

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**DAYANIKLI KONTROLÜN FİZİKSEL SİSTEMLERE
UYGULANMASI**

YÜKSEK LİSANS TEZİ
Seda UYGURLU

Enstitü Anabilim Dalı : **MAKİNE MÜHENDİSLİĞİ**
Enstitü Bilim Dalı : **MAKİNE TASARIM VE İMALAT**
Tez Danışmanı : **Yrd. Doç. Dr. Şinasi ARSLAN**

Temmuz 2013

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

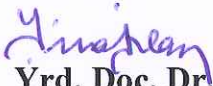
DAYANIKLI KONTROLÜN FİZİKSEL SİSTEMLERE
UYGULANMASI

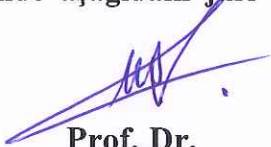
YÜKSEK LİSANS TEZİ


Seda UYGURLU

Enstitü Anabilim Dalı : MAKİNE MÜHENDİSLİĞİ
Enstitü Bilim Dalı : MAKİNE TASARIM VE İMALAT

Bu tez 25 / 07 /2013 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Oybirliği ile kabul edilmiştir.


Yrd. Doç. Dr.
Şinasi ARSLAN
Jüri Başkanı


Prof. Dr.
Mehmet Ali YALÇIN
Üye


Prof. Dr.
Abdullah MİMAROĞLU
Üye

ÖNSÖZ

Son yıllarda araştırmacıların ilgisini çeken modern kontrol metotlarından bir tanesi de dayanıklı kontroldür. Bu kontrol metodunda, sistemin modeli belirli giriş ve çıkış sınırları içinde genişletilip gerçek yapısına uyarlanarak kullanılır. Bu kontrol, dayanıklı kararlılık ve dayanıklı performans sınırları içerisinde kontrol işareti minimum yapacak en uygun metotları içerir.

Nominal model ile tanımlanan gerçek bir sistemin parametreleri zamanla değişmektedir. Tasarlanan kontrolörün hedefi, sistem parametrelerinin değişimlerine karşı sistemi daha duyarsız ve kararlı hale getirmektir. H_{∞} en uygun kontrol metodu temel alınarak tasarlanan hem nominal kontrolör hem de μ -sentezi tabanlı kontrolör sistemin tüm olası parametre değişimlerine cevap verecek şekilde bulunur. Bu kapsamda temeli H_{∞} en uygun kontrol metodu olan dayanıklı kontrolörler Riccati veya doğrusal matris eşitsizliği kullanılarak oluşturulur.

Üç kollu ters sarkaç sistemi için tasarlanan dayanıklı kontrolörlerin simülasyon ortamındaki gözlemlerinden elde edilen becerilerin gerçek zamanda dayanıklı kontrolör tasarımına ışık tutacağı düşünülebilir.

Çalışmanın planlanması ve gerçekleştirilmesinde, sonuçların değerlendirilip yorumlanmasında, yazım aşamalarında bilgisi ve öngörüsü ile beni sürekli olarak destekleyen ve moral veren çok değerli hocam Şinasi ARSLAN'a, maddi ve manevi desteği esirgemeyen kardeşim Hande, babam Adnan ve biricik annem Ergül UYGURLU'ya sonsuz teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ.....	ii
İÇİNDEKİLER	iii
SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ.....	vii
ŞEKİLLER LİSTESİ.....	ix
TABLolar LİSTESİ.....	xvi
ÖZET.....	xvii
SUMMARY.....	xviii

BÖLÜM 1

GİRİŞ.....	1
1.1. Model Tabanlı Kontrol Metotları.....	2
1.1.1. Klasik kontrol metotları	3
1.1.2. Modern kontrol metotları.....	4
1.1.3. Dayanıklı kontrol metotları.....	5
1.1.3.1. Lyapunov teoremi esaslı dayanıklı kontrol metotları...	5
1.1.3.1.1. Geri adımlamalı kontrol.....	5
1.1.3.1.2. Kayan kipli kontrol.....	6
1.1.3.2. H_2 ve H_∞ norm tabanlı dayanıklı kontrol metotları.....	7
1.2. Model Tabanlı Olmayan Kontrol Metotları.....	8
1.2.1. Yapay sinir ağları esaslı kontrol metotları.....	9
1.2.2. Bulanık mantık esaslı kontrol metotları.....	11
1.3. Tezin Amacı.....	12

BÖLÜM 2

KAYNAK ÇALIŞMASI.....	13
-----------------------	----

BÖLÜM 3

KONTROL METODU.....	30
3.1. Genel Bakış.....	30
3.2. Sistem Performansı ve Kararlılığı.....	30
3.3. Dayanıklılık Analizi ve Sentezi.....	31

BÖLÜM 4

DAYANIKLI KONTROL METODU.....	33
4.1. Matematiksel Alt Yapı.....	33
4.1.1. Sinyal normu.....	33
4.1.2. Sistem normu.....	35
4.1.3. Sistemlerde giriş ve çıkış sinyali ilişkisi.....	37
4.1.4. Öz değerler ve öz vektörler.....	38
4.1.5. Durum matrisinin öz değerleri.....	39
4.1.6. Tekil değer ayrışımı.....	40
4.1.7. Rank.....	41
4.1.8. Tekil değer eşitsizliği.....	42
4.2. Doğrusal Kesirli Dönüşüm.....	43
4.3. Sistemde Belirsizlikler.....	45
4.3.1. Yapısal olmayan belirsizlikler.....	46
4.3.1.1. Genel gösterimi.....	46
4.3.1.2. Frekans tanım aralığında gösterimi.....	49
4.3.1.3. İhmal edilen dinamiklerin belirsizlik olarak gösterimi.....	52
4.3.2. Yapısal belirsizlikler.....	54
4.3.3. Parametrik belirsizlik.....	56
4.3.4. Sisteme etki eden bozucu sinyaller.....	58
4.4. Geri Beslemeli Bir Sistemin Kararlılığı ve Performansı.....	59
4.4.1. Nominal kararlılık.....	60
4.4.2. Nominal performans.....	63
4.5. Ağırlıklı filtrelerin sistemde kullanılması.....	71
4.5.1. Sistem performansına etki eden faktörler.....	71
4.5.2. Ağırlık fonksiyonlarının seçimi.....	76
4.5.2.1. Performans ağırlık fonksiyonu seçimi.....	76

4.5.2.2. Wu ağırlık fonksiyonunun seçimi.....	79
4.5.3. Kapalı çevrimli kontrol sisteminin ağırlık fonksiyonlarıyla gösterimi.....	80
4.6. Sistemin Dayanıklı Kararlılık ve Dayanıklı Performansı.....	81
4.6.1. Küçük kazanç teoremi.....	82
4.6.2. Dayanıklı kararlılık.....	83
4.6.3. Dayanıklı performans.....	86
4.7. Dayanıklılık Analizi.....	89
4.7.1. Yapısal tekil değer.....	89
4.7.2. Yapısal tekil değer hesabı.....	91
4.7.3. Temel çevrim teoremi.....	102
4.7.4. Dayanıklı kararlılık ve dayanıklı performans analizi.....	103
4.8. Dayanıklı Kontrolör.....	105
4.9. Dayanıklılık Sentezi.....	113
4.9.1. Kompleks μ -sentezi.....	114
4.9.1. Karma μ -sentezi.....	117

BÖLÜM 5

SİMÜLASYON ÇALIŞMALARI.....	120
5.1. Fiziksel Sistemin Tanımı.....	120
5.2. Sistemin Dinamik Modeli.....	122
5.2.1 Doğrusal olmayan model.....	122
5.2.2. Nominal modeli.....	124
5.3. Dayanıklı Kontrol.....	127
5.3.1. Ağırlık filtreleri.....	127
5.3.2. H_∞ kontrol metodu.....	136
5.3.3. H_∞ kontrolörün dayanıklılık analizi.....	141
5.4. μ -Sentezi.....	148
5.5. En Kötü Durum Performans Analizi.....	173

BÖLÜM 6

SONUÇLAR.....	180
---------------	-----

KAYNAKLAR.....	182
ÖZGEÇMİŞ.....	191

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

BIBO	: Sınırlı giriş sınırlı çıkış
D	: Üst sınır ölçeklendirme matrisi
DGKF	: Doyle Glover Khargonekar and Francis
G_n	: Nominal sistem
G_p	: Genişletilmiş gerçel belirsizlik içeren iç bağlantı modeli
GM	: Kazanç payı
H_∞	: H –sonsuz normu
K	: Kontrolör
K_∞	: Nominal kontrolör
K_{mu}	: μ -sentezi tabanlı kontrolör
KF	: Kalman filtresi
L	: Açık çevrim transfer fonksiyonu
LFT	: Doğrusal kesirli dönüşüm
LMI	: Doğrusal matris eşitsizliği
LPV	: Doğrusal parametre değişimi
LQ	: Doğrusal karesel
LQG	: Doğrusal karesel Gaussian
LQR	: Doğrusal karesel regülör
LTI	: Zamanla değişmeyen doğrusal
MIMO	: Çok giriş-çok çıkış
M_s	: Duyarlılık fonksiyonu maksimum genliği
M_T	: Tamamlayıcı duyarlılık fonksiyonu maksimum genliği
N	: Nominal sistemin iç bağlantı modeli
NN	: Yapay sinir ağları
P	: Oransal kontrol, Belirsizlik içeren sistemin iç bağlantı modeli
PD	: Oransal-türevsel kontrol

PI	: Oransal-tümlev kontrol
PID	: Oransal-tümlev-türevsel kontrol
PM	: Faz payı
R	: Kontrol duyarlılık fonksiyonu
RC	: Dayanıklı kontrol
RP	: Dayanıklı performans
RS	: Dayanıklı kararlılık
S	: Duyarlılık fonksiyonu
SDRI	: Durum bağımlı Riccati denklemleri
SISO	: Tek giriş-tek çıkış
SVD	: Tekil değer ayrışımı
T	: Tamamlayıcı duyarlılık fonksiyonu
TIP	: Üç kollu ters sarkaç
YJBK	: Youla-Jabr-Bongiorno-Kucera
YSA	: Yapay sinir ağları
wc	: En kötü durum
α	: Sınır değeri
β	: Belirsizlik üst sınır değeri
Δ	: Belirsizlik bloğu
Δ_F	: Sanal belirsizlik bloğu
Δ_p	: Performans belirsizlik bloğu
γ	: Üst tekil değeri maksimum genliği
λ	: Özdeğerler
μ_Δ	: Yapısal tekil değer
ω_B	: Duyarlılık fonksiyonu band genişliği
ω_{BT}	: Tamamlayıcı duyarlılık fonksiyonu band genişliği
ω_c	: Kazanç geçiş frekansı
ρ	: Spektral yarıçap
σ	: Tekil değer
$\bar{\sigma}$: Üst tekil değer
$\underline{\sigma}$: Alt tekil değer

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 4.1.	$p = 1, 2, \infty$ için $\ u\ _p = 1$ olması durumunda normlar arasındaki ilişki.....	35
Şekil 4.2.	$M - \Delta_u$ 'nin LFT blok diyagramı.....	44
Şekil 4.3.	$M - \Delta_t$ 'nin LFT blok diyagramı.....	45
Şekil 4.4.	Toplam belirsizlik içeren sistem modeli.....	47
Şekil 4.5.	Giriş çarpım belirsizlik içeren sistem modeli.....	47
Şekil 4.6.	Çıkış çarpım belirsizlik içeren sistem modeli.....	48
Şekil 4.7.	Belirsizlik içeren sistemin sol asal faktörler ile gösterimi.....	49
Şekil 4.8.	Belirsizlik içeren sistemin sağ asal faktörler ile gösterimi.....	49
Şekil 4.9.	Nyquist diyagramında parametrik belirsizlik içeren sistemin belirsizlik bölgesi.....	50
Şekil 4.10.	$\omega = 0.2$ belirsizlik bölgelerinin disk yaklaşımı ile basitleştirilmesi.....	50
Şekil 4.11.	Yapısal olmayan belirsizlik içeren sistemin Nyquist diyagramı	51
Şekil 4.12.	Sistemde zaman gecikmesi.....	52
Şekil 4.13.	Sistemde birinci dereceden faz gecikmesi.....	53
Şekil 4.14.	Çok belirsizlik içeren bir sistem.....	54
Şekil 4.15.	Bir sistemin yapısal belirsizliğinin oluşumu.....	55
Şekil 4.16.	Kapalı çevrimli bir kontrol sisteminin bozucu sinyaller ile gösterimi.....	58
Şekil 4.17.	Geri beslemeli bir kontrol sistemine ait standart blok diyagramı.....	60
Şekil 4.18.	İçsel kararlılık yapısı.....	61
Şekil 4.19.	$d(t)$ bozucu sinyali ve $e(t)$ hata sinyali arasındaki ilişkinin blok diyagramı.....	64
Şekil 4.20.	$n(t)$ gürültü sinyali ve $e(t)$ hata sinyali arasındaki ilişkinin blok diyagramı.....	64

Şekil 4.21.	$d_i(t)$ bozucu sinyali ve $e(t)$ hata sinyali arasındaki ilişkinin blok diyagramı.....	65
Şekil 4.22.	$d(t)$ bozucu sinyali ve $u_d(t)$ kontrol sinyali arasındaki ilişkinin blok diyagramı.....	65
Şekil 4.23.	Kararlı bir sistem için $L(j\omega)$ 'nin Nyquist diyagramı.....	72
Şekil 4.24.	Nominal performans için Nyquist diyagramı.....	76
Şekil 4.25.	Nominal performans blok diyagramı.....	77
Şekil 4.26.	$1/w_p$ 'nin frekans cevabı.....	78
Şekil 4.27.	Eyleyicinin $u(t)$ birim basamak sinyaline karşılık cevabı.....	79
Şekil 4.28.	Kapalı çevrim kontrol sisteminin ağırlık fonksiyonlarıyla gösterimi.....	81
Şekil 4.29.	Belirsiz sistemin kapalı çevrim blok diyagramı.....	83
Şekil 4.30.	Belirsiz sistemin birleştirilmiş kapalı çevrim blok diyagramı.....	83
Şekil 4.31.	Belirsiz sistemin Nyquist diyagramı.....	84
Şekil 4.32.	Belirsiz sistemin performans blok diyagramı.....	86
Şekil 4.33.	Belirsiz sistemin performans Nyquist diyagramı.....	87
Şekil 4.34.	Performans belirsizliği ile belirsiz sistemin blok diyagramı.....	88
Şekil 4.35.	$M-\Delta$ belirsiz sistemin içyapısal kararlılık blok diyagramı.....	89
Şekil 4.36.	U çarpanının $M-\Delta$ yapısında gösterilmesi.....	93
Şekil 4.37.	D ölçeklendirme matrisinin $M-\Delta$ yapısında gösterilmesi.....	95
Şekil 4.38.	$M-(\Delta_1, \Delta_2)$ belirsizlik içeren sistemin blok diyagramı.....	102
Şekil 4.39.	Dayanıklı kontrol genel yapısı.....	103
Şekil 4.40.	μ Analizi genel yapısı.....	104
Şekil 4.41.	μ -Analizi dayanıklı kararlılık yapısı blok diyagramı.....	104
Şekil 4.42.	μ -Analizi dayanıklı performans yapısı blok diyagramı.....	105
Şekil 4.43.	H_∞ dayanıklı kontrol problemi blok diyagramı.....	106
Şekil 4.44.	$\ H\ _\infty$ kontrol genel yapısı.....	107
Şekil 4.45.	DGKF ile parametrize edilmiş $\ H\ _\infty$ kontrol genel yapısı.....	108
Şekil 4.46.	$\ H\ _\infty$ yarı en uygun kontrol iç yapısı.....	112

Şekil 4.47.	D-K iterasyonu genel gösterimi.....	115
Şekil 4.48.	$P_D(s)$ iç bağlantı.....	116
Şekil 4.49.	D-K iterasyon akış şeması.....	117
Şekil 4.50.	$\beta_1 G_1(s)$ iç bağlantı yapısı.....	118
Şekil 4.51.	D,G-K tekrarlama akış şeması.....	119
Şekil 5.1.	Üçlü ters sarkaç sistemi.....	121
Şekil 5.2.	TIP sisteminin blok diyagramı.....	123
Şekil 5.3.	Nominal sistemin blok diyagramı.....	124
Şekil 5.4.	$\tilde{\tau}$ bozucu ve u kontrol girişlerin x araba pozisyonuna frekans cevabı.....	125
Şekil 5.5.	$\tilde{\tau}$ bozucu ve u kontrol girişlerin θ_1 birinci kol salınım açısına frekans cevabı.....	125
Şekil 5.6.	$\tilde{\tau}$ bozucu ve u kontrol girişlerin θ_2 ikinci kol salınım açısına frekans cevabı.....	126
Şekil 5.7.	$\tilde{\tau}$ bozucu ve u kontrol girişlerin θ_3 üçüncü kol salınım açısına frekans cevabı.....	126
Şekil 5.8.	Sistemin genişletilmiş nominal açık çevrim modeli.....	128
Şekil 5.9.	Genişletilmiş nominal açık çevrim iç bağlantılı model.....	128
Şekil 5.10.	$[w,u]^T$ bozucu girişlerin \tilde{z}_{ex} araba pozisyon hatasına frekans cevabı..	129
Şekil 5.11.	$[w,u]^T$ bozucu girişlerin \tilde{z}_{θ_1} birinci kol salınım açısına frekans cevabı.....	130
Şekil 5.12.	$[w,u]^T$ bozucu girişlerin \tilde{z}_{θ_2} ikinci kol salınım açısına frekans cevabı.....	130
Şekil 5.13.	$[w,u]^T$ bozucu girişlerin \tilde{z}_{θ_3} üçüncü kol salınım açısına frekans cevabı.....	131
Şekil 5.14.	w_{px} ağırlık fonksiyonu frekans cevabı.....	132
Şekil 5.15.	$W_{p\theta_1}$ ağırlık filtresi frekans cevabı.....	133
Şekil 5.16.	$W_{p\theta_2}$ ağırlık filtresi frekans cevabı.....	134
Şekil 5.17.	$W_{p\theta_3}$ ağırlık filtresi frekans cevabı.....	134

Şekil 5.18.	W_u kontrol ağırlık fonksiyonu frekans cevabı.....	135
Şekil 5.19.	Ağırlık filtreleriyle açık çevrim blok diyagramı.....	136
Şekil 5.20.	N nominal sistem iç bağlantı yapısı.....	136
Şekil 5.21.	H_∞ genel blok diyagramı.....	136
Şekil 5.22.	K_∞ kontrolörün tekil değer frekans cevabı.....	137
Şekil 5.23.	$T_{z\bar{w}}$ kapalı çevrimin tekil değerleri frekans cevabı.....	138
Şekil 5.24.	\bar{w} bozucu girişlerinden \bar{z}_{e_x} araba referans izleme hatasına tekil değeri.....	139
Şekil 5.25.	\bar{w} bozucu girişlerinden \bar{z}_{θ_1} salınım açısına tekil değeri.....	139
Şekil 5.26.	\bar{w} bozucu girişlerinden \bar{z}_{θ_2} salınım açısına tekil değeri.....	140
Şekil 5.27.	\bar{w} bozucu girişlerinden \bar{z}_{θ_3} salınım açısına tekil değeri.....	140
Şekil 5.28.	LFT'li parametrik belirsizlik içeren sistem blok diyagramı.....	141
Şekil 5.29.	Gerçek belirsizlik içeren sistem blok diyagramı.....	143
Şekil 5.30.	Ağırlık fonksiyonlarıyla belirsizlikler içeren açık çevrim sistemin blok diyagramı.....	144
Şekil 5.31.	Dayanıklı kontrol genel yapısı.....	145
Şekil 5.32.	Dayanıklılık analizi genel yapısı.....	145
Şekil 5.33.	Dayanıklı kararlılık analizi.....	146
Şekil 5.34.	Dayanıklı performans analizi.....	147
Şekil 5.35.	Kapalı çevrimli sistemin tekil değerleri.....	148
Şekil 5.36.	K_{mu1} kontrolörü ile dayanıklı performans analizi.....	149
Şekil 5.37.	İkinci DK'da D_b ölçeklendirme matrisinden elde edilen \hat{D}_b transfer fonksiyonu.....	150
Şekil 5.38.	İkinci DK'da D_{e1} ölçeklendirme matrisinden elde edilen \hat{D}_{e1} transfer fonksiyonu.....	150
Şekil 5.39.	İkinci DK'da D_{e2} ölçeklendirme matrisinden elde edilen \hat{D}_{e2} transfer fonksiyonu.....	150
Şekil 5.40.	İkinci DK'da D_{e3} ölçeklendirme matrisinden elde edilen \hat{D}_{e3} transfer fonksiyonu.....	150

Şekil 5.41.	İkinci DK'da D_{o1} ölçeklendirme matrisinden elde edilen \hat{D}_{o1} transfer fonksiyonu.....	151
Şekil 5.42.	İkinci DK'da D_{o4} ölçeklendirme matrisinden elde edilen \hat{D}_{o4} transfer fonksiyonu.....	151
Şekil 5.43.	İkinci DK'da D_{o5} ölçeklendirme matrisinden elde edilen \hat{D}_{o5} transfer fonksiyonu.....	151
Şekil 5.44.	$\bar{\sigma}(D_{1r}M_1D_{1r}^{-1})$ ve $\bar{\sigma}(\hat{D}_{1r}M_1\hat{D}_{1r}^{-1})$ üst sınırları.....	152
Şekil 5.45.	H_∞ kontrol problemi genel yapısı.....	152
Şekil 5.46.	K_{mu2} kontrolörü ile kapalı çevrimli sistemin tekil değerleri.....	153
Şekil 5.47.	K_{mu2} kontrolörü ile kompleks üst sınırı ile RP analizi.....	153
Şekil 5.48.	K_{mu2} kontrolörü ile karma üst sınır ile RP analizi.....	154
Şekil 5.49.	Üçüncü D-K'da D_o ölçeklendirme matrisinden elde edilen \hat{D}_o transfer fonksiyonu.....	154
Şekil 5.50.	Üçüncü D-K'da D_{o1} ölçeklendirme matrisinden elde edilen \hat{D}_{o1} transfer fonksiyonu.....	154
Şekil 5.51.	Üçüncü D-K'da D_{o2} ölçeklendirmem matrisinden elde edilen \hat{D}_{o2} transfer fonksiyonu.....	155
Şekil 5.52.	Üçüncü D-K'da D_{o3} ölçeklendirme matrisinden elde edilen \hat{D}_{o3} transfer fonksiyonu.....	155
Şekil 5.53.	Üçüncü D-K'da D_{o1} ölçeklendirme matrisinden elde edilen \hat{D}_{o1} transfer fonksiyonu.....	155
Şekil 5.54.	Üçüncü D-K'da D_{o4} ölçeklendirme matrisinden elde edilen \hat{D}_{o4} transfer fonksiyonu.....	155
Şekil 5.55.	Üçüncü D-K'da D_{o5} ölçeklendirme matrisinden elde edilen \hat{D}_{o5} transfer fonksiyonu.....	156
Şekil 5.56.	$\bar{\sigma}(D_{2r}M_2D_{2r}^{-1})$ ve $\bar{\sigma}(\hat{D}_{2r}M_2\hat{D}_{2r}^{-1})$ üst sınırları.....	156
Şekil 5.57.	Kapalı çevrimli sistemin tekil değerleri.....	157
Şekil 5.58.	K_{mu3} kontrolörü ile kompleks üst sınırı ile RP analizi.....	157

Şekil 5.59.	K_{mu3} kontrolörü ile karma üst sınır ile RP analizi.....	158
Şekil 5.60.	Dördüncü D-K'da D_b ölçeklendirme matrisinden elde edilen \hat{D}_b transfer fonksiyonu.....	158
Şekil 5.61.	Dördüncü D-K'da D_{c1} ölçeklendirme matrisinden elde edilen \hat{D}_{c1} transfer fonksiyonu.....	158
Şekil 5.62.	Dördüncü D-K'da D_{c2} ölçeklendirme matrisinden elde edilen \hat{D}_{c2} transfer fonksiyonu.....	159
Şekil 5.63.	Dördüncü D-K'da D_{c3} ölçeklendirme matrisinden elde edilen \hat{D}_{c3} transfer fonksiyonu.....	159
Şekil 5.64.	Dördüncü D-K'da D_{o1} ölçeklendirme matrisinden elde edilen \hat{D}_{o1} transfer fonksiyonu.....	159
Şekil 5.65.	Dördüncü D-K'da D_{o4} ölçeklendirme matrisinden elde edilen \hat{D}_{o4} transfer fonksiyonu.....	159
Şekil 5.66.	Dördüncü D-K'da D_{o5} ölçeklendirme matrisinden elde edilen \hat{D}_{o5} transfer fonksiyonu.....	160
Şekil 5.67.	$\bar{\sigma}(D_{i3}M_3D_{r3}^{-1})$ ve $\bar{\sigma}(\hat{D}_{i3}M_3\hat{D}_{r3}^{-1})$ üst sınırları.....	160
Şekil 5.68.	Kapalı çevrimli sistemin tekil değerleri.....	161
Şekil 5.69.	K_{mu4} kontrolörü ile kompleks üst sınırı ile RP analizi.....	161
Şekil 5.70.	K_{mu4} kontrolörü ile karma üst sınır ile RP analizi.....	162
Şekil 5.71.	K_{mu4} kontrolörün tekil değer frekans cevabı.....	162
Şekil 5.72.	\tilde{w} bozucu girişlerinden \tilde{z}_{ex} araba referans izleme hatasına tekil değeri.....	163
Şekil 5.73.	\tilde{w} bozucu girişlerinden \tilde{z}_{o1} salınım açısına tekil değeri.....	164
Şekil 5.74.	\tilde{w} bozucu girişlerinden \tilde{z}_{o2} salınım açısına tekil değeri.....	164
Şekil 5.75.	\tilde{w} bozucu girişlerinden \tilde{z}_{o3} salınım açısına tekil değeri.....	165
Şekil 5.76.	Dayanıklı kararlılık analizi.....	165
Şekil 5.77.	Dayanıklı performans analizi.....	166
Şekil 5.78.	Birinci durum için araba referans konum takibi.....	167
Şekil 5.79.	Birinci durum için birinci sarkaç kolunun bozucu torklara karşı zaman cevapları.....	168

Şekil 5.80.	Birinci durum için ikinci sarkaç kolunun bozucu torklara karşı zaman cevapları.....	168
Şekil 5.81.	Birinci durum için üçüncü sarkaç kolunun bozucu torklara karşı zaman cevapları.....	169
Şekil 5.82.	Birinci durum için kontrolörlerin bozucu torklara karşı zaman cevapları.....	169
Şekil 5.83.	Birinci durum için araba referans konum takibi.....	170
Şekil 5.84.	Birinci durum için birinci sarkaç kolunun bozucu torklara karşı zaman cevapları.....	171
Şekil 5.85.	Birinci durum için ikinci sarkaç kolunun bozucu torklara karşı zaman cevapları.....	171
Şekil 5.86.	Birinci durum için üçüncü sarkaç kolunun bozucu torklara karşı zaman cevapları.....	172
Şekil 5.87.	Birinci durum için kontrolörlerin bozucu torklara karşı zaman cevapları.....	172
Şekil 5.88.	Performans düşüş eğrisi.....	173
Şekil 5.89.	Birinci durum için en kötü durumda araba referans konum takibi.....	174
Şekil 5.90.	Birinci durum için en kötü durumda birinci sarkaç kolunun zaman cevapları.....	175
Şekil 5.91.	Birinci durum için en kötü durumda ikinci sarkaç kolunun zaman cevapları.....	175
Şekil 5.92.	Birinci durum için en kötü durumda üçüncü sarkaç kolunun zaman cevapları.....	176
Şekil 5.93.	Birinci durum için en kötü durumda kontrolörlerin zaman cevapları.	176
Şekil 5.94.	İkinci durum için en kötü durumda araba referans konum takibi.....	177
Şekil 5.95.	İkinci durum için en kötü durumda birinci sarkaç kolunun zaman cevapları.....	177
Şekil 5.96.	İkinci durum için en kötü durumda ikinci sarkaç kolunun zaman cevapları.....	178
Şekil 5.97.	İkinci durum için en kötü durumda üçüncü sarkaç kolunun zaman cevapları.....	178
Şekil 5.98.	İkinci durum için en kötü durumda kontrolörlerin zaman cevapları...	179

TABLULAR LİSTESİ

Tablo 4.1.	Giriş sinyalleri karşılık çıkış sinyalleri normları.....	37
Tablo 4.2.	Sistem kazancı.....	37
Tablo 4.3.	Farklı belirsiz sistem modellerine göre dayanıklı kararlılık şartı.....	85
Tablo 4.4.	μ eşitsizlik şartı.....	96
Tablo 5.1.	Modelde kullanılan parametreler.....	121
Tablo 5.2.	T_{zw} kapalı çevrimli sistemin öz değerleri.....	138
Tablo 5.3.	D-K tekrarlama özeti.....	163
Tablo 5.4.	$F_\ell(P, K_{\mu 4})$ kapalı çevrimli sistemin öz değerleri.....	163
Tablo 5.5.	Dayanıklılık analizi sonuçları.....	166

ÖZET

Anahtar kelimeler: Dayanıklı kontrol, H_∞ en uygun kontrol, Belirsizlik, Dayanıklı kararlılık, Dayanıklı performans, μ -sentez.

Son yıllarda dayanıklı kontrol alanındaki akademik çalışmalar H_∞ en uygun kontrol metodunun endüstriyel uygulamalarda kabul edilen bir metot olmasına neden olmuştur. H_∞ en uygun kontrol metodu, diğer kontrol metotlarına göre daha dayanıklı ve kararlı olup, olası model belirsizliklerine ve parametre değişikliklerine karşı garantili bir aralıkta cevap verir.

Bu çalışmada, önce dayanıklı kontrol ile ilgili kaynak araştırması yapılmış, önemli çalışmalar incelenmiştir. Daha sonra H_∞ en uygun kontrol metoduna dayanan nominal kontrolör ve dayanıklı kararlılık ve dayanıklı performansı garanti altına almak için μ -sentezi metodu tabanlı dayanıklı kontrolör matematiksel olarak tanıtılmış ve detaylı olarak izah edilmiştir.

Kuramsal çalışmalara paralel olarak tasarlanan dayanıklı iki kontrolör, üç kollu bir ters sarkaç sistemi için Matlab ve Simulink simülasyon ortamında uygulanmış, sonuçlar gözlenerek yorumlanmıştır.

ROBUST CONTROL WITH APPLICATION TO PHYSICAL SYSTEMS

SUMMARY

Keywords: Robust control, H_∞ optimal control, Uncertainty, Robust stability, Robust performance, μ -synthesis.

H_∞ optimal control method has been accepted to use in industrial applications because of academic studies in the field of robust control recently. H_∞ optimal control method with respect to other control methods is more robust and stable, and satisfies the controllability and high performance versus probable uncertainties and parameter perturbations in a guaranteed range.

In this study, firstly a short literature review has been done and the most common studies in this area have been investigated. Then, nominal controller based on H_∞ optimal control method and a controller based on μ -synthesis method have been introduced and elucidated in details by using mathematical manipulations in order to guarantee the robust stability and robust performance.

Results of simulations of two robust controllers which have been designed in line with the theoretical works in Matlab and Simulink environment for a triple inverse pendulum system have been given and discussed.

BÖLÜM 1. GİRİŞ

Kontrol sistemleri, sistemin dinamik davranışı ve bunun değişimleriyle ilgilenir. Amaç, sistemin istenilen şekilde davranması için kontrolör tarafından giriş sinyalleri sağlayarak eyleyiciler aracılığıyla kontrol değişkeni olarak seçilen sistem parametresinin istenen değer veya değerlere getirilmesidir. Kontrol sistemleri tasarımında genel olarak, referans ile cevap arasındaki farka göre giriş sinyalinin belirlendiği, kapalı çevrimli kontrol uygulanmaktadır. Geri beslemeli kontrol olarak bilinen bu metotla sistemde kararlılık ve performansın sağlanması hedeflenir.

Bahsedilen değer bir su tankının su seviyesi veya bir aracın seyir hızı gibi sabit bir büyüklük ise kontrol sistemi bir “düzenleme sistemi”, zaman içerisinde genliği veya yönü değişen bir değişkene de “takip sistemi” olarak adlandırılmaktadır [1]. Tasarlanan bir kontrol sisteminin fiziksel ortamda uygulanabilmesi için, sisteme ilişkin oluşturulan modelin ayırık zamana çevrilmesi ve elde edilen ayırık zamanlı kontrol modelinin gerçekçi bilgisayar simülasyonu ortamında doğrulanması gerekmektedir. Böylelikle, ele alınan fiziksel sisteme uygulanmadan önce, gerçek zaman uygulanmasında kontrolör olarak görev yapacak bilgisayar veya mikroişlemci biriminden çıkacak ayırık zamanlı kontrol sinyallerinin sistem çıkışını, öngörülen değerlere getirip getiremediği gözlenmiş olur. Ayrıca, simülasyonda bozucu girişlerin fiziksel sistem üzerindeki etkileri de gerçeğine yakın bir şekilde anlaşılabilir

Kontrol sistemlerinin geliştirilmesi sırasında ele alınması gereken en önemli noktalardan birisi de kararları mekanik hareketlere dönüştüren eyleyicilere gerekli kontrol sinyallerinin gönderilmesini sağlayacak kontrol metodunun belirlenmesidir. Uygulanacak metot, öncelikle ilgili kontrol sisteminin kararlılığını, ayrıca sistemin, seçilen denetim değişkeni için dışarıdan verilen referans değerlerini belirlenen doğruluk seviyesinde takip etmesi ile tanımlanan, performansını sağlamalıdır.

Bunların yanı sıra, kontrol sisteminin dışarıdan etkiyen kontrolsüz bozucu girişler ile algılayıcılar üzerindeki gürültüden de mümkün olduğunca az etkilenmesini sağlamalıdır.

Genel bir tanımlama olarak, sistemin komut emirlerini takip edebilme özelliği “servo”, bozucu girişlerden etkilenmemesi özelliği de “düzenleme” olarak adlandırılmaktadır [2]. Bu özelliklerinin yanı sıra, iyi bir kontrol sisteminin; sistemi tanımlayan parametrelerin bir veya birkaçındaki değişim ve modellenemeyen belirsizliklerinden kaynaklanacak bozucu etkileri de ortadan kaldırabilmesi gerekmektedir. Bu belirtilen özelliğe ve düzenleme özelliğine sahip bir kontrol sistemi, “dayanıklı kontrol sistemi” olarak belirtilir [3]. Endüstriyel uygulamalar için geliştirilen sistemlerin çoğunlukla yük ve parametre belirsizlikleri altında çalışacağı dikkate alındığında, dayanıklılık kriterinin kontrol sistemlerinin tasarımında ne denli önemli olduğu ortaya çıkmaktadır.

