1 Q_2 H_3$	$J_8^* P_3 = H_1 H_2 P_3$	$J_8^* Q_3 = H_1 H_2 Q_3$
9	$J_9^* H_3 = Q_1 Q_2 H_3$	$J_9^* P_3 = H_1 H_2 P_3$	$J_9^* Q_3 = H_1 H_2 Q_3$

Sonuç olarak, bu yöntemle devam edilirse, her n (n>3) için J_i, $i = 1,...,3^n$, matrisleri kolaylıkla bulunabilir.

Şimdi de J_i matrislerinin r_i katsayılarını belirleme problemi ele alınsın. r_i skalerleri ile J_i ' lerin çarpan matrisleri, yani P_i, Q_i ve H_i matrisleri, arasında kuvvetli bir ilişki vardır. Şöyle ki, a_0 tüm r_i skalerlerinde bulunur ve ilave katsayılar, p_α^j ve $m_{\alpha\beta}^{jk}$, J_i matrislerinin çarpanlarına göre değişir. H_i için herhangi bir ilave katsayı yazılmıyor iken, P_i ve Q_i için yazılmaktadır. Bu ilave katsayıları belirlemek için, önce J_i matrisinin son çarpanından başlamak koşuluyla P_i ve Q_i matrislerinin katsayıları, yani p_α^j ve p_β^k, yazılır ve sonra da bu yazılan katsayılar ikişer ikişer kullanılarak P_i ve Q_i 'lerin karşılıklı çarpımlarının katsayıları, yani $m_{\alpha\beta}^{jk}$ katsayıları, yazılır. Örneğin $r_i = a_0 + p_\beta^k + p_\alpha^j + m_{\alpha\beta}^{jk};\ j,k \in \{1,2\}$ şeklinde elde edilir. Bu r_i katsayılarını belirleme yöntemi aşağıdaki şekilde formülleştirilebilir:

P_j ve Q_j matrisleri için, sırasıyla,

$$(1,j) \text{ ve } (2,j) \tag{5.35}$$

sıralı ikililerini atayalım. S_i kümesi, J_i matrisindeki P_j ve Q_j matrisleri için atanan (5.35)' deki sıralı ikililerin indis kümesi olsun. Bu durumda tüm J_i matrislerinin r_i katsayıları

$$r_i = a_0 + \sum_{(\alpha,j)\in S_i} p_\alpha^j + \sum_{\substack{(\alpha,j),(\beta,k)\in S_i \\ j<k}} m_{\alpha\beta}^{jk} \tag{5.36}$$

formülü ile bulunabilir.

Bu kısmı, anlatılan yöntem ve formüller ile ilgili iki örnek vererek sonlandıralım. n=3 durumu için, J_{16} ve J_{24} matrisleri 1. Yöntem ile $J_{16} = H_1Q_2P_3$ ve $J_{24} = Q_1P_2Q_3$ olarak bulunur. Bu matrislerin katsayıları da (5.36) formülü ile $r_{16} = a_0 + p_1^3 + p_2^2 + m_{21}^{23}$ ve $r_{24} = a_0 + p_2^3 + p_1^2 + p_2^1 + m_{21}^{12} + m_{22}^{13} + m_{12}^{23}$ olarak hesaplanır.

5.3.2 Algoritma

Değişmeli tripotent matrislerin lineer bileşimlerinin AİA' ı aşağıda verilen algoritma ile elde edilir:

1. Adım. P_i ve Q_i matrislerini (5.5) eşitliğine göre ve H_i matrislerini (5.16) eşitliğine göre hesaplayın.

2. Adım. J_i matrislerini I. Yöntem' i veya II. Yöntem' i kullanarak hesaplayın.

3. Adım. $p_1^i,\ p_2^i,\ m_{11}^{jk},\ m_{12}^{jk},\ m_{21}^{jk},\ m_{22}^{jk}$ katsayılarını (5.9) eşitliğine göre hesaplayın.

4. Adım. r_i skalerlerini (5.36) formülüne göre hesaplayın.

5. Adım. Her r_i katsayısını, ona karşılık gelen J_i matrisi ile çarpın.

5.4 Sayısal Örnekler

Çalışma, elde edilen sonuçları açıklamak amacıyla iki sayısal örnek ile sonlandırılmaktadır. Örnekler $n = 4$ ve $n = 5$ durumları için verilmiştir. Herhangi bir n>5 tamsayısı için de örnekler verilebileceği, burada verilmekte olan örneklere dair ekte sunulan program çıktılarından, görülmektedir. Hesaplamalarda *Mathematica* paket programı kullanılmaktadır.

Örnek 5.9. $A_1 = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, $A_2 = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ ve

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

matrisleri $A_i^3 = A_i,\ A_iA_j = A_jA_i,\ i \neq j,\ i, j = 1,2,3$ eşitliklerini sağlayan matrislerdir. Yani bu matrisler Teorem 5.3' ün koşullarını gerçeklemektedir. Bu matrisler için, örneğin,

$$M = 25A_1 + A_2 - 7A_2^2 + 17A_3 + 3A_1A_2 - 5A_1A_2^2 + 10A_1A_3 + 15A_1A_3^2 + 4A_2^2A_3 - A_2^2A_3^2$$
$$= \begin{bmatrix} -25 & -8 & -8 & 0 \\ -1 & -5 & -1 & -1 \\ 1 & -12 & -16 & 1 \\ 22 & 22 & 22 & -3 \end{bmatrix} \tag{5.37}$$

lineer bileşim matrisi ele alınsın. Algoritma, (5.37) lineer bileşimine uygulanırsa, J_i matrisleri

$$J_9 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \; J_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$J_{15} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \; J_{19} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ve $J_i = \mathbf{0},\ i \neq 9,12,15,19,\ i = 1,2,...,27$, olarak ve bu J_i matrislerinin r_i katsayıları da

$r_1 = 0,\ r_2 = 25,\ r_3 = -25,\ r_4 = -6,\ r_5 = 17,\ r_6 = -29,\ r_7 = -8,\ r_8 = 9,\ r_9 = -25,$
$r_{10} = 17,\ r_{11} = 67,\ r_{12} = -3,\ r_{13} = 14,\ r_{14} = 62,\ r_{15} = -4,\ r_{16} = 12,\ r_{17} = 54,\ r_{18} = 0,$
$r_{19} = -17,\ r_{20} = -17,\ r_{21} = -47,\ r_{22} = -29,\ r_{23} = -30,\ r_{24} = -56,\ r_{25} = -30,\ r_{26} = -38,$
$r_{27} = -52$

olarak elde edilir. Böylece (5.37) lineer bileşiminin AİA’ ı

$$M = r_9 J_9 + r_{12} J_{12} + r_{15} J_{15} + r_{19} J_{19} = \begin{bmatrix} -25 & -8 & -8 & 0 \\ -1 & -5 & -1 & -1 \\ 1 & -12 & -16 & 1 \\ 22 & 22 & 22 & -3 \end{bmatrix} \tag{5.38}$$

şeklinde bulunmuş olur. Bundan başka, (5.38) AİA’ ı dikkate alındığında aşağıdakiler, Sonuç 5.4’ ten kolaylıkla elde edilir:

- $rk(J_i) = \begin{cases} 1, & i = 9,12,15,19 \\ 0, & i \neq 9,12,15,19 \end{cases}, \; i = 1,...,27$, olup toplamları M matrisinin mertebesine eşittir.
- $J_9,\, J_{12},\, J_{15},\, J_{19} \neq \mathbf{0}$ olduğundan, M matrisinin özdeğerleri $r_9 = -25$, $r_{12} = -3$, $r_{15} = -4$ ve $r_{19} = -17$ dir. Ayrıca $M = Pdiag(-25I_1, -3I_1, -4I_1, -17I_1)P^{-1}$ olacak şekilde bir tersinir P matrisi vardır.
- $\det(M) = (-25)^1(-3)^1(-4)^1(-17)^1 = 5100$ dır.
- $iz(M) = (-25) + (-3) + (-4) + (-17) = -49$ dır.
- $M^k = (-25)^k J_9 + (-3)^k J_{12} + (-4)^k J_{15} + (-17)^k J_{19}$

  $$= \begin{bmatrix} (-25)^k & (-25)^k - (-17)^k & (-25)^k - (-17)^k & 0 \\ (-4)^k - (-3)^k & 2(-4)^k - (-3)^k & (-4)^k - (-3)^k & (-4)^k - (-3)^k \\ (-3)^k - (-4)^k & (-3)^k - 2(-4)^k + (-17)^k & (-3)^k - (-4)^k + (-17)^k & (-3)^k - (-4)^k \\ (-3)^k - (-25)^k & (-3)^k - (-25)^k & (-3)^k - (-25)^k & (-3)^k \end{bmatrix}$$

  dır.
- $M^{-1} = (-25)^{-1} J_9 + (-3)^{-1} J_{12} + (-4)^{-1} J_{15} + (-17)^{-1} J_{19}$

  $$= \begin{bmatrix} -\frac{1}{25} & \frac{8}{425} & \frac{8}{425} & 0 \\ \frac{1}{12} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} \\ -\frac{1}{12} & \frac{11}{102} & -\frac{29}{204} & -\frac{1}{12} \\ -\frac{22}{75} & -\frac{22}{75} & -\frac{22}{75} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

  dır.

Örnek 5.10. $A_1 = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$, $A_2 = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ve

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

matrisleri karşılıklı olarak değişmeli ve tripotent matrislerdir. Yani Teorem 5.3' ün koşulları gerçeklenmektedir. Bu matrisler için, örneğin,

$$\begin{aligned} M &= 2I - 2A_1 - 4A_2 - 3A_2^2 + 17A_3 + 24A_3^2 + 3A_1A_2 + 8A_1A_2^2 + 4A_1^2A_2 + 12A_1^2A_2^2 \\ &\quad + A_1A_3 - 3A_1A_3^2 + 15A_1^2A_3 - 4A_2A_3^2 + 6A_2^2A_3 - 25A_2^2A_3^2 \\ &= \begin{bmatrix} 14 & -74 & 0 & -74 & -37 \\ -37 & 26 & -7 & 24 & 12 \\ 0 & 0 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 37 & -24 & 14 & -20 & -10 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{5.39}$$

lineer bileşim matrisi ele alınsın. Algoritma, (5.39) lineer bileşimine uygulanırsa J_i matrisleri

$$J_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 4 & 2 \end{bmatrix}, \quad J_{14} = \begin{bmatrix} 1/2 & -1 & 0 & -1 & -1/2 \\ -1/2 & 1 & 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & -1 & 0 & -1 & -1/2 \end{bmatrix}$$

$$J_{19}=\begin{bmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&-1&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&2&0&0\end{bmatrix},\ J_{21}=\begin{bmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&-2&0\end{bmatrix},$$

$$J_{27}=\begin{bmatrix}1/2&1&0&1&1/2\\1/2&1&0&1&1/2\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\-1/2&-1&0&-1&-1/2\end{bmatrix}$$

ve $J_i=\mathbf{0},\ i\neq 1,14,19,21,27,\ i=2,...,26$, olarak ve bu J_i matrislerinin r_i katsayıları da

$$\begin{aligned}&r_1=2,\ r_2=0,\ r_3=4,\ r_4=-5,\ r_5=20,\ r_6=2,\ r_7=3,\ r_8=14,\ r_9=8,\\&r_{10}=43,\ r_{11}=54,\ r_{12}=62,\ r_{13}=13,\ r_{14}=51,\ r_{15}=37,\ r_{16}=29,\ r_{17}=53,\ r_{18}=51,\\&r_{19}=9,\ r_{20}=-12,\ r_{21}=0,\ r_{22}=-33,\ r_{23}=-27,\ r_{24}=-37,\ r_{25}=-17,\ r_{26}=-25,\\&r_{27}=-23\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Böylece (5.39) lineer bileşiminin AİA' ı

$$M=r_1J_1+r_{14}J_{14}+r_{19}J_{19}+r_{21}J_{21}+r_{27}J_{27}=\begin{bmatrix}14&-74&0&-74&-37\\-37&26&-7&24&12\\0&0&9&0&0\\0&0&0&0&0\\37&-24&14&-20&-10\end{bmatrix}\quad(5.40)$$

şeklinde bulunmuş olur. Ayrıca (5.40) AİA' ı dikkate alındığında aşağıdakiler Sonuç 5.6' dan kolaylıkla elde edilir:

- $rk(J_i)=\begin{cases}1, & i=1,14,19,21,27\\ 0, & i\neq 1,14,19,21,27\end{cases}$, $i=2,...,26$, olup toplamları M matrisinin mertebesine eşittir.
- $J_1,\ J_{14},\ J_{19},\ J_{21}, J_{27}\neq \mathbf{0}$ olduğundan M matrisinin özdeğerleri $r_1=2$, $r_{14}=51$, $r_{19}=9$, $r_{21}=0$, $r_{27}=-23$ dır. Ayrıca $M=Pdiag(2I_1,51I_1,9I_1,0I_1,-23I_1)P^{-1}$ olacak şekilde bir tersinir P matrisi vardır.
- $r_{21}=0$ olduğundan $\det(M)=0$ dır.
- $iz(M)=2+51+9+0+(-23)=39$ dır.
- $M^k=2^kJ_1+51^kJ_{14}+9^kJ_{19}+0^kJ_{21}+(-23)^kJ_{27}$

$$=\begin{bmatrix} {(-23)^k}/{2}+{51^k}/{2} & (-23)^k-51^k & 0 & (-23)^k-51^k & {(-23)^k}/{2}-{51^k}/{2} \\ {(-23)^k}/{2}-{51^k}/{2} & (-23)^k-51^k-2^k & 2^k-9^k & (-23)^k-51^k-2^k & {(-23)^k}/{2}+{51^k}/{2}+2^{k+1} \\ 0 & 0 & 9^k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ {51^k}/{2}-{(-23)^k}/{2} & 2^{k+1}-(-23)^k-51^k & 2{\cdot}9^k-2^{k+1} & 2^{k+1}-(-23)^k-51^k & 2^{k+2}-{(-23)^k}/{2}-{51^k}/{2} \end{bmatrix}$$

dır.