Sistem performansını doğrudan etkileyen kontrol metodu seçilirken, kontrol edilecek sistemin modellenebilirlik durumu ve öngörülen işletim koşullarına bakılarak bir karar verilmelidir. Bu noktada sistemlere uygulanabilecek mevcut kontrol metotları, kontrol kuralının üretiminde sistem dinamiğinin kullanılıp kullanılmadığına bağlı olarak model tabanlı ve model tabanlı olmayan kontrol metotları olarak iki ana başlık altında incelenebilir.

1.1. Model Tabanlı Kontrol Metotları

Göz önüne alınan sistem parametrelerindeki olası belirsizlik ve işletim sırasındaki değişimler dolayısıyla sistem modellemesi tam olarak yapılamaz. Elde edilen sistem modeli, gerçek sistem davranışını belirli sınırlar içerisinde tanımlar. Bu durumda bile, model tabanlı olarak elde edilecek kontrol kuralı değişkenleri üzerinde yapılacak ayarlamalarla, gerçek sistemin belirlenen çalışma koşulları içerisinde kararlı ve istenilen performans gereksinimlerini sağlayacak düzeyde çalıştırılması sağlanabilir. Sistemlerde uygulanan model tabanlı kontrol metotları, temelde üç alt başlık altında ele alınabilir:

- a. Klasik kontrol metotları,
- b. Modern kontrol metotları,
- c. Dayanıklı kontrol metotları.

1.1.1. Klasik kontrol metotları

Kontrol edilecek sistemin tek giriş ve tek çıkışlı olması durumunda en fazla tercih edilen yaklaşım “klasik” olarak adlandırılan kontrol metotlarının kullanılmasıdır. Klasik kontrol metotlarında kontrol kuralı; kontrol sisteminin referans girişi ve ölçülen sistem çıkışı arasındaki sistem cevap hatası temel alınarak, hata tümlevi ve hata türevi büyüklüklerinin uygun şekilde seçilen genliği sistem dinamiği ve performans istekleri doğrultusunda belirlenen kazanç katsayılarıyla çarpılmasıyla elde edilmektedir.

Elde edilen kontrol kuralı yalnızca hatanın hesaplanan bir kazançla çarpılması ile oluşturuluyorsa mevcut kontrol metodu “P oransal kontrol”, hata ve hatanın tümlevi göz önüne alınıyorsa “PI oransal ve tümlev kontrol” ve hata ve hatanın türevi ele alınıyorsa “PD oransal ve türevsel kontrol” olarak adlandırılır. Hata, hata türevi ve hata tümlevinin dikkate alındığı en genel klasik kontrol kuralı “PID oransal, tümlev ve türevsel kontrol” olarak tanımlanmaktadır. K_p , K_i ve K_d sembolleri kontrolörün sırasıyla oransal, tümlev ve türevsel kazançlarının belirlenmesi için çeşitli metotlar kullanılmaktadır. Bu metotlar içerisinde en sık kullanılanı, kapalı çevrim kontrol sistemi kutuplarının sistem için öngörülen bant genişliği ve sönümlenme oranına göre konumlandırıldığı ve kazançların da elde edilen kutuplar göz önüne alınarak belirlendiği kutup yerleştirme tekniğidir.

Kontrol sistemi kutuplarının belirlenen konumlarını muhafaza etmelerini sağlamak amacıyla, kontrolcü kazançlarının sistem davranışıyla uyumlu olarak değiştirildiği uyarlamalı kontrol algoritmaları oluşturulmuştur. Bahsedilen güncelleme, çoğu kez katsayı ayarlama tekniği, yapay sinir ağları, bulanık mantık ve bu metotlarının iki veya üçünün bir arada kullanıldığı karma yapılar aracılığıyla gerçekleştirilmektedir [4,5].

1.1.2. Modern kontrol metotları

Birden fazla girdi ve çıktılı kontrol sistemlerinin tasarımı söz konusu olduğunda ilk akla gelen yaklaşım modern kontrol metotlarıdır. Modern kontrol yaklaşımında amaç, durum uzayı formunda ifade edilmiş sistem dinamik denklemlerini kullanarak ele alınan kontrol değişkenini istenilen değere getirecek kontrolör kazançlarının belirlenmesidir. Buna göre, dinamik davranışı n ($n \geq 1$) mertebeden bir diferansiyel denklem veya denklemlerle ifade edilen bir sistemin üç boyutlu uzaydaki hareketini tanımlayacak şekilde belirlenmiş n adet durum değişkeninden oluşan durum değişkenleri sütun matrisi, sistem girişleri sütun matrisi ve sistem çıktıları sütun matrisi ile durum geçiş matrisleri kullanılarak gerçekleştirilebilir [1].

Modern kontrol yaklaşımında kontrol sinyali, klasik kontrol metodunda olduğu gibi kapalı çevrim kontrol sisteminden beklenen bant genişliği ve sönüm değerleri doğrultusunda kutup yerleştirme tekniği gibi bilinen metotlar ile hesaplanan kontrolör kazançlarının durum değişkenleri veya çıktı değişkenleri ile çarpılması ve elde edilen niceliklerin toplanması ile oluşturulur.

Modern kontrol esaslı kapalı çevrim sistemlerde belirlenen sisteme özgü durum değişkenlerinin tamamı kontrol sinyali oluşturulurken kullanılmaktadır. Öte yandan, birçok pratik uygulamada bütün durum değişkenlerini ölçmek mümkün olmaz. Bu tip durumlarda, ölçülemeyen değişkenlerin kestirimi için Kalman filtresi gibi gözleyiciler kullanılır [6].

Durum ve çıkış geri beslemeli sistemler, klasik kontrol sistemlerine benzer şekilde kontrolör kazançlarının gerçek çalışma koşullarına uygun olarak ayarlanabilmesi, dolayısıyla avantajlı gözükmelerine karşın, sistem cevabındaki durağan durum hatasını tamamen ortadan kaldıramamaları nedeniyle özellikle konumlama hassasiyeti gereksiniminin yüksek olduğu uygulamalarda tercih edilmezler.

Sistem değişkenlerinin tamamının doğrudan ölçülememesi bu tip sistemlerin kullanımına sınırlama getirmektedir [6].

1.1.3. Dayanıklı kontrol metotları

Sistemde parametre belirsizlikleri ile sistem davranışını olumsuz yönde etkileyen bozucu girişler söz konusu olduğunda, dayanıklı kontrol sistemleri uygun bir çözüm gibi gözükmemektedir. Sistemlere uygulanan dayanıklı kontrol metotları, temelde iki alt başlık altında incelenebilir [7]:

- a. Lyapunov teoremi esaslı dayanıklı kontrol metotları,
- b. H_2 ve H_∞ normu esaslı dayanıklı kontrol metotları.

1.1.3.1. Lyapunov teoremi esaslı dayanıklı kontrol metotları

Kontrol sinyalinin ele alınan sistem için uygun olarak seçilen bir Lyapunov fonksiyonu uyarınca belirlendiği metotlar, genel olarak "Lyapunov teoremi esaslı kontrol metotları" olarak adlandırılabilir. Kaynaklarda bu başlık altında değerlendirilebilecek pek çok farklı yaklaşım bulunmakla birlikte, temelde iki tip Lyapunov teoremi esaslı kontrol metodundan bahsetmek mümkündür:

- a. Geri adımlamalı kontrol,
- b. Kayan kipli kontrol.

1.1.3.1.1. Geri adımlamalı kontrol

Tekrarlamalı bir kontrol metodu olan geri adımlamalı kontrol yaklaşımına göre kontrolör tasarlanırken, ilk olarak sistem dinamiğini tanımlayan denklemler alt üçgensel olarak ifade edilir. Sistemin dinamik denklemleri geri beslemeli forma dönüştürülebilir [8-10]. Geri adımlamalı kontrol tekniğinde, değişkenlerinin dinamiğini temsil eden diferansiyel denklemlerin her biri, ilk denklemden başlamak üzere bir sonraki denklemde dinamiği tanımlanan durum değişkeni kullanılarak kararlaştırılır.

Geri adımlamalı kontrol, sistem parametrelerindeki belirsizlikler ve bozucu girdilere karşı oldukça duyarsız bir kontrol sistemi elde edilmesini sağlar. Bir başka deyişle, sistem parametreleri ile gerçek değerler arasındaki farklar ve ayrıca sisteme dışarıdan

etkiyen kontrolsüz girdiler, kontrol sistemi performansında göze çarpan bir düşmeye sebep olmaz.

Son kontrol girdisini elde edebilmek için sistem dinamik denklemlerinin doğrusallaştırılmasını gerektirmemesi de metodunun bir diğer üstünlüğüdür. Ancak sistem dinamiğinin karmaşıklığıyla orantılı olarak kontrol girdisini elde etmek için daha çok ara işlem yapılması ve sonuçta ortaya çıkan ifadenin uygulama açısından karmaşık olması sebebiyle, bu metot fiziksel sistem uygulamalarında fazla tercih edilmez.

Kontrol sinyalini oluştururken gerçekleşmesi gereken tümlev ve türev işlemlerinin fiziksel sistemlere uygulanabilmesi için ayrık zamana çevrilmesi sırasında ortaya çıkabilecek gürültü büyümesi etkileri de geri adımlamalı kontrol yaklaşımının sıklıkla kullanılmasının önünde engel teşkil etmektedir [11, 12].

1.1.3.1.2. Kayan kipli kontrol

Genellikle tek giriş ve tek çıkışlı sistemlerin kontrolünde kullanılan metotlardan biri olan kayan kipli kontrol yaklaşımında amaç, durum uzayında tanımlanan bir kayma yüzeyinde, seçilen kontrol değişkeninin referans ve ölçülen değerleri arasındaki farklarını zamana bağlı türevlerini sıfır yapmak veya durum değişkenlerini tanımlanan bir denge konumuna taşımaktır. Bahsedilen ilk aşama “ulaşma aşaması” olarak adlandırılırken, ikinci aşama “anahtarlama aşaması” olarak bilinir.

Kayan kipli kontrol yaklaşımında kontrol sinyali, durum uzayında kayma yüzeyini ifade eden denklemin karesinden oluşturulan Lyapunov fonksiyonunu en aza indirgeyecek şekilde belirlenir. Kullanım esnasında sistemin kararlılığını koruyabilmek amacıyla hata veya durum değişkenlerini kayma yüzeyi üzerinde tutmak için kontrol kuralının sürekli genlik ve yön değiştiren bir kontrol sinyali üretmesi nedeniyle, uygulamada çatırtı denilen istenmeyen bir durum ortaya çıkmaktadır.

Çatırtı, kontrol edilen sistemde yorulmalara sebep olmakta ve sistemin ömrü ciddi oranda kısalmaktadır. Çatırtının azaltılması için çeşitli önerilerde bulunulmuş olup, belirtilen öneriler; aslında çatırtı ile kontrol kararlılığı arasında bir uzlaşma sağlanması esasına dayanmaktadır. Bir başka deyişle sistemin kararlılık payından bir miktar fedakârlık edilerek çatırtının şiddeti azaltılmaya çalışılır. Bu durum, çatırtıyı hissedilir oranda sönmemesine karşın, kontrol sisteminin dayanıklılığını oldukça azaltır. Bununla birlikte, geri adımlamalı kontrolde olduğu gibi göz önüne alınan durum değişkenlerinin tamamının ölçülmesi veya gerçek değerine en yakın şekilde kestirilmesi gerektiğinden ve kontrolcünün ayırık zamana çevrilmesi sırasında karşılaşılabilecek sorunlardan dolayı, kayan kipli kontrol metodu klasik kontrol yaklaşımları kadar tercih edilmez [13,14].

1.1.3.2. H_2 ve H_∞ norm tabanlı dayanıklı kontrol metotları

Klasik yaklaşımlar kullanılarak tasarlanan kontrol sistemleri, tasarımda göz önüne alınan çalışma koşulları altında kendilerinden beklenen kararlılık ve performans kıstaslarını yerine getirebilirler. Çalışma koşullarının değiştiği durumlarda, uyarlamalı yapılar sayesinde kontrolör kazançları anlık olarak güncellenerek sistemin kararlılığı korunmaya çalışılmaktadır. Ancak, sistemdeki parametre belirsizlikleri ve özellikle bozucu girişlerin büyüklüğü arttığında, geleneksel yaklaşımların başarılı olmadığı gözlenmektedir. Bu tip durumlarda sıklıkla başvurulan metotlardan biri de H_2 veya H_∞ normuna göre dayanıklı kontrolör tasarlamaktır.

Burada yapılan iş, özünde farklı çalışma koşullarında kararlılığını yitirmeden çalışabilecek birçok kontrol sisteminin görevini tek başına yapan bir kontrol sistemi elde etmektir [15]. Çok giriş ve çok çıkış uyarlamaları da bulunmakla birlikte genellikle tek giriş ve tek çıkış sistemler için sentezlenen H_2/H_∞ kontrolörler, doğrusallaştırılmış sistem dinamiği esas alınarak tasarlanır. Ortaya çıkacak kontrol sistemi için belirlenen kontrol girişleri ile bozucu girişlere uygulanacak ağırlık fonksiyonları karşılaştırıldıktan sonra, en aza indirgenecek sistem parametreleri karşılaştırılır.

Bahsedilen parametreler genellikle referans giriş ve ölçülen sistem çıkışı arasındaki fark, kontrolör sinyalinin genliği ve tasarlanan kontrol sistemi ile ulaşılmak istenen ideal sistem çıkışları arasındaki fark olup, bu niceliklerin de istenilen değer aralıklarında tutulması için uygun ağırlık fonksiyonları belirlenir.

H_2 ve H_∞ tipi kontrolörler klasik kontrolörlere göre sistemi daha geniş bir parametre değeri aralığında ve daha büyük genlikli bozucu girişler altında kararlı durumda tutabilmeleri nedeniyle son yıllarda oldukça yaygın kullanılmıştır. Ayrıca gelişen tasarım araçları sayesinde tasarımcının işi yalnızca ağırlık fonksiyonlarını belirlemeye kadar indirgenmiş ve hazır kodlar kullanılarak kontrolör matrislerini bulmak olanaklı hale gelmiştir.

Genel yaklaşım kontrolör tasarımının belirtilen normlardan birisi ele alınarak yapılması şeklinde olmakla birlikte, her iki normu da dikkate alarak sentezlenmiş dayanıklı kontrolörlere de rastlanmaktadır. Öte yandan, ağırlık fonksiyonlarının derecesi ve çalışma frekansı değerlerindeki artışa paralel olarak kontrolör matrislerinin boyutlarının da artması ve dolayısıyla daha yüksek işlem hızlarına gereksinim duyulması, kullanılan matris indirgeme metotlarına rağmen H_2 ve H_∞ norm tabanlı kontrolörlerin uygulama alanı fazla genişlememiştir. Bunun yanı sıra gereksinimleri en yüksek düzeyde karşılayacak kontrolörün elde edilmesi tekrarlamalı ve zaman alıcı bir işlemdir. Klasik metotların aksine kontrolör matrisleri elemanlarının çalışma sırasında gerçek zamanlı olarak güncellenememesi ve kontrol algoritmasında tümlev işlemi bulunmaması dolayısıyla durağan durum hatasının hiçbir zaman mutlak anlamda sıfırlanmaması, bu tip kontrolörlerin başlıca zayıf yanları olarak belirtilebilir [16].

1.2. Model Tabanlı Olmayan Kontrol Metotları

Kontrol sistemi tasarlanacak fiziksel sistemin matematiksel modelinin çıkarılabilmesi, kontrol sistemi tasarımında arzu edilen bir özelliktir. Sistemin dinamik davranışı çalışma koşullarının tamamında geçerli olacak şekilde tam olarak modellenemezse ve parametreler için elde edilen veya kestirilen değerler bir miktar belirsizlik içerse dahi, sistemin dinamik davranışını tanımlayan bir matematiksel

model kullanılarak analitik metotlarla daha hassas kontrol sistemleri tasarlamak mümkündür.

Diğer taraftan, bazı uygulamalarda ele alınan sistemin matematiksel modelini elde etmek oldukça zor, hatta kimi durumlarda olanaksızdır. Özellikle akışkan kontrollü sistemlerde ve toplumsal davranış yapılarını modelleme çalışmalarında, bahsedilen zorlukla sıkça karşılaşılır. Sistem modeline dayanan model tabanlı kontrol yaklaşımlarının çözüm üretmediği bu tip durumlarda “model tabanlı olmayan kontrol” başlığı altında sınıflandırılan metotlar kullanılmaktadır. Sistemler için gerçekleştirilen model tabanlı olmayan kontrol uygulamaları incelendiğinde, çalışmaların en fazla iki yaklaşım kullanılarak yapıldığı görülmüştür [17]:

- a. Yapay sinir ağları esaslı kontrol metotları,
- b. Bulanık mantık esaslı kontrol metotları.

Kaynaklarda, yapay sinir ağları ve bulanık mantık yapılarının ayrı ayrı kullanıldığı çalışmalar ağırlıkta bulunmakla birlikte, her iki metodun birlikte uygulandığı durumlar da bulunmaktadır [18].

1.2.1. Yapay sinir ağları esaslı kontrol metotları

Fiziksel sistemin matematiksel modelinin çıkarılamadığı ancak uygulanan girdilere karşılık çıktılarının ölçülebildiği durumlarda, toplanan giriş ve çıkış verileri kullanarak eğitilen yapay sinir ağları (YSA), ters sistem dinamiği mantığıyla sistemi kontrol etmek amacıyla oluşturulmaktadır. YSA’lar, insanın beyin nöronlarının birbirleriyle etkileşimlerinden esinlenilerek, giriş ve çıkış nöronlarından oluşan katmanlar sırasıyla giriş ve çıkış katmanları olarak tanımlanırken, ara nöronlardan oluşan ara katman veya gizli katmanlardan meydana gelir.

YSA yapısı giriş ve çıkışlar arasındaki ilişkisi doğrusal olmayan sistemin modellenmesinde kullanmak amacıyla geliştirilmiştir. Bu anlamda YSA’lar, “doğrusal olmayan fonksiyon tanımlama” yapıları olarak da bilinmektedir [19].

YSA kullanılarak yapılan doğrusal olmayan modellemede, öncelikle giriş ve çıkış katmanlarıyla ara katmandaki nöronların sayısı belirlenir. Bu aşamada, ara katmanın kaç paralel sıradan oluşacağı da kararlaştırılır. Daha sonra, yukarıda da bahsedildiği gibi sistem üzerinden bilgisayar benzetimleri yoluyla veya deneysel olarak toplanan giriş-çıkış verilerinden oluşturulan veri seti kullanılarak YSA eğitilir.

Burada “eğitim”den kasıt, sistem giriş ve çıkışları sırasıyla kontrolör olarak kullanılacak YSA'nın çıkış ve girişi olarak tanımlanarak belirlenen bir hata payı dahilinde geriye yayılım veya Hebb Öğrenme Kuralı gibi bir eğitim metodu yardımıyla nöronların birbiriyle etkileşimini sağlayan bağlar üzerindeki ağırlık fonksiyonlarının belirlenmesidir [19].

YSA tabanlı kontrolörler, uygulandıkları sistemin çalışma koşulları ağ eğitiminde kullanılan verilerin toplandığı çalışma aralığında bulunduğu sürece tatminkâr sonuçlar vermektedir. Ayrıca girdi sayısının çıktı sayısından daha fazla olabilmesine de olanak sağlayan ve çok giriş-çıkışlı sistemler için uygulanabilir özellikteki yapıları YSA'ların yaygın kullanımına neden olmuştur.

Öte yandan, kontrol sisteminden beklenen hassasiyet düzeyi arttıkça eğitimde kullanılan veri setinin eleman sayısını da artırmak gerekmektedir. Standart bir veri setinin eleman sayısı, genellikle 1000 ilâ 100,000 arasında değişmekte olup, eleman sayısı arttıkça YSA'nın eğitim süresi de ciddi oranda uzamaktadır.

Ayrıca, elde edilen kontrol sisteminin kararlılığını kontrol edecek belirli bir metot yoktur. Özellikle sistem parametrelerinin eğitim sırasında belirlenen aralıkların dışına çıkması durumunda, YSA kontrolörlü sistemi kararsız olmaktadır [40]. Bu sorunun üstesinden gelmek amacıyla model tabanlı kontrolör takviyeli karma kontrol sistemlerinin kullanımı yoluna gidilse de, YSA'lı kontrol sisteminin kararlılığını tam manasıyla garanti etmek mümkün olmamaktadır.

Eğitim süresinin uzunluğu ve özellikle kararlılıkla ilgili olumsuz özellikleri dolayısıyla, hassasiyet beklentisinin yüksek olduğu kritik uygulamalarda genellikle YSA esaslı kontrolör kullanımı tercih edilmez [20-22].

1.2.2. Bulanık mantık esaslı kontrol metotları

Giriş ve çıkışları aralarındaki matematiksel ilişkinin istenilen kesinlikte kurulamadığı sistemlerde dışarıdan uygulanan bir girişe karşılık çıkışının ne olması gerektiğini insan karar mekanizması benzeri bir kurguyla belirlemeye çalışan bulanık mantıklı yapılarda, giriş değeri “hızlı-yavaş”, “uzun-kısa” veya “0-1” gibi keskin bir sınıflandırmaya tâbi tutulmamaktadır. Bunun yerine girdi verileri, karşılaştırılan üyelik fonksiyonları aracılığıyla, örneğin “%20 hızlı, %80 yavaş” veya “%10 uzun, %35 orta, %55 kısa” gibi “bulanık” bir şekilde betimlenir. Böylelikle, belirlenen sınır değerlerin arasındaki girdilerin, doğruluk değeri yüksek ve daha hassas çıktılara neden olması sağlanmış olur [17].

Çok giriş ve çıkışlı kontrol sistemi uygulamaları da bulunmakla birlikte çoğunlukla tek giriş tek çıkışlı kontrol sistemlerinde kullanılan bulanık mantıklı kontrolörlerde, giriş değişkenleri genellikle hata ve hatanın türevi, çıkışı ise kontrol sinyali olmaktadır. Bulanık mantık, esas itibariyle çalışma koşulları ile tasarımcının deneyim ve bilgisi çerçevesinde oluşturulan kural tabanına göre kararların verildiği ve sonucunda kontrol sinyalinin oluşturulduğu bir metodolojidir. Bulanık mantık esaslı kontrol, temelde üç ardışık aşamadan oluşur [17]:

- a. Bulanıklaştırma,
- b. Karar mekanizması,
- c. Durulaştırma.

Kontrolör girişlerinin sayısal değerleri, bulanıklaştırma aşamasında tanımlanan sınıflandırma seviyelerine göre üyelik fonksiyonları aracılığıyla karar mekanizmasında değerlendirilmeye uygun büyüklüklere dönüştürülür. Dönüştürülmüş giriş verilerini kullanan karar mekanizması, mevcut durumda hangi kuralların uygulanması ve kontrolör sinyalinin ne olması gerektiğine karar verir. Nihayet, karar mekanizması tarafından verilen kararlar durulaştırma aşamasında nicel büyüklüklere dönüştürülerek kontrol sinyali oluşturulur [17, 19].

Bulanık mantıklı kontrolörler, dinamik davranışı güçlükle modellenebilen sistemler için tasarlanır. Kontrol hassasiyetinin çok yüksek olmadığı uygulamalardaki

performanslarına karşın, YSA esaslı yapılarda da olduğu gibi nihai kontrol sistemlerinin kararlılığını garanti edecek tutarlı bir metot bulunmamasından dolayı, bulanık mantıklı kontrolörler kritik uygulamalarda genellikle tercih edilmemektedir. Ayrıca, sınıflandırma seviyelerinin kararlaştırıldığı ve üyelik fonksiyonlarının belirlendiği çalışma aralıkları dışındaki işletim durumlarında yetersiz kalmaları da, bulanık mantıklı kontrolörlerin çoğunlukla benzetim ortamlarında kalması ve fiziksel uygulamalara taşınamaması sonucunu doğurmuştur. Öte yandan, bulanık mantıklı kontrol sistemlerinin değişen çalışma koşullarına uyum sağlayabilmesi ve kararlılığının garantilenmesi amacıyla, parametre değişikliklerine uyumlu üyelik fonksiyonlarının uygulanması gibi farklı tasarım metotları denenmiştir [23-25].

1.3. Tezin Amacı

Geliştirilecek kontrol sisteminin performansının yüksek olması ve sistem kararlılığının belirlenen çalışma süresinin tamamında sağlanabilmesi için, öncelikle model tabanlı kontrol metotları tercih edilmelidir. Sistem modelinin çıkarılmasının güç olduğu durumlarla parametre değişiklikleri ve öngörülemeyen dinamik davranışların ortaya çıktığı hallerde ise, model tabanlı olmayan metotlar uygun tasarım alternatifleri sunabilmektedir.

Ayrıca, yukarıda da bahsedildiği gibi, değişken koşullar altındaki üstün performans özelliklerine karşın bahsedilen metotların hiçbiri klasik kontrol yaklaşımları kadar rağbet görmemiştir. Bu durum, aslında klasik metotların basitlik ve uygulama kolaylığından kaynaklanmakta olup, bozucu girişlere karşı sistem dayanıklılığın önem kazandığı durumlarda dayanıklı kontrol metotları da özellikle son yıllarda daha fazla önem kazanmaktadır. Bundan dolayı, tezin çalışma alanı dayanıklı kontrol olarak belirlenmiştir. Dayanıklı kontrol metodu hakkında verilen bilgilerin ışığı altında verilen bir fiziksel sistem üzerinde yapılan simülasyon çalışmalarla bu sıcaklığını koruyan sınırlı doğrusal uzay üzerinde $\|H\|_\infty$ en uygun metot tabanlı dayanıklı kontrol analizi ve μ -sentez tabanlı D-K tekrarlama ile gerçek zaman uygulamasına yardımcı olacağı hedeflenmiştir.

BÖLÜM 2. KAYNAK ÇALIŞMASI

1980'lerin sonuna doğru H_∞ en uygun kontrol metodu tabanlı dayanıklı kontrol (RC) ile ilgili pek çok makale yayımlanmıştır. Bu metot ile ilgili kaynaklar tarihsel ve kuramsal gelişim sırasına göre verilerek bu çalışmanın amacına uygun olarak değerlendirilerek kullanılmaya çalışılmıştır. Ayrıca çalışmada simülasyon çalışmalarına katkısı olan araştırmalar da verilmiştir.

H_∞ en uygun kontrol metodunun ilk çözümü, Francis [26] ile Francis ve Doyle [27] tarafından ele alınmıştır. Daha sonra, Doyle ve ark. [28] Riccati denklemleri ile, Hung [29] model eşleme metodunu ve Green ve ark. [30] da J spektral çarpanlarına ayırma ile model eşleme metodunu kullanmışlardır.

H_∞ model eşleme problemi, Nevanlinna-Pick ve Nehari problemlerinin ortak özelliği olan, kontrol edilen sistemin modelini kararlı duruma indirgeyerek çözülebilir [31]. Problemlerin ortak yapısı gereği önce γ_{opt} en uygun üst sınır değeri bulunduktan sonra kontrolör tasarımı yapılır. Ancak her iki çalışmada da bazı sınırlayıcı durumlar vardır.

Doğrusal matris eşitsizliklerinin (LMI) temelini 1890 yılında ilk Lyapunov tarafından kararlılık analizinde kullanılmak üzere ortaya çıktığı söylenebilir [32]. LMI sayısal çözümü için Nesterov ve Nemirovski [33] tarafından geliştirilen metot, H_∞ en uygun kontrol probleminin çözümünün elde edilmesini ve konunun gelişmesini sağlayan en önemli etken olmuştur. Aynı zamanda H_2 en uygun kontrol, kutup yerleştirme, dayanıklı kutup yerleştirme vb. bazı kontrol problemlerinin LMI ile çözülebileceği gösterilmiştir [34-36]. Matlab programının içine "LMI Control Toolbox" eklemeleri ile yukarıdaki kontrol problemlerini ayrı ayrı veya bir arada ele alıp sayısal olarak çözümlenmeleri bu konudaki son gelişmeleri oluşturur [35].

Zames [38-39] tarafından ortaya atılan küçük kazanç teoremi, RC ile ilgili çalışmalarda başlangıç noktası olarak kabul edilir. Bu çalışma zamanla değişmeyen doğrusal (LTI) geri beslemeli sistemlerde kararlılık, Nyquist kriterleri kullanılarak değerlendirilmiş ve bunun sisteme etki eden sinyallerin yükselmeleri ve gecikmelerinin miktarına bağlı olarak değişimi incelenmiştir. Bu çalışma, yapısal olmayan dinamik belirsizlikler içeren sistemlerin dayanıklı kararlılık testinde kullanılmıştır.

Safanov [40], belirsizliklerin normlarla sınırlandırıldığı belirsizlik içeren sistemlerde dayanıklı kararlılık (RS) değerlendirmeleri yapmış, RC'de tekil değerlerin önemli bir araç olduğunu ortaya koymuştur. Yapısal olmayan belirsizlik içeren sistemler için elde edilen sonuçlar, yapısal belirsizlik içeren sistemlerde RS için yeterli şartların türetilmesinde kullanılmıştır.

Doyle [41], MIMO geri beslemeli kontrol sistemlerinin duyarlılığını ve dayanıklılığını tekil değerler, tekil vektörler ve matris normları ile değerlendirmiştir. Bu araçlarla, SISO sistemlerin frekans tanım alanında kararlılığı ve performans değerlendirmesinde kullanılan Nyquist kriterleri gibi skaler değerlerle MIMO sistemlerin performans değerlendirmesi yapılmıştır.

Siljak [42], RC sistemlerinin parametre uzayından faydalanarak hem karakteristik denklem yaklaşımı hem de Lyapunov ve Riccati yaklaşımı ile ilgili sonuçlar elde etmiştir. Bu sonuçlar RS testinin çeşitliliği için kaynak sağlamıştır. Bununla beraber parametre uzayı yaklaşımı ile tanımlanan belirsizlikler kenar ve köşelerden dolayı RS analiz probleminin çözümünü zorlaştırmıştır. Bundan dolayı, araştırmacılar analiz probleminde kesin değerler yerine üst ve alt sınır değeri geliştirecek çeşitli algoritmalar üzerinde çalışarak bu problemi aşmaya çalışmışlardır.

Doyle başka bir çalışmasında [43], belirsizlik içeren doğrusal sistemlerin dayanıklı performans (RP) ve RS analizini incelemiş ve bunun tekil değerlerini temel alan yeni teknikler geliştirmiştir. Belirsizlik içeren sistemlerin RS olduğu üst ve alt sınırlar belirlenmiş, uygun hesaplama metotlarına duyulan ihtiyaç vurgulanmıştır.

Stain [44], MIMO kapalı çevrimli kontrol sistemlerinde performans ve dayanıklılık gereksinimlerini incelemiş, frekansa bağlı olarak değişen bu gereksinimleri belirtmek için ağırlıklı fonksiyonlara duyulan ihtiyacı vurgulamıştır.

Doyle diğer çalışmasında [45], yapısal olmayan belirsizlik ve parametre değişimleri içeren sistemlerde RP için analiz ve sentez teknikleri geliştirmiştir. Yapısal tekil değerleri temel alarak geliştirilen bu metotta, parametre değişimlerinin gerçel olduğu kabul edilmiştir.

Francis [46], MIMO kapalı çevrimli kontrol sistemlerinde, H_∞ kontrol teorisini incelemiş, kapalı çevrim transfer fonksiyon matrisinin H_∞ normunu minimize eden kontrollerine değinmiştir.

Packard ve Doyle tarafından [47], yapısal tekil değerlerin alt sınırı için alternatif hesaplanma algoritması geliştirilmiştir. Bu algorithmada tekil değerler öz değerlerle beraber değerlendirilerek güç metodu oluşturulmuştur.

Gaston ve Safanov [48], yapısal belirsizlik içeren sistemlerde, sistemin kararsız olduğu belirsizlik sınırını gösteren kararlılık payının hesaplamasına yönelik bir algoritma geliştirerek, tutuculuğu azaltmaya çalışmışlardır. Bu algoritmanın hem gerçel hem de kompleks belirsizlik içeren sistemlerde iyi sonuçlar verdiği gözlenmiştir.

Doyle ve Glover tarafından [49], standart H_∞ kontrol probleminde, kapalı çevrim transfer fonksiyonunun H_∞ normunu minimize eden kontrolörlerin basit durum uzayı ifadesi türetilmiştir. H_∞ kontrol problemi çözümünde Riccati denklemleri kullanılmış ve kapalı çevrimli sistemin verilen H_∞ norm sınırı altında tutulması için gereken şartlar belirlenmiştir. Bu şartları sağlayan bütün kontrolörler doğrusal kesirli dönüşümle (LFT) ifade edilerek, sistemin kararlılığı serbest parametrelerle ayarlanabilir duruma getirilmiştir.

Doyle ve ark. tarafından [50], LFT ve yapısal tekil değerler kavramı incelenmiş, RP analizinde kullanılan temel çevrim teoremi türetilmiştir. İleri kontrol metotlarında doğrusal kesirli dönüşümün ve bunun doğrusal olmayan sistemler için genelleştirilmiş formunun önemi vurgulanmıştır.

Fan ve Tits tarafından [51], yapısal belirsizlik içeren sistemlerde yapısal tekil değerlerle dayanıklı performans değerlendirmesi incelenmiştir. Burada, μ -analizi neticesinde bulunan ve sistemi kararsız yapan belirsizliklerin üst sınır değeri ile sistemin nominal performansını gösteren kapalı çevrimli sistemin H_∞ normu arasındaki ilişki irdelenmiştir.

Kwakernaak [52], kapalı çevrimli kontrol sistemlerinde, sistem performans hedeflerini ağırlıklı fonksiyonlarla belirtmiş ve sistemi bu hedeflere ulaştıracak H_∞ kontrol metodundan söz etmiştir. Sistem gereksinimlerinin frekansa bağlı olarak değişimi vurgulanmış, standart H_∞ kontrol metodu, karma duyarlılık problemi olarak yeniden ele alınmıştır.

Green [53] ve Zhou [54], dayanıklı kontrol probleminde, en uygun H_2 ve H_∞ kontrol teorisi ile belirsizlik içeren sistemlerin dayanıklı kararlılık ve performansını incelemişlerdir. Dayanıklı kontrol problemi, durum-uzayı H_∞ en uygun kontrol problemi olarak ele alınmıştır. H_∞ kontrol problemi çözümüne en uygun ve alt en uygun olmak üzere iki yaklaşımla ulaşılmış, birbirlerine göre üstünlükleri tartışılmıştır.

Young [55], μ -sentez probleminde yapısal belirsizliklerin karma olması durumunda, yapısal tekil değerlerin üst sınırının hesaplanmasındaki zorluklara değinmiştir. Gerçek belirsizliklerin varlığında üst sınır hesaplamasında sürekliliğin sağlanamadığı, bunun neticesinde hesaplamanın zorlaştığı belirtilmiştir. Bu problemi aşmak için farklı yapılar oluşturulmuş ve bunların çözümüne dair hesaplama algoritmaları geliştirilmiştir.

Lof [56], akış kanalı sürecinde oluşan belirsizlikleri incelemiş, deneysel sonuçlardan elde edilen bilgilerle sistemin belirsiz modelini kurmuştur. Sistemde parametre

değişiminden kaynaklanan belirsizliklere göre oluşturulan bu model kümesinin sistem giriş sinyaline verdiği cevaplar zaman tanım alanında ve açık çevrim transfer fonksiyonu frekans tanım alanında Nyquist eğrisinde gösterilerek, belirsizlik bölgeleri incelenmiştir. Belirsiz model kümesinin kökleri kök yer eğrisinde gösterilmiş böylece parametre belirsizliği ve sistemin kararlılığı arasındaki ilişki yorumlanmıştır.

How [57], sistemde oluşan parametre belirsizliklerine karşı sistemin dayanıklı kararlılık şartları ve bu şartları sağlayacak kontrolör metotlarına değinmiştir. Belirsizlik içeren sistemin dayanıklı kararlılığı için Lyapunov kararlılık şartları belirtilmiş, bunu sağlayan kontrolör olarak Popov kontrolörü incelenmiştir. Fiziksel sistem olarak iki kütle ve yaydan oluşan kontrol sistemi ele alınmış, sistemin kontrolü LQG ve Popov kontrolörler ile yapılmış ve sonuçlar karşılaştırılmıştır.

Banjerdpongchai [58], dayanıklı kontrol problemi için durum uzayı yaklaşımı ile oluşturulan kontrolör tasarım metotları incelemiştir. Burada doğrusal matris eşitsizliği metodu incelenmiş, H_2 dayanıklı performans analizi metodu ve H_2 Popov kontrolör tasarım metodu birleştirilerek yeni bir tasarım metodu olan ikili doğrusal matris eşitsizliği metodu ile en uygulama problemine yeni bir yaklaşım getirilmiştir.

Clausen [59], dayanıklı kontrolör tasarımında dayanıklılık sentezi ile yeni yaklaşımlarda bulunmuştur. Gerçek belirsizlik içeren sistemlerin D,G-K tekrarlama ile yapılan dayanıklılık sentezinin hesaplama zorluklarına değinilmiş buna alternatif bir metot olarak μ -K tekrarlama ile geliştirilmiştir. Fiziksel sistem olarak savaş uçağı modeli seçilmiş, bu sistemin yükselme açısı ve manevra açısı kontrolü; D,G-K tekrarlama ve μ -K tekrarlama tabanlı dayanıklı kontrolör tasarım metotları ile yapılmış, sonuçlar karşılaştırılmıştır. Elde edilen sonuçlara göre sistemin, μ -K tekrarlama tabanlı dayanıklı kontrolör ile daha iyi sonuçlar verdiği gözlenmiştir.

Brito [60], birotor helikopter modelinin yörünge takibini, yükselme açısındaki değişimini, gövde açısındaki değişimini dayanıklı kontrol metotları kullanarak kontrol etmiştir. Kontrolör tasarım metodu olarak LQR ve H_∞ kontrol metodu kullanılmıştır. Simülasyon sonuçları karşılaştırılmış, sisteme etki eden bozucu etkiler düşünüldüğünde H_∞ kontrol metodunun daha iyi sonuç verdiği gözlenmiştir. Bu

çalışmada nominal model kullanılmış, sistem modelinden kaynaklanan belirsizlikler göz ardı edilmiştir.

Oliveira [61], “dört motorlu uçak” sisteminde, dayanıklı kontrolü kullanılarak sistemde yörünge takibi hedeflenmiştir. Sistemde ölçülemeyen sinyallerin kestirimi için Kalman filtresi (KF) tasarımı yapılmış, KF ve LQ kontrolör ile birlikte sistemin kararlılığı sağlanmıştır. Bu metotta, sistemin matematiksel modelinin ve parametrelerin gerçek modeli tam olarak yansıttığı kabul edilmiştir. Yüksek frekanslarda sistem modelinden kaynaklanan belirsizliklerin etkisinin arttığı düşünüldüğünde bu kontrolörün sistemi kararlı kılmakta zayıf kaldığı vurgulanmıştır. Belirsizlik içeren bu sistemi belirsizliklere karşı dayanıklı kılabilecek daha güçlü kontrol metotları olan H_∞ kontrol ve μ dayanıklılık sentezi ile sistemin dayanıklı kararlılığı hedeflenmiştir. Sistemin performans hedefleri ağırlık fonksiyonlarıyla belirlenmiş, buna ulaştıracak H_∞ kontrol metodu nominal sistem için uygulanmıştır. Sistemdeki belirsizlikler düşünüldüğünde bu metodun da yetersiz kaldığı görülmüş, yapısal belirsizlik içeren sistemin dayanıklılık sentezi ile kontrolü yapılarak, sistemin bu etkilere karşı dayanıklılığı sağlanmıştır.

Rödönyi [62], sistemin dayanıklı kontrolü için doğrusal parametre değişimli sistemlerde (LPV), dayanıklılık sentezinde yeni metot olan D-K-W tekrarlama yöntemini incelemiştir. Burada klasik dayanıklılık sentezi olarak bilinen D-K tekrarlama metodundan farklı olarak sistem performans hedeflerini ve sistemdeki belirsizliğin frekansa bağlı değişimini gösteren ağırlık fonksiyonları da uygun değerlere getirilerek, sistemin dayanıklı kararlılığını ve performansını sağlayan dayanıklılık sentezi kontrol problemine yeni bir çözüm getirilmiştir. Seçilen elektrikli fren sistemine bu iki metot uygulanarak sonuçlar değerlendirilmiş, D-K-W tekrarlama ile yapılan dayanıklılık sentezinde klasik metoda göre daha iyi sonuçlar alınmıştır.

Yang [63], gemi dümeni açısının kontrolünü dayanıklı kontrol problemi olarak ele almıştır. Sistemin, dışarıdan gelecek bozucu etkilere ve model belirsizliklerine rağmen verilen yörüngeyi takip etmesi istenmektedir. Bunun için, ilk olarak sistemi performans hedeflerine ulaştıracak karma H_∞ kontrol metodu ele alınmıştır. Sistemde belirsizliklerin varlığında tasarlanan bu kontrolör, sistemin dayanıklılığını sağlamada

zayıf kalmıştır. Bu nedenle belirsizlik içeren sistem modeli ile RS genel yapısı oluşturulmuş, dayanıklı sentez kontrol metodu ile sistemin dayanıklı kararlılığını ve performansını sağlayan kontrolör tasarlanmıştır.

Krueger [64], sistemdeki belirsizliklerin indirgenmesi metodunu ve dayanıklı kontrolör sentezini incelemiştir. Burada, belirsizliklerin indirgenmesi duyarlılık teorisi kullanılarak yapılmıştır. Bu metotta açık çevrim transfer fonksiyonu öz değerlerine etkisi aynı olan parametreler gruplandırılarak bunların öz değerlere olan etkisi ölçülmüştür. Bunlardan etkisi büyük olan gruplar uygun şekilde ölçeklendirilerek, dayanıklı kontrolör sentezi ile sistemdeki bütün belirsizliklere karşı sistemin dayanıklılığı hedeflenmiştir. Fiziksel sistem olarak füze modeli seçilmiş, H_∞ kontrol metodu ile kontrolü yapıldıktan sonra sistemdeki belirsizlikler indirgenmiş ve bunlarla tanımlanan belirsizlik içeren sistem için dayanıklılık sentezi ile kontrolör tasarlanmıştır.

Lanzon [65], sistemin performans ağırlıklı filtrelerini maksimize ederek klasik dayanıklılık sentezi problemine yeni bir yaklaşım getirmiştir. Her bir performans kriteri için ayrı seçilen ağırlık fonksiyonları bir araya getirilerek yeni bir form oluşturulmuştur. Ağırlık fonksiyonları maksimize edilerek, dayanıklılık sentezi nokta tabanlı en uygununu bulma problemi olarak yeniden ele alınmıştır. Aynı şekilde H_∞ döngü şekillendirme kontrol metodu için de alternatif metotlar ileri sürülmüştür. Tasarımcının her bir frekansta ağırlık fonksiyonlarının maksimum tekil değer genliğine doğrudan müdahale edebileceği bu metotla, sistemin kararlılık payının artırılması hedeflenerek sistemin belirsizliklere dayanıklı hale getirilmesi amaçlanmıştır.

Nawash [66], otonom robotların kontrolünde, klasik metotlar olarak bilinen oransal (P), oransal tümler (PI) kontrolörleri ve daha yeni bir metot olan H_∞ kontrol metotlarını kullanmıştır. Sistemin yatay ve düşey ekseninde yer değiştirmesi, hızı ve ivmesi incelenmiş sonuçlar birbirleriyle karşılaştırılmıştır. Sisteme etki eden bozucu sinyallerin varlığında H_∞ kontrol metodunun klasik metotlara göre daha iyi sonuçlar verdiği gözlenmiştir. Sistem modelinden kaynaklanan belirsizlikler göz ardı edilmiş, sistemin dayanıklılık analizi yapılmamıştır.

Boulet [67], büyük esnek uzay aracının kontrolünde, H_∞ kontrol ve dayanıklılık sentezi metodunu kullanmıştır. Sistemin belirsizlik içeren modeli deneysel verilerden elde edilen bilgilerden faydalanarak, asal çarpanlarla tanımlanmıştır. Sistemdeki eyleyicilerin modellerindeki belirsizliklerin de eklenmesiyle dayanıklı kontrol genel yapısı oluşturulmuştur. Nominal sistem için tasarlanan H_∞ kontrolün sistemin dayanıklılığını sağlamada yetersiz kalması üzerine dayanıklılık sentezi metodu ile sistemi dayanıklı kılmak hedeflenmiştir.

Yazıcı [68], doğrusal kuadratik kontrol metodunu ters sarkaç sistemine uygulamış, aynı anda birden fazla parametrenin değiştiği kabulüyle sistemde kararlılığın bozulduğu üst sınır değerini μ -analizi metoduyla elde etmiştir. Bunun neticesinde nominal sistemin kararlılığını sağlayan LQR kontrolcünün parametre değişimlerine karşı sistemin kararlılığını sağlayamadığı görülmüştür. Sistemdeki belirsizliklere karşı sistemin dayanıklı kararlılığını ve performansını sağlayan RC metotlarının tercih edilmesi önerilmiştir.

Cardoso [69], ters sarkaç sisteminin hataya dayanıklı kontrolü için model tabanlı bir yaklaşım sergilemiştir. Bu metotla, hata tanısı kontrolör tasarım metoduyla birleştirilerek oluşturulan dayanıklı kontrol tekniği ters sarkaç sistemine uygulanmıştır. Burada amaç hataların etkisine karşı sistemin duyarsızlığını sağlayan dayanıklı kontrolörü ve hata algılayıcı filtrelerin tasarımını yapmaktır. Belirsizlik içeren sistem modeli, sistem girişine çarpım olarak etki eden yapısal olmayan belirsizliklerle ifade edilmiştir. Sistemdeki belirsizlikler, performans ağırlık fonksiyonları ve hata algılayıcı filtrelerle RC genel yapısı kurulmuş, dayanıklılık sentezi metodu ile sistemin dayanıklı kararlılığı ve performansı sağlanmıştır.

Pourshaghghi ve ark. [70], MIMO sistemlerin kontrolünde kullanılan, H_∞ kontrol probleminde pratik yaklaşımları incelemişlerdir. LQR kontrolör ile tek kollu ters sarkaç sisteminin kararlılığı sağlanmıştır. Tasarlanan LQR geri besleme kontrolörü en uygun duruma getirmek için genetik algoritma kullanılmıştır. Kontrol maliyetini düşürmek için sistemin kapalı çevrim transfer fonksiyonunun H_∞ normunu minimize ederek, sistemin maliyet fonksiyonunu düşürmek hedeflenmiştir. Bunu mümkün kılan ikinci geri besleme kontrolörü LMI kontrol metodu ile bulunmuştur. Genetik

algoritmanın dayanıklı kontrol metotlarında en uygun ağırlık fonksiyonlarının bulunmasında kullanılabileceği vurgulanmıştır.

Linden [71], mekanik sistemlerde kuru sürtünmenin varlığında sistemi kararlı yapacak kontrolör tasarım metotlarını incelemiştir. Fiziksel sistem olarak seçilen tek kollu ters sarkaç sisteminin sisteme etki eden kuru sürtünmeye karşı duyarsız kalması istenmektedir. Sistemde kuru sürtünmenin olmadığı durum için H_∞ kontrolör tasarlanmış, sistemin bu kontrolör ile referans izleme hatasını minimize edemediği gözlenmiştir. Diğer bir durumda sisteme etki eden kuru sürtünme kontrol problemine dahil edilmiş ve buna göre tasarlanan H_∞ kontrolörün sistemi kuru sürtünmenin bozucu etkisine karşı duyarsız yaptığı ama referans izleme hatasını minimize edemediği gözlenmiştir. Bu sonuçlara göre referans izleme hatası ve sistemin bozucu etkilere duyarsızlığı arasında performans değişimi belirlenmiş, buna göre tasarlanan H_∞ kontrolör ile sistemden beklentilere göre iki performans hedefine de ulaşması sağlanmıştır.

Cheang ve Chen [72], tek kollu ters sarkaç sisteminin kontrolünde H_∞ açık çevrim şekillendirme metodunu kullanarak, sistemin nominal performansı ve dayanıklı performansı arasında, beklenen performans hedeflerine göre, geçiş yapmasını sağlamışlardır. Bu problemin çözümünde tekrarlama yapılmadan çözüme ulaşılmıştır. Simülasyon sonuçları tasarlanan kontrolörün istenilen hedefleri karşıladığı görülmüştür.

Kim [73], ters sarkaç sisteminin kontrolünde klasik bir metot olan PID kontrolör, LQ kontrolör ve dayanıklı kontrol metotlarından biri olan H_∞ kontrolör kullanmıştır. PID kontrolörün endüstriyel uygulamalarda çok yaygın kullanılmasına rağmen dışarıdan gelen bozucu etkilere karşı sistemin duyarsızlığını sağlayan H_∞ kontrolörün, PID kontrolörden daha üstün olduğu vurgulanmıştır.

Çavdaroğlu ve Olgaç [74], ters sarkaç sisteminde oluşan zamanlama hatalarını incelemişler ve sistemin referans takibini sağlamaya çalışmışlardır. Bunun için sistemde oluşan zamanlama gecikmeleri ile sistemin belirsizlik içeren modelinin kurulması gerekmektedir. Bu amaçla, belirsiz sistemin karakteristik köklerini

gruplandırarak, belirsizlik içeren sistemi modellemişlerdir. LQR kontrolörle sistemde zamanlama hatalarına karşın referans takibi sağlanmıştır.

Kajiwara ve ark. [75], tahrik edilen bir kolun ucuna yerleştirilen ters sarkaç sisteminin durum uzayının doğrusal parametre değişim (LPV) tabanlı katsayıların belirsizliği LFT kullanılarak H_∞ kontrolü yapmışlardır. LPV tabanlı LFT'li sistemin kontrolünde H_∞ normunu minimize edilerek, sistemin nominal performansının en uygun duruma getirdiği gözlenmiştir. Belirsizlikler düşünüldüğünde ise dayanıklılık sentezi daha iyi sonuç vermiştir. Bu kontrol tasarım metotlarının özellikle kontrol eyleminin sınırlandırıldığı durumlarda iyi sonuçlar vermediği vurgulanmıştır.

Zhang ve Lin [76], tek kollu ters sarkaç sistemini H_∞ karma duyarlılık problemi olarak ele almışlardır. Ters sarkaç sistemi minimum fazlı olmayan bir sistem olduğundan yapısı gereği daha az dayanıklı bir sistem olarak kabul edilmiştir. Minimum fazlı olmayan sistemlerde bant genişliğinin daha fazla olduğu bundan dolayı bu tip kararlı olmayan sistemlerin kontrolünün daha geniş bant aralığına ihtiyaç duyduğu vurgulanmıştır. Bu sistem için tasarlanan H_∞ kontrolör minimum olmayan sıfırlar yüzünden sistem performansını sağlayamamıştır.

Liu ve Zhou [77], ters sarkaç sisteminin kontrolünde H_∞ açık çevrim şekillendirme metodunu kullanmışlar ve sistemin LMI ile kontrolü için yeterli şartlara değinmişlerdir. Sistemin kontrolünde genetik algoritma kullanılarak açık çevrimi şekillendiren ağırlık fonksiyonları en uygunu bulunmuş, simülasyonlar sonucu sistemin beklenen performans hedeflerine ulaştığı gözlenmiştir. Dayanıklılık analizine ve sentezine yer verilmediğinden sistemdeki belirsizlikler altında sistemin dayanıklılığı sağlayıp sağlamadığı hakkında bir yorum yapılmamıştır.

Phillips [78], H_∞ ve LQR kontrol metotlarını çifte sarkaç sistemine uygulamışlardır. Sonuçlar zaman ve frekans tanım alanında karşılaştırılmıştır. Burada LQR kontrolörün, sistemi giriş sinyaline etki eden bozucu sinyallere karşı düşük frekanslarda duyarsız kıldığı, yüksek frekanslarda ise duyarsızlığı sağlayamadığı görülmüştür. H_∞ metodunun ise yüksek frekanslarda da sistemi bozucu etkilere karşı duyarsız kıldığı görülmüştür.

Bogdanov [79], iki kollu ters sarkacın kontrolünü, durum uzayı Riccati denklemleri (SDRE), en uygun yapay sinir ağları (NN) , LQR-NN yaklaşımı ve NN-SDRE metotları ile yapmıştır. SDRE yaklaşımıyla sistem durum uzayı dinamikleri yeniden düzenlenerek problem LQR kontrol problemine dönüştürülmüştür. Bu metotla doğrusal olmayan en uygun kontrol problemlerinin çözümü mümkün kılınmış, sistemin performansı iyileştirilmeye çalışılmıştır. Sistemde belirsizlikler düşünüldüğünde bu metotların yetersiz kaldığı görülmektedir.

Henrik ve Poulsen [80], iki kollu ters sarkaç sisteminin kontrolünü, H_∞ kontrol ve dayanıklılık sentezi metodu ile yapmışlardır. Nominal sistemin performans hedefleri değiştirilerek, sistemi bu farklı performans hedeflerine ulaştıracak kontrolör, H_∞ kontrol metoduyla bulunmuştur. Bu amaçla üç farklı grup ağırlıklı fonksiyonlarla sistemin performans hedefleri belirlenmiştir. Belirsizlik içeren sistemin modeli oluşturulmuş, sistemi dayanıklı kararlı yapan ve dayanıklı performans hedeflerine ulaştıran kontrolör, dayanıklılık sentezi metodu ile tasarlanmıştır. Tasarlanan bu kontrolörlerle sistem deneysel ortamda test edilmiş ve sonuçlar karşılaştırılmıştır. Nominal performans ile dayanıklılık arasındaki değişimin çok kısıtlı bir alanda olduğu vurgulanmıştır.

Zhong ve Röck [81], iki kollu ters sarkaç sisteminin pasif kontrolü ve enerji tabanlı kontrolünü incelemişlerdir. Sistemin kararlılığı sağlanmasına rağmen sarkaçların sabit bir noktaya göre asimptotluğu sağlanamamıştır. Bu problemin LQR kontrolör ile giderilebileceği, sistemdeki belirsizliklerin olduğu durumda bunun da yetersiz kalacağı belirtilmiştir.

Henrik ve Poulsen bir diğer çalışmalarında [82], yine ikili ters sarkaç sisteminin, sistemde oluşan hatalara karşı kararlılığını ve istenilen performans hedeflerini sağlamak için pasif hata tolerans kontrol metodunu uygulamışlardır. Bu metot YJBK parametreleştirmesine dayanmaktadır ve sisteme H_∞ kontrolör, gözlemci tabanlı bir formda uygulanmıştır.

Eltohamy ve Kuo [83], üç kollu ters sarkacın dik pozisyonda kararlılığını hedeflemişlerdir. Bunun için tasarlanan LQR kontrolör ile sarkacın istenilen konumda kararlılığı sağlanmıştır. Problem kurulumunda fiziksel sınırlar göz ardı edildiğinden LQR kontrolör, sistemin kararlılığını sağladığı halde sistemi dayanıklı yapamamıştır. Sistemdeki kısıtlamalar, doğrusal olmayan dinamiklerden kaynaklanan belirsizlikler düşünüldüğünde, bunlara rağmen sistemi kararlı kılacak dayanıklı kontrol metotlarına duyulan ihtiyaç vurgulanmıştır.

Furuta ve ark. [84], oynamaz zemin üzerine sabitlenmiş üç kollu ters sarkaç sistemini dayanıklı servo kontrol problemi olarak ele almışlardır. Sistemde üç mafsalda bozucu tork bulunmakta, her üç kolun mafsallarına viskoz sürtünmeler etki etmektedir. Sistemin kontrolü birinci ve ikinci kolda bulunan eyleyiciler yardımıyla mümkün olmaktadır. Sistemi belirtilen hedeflere ulaştıran dayanıklı servo kontrolör, sisteme etki eden bozucu etkiler ve sistem modelinden kaynaklanan belirsizliklerin varlığında sistem ihtiyaçlarına cevap verememektedir.

Medrano ve Tsachouridis [85], kesikli zaman H_∞ teorisi tabanlı kontrolör, dayanıklı dinamik gözlemcinin derecesinin düşürülmesiyle üç kollu ters sarkaç sistemine uygulanmıştır. Burada küçük sensör ötelemelerinin ve hareketli zeminin yer ile olan açısının etkisini azaltmak için sistemde integratör kullanılmıştır. Sisteminde bozucu sinyal etkisini azaltılması ve buna bağlı kararlılık karakteristiği, frekans cevabı analizi ile incelenmiştir. Sonuçlar hem simülasyon hem de deneysel ortamda değerlendirilmiştir. Genelde gözlemci tabanlı kontrol metotları sisteme kararlılığını azaltıcı yönde etki etmektedir. Bu problem gözlemcinin derecesinin düşürülmesiyle aşılmıştır. LQR ve H_∞ alt en uygun kontrol metotları karşılaştırılmış, H_∞ alt en uygun kontrolör ile sistemin kapalı çevrim H_∞ normunu LQR kontrolöre göre daha minimum bir değerde tuttuğu gözlenmiştir. Buda H_∞ alt en uygun kontrolörün sistem performansını daha iyi sağladığı anlamına gelmektedir. Burada sistemin referans takibi öncelikli hedef olarak alınmıştır. Bu nedenle sisteme etki eden bozucu tork ve kapalı çevrim H_∞ normu arasında ilişki kurmak mümkün değildir.

Tsachouridis [86], üç kollu ters sarkacın denge konumunda kararlılığını dayanıklı kontrol metotları incelemiştir. Maliyet fonksiyonunu minimize etmek için H_∞ kontrol

metodu kullanılmış, sonuçlar deneysel verilerle desteklenmiştir. Her bir kola bozucu kuvvet etki ettirilmiş, üç kolun davranışı değerlendirilmiştir. Yüksek frekanslarda bozucu etkilere karşı sistemin duyarsızlığının büyük ölçüde sağlandığı gözlenmiştir. Nyquist diyagramında kazanç payı ve faz paylarına bakılmış, kontrollü ve kontrolsüz sonuçlar karşılaştırılmıştır.

Ji ve Cong tarafından [87], kesikli zamanda üç kollu ters sarkaç sisteminin konum kontrolü LQR kontrol metodu ile yapılmıştır. Tasarlanan LQR kontrolör ile sistemin performansı değerlendirilmiş, sonuçların sistemden beklentileri karşıladığı görülmüştür. Sistemin maliyet fonksiyonunu azaltmaya yönelik bu çalışmada sistemde oluşan belirsizlikler göz ardı edilmiştir.

Graichen tarafından [88], sistemin çıkış sinyalinde ki kısıtlamaların varlığında ileri besleme kontrol metodu sonlu zamanda üçlü sarkaç sistemine uygulanmıştır. Kontrol problemi iki noktada giriş çıkış sınır değer problemi (BVP) olarak tanımlanmıştır. Bu yeni yaklaşımla BVP ve çıkış sinyalindeki kısıtlamalarla birleştirilerek LQR kontrol metoduyla çözüme ulaşılmıştır. Bu metotla arabanın pozisyon ve hız limitleri, giriş sinyalinin fiziksel limitler içinde sınırlandırılmasıyla belirlenmiştir.

Ferand ve Enns [89], doğrusal olmayan dinamiklerin etkisi altında üç kollu ters sarkaç sisteminin dik pozisyonda kararlılığını LQR kontrol problemi olarak ele almıştır. Verilen başlangıç koşullarına göre sistemin istenilen pozisyonda kararlılığı sağlanmıştır. Kontrol probleminde eyleyiciler ve geri besleme zaman kayıplarının göz ardı edilmesiyle, sistemin performansı kazanç ve faz payları ile değerlendirilmiş neticelerin istenilen yönde olduğu belirtilmiştir. Daha sonra sistem modeline eyleyiciler ve geri besleme zaman kayıpları eklenmiş geçiş frekansında kazanç payının en büyük olduğu çevrimde faz payının ciddi anlamda düştüğü, diğer döngülerde ise herhangi bir değişim olmadığı gözlenmiştir. Bundan faz payındaki bu düşüşleri karşılamak için sistemde hız gerektiren eyleyiciler kullanılması gerekliliği vurgulanmıştır. Eyleyicilerin ve zamanlama hatalarının sisteme dahil edilmesine rağmen sistemdeki gürültü hatalar ve sürtünme, çözüme dahil edilmemiş sistemin bu etkilere davranışı deneysel ortamda test edilmiştir. Yine problemin çözümünde sistem parametrelerinin değişmediği ve modelin gerçek sistemi tam olarak yansıttığı

kabul edilmiştir. Bu da gerçek kontrolörün gerçek sistemin kontrolünde yeterli olduğunu göstermektedir.

Zeng ve ark. [90], LMI kontrol metodu kullanarak doğrusal olmayan dinamikler, eyleyici limitleri, sensörlerden kaynaklanan hatalar altında iki kollu ters sarkaç kontrolü yapmışlardır. Problemin çözümünde öncelikle sistemin performans hedefleri belirlenmiş, dışarıdan gelecek etkilere karşı sistemin duyarsızlığını sağlayacak kontrolör ile sistem en uygun duruma getirilmiştir. Sonuçlar kayan kipli kontrol metotlarıyla karşılaştırılmış, LMI metodunun bu kontrolöre göre avantajları ve dezavantajları belirlenmiştir.

Lanzon ve Tsotras [91], enerji momentum iletimi olarak uzay araçlarında kullanılan aktif manyetik yataklarla desteklenen yüksek hızlı volanların dayanıklı kontrolünü incelemişlerdir. Bu sistemlerin esnekliğinin fazla olması, sistemdeki parametrelerin belirsizliği ve rotor hızından ciddi şekilde etkilendikleri belirtilerek kontrol probleminin zorluğu belirtilmiştir. Sistemin kontrolü için H_∞ açık çevrim şekillendirme kontrol ve dayanıklılık sentezi metotları birleştirilerek yeni bir kontrol metodu geliştirilmiştir. Asal çarpanlarla tanımlanan yapısal olmayan belirsizlik içeren sistemlerde, H_∞ açık çevrim şekillendirme kontrol metodu kapalı çevrimin performansını ve kararlılığı sağlarken, sistemde parametrik belirsizliklerin varlığında dayanıklılık sentezi kontrol metodu ile sistemin dayanıklı kararlılığı ve performansı sağlanmıştır. Bu problemin çözümünde motor hızına etki eden durumların sayısı düşürülerek hesaplama kolaylığı sağlanmıştır. Sonuçlar değerlendirildiğinde iki kontrol metodunun birleşmesiyle oluşan bu kontrol metoduyla tasarlanan kontrolörün sistemde dayanıklı kararlılığı ve performansı sağladığı görülmüştür.

Porumamilla ve Kelkar [92], süspansiyon, akümülatör ve pnömatik yay sistemini dayanıklı kontrol problemi olarak ele almışlardır. Sisteme etki eden belirsizlikler sistem çıkışında bağıl yer değiştirme ve şasenin ivmesine etki edecek şekilde yapısal olmayan belirsizlik içeren sistem modeli oluşturulmuştur. Sistemin kontrolü için LQG ve H_∞ kontrol metotları kullanılmıştır. Tasarlanan bu iki kontrolör ile belirsizlik içeren sistemin dayanıklılık analizi yapılmış iki kontrolörün de sistemin

dayanıklılığını aynı oranda sağladığı görülmüştür. Zaman tanım alanında sonuçlar değerlendirilmiş oturma zamanı ve aşım dikkate alındığında H_∞ kontrolörün LQG kontrolöre göre daha iyi cevap verdiği gözlenmiştir.

Fallah [93], temel kontrol problemlerinden biri olan süspansiyon sisteminin kontrolünü tekerleğin hareketinin sisteme olan etkisini de dahil ederek yeniden incelemiştir. Bunun için H_∞ kontrol metodu ile sistemde yoldan kaynaklanan ve tekerleğin hareketinin sisteme olan bozucu etkileri giderilmeye çalışılmıştır. Sistemdeki eyleyicilerin ve süspansiyonun çalışma limitleri sistem problemine eklenmiştir. Pasif, yarı aktif ve aktif süspansiyonun performansı değerlendirilmiş kontrolörün istenilen performansı sağladığı görülmüştür.

Sename ve Dugard [94], süspansiyon sistemini, dayanıklı kontrol problemi olarak ele almış, sürüş kalitesini arttırmaya çalışmışlardır. Sisteme gürültü etkisi ve kontrol sinyalindeki kısıtlamalar ağırlık fonksiyonları uygun ağırlık fonksiyonlarının seçimiyle kontrol problemine dahil edilmiştir. Sistemdeki kütle ve yay sabitinin zamana bağlı değiştiği kabul edildiğinde, belirsizlik içeren sistemin modeli LFT kullanılarak oluşturulmuştur. Sistem nominal performans hedeflerine ulaştıracak H_∞ kontrolör ile kararlı hale getirilmiş, kontrolörün belirsizliklere karşı sistemin dayanıklı kararlılığını ve performansını sağlayıp sağlayamadığı, μ -analizi ile test edilmiştir. Bunun neticesinde kontrolörün dayanıklı kararlılığı sağladığı halde dayanıklı performansı sağlamada yetersiz kaldığı gözlenmiştir. H_∞ kontrolör ile sistemin yarı aktif ve aktif süspansiyon modelinin cevabı zaman tanım alanında gösterilmiş pasif süspansiyon modeliyle karşılaştırılmıştır. İki sistemde de H_∞ kontrolörün sistemin performansını sağladığı görülmüştür.

Spong [95], n kollu robot kolu için, Lyapunov RS şartlarını kullanarak, doğrusal olmayan RC kanunlarını türetmiştir. Sistemde atalet momentlerinin belirli aralıklarda değiştiği kabulüyle sistemin belirsizlik içeren modeli oluşturulmuştur. Sistemin dayanıklı kararlılığını sağlayan kontrolör tasarımında, uyarlamalı kontrol algoritması kullanılmıştır. Uyarlamalı kontrol metodunun model belirsizliğine ve dışarıdan gelecek bozucu etkilere karşı sistemin kararlılığını sağlamada yetersiz kaldığı bundan

dolayı bu metodu dayanıklı hale getirecek algoritmalara duyulan ihtiyaç vurgulanmıştır. Hesaplama kolaylığı açısından bu metodun RC metodlarına alternatif olabileceği belirtilmiştir.

Fujita ve ark. [96], elektromanyetik süspansiyon sisteminin kontrolünü dayanıklılık sentezi problemi olarak ele almıştır. Sistemdeki olası parametre değişimleri ile yapısal olmayan toplam belirsizlik içeren sistem modeli oluşturmuşlardır. Sistemde dayanıklılık sentezi D-K tekrarlama ile yapılmıştır. Burada, başlangıç şartlarının verilmesiyle tasarlanan başlangıç kontrolörü ve tekrarlama sonrasında elde edilen kontrolör karşılaştırılmış, başlangıç kontrolörünün sistemde RS'yi sağladığı halde belirsiz sistemin RP sağlayamadığı görülmüştür. Tekrarlama neticesinde elde edilen kontrolörün ise sistemde hem RS'yi hem de RP'yi sağladığı görülmüştür.

Roberts ve ark. [97], bir savaş gemisinin mekanik performansının artırılması için yalpalama hareketine karşı geminin dümen açısının kontrolü ve otomatik pilot tasarımı H_∞ en uygununun bulma tekniği kullanılarak yapılmışlardır. Geminin yalpalama açısı ve rota takibi birbirleriyle ilişkili iki ayrı çevrim sistemi olarak modellenmiştir. Sistemden beklenen performans hedefleri, kontrolör çalışma limitleri, ölçüm sinyaline etki eden gürültü uygun ağırlık fonksiyonlarının seçilmesiyle kontrol problem yapısı oluşturulmuştur. H_∞ kontrolör ile beraber tasarlanan otomatik pilot ve otomatik pilot kullanılmadan sistemin, yalpalamanın sisteme bozucu etkisine karşı duyarlılığı değerlendirilmiştir. Sistemin klasik kontrolör metodlarıyla beraber tasarlanan otomatik pilotlarla karşılaştırıldığında klasik metodların yalpalamaya karşı sistemi duyarsız kıldığı, model belirsizlikleri düşünüldüğünde ise H_∞ kontrolörün gerekliliği vurgulanmıştır.