- $r_1\cdot r_{14}\cdot r_{19}\cdot r_{21}\cdot r_{27}=0$ olduğundan, M matrisinin tersi yoktur. Grup tersi ise

$$M^{\#}=2^{-1}J_1+51^{-1}J_{14}+9^{-1}J_{19}+0J_{21}+(-23)^{-1}J_{27}$$

$$=\begin{bmatrix} -\frac{1}{25} & \frac{8}{425} & \frac{8}{425} & 0 \\ \frac{1}{12} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} \\ -\frac{1}{12} & \frac{11}{102} & -\frac{29}{204} & -\frac{1}{12} \\ -\frac{22}{75} & -\frac{22}{75} & -\frac{22}{75} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

dır.

BÖLÜM 6. TARTIŞMA VE ÖNERİLER

Bölüm 1’ de, matrislerin tarihsel gelişiminden ve uygulama alanlarından biraz söz edildi. Ayrıca çalışmada ele alınan tripotent ve idempotent matrisler ve lineer birleşimleri hakkında da kısa bir literatür bilgisi verildi. Çalışmada elde edilen sonuçlar ile, bu özel tipli matrislerin diğer bilim alanlarındaki uygulamaları arasındaki ilişki vurgulandı.

Çalışma boyunca kullanılan bazı temel tanım ve ispatsız olarak verilen özellikler Bölüm 2’ de verildi. Sonra ki bölümde, idempotent ve tripotent matrislerin özellikleri ayrıntılı olarak incelendi.

Bölüm 4’ te, çalışmada ki esas sonuçların elde edilmesine yol gösteren, literatürdeki bir çalışma detaylı olarak incelendi [39]. O çalışmada A ve B değişmeli tripotent matrisler olmak üzere, bu matrisler ve çarpımlarından elde edilen

$$M = a_0 I + a_1 A + a_2 A^2 + b_1 B + b_2 B^2 + c_{11} AB + c_{12} AB^2 + c_{21} A^2 B + c_{22} A^2 B^2, \qquad (6.1)$$

lineer bileşim için dokuz terimli bir AİA verilmiş ve bu AİA kullanılarak M lineer bileşim matrisinin rankı, izi, determinantı, tersi, grup tersi, idempotentliği, involutifliği ve tripotentliği ile ilgili sonuçlar verilmişti.

Esas sonuçların verildiği bölüm ise 5. bölümdür. Bu bölümde, $A_1, ..., A_n$ değişmeli tripotent matrisler olmak üzere,

$$M = a_0 I + \sum_{i=1}^{n} (a_1^i A_i + a_2^i A_i^2) + \sum_{\substack{j=1 \\ j<k}}^{n-1} \sum_{k=2}^{n} (b_{11}^{jk} A_j A_k + b_{12}^{jk} A_j A_k^2 + b_{21}^{jk} A_j^2 A_k + b_{22}^{jk} A_j^2 A_k^2), \quad (6.2)$$

lineer bileşimi için 3^n terimli bir AİA verildi. Bu ana sonuca bağlı olarak bazı önemli sonuçlar da ortaya konuldu. Gerek esas teorem gerekse esas teoremin sonuçları [39]' da verilen ana teorem ve sonuçların bir genelleştirilmesidir.

Çalışmanın uygulanabilirliği bakımından önem arz eden, her sonlu sayıdaki değişmeli tripotent matrisin lineer bileşiminin AİA' ını kolayca elde edilmesine olanak sağlayan bir algoritma da ortaya konuldu. Bunlardan başka açıklayıcı olması amacıyla sayısal örnekler verildi.

Çalışmada elde edilen esas sonuçların, özdeğer, özvektör ve köşegenleştirme gibi kavramlar kullanılmadan, sadece idempotent ve tripotent matrisler üzerinde toplama, çarpma ve skalerle çarpma işlemleri kullanılarak elde edildiğine dikkat edilmelidir. Dolayısıyla, burada elde edilen sonuçların benzerleri, kolaylıkla çeşitli halkalardaki karşılıklı olarak değişmeli tripotent elemanlar veya Hilbert uzayındaki karşılıklı olarak değişmeli tripotent operatörler için de elde edilebilir [39].

Rabanovich her kare matrisin üç idempotent matrisin lineer bileşimi olarak ifade edilebildiğini göstermiştir [34]. Bir idempotent matrisin aynı zamanda tripotent olduğu, ancak tersinin her zaman doğru olmadığı dikkate alınırsa, bu çalışmada değişmeli tripotent matrislerin lineer bileşimleri için ele alınan problem, sadece değişmeli kare matrislerin lineer bileşimleri içinde ele alınabileceği ve benzer sonuçların ortaya konulabileceği düşünülmektedir.

KAYNAKLAR

[1] Association for Computing Machinery, Computer Graphics, Tata McGraw–Hill, ISBN: 978-0-07-059376-3, 1979

[2] BAKSALARY, J.K., BAKSALARY, O.M., Idempotency of linear combinations of two idempotent matrices, Linear Algebra Appl., 321, 3-7, 2000

[3] BAKSALARY, J.K., BAKSALARY, O.M., Nonsingularity of linear combinations of idempotent matrices, Linear Algebra Appl., 388, 25-29, 2004.

[4] BAKSALARY, J.K., BAKSALARY, O.M., When is a linear combinations of two idempotent matrices the group involutory matrix?, Linear and Multilinear Algebra, 54, 429-435, 2006.

[5] BAKSALARY, J.K., BAKSALARY, O.M., ÖZDEMİR, H., A note on linear combinations of commuting tripotent matrices, Linear Algebra Appl., 388, 45-51, 2004.

[6] BAKSALARY, J.K., BAKSALARY, O.M., STYAN, G.P.H., Idempotency of linear combinations of an idempotent matrix and a tripotent matrix, Linear Algebra Appl., 354, 21-34, 2002.

[7] BENÍTEZ, J., THOME N., Idempotency of linear combinations of an idempotent matrix and *t*-potent matrix that commute, Linear Algebra Appl., 403,414-418, 2005.

[8] BOHM, A., Quantum Mechanics: Foundations and Applications, Springer, 2001

[9] BURGESS, C., MOORE, G., The Standard Model. A Primer, Cambridge University Press, 2007

[10] COLL, C., THOME, N., Oblique projectors and group involutory matrices, Appl. Math. Comput., 140, 571-522, 2003.

[11] CONREY, J.B., Ranks of elliptic curves and random matrix theory, Cambridge University Press, 2007

[12] DÖNMEZ, A., Matematiğin öyküsü ve serüveni/ 5. Cilt, Toplumsal Dönüşüm Yayınları, 2005

[13] FUDENBERG, D., TİROLE, J., Game Theory, MIT Press, 1983

[14] GİLBARG, D., TRUDİNGER, N.S., Elliptic partial differential equations of second order (2nd ed.), Berlin, New York: Springer-Verlag, 2001

[15] GODSİL, C., ROYLE, G., Algebraic Graph Theory, Graduate Texts in Mathematics, **207**, Berlin, New York: Springer-Verlag, 2004

[16] GRAYBILL, F.A., Introduction to Matrices with Applications in Statistics, Wadsworth Publishing Company inc., California, 1969

[17] GREENE, W.H., Econometric Analysis, Prentice-Hall, 2003.