Barros [98], dayanıklı geri beslemeli kontrol metodunu iki kütle yay sistemine uygulamıştır. Burada sisteme etki eden bozucu etkenlere rağmen kütlelerin yer değiştirmemesi istenmektedir. Sistemde direngenlik katsayısının belirli bir aralıkta değiştiği durumda sistemi istenilen pozisyonda tutan kontrolör dayanıklı sentez metodu ile tasarlanmıştır. Problemden ilk olarak seçilen bir kütlelerin yer değişimi minimize edilmesi istenmiş, bir diğer durumda ise iki kütlelerin de yer değişimleri minimize edilmek istenmiştir. Sistemde zamanlama hatalarından kaynaklanan

belirsizlikler ve seçilen bir yay sabitinin parametre değişimleri ile beraber sistemin yapısal olmayan belirsizlik içeren modeli oluşturulmuştur. Sonuçlar yay sabitinin değişik değerlerine karşılık değerlendirilmiş, sistemde değişen parametrelere karşı kararlılığın ve performansın sağlandığı görülmüştür.

Vasconcelos [99], üç kütle ve yaydan oluşan sistemin bozucu etkilere karşı performansını dayanıklılık sentezi metodu ile incelemiştir. Sistemde seçilen kütle ve yay parametrelerindeki değişim yapısal belirsizlik ve sisteme etki eden modellenemeyen dinamikler ve zaman gecikmeleri yapısal olmayan belirsizlik olarak tanımlanarak sistemin belirsizlik içeren modeli oluşturulmuştur. Problemin çözümünde dayanıklılık sentezi D,G-K tekrarlama metodu kullanılarak kontrolör tasarımı yapılmıştır. Dayanıklılık sentezi kontrol metodunun doğrusal olmayan sistemler için geliştirilmesi gerekliliği vurgulanmıştır.

Kaleemullah ve ark. [100], dörtte bir araba modelinin aktif süspansiyon sisteminde sürüş konforunu artırmak amacıyla H_∞ kontrol, LQR ve bulanık mantık kontrol metodu problemi olarak ele almışlardır. Sistemde kararlılığın ve referans izleme hatasının minimize edilmesi söz konusu olduğundan, bu sistem için iki serbestlik dereceli kontrolör tasarlanmıştır. Burada kullanılan geri besleme kontrolörü sistemin kararlılığını, bozucu etkilere karşı duyarsızlığını sağlamakta ileri besleme kontrolörü ise sistemde referans izleme hatasını minimize etmektedir. Simülasyondan elde edilen sonuçlar değerlendirildiğinde, sistemin kütle yer değişiminin, LQR kontrolörün diğer metotlara göre daha iyi sonuçlar verdiği görülmüştür. Buna karşın sistemin ivmesine bakıldığında H_∞ kontrolörün diğer kontrolörlerden daha iyi sonuçlar verdiği gözlenmiştir. Gelecek çalışmalarda bu kontrol metotlarının genetik algoritma kullanılarak geliştirilebileceği vurgulanmıştır.

BÖLÜM 3. KONTROL METODU

Sistemde modelleme hatalarından başka sistemin parametre değerlerinin doğru ölçülmemesinden veya zaman içinde değişmesinden kaynaklanan hatalar ve sistem cevabına olumsuz yönde etki eden bozucu sinyallerin varlığı da kontrolör tasarımında göz önünde bulundurulmalıdır. Gerçek sistem ve kontrolör tasarımında kullanılan sistem modeli arasındaki bu farklar genel olarak belirsizlik olarak adlandırılır. Bu belirsizlikler kararsızlığa ve performans düşüklüğüne neden olacağı için, sistemi buna dayanıklı kılacak kontrolör tasarımı oldukça önem kazanmaktadır.

3.1. Genel Bakış

Kontrolör tasarımından önce sistemin dinamik davranışı matematiksel olarak ifade edilmelidir. Oluşturulan matematiksel model fiziksel sistemin girişi ve çıkışı arasındaki ilişkiyi tanımlar. İyi bir model mümkün olduğunca basit olmalı ve gerçek sistemin davranışını yansıtmalıdır. Oysa gerçek sistemin davranışını kesin olarak gösteren basit bir model oluşturmak mümkün değildir. Bu durumda model için tasarlanan kontrolör teorik olarak sistemde kararlılığın yanı sıra iyi bir performansı sağlamasına rağmen, gerçek sisteme uygulandığında, modeldeki doğrusal olmayan dinamiklerin ihmalinden kaynaklanan hatalar yüzünden sistemi kararlı yapmamaktadır. Bundan dolayı, tasarımcı kontrolör tasarımında kararsızlığa ve performans düşüklüğüne yol açan bu modelleme hatalarını göz önünde bulundurmalıdır.

3.2. Sistem Performansı ve Kararlılığı

Sistemde performans değerlendirilmesi frekans tanım bölgesinde kazanç payı, faz payı, duyarlılık ve tamamlayıcı duyarlılık maksimum genliği (tepe noktası) gibi ölçütlerle yapılır. Buna karşın, zaman tanım bölgesinde performans değerlendirilmesi

yerleşme zamanı, yükselme zamanı ve aşım gibi ölçütlerle yapılır. Frekans tanım alanında kullanılan kazanç ve faz payı performans ölçütleri birbirleriyle ilişkilidir ve sistemde dayanıklılığın bir göstergesi olarak değerlendirilir.

Nyquist ve Bode diyagramı gibi grafik metotlarında kazanç ve faz payı dikkate alınarak belirsizlikler için sezgisel bir değerlendirme yapılabilir. Bu durumda sistemde kontrolör tasarımı bu değerlendirmeye göre yapılır. Böyle bir yaklaşımda tasarımcıya büyük sorumluluk yüklenmektedir. Bununla beraber, SISO tek giriş ve tek çıkışlı sistemlerin kontrolünde kullanılan bu metot, daha karmaşık yapıya sahip çok değişkenli sistemlerin kontrolü için uygun bir araç değildir.

Bunun yerine çok değişkenli sistemlerin performans değerlendirmesi (∞) normu kullanılarak yapılabilir. Çok değişkenli sistemde performans bozucuların sistem cevabına etkilerinin gözlemlendiği özel tanımlanan duyarlılık fonksiyonları ile ifade edilmektedir. Sistemin bu bozucu büyüklüklere karşı duyarsız olması beklenmektedir. Bu durumda geri beslemeli bir sistemde duyarlılık fonksiyonu (H_∞) normunun minimize edilmesiyle bozucu sinyallerin sistem üzerindeki etkisi azaltılır. $\|H\|_\infty$ normu gibi frekans tanım bölgesi performans kriterleri göz önünde bulundurulduğunda dayanıklı kontrol problemi, $\|H\|_\infty$ normunda en uygun kontrol metodu olarak ele alınmaktadır. Bu metot ile geri beslemeli bir sistemde sistemi kararlı yapacak aynı zamanda H_∞ norm şartını sağlayacak en uygun kontrolör tasarımı yapılmaktadır. Bunun için H_∞ kontrol metodu tabanlı çeşitli çözüm teknikleri uygulanmıştır. Bununla beraber, sadece sistemin bozucu sinyallere duyarlılığının düşürülmesi değil aynı zamanda model belirsizliğine karşı dayanıklılığın bir ölçüsü olarak da (∞) normu kullanılır.

3.3. Dayanıklılık Analizi ve Sentezi

Bu konudaki çalışmalar sistemdeki belirsizliğin yapısal ve yapısal olmayan olmak üzere iki farklı şekilde gösterilmesi tutuculuğu azaltma yönünde yapılır. Tutuculuk, sistemin gerçekte kararlı olduğu halde teoride kararsızmış gibi davranmasıdır. İlk olarak yapısal olmayan belirsizlik sistemin tekil değerlerle yapılan ve küçük kazanç teoremi ile değerlendirilen analiz metodu bu gereksinim neticesinde belirsizliklerin

yapısal olarak gösterimi ihtiyacını doğurmuş ve bu durumda kullanılan analiz metodu μ Analizi olarak kabul edilmiştir. μ -Analiz metodu ise üst sınır ve alt sınır eşitsizliklerinin yazılmasıyla geliştirilmiştir.

$\|H\|_\infty$ en uygun kontrol metodu, en kötü durumda dış kaynaklı bozucu sinyallerden sistem cevabına olan kazancın en aza indirilmesine dayanan en uygun bulma işlemidir. Metotta sistemde frekansa bağlı performans beklentileri tanımlanan ağırlıklı filtreler ile belirlenir. Amaç, bu performans özelliklerini karşılayarak sistemi dayanıklı kararlı yapan kontrolörün tasarlanmasıdır. Çözümde Riccati denklemleri ve doğrusal matris eşitsizlikleri kullanılır. Bu metodun, düşük dereceli kontrolör tasarlandığı göz önüne alınırsa uygun bir çözüm olduğu görülmektedir.

Son yıllarda yapılan çalışmaların önemli bir kısmı μ -Sentezi metodu ile dayanıklı kararlılık ve performansı sağlamak üzere yapılmıştır. Bu metotta μ -Analizi $\|H\|_\infty$ en uygun kontrol metodu ile birleştirilerek konveks en uygun problemi haline getirilmiştir. Böylece (μ) değerini en aza indirgeyerek kontrolörün dayanıklı performansı sağlanması hedeflenir. Metotta çözüme D-K tekrarlamaya ulaşılmıştır. D-K tekrarlaması (μ) üst sınır eşitsizliğinin (D) ölçeklendirme matrisi ve $\|H\|_\infty$ en uygun kontrol metodu ile bulunan K arasında birinin sabitler değerinin değiştiği bir tekrarlama söz etmek mümkündür. Bu tekrarlama (D) ölçeklendirme matrisine uygun bir eğrinin bulunması ile tanımlanan transfer fonksiyonu $\|H\|_\infty$ en uygun kontrol probleminde kullanılır. Böylece sistemde dayanıklı performansa ulaşan (K) kontrolörü tanımlanır.

BÖLÜM 4. DAYANIKLI KONTROL METODU

Dayanıklı kontrol (RC) metodu geri beslemeli bir sistemden model belirsizliklerine rağmen sistemin, istenilen davranışı göstermesi amacıyla geliştirilmiştir. Bu metotta, kontrolör tasarımı olası model kümesi göz önünde bulundurularak yapılır. Sistemin dayanıklılığı geri beslemeli bir sistemdeki temel karakteristik olan kararlılık ve performansın olası sistem model kümesinin her bir elemanı için sağlanmasını gerektirir. Bu belirsizlikli sistem için dayanıklı kararlılık (RS) ve dayanıklı performans (RP) olarak iki temel karakteristikle değerlendirilir. Sistemin dayanıklı olması durumunda olası model kümesine ait her eleman için kararlılık sağlarken dayanıklı performansa sahip olması durumunda olası model kümesine ait her eleman için hedeflenen performans ölçütlerini sağlamaktır.

4.1. Matematiksel Alt Yapı

Dayanıklı kontrol metodunda sistem, sınırlı girdilere karşılık sınırlı çıktılar için incelenir. Bunun için sistemin giriş sinyalleri ve çıkış sinyallerinin büyüklükleri normla ifade edilir. Dayanıklı kontrol problemi genel yapısı oluşturulurken doğrusal kesirli dönüşüm kullanılır. Sistemin kararlılığı sistemin öz değerleriyle ve performans değerlendirmesi ise sistemin tekil değeriyle açıklanır. Bunun için dayanıklı kontrol metoduna geçmeden önce, sistemin dayanıklı kontrolünde kullanılan sinyal normu, sistem normu, öz değerler, öz vektörler, tekil değer ayrışımı, doğrusal kesirli dönüşüm gibi matematiksel araçlardan bahsedilmelidir.

4.1.1. Sinyal normu

Kontrol sistemlerinde performans, sisteme etki eden sinyallerin büyüklüğü ile tanımlanabilir. Mesela sistemin referans izleme performansı $e(t)$ hata sinyalinin büyüklüğü ile ölçülür. Sinyalin büyüklüğünü ölçmek için çeşitli normlar

tanımlanmıştır. Sinyallerin $(-\infty, \infty)$ 'den \mathbb{R} 'ye tanımlı olduğu düşünölsün. Bunların parçalı süreklil olduğu kabul edilir. Bu durumda sinyaller için bir farklı norm tanımlanabilir. Sinyaller için tanımlanan normlar

- $\|u\| \geq 0$
- $\|u\| = 0 \Leftrightarrow u(t) = 0, \forall t$
- $\|au\| = a\|u\|; \forall a \in \mathbb{R}$
- $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$

şartlarını sağlaması gerekir. Burada tanımlanan son şart üçgen eşitsizliğine benzer. Vektör normları için belirtilen şartları sağlayan genel p-normu

$$\|u\|_p \triangleq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} \quad (4.1)$$

ile ifade edilir. Buna göre norm şartlarına göre tanımlanan $u(t)$ sinyalinin 1-normu

$$\|u\|_1 \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} |u(t)| dt \quad (4.2)$$

$u(t)$ sinyal kümesi elemanlarının mutlak değerlerinin toplamı olarak ifade edilir. $u(t)$ sinyalinin 2-normu

$$\|u\|_2 \triangleq \left(\int_{-\infty}^{\infty} u(t)^2 dt \right)^{1/2} \quad (4.3)$$

ile ifade edilir. $u(t)$ sinyali 1 Ω 'luk dirençten geçen akım olarak düşünölebilir. Burada anlık güç $u^2(t)$ 'ye eşittir ve toplam enerji bunların toplamına yani $\|u\|_2^2$ 'ye eşit olur. Dikkat edilecek olursa, sinyalin 2-normunun karekökü, $u(t)$ sinyalinin enerjisini verir. Sinyalinin 2-normu Euclidean normu olarak da adlandırılır.

Sinyaller için tanımlanan diğer bir norm da ∞ -normudur. $u(t)$ sinyalinin ∞ -normu

$$\|u\|_{\infty} \triangleq \sup_t |u(t)| \quad (4.4)$$

ile ifade edilir. ∞ -normu sinyal kümesi elemanlarının mutlak değeri en büyük elemanı olarak tanımlanır. Belirli bir ortalama zaman aralığında, $u(t)$ sinyalinin ortalama gücü

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T u(t)^2 dt \quad (4.5)$$

ile ifade edilir. Sınırların var olması durumunda $u(t)$ güç sinyali olarak isimlendirilir ve ortalama gücün karekökü

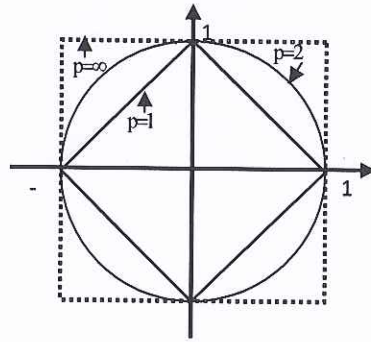
$$\text{pow}(u) \triangleq \left(\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T u(t)^2 dt \right)^{1/2} \quad (4.6)$$

ile ifade edilir. Burada pow norm şartının i., iii. ve iv. şartlarına uyum sağlasa bile sıfırdan farklı sinyallerin ortalaması 0 olacağından ii. şartı sağlayamaz ve pow norm olarak kabul edilmez.

Sinyallerin büyüklüğünü ölçmek için tanımlanan farklı normların birbirlerinden farkı sabit faktörlerdir. Örneğin m elemanlı herhangi bir $u(t)$ sinyali için

$$\|u\|_{\max} \leq \|u\|_2 \leq \sqrt{m} \|u\|_{\max}; \quad \|u\|_2 \leq \|u\|_1 \leq \sqrt{m} \|u\|_2 \quad (4.7)$$

ifadesi yazılabilir. $m = 2$ olması durumunda $\|u\|_p = 1$ olmak üzere tanımlanan sinyaller normları arasındaki ilişki Şekil 4.1'deki gibi gösterilir.



Şekil 4.1. $p = 1, 2, \infty$ için $\|u\|_p = 1$ olması durumunda normlar arasındaki ilişki.

4.1.2. Sistem normu

Doğrusal, zamandan bağımsız ve sonlu boyutlu bir sistemin zaman tanım aralığında giriş ve çıkış sinyalleri arasındaki bağıntı

$$y = g * u \quad (4.8)$$

ile ifade edilir. Burada $y(t)$ çıkış sinyali

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t - \tau)u(\tau)d\tau \quad (4.9)$$

ile ifade edilir. Burada $t < 0$ olması durumunda $g(t) = 0$ olmaktadır. g transfer fonksiyonunun Laplace dönüşümü \hat{G} olarak ifade edilirse, \hat{G} gerçel kat sayılarla tanımlanan oransal bir fonksiyondur. \hat{G} transfer fonksiyonunun kararlı olması analitik olarak kapalı sağ yarı düzlemde ($\text{Re}(s) \geq 0$), ve $\hat{G}(j\infty)$ 'nin sonlu (paydanın derecesinin paydan büyük eşit olması) olması durumunda uygun, $\hat{G}(j\infty)$ 'nin $\hat{G}(j\omega) = 0$ (paydanın derecesinin paydan büyük) olması durumunda kesin uygun ve \hat{G} ve \hat{G}^{-1} 'nin ikisinin de oransal (paydanın derecesinin pay ile eşit) olması durumunda ikisinin de uygun olmasını gerektirir. \hat{G} transfer fonksiyonunun 2-normu

$$\|\hat{G}\|_2 = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{G}(j\omega)|^2 d\omega \right)^{1/2} \quad (4.10)$$

ile ifade edilir. \hat{G} transfer fonksiyonunun kararlı olması durumunda Parseval teoremi yardımıyla Denklem 4.9'daki ifade

$$\|\hat{G}\|_2 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|^2 dt \right)^{1/2} \quad (4.11)$$

olarak yazılır. Sistemin ∞ -normu

$$\|\hat{G}\|_{\infty} \triangleq \sup_{\omega} |\hat{G}(j\omega)| \quad (4.12)$$

ile ifade edilir. \hat{G} transfer fonksiyonunun ∞ -normu kompleks düzlemde \hat{G} transfer fonksiyonu Nyquist diyagramının orijinden en uzak noktası arasındaki mesafe olarak tanımlanır. $\|\hat{G}\|_{\infty}$ Bode diyagramında \hat{G} transfer fonksiyonunun maksimum tepe noktasına karşılık gelir. ∞ -normunun en önemli özelliklerinden biri

$$\|\hat{G}\hat{H}\|_{\infty} \leq \|\hat{G}\|_{\infty} \|\hat{H}\|_{\infty} \quad (4.13)$$

şartının sağlanmasıdır.

4.1.3. Sistemlerde giriş ve çıkış sinyali ilişkisi

Giriş ve çıkış sinyalleri arasındaki ilişki bulunan bir sistemde giriş sinyali büyüklüğüne karşılık çıkış sinyalinin ne ölçüde değişeceği. $u(t)$ giriş sinyali ve $y(t)$ çıkış sinyali arasında doğrusal bir bağıntı olduğu ve \hat{G} transfer fonksiyonunun kararlı ve uygun olduğu varsayımıyla giriş büyüklüğüne karşılık çıkış büyüklüğü arasındaki bağıntı Tablo 4.1'de verilmiştir.

Tablo 4.1. Giriş sinyalleri karşılık çıkış sinyalleri normları.

Giriş sinyali \ Çıkış normu	$u(t) = \delta(t)$	$u(t) = \sin(\omega t)$
$\ y\ _2$	$\ \hat{G}\ _2$	∞
$\ y\ _\infty$	$\ G\ _\infty$	$ \hat{G}(j\omega) $
pow(y)	0	$\frac{1}{\sqrt{2}} \hat{G}(j\omega) $

Burada $u(t)$ giriş sinyalinin, $\delta(t)$ ani darbe sinyali olması durumunda, $y(t)$ çıkış sinyalinin 2-normu G transfer fonksiyonunun 2-normuna eşit olur. Bu Denklem 4.10 ile verilen Parseval teoreminden açıkça görülür.

$u(t)$ giriş sinyalinin sabit olmayıp $\|u\|_2 \leq 1$ olarak verilmesi durumunda, $\|y\|_2$ çıkış sinyali

$$\sup\{\|y\|_2 : \|u\|_2 \leq 1\} \quad (4.14)$$

ile ifade edilir. Sinyallerin 2-normu ile gösterilmesi durumunda sistemin kazancı \hat{G} 'nin ∞ -normu na eşit olur. Diğer sinyal normlarıyla tanımlanan girişlere karşılık sistem kazancı Tablo 4.2'deki gibi verilmektedir.

Tablo 4.2. Sistem kazancı.

Giriş normu \ Çıkış normu	$\ u\ _2$	$\ u\ _\infty$	pow(u)
$\ y\ _2$	$\ \hat{G}\ _2$	∞	∞
$\ y\ _\infty$	$\ G\ _2$	$\ G\ _1$	∞
pow(y)	0	$\leq \ \hat{G}\ _\infty$	$\ G\ _\infty$

Sinyal ve sistem normları kontrol problemi uygulamalarında sıkça kullanılır. Bir kontrol sisteminde $y(t)$ sistem cevabına etki eden $d(t)$ bozucu sinyalinin $y(t)$ sistem cevabına etkisinin azaltılması istenir. G 'nin, $d(t)$ bozucu giriş sinyalinden $y(t)$ sistem cevabına ani darbe cevabı olduğu düşünülürse ve \hat{G} transfer fonksiyonunun kararlı olması durumunda yukarıda verilen tablolar $d(t)$ bozucu sinyaline karşılık $y(t)$ çıkış sinyalinin nasıl değiştiğini gösterir. Örneğin $d(t)$ bozucu giriş sinyalinin $d(t) = \sin(\omega t)$ olması durumunda $y(t)$ sinyalinin büyüklüğünün değişimi Tablo 4.1 yardımıyla bulunabilir. $d(t)$ bozucu sinyallerin $y(t)$ sistem cevabına azaltılması istenir. Sisteme etki eden $d(t)$ bozucu sinyalinin genellikle bilinmediği düşünülürse, olası $d(t)$ bozucu sinyali için $y(t)$ sistem cevabındaki değişim Tablo 4.2 yardımıyla bulunabilir. Tablo 4.2'ye dikkat edilecek olursa çeşitli sinyal normlarına karşılık giriş ve çıkış sinyali arasındaki ilişkide genellikle ∞ -normu ile gösterilmiştir. Bu sebepten dolayı ∞ -normu sistem performansının gösterimde daha çok tercih edilir.

4.1.4. Öz değerler ve öz vektörler

$A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ matrisi verilsin, A 'nın λ_i ($i = 1, 2, \dots, n$) öz değerleri için n . dereceden karakteristik denklemi

$$\det(A - \lambda I) = 0 \quad (4.15)$$

ile ifade edilir. λ_i öz değerine karşılık tanımlanan t_i sağ öz vektörü, $t_i \neq 0$ sağlayan çözüm

$$(A - \lambda_i I)t_i = 0; \quad At_i = \lambda_i t_i \quad (4.16)$$

ile ifade edilir. q_i sol öz vektörlerle sistemin karakteristik denklemi

$$q_i^*(A - \lambda_i I) = 0; \quad q_i^* A = \lambda_i q_i^* \quad (4.17)$$

ile ifade edilir. Öz değerler bazen karakteristik kazanç olarak adlandırılabilir. A 'nın öz değerleri kümesi, A 'nın spektrumudur. Burada A 'nın en büyük öz değeri $\rho(A) \triangleq \max_i |\lambda_i(A)|$ A 'nın spektral yarıçapı olarak adlandırılır. Öz vektörler genellikle birim uzunluk sağlayacak şekilde normalize $(t_i^* t_i) = 1$ edilirler. Bu λ_i öz değerlerin t_i

öz vektörlerden daima doğrusal bağımsız olduğunu gösterir. t_i öz vektörler, T matrisinin kolonu ve λ_i öz değerleri Λ matrisinin köşegen elemanı olarak

$$T = \{t_1, t_2, \dots, t_n\}; \quad \Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\} \quad (4.18)$$

gösterilir. Denklem 4.15 dikkate alındığında

$$AT = TA \quad (4.19)$$

ifadesi yazılabilir.

A matrisinin λ_i öz değerleri için

- A 'nın λ_i öz değerleri toplamı A 'nın iz düşümüne eşittir ($\text{tr}A = \sum_i \lambda_i$),
- A 'nın λ_i öz değerleri çarpımı A 'nın determinantına eşittir ($\det A = \prod_i \lambda_i$)
- A ' ve A^T 'nin öz değerleri aynıdır fakat öz vektörleri farklıdır,
- A^{-1} 'nin yazılabilmesi A 'nın bütün öz değerlerinin 0 olmaması durumunda mümkündür. A^{-1} 'nin öz değerleri $1/\lambda_1, \dots, 1/\lambda_n$ olarak yazılır,
- $A + cI$ matrisinin öz değerleri $\lambda_i + c$ olur,
- cA^k matrisinin öz değerleri $c\lambda_i^k$ olur,
- Verilen $\ell \times m$ boyutlu bir A ve $m \times \ell$ boyutlu bir B matrisi için $\ell \times \ell$ boyutlu AB matrisi ve $m \times m$ boyutlu BA aynı öz değerlere sahiptir,
- Öz değerler benzer dönüşümler altında değişmezler. A matrisi ve DAD^{-1} aynı öz değerlere sahiptir,
- Gershgorin teoremi; $n \times n$ boyutlu bir A matrisinin kompleks düzlemde n sayıda çemberle gösterilebilir. Her bir çemberin merkezi a_{ii} ve yarıçapı $r_i = \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$ ile gösterilir. Bu dairelerde a_{ij} merkezli ve yarıçapı $r_i = \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$ çemberlerin içinde kalır.

Bu özelliklere göre

$$\lambda_i(s) = \lambda_i((I+L)^{-1}) = \frac{1}{\lambda_i(I+L)} = \frac{1}{1+\lambda_i(L)} \quad (4.20)$$

ifadesi yazılabilir.

4.1.5. Durum matrisinin öz değerleri

Doğrusal diferansiyel denklemi

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (4.21)$$

ile tanımlanan bir sistem için A'nın öz değerleri doğrusal olarak birbirinden bağımsız ve durum vektörü $z = T^{-1}x$ olsun. Buna göre sistemin diferansiyel denklemi

$$T\dot{z} = ATz + Bu \quad (4.22)$$

$$\dot{z} = \Lambda z + T^{-1}Bu \quad (4.23)$$

ile ifade edilir. $u(t)$ giriş sinyalinin 0 olması durumunda z_{0i} , $t = 0$ 'daki durum ve buna karşılık $z_i = z_{0i}e^{\lambda_i t}$ çözümü elde edilir. λ_i öz değeri gerçel sayı ise bu durumda ($z_i \rightarrow 0$ ve $t \rightarrow \infty$) kararlılık $\lambda_i < 0$ olmasını gerektirir. $\lambda_i = \text{Re}\lambda_i + j\text{Im}\lambda_i$ ' kompleks olması durumunda $e^{\lambda_i t} = e^{\text{Re}\lambda_i t}(\cos(\text{Im}\lambda_i t) + j\sin(\text{Im}\lambda_i t))$ elde edilir ve kararlılık şartı $\text{Re}\lambda_i < 0$ olmasını gerektirir. Bu genel sonuç bir doğrusal sistemin kararlılığının A durum matrisinin öz değerlerinin gerçel olan kısmının 0'dan küçük olmasıyla yani kompleks düzlemin sol yarısında olmasıyla mümkündür.

4.1.6. Tekil değer ayrışımı

A kompleks bir matris ve U birimsel matris

$$U^* = U^{-1} \quad (4.24)$$

ile ifade edilir. U birimsel matrisin bütün öz değerleri 1'e eşittir. Bundan dolayı bütün tekil değerleri de 1'e eşittir. Buna göre $\ell \times m$ boyutlarında bir A matrisinin tekil değer ayrışımı (SVD)

$$A = U\Sigma V^* \quad (4.25)$$

ile ifade edilir. Burada $\ell \times \ell$ boyutunda U birimsel matrisi, $m \times m$ boyutunda V birimsel matrisi ve $\ell \times m$ boyutunda Σ matrisi gerçel ve negatif olmayan σ_i tekil değerlerle tanımlanan bir Σ_1 köşegen matrisini kapsar. Bu durumda Σ matrisi

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \ell \geq m \quad (4.26)$$

veya

$$\Sigma = [\Sigma_1 \ 0]; \quad \ell \leq m \quad (4.27)$$

ile ifade edilir. Burada Σ_1

$$\Sigma_1 = \text{diag}\{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k\}; \quad k = \min\{\ell, m\} \quad (4.28)$$

ve

$$\bar{\sigma} \triangleq \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_k \triangleq \underline{\sigma} \quad (4.29)$$

ile ifade edilir. U kolon uzayı vektörleri elemanları v_i sağ ya da giriş tekil vektörleri, U 'nun kolon vektörleri elemanları u_i sol ya da çıkış vektörleri olarak adlandırılır. AA^* ve A^*A matrislerinin öz değerlerin kare kökleri A 'nın tekil değerleri

$$\sigma_i(A) = \sqrt{\lambda_i(A^*A)}; \quad \sigma_i(A) = \sqrt{\lambda_i(AA^*)} \quad (4.30)$$

ile ifade edilir [101]. U ve V birimsel matrisleri ile A ve A^* matrislerinin öz vektörlerinden

$$AA^* = (U\Sigma V^*)(U\Sigma V^*)^*; \quad AA^* = U\Sigma\Sigma^*U^*; \quad U^* = U^{-1}; \quad V^* = V^{-1} \quad (4.31)$$

ifadesi yazılabilir. Burada

$$(AA^*)U = U\Sigma\Sigma^* \quad (4.32)$$

ifade edilip AA^* 'nin öz değerleri $\{\sigma_i^2\}$ olur.

4.1.7. Rank

Matrisin rankı matrisin sıfırdan farklı σ tekil değerlerinin sayısına eşittir. $\text{rank}(A) = r$ olmak üzere, $r < k = \min(\ell, m)$ olması durumunda A 'nın rankı eksik ve $i = r + 1, \dots, k$ için tekil değerleri $\sigma_i = 0$ olur. Rankı eksik olan A matrisi tekil matris olarak adlandırılır. Kare olmayan matrisler daima tekildirler. Bir matrisin rankı tekil olmayan bir matrisle soldan ya da sağdan çarpılması durumunda değişmez. Bununla beraber $m \times \ell$ boyutlu bir A matrisi ve $m \times p$ boyutlu bir B matrisi için

$$\text{rank}(A) + \text{rank}(B) - m \leq \text{rank}(AB) \leq \min\{\text{rank}(A), \text{rank}(B)\} \quad (4.33)$$

eşitsizliği (Sylvester eşitsizliği) yazılabilir.

$m \times m$ boyutlu tekil olmayan bir A matrisinin SVD, $A = U\Sigma V^*$ olarak yazıldığında bunun tersi

$$A^{-1} = V\Sigma^{-1}U^* \quad (4.34)$$

ile ifade edilir. A^{-1} tekil değerleri

$$\sigma_i(A^{-1}) = 1/\sigma_j(A), \quad u_i(A^{-1}) = v_j(A), \quad v_i(A^{-1}) = u_j(A) \quad (4.35)$$

ile ifade edilir. Bu durumda

$$\bar{\sigma}(A^{-1}) = 1/\underline{\sigma}(A) \quad (4.36)$$

eşitliği yazılabilir.

4.1.8. Tekil değer eşitsizliği

Tekil değerler ve öz değerler arasında

$$\underline{\sigma}(A) \leq |\lambda_i(A)| \leq \bar{\sigma}(A) \quad (4.37)$$

eşitliği yazılabilir. Tekil değer ayrışımı (SVD) tanımından

$$\bar{\sigma}(A^*) = \bar{\sigma}(A); \quad \bar{\sigma}(A^T) = \bar{\sigma}(A) \quad (4.38)$$

eşitliği yazılabilir. SVD nin diğer önemli özelliklerinden biri de

$$\bar{\sigma}(AB) \leq \bar{\sigma}(A)\bar{\sigma}(B) \quad (4.39)$$

eşitsizliğidir. Tekil olmayan A ve B matrisleri için $\bar{\sigma}(AB)$ için yazılacak alt sınır

$$\bar{\sigma}(A)\bar{\sigma}(B) \leq \bar{\sigma}(AB); \quad \bar{\sigma}(A)\underline{\sigma}(B) \leq \bar{\sigma}(AB) \quad (4.40)$$

ile ifade edilir. $\underline{\sigma}(AB)$ minimum tekil değer için yazılacak alt sınır

$$\underline{\sigma}(A)\underline{\sigma}(B) \leq \underline{\sigma}(AB) \quad (4.41)$$

ile ifade edilir. Parçalı matrisler için

$$\max\{\bar{\sigma}(A), \bar{\sigma}(B)\} \leq \bar{\sigma} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} \leq \sqrt{2} \max\{\bar{\sigma}(A), \bar{\sigma}(B)\} \quad (4.42)$$

ve

$$\bar{\sigma} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} \leq \bar{\sigma}(A) + \bar{\sigma}(B) \quad (4.43)$$

eşitsizliği yazılabilir. Bu özellik genellikle

$$\bar{\sigma} \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} \leq \max \{ \bar{\sigma}(A), \bar{\sigma}(B) \} \quad (4.44)$$

olarak gösterilir. Bir diğer önemli ve kullanışlı teorem ise Fan's teoremidir. Buna göre

$$\sigma_1(A) - \bar{\sigma}(B) \leq \underline{\sigma}(A+B) \leq \sigma_1(A) + \bar{\sigma}(B) \quad (4.45)$$

ifadesi yazılabilir. Buna göre

$$| \bar{\sigma}(A) - \bar{\sigma}(B) | \leq \bar{\sigma}(A+B) \leq \bar{\sigma}(A) + \bar{\sigma}(B) \quad (4.46)$$

ve

$$\underline{\sigma}(A) - 1 \leq \underline{\sigma}(I+A) \leq \underline{\sigma}(A) + 1 \quad (4.47)$$

yazılabilir. Denklem 4.35 ve Denklem 4.46 arasındaki ilişkiden kapalı çevrim sistemlerin yükseltme değerlendirmesinde kullanılan önemli bir eşitsizlik

$$\underline{\sigma}(A) - 1 \leq \frac{1}{\bar{\sigma}(I+A)^{-1}} \leq \underline{\sigma}(A) + 1 \quad (4.48)$$

ile ifade edilir.

4.2. Doğrusal Kesirli Dönüşüm

Belirsiz sistemlerde sistemin durum uzay modelinin belirsizliklerle ilişkisi doğrusal kesirli dönüşüm (LTF) ile basit olarak modellenebilir. Bu yaklaşımla belirsizlik içeren sistemin dayanıklı kontrol teorisinde kullanılacak yapısı oluşturulur. Doğrusal kesirli dönüşüm ile oluşturulan bu güçlü ve esnek yapı hesaplamalarda kolaylık sağlamaktadır.

Genel olarak LTF kompleks sayılarla tanımlanan birebir ve örten kompleks değişken fonksiyonu

$$F: C \rightarrow C$$

$$F(s) = \frac{a + bs}{c + ds} \quad (4.49)$$

ile tanımlanabilir. Burada, $a, b, c, d \in C$. Eğer $c \neq 0$ ise $F(s)$ fonksiyonu

$$F(s) = \alpha + \beta s(1 - \gamma s)^{-1} \quad (4.50)$$

yazılabilir. Burada $\alpha, \beta, \gamma \in C$. Belirtilen skaler değerler için tanımlanan LTF ifadesi matris durumu için genelleştirilebilir. M sistem gösterimi, w giriş ve z çıkış sinyalleri arasında sabit bir kompleks matris olarak tanımlanır. Burada, w ve z olarak genelleştirilen sinyallerin her biri $[w_1, w_2]^T$ ve $[z_1, z_2]^T$ olmak üzere iki kısma ayrılırsa, aralarındaki ilişki, M sistem kompleks matrisinin parçalara ayrılmasıyla

$$M = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \in C^{(p_1+p_2) \times (q_1+q_2)}; \quad w = [w_1 \quad w_2]^T; \quad z = [z_1 \quad z_2]^T \quad (4.51)$$

oluşan gösteriminin sinyaller arasındaki bağlantısı

$$z_1 = M_{11}w_1 + M_{12}w_2 \quad (4.52)$$

$$z_2 = M_{21}w_1 + M_{22}w_2 \quad (4.53)$$

ile ifade edilir. Burada, z_1 ve w_1 sinyalleri arasındaki ilişki $\Delta_u \in C^{q_1 \times p_1}$ olarak tanımlanan bir kompleks matris olduğu kabul edilirse

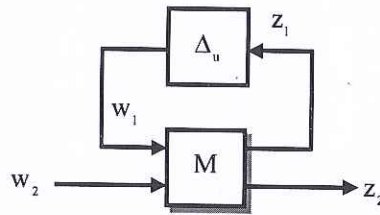
$$w_1 = \Delta_u z_1 \quad (4.54)$$

yazılabilir. Bu durumda w_2 ve z_2 sinyalleri arasındaki ilişki LFT ile

$$F_u(M, \Delta_u) \Big|_{C^{q_1 \times p_1} \rightarrow C^{q_2 \times p_2}} \quad (4.55)$$

$$F_u(M, \Delta_u) = M_{22} + M_{21}\Delta_u(1 - M_{11}\Delta_u)^{-1}M_{12}$$

elde edilir. $M - \Delta_u$ arasındaki ilişki Şekil 4.2'de gösterilmiştir.



Şekil 4.2. $M - \Delta_u$ 'nın LFT blok diyagramı.

Denklem 4.51'de z_2 ve w_2 sinyalleri arasındaki ilişki $\Delta_\ell \in C^{q_2 \times p_2}$ olarak tanımlanan bir kompleks matris olduğu kabul edilirse

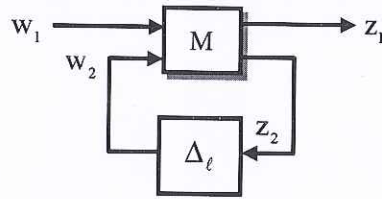
$$w_2 = \Delta_\ell z_2 \quad (4.56)$$

yazılabilir. Bu durumda w_1 ve z_1 sinyalleri arasındaki ilişki

$$F_\ell(M, \Delta_\ell) \Big| C^{q_2 \times p_2} \rightarrow C^{q_1 \times p_1} \quad (4.57)$$

$$F_\ell(M, \Delta_\ell) = M_{11} + M_{12} \Delta_\ell (1 - M_{22} \Delta_\ell)^{-1} M_{21}$$

elde edilir. $M - \Delta_\ell$ arasındaki ilişki Şekil 4.3'de gösterilmiştir.



Şekil 4.3. $M - \Delta_\ell$ 'nin LFT blok diyagramı.

Dayanıklı kontrol tasarımında LFT dayanıklı kontrol genel yapısının oluşturulmasında ve belirsizliklerin sistemle olan bağlantısının gösterilmesinde kullanılır.

4.3. Sistemde Belirsizlikler

Kontrol sistemleri tasarımında, fiziksel sistemin dinamik davranışı matematiksel model ile ifade edilir. Maalesef sistemin gerçek davranışının kesin bir modelini oluşturmak mümkün değildir. Gerçek sistem ile matematiksel model arasındaki farklar, belirsizlik olarak adlandırılır. Sistemde oluşan belirsizlikler değişik sebeplerden oluşabilir ve kaynaklarına göre sistem modelinden kaynaklanan belirsizlikler ve sisteme etki eden bozucu sinyaller olarak iki ana grupta toplanır.

Sistem modelinden kaynaklanan belirsizliklerin temel nedeni, gerçek sistem ile matematiksel model arasındaki farklılıklardır. İyi bir modelin mümkün olduğunca gerçek sistemin dinamik davranışını yansıtması, aynı zamanda yeterince basit olması istenir. Oysa gerçek sistem karmaşık yapıya sahiptir ve basit bir modelle ifade etmek mümkün değildir.

Matematiksel modelleme yapılırken gözden kaçan dinamikler, doğrusal model oluştururken göz ardı edilen doğrusal olmayan dinamikler, yüksek frekanslarda yapının ve model derecesinin tam bilinmeyişi belirsizliğe yol açmaktadır. Ayrıca, sistem modelindeki parametre değerlerinin doğru olarak ölçülmemesinden ya da zaman içinde değişiminden kaynaklanan hatalar da sistemde belirsizlik nedenidir.

Bir fiziksel sistemin dinamik davranışını yansıtan en yakın matematiksel ifade ve standart parametre değerinin kullanıldığı model, G_n nominal model olarak adlandırılır. Ancak modeldeki belirsizlikler göz önünde bulundurulduğunda, fiziksel sistemi tek bir model ile ifade etmek doğru olmaz. Bu nedenle sistem, Π olası modeller kümesi

$$\Pi \triangleq \{G \in \{G_i\} | i = 1, 2, \dots, k\} \quad (4.58)$$

ile tanımlanır. Burada G belirsizliklerle tanımlanan, Π olası model kümesine ait herhangi bir sistem modelini gösterir. Sistemde model belirsizlikleri matematiksel olarak yapısal ve yapısal olmayan belirsizlikler ile ifade edilir.

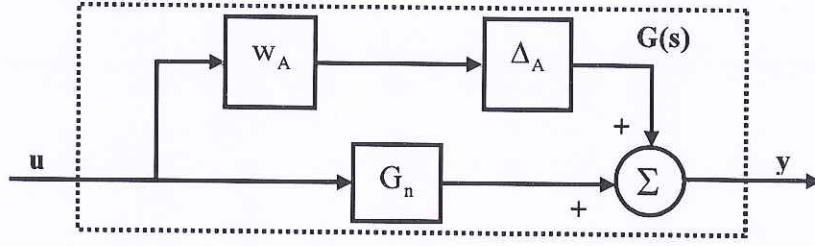
4.3.1. Yapısal olmayan belirsizlikler

Sistem modelinde var olan farklı kaynaklı belirsizlikler, tek bir Δ belirsizlik bloğunda birleştirilir. Oluşan Δ belirsizlik bloku, belirli bir matematiksel forma sahip değildir. Bundan dolayı yapısal olmayan belirsizlikler olarak adlandırılır. Belirli bir yapısı olmamasına karşın belirli normla sınırlandırılarak ifade edilir. Genel olarak sistemde modellenemeyen ve ihmal edilen dinamiklerden kaynaklanan belirsizlikleri ifade etmekte kullanılır. Bu tip belirsizliklerin sistemdeki etkileri frekansa bağlı olarak değiştiği için yapısal olmayan belirsizliklerle frekans tanım alanında ifade edilmesi doğru olur. Yapısal olmayan belirsizliklerle ifade edilen sistemlerin analizi kolaydır, bundan dolayı oldukça yaygın olarak kullanılır.

4.3.1.1. Genel gösterimi

Yapısal olmayan belirsizlikler toplam, giriş ve çıkış çarpım belirsizlikler olmak üzere üç şekilde gösterilir [102]. Yapısal olmayan belirsizliklerin, G_n nominal modele

toplam olarak katıldığı belirsizlik içeren sistemin blok diyagramı Şekil 4.4'de gösterilmiştir.



Şekil 4.4. Toplam belirsizlik içeren sistem modeli.

Yapısal olmayan toplam belirsizlik içeren sistem

$$G(s) = G_n(s) + w_A(s)\Delta_A(s); \|\Delta_A\| \leq 1 \quad \forall \omega \quad (4.59)$$

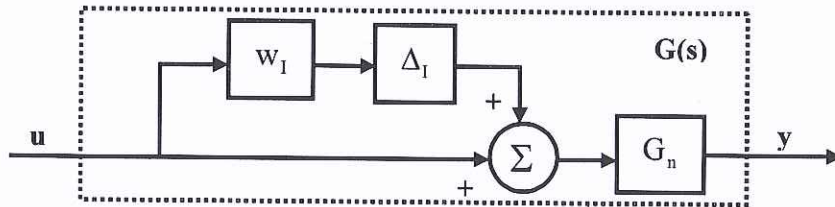
ile ifade edilir. Toplam belirsizlik gösteriminde, gerçek sistemle model arasındaki ℓ_A maksimum hata

$$\ell_A = \max |G - G_n| \quad (4.60)$$

ile gösterilir. Burada, sistemde belirsizliği gösteren Δ_A belirsizlik bloku, kararlı transfer fonksiyonudur ve belirtilen norm şartını sağlamaktadır. $w_A(s)$ ağırlıklı transfer fonksiyonu, toplam belirsizlik içeren sistemde, her frekans değerine karşılık gelen belirsizliğin genliği

$$|w_A(j\omega)| \geq \ell_A \quad (4.61)$$

ile ifade edilir. Çok yaygın olarak kullanılan yapısal olmayan belirsizliklerin giriş sinyaline çarpım olarak etki ettiği, belirsizlik içeren sistemin blok diyagramı Şekil 4.5'de gösterilmiştir.

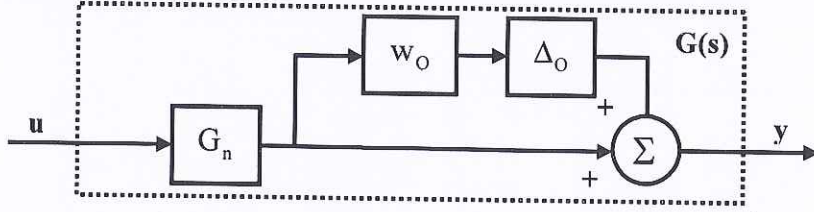


Şekil 4.5. Giriş çarpım belirsizlik içeren sistem modeli.

Yapısal olmayan çarpım belirsizlik içeren sistem modeli

$$G(s) = G_n(s)(1 + w_1(s)\Delta_1(s)); |\Delta_1(j\omega)| \leq 1, \forall \omega \quad (4.62)$$

ile ifade edilir. Aynı şekilde modelden kaynaklanan belirsizlikler sistem çıkışına çarpım olarak da etki edebilir. Bu durum Şekil 4.6'de gösterilmiştir.



Şekil 4.6. Çıkış çarpım belirsizlik içeren sistem modeli.

Yapısal olmayan belirsizliklerin sistem çıktısına etki ettiği belirsizlik içeren sistem

$$G(s) = (1 + w_1(s)\Delta_1(s))G_n(s); |\Delta_1(j\omega)| \leq 1; \forall \omega \quad (4.63)$$

ile ifade edilir. Giriş (çıkış) çarpım belirsizliğinde gerçek sistem ile model arasındaki $\ell_1(\ell_o)$ maksimum bağıl hata

$$\ell_1(\ell_o) \triangleq \max \left| \frac{G - G_n}{G_n} \right| \quad (4.64)$$

ile tanımlanır. $w_1(s)$ giriş veya $w_o(s)$ çıkış ağırlıklı transfer fonksiyonu, belirsizliğin nominal sistemin giriş veya çıkış sinyaline çarpım olarak etki ettiği belirsizlik içeren sistemde, her frekansa karşılık gelen belirsizlik genliği

$$\begin{aligned} |w_1(j\omega)| &\geq \ell_1 \\ |w_o(j\omega)| &\geq \ell_o \end{aligned} \quad (4.65)$$

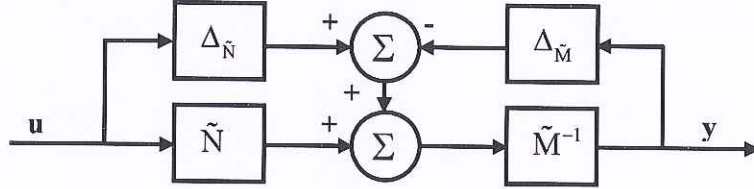
ile gösterilir. Belirsizliğin nominal sisteme toplam olarak katıldığı belirsizlik içeren sistemde hata, kesin hata iken belirsizliğin çarpım olarak katıldığı durumda hata bağıl hata ile gösterilir. Bağıl hata sistemde belirsizliğe dair daha doğru bilgi içermektedir. Bundan dolayı uygulamalarda, genellikle yapısal olmayan belirsizliklerin çarpım şeklinde gösterilmesi tercih edilmektedir.

Bu yukarıdaki belirsizliklere ilaveten ters toplam, ters giriş ve çıkış çarpım belirsizlikleri de yazılabilir. Bunlardan farklı olarak belirsizlik içeren sistem sol asal ve sağ asal faktörlerle gösterilebilir. Sol asal faktörlerle tanımlanan nominal sistemin ve belirsizlik içeren sistemin transfer fonksiyonu

$$G_n = M^{-1}N \quad (4.66)$$

$$G(s) = (M + \Delta_M)^{-1}(N + \Delta_N); \quad \|\begin{bmatrix} \Delta_N & \Delta_M \end{bmatrix}\|_\infty \leq \epsilon \quad (4.67)$$

ile ifade edilip Şekil 4.7'deki gibi gösterilebilir.



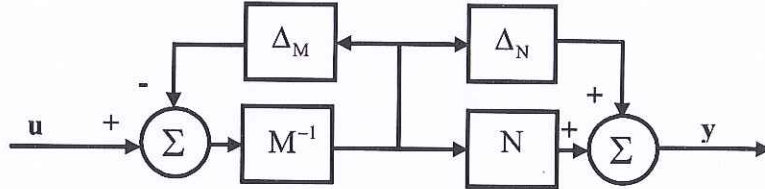
Şekil 4.7. Belirsizlik içeren sistemin sol asal faktörler ile gösterimi.

Sağ asal faktörlerle tanımlanan nominal ve belirsizlik içeren sistemin transfer fonksiyonu

$$G_n = NM^{-1} \quad (4.68)$$

$$G(s) = (N + \Delta_N)(M + \Delta_M)^{-1}; \quad \|\begin{bmatrix} \Delta_N & \Delta_M \end{bmatrix}\|_\infty \leq \epsilon \quad (4.69)$$

ile ifade edilip Şekil 4.8'deki gibi gösterilebilir.



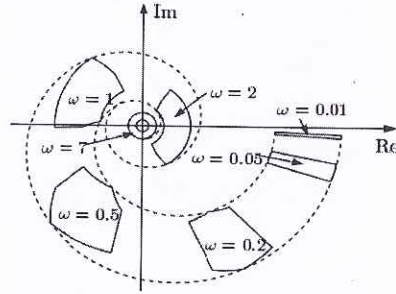
Şekil 4.8. Belirsizlik içeren sistemin sağ asal faktörler ile gösterimi.

4.3.1.2. Frekans tanım aralığında gösterimi

Sistemde belirsizliklerin varlığında tek bir modelden söz etmek yerine model kümesinden bahsedilir. Bu durumda belirsizlik içeren bir sistemin Nyquist eğrisi sadece bir eğri değil, eğri ailesidir. Her bir frekans değeri için, merkezi nominal model olan model kümesine karşılık bir belirsizlik bölgesi ile tanımlanır. Nyquist diyagramında belirsizlik bölgelerini göstermek için seçilen bir örnek sistemin transfer fonksiyonu

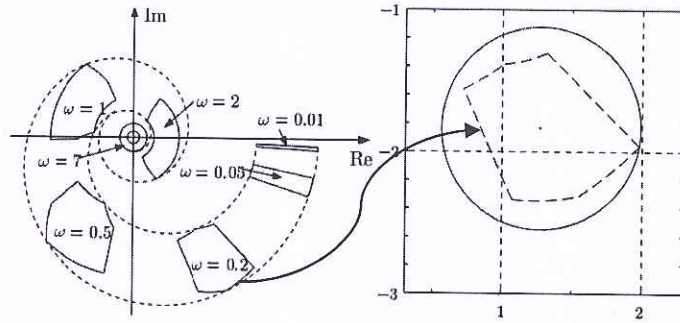
$$G(s) = \frac{k}{\tau s + 1} e^{-\theta s} \quad (4.70)$$

ile verilsin ve k kazanç, θ gecikme ve τ zaman sabiti parametreleri $2 \leq k, \theta, \tau \leq 3$ sınır değerleri arasında değişsin. Değişken parametrelerle oluşturulan bu sistem model kümesine karşılık gelen belirsizlik bölgesi Şekil 4.9' da gösterilmiştir.



Şekil 4.9. Nyquist diyagramında parametrik belirsizlik içeren sistemin belirsizlik bölgesi.

Görüldüğü gibi parametrik belirsizliklerle tanımlanan belirsizlik bölgelerinin geometrisi değişken ve karmaşıktır, dolayısıyla bu bölgeleri matematiksel olarak ifade etmek oldukça zordur. Bu durumda belirsizlik bölgeleri, merkezi nominal model olan ve bu belirsizlik bölgelerini kapsayan disklerle tanımlanır. Nyquist diyagramında disk yaklaşımı Şekil 4.10'da gösterilmiştir.



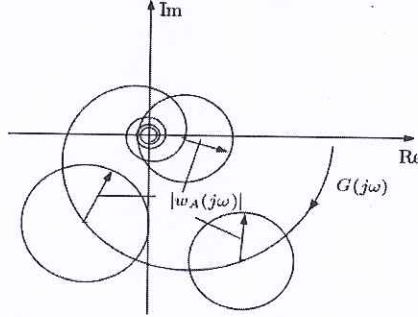
Şekil 4.10. $\omega = 0.2$ belirsizlik bölgelerinin disk yaklaşımı ile basitleştirilmesi.

Disk şeklindeki belirsizlik bölgeleri göz önünde bulundurulduğunda, belirsizlik içeren sistem

$$G(s) = G_n(s) + w_A(s)\Delta(s) \quad (4.71)$$

yapısal olmayan toplam belirsizliklerle tanımlanabilir. Belirsizlik bölgesi frekansa bağlı olarak değişir. Disk yaklaşımında bu değişim disklerin yarıçapındaki değişimle

gösterilir. Denklem 4.71'de verilen toplam belirsizlik gösteriminde $w_A(s)$ ağırlık fonksiyonu, disk yarıçapının frekansa bağlı değişimini gösterir ve Nyquist diyagramı Şekil 4.11 de gösterilmiştir.



Şekil 4.11. Yapısal olmayan toplam belirsizlik içeren sistemin Nyquist diyagramı.

Verilen örnek sistem için, yapısal olmayan toplam belirsizlik içeren sistem gösteriminin dışında, giriş sinyaline çarpım olarak katılan belirsizlik

$$G(s) = G_n(s)(1 + w_1(s)\Delta_1(s)) \quad (4.72)$$

ile yazılabilir. Bu durumda her frekans değerinde, belirsizliğin nominal modele toplam ve çarpım olarak etki ettiği iki ifade arasındaki eşitlik

$$|w_A(j\omega)| = |w_1(j\omega)||G_n(j\omega)| \quad (4.73)$$

ile ifade edilir. Yukarıda görüldüğü gibi parametrik belirsizliğe sahip bir sistemin Nyquist diyagramında gösterilen karmaşık yapı belirsizlik bölgeleri disk yaklaşımı ile basitleştirilmiştir.

Yapılan bu basitleştirme ile kontrolör tasarımı ve kapalı sistem analizinde işlem zorluğu ortadan kaldırılmakta fakat tutuculuğu artırılmaktadır. Tutuculuk, tasarlanan kontrolörün sistemi gerçekte kararlı yaptığı halde, teoride sistemin kararsızmış gibi davranması durumudur. Bu istenmeyen durum tasarımcıyı yanıltmaktadır. Bu durum sistemde belirsizlikleri yapısal olarak gösterme ihtiyacını doğurmuştur. Yapısal belirsizliklerin gösterimi doğrusal kesirli dönüşümle mümkün olmaktadır.

4.3.1.3. İhmal edilen dinamiklerin belirsizlik olarak gösterimi

Belirsizlik içeren sistemin frekans tanım alanında gösterimi, ihmal edilen dinamiklerin gösteriminde oldukça kullanışlı bir metottür. Belirsizlik kaynağı ihmal edilen dinamiklerden kaynaklanan belirsizlik içeren sistem

$$G(s) = G_o(s)f(s) \quad (4.74)$$

ile ifade edilirse, $G_o(s)$ belirsizliği olmayan bir transfer fonksiyonu ve $f(s)$ ihmal edilen dinamikleri ($\Pi_f = \{f(s)\}$ belirsizlik kümesi) gösterir. İhmal edilen dinamiklerin sebep olduğu belirsizliklerin, sisteme çarpım olarak etki etmesi durumunda $\ell_1(\omega)$ hata bağılı genliği

$$\ell_1(\omega) = \max_G \left| \frac{G - G_o}{G_o} \right| \quad (4.75)$$

$$\ell_1(\omega) = \max_{f(s) \in \Pi_f} |f(j\omega) - 1| \quad (4.76)$$

olarak yazılır. Bunu verilen iki örnekle açıklamak mümkündür. İlk olarak ihmal edilen gecikmelerden kaynaklanan belirsizlikler incelenebilir. Sistemde ihmal edilen zaman gecikmesi

$$f(s) = e^{-\theta s} \quad (4.77)$$

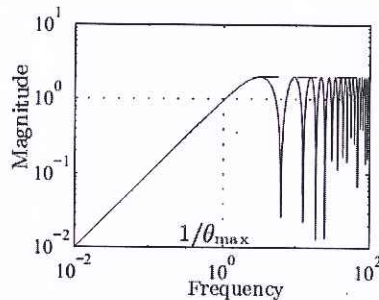
ile gösterilirse, θ 'daki değişim $0 \leq \theta \leq \theta_{\max}$ ile belirsizli sistem ile gösterilir. Bu durumda belirsizlik içeren sistem

$$G(s) = G_o(s)e^{-\theta s} \quad (4.78)$$

ile gösterilir. Maksimum gecikmeye bağlı olarak bağılı hata

$$\ell_1 = \left| 1 - e^{-j\omega\theta_{\max}} \right| \quad (4.79)$$

ile tanımlanır ve Şekil 4.12'de gösterilmiştir.



Şekil 4.12. Sistemde zaman gecikmesi.

Bağıl hatanın 1 genliğini geçtiği frekans değeri $1/\theta_{\max}$ iken π/θ frekans değerinde 2 genlik değerine ulaşır ve bundan sonra yüksek frekanslarda $[0, 2]$ genlik değeri arasında dalgalanmalar görülür. $\theta \in [0, \theta_{\max}]$ olduğu düşünülürse bağıl hata π/θ frekansının altında ve üstünde

$$l_1(\omega) = \begin{cases} |1 - e^{-j\omega\theta_{\max}}| & \omega < \pi/\theta_{\max} \\ 2 & \omega > \pi/\theta_{\max} \end{cases} \quad (4.80)$$

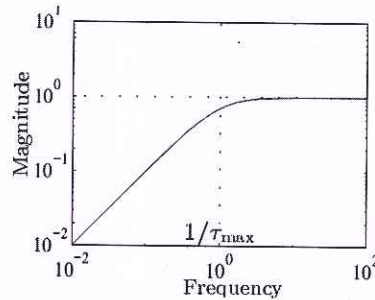
ile ifade edilir. Sistemde bir diğer belirsizlik kaynağı ihmal edilen faz gecikmesidir. Sistemde faz gecikmesi

$$f(s) = 1/(\tau s + 1) \quad (4.81)$$

olarak verilirse ve τ zaman sabiti $\tau \in [0, \tau_{\max}]$ aralığında değiştiği kabul edildiğinde, $l_1(\omega)$ maksimum bağıl hata

$$l_1(\omega) = |w_1(j\omega)|; \quad w_1(s) = \frac{\tau_{\max} s}{\tau_{\max} s + 1} \quad (4.82)$$

ile gösterilir. w_1 ağırlık fonksiyonu genliği, $1/\tau_{\max}$ geçiş frekansından sonra yüksek frekanslarda Şekil 4. 13'de 1 genliğine ulaştığı gösterilmiştir.



Şekil 4.13. Sistemde birinci dereceden faz gecikmesi.

Sistemde bir diğer önemli belirsizlik kaynağı da modellenemeyen dinamiklerdir. Bunların gösterimi ihmal edilen dinamiklerin gösterimine benzer olmasına rağmen tamamen aynı değildir. Modellenemeyen dinamiklerin yaklaşık olarak modellenmesinde bilinmeyen dinamikler sonsuz yüksek dereceli olsa bile göz

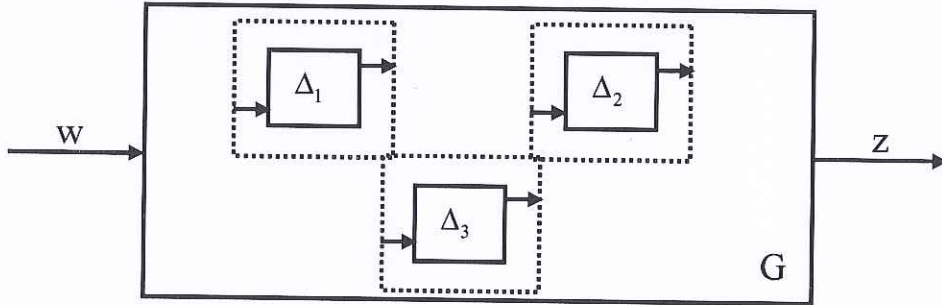
önünde bulundurulmalıdır. Modellenemeyen dinamikler gösterimi genellikle basit bir ağırlık fonksiyonu

$$w_1(s) = \frac{\tau s + p_0}{(\tau/p_\infty)s + 1} \quad (4.83)$$

ile gösterilir. Burada p_0 kalıcı durumdaki bağıl belirsizliği, $1/\tau$ frekansın değerinin %100 bağıl belirsizliğe ulaştığı değeri ve p_∞ genliği, yüksek frekanslarda w_1 ağırlık fonksiyonunun genliğidir (genelde $p_\infty \geq 2$ olarak seçilir).

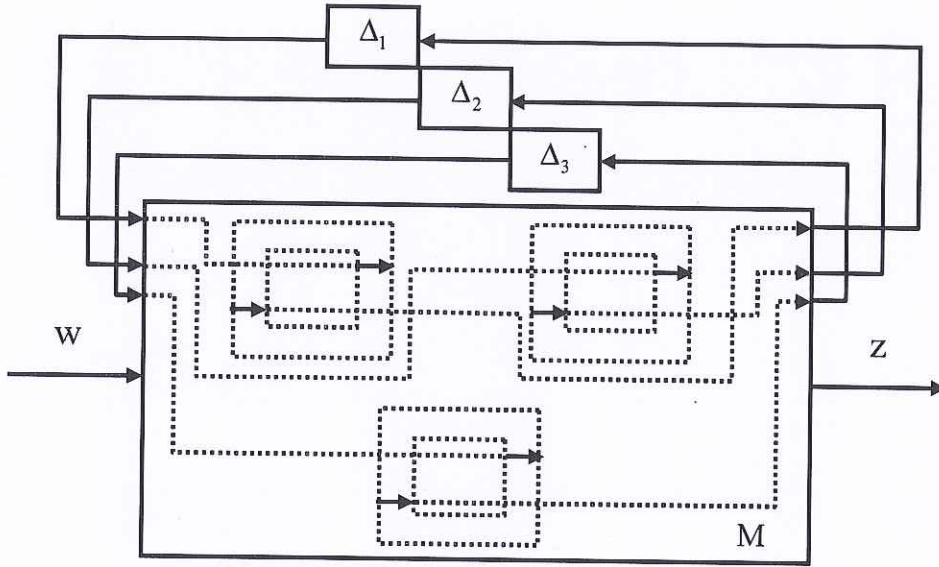
4.3.2. Yapısal belirsizlikler

Bir sistemde belirsizlik farklı nedenlerden kaynaklanabilir. Her bir belirsizlik kaynağı nominal modele farklı şekilde etki eder [3]. Kaynakları farklı olan G belirsizlik içeren bir sistem Şekil 4.14'de gösterilmiştir.



Şekil 4.14. Çok belirsizlik içeren bir sistem.

Birbirinden bağımsız her bir Δ_i belirsizlik kaynağının, $M \in C^{n \times n}$ genel belirli iç bağlantılı modeli ile bağlantısı doğrusal kesirli dönüşüm (LFT) kullanılarak ifade edilir. Bu durum yukarıda belirtilen sistem için Şekil 4.15'de gösterilmiştir.



Şekil 4.15. Bir sistemin yapısal belirsizliğinin oluşumu.

LFT ile sistemden ayrılan her bir Δ_i belirsizlik ile köşegen yapılı genel bir belirsizlik matrisi oluşturulur. Köşegen yapıya sahip bu tip belirsizlikler yapısal belirsizlik olarak adlandırılır. Yapısal belirsizlik genel olarak

$$\Delta = \text{diag} \{ \Delta_i \}_{i=1}^m \quad (4.84)$$

ile gösterilir. Köşegen belirsizlik matrisinde, her bir Δ_i belirsizlik elemanı ile ifade edilir. Sistemde var olan Δ_i belirsizlik kaynakları skaler değerlerden ve tam bloklardan oluşabilir. Yapısal belirsizlik matrisin boyutu

$$\dim(\Delta) = m; \quad m = m_r + m_c + m_c \leq n \quad (4.85)$$

ile tanımlanan şartını sağlayan m_r gerçel skaler blokları, m_c kompleks skalar blokları ve m_c tam blokları sayısı için değişen pozitif tam sayılar kümesi

$$\kappa = (k_1, \dots, k_{m_r}, k_{m_r+1}, \dots, k_{m_r+m_c}, k_{m_r+m_c+1}, \dots, k_m) \quad (4.86)$$

ile tanımlanır. M matrisinin n boyutuyla uyumlu olması istenildiğinde yapısal belirsizlik bloku

$$\Delta = \text{diag}(\delta_1^r I_{k_1}, \dots, \delta_{m_r}^r I_{k_{m_r}}, \delta_1^c I_{k_{m_r+1}}, \dots, \delta_{m_c}^c I_{k_{m_r+m_c}}, \Delta_1^c, \dots, \Delta_{m_c}^c): \quad (4.87)$$

$$\delta_i^r \in \mathbb{R}, \delta_i^c \in \mathbb{C}, \Delta_i^c \in \mathbb{C}^{k_{m_r+m_c+i} \times k_{m_r+m_c+i}}$$

$$n = \sum_{i=1}^m k_i \quad (4.88)$$

ile gösterilir. Δ_i^C tam blok olarak tanımlanan belirsizlikler kendi içinde köşegen matris olmak zorunda olmayıp, yapısal belirsizlik bloğunda köşegen matrisin bir elemanı olarak yapıya katılırlar.

4.3.3. Parametrik belirsizlik

Yapısal olmayan belirsizlikler sistemde ihmal edilen ve modellenemeyen belirsizliklerin gösterilmesinde oldukça kullanışlı bir metottur. Bununla birlikte endüstriyel kontrol sistemlerinde belirsizlik, kesin olarak ölçülmeyen ya da zamanla değişen parametre değerlerinden kaynaklanır. Bu tip belirsizliklerde parametrenin verilen gerçel sınır değerleri aralığında değiştiği kabul edilir.

Belirsiz olarak tanımlanan bir α parametre değerinin $[\alpha_{\min}, \alpha_{\max}]$ sınır değerleri aralığında değiştiği kabul edilirse, bu durumda belirsiz parametre değerleri

$$\alpha = \bar{\alpha}(1 + p_\alpha \Delta); \quad |\Delta| \leq 1 \quad (4.89)$$

ifadesi yazılabilir. Bu ifadede, $\bar{\alpha}$ nominal parametrenin değeri ve p_α bağıl sapma değeridir. Bağıl sapma değeri

$$p_\alpha = \frac{(\alpha_{\max} - \alpha_{\min})}{(\alpha_{\max} + \alpha_{\min})} \quad (4.90)$$

ile gösterilir. Bununla beraber Denklem 4.89'da geçen Δ belirsizlik bloğu olup herhangi bir gerçel skalar değeri belirtir ve $[-1, 1]$ aralığında değişir.

(k) kazanç katsayısı, $k_{\min} \leq k \leq k_{\max}$ de sınır değerler arasında değiştiği bir sistemin transfer fonksiyonu ve $G_o(s)$ belirsizliği olmayan transfer fonksiyonu ile

$$G(s) = kG_o(s) \quad (4.91)$$

ile gösterilirse, belirsizliği olmayan \bar{k} nominal kazanç katsayısı

$$\bar{k} \triangleq \frac{k_{\min} + k_{\max}}{2} \quad (4.92)$$

olarak gösterilebilir. (k) parametresinin belirsizlik içeren gösterimi

$$k = \bar{k}(1 + p_k \Delta); \quad |\Delta| \leq 1 \quad (4.93)$$

ile yazılır. (k)'daki bağıl sapma

$$p_k = \frac{(k_{\max} - k_{\min})}{(k_{\max} + k_{\min})} \quad (4.94)$$

olarak yazılır. Bu durumda Denklem 4.91'deki sistem modeli çarpım belirsizlik içeren sistem modeli

$$G(s) = \bar{k}G_o(s)(1 + p_k \Delta); \quad |\Delta| \leq 1 \quad (4.95)$$

$$G(s) = G_n(s)(1 + p_k \Delta); \quad |\Delta| \leq 1 \quad (4.96)$$

olarak gösterilir. Burada, Δ gerçel skalar değer ve $G_n(s)$ nominal transfer fonksiyonudur. Denklem 4.96'daki p_k , çarpım belirsizlik içeren sistemdeki w_1 ağırlık fonksiyonu gibi düşünülebilir.