[18] GROβ, J., TRENKLER, G., Nonsingularity of the difference of two oblique projectors, SIAM J.Matrix Anal. Appl., 54, 429-435, 2006.

[19] GUENTHER, R.D., Modern Optics, John Wiley, 1990

[20] HEALY, M., Matrices for Statistics, Oxford University Press, 1986

[21] HORN, R.A., JOHNSON, C.R., Matrix Analysis, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1985.

[22] ISRAEL, A.B., GREVILLE, T.N.E., Generalized Inverses Theory and Applications, Springer, 2003.

[23] ITZYKSON, C., ZUBER, J.B., Quantum Field Theory, McGraw–Hill, 1980

[24] KOLIHA, J.J., RAKOČEVIĆ, V., Invertibility of the sum of idempotents, Linear Multilinear Algebra, 50, 285-292, 2002.

[25] KRZANOWSKİ, W.J., Principles of multivariate analysis, Oxford Statistical Science Series, **3**, The Clarendon Press Oxford University Press, 1988

[26] LANG, S., Calculus of several variables (3rd ed.), Berlin, New York: Springer-Verlag, 1987

[27] LATOUCHE, G., RAMASWAMİ, V., Introduction to matrix analytic methods in stochastic modeling (1st ed.), Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1999

[28] LIU, X., WU, L., YU, Y., The gruop inverse of the combinations of two idempotent matrices, Linear and Multilinear Algebra, 21, 390-395, 1999.

[29] MEHATA, K.M., SRİNİVASAN, S.K., Stochastic processes, New York: McGraw–Hill, 1978

[30] NOCEDAL, J., WRİGHT, S.J., Numerical Optimization (2nd ed.), Berlin, New York: Springer-Verlag, 2006

[31] ÖZDEMİR, H., SARDUVAN, M., ÖZBAN, A.Y., GÜLER N., On idempotency and tripotency of linear combinations of two commuting tripotent matrices, Appl. Math. Comput., 207, 197-201, 2009.

[32] ÖZDEMİR, H., ÖZBAN, A.Y., On idempotency of linear combinations of idempotent matrices, Appl. Math. Comput., 159, 439-448, 2004.

[33] PUNNEN, A.P., GUTİN, G., The traveling salesman problem and its variations, Boston: Kluwer Academic Publishers, 2002

[34] RABANOVICH, V., Every matrix is a linear combination of three idempotents, Linear Algebra Appl., 390, 137-143, 2004.

[35] SARDUVAN M., ÖZDEMİR, H., On linear combinations of two tripotent, idempotent, and involutive matrices, Appl. Math. Comput., 200, 401-406, 2008.

[36] SCHİFF, L.I., Quantum Mechanics (3rd ed.), McGraw–Hill, 1968

[37] SHEN, K., CROSSLEY, J.N., LUN, ANTHONY WAH-CHEUNG ,Nine Chapters of the Mathematical Art, Companion and Commentary (2nd ed.), Oxford University Press, 1999

[38] STİNSON, D.R., Cryptography, Discrete Mathematics and Its Applications, Chapman & Hall/CRC, 2005

[39] TİAN, Y., A disjoint idempotent decomposition for linear combinations produced from two commutative tripotent matrices and its applications, Linear and Multilinear Algebra, in pres (doi:10.1080/03081087.2010.496112).

[40] TİAN, Y., STYAN, G.P.H., Rank equalities for idempotent and involutory matrices, Linear Algebra Appl., 335, 101-107, 2001.

[41] VENIT, S., and, BISHOP, W., Elementary Linear Algebra, California StateUniversity at Los Angeles, Pws Publishers, 1985.

[42] WARD, J.P., Quaternions and Cayley numbers, Mathematics and its Applications, **403**, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers Group, 1997

[43] WEİNBERG, S., The Quantum Theory of Fields. Volume I: Foundations, Cambridge University Press, 1995

[44] ZABRODİN, A., BREZİN, É., KAZAKOV, V., SERBAN, D., WİEGMANN, P., Applications of Random Matrices in Physics (NATO Science Series II: Mathematics, Physics and Chemistry), Berlin, New York: Springer-Verlag, 2006

EKLER

Ek A. Örnek 5.9' un Program ve Çıktısı

```
m=4; (*matrislerin boyutu*)
n=3; (*matrislerin sayısı*)
Im=IdentityMatrix[m]; (*m mertebeli birim matris*)
Zm=Table[0, {i, m}, {j, m}]; (*m mertebeli sıfır
matrisi*)
(*Ai matrislerini gir*)
A1={{-1,-1,-1,0}, {0,-1,0,0}, {0,1,0,0}, {0,0,0,-1}}
A2={{-1,-1,-1,0}, {1,2,1,1}, {-1,-2,-1,-1}, {1,1,1,0}}
A3={{0,1,1,0}, {0,1,0,0}, {0,-2,-1,0}, {1,1,1,1}}
(*matrislerin katsayılarını girin*)
Z=0;a1,1=25;a2,1=0;a1,2=1;a2,2=-7;a1,3=17;a2,3=0;
b1,1,1,2=3;b1,2,1,2=-5;b2,1,1,2=0;b2,2,1,2=0;b1,1,1,3=10;b1,2,1,3=0;
b2,1,1,3=15;b2,2,1,3=0;b1,1,2,3=0;b1,2,2,3=0;b2,1,2,3=4;b2,2,2,3=-1;
(*M lineer bileşim matrisini hesapla*)
```

$$M = zI_m + \sum_{i=1}^{n} (a_{1,i}A_i + a_{2,i}A_iA_i) +$$

$$\sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=j+1}^{n} (b_{1,1,j,k}A_jA_k + b_{1,2,j,k}A_jA_kA_k + b_{2,1,j,k}A_jA_jA_k + b_{2,2,j,k}A_jA_jA_kA_k);$$

```
Print["M=", MatrixForm[M]];
```