Bundan başka sistemde parametre belirsizliği zaman sabitinden de kaynaklanabilir. Belirsiz zaman sabiti ile tanımlanan bir transfer fonksiyonu

$$G(s) = \frac{1}{\tau s + 1} G_o(s) \quad (4.97)$$

ile verilirse; burada, $G_o(s)$ nominal transfer fonksiyonu ve τ zaman sabitindeki değişim $\tau_{\min} \leq \tau \leq \tau_{\max}$ aralığında olup bu parametrenin belirsizlik içeren gösterimi

$$\tau = \bar{\tau}(1 + p_k \Delta); \quad |\Delta| \leq 1 \quad (4.98)$$

ile ifade edilir. Bu durumda sistemin transfer fonksiyonu

$$G(s) = \frac{G_o}{1 + \bar{\tau}s + r_1 \bar{\tau}s \Delta}; \quad w_1(s) = \frac{p_1 \bar{\tau}s}{1 + \bar{\tau}s} \quad (4.99)$$

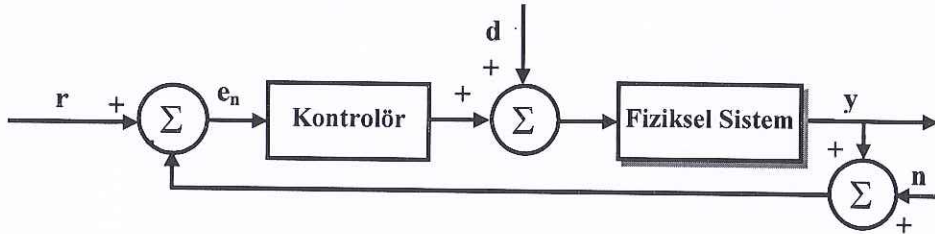
$$G(s) = G_n(s)(1 + w_1 \Delta)^{-1} \quad (4.100)$$

ile ifade edilir. Burada belirsizlik içeren sistem, ters çarpım belirsizlik içeren bir sistem olarak tanımlanmıştır.

Sistemde parametrik belirsizliklerin gösterimi, yapısal olmayan belirsizliklerin gösteriminden daha zordur. Ayrıca parametrik belirsizlikler, modellenemeyen belirsizliklerle uyumsuzdur. Bundan dolayı parametrik belirsizlikler tanımlanırken sistem modelinin kesin model olduğu varsayılmaktadır. Bundan dolayı bazı durumlarda sistemde oluşan parametrik belirsizlikler yapısal olmayan belirsizliklere dönüştürülerek ifade edilir. Bu durum belirsizlik bölgelerinin frekans tanım alanında, Nyquist diyagramında, gösterilmesiyle netlik kazanır.

4.3.4. Sisteme etki eden bozucu sinyaller

Kontrol sistemlerinde, model belirsizliklerinden başka sisteme etkileyen dış kaynaklı giriş sinyalleri de belirsizlik kaynağı olarak değerlendirilir. Bir kontrol sisteminde kumanda edilmeyen ve değişimi önceden kestirilmeyen giriş sinyallerine bozucu sinyaller denir. Bozucu sinyaller sistem cevabını olumsuz yönde etkiler. Sisteme etki eden bu bozucu sinyalleri genel olarak, $r(t)$ referans, $d(t)$ yük bozucuları ve $n(t)$ gürültü olarak üç grupta toplanabilir. Geri beslemeli kapalı çevrimli bir sistem bozucu sinyalleri ile Şekil 4.16'da gösterilmiştir.



Şekil 4.16. Kapalı çevrimli bir kontrol sisteminin bozucu sinyaller ile gösterimi.

Kontrol sistemlerinde, sistem cevabının belirlenen bir referans değerine ulaşması amaçlanır. Bu nedenle geri beslemeli bir sistemde, sistemin cevabı referans ile karşılaştırılır ve oluşan hata kontrolör yardımı ile giderilmeye çalışılır.

Referans sinyali genelde sabit olmasına karşın, çalışma şartlarında meydana gelen değişimlerden dolayı belirli zaman ve durumlarda değişebilir. Bu değişim çok sık olmamakla beraber bir sabit ile gösterilir. Referans sinyalindeki bu ani değişim sistem cevabına olumsuz bir etki yapabilir.

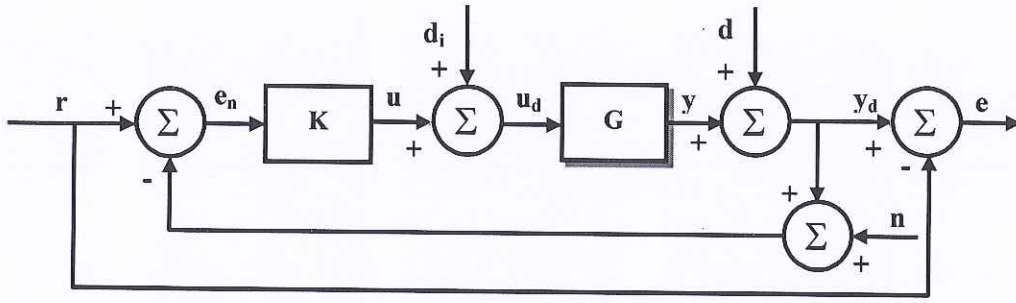
Kontrol sistemlerinde en yaygın olarak karşılaşılan bozucular, yük bozucularıdır. Yük bozucuları kontrol sistemine, sistem modeline etki edecek şekilde eklenerek, sistem cevabını istenilen değerden saptırırlar. Özellikle düşük frekanslarda sisteme etkileri fazladır. Bu tip bozucular kontrol sistemlerinin ortak ve en önemli problemidir. Bir sistemdeki yük değişimi ile eyleyici hızının değişmesi ve buna bağlı olarak sistem cevabının değişimi yük örnek olabilir [103].

Diğer yandan, sistemlerde ölçüm aracı olan sensörlerden kaynaklanan hatalar gürültü olarak tanımlanmaktadır. Sistem cevabı ve buna bağlı olarak hatanın ölçümü sırasında meydana gelir. Sisteme yüksek frekanslarda etkisi oldukça büyüktür. Bütün bu bozucu etkenler genel olarak dış kaynaklı bozucular olarak isimlendirilebilir.

4.4. Geri Beslemeli Bir Sistemin Kararlılığı ve Performansı

Kontrolün amacı, bir işlemdeki değişkenlerin istenilen şekilde davranması için giriş sinyalleri üretmektir. Bir başka ifadeyle sisteme uygun bir giriş uygulayarak, arzu edilen çıkışı elde etmektir. Mühendislik kontrol sistemleri açık çevrimli kontrol ve kapalı çevrimli kontrol olmak üzere iki gruba ayrılır. Açık çevrimli kontrol sistemi, kontrolör ve kontrol edilen sistem olmak üzere iki kısımdan oluşur. Bu tip sistemlerde çıkış sinyali giriş sinyalinin bir fonksiyonudur. Bir başka deyişle, çıkışlar giriş sinyalini, kontrol sistemi içinde doğrudan etkilememektedir. Bu tür kontrol sistemleri genelde sistem yapısının ve giriş sinyallerinin çok iyi bilindiği uygulamalarda kullanılmaktadır.

Sisteme referans ile gerçek çıkış arasındaki farka (hata) göre giriş uygulanıyorsa, buna kapalı çevrimli kontrol adı verilir. Sistem cevabındaki değişmeler, sisteme uygulanacak kontrol sinyalinin belirlenmesi için geri gönderilir. Bu nedenle kapalı çevrimli kontrole "geri beslemeli kontrol" de denir. Sistemde model belirsizlikleri ve sisteme etki eden bozucu sinyallerin varlığı göz önünde bulundurulduğunda, geri beslemeli kontrol tercih edilmektedir. Kontrol sistemlerinde geri beslemenin, kararlılık, model belirsizliklerine karşı dayanıklılık ve bozucuları etkisiz kılmak gibi sistem üzerine olumlu etkileri bulunmaktadır [3]. Geri beslemeli bir kontrol sistemine ait standart blok diyagramı Şekil 4.17'de gösterilmiştir.



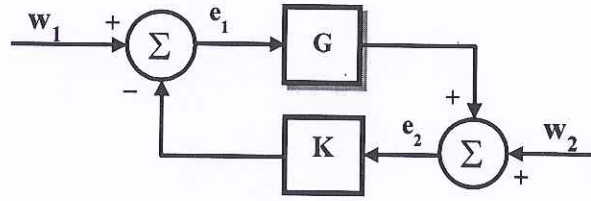
Şekil 4.17. Geri beslemeli bir kontrol sistemine ait standart blok diyagramı.

Verilen blok diyagramında, kontrol edilen fiziksel sistemin G transfer fonksiyon matrisi, bu sistem için tasarlanan kontrolörün transfer fonksiyon matrisi K ile gösterilmiştir. Sisteme etki eden dış kaynaklı sinyaller; r referans sinyali, kontrol sinyaline etki eden d_i bozucu sinyal, fiziksel istemin cevabına etki eden d bozucu sinyal ve ölçüm sinyaline etki eden n gürültü sinyali, u kontrol sinyali ve u_d sisteme giriş kontrol sinyali olarak gösterilmiştir.

4.4.1. Nominal kararlılık

Geri beslemeli bir sistemin iyi konumlanmış olması kapalı çevrim transfer matrisinin iyi tanımlanmış ve uygun olmasını gerektirir. Sisteme etki eden $r(t)$ referans, $d_i(t)$ giriş bozucu sinyali, $d(t)$ çıkış bozucu sinyali, $n(t)$ gürültü sinyalinden $u(t)$ kontrol sinyaline kapalı çevrim transfer matrisi iyi tanımlanmış ve uygun olduğu kabul edilir. $y(t)$ ve bütün diğer sinyaller iyi tanımlanmış ve ilgili transfer matrisleri de uygundur. Bunlardan başka $d(t)$ çıkış bozucu sinyali ve $n(t)$ gürültü sinyalinden $u(t)$ kontrol sinyaline transfer matrisi aynı olmakla $r(t)$ referans sinyalinden $u(t)$ kontrol sinyaline tanımlanan transfer matrisinden işaret olarak farklıdır. $[d_i \ d]^T$ bozucu sinyallerinden $u(t)$ kontrol sinyaline transfer matrisi yazılabilirse ve uygunsa sistem iyi konumlanmıştır [104].

Geri beslemeli bir sistemde K kontrolör ve sisteme etki eden $w_1(t)$ ve $w_2(t)$ dış kaynaklı sinyaller ve $e_1(t)$ ve $e_2(t)$ fiziksel sisteme ve kontrolöre giren sinyaller olarak gruplandırılır. Fiziksel sistem ve kontrolörden geri beslemeli bir sistem basit bir biçimde Şekil 4.18'de verilmiştir.



Şekil 4.18. İçsel kararlılık yapısı.

Burada sistemin iyi konumlanmış olması $[w_1 \ w_2]^T$ 'den $e_1(t)$ 'e tanımlanan transfer matrisinin yazılabilmesi ve uygunluğuyla mümkündür. Şekil 4.18'de verilen sistem için giriş ve çıkış sinyalleri arasında

$$\begin{aligned} e_1 &= w_1 - Ke_2 \\ e_2 &= w_2 + Ge_1 \end{aligned} \quad (4.101)$$

ifadelerinden $e_1(t)$ için

$$(I + KG)e_1 = w_1 - Kw_2 \quad (4.102)$$

elde edilir. Kontrol sisteminin iyi konumlanmış olması $(I + KG)$ 'nin tersinin alınabilmesi ile mümkündür. Bir başka gösterimle, sistemin iyi konumlanmış olması

$$\begin{bmatrix} I & K(\infty) \\ -G(\infty) & I \end{bmatrix} \quad (4.103)$$

ifadesinin tersinin alınabilmesi şartı ile mümkündür. G fiziksel sistem ve K kontrolörü durum uzayı formunda

$$G = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \quad (4.104)$$

ve

$$K = \begin{bmatrix} \hat{A} & \hat{B} \\ \hat{C} & \hat{D} \end{bmatrix} \quad (4.105)$$

ile ifade edilirse burada $G(\infty) = D$ ve $K(\infty) = \hat{D}$ olması durumunda

$$\begin{bmatrix} I & \hat{D} \\ -D & I \end{bmatrix} \quad (4.106)$$

yazılabilir ve tersi alınabilirse sistem iyi konumlanmış olur. Birçok uygulamada $D=0$ alınarak sistemin iyi konumlu olma durumu garanti altına alınmış olur.

Şekil 4.18'de verilen sistemin iyi konumlanmış olması ve Denklem 4.104 ve Denklem 4.105'de verilen $G(s)$ fiziksel sistem ve $K(s)$ kontrolörünün kararlı ve algılanabilir olduğu kabul edilir. $w_1(t)$ ve $w_2(t)$ 'in 0 olması durumunda $G(s)$ fiziksel sistem ve $K(s)$ kontrolörün durum uzayı

$$\dot{x} = Ax + Be_1 \quad (4.107)$$

$$e_2 = Cx + De_1 \quad (4.108)$$

$$\dot{\hat{x}} = -\hat{A}\hat{x} - \hat{B}e_2 \quad (4.109)$$

$$e_1 = -\hat{C}\hat{x} - \hat{D}e_2 \quad (4.110)$$

ile ifade edilir. Bu durumda sistemin içsel kararlılığı, $(x, \hat{x}) = (0, 0)$ 'nın asimptotik kararlılığını gerektirir. İçsel kararlık durum uzayındaki gösterimi için Denklem 4.108 ve Denklem 4.110'daki e_1 ve e_2 ifadeleri

$$\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & \hat{D} \\ -D & I \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & -\hat{C} \\ C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix} \quad (4.111)$$

ile ifade edilir. Denklem 4.107 ve Denklem 4.109'dan

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}} \\ \dot{x} \end{bmatrix} = \tilde{A} \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix} \quad (4.112)$$

yazılırsa burada \tilde{A}

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & -\hat{A} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & -\hat{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & \hat{D} \\ -D & I \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & -\hat{C} \\ C & 0 \end{bmatrix} \quad (4.113)$$

ile ifade edilir. Sistemin içsel kararlı olması \tilde{A} 'nın öz değerlerinin sol yarı düzlemde olmasını gerektirir. Buradaki yaklaşımda G ve K 'nin kararlı ve algılanabilir olması şartıyla durum uzayı kavramıyla yapılmıştır. Bununla beraber içsel kararlılığa transfer matrisi çerçevesinden bakılması da oldukça kullanışlı ve önemlidir. Şekil 4.18'de verilen sistemin transfer matrisi

$$\begin{bmatrix} I & K \\ -G & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} \quad (4.114)$$

ile ifade edilir. Burada sistemin kararlılığı bütün sınırlanmış girdilere karşılık çıkışlarında sınırlanması ile mümkündür. Bu durumda sistemin içsel kararlılığı

$$\begin{bmatrix} I & K \\ -G & I \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} I - K(I + GK)^{-1}G & -K(I + GK)^{-1} \\ (I + GK)^{-1}G & (I + GK)^{-1} \end{bmatrix} \quad (4.115)$$

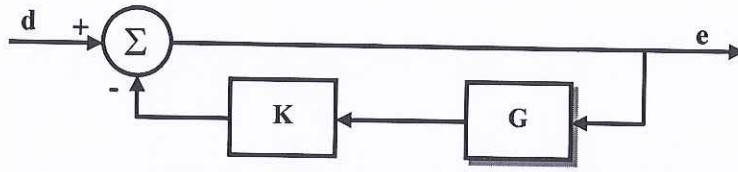
$[w_1, w_2]$ 'den $[e_1, e_2]$ 'e transfer matrisinin RH_∞ bir elemanı olmasıyla mümkündür. Sistemin içsel kararlılık Denklem 4.115'deki matrisin her bir elemanın RH_∞ 'in bir elemanı olması ile sağlanır.

İçsel kararlılık geri beslemeli bir sistemin basit bir gereksinimidir. Bütün iç bağlantılı sistemler kaçınılmaz olarak sıfırdan farklı başlangıç koşullarına ve hatalara maruz kalmaktadır. Kapalı çevrimin herhangi bir yerinde oluşan bu hatalar sistem tarafından yok edilemediği takdirde başka bir yerde sınırlandırılmamış sinyallere dönüşür. Sistemde içsel kararlılık, sisteme etki eden sinyalleri sınırlandırarak sistemdeki bütün sinyallerin sınırlandırılmasını sağlar.

4.4.2. Nominal performans

Sisteme etki eden dış kaynaklı sinyaller sistem cevabını olumsuz yönde etkiler. Bu durumda referans ile gerçek çıkış arasındaki hata artar. Geri beslemeli bir kontrol sisteminde kontrolör performansından, sistemdeki bu hatayı mümkün olduğu kadar küçük tutması beklenir. Sistemin performansı her bir sinyalin bir diğeriyle olan ilişkisi ile belirlenir. Sisteme etki eden bozucu sinyaller $r(t)$, $d_i(t)$, $d(t)$, $n(t)$ ile $e(t)$ arasındaki ilişki, tasarlanacak kontrolörün hedefini belirler. Her bir bozucu sinyal ve hata arasındaki ilişki diğer bozucu sinyal büyüklüklerinin olmadığı kabul edilmesi durumunda tek tek ifade edilebilir [105].

Standart geri beslemeli blok diyagramında çıkış sinyaline etki eden $d(t)$ bozucu sinyali ve $e(t)$ hata sinyali arasındaki ilişki Şekil 4.19'da gösterilmiştir.



Şekil 4.19. $d(t)$ bozucu sinyali ve $e(t)$ hata sinyali arasındaki ilişkinin blok diyagramı.

Sistem çıkışına etki eden bozucu sinyal ile hata sinyali arasındaki bağıntı Şekil 4.19'dan

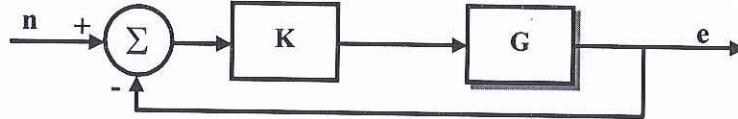
$$\frac{e}{d} = \frac{1}{1+GK} \quad (4.116)$$

şeklinde yazılır. Denklem 4.116 sistemin çıkış duyarlılık fonksiyonu

$$S_o = \frac{1}{1+GK} \quad (4.117)$$

olarak adlandırılır.

Sistemde bir başka bozucu büyüklük kaynağı olan ve ölçüm sinyaline etki eden $n(t)$ gürültü sinyali ve $e(t)$ hata sinyali arasındaki ilişki Şekil 4.20 'de gösterilmektedir.



Şekil 4.20. $n(t)$ gürültü sinyali ve $e(t)$ hata sinyali arasındaki ilişkinin blok diyagramı.

Sistemde ölçüm sinyaline etki eden gürültü sinyali ile hata sinyali arasındaki bağıntı Şekil 4.20'den

$$\frac{e}{n} = \frac{GK}{1+GK} \quad (4.118)$$

şeklinde yazılır. Denklem 4.118 sistemin çıkış tamamlayıcı duyarlılık fonksiyonu

$$T_o = \frac{GK}{1+GK} \quad (4.119)$$

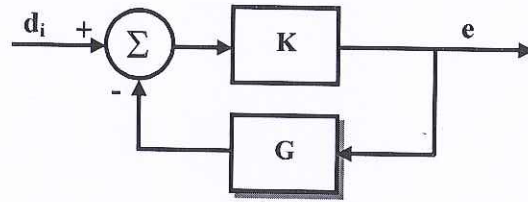
olarak adlandırılır. Denklem 4.119'de geçen GK çıkış açık çevrim transfer fonksiyonu

$$L_o = GK \quad (4.120)$$

olarak tanımlanır. Denklem 4.118 ve 4.119'den S_o çıkış duyarlılık fonksiyonu ve T_o çıkış tamamlayıcı duyarlılık fonksiyonu arasında

$$S_o + T_o = 1 \quad (4.121)$$

bağıntısı elde edilir. Sistemde $n(t)$ gürültü ve $d(t)$ bozucu sinyalinden başka kontrol sinyaline etki eden $d_i(t)$ bozucu sinyali ve $e(t)$ hata sinyali arasındaki ilişki Şekil 4.21'de gösterilmiştir.



Şekil 4.21. $d_i(t)$ bozucu sinyali ve $e(t)$ hata sinyali arasındaki ilişkinin blok diyagramı.

Kontrol sinyaline etki eden bozucu sinyal ve hata sinyali arasındaki bağıntı Şekil 4.21'den

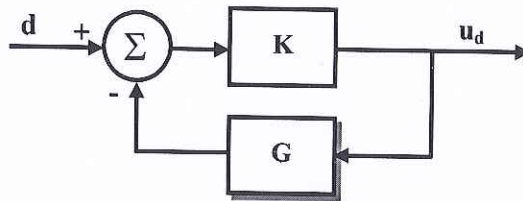
$$\frac{e}{d_i} = \frac{G}{1 + GK} \quad (4.122)$$

şeklinde yazılır. Denklem 4.117 göz önünde bulundurulduğunda, Denklem 4.122

$$\frac{e}{d_i} = GS_o \quad (4.123)$$

şeklinde ifade edilebilir.

Sisteme etki eden bozucu sinyaller, kontrol sinyaline de etki ederler. Sistem çıkışına etki eden $d(t)$ gürültü sinyali ve $u_d(t)$ hatalı giriş kontrol sinyali arasındaki ilişki Şekil 4.22'de gösterilmiştir.



Şekil 4.22. $d(t)$ bozucu sinyali ve $u_d(t)$ kontrol sinyali arasındaki ilişkinin blok diyagramı.

Sistemde ölçüm sinyaline etki eden gürültü sinyali ile hatalı giriş kontrol sinyali arasındaki bağıntı

$$\frac{u_d}{d} = \frac{K}{1+GK} \quad (4.124)$$

ile yazılabilir. Denklem 4.124 sistemin kontrol duyarlılık fonksiyonu

$$R = \frac{K}{1+GK} \quad (4.125)$$

olarak adlandırılır.

Yukarıda diğer bozucu büyüklükleri olmadığı kabul edilerek her bir bozucu sinyalin sistemdeki hataya nasıl etki ettiği gösterildi. Kontrol sistemine etki eden bütün sinyaller birbiriyle ilişkilidir. Sinyaller arasındaki bağlantı, açık çevrim bağlantı yapısının oluşturulması ve LFT yardımıyla kolaylıkla bulunabilir. Bunun için sisteme etki eden giriş ve çıkış büyüklükleri arasında açık çevrim bağlantısı

$$\begin{bmatrix} e \\ y \\ u \\ u_d \\ e_n \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & G & 0 & -1 & G \\ 1 & G & 0 & 0 & G \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -G & -1 & 1 & -G \end{array} \right] \begin{bmatrix} d \\ d_i \\ n \\ r \\ u \end{bmatrix} \quad (4.126)$$

ile ifade edilir. Geri beslemeli kapalı çevrimli sistemde $e_n(t)$ kontrolör giriş sinyali ve $u(t)$ kontrol sinyali arasındaki bağıntı

$$u = Ke_n \quad (4.127)$$

ile gösterilir. LFT yardımıyla kapalı çevrimli sistemde iç sinyaller ve bozucu sinyaller arasındaki bağıntı ortaya çıkartılabilir. Denklem 4.126 ve Denklem 4.127 arasındaki bağıntı

$$\begin{bmatrix} e \\ y \\ u \\ u_d \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cccc} 1 & G & 0 & -1 \\ 1 & G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right] + \begin{bmatrix} G \\ G \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} K [1+GK]^{-1} \begin{bmatrix} -1 & -G & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d \\ d_i \\ n \\ r \end{bmatrix} \quad (4.128)$$

şeklinde yazılabilir. Burada yapılan işlemler neticesinde giriş ve çıkış büyüklükleri arasındaki bağıntı

$$\begin{bmatrix} e \\ y \\ u \\ u_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_o & GS_o & -T_o & -S_o \\ S_o & GS_o & -T_o & T_o \\ -KS_o & -T_i & -KS_o & KS_o \\ -KS_o & S_i & -KS_o & KS_o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d \\ d_i \\ n \\ r \end{bmatrix} \quad (4.129)$$

elde edilir. Denklem 4.129'dan yararlanarak sistemdeki her bir iç sinyalin bozucu sinyallerle olan ilişkileri

$$y = T_o(r - n) + S_o G d_i + S_o d \quad (4.130)$$

$$r - y = S_o(r - d) + T_o n - S_o P d_i \quad (4.131)$$

$$u = KS_o(r - n) - KS_o d - T_i d_i \quad (4.132)$$

$$u_d = KS_o(r - n) - KS_o d + S_i d_i \quad (4.133)$$

yazılabilir. Burada yer alan T_i ve S_i , giriş duyarlılık fonksiyonu ve giriş tamamlayıcı duyarlılık fonksiyonu

$$S_i = \frac{1}{1 + KG} \quad (4.134)$$

$$T_i = \frac{KG}{1 + KG} \quad (4.135)$$

olarak tanımlanır. Burada, KG giriş açık çevrim transfer fonksiyonu matrisi

$$L_i = KG \quad (4.136)$$

olarak adlandırılır. Denklem 4.134 ve 4.135'den, S_i giriş duyarlılık fonksiyonu ve T_i giriş tamamlayıcı duyarlılık fonksiyonu arasındaki bağıntı

$$S_i + T_i = 1 \quad (4.137)$$

olduğu görülür.

Denklem 4.130'den Denklem 4.133'e kadar yer alan bağıntılar yardımıyla geri beslemeli bir sistemin performans gereksinimleri belirlenebilir. Örneğin Denklem 4.130'daki fiziksel sistemin cevabına etki eden bozucu sinyalin etkisi S_o çıkış duyarlılık fonksiyonu en aza indirgenerek azaltılır. Bu durumda S_o çıkış duyarlılık fonksiyon matrisini, belirli frekans aralığında frekansa bağlı tekil değerler

kullanılarak, matrisin üst tekil değerini $\bar{\sigma}(S_o)$ 'nin 1'in altında tutulması ile bozucu sinyalin etkisinin en aza indirilmesi sağlanır [3].

Denklem 4.130 dikkate alındığında sisteme etki eden $d(t)$ ve $d_i(t)$ bozucu sinyallerin sistem cevabına olan etkisinin azaltılması, S_o ve S_oG transfer fonksiyon matrislerinin en büyük tekil değerlerinin en aza indirilmesiyle mümkündür. S_o ve S_oG duyarlılık transfer fonksiyon matrislerinin en büyük tekil değerleri için

$$\bar{\sigma}(S_o) = \bar{\sigma}((1 + GK)^{-1}) \quad (4.138)$$

$$\bar{\sigma}((1 + GK)^{-1}) = \frac{1}{\underline{\sigma}(1 + GK)} \quad (4.139)$$

$$\bar{\sigma}(S_oG) = \bar{\sigma}((1 + GK)^{-1}G) \quad (4.140)$$

$$\bar{\sigma}((1 + GK)^{-1}G) = \bar{\sigma}(GS_i) \quad (4.141)$$

bağıntıları yazılabilir. Aynı şekilde Denklem 4.133'e bakılarak fiziksel sistemin giriş sinyali olan $u_p(t)$ ye etki eden $d(t)$ ve $d_i(t)$ bozucu sinyaller sistem cevabına olan etkisinin azaltılması, S_i ve KS_o transfer fonksiyon matrislerinin en büyük tekil değerlerinin en aza indirilmesiyle mümkündür. S_i ve KS_o duyarlılık transfer fonksiyon matrislerinin en büyük tekil değerleri için

$$\bar{\sigma}(S_i) = \bar{\sigma}((1 + KG)^{-1}) \quad (4.142)$$

$$\bar{\sigma}((1 + KG)^{-1}) = \frac{1}{\underline{\sigma}(1 + KG)} \quad (4.143)$$

$$\bar{\sigma}(KS_o) = \bar{\sigma}(K(1 + GK)^{-1}) \quad (4.144)$$

$$\bar{\sigma}(K(1 + GK)^{-1}) = \bar{\sigma}(S_iK) \quad (4.145)$$

eşitlikleri yazılabilir. Bununla beraber

$$\underline{\sigma}(GK) - 1 \leq \underline{\sigma}(1 + GK) \leq \underline{\sigma}(GK) + 1 \quad (4.146)$$

$$\underline{\sigma}(KG) - 1 \leq \underline{\sigma}(1 + KG) \leq \underline{\sigma}(KG) + 1 \quad (4.147)$$

eşitsizlikleri göz önünde bulundurulduğunda, $\underline{\sigma}(GK) > 1$ şartının sağlanması durumunda

$$\frac{1}{\underline{\sigma}(GK) + 1} \leq \bar{\sigma}(S_o) \leq \frac{1}{\underline{\sigma}(GK) - 1} \quad (4.148)$$

eşitsizliği yazılabilir. Aynı şekilde $\underline{\sigma}(KG) > 1$ ise şartının sağlanması durumunda

$$\frac{1}{\underline{\sigma}(KG)+1} \leq \bar{\sigma}(S_i) \leq \frac{1}{\underline{\sigma}(KG)-1} \quad (4.149)$$

eşitsizliği yazılır. Denklem 4.148 ve Denklem 4.149'deki eşitsizliklerden

$$\bar{\sigma}(S_o) \ll 1 \Leftrightarrow \underline{\sigma}(GK) \gg 1 \quad (4.150)$$

$$\bar{\sigma}(S_i) \ll 1 \Leftrightarrow \underline{\sigma}(KG) \gg 1 \quad (4.151)$$

çıkarımları yapılabilir. Bu durumda, geri beslemeli bir sistemde, bozucu sinyallerin sisteme etkisinin yüksek olduğu frekans aralığında, giriş ve çıkış duyarlılık fonksiyonlarının üst tekil değerinin minimum olması için, sistemde giriş ve çıkış açık çevrim transfer fonksiyonunun alt tekil değerinin maksimum değer alması gerekir. Denklem 4.150 ve Denklem 4.151'deki şartlarda S_oG ve KS_o için

$$\bar{\sigma}(S_oG) = \bar{\sigma}((I + GK)^{-1}G) \cong \bar{\sigma}(K^{-1}) = \frac{1}{\underline{\sigma}(K)} \quad (4.152)$$

$$\bar{\sigma}(KS_o) = \bar{\sigma}(K(I + GK)^{-1}) \cong \bar{\sigma}(G^{-1}) = \frac{1}{\underline{\sigma}(G)} \quad (4.153)$$

eşitlikleri yazılabilir. Buradan kontrol sinyaline etki eden $d_i(t)$ bozucu sinyalinin etkisinin azaltılması için ilgili frekanslarda kontrolör kazancının yeteri kadar büyük olması beklenir ($\underline{\sigma}(K) \gg 1$). Benzer şekilde sistem cevabına etki eden $d(t)$ bozucu sinyalinin etkisinin azaltılması için ilgili frekanslarda G fiziksel sisteminin kazancının yeteri kadar büyük olması beklenir ($\underline{\sigma}(G) \gg 1$). Yüksek frekanslarda sistem kazancının yüksek olması istenilen bir durum değildir. Bu durumda sistemin performans gereksinimleri, frekans değerleri ile değişmektedir. Bu değişime, yüksek frekanslarda etkisini artıran, sistemin kararlılığını ve performansını olumsuz yönde etkileyen model belirsizlikleri ve gürültü sinyali neden olur.

Herhangi bir $(1 + \Delta)G$ belirsiz modelde kapalı çevrimli sistemin kararlılığı

$$\det(I + (1 + \Delta)GK) \quad (4.154)$$

$$\det(I + GK) \det(I + \Delta T_o) \quad (4.155)$$

ile açıklanır ve sağ yarı düzlemde kök istenmez. Belirsizliğin etkin olduğu frekanslarda $\bar{\sigma}(T_o)$ değerinin küçük bir değer alması istenir. Bu durum açık çevrim kazancının büyük olması durumuyla çakışır. Aynı şekilde, sistemde ölçüm sinyaline

etki eden gürültü sinyali yüksek frekanslarda etkisini artırır. Bu durumda yüksek frekanslarda açık çevrim kazancının büyük olması durumunda sistem cevabı

$$y = T_o(r - n) + S_o G d_i + S_o d \cong (r - n) \quad (4.156)$$

şeklinde yazılabilir. Denklem 4.156'dan anlaşılacağı üzere sistem üzerine etki eden gürültü sinyaline azaltıcı etki gösterememekte ve tam bir geçirgenlik sağlamaktadır.

Bunlardan başka $\underline{\sigma}(G(j\omega)) \ll 1$, $\underline{\sigma}(L_i(j\omega)) \gg 1$ ve $\underline{\sigma}(L_o(j\omega)) \gg 1$ olması durumunda kontrol eylemi kabul edilemez bir duruma gelmekte ve bu durum hareketlendiricileri doyum noktasına getirebilmektedir. Bu durum

$$u = K S_o(r - n - d) - T_i d = S_i K(r - n - d) - T_i d_i \cong G^{-1}(r - n - d) - d_i \quad (4.157)$$

ile açıkça görülür. G 'nin kare ve tersi alınabilen bir transfer fonksiyon matrisi olduğu düşünülürse $\underline{\sigma}(G(j\omega)) \ll 1$ olması durumunda

$$\underline{\sigma}(G^{-1}(j\omega)) = \frac{1}{\bar{\sigma}(G(j\omega))} \quad (4.158)$$

$$\frac{1}{\bar{\sigma}(G(j\omega))} \gg 1 \quad (4.159)$$

yazılabilir. Benzer şekilde hareketlendiricinin doyum noktasına ulaşmaması için açık çevrim transfer fonksiyonu kazancının küçük olduğu frekanslarda $\underline{\sigma}(L_i(j\omega)) \ll 1$, $\underline{\sigma}(L_o(j\omega)) \ll 1$, kontrolör kazancı $\bar{\sigma}(K)$ fazla büyük tutulmamalıdır. Bu durum

$$u = K S_o(r - n - d) - T_i d_i \cong K(r - n - d) \quad (4.160)$$

ile açıkça görülür. Bütün bunları özetlemek gerekirse, genel olarak düşük frekanslarda bozucu sinyallerin sisteme etkisinin azaltılması sistem performansı olarak değerlendirilir. İyi bir performans için düşük frekanslarda

$$\underline{\sigma}(GK) \gg 1; \underline{\sigma}(KG) \gg 1; \underline{\sigma}(K) \gg 1 \quad (4.161)$$

şartının sağlanması istenir. Buna karşın, model belirsizliklerinin ve gürültünün etkisinin arttığı yüksek frekanslarda, sistemden belirsizliklere karşı dayanıklı olması beklenir. Dayanıklılık yüksek frekanslarda

$$\underline{\sigma}(GK) \ll 1; \underline{\sigma}(KG) \ll 1; \underline{\sigma}(K) \leq M \quad (4.162)$$

olma durumu ile sağlanır. M 'nin çok büyük olmaması koşuluyla yukarıdaki ifadeler frekansa bağlı olarak performans gereksinimlerinin açık L çevrim transfer fonksiyonlarıyla olan ilişkileri hakkında fikir verir.