(* p_{α}^{j} ve $m_{\alpha\beta}^{jk}$ katsayılarını hesapla*)

```
For[i=1, i ≤ n, i++,
```

```
   P1,i=a1,i+a2,i; Print[StringForm["p``", 1,i], p1,i];
   P2,i=-a1,i+a2,i; Print[StringForm["p``", 2,i], p2,i];
 ];
For[j=1, j ≤ n − 1, j++
   For[k=j+1, k ≤ n , k++
    m1,1,j,k = b1,1,j,k + b1,2,j,k + b2,1,j,k + b2,2,j,k ;
    Print[ToString[StringForm["m````=",1,1,j,k]], m1,1,j,k ];
    m1,2,j,k = −b1,1,j,k + b1,2,j,k − b2,1,j,k + b2,2,j,k ;
    Print[ToString[StringForm["m````=",1,2,j,k]], m1,2,j,k ];
    m2,1,j,k = −b1,1,j,k − b1,2,j,k + b2,1,j,k + b2,2,j,k ;
    Print[ToString[StringForm["m````=",2,1,j,k]], m2,1,j,k ];
    m2,2,j,k = b1,1,j,k − b1,2,j,k − b2,1,j,k + b2,2,j,k;
    Print[ToString[StringForm["m````=",2,2,j,k]], m2,2,j,k ];
   ]
 ];
(*Pi, Qi ve Hi matrislerini hesapla*)
For[i=1, i ≤ n , i++
   Pi=1/2(AiAi + Ai);
   Qi=1/2(AiAi − Ai);
   Hi = Im − AiAi ;
   Print[StringForm["P` =`,Q` =`,H` =`",
     i, MatrixForm[Pi], i, MatrixForm[Qi], i,
MatrixForm[Hi]]];
```

```
 ];

(*Ji matrislerinin çarpanlarının sırasının belirlenmesi
ve Ji matrislerinin hesaplanması*)

For[i=1, i ≤ 3^n, i++

  i2=i;

  (*(k1,k2,…,kn)sıralı n′ lisini belirle*)

  For[j=n, j>1, j--,

   kj=Floor[i2/3^(j-1))];

   rm=Mod[i2, (3^(j-1))];

   If[rm==0, kj--;

    rm=3^(j-1)

   ];

   i2=rm;

  ];

  k1=rm;


  (*(k1,k2,…,kn)sıralı n′ lisini kullanarak Ji
matrislerinin

   çarpanlarının sırasını belirle ve Ji matrislerini
hesapla*)

  If[k1==1,Ji=H1; strJ=”H1”];

  If[k1==2,Ji=P1; strJ=”P1”];

  If[k1==3,Ji=Q1; strJ=”Q1”];

  For[t=2, t ≤ n , t++,

   If[kt==0, Ji=JiHt;

    strJ=StringJoin[strJ, ToString[StringForm[“H``”,
ToString[t]]]]

   If[kt==0, Ji=JiPt;
```

```
    strJ=StringJoin[strJ, ToString[StringForm["P..",
ToString[t]]]]
   If[k_t==0, J_i=J_iQ_t;
    strJ=StringJoin[strJ, ToString[StringForm["Q..",
ToString[t]]]]
  ];
  Print [StringForm["J..=", i], strJ, MatrixForm[J_i]];


  List=List[]; (*S_i indis kümesi*)


  For[t=n, t ≥ 2, t—
   If[k_t==1, AppendTo[list, {1,t}]];
   If[k_t==2, AppendTo[list, {2,t}]];
  ];
  If[k_1==2, AppendTo[list, {1,1}]];
  If[k_1==3, AppendTo[list, {2,1}]];
  sR2_i=ToString[StringForm["a..", "0"]];
  sR_i=ToStirng[z];
  Subscript[r, i]=z;
  If[list!={},
   Do[
    as=Part[e, 1];
    us=Part[e, 2];
    sR2_i=StringJoin[sR2_i, "+",ToString[StringForm["p..",
as, us]]];
    sR_i=ToStirng[StringJoin[sR_i, "+",ToString[p_as,us]]];
    Subscript[r,i]= Subscript[r,i]+ p_as,us  (*p_j^i*)
```

```
    , {e, list}
   ];
   For[im=1, im<Part[Dimensions[list], 1], jm++,
    For[jm=im+1, jm≤Part[Dimensions[list], 1], jm++,
     a1=Part[list, im];
     b1=Part[list, jm];
     a=Part[a1, 1];
     b=Part[a1, 2];
     c=Part[b1, 1];
     d=Part[b1, 2];
     sR2_i= sR2_i<>"+"<>ToString[StringForm["m....",
c,a,b,d]];
     sR_i=ToString[StringJoin[sR_i, "+", ToString[ m_{c,a,b,d} ]]];
     Subscript[r, i]= Subscript[r, i]+ m_{c,a,b,d} ;
    ]
   ];
  ](*If list*);
  Print[StringForm["r..=", i], sR2_i];
  Print[StringForm["r..=", i], sR_i];
  Print[StringForm["r..=", i], r_i];
 ]; (*For i*)
matJ=Z_m;
For[i=1, i ≤3^n, i++,
 matJ=matJ+r_i J_i;
]
Print["M=", MatrixForm[M]];
```

```
Print["∑_{i=1}^{3^n} r_i J_i =", MatrixForm[matJ]];
```

$$M = \begin{pmatrix} -25 & -8 & -8 & 0 \\ -1 & -5 & -1 & -1 \\ 1 & -12 & -16 & 1 \\ 22 & 22 & 22 & -3 \end{pmatrix}$$

$p_1^1 = 25, p_2^1 = -25, p_1^2 = -6, p_2^2 = -8, p_1^3 = 17, p_2^3 = -17, m_{11}^{12} = -2,$
$m_{12}^{12} = -8, m_{21}^{12} = 2, m_{22}^{12} = 8, m_{11}^{13} = 25, m_{12}^{13} = -25, m_{21}^{13} = 5, m_{22}^{13} = -5,$
$m_{11}^{23} = 3, m_{12}^{23} = -5, m_{21}^{23} = 3, m_{22}^{23} = -5$

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, Q_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, H_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, Q_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, H_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, Q_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, H_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$J_1 = H_1 H_2 H_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, r_1 = a_0, r_1 = 0, r_1 = 0$$

$$J_2 = P_1H_2H_3\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}, r_2 = a_0 + p_1^1, r_2 = 0 + 25, r_2 = 25$$

$$J_3 = Q_1H_2H_3\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}, r_3 = a_0 + p_2^1, r_3 = 0 + -25, r_3 = -25$$

$$J_4 = H_1P_2H_3\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}, r_4 = a_0 + p_1^2, r_4 = 0 + -6, r_4 = -6$$

$$J_5 = P_1P_2H_3\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}, r_5 = a_0 + p_1^2 + p_1^1 + m_{11}^{12},$$

$$r_5 = 0 + -6 + 25 + -2, r_5 = 17$$

$$J_6 = Q_1P_2H_3\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}, r_6 = a_0 + p_1^2 + p_2^1 + m_{21}^{12},$$

$$r_6 = 0 + -6 + -25 + 2, r_6 = -29$$

$$J_7 = H_1Q_2H_3\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}, r_7 = a_0 + p_2^2, r_7 = 0 + -8, r_7 = -8$$

$$J_8 = P_1Q_2H_3\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}, r_8 = a_0 + p_2^2 + p_1^1 + m_{12}^{12},$$

$$r_8 = 0 + -6 + 25 + -2, r_8 = 17$$

$$J_9 = Q_1Q_2H_3\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, r_9 = a_0 + p_2^2 + p_2^1 + m_{22}^{12},$$

$r_9 = 0 + -8 + -25 + 8, r_9 = -25$

$$J_{10} = H_1H_2P_3\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, r_{10} = a_0 + p_1^3, r_{10} = 0 + 17, r_{10} = 17$$

$$J_{11} = P_1H_2P_3\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, r_{11} = a_0 + p_1^3 + p_1^1 + m_{11}^{13},$$