4.5. Ağırlıklı filtrelerin sistemde kullanılması

Kapalı çevrimli bir sistemde, S duyarlılık fonksiyonu sistem performansının ve T tamamlayıcı duyarlılık fonksiyonu dayanıklılığın göstergesidir. Düşük frekanslarda, S duyarlılık fonksiyonu en aza indirgenip sistemin bozuculara karşı duyarsız olması istenir. Buna karşın yüksek frekanslarda, T tamamlayıcı duyarlılık fonksiyonunun en aza indirgenip sistemin gürültüye karşı dayanıklı olması beklenir. Performans ve dayanıklılık beklentisi frekansa bağlı olarak değişir. Kontrolörden de, kararlılığın yanı sıra değişen bu sistem gereksinimlerini karşılaması istenir.

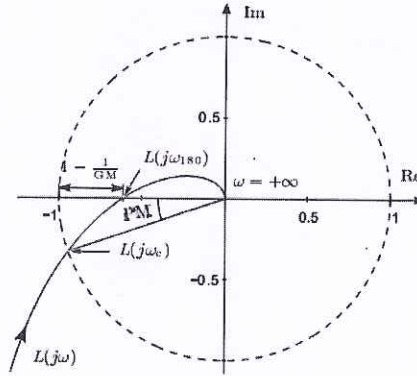
Frekansa bağlı olarak değişen sistem gereksinimlerini kontrol problemine yansıtmak için ağırlık fonksiyonlarının kullanılması iyi bir metottur [3]. Çözüm için hangi algoritma kullanılırsa kullanılsın tasarlanan kontrolör, seçilen bu ağırlık fonksiyonlarına bağlı kalacaktır. Maalesef ağırlık fonksiyonu seçimi için belirli bir kural yoktur. Tasarımcının sistem gereksinimlerini belirleyerek, bunu yansıtabilecek en uygun ağırlık fonksiyonunu seçmesi gerekir.

Duyarlılık fonksiyonlarıyla belirtilen sistem gereksinimleri dışında, sistemin cevabına etki eden başka performans ölçütleri de vardır. Bunlar, sistemin duyarlılık fonksiyonlarıyla yakından alakalıdır. Ağırlık fonksiyonu tasarımına geçmeden önce bu bağlantıların da incelenmesi gerekir.

4.5.1. Sistem performansına etki eden faktörler

Ağırlık fonksiyon seçimi için bir kural olmaması, tasarımcının kontrol etmek istediği sistemi çok iyi analiz etmesini gerektirir. Bu nedenle ağırlık fonksiyon seçiminden önce sistem cevabına etki eden bütün faktörler değerlendirilmelidir [102].

Bir SISO sistemde, sistem performansı frekans tanım alanında, duyarlılık fonksiyonu, tamamlayıcı duyarlılık fonksiyonu, kazanç payı, faz payı, geçiş frekansı, bant genişliği ile değerlendirilir. Kararlı bir kontrol sisteminin Nyquist diyagramı Şekil 4.23'de gösterilmiştir.



Şekil 4.23. Kararlı bir sistem için $L(j\omega)$ 'nin Nyquist diyagramı.

Grafikte gösterilen bir sistem için GM kazanç payı

$$GM = 1/|L(j\omega_{180})| \quad (4.163)$$

şeklinde ifade edilir. Burada, ω_{180} faz geçiş frekansı Nyquist eğrisinin reel eksenine $[0, -1]$ aralığında kestiği noktaya karşılık gelen değerdir. Kazanç payı, kapalı çevrim kontrol sisteminin kararsız olmadan önce, L açık çevrim kazancının ne kadar yükselebileceğinin bir göstergesidir. Diğer bir deyişle, sistemde kalıcı durum kazanç belirsizliğine karşı güvenlik katsayısı gibi değerlendirilebilir. Nyquist eğrisinden faydalanılarak yazılabilecek bir diğer performans ölçütü de PM faz payı

$$PM = \angle L(j\omega_c) + 180^\circ \quad (4.164)$$

ile gösterilir. Burada, ω_c kazanç geçiş frekansı $|L(j\omega)| = 1$ olduğu frekanstır. Faz payı, kapalı çevrimli kontrol sisteminin kararsız olmadan önce ne kadar negatif faz yükleyebileceğinin bir göstergesidir. Genel olarak faz payının 30° den daha büyük olması istenir. Faz payı sistemde zaman gecikmelerinden kaynaklanan belirsizliklere karşı bir güvenlik katsayısı olarak düşünülebilir. Sisteme eklenilecek zaman gecikmesinin

$$\theta_{\max} = PM/\omega_c \quad (4.165)$$

olması durumunda sistem kararsızlık sınırına gelir. Buna göre ω_c frekansı düştükçe sistem daha büyük zamanlama hatalarını tolere edebilir. Açık çevrim transfer fonksiyonunun sağ yarı düzleminde sıfırlarının olması ω_c frekansına etki eder ve sistemde faz gecikmelerinden kaynaklanan hatalara sebebiyet verir.

Kazanç ve faz payları, tasarımcının oluşabilecek kazanç belirsizlikleri ve zaman gecikmelerinden kaynaklanan belirsizliklere karşı bir fikir edinmesini sağlarlar. Kazanç ve faz payları, sistemin duyarlılık ve tamamlayıcı duyarlılık fonksiyonlarıyla da yakından ilişkilidir. Önemli bir performans ölçütü olan M_S duyarlılık fonksiyonu maksimum genliği ve M_T tamamlayıcı duyarlılık fonksiyonu maksimum genliği

$$M_S = \max_{\omega} |S(j\omega)| \quad (4.166)$$

$$M_T = \max_{\omega} |T(j\omega)| \quad (4.167)$$

ile ifade edilir. Genellikle M_S ' nin 2 (6 dB), M_T 'nin de 1.25 (2 dB) den küçük olması istenir [102]. M_S ve M_T ' nin 4'den büyük olması bu sistemin düşük performanslı ve dayanıksız olduğunu gösterir. Duyarlılık fonksiyonu M_S tepe noktası ile GM kazanç payı ve PM faz payı arasında

$$GM \geq \frac{M_S}{M_S - 1} \quad (4.168)$$

$$PM \geq 2 \arcsin\left(\frac{1}{2M_S}\right) \geq \frac{1}{M_S} \quad (4.169)$$

eşitsizlikleri yazılabilir. $M_S=2$ olması durumunda, $GM \geq 2$ kazanç payının ve $PM \geq 29^\circ$ faz payının olduğu gözlenir. Aynı şekilde M_T tamamlayıcı duyarlılık fonksiyonu maksimum genliği ile kazanç ve faz payları arasındaki ilişki

$$GM \geq 1 + \frac{1}{M_T} \quad (4.170)$$

$$PM \geq 2 \arcsin\left(\frac{1}{2M_T}\right) \geq \frac{1}{M_T} \quad (4.171)$$

yazılabilir. $M_T=2$ olması durumunda, $GM \geq 1.25$ kazanç payı ve $PM \geq 29^\circ$ faz payı olduğu gözlenir. Duyarlılık fonksiyonları arasındaki $S+T=1$ şartı düşünüldüğünde,

$M_s \geq 1$ kaçınılması gereken bir durumdur. Buna rağmen ω_{180} faz geçiş frekansı için sistemin duyarlılık fonksiyonu ve kazanç payı arasındaki

$$S(j\omega_{180}) = \frac{1}{1 - \frac{1}{GM}} \quad (4.172)$$

eşitliği yazıldığında S duyarlılık fonksiyonunun zorunlu olarak 1'den büyük olması gerektiği görülür.

Sistemde bir diğer önemli performans ölçütü de ω_B bant genişliğidir. Bant genişliği sistemin cevap hızıyla doğrudan ilişkilidir. Yüksek bant genişliği yükselme zamanının kısa olmasına, yani sistemin hızlı cevap vermesine neden olur. Bu sisteme etki eden yüksek frekanslı sinyallerin sistem cevabına çok daha kolay yansımaya, dolayısıyla sistemin parametre değişimlerine ve gürültüye karşı dayanıksız olmasına yol açar. Diğer taraftan bant genişliğinin dar olması sistem cevabının yavaş olmasına neden olur.

Bant genişliği, kontrol eyleminin etkin olduğu $[\omega_1, \omega_2]$ frekans aralığında seçilir. Düşük frekanslarda kontrolün etkin olduğu düşünüldüğünde, $\omega_1 = 0$ olarak kabul edilebilir. Bu durumda bant genişliği $\omega_2 = \omega_B$ olarak belirlenir. Kapalı çevrimli bir sistemde ω_B bant genişliği, sistemin S duyarlılık fonksiyonuyla ilişkilidir ve $|S(j\omega)| = 0.707$ ilk geçtiği frekans olarak kabul edilir.

Bir diğer yaklaşım da kontrolün etkin olduğu yüksek frekanslarda $|T(j\omega)| = 0.707$ tamamlayıcı duyarlılığın olduğu ω_{BT} frekansının bant genişliği olarak seçilmesidir. Kontrol sistemleri tasarımıda ω_{BT} birçok durumda yanıtıcı olmaktadır. Bundan dolayı tasarımlar genellikle ω_B 'ye göre yapılır. Sistemde ω_c kazanç geçiş frekansı, ω_B duyarlılık bant genişliği ve ω_{BT} tamamlayıcı duyarlılık bant genişliği arasındaki ilişki

$$\omega_B < \omega_c < \omega_{BT} \quad (4.173)$$

ile verilir.

Tek giriş ve tek çıkışlı (SISO) ve çok girişli ve çok çıkışlı (MIMO) sistemler için en önemli fark MIMO sistemlerin yönlülük kavramıyla ifade edilmesidir. Yönlülük, vektörler ve matrislerle ilgili bir durumdur. Yönlülük karmaşık bir kavram olmasına rağmen, SISO sistemlerin performans ölçütlerinin MIMO sistemler için geliştirilebilecek tekniklerle ilgili çalışmalar yapılmıştır [102]. Tekil değer ayrışımı bu çok değişkenli yönlülüğü ölçebilecek uygun bir araçtır. SISO sistem performansı ile ilgili bulunan kesin değerler, yerini MIMO sistemler için maksimum tekil değere bırakır.

MIMO sistemler için performans değerlendirmesi S duyarlılık ve T tamamlayıcı duyarlılık fonksiyonlarının tekil değerleri ile yapılır. SISO sistem için yazılan M_S duyarlılık fonksiyonu maksimum genliği ve M_T tamamlayıcı duyarlılık fonksiyonu maksimum genliği, MIMO sistemler için

$$\|S\|_{\infty} = \max_{\omega} \bar{\sigma}(S(j\omega)) \quad (4.174)$$

$$\|T\|_{\infty} = \max_{\omega} \bar{\sigma}(T(j\omega)) \quad (4.175)$$

ile ifade edilir. SISO sistemler için incelenen ve sistem cevabının hızına etki eden ω_B bant genişliği, MIMO sistemlerde aynı şekilde tekil değer yardımıyla bulunur. SISO sistemlerde sistemin S duyarlılık fonksiyonu yerine, MIMO sistemlerde performans duyarlılık fonksiyonunun $\underline{\sigma}(S)$ alt tekil değeri ve $\bar{\sigma}(S)$ üst tekil değeri kullanılır. Bu durum tek bir bant geçiş frekansının olmadığını gösterir. MIMO sistemlerde ω_B bant genişliği frekansı yerine, duyarlılık fonksiyonu $\underline{\sigma}(S)$ alt tekil değer grafiğinin 0.707'yi geçtiği frekans ve $\bar{\sigma}(S)$ üst tekil değer grafiğinin 0.707'yi geçtiği frekans değeri arasındaki bant genişliği bölgesi kullanılır. Buna rağmen tasarımda tek bir bant genişliği frekansı kullanmak istenirse, en kötü durum performansını gösteren $\bar{\sigma}(S)$ üst tekil değer grafiğinin 0.707'yi geçtiği frekans değerinin seçilmesi gerekir.

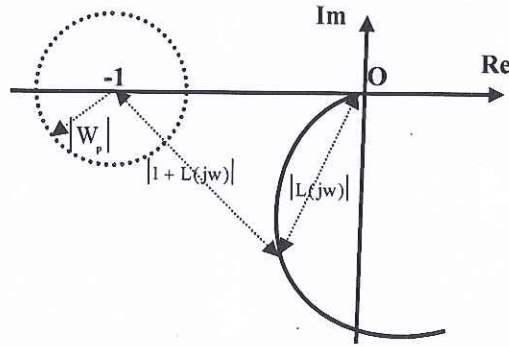
4.5.2. Ağırlık Fonksiyonlarının Seçimi

Sistem gereksinimleri önceki kısımda aktarılan sistemin performansına yönelik değerlendirmelerle belirlenir. Frekansa bağlı olarak değişen bu sistem gereksinimlerini kontrol problemine yansıtmak için en uygun araç, bu gereksinimlere dair bilgiler içeren ağırlık fonksiyonlarıdır.

4.5.2.1. Performans ağırlık fonksiyonu seçimi

Kapalı çevrimli bir sistemde S duyarlılık fonksiyonu hem SISO hem de MIMO sistemlerde kullanılan iyi bir performans göstergesidir. S duyarlılık fonksiyonunun en büyük avantajı tasarım ölçütü olarak sadece $|S|$ genliğinin kullanılması, fazının göz ardı edilmesidir.

Bir nominal sistemde performans şartını belirlemek için L açık çevrim transfer fonksiyonu bir sistemin ile W_p performans ağırlık fonksiyonu Nyquist diyagramı Şekil 4.24'de gösterilmiştir.



Şekil 4.24. Nominal performans için Nyquist diyagramı.

Şekil 4.24'den herhangi bir frekans değerinde $L(j\omega)$ açık çevrim transfer fonksiyonunun -1 noktasına olan uzaklığı $|1 + L(j\omega)|$ olduğu görülmektedir [106]. Nyquist eğrisinde -1 kararsızlık noktasını merkez alan bir disk ile gösterilen W_p ağırlık fonksiyonunun sistemin istenilen performans gereksinimi için

$$|W_p(j\omega)| < |1 + L(j\omega)|; \quad \forall \omega \quad (4.176)$$

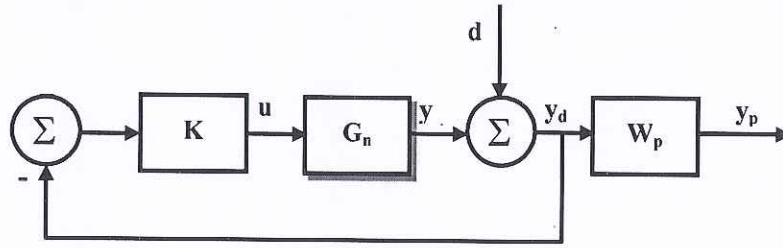
$$|W_p S| < 1; \quad \forall \omega \quad (4.177)$$

eşitliği yazılabilir. SISO sistemler için bu performans gereksinimi şartı MIMO sistemlerde H_∞ normu kullanılarak

$$\|W_p S\|_\infty < 1 \quad (4.178)$$

performans gereksinimi yazılır. Burada, $W_p S$ ağırlıklı duyarlılık fonksiyonu olarak adlandırılır. Matematiksel olarak S fonksiyonu için, istenilen özellikleri yansıtacak $1/W_p(s)$ bir üst sınır olarak seçilir.

W_p ağırlıklı fonksiyonu ile sistemin nominal performansını gösteren blok diyagramı Şekil 4.25'da gösterilmiştir.



Şekil 4.25. Nominal performans blok diyagramı.

Denklem 4.178'e göre S duyarlılık fonksiyonu şekillendirilir. Hedeflenen bir S duyarlılık fonksiyonu için;

- ω_B^* minimum bant genişliği frekansı ($|S| = 0.707$ olduğu frekans değeri),
- A maksimum kalıcı durum referans izleme hatası,
- S duyarlılık fonksiyonunun $\|S(j\omega)\|_\infty \leq M$ maksimum genliği,

olarak verilir. Burada, M maksimum genlik yüksek frekanslarda artan gürültü etkisine karşı bir dayanıklılık sınırı olarak yorumlanabilir. Genelde $M=2$ olarak seçilir. Bu durumda, W_p ağırlıklı fonksiyonu

$$W_p(s) = \frac{s/M + \omega_B^*}{s + \omega_B^* A} \quad (4.179)$$

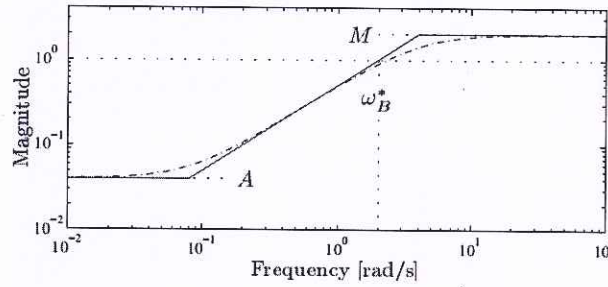
ile ifade edilir. Burada düşük frekans değerlerinde

$$A \approx \frac{1}{|W_p(j\omega)|} \quad (4.180)$$

eşitliği yazılabilir ve $A \leq 1$ seçilir. Aynı şekilde yüksek frekans değerlerinde

$$\frac{1}{|W_p(j\omega)|} \approx M \quad (4.181)$$

eşitliği yazılabilir. Burada $M \geq 1$ olması istenir. $|1/W_p(s)| = 1$ olduğu frekans değeri istenilen ω_B^* bant genişliği frekansına yaklaşır. Denklem 4.179'daki gibi tanımlanan ağırlık fonksiyonunun tersi $1/W_p$ Şekil 4.26'de verilmiştir.



Şekil 4.26. $1/W_p$ 'nin frekans cevabı.

Bu şartlar altında; L açık çevrim transfer fonksiyonunun $L = \omega_B^*/s$ olması durumunda, S duyarlılık fonksiyonu Denklem 4.177'deki koşulu sağlar. $L = \omega_B^*/s$ Bode diyagramında; ω_c kazanç geçiş frekansında, $N=-1$ açık çevrim transfer fonksiyonunun eğimi olarak bulunur. Yüksek performans istenen bazı durumlarda eğimin ω_B^* bant geçişi frekansının daha altında olması istenir. Bu durumlarda ağırlık fonksiyonu derecesinin artırılması beklenir. $N= -2$ olmasının istendiği bir durumda ağırlık fonksiyonu

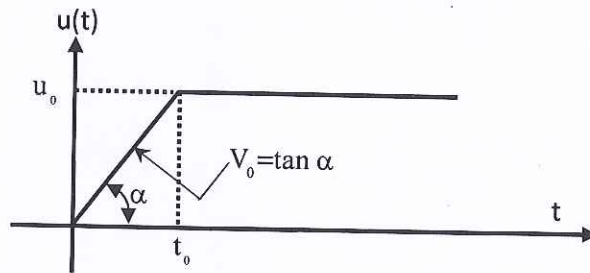
$$W_{p2}(s) = \frac{(s/M^{1/2} + \omega_B^*)^2}{(s + \omega_B^* A^{1/2})^2} \quad (4.182)$$

şeklinde seçilir. Sistemden beklenen performansa göre ağırlık fonksiyonu derecesi daha da artırılabilir. Ancak ağırlık fonksiyonu tasarlanacak kontrolörün derecesini etkilediğinden mümkün olduğunca düşük dereceli seçilmesi beklenir.

4.5.2.2. Wu ağırlık fonksiyonunun seçimi

Pratik olarak eyleyiciler daima belirli sınırlar içinde çalışırlar. Tasarlanacak kontrolörün de bu sınırlar içinde çalışması beklenir. Bu nedenle kontrol probleminde bu kısıtlamaları gösterecek uygun ağırlık fonksiyonu seçimi önem taşır.

Maksimum pozisyonu U_0 ve oransal değişimi V_0 olan bir eyleyici seçildiğinde, bu eyleyicinin birim basamak $u(t)$ sinyaline karşı verdiği cevap Şekil 4.27'de gösterilmiştir [107].



Şekil 4.27. Eyleyicinin $u(t)$ birim basamak sinyaline karşılık cevabı.

Sisteme m genlikli bir basamak girişi etki ettiğinde bu giriş sinyalinin, eyleyici sınırlarını karşıladığı kabul edilirse, m genlikli bu kontrol sinyali eyleyiciden geçebilecek sınır sinyal olarak kabul edilir ve $u(t)$ kontrol sinyalinin bu sınırın altında kalan bütün sinyalleri kapsadığı düşünülebilir. Burada, $u(t)$ kontrol sinyali

$$u(t) = \begin{cases} V_0 t & 0 \leq t \leq t_0 \\ U_0 & t_0 \leq t \leq \infty \end{cases} \quad (4.183)$$

şeklinde ifade edilir. $u(t)$ kontrol sinyalinin Laplace dönüşümü

$$U(s) = \int_0^{\infty} u(t) e^{-st} dt \quad (4.184)$$

$$U(s) = \frac{V_0}{s^2} - \frac{V_0}{s^2} e^{-t_0 s}; \quad t_0 = \frac{U_0}{V_0} \quad (4.185)$$

şeklinde yazılır. Bu ifadede e^{-st_0} 'nin birinci dereceden Padé yaklaşık karşılığı

$$e^{-st_0} \approx \left(1 - \frac{st_0}{2}\right) / \left(1 + \frac{st_0}{2}\right) \quad (4.186)$$

yazılır. Denklem 4.186'yi kullanarak, Denklem 4.185 tekrar

$$U(s) = \frac{U_o}{s} \left(1 + \frac{U_o}{2V_o}\right)^{-1} \quad (4.187)$$

şeklinde yazılabilir. Bu durumda kapalı çevrimli kontrol sistemi için

$$\frac{1}{s} mR(s) = \frac{U_o}{s(1 + (U_o/2V_o)s)} \quad (4.188)$$

$$R(s) = \frac{U_o/m}{1 + (U_o/2V_o)s} \quad (4.189)$$

eşitlikleri yazılır. Bu eşitlikler göz önünde bulundurulduğunda kontrol ağırlık fonksiyonu

$$\|W_u R\|_\infty \leq 1; W_u(s) = \frac{m}{U_o} \left(1 + \frac{U_o}{2V_o} s\right) \quad (4.190)$$

şeklinde seçilebilir. Sadece maksimum sınırın $|u(t)| \leq U_o$ olması durumunda V_o sonsuz değer alır ve ağırlık fonksiyonu

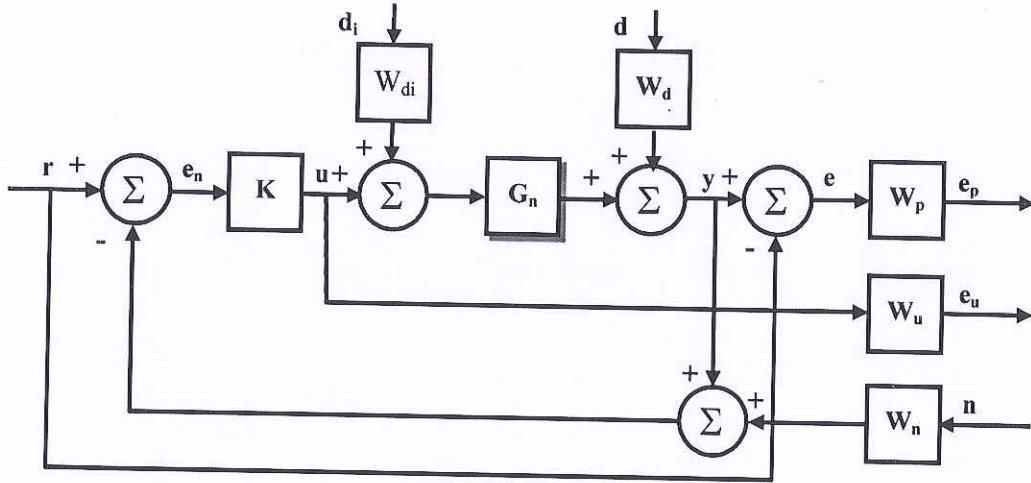
$$W_u(s) = m/U_o \quad (4.191)$$

olarak sadeleştirilebilir.

4.5.3. Kapalı çevrimli kontrol sisteminin ağırlık fonksiyonlarıyla gösterimi

Bir kontrol sisteminde, performans hedefleri performans ağırlık fonksiyonları ile gösterilir [3]. Kontrol sisteminde öncelikli hedef hatayı azaltmaktır. Bunun için performans ağırlık fonksiyonlarının seçilmesi önem taşır. Bunlardan başka tasarlanan kontrolörün gerçek sistemde kullanılacağı göz önünde bulundurularak, sisteme etki eden dış kaynaklı bozucu sinyallerin de kontrol probleminde tanımlanması gerekir.

Bozucuların modellenmesi, sistemdeki etkilerinin analizi yapılırken kolaylık sağlar. Bunun için W ağırlık fonksiyonları uygun bir araçtır. Kapalı çevrimli kontrol sisteminin ağırlık fonksiyonlarıyla gösterimi Şekil 4.28'de verilmiştir.



Şekil 4.28. Kapalı çevrim kontrol sisteminin ağırlık fonksiyonlarıyla gösterimi.

Blok diyagramında W_{di} ve W_d sistemin kontrol sinyaline ve çıkışına etki eden bozucuları karakterize eder. Sisteme etki eden bozucuların sisteme etkisi düşük frekanslarda fazladır.

W_{di} ve W_d ağırlık fonksiyonları, genel olarak düşük frekans geçiren filtre olarak seçilir. Aynı şekilde sistem ölçüm sinyaline etki eden n gürültü sinyali, W_n ağırlık fonksiyon ile karakterize edilir. Gürültülerin ölçüm sinyaline etkisi yüksek frekanslarda artar. Bundan dolayı genellikle W_n ağırlık fonksiyonları yüksek frekans geçiren filtre olarak seçilir.

4.6. Sistemin Dayanıklı Kararlılık ve Dayanıklı Performansı

Kontrol sistemlerinin tasarımında amaç, sistemi kararlı yapacak olan kontrolörün tasarımıdır. Sistem modelinden kaynaklanan belirsizlikler düşünüldüğünde, nominal model için sistemi kararlı yapan bir kontrolör, gerçek sistemin kararlılığını sağlayamayabilir. Kontrol sistemlerinde bir diğer önemli konu da sistemin performansidir. Kararlılık şartını sağlayan bir kontrolörden hedeflenen performansı sağlaması istenir. G_n Nominal model için hedeflenen performansı sağlayan bir kontrolör, belirsizliklerin varlığında gerçek sistemde, bu hedefleri sağlamakta başarısız olabilir. Bundan dolayı tasarlanan kontrolörden, $G \in \{\Pi\}$ belirsizlik içeren

sistem modeli kümesinin her bir G elemanı için sistemin kararlılığını ve performansını sağlaması beklenir.

Kontrolörün belirsizliklere rağmen, sistemin kararlılığını sağlaması ve performans hedeflerine ulaşması, tasarlanan kontrolörün belirsizliklere karşı dayanıklı olduğunu gösterir. Belirsizliklere karşı, sistemin kararlılığını sağlayabilen bir kontrolör performans hedeflerine ulaşamayabilir. Bundan dolayı bir kontrol sisteminin dayanıklılığı, dayanıklı kararlılık (RS) ve dayanıklı performans (RP) olarak iki şekilde değerlendirilir. RS ve RP değerlendirmesi küçük kazanç teoreminden türetilir.

4.6.1. Küçük kazanç teoremi

Kararlı bir $L(s)=G(s)K(s)$ açık çevrim transfer fonksiyonu için, sistemin kapalı çevrim transfer fonksiyonunun kararlı olması için spektral yarıçapının

$$\rho(L(j\omega)) < 1; \quad \forall \omega \quad (4.192)$$

olması gerekir. Bu durum tam tersinin iddia edilmesiyle ispatlanabilir. Bunun için $\rho(L(j\omega)) < 1$ şartını sağlayan kapalı çevrim sisteminin kararsız olduğu kabul edilirse, Nyquist teoremine göre kararsızlık, $\det(I+L(s))$ eğrisinin orjini geçtiği noktada değerlendirilir. Bununla birlikte $\epsilon \in [0,1]$ ve eğrinin orjini geçtiği ω^* frekans değeri olarak gösterilirse Gershgorin teoreminden faydalanarak [108], kararsızlık şartı

$$\det(I + L(j\omega^*)) = 0 \quad (4.193)$$

$$\prod \lambda_i(I + \epsilon L(j\omega^*)) = 0 \quad (4.194)$$

$$1 + \epsilon \lambda_i(L(j\omega^*)) = 0 \quad (4.195)$$

$$\lambda_i(L(j\omega^*)) = -1/\epsilon \quad (4.196)$$

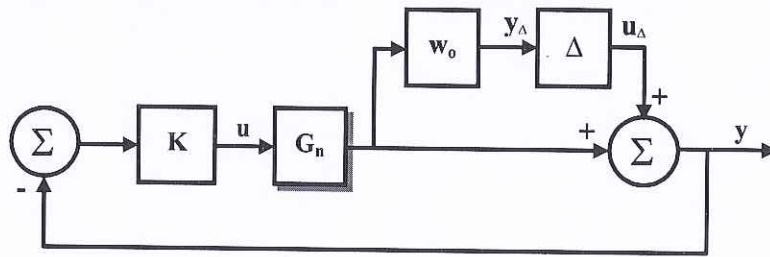
$$|\lambda_i(I + L(j\omega^*))| \geq 1 \quad (4.197)$$

ile ifade edilebilir. Bu sonucun $\rho(L(j\omega)) < 1$ kabulü ile uyuşmadığı görülür. Buradan, Denklem 4.192'in kararlılık şartı olduğu görülür. Küçük kazanç teoremi, belirsizlik içeren sistemler için dayanıklı kararlılık şartının yazılmasında kullanılır.

4.6.2. Dayanıklı Kararlılık

Bir fiziksel sistemin matematik modeli ile gerçek sistem arasındaki fark kaçınılmaz bir durumdur. Bundan dolayı gerçek sistemin dinamik davranışı, tek bir model yerine Π belirsiz model kümesi ile gösterilir. Tasarlanan kontrolörden Π belirsiz sistem modeli kümesinin her bir G elemanı için sistemin kararlılığını sağlaması beklenir. Bu durum, dayanıklı kararlılık (RS) olarak isimlendirilir.

Belirsiz bir sistemin kararlılık şartı, küçük kazanç teoreminden yararlanılarak yazılabilir. Bunun için seçilen belirsiz bir sistemin blok diyagramı Şekil 4.29'de gösterilmiştir. Bu modelde belirsizlik, nominal sistemin çıkışına çarpım olarak etki etmektedir [109].



Şekil 4.29. Belirsiz sistemin kapalı çevrim blok diyagramı.

Şekil 4.29'da verilen belirsiz sistemin modeli

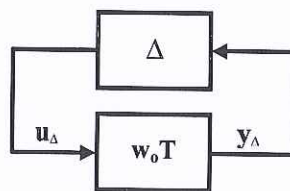
$$G(s) = (1 + \Delta(s)w_o(s))G_n(s); \quad \bar{\sigma}(\Delta(j\omega)) \leq 1 \quad (4.198)$$

ile ifade edilir. Δ belirsizlik bloğunun u_Δ giriş sinyali ile y_Δ çıkış sinyali arasındaki kapalı çevrim transfer fonksiyonu

$$y_\Delta = (w_o(s)G(s)K(s)(1 + G(s)K(s))^{-1})u_\Delta \quad (4.199)$$

$$y_\Delta = (w_o(s)T(s))u_\Delta \quad (4.200)$$

ile yazılabilir. Bu durumda belirsiz sistemin kapalı çevrim blok diyagramı Şekil 4.30'daki gibi gösterilir.



Şekil 4.30. Belirsiz sistemin birleştirilmiş kapalı çevrim blok diyagramı.

w_0T sistem transfer fonksiyon matrisinin kararlı olması şartı ile belirsiz sistemin kapalı çevrim transfer fonksiyonunun kararlılığı, Nyquist diyagramında $\det(I - w_0T(s)\Delta(s))$ eğrisinin orjinden geçmemesi şartı ile sağlanır. Şekil 4.30'deki kapalı çevrim transfer fonksiyonu $\bar{\sigma}(\Delta(j\omega)) \leq 1$ şartını sağlayan bütün kararlı Δ belirsizlik bloku için kararlılık şartı

$$\det(I - w_0T(j\omega)\Delta(j\omega)) \neq 0; \quad \forall \omega, \quad \forall \Delta(j\omega); \quad \bar{\sigma}(\Delta(j\omega)) \leq 1 \quad (4.201)$$

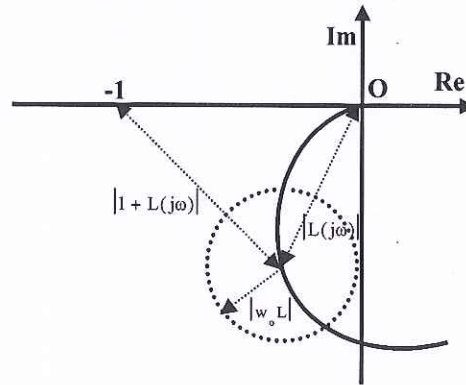
$$\rho(w_0T(j\omega)\Delta(j\omega)) < 1; \quad \forall \omega, \quad \forall \Delta(j\omega); \quad \bar{\sigma}(\Delta(j\omega)) \leq 1 \quad (4.202)$$

$$\bar{\sigma}(w_0T(j\omega)) < 1; \quad \forall \omega \quad (4.203)$$

$$\|w_0T(j\omega)\|_{\infty} < 1 \quad (4.204)$$

yazılır.

Yukarıda küçük kazanç teoremi kullanılarak ifade edilen kararlılık şartı Nyquist diyagramında grafik metodu ile gösterilebilir. Verilen belirsiz sistem için Nyquist diyagramı Şekil 4.31'da gösterilmiştir.