$r_{11} = 0 + 17 + 25 + 25, r_{11} = 67$

$$J_{12} = Q_1H_2P_3\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, r_{12} = a_0 + p_1^3 + p_2^1 + m_{21}^{13},$$

$r_{12} = 0 + 17 + -25 + 5, r_{12} = -3$

$$J_{13} = H_1P_2P_3\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, r_{13} = a_0 + p_1^3 + p_1^2 + m_{11}^{23},$$

$r_{13} = 0 + 17 + -6 + 3, r_{13} = 14$

$$J_{14} = P_1P_2P_3\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, r_{14} = a_0 + p_1^3 + p_1^2 + p_1^1 + m_{11}^{23} + m_{11}^{13} + m_{11}^{12},$$

$r_{14} = 0 + 17 + -6 + 25 + 3 + 25 + -2, r_{14} = 62$

$$J_{15} = Q_1P_2P_3\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, r_{15} = a_0 + p_1^3 + p_1^2 + p_2^1 + m_{11}^{23} + m_{21}^{13} +$$

m_{21}^{12}, $r_{15} = 0 + 17 + -6 + -25 + 3 + 5 + 2$, $r_{15} = -4$

$$J_{16} = H_1Q_2P_3\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, r_{16} = a_0 + p_1^3 + p_2^2 + m_{21}^{23},$$

$r_{16} = 0 + 17 + -8 + 3$, $r_{16} = 12$

$$J_{17} = P_1Q_2P_3\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, r_{17} = a_0 + p_1^3 + p_2^2 + p_1^1 + m_{21}^{23} + m_{11}^{13} + m_{12}^{12},$$

$r_{17} = 0 + 17 + -8 + 25 + 3 + 25 + -8$, $r_{17} = 54$

$$J_{18} = Q_1Q_2P_3\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, r_{18} = a_0 + p_1^3 + p_2^2 + p_2^1 + m_{21}^{23} + m_{21}^{13} + m_{22}^{12},$$

$r_{18} = 0 + 17 + -8 + -25 + 3 + 5 + 8$, $r_{18} = 0$

$$J_{19} = H_1H_2Q_3\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, r_{19} = a_0 + p_2^3, r_{19} = 0 + -17, r_{19} = -17$$

$$J_{20} = P_1H_2Q_3\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, r_{20} = a_0 + p_2^3 + p_1^1 + m_{12}^{13},$$

$r_{20} = 0 + -17 + 25 + -25$, $r_{20} = -17$

$$J_{21} = Q_1H_2Q_3\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}, r_{21} = a_0 + p_2^3 + p_2^1 + m_{22}^{13},$$

$r_{21} = 0 + -17 + -25 + -5, r_{21} = -47$

$$J_{22} = H_1P_2Q_3\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}, r_{22} = a_0 + p_2^3 + p_1^2 + m_{12}^{23},$$

$r_{22} = 0 + -17 + -6 + -5, r_{22} = -28$

$$J_{23} = P_1P_2Q_3\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}, r_{23} = a_0 + p_2^3 + p_1^2 + p_1^1 + m_{12}^{23} + m_{12}^{13} + m_{11}^{12},$$

$r_{23} = 0 + -17 + -6 + 25 + -5 + -25 + -2, r_{23} = -30$

$$J_{24} = Q_1P_2Q_3\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}, r_{24} = a_0 + p_2^3 + p_1^2 + p_2^1 + m_{12}^{23} + m_{22}^{13} + m_{21}^{12},$$

$r_{24} = 0 + -17 + -6 + -25 + -5 + -5 + 2, r_{24} = -56$

$$J_{25} = H_1Q_2Q_3\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}, r_{25} = a_0 + p_2^3 + p_2^2 + m_{22}^{23},$$

$r_{25} = 0 + -17 + -8 + -5, r_{25} = -30$

$$J_{26} = P_1Q_2Q_3\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}, r_{26} = a_0 + p_2^3 + p_2^2 + p_1^1 + m_{22}^{23} + m_{12}^{13} + m_{12}^{12},$$

$r_{26} = 0 + -17 + -8 + 25 + -5 + -25 + -8, r_{26} = -38$

$$J_{27} = Q_1Q_2Q_3\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, r_{27} = a_0 + p_2^3 + p_2^2 + p_2^1 + m_{22}^{23} + m_{22}^{13} + m_{22}^{12},$$

$$r_{27} = 0 + -17 + -8 + -25 + -5 + -5 + 8, r_{27} = -52$$

$$M = \begin{pmatrix} -25 & -8 & -8 & 0 \\ -1 & -5 & -1 & -1 \\ 1 & -12 & -16 & 1 \\ 22 & 22 & 22 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\sum_{i=1}^{3^n} r_i J_i = \begin{pmatrix} -25 & -8 & -8 & 0 \\ -1 & -5 & -1 & -1 \\ 1 & -12 & -16 & 1 \\ 22 & 22 & 22 & -3 \end{pmatrix}$$

Ek B. Örnek 5.10’ un Program ve Çıktısı

m=5; (*matrislerin boyutu*)

n=3; (*matrislerin sayısı*)

I_m=IdentityMatrix[m]; (*m mertebeli birim matris*)

Z_m=Table[0, {i, m}, {j, m}]; (*m mertebeli sıfır matrisi*)

(*A_i matrislerini gir*)

A_1={{0,-2,0,-2,-1},{-1,0,0,0,0},{0,0,0,0,0},{0,0,0,-1,0}, {1,0,0,2,0}}

A_2={{0,-2,0,-2,-1},{-1,0,0,0,0},{0,0,0,0,0},{0,0,0,0,0}, {1,0,0,0,0}}

A_3={{0,-2,0,-2,-1},{-1,0,1,0,0},{0,0,-1,0,0},{0,0,0,-1,0}, {1,0,-2,2,0}}

(*matrislerin katsayılarını girin*)

Z=2;$a_{1,1}$=-2;$a_{2,1}$=0;$a_{1,2}$=-4;$a_{2,2}$=-3;$a_{1,3}$=17;$a_{2,3}$=24;

$b_{1,1,1,2}$=3;$b_{1,2,1,2}$=8;$b_{2,1,1,2}$=4;$b_{2,2,1,2}$=12;$b_{1,1,1,3}$=1;$b_{1,2,1,3}$=-3;

$b_{2,1,1,3}$=15;$b_{2,2,1,3}$=0;$b_{1,1,2,3}$=0;$b_{1,2,2,3}$=-4;$b_{2,1,2,3}$=6;$b_{2,2,2,3}$=-25;

(*M lineer bileşim matrisini hesapla*)

$$M = zI_m + \sum_{i=1}^{n}(a_{1,i}A_i + a_{2,i}A_iA_i) + \sum_{j=1}^{n-1}\sum_{k=j+1}^{n}(b_{1,1,j,k}A_jA_k + b_{1,2,j,k}A_jA_kA_k + b_{2,1,j,k}A_jA_jA_k + b_{2,2,j,k}A_jA_jA_kA_k);$$

Print[“M=”, MatrixForm[M]];

(*p_α^j ve $m_{\alpha\beta}^{jk}$ katsayılarını hesapla*)

For[i=1, i ≤ n, i++,

  $P_{1,i}$=$a_{1,i}$+$a_{2,i}$; Print[StringForm[“$p^{``}_{``}$”, 1,i], $p_{1,i}$];

  $P_{2,i}$=-$a_{1,i}$+$a_{2,i}$; Print[StringForm[“$p^{``}_{``}$”, 2,i], $p_{2,i}$];

];

```
For[j=1, j ≤ n − 1, j++
   For[k=j+1, k ≤ n , k++
    m_{1,1,j,k} = b_{1,1,j,k} + b_{1,2,j,k} + b_{2,1,j,k} + b_{2,2,j,k} ;
    Print[ToString[StringForm["m''''=",1,1,j,k]], m_{1,1,j,k} ];
    m_{1,2,j,k} = −b_{1,1,j,k} + b_{1,2,j,k} − b_{2,1,j,k} + b_{2,2,j,k} ;
    Print[ToString[StringForm["m''''=",1,2,j,k]], m_{1,2,j,k} ];
    m_{2,1,j,k} = −b_{1,1,j,k} − b_{1,2,j,k} + b_{2,1,j,k} + b_{2,2,j,k} ;
    Print[ToString[StringForm["m''''=",2,1,j,k]], m_{2,1,j,k} ];
    m_{2,2,j,k} = b_{1,1,j,k} − b_{1,2,j,k} − b_{2,1,j,k} + b_{2,2,j,k};
    Print[ToString[StringForm["m''''=",2,2,j,k]], m_{2,2,j,k} ];
   ]
 ];
(*P_i, Q_i ve H_i matrislerini hesapla*)
For[i=1, i ≤ n, i++
   P_i=1/2 (A_i A_i + A_i);
   Q_i=1/2 (A_i A_i − A_i);
   H_i = I_m − A_i A_i;
   Print[StringForm["P'' =", Q'' =", H'' ="",
     i, MatrixForm[P_i], i, MatrixForm[Q_i], i,
MatrixForm[H_i]]];
 ];
(*J_i matrislerinin çarpanlarının sırasının belirlenmesi
ve J_i matrislerinin hesaplanması*)
For[i=1, i ≤ 3^n, i++
```

```
i2=i;
(*(k1,k2,…,kn)sıralı n′ lisini belirle*)
For[j=n, j>1, j--,
 kj=Floor[i2/3^(j-1))];
 rm=Mod[i2, (3^(j-1))];
 If[rm==0, kj--;
  rm=3^(j-1)
 ];
 i2=rm;
];
k1=rm;


(*(k1,k2,…,kn)sıralı n′ lisini kullanarak Ji
matrislerinin
 çarpanlarının sırasını belirle ve Ji matrislerini
hesapla*)
If[k1==1,Ji=H1; strJ=”H1”];
If[k1==2,Ji=P1; strJ=”P1”];
If[k1==3,Ji=Q1; strJ=”Q1”];
For[t=2, t ≤ n , t++,
 If[kt==0, Ji=JiHt;
  strJ=StringJoin[strJ, ToString[StringForm[“H``”,
ToString[t]]]]
 If[kt==0, Ji=JiPt;
  strJ=StringJoin[strJ, ToString[StringForm[“P``”,
ToString[t]]]]
 If[kt==0, Ji=JiQt;
```

```
    strJ=StringJoin[strJ, ToString[StringForm["Q``", ToString[t]]]]
  ];
  Print [StringForm["J``=", i], strJ, MatrixForm[J_i]];

  List=List[]; (*S_i indis kümesi*)

  For[t=n, t ≥ 2, t—
   If[k_t==1, AppendTo[list, {1,t}]];
   If[k_t==2, AppendTo[list, {2,t}]];
  ];
  If[k_1==2, AppendTo[list, {1,1}]];
  If[k_1==3, AppendTo[list, {2,1}]];
  sR2_i=ToString[StringForm["a``", "0"]];
  sR_i=ToStirng[z];
  Subscript[r, i]=z;
  If[list!={},
   Do[
    as=Part[e, 1];
    us=Part[e, 2];
    sR2_i=StringJoin[sR2_i, "+",ToString[StringForm["p````", as, us]]];
    sR_i=ToStirng[StringJoin[sR_i, "+",ToString[p_as,us ]]];
    Subscript[r,i]= Subscript[r,i]+ p_as,us  (*p_j^i*)
    , {e, list}
   ];
   For[im=1, im<Part[Dimensions[list], 1], jm++,
```

```
    For[jm=im+1, jm≤Part[Dimensions[list], 1], jm++,
     a1=Part[list, im];
     b1=Part[list, jm];
     a=Part[a1, 1];
     b=Part[a1, 2];
     c=Part[b1, 1];
     d=Part[b1, 2];
     sR2i= sR2i<>"+"<>ToString[StringForm["m````",
c,a,b,d]];
     sRi=ToString[StringJoin[sRi, "+", ToString[mc,a,b,d]]];
     Subscript[r, i]= Subscript[r, i]+ mc,a,b,d;
    ]
   ];
  ](*If list*);
  Print[StringForm["r`=", i], sR2i];
  Print[StringForm["r`=", i], sRi];
  Print[StringForm["r`=", i], ri];
 ]; (*For i*)
matJ=Zm;
For[i=1, i ≤3^n, i++,
 matJ=matJ+riJi;
]
Print["M=", MatrixForm[M]];
Print["Σ_{i=1}^{3^n} riJi =", MatrixForm[matJ]];
```

$$M = \begin{pmatrix} 14 & -74 & 0 & -74 & -37 \\ -37 & 26 & -7 & 24 & 12 \\ 0 & 0 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 37 & -24 & 14 & -20 & -10 \end{pmatrix}$$

$p_1^1 = -2$, $p_2^1 = 2$, $p_1^2 = -7$, $p_2^2 = 1$, $p_1^3 = 41$, $p_2^3 = 7$, $m_{11}^{12} = 27$, $m_{12}^{12} = 13$
$m_{21}^{12} = 5$, $m_{22}^{12} = 3$, $m_{11}^{13} = 13$, $m_{12}^{13} = -19$, $m_{21}^{13} = 17$, $m_{22}^{13} = -11$, $m_{11}^{23} = -23$,
$m_{12}^{23} = -35$, $m_{21}^{23} = -15$, $m_{22}^{23} = -27$

$$P_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 & 0 & -1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 & 0 & -1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, Q_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -1 & 0 & -3 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

$$H_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$P_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 & 0 & -1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 & 0 & -1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, Q_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -1 & 0 & -1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

$$H_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$P_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 & 0 & -1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 & 0 & -1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, Q_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & -1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -1 & 2 & -3 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

$$H_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$J_1 = H_1H_2H_3\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 4 & 2 \end{pmatrix}, r_1 = a_0, r_1 = 2, r_1 = 2$$

$$J_2 = P_1H_2H_3\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, r_2 = a_0 + p_1^1, r_2 = 2 + -2, r_2 = 0$$

$$J_3 = Q_1H_2H_3\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, r_3 = a_0 + p_2^1, r_3 = 2 + 2, r_3 = 4$$

$$J_4 = H_1P_2H_3\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, r_4 = a_0 + p_1^2, r_4 = 2 + -7, r_4 = -5$$

$$J_5 = P_1P_2H_3\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, r_5 = a_0 + p_1^2 + p_1^1 + m_{11}^{12},$$

$$r_5 = 2 + -7 + -2 + 27, r_5 = 20$$

$$J_6 = Q_1P_2H_3\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, r_6 = a_0 + p_1^2 + p_2^1 + m_{21}^{12},$$

$$r_6 = 2 + -7 + 2 + 5, r_6 = 2$$

$$J_7 = H_1Q_2H_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, r_7 = a_0 + p_2^2, r_7 = 2 + 1, r_7 = 3$$

$$J_8 = P_1Q_2H_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, r_8 = a_0 + p_2^2 + p_1^1 + m_{12}^{12},$$

$r_8 = 2 + 1 + -2 + 13, r_8 = 14$

$$J_9 = Q_1Q_2H_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, r_9 = a_0 + p_2^2 + p_2^1 + m_{22}^{12},$$

$r_9 = 2 + 1 + 2 + 3, r_9 = 8$

$$J_{10} = H_1H_2P_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, r_{10} = a_0 + p_1^3, r_{10} = 2 + 41, r_{10} = 43$$

$$J_{11} = P_1H_2P_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, r_{11} = a_0 + p_1^3 + p_1^1 + m_{11}^{13},$$

$r_{11} = 2 + 41 + -2 + 13, r_{11} = 54$

$$J_{12} = Q_1H_2P_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, r_{12} = a_0 + p_1^3 + p_2^1 + m_{21}^{13},$$

$r_{12} = 2 + 41 + 2 + 17, r_{12} = 62$

$$J_{13} = H_1P_2P_3\begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}, r_{13} = a_0 + p_1^3 + p_1^2 + m_{11}^{23},$$

$r_{13} = 2 + 41 + -7 + -23, r_{13} = 13$

$$J_{14} = P_1P_2P_3\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&-1&0&-1&-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}&1&0&1&\frac{1}{2}\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\\frac{1}{2}&-1&0&-1&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}, r_{14} = a_0 + p_1^3 + p_1^2 + p_1^1 + m_{11}^{23} +$$

$m_{11}^{13} + m_{11}^{12}, r_{14} = 2 + 41 + -7 + -2 + -23 + 13 + 27, r_{14} = 51$

$$J_{15} = Q_1P_2P_3\begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}, r_{15} = a_0 + p_1^3 + p_1^2 + p_2^1 + m_{11}^{23} + m_{21}^{13} + m_{21}^{12},$$

$r_{15} = 2 + 17 + -7 + 2 + -23 + 17 + 5, r_{15} = 37$

$$J_{16} = H_1Q_2P_3\begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}, r_{16} = a_0 + p_1^3 + p_2^2 + m_{21}^{23},$$

$r_{16} = 2 + 41 + 1 + -15, r_{16} = 29$

$$J_{17} = P_1Q_2P_3\begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}, r_{17} = a_0 + p_1^3 + p_2^2 + p_1^1 + m_{21}^{23} + m_{11}^{13} + m_{12}^{12},$$

$r_{17} = 2 + 41 + 1 + -2 + -15 + 13 + 13, r_{17} = 53$

$$J_{18} = Q_1 Q_2 P_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, r_{18} = a_0 + p_1^3 + p_2^2 + p_2^1 + m_{21}^{23} + m_{21}^{13} + m_{22}^{12},$$

$$r_{18} = 2 + 41 + 1 + 2 + -15 + 17 + 3, r_{18} = 51$$

$$J_{19} = H_1 H_2 Q_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, r_{19} = a_0 + p_2^3, r_{19} = 2 + 7, r_{19} = 9$$

$$J_{20} = P_1 H_2 Q_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, r_{20} = a_0 + p_2^3 + p_1^1 + m_{12}^{13},$$

$$r_{20} = 2 + 7 + -2 + -19, r_{20} = -12$$

$$J_{21} = Q_1 H_2 Q_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}, r_{21} = a_0 + p_2^3 + p_2^1 + m_{22}^{13},$$

$$r_{21} = 2 + 7 + 2 + -11, r_{21} = 0$$

$$J_{22} = H_1 P_2 Q_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, r_{22} = a_0 + p_2^3 + p_1^2 + m_{12}^{23},$$

$$r_{22} = 2 + 7 + -7 + -35, r_{22} = -33$$

$$J_{23} = P_1P_2Q_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, r_{23} = a_0 + p_2^3 + p_1^2 + p_1^1 + m_{12}^{23} + m_{12}^{13} + m_{11}^{12},$$

$r_{23} = 2 + 7 + -7 + -2 + -35 + -19 + 27, r_{23} = -27$

$$J_{24} = Q_1P_2Q_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, r_{24} = a_0 + p_2^3 + p_1^2 + p_2^1 + m_{12}^{23} + m_{22}^{13} + m_{21}^{12},$$

$r_{24} = 2 + 7 + -7 + 2 + -35 + -11 + 5, r_{24} = -37$

$$J_{25} = H_1Q_2Q_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, r_{25} = a_0 + p_2^3 + p_2^2 + m_{22}^{23},$$

$r_{25} = 2 + 7 + 1 + -27, r_{25} = -17$

$$J_{26} = P_1Q_2Q_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, r_{26} = a_0 + p_2^3 + p_2^2 + p_1^1 + m_{22}^{23} + m_{12}^{13} + m_{12}^{12},$$

$r_{26} = 2 + 7 + 1 + -2 + -27 + -19 + 13, r_{26} = -25$

$$J_{27} = Q_1Q_2Q_3 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -1 & 0 & -1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, r_{27} = a_0 + p_2^3 + p_2^2 + p_2^1 + m_{22}^{23} +$$

$m_{22}^{13} + m_{22}^{12}, r_{27} = 2 + 7 + 1 + 2 + -27 + -11 + 3, r_{27} = -23$

$$M = \begin{pmatrix} 14 & -74 & 0 & -74 & -37 \\ -37 & 26 & -7 & 24 & 12 \\ 0 & 0 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 37 & -24 & 14 & -20 & -10 \end{pmatrix}$$

$$\sum_{i=1}^{3^n} r_i J_i = \begin{pmatrix} 14 & -74 & 0 & -74 & -37 \\ -37 & 26 & -7 & 24 & 12 \\ 0 & 0 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 37 & -24 & 14 & -20 & -10 \end{pmatrix}$$

ÖZGEÇMİŞ

Emre KİŞİ, 7.5.1985 tarihinde İzmir'de doğdu. Lise eğitimini 2004 yılında Aydın Yesevi Koleji' nde tamamladı. 2005 yılında Uludağ Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde lisans eğitimine başladı ve 2009 yılında lisans eğitimini tamamladı. Aynı yıl Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik EABD' da yüksek lisans programına kaydoldu. 2010 yılında Sakarya Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde araştırma görevlisi olarak çalışmaya başlayıp aynı üniversitenin Fen Bilimleri Enstitüsü yüksek lisans programına yatay geçiş yaptı.