Şekil 4.31. Belirsiz sistemin Nyquist diyagramı.

Belirsiz sistemin açık çevrim transfer fonksiyonu

$$L_p(s) = (1 + \Delta(s)w_0(s))G_n(s)K(s) \quad (4.205)$$

$$L_p(s) = (L(s) + \Delta(s)w_0(s)L(s)) \quad (4.206)$$

yazılır. Nyquist diyagramında L_p belirsiz açık çevrim transfer fonksiyonu, L nominal sistemin açık çevrim transfer fonksiyonu ve w_0L belirsizlik diski ile tanımlanırsa, sistemde dayanıklı kararlılık için belirsizlik diskin kritik nokta olan -1'i geçmemesi istenir. Bu durum

$$|w_o L| < |1 + L|; \quad \|w_o T\|_\infty < 1; \quad \forall \omega \quad (4.207)$$

ile gösterilir. Bu kararlılık şartı kullanılarak, kontrolörün Π belirsiz model kümesinin elemanlarının ne kadarını kararlı yapabileceğine dair bir üst sınır belirlenebilir. Herhangi bir β pozitif tamsayı ve G belirsizlik içeren sistem

$$\{ G: \Delta \text{ kararlı ve } \|\Delta\|_\infty \leq \beta \} \quad (4.208)$$

olarak tanımlanırsa, β 'nin çok küçük bir değer alması durumunda nominal modelin kararlılığını sağlayan K kontrolörün bütün model kümesinin kararlılığını sağlaması beklenir. Kontrolörün model belirsizliklerine karşı sistemin kararlılığını sağlayabildiği bir β_{sup} üst sınır değeri tanımlanabilir. Bu değer kararlılık payı olarak adlandırılır. Denklem 4.207'deki kararlılık şartı kullanılarak, β_{sup} kararlılık payı değeri bulunabilir. Belirsizlik içeren sistemin modeli ve belirsizlik norm şartı değiştirilerek

$$G = (1 + \Delta w_o) G_n : \|\Delta\|_\infty \leq \beta \quad (4.209)$$

$$G = (1 + \beta^{-1} \Delta \beta w_o) G_n : \|\beta^{-1} \Delta\|_\infty \leq 1 \quad (4.210)$$

$$G = (1 + \Delta_1 \beta w_o) G_n : \|\Delta_1\|_\infty \leq 1 \quad (4.211)$$

$$1 + L = 1 + (1 + \Delta_1 \beta w_o) G_n K \equiv (1 + L_n)(1 + \Delta_1 \beta w_o T);$$

yeniden yazılabilir. Denklem 4.211'den belirsizlik içeren sistemin β_{sup} kararlılık payı

$$\beta_{\text{sup}} = \sup \{ \beta \mid \|\beta w_o T\|_\infty < 1 \} \quad (4.212)$$

$$\beta_{\text{sup}} = \frac{1}{\|w_o T\|} \quad (4.213)$$

olarak yazılır. Belirsizliğin sisteme toplam veya çarpım olarak etki etmesine göre sistemin kapalı çevrim transfer fonksiyonu ve buna bağlı olarak RS şartı değişir. Belirsizliklerine göre RS şartı Tablo 4.3'de verilmiştir.

Tablo 4.3. Farklı belirsiz sistem modellerine göre dayanıklı kararlılık şartı.

Belirsizlik içeren sistem modeli	Dayanıklı kararlılık şartı
$G = (1 + \Delta w_o) G_n$	$\ w_o T\ _\infty < 1$
$G = G_n + \Delta w_a$	$\ w_a C S\ _\infty < 1$
$G = G_n / (1 + \Delta w_o G_n)$	$\ w_o G_n S\ _\infty < 1$
$G = G_n / (1 + \Delta w_a)$	$\ w_a S\ < 1$

4.6.3. Dayanıklı performans

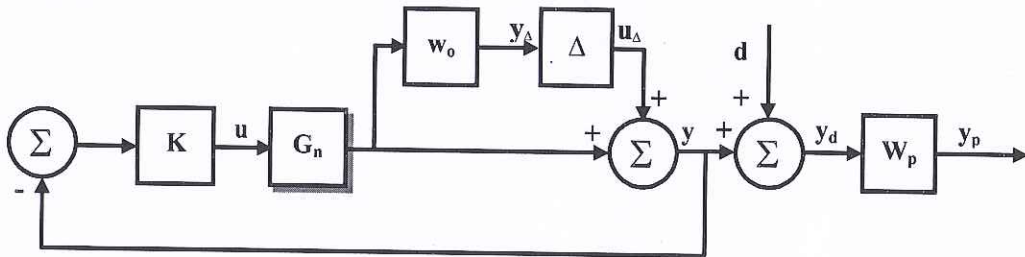
Kontrol sistemlerinde kararlılığı sağlayan bir kontrolörden istenilen performans hedeflerine ulaşması beklenir. Modeldeki belirsizlikler düşünüldüğünde, tasarlanan kontrolörden, Π belirsiz sistem modeli kümesinin her bir G elemanı için sistemin hedeflenen performansı sağlaması istenir. Bu durum, sistemin dayanıklı performansı (RP) olarak tanımlanır [109].

Belirsiz sistem modeli Şekil 4.29'de verilen bir sistemin RS şartı ve nominal sistemin performansı

$$\|w_o T\|_{\infty} < 1 \quad (4.214)$$

$$\|W_p S\|_{\infty} < 1 \quad (4.215)$$

ile ifade edilir. Fiziksel sistemin belirsiz modeli Denklem 4.205'deki gibi verilen bir belirsiz sistemin performans ağırlık fonksiyonu ile blok diyagramı Şekil 4.32'de verilmiştir.



Şekil 4.32. Belirsiz sistemin performans blok diyagramı.

Belirsiz sistemin S_p duyarlılık fonksiyonu

$$S_p = \frac{1}{1 + (1 + \Delta w_o) L_n} \quad (4.216)$$

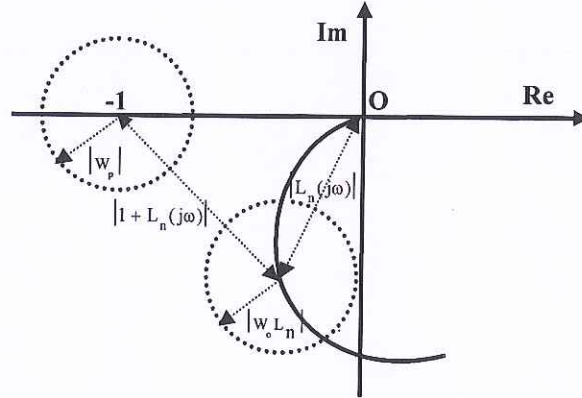
$$S_p = \frac{S}{1 + \Delta w_o T} \quad (4.217)$$

ile ifade edilir. Bu durumda belirsiz sistemin RS şartının sağlanması ile RP şartı

$$\|w_o T\|_{\infty} < 1 \quad (4.218)$$

$$\left\| \frac{W_p S}{1 + \Delta w_o T} \right\|_{\infty} < 1 \quad (4.219)$$

yazılır. Belirsiz sistemin RP'ı Nyquist diyagramından yararlanılarak yazılabilir. Belirsiz sistemin Nyquist diyagramı Şekil 4.33'de verilmiştir.



Şekil 4.33. Belirsiz sistemin performans Nyquist diyagramı.

Nyquist diyagramında L_p belirsiz açık çevrim transfer fonksiyonu, L_n nominal sistemi $w_o L_n$ açık çevrim transfer fonksiyonu ve belirsizlik diski ile tanımlanmıştır. Sistemde RP için belirsizlik diskinin -1 kritik noktasını çevreleyen performans diski alanı içine girmemesi istenir. Bu durum grafikten yararlanılarak RP'lüğün gereklilik ve yeterliliği

$$|W_p| + |w_o L_n| < |1 + L_n|; \quad \forall \omega \quad (4.220)$$

$$|W_p(1 + L_n)^{-1}| + |w_o L_n(1 + L_n)^{-1}| < 1; \quad \forall \omega \quad (4.221)$$

$$\max(|W_p S| + |w_o T|) < 1 \quad (4.222)$$

$$\|W_p S\|_{\infty} + \|w_o T\|_{\infty} < 1 \quad (4.223)$$

ile gösterilir. Daha genel olarak RP'nin gereklilik ve yeterlilik şartı ile belirlenen α_{\min} minimum sınırı

$$\max_{|\Delta| \leq 1} \left| \frac{W_p S}{1 + \Delta w_o T} \right| = \frac{|W_p S|}{1 - |w_o T|} \quad (4.224)$$

$$\alpha_{\min} = \left\| \frac{W_o S}{1 - |W_p T|} \right\|_{\infty} \quad (4.225)$$

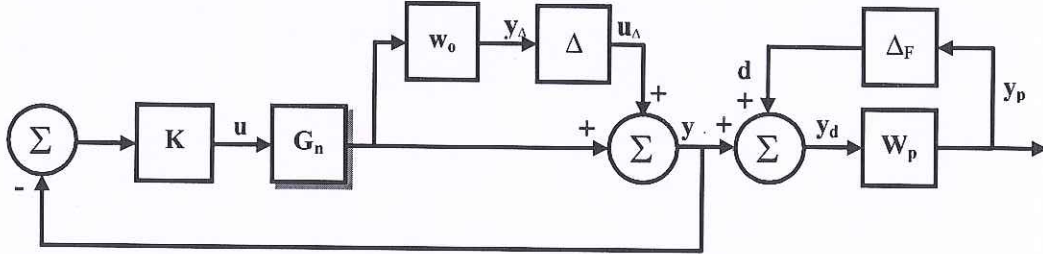
ile ifade edilir. Belirsizlik $\|\Delta\|_{\infty} < \beta$ bloku normuna göre yazılan $\|\beta W_o T\|_{\infty} < 1$ RS şartı için, RP'nin sağlayacağı β_{\sup} maksimum üst sınır

$$\max_{|\Delta| \leq 1} \left| \frac{W_p S}{1 + \beta \Delta w_o T} \right| = \frac{|W_p S|}{1 - \beta |w_o T|} \quad (4.226)$$

$$\beta_{\text{sup}} = \left\| \frac{w_o T}{1 - |W_p S|} \right\|_{\infty}^{-1} \quad (4.227)$$

elde edilir.

Bu kullanılan modelde belirsizlik, sistem çıkışına çarpım olarak etki etmektedir ve sistemde başka bir belirsizlik bulunmamaktadır. Bu sistemin çıkışına başka bir Δ_F belirsizlik bloğunun eklenmesiyle Şekil 4.34'da oluşan sistemin, Şekil 4.33'deki sistemin RP'ı için RS'nın incelenmesi gerekir.



Şekil 4.34. Performans belirsizliği ile belirsiz sistemin blok diyagramı.

Gösterilen belirsiz sistemde Δ belirsizlik bloğu sistem çıkışına çarpım olarak etki ederken, Δ_F belirsizlik bloğu ise sistemin çıkışına ters çarpım olarak etki eder. Bu durumda belirsiz sistemin modeli

$$G = G_n \frac{1 + \Delta w_o}{1 + \Delta_F W_p} \quad (4.228)$$

ile ifade edilir. w_o ve W_p ağırlık fonksiyonlarının Δ kararlı ve Δ_F belirsizlik bloku ile kabul edilebilir bir belirsizlik içeren sistemin RS'lığı Denklem 4.223 ile ifade edilen RP şartıdır. Δ belirsizlik bloğunun sabit bir değer aldığı farz edilirse, Δ_F belirsizlik bloku için RP ifadesi Denklem 4.219'dan yararlanarak

$$\left\| W_p \frac{1}{1 + (1 + \Delta w_o)L_n} \right\|_{\infty} < 1 \quad (4.229)$$

elde edilir. Bu durumda sistemin dayanıklı performans hedefi belirsiz sisteme bir Δ_F eklenerek dayanıklı kararlılık problemine dönüştürülebilir.

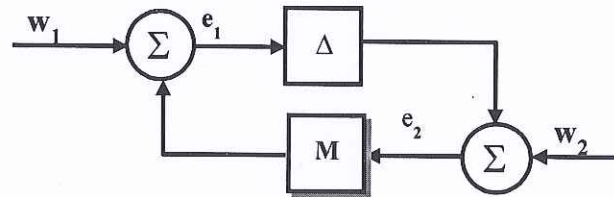
4.7. Dayanıklılık Analizi

Sistemin belirsizliklere karşı dayanıklı kararlılık ve performansını koruduğu bir β_{sup} üst sınır değeri, sistemin belirsizlikleri ne ölçüde karşılayabildiğinin bir göstergesi olarak kullanılır. Yapısal olmayan belirsizliklerle yapılan bu değerlendirme çoğu zaman yanıltıcı olmaktadır. Genelde sistemdeki belirsizliklerin kaynakları ve sisteme etkileri birbirinden farklıdır. Bu amaçla sistemdeki bu farklı kaynaklı belirsizlikler, belirsiz sistemden ayrılarak köşegen matrisin bir köşegen elemanı olarak gösterilirler. Yapısal olarak tanımlanan belirsizliklerin kullanılması ile sistemin RS ve RP ifadesi yeniden yazılır. Buna göre belirlenecek, belirsizlik içeren sistemin RS'lığı ve RP'nin korunduğu β_{sup} üst sınır değeri daha doğru bilgi verecektir.

Yapısal belirsizliklerle tanımlanan bir belirsizlik içeren sistemin, RS ve RP sağladığı β_{sup} üst sınır değeri, μ yapısal tekil değerler ile belirtilir. Farklı metotlarla tasarlanan kontrolörün verilen belirsizlik şartında RS'lığı sağlayıp sağlamadığının kontrolü ise μ -Analizi metodu ile yapılır.

4.7.1. Yapısal tekil değer

Yapısal tekil değerler de, belirsiz sistemin RS'lığı için genelleştirilen küçük kazanç teoreminden türetilmiştir. Her hangi bir belirsizlik içeren sistemin, birbirlerine göre iyi konumlanmış M kararlı kapalı çevrim transfer fonksiyonu ve kararlı belirsizlik bloğu Δ arasındaki içyapısal kararlılık blok diyagramı Şekil 4.35'de verilmiştir.



Şekil 4.35. M- Δ belirsiz sistemin içyapısal kararlılık blok diyagramı.

Yukarıdaki belirsizlik içeren sistemin küçük kazanç teoremi kullanılarak kapalı çevrim kararlılık şartı

$$\det(I - M(j\omega)\Delta(j\omega)) \neq 0; \quad \forall \omega, \quad \forall \Delta(j\omega) \mid \bar{\sigma}(\Delta(j\omega)) \leq 1 \quad (4.230)$$

$$\rho(M(j\omega)\Delta(j\omega)) < 1; \quad \forall \omega, \quad \forall \Delta(j\omega) \mid \bar{\sigma}(\Delta(j\omega)) \leq 1 \quad (4.231)$$

$$\bar{\sigma}(M(j\omega)) < 1; \quad \forall \omega \quad (4.232)$$

$$\|M\|_{\infty} < 1 \quad (4.233)$$

elde edilir.

Yapısal olmayan belirsizlik içeren bir sistemde $\|\Delta\|_{\infty} < \beta$ belirsizlik bloğu ile sistemin RS olduğu kabul edilirse, RS'lığı bozan β_{sup} üst sınır değeri ile belirsizlik sınır değeri

$$\frac{1}{\beta_{\text{sup}}} = \|M\|_{\infty} \quad (4.234)$$

$$\frac{1}{\beta_{\text{sup}}} = \sup_{\omega} \bar{\sigma}(M(j\omega)) \quad (4.235)$$

ile ifade edilir. Bu durum sistemde her bir frekans değerine karşılık genelleştirildiğinde

$$\bar{\sigma}(M) = \frac{1}{\min\{\bar{\sigma}(\Delta) \mid \det(I - M\Delta) = 0, \Delta \text{ yapısal olmayan belirsizlik}\}} \quad (4.236)$$

ile ifade edilir. Buradan M transfer fonksiyon matrisinin en üst tekil değeri, kararsızlığa neden olan Δ yapısal olmayan belirsizliğin üst tekil değerinin tersine karşılık gelir. Böylece her bir frekans değerinde, Δ belirsizlik bloğunun sistemin kararlılık şartının sağlandığı üst sınır değeri belirlenir.

Belirsizliklerin yapısal olması durumunda, kararlılık şartı sistemin tekil değerleri yerine, μ yapısal tekil değerler kullanılarak yazılır. Yapısal belirsizliklerle ifade edilen bir belirsizlik içeren sistemde RS'lığın sağlandığı üst sınır μ yapısal tekil değer

$$\mu_{\Delta}(M) = \frac{1}{\min\{\bar{\sigma}(\Delta) \mid \det(I - M\Delta) = 0, \Delta \text{ yapısal}\}} \quad (4.237)$$

ile ifade edilir. Burada, M transfer fonksiyon matrisinin $\mu_{\Delta}(M)$ yapısal tekil değeri, kararsızlığa neden olan en küçük Δ yapısal belirsizliğinin üst tekil değerinin tersine karşılık gelir. Böylece her bir frekans değerinde, sistemin kararlılık şartının sağlandığı Δ yapısal belirsizlik bloğunun üst sınır değeri

$$\frac{1}{\beta_{\text{sup}}} = \sup_{\omega} \mu_{\Delta}(M(j\omega)) \quad (4.238)$$

ile ifade edilir. Burada, $\mu(M)$ tek başına bir anlam ifade etmez. Sistemin Δ yapısal belirsizlik bloğuna bağlı olarak tanımlandığından $\mu_{\Delta}(M)$ şeklinde gösterilir [3].

4.7.2. Yapısal tekil değer hesabı

Bir matrisin $\mu_{\Delta}(M)$ yapısal tekil değeri, Δ yapısal belirsizlik bloğuna bağlı olarak tanımlanır. $M \in \mathbb{C}^{n \times n}$ matrisinin boyutlarıyla uyumlu olarak tanımlanan genel yapısal belirsizlik matrisi

$$\Delta = \{\text{diag}(\delta_1^r I_{k_1}, \dots, \delta_{m_r}^r I_{k_{m_r}}, \delta_1^c I_{k_{m_r+1}}, \dots, \delta_{m_c}^c I_{k_{m_r+m_c+1}}, \Delta_1^c, \dots, \Delta_{m_c}^c); \\ \delta_i^r \in \mathbb{R}, \delta_i^c \in \mathbb{C}, \Delta_i^c \in \mathbb{C}^{k_{m_r+m_c+1} \times k_{m_r+m_c+1}}\} \quad (4.239)$$

ile ifade edilir. Burada köşegen matrisin elemanları; gerçel, kompleks skaler ve tam bloklar olarak sırasıyla gösterilir. Burada $\sum_{i=1}^{m_r+m_c} k_i + \sum_{j=1}^{m_c} k_j = n$ olmak üzere; m_r gerçel, m_c kompleks tekrar eden skaler blokları ve m_c tam blokların sayısını gösterir. Belirsizliğin $\bar{\sigma}(\Delta) \leq 1$ şartını sağlaması koşulu ile Δ yapısal belirsizlik bloklarından oluşan $B\Delta$ sınırlı küme

$$B\Delta = \{\Delta \in \{\Delta\} \mid \bar{\sigma}(\Delta) \leq 1\} \quad (4.240)$$

$$B^{\circ}\Delta = \{\Delta \in \{\Delta\} \mid \bar{\sigma}(\Delta) \leq 1\} \quad (4.241)$$

şeklinde tanımlanır. Denklem 4.241'deki gösterim farklılığı, $\Delta \in B^{\circ}\Delta$ yapısal belirsizlik bloklarının Denklem 4.239'da verilen genel yapıda olduğunu gösterir.

Yapısal belirsizlik bloğu kümesinden seçilecek özel tanımlı bir $\Delta \in B^{\circ}\Delta$ yapısal belirsizlik bloğunun

$$\Delta = \{\delta I \mid \delta \in \mathbb{C}\}; \quad (m_r = 0, m_c = 1, m_c = 0) \quad (4.242)$$

şartını sağlaması durumunda, M matrisinin yapısal tekil değeri $\mu_{\Delta}(M)$

$$\mu_{\Delta}(M) = \rho(M) \quad (4.243)$$

ile ifade edilir. $\Delta \in B^{\circ}\Delta$ yapısal belirsizlik bloğunun

$$\Delta = \{\delta I \mid \delta \in \mathbb{R}\}; \quad (m_r = 1, m_c = 0, m_c = 0) \quad (4.244)$$

olması durumunda M matrisinin yapısal tekil değeri $\mu_\Delta(M)$

$$\mu_\Delta(M) = \rho_R(M) \quad (4.245)$$

ile ifade edilir. Yapısal belirsizlik bloğu kümesinden seçilecek başka bir özel tanımlı bir $\Delta \in B^\circ \Delta$ yapısal belirsizlik bloğunun

$$\Delta \in \mathbb{C}^{n \times n}; \quad (m_r = 0, m_c = 0, m_c = 1) \quad (4.246)$$

olması durumunda, M matrisinin $\mu_\Delta(M)$ yapısal tekil değeri

$$\mu_\Delta(M) = \bar{\sigma}(M) \quad (4.247)$$

ile ifade edilir [110].

$\{\Delta_1\}$ ve $\{\Delta_2\}$ olarak tanımlanan ve $M \in \mathbb{C}^{n \times n}$ matrisi ile uyumlu belirsizlik bloklarının $\{\Delta_1\} \subset \{\Delta_2\}$ olması durumunda

$$\mu_{\Delta_1}(M) \leq \mu_{\Delta_2}(M) \quad (4.248)$$

eşitsizliği yazılabilir. Buna göre

$$\{\Delta : \Delta = \delta I_{k_{m_r}}, \delta \in \mathbb{R}\} \subset \{\Delta : \Delta \in \{\Delta\}\} \subset \{\Delta : \Delta \in \mathbb{C}^{n \times n}\} \quad (4.249)$$

olduğu düşünülürse, karma belirsizlikler için

$$\rho_R(M) \leq \mu_\Delta(M) \leq \bar{\sigma}(M) \quad (4.250)$$

eşitsizliği yazılır. Δ yapısal belirsizlik bloğunun (gerçek skaler belirsizlik içermemesi $m_r = 0$ durumunda) kompleks belirsizlikler için yukarıdaki eşitsizlik

$$\rho(M) \leq \mu_\Delta(M) \leq \bar{\sigma}(M) \quad (4.251)$$

ile ifade edilir. $\bar{\sigma}$ üst tekil değer ve ρ en büyük öz değer arasındaki farkın fazla olması, bu sınır şartının yeterli olmadığını gösterir. Bunun için sınır şartının yeniden yapılandırılması gerekir [111]. Alt sınır değerinin yeniden yapılandırılması için M- Δ kapalı çevrimli belirsizlik içeren sisteme, sistemin yapısını bozmayacak şekilde $UU^* = I$ şartını sağlayan U ve U^* çarpanı eklenir. Δ belirsizlik bloğu ile uyumlu olarak tanımlanan U matrisi

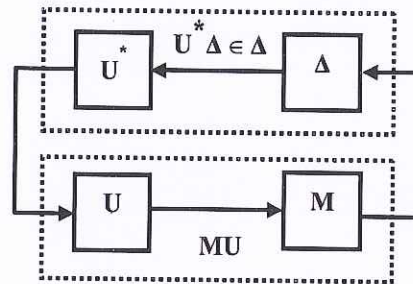
$$U_{\Delta} = \{U \mid \text{diag}(U_1, U_2, \dots, U_p) \mid \dim(U_i) = \dim(\Delta_i \Delta_i^T), UU^* = I\} \quad (4.252)$$

ile gösterilir. $\Delta \in \{\Delta\}$ ve $U \in \{U\}$ olmak üzere U matrisi

$$U\Delta \in \{\Delta\}, \quad \Delta U \in \{\Delta\}, \quad \bar{\sigma}(U\Delta) = \bar{\sigma}(\Delta), \quad \bar{\sigma}(\Delta U) = \bar{\sigma}(\Delta) \quad (4.253)$$

$$\mu_{\Delta}(UM) = \mu_{\Delta}(MU) = \mu_{\Delta}(M) \quad (4.254)$$

şartlarını sağlar. M - Δ kapalı çevrimli belirsizlik içeren sistem ile U ve U^* çarpanları ile Şekil 4.36'da gösterilmiştir.



Şekil 4.36. U çarpanının M - Δ yapısında gösterilmesi.

Burada; yeni oluşan $U^* \Delta \in \{\Delta\}$ belirsizlik bloğu aynı kalırken, $\mu_{\Delta}(M)$ alt sınır değeri yerini $\rho(MU)$ en büyük öz değerine bırakır. Bu durumda $\rho(MU)$ alt sınır değeri

$$\rho(MU) \leq \mu_{\Delta}(M) \quad (4.255)$$

ile ifade edilir. Aynı şekilde tanımlanan $Q \in Q_{\Delta}$ alt sınır ölçeklendirme matrisi gerçel belirsizliklerin olmadığı durumda (kompleks belirsizliklerin olduğu durum)

$$Q_{\Delta} = \left\{ Q \in \Delta \mid m_r = 0, \delta^c \delta^c = 1, \Delta_i^* \Delta = I_{k_{m_r + m_c + i}} \right\} \quad (4.256)$$

ile gerçel belirsizliklerin varlığında (karma durum) ise $Q \in Q_{\Delta}$ matrisi

$$Q_{\Delta} = \left\{ Q \in \Delta \mid \delta^r \in [-1 \ 1], \delta^c \delta^c = 1, \Delta_i^* \Delta = I_{k_{m_r + m_c + i}} \right\} \quad (4.257)$$

ile ifade edilir. Burada $\Delta \in \{\Delta\}$ ve $Q \in Q_{\Delta}$ olmak üzere Q matrisi

$$Q\Delta \in \{\Delta\}, \quad \Delta Q \in \{\Delta\}, \quad \bar{\sigma}(Q\Delta) \leq \bar{\sigma}(\Delta), \quad \bar{\sigma}(\Delta Q) \leq \bar{\sigma}(\Delta) \quad (4.258)$$

$$\mu_{\Delta}(QM) = \mu_{\Delta}(MQ) \leq \mu_{\Delta}(M) \quad (4.259)$$

şartlarını sağlar. Tanımlanan matris kümelerinin $U_{\Delta} \subset Q_{\Delta} \subset \{\Delta\}$ şartını sağlamasıyla Denklem 4.248'den faydalanarak $\mu_{\Delta}(M)$ karma alt sınır eşitsizliği

$$\max_{U \in U_{\Delta}} \rho_R(UM) \leq \max_{Q \in Q_{\Delta}} \rho_R(QM) \leq \mu_{\Delta}(M) \quad (4.260)$$

yazılabilir. Denklem 4.249 ve Denklem 4.259'dan görüldüğü üzere $\mu_{\Delta}(M)$ değeri Q matrisine göre değişirken, U matrisi Denklem 4.254'den görüldüğü gibi $\mu_{\Delta}(M)$ değerini etkilememektedir. Bu durumda eşitsizliğin $\max_{U \in U_{\Delta}} \rho_R(UM)$ sol tarafı $\mu_{\Delta}(M)$ değerine eşit olması söz konusu değilken, $\max_{Q \in Q_{\Delta}} \rho_R(QM)$ sağ tarafı $\mu_{\Delta}(M)$ değerine eşit olabilir. Buna karşın Δ yapısal belirsizlik bloğu ve $Q \in \Delta$ belirsizlik bloğunun sadece kompleks belirsizlik içermemesi durumunda, $Q \equiv U$ şartı sağlanabileceğinden $\mu_{\Delta}(M)$ kompleks alt sınır eşitsizliği

$$\max_{Q \in Q_{\Delta}} \rho(QM) \leq \mu_{\Delta}(M) \quad (4.261)$$

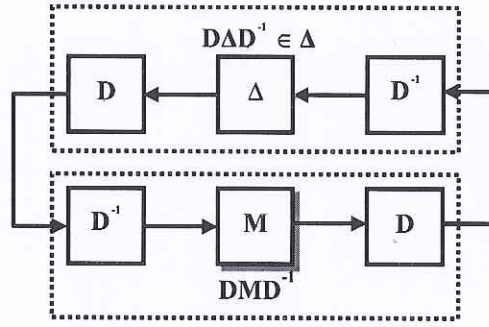
ile ifade edilir. Bu gerçel ve kompleks μ teorisindeki önemli farklardan biridir. Kompleks μ eşitsizliğinde, $\rho(MQ)$ alt sınır değeri $\mu_{\Delta}(M)$ değerine yaklaştırılarak

$$\max_{Q \in Q_{\Delta}} \rho(QM) = \mu_{\Delta}(M) \quad (4.262)$$

elde edilir. $\mu_{\Delta}(M)$ değeri bu prensiple yerel konveks olarak hesaplanmasına rağmen, küresel olarak $\rho(MQ)$ 'nin konveks olmamasından dolayı, Denklem 4.261'deki şartın sağlanmasını garanti etmez. Üst sınır değerinin yeniden tanımlanması için M - Δ kapalı çevrimli belirsizlik içeren sisteme, sistemin yapısını bozmayacak şekilde D üst sınır ölçeklendirme matris çarpanı eklenir. Δ belirsizlik bloğu ve M transfer fonksiyon matrisi ile uyumlu olarak tanımlanan D matris kümesi

$$D \in D_{\Delta} = \{\text{diag}(D_1, \dots, D_{m_r+m_c}, d_1 I_{k_{m_r+m_c+1}}, \dots, d_{m_c} I_{k_m}) \mid D_i \in C^{k_i \times k_i}, D_i = D_i^* > 0, d_i > 0\} \quad (4.263)$$

ile gösterilir. D üst sınır ölçeklendirme matrisi ile kapalı çevrim blok diyagramı Şekil 4.37'de gösterilmiştir.



Şekil 4.37. D ölçeklendirme matrisinin M- Δ yapısında gösterilmesi.

$D\Delta D^{-1} \in \Delta$ belirsizlik bloğu ile kapalı çevrimli sistemin karakteristik denklemi

$$I - (DMD^{-1})\Delta \quad (4.264)$$

ile ifade edilir. Burada $D\Delta$ ve ΔD şartından yararlanılarak

$$I - D(M\Delta)D^{-1} = D(I - M\Delta)D^{-1} \quad (4.265)$$

ifadesi yazılabilir. Buna göre D ölçeklendirme matrisi sistemin $I - M\Delta$ karakteristik denklemini değiştirmemekte yani sistemin kararlılığına etki etmemektedir. D ölçeklendirme matrisinin sisteme eklenmesiyle $\mu_{\Delta}(M)$ üst sınır şartı

$$\mu_{\Delta}(M) \leq \bar{\sigma}(DMD^{-1}) \quad (4.266)$$

ile yeniden tanımlanır. Buna göre D matrisi değiştirilerek, $\bar{\sigma}(DMD^{-1})$ üst sınır değeri $\mu_{\Delta}(M)$ değerine yaklaştırılarak

$$\mu_{\Delta}(M) \leq \inf_{D \in D_{\Delta}} \bar{\sigma}(DMD^{-1}) \quad (4.267)$$

en uygun sınır şartının bulunması hedeflenir. Bu durumda $\mu_{\Delta}(M)$ karma alt ve üst sınır şartı Δ yapısal belirsizlik bloğunda gerçel skaler belirsizliklerin olması durumunda

$$\max_{Q \in Q_{\Delta}} \rho_R(QM) \leq \mu_{\Delta}(M) \leq \inf_{D \in D_{\Delta}} \bar{\sigma}(DMD^{-1}) \quad (4.268)$$

ile ifade edilir. Δ yapısal belirsizlik bloğunun sadece kompleks belirsizlikler içermesi durumunda kompleks μ üst sınırı

$$\max_{Q \in Q_{\Delta}} \rho(QM) \leq \mu_{\Delta}(M) \leq \inf_{D \in D_{\Delta}} \bar{\sigma}(DMD^{-1}) \quad (4.269)$$

ile ifade edilir. $\mu_{\Delta}(M)$ üst sınır eşitsizliği $\beta > 0$ ile yeniden tanımlanması durumunda üst sınır eşitsizliği

$$\bar{\sigma}(DMD^{-1}) \leq \beta \quad (4.270)$$

ile gösterilir. Denklem 4.270'in özdeşliğinden

$$M^*D^2M - \beta^2D^2 \leq 0 \quad (4.271)$$

elde edilir. Burada $D \in D_{\Delta}$ olup, $D^2 \in D_{\Delta}$ olduğunu sağlar ve Denklem 4.271'den kompleks $\mu_{\Delta}(M)$ üst sınır değeri

$$\mu_{\Delta}(M) \leq \inf_{D \in D_{\Delta}} \min_{0 \leq \beta \in \mathbb{R}} \{ \beta \mid M^*DM - \beta^2D \leq 0 \} \quad (4.272)$$

olarak ifade edilir. Bu doğrusal matris eşitsizliğinin (LMI) çözümü en uygun üst sınırın bulunmasında kullanılır [112]. Üst sınırın D ölçeklendirme matrisine bağlı olması üst sınıra konveks özellik katar. LMI hesaplamada kullanışlı bir metottür. Bu üst sınır en uygunu bulma konveks problemi olarak değerlendirilir. Burada üst sınır şartı, Δ yapısal belirsizlik bloğu elemanlarının $2m_c + m_c \leq 3$ şartını sağlaması durumunda $\mu_{\Delta}(M) = \inf_{D \in D_{\Delta}} \bar{\sigma}(DMD^{-1})$ eşitliğini sağlar. Buna karşın $2m_c + m_c > 3$ olması durumunda $\mu_{\Delta}(M) \leq \inf_{D \in D_{\Delta}} \bar{\sigma}(DMD^{-1})$ eşitsizliğini sağlar. Bu durum Tablo 4.4'de verilmiştir.

Tablo 4.4. μ eşitsizlik şartı.

F s	0	1	2	3	4
0	yok	evet	evet	evet	evet
1	evet	evet	hayır	hayır	hayır
2	hayır	hayır	hayır	hayır	hayır

Sistemde kompleks olarak tanımlanan belirsizliklerde iyi sonuç veren bu yaklaşım, faz bilgisi içermediğinden sistemin gerçel belirsizliklerle değerlendirmesinde yetersiz kalır. Bundan dolayı, gerçel belirsizliklerin varlığında standart LMI probleminden daha iyi sonuç verecek faz bilgisi içeren karma üst sınır eşitsizliği tanımlanabilir. Gerçel belirsizliklerin faz bilgisini göstermek amacıyla tanımlanan $G \in G_{\Delta}$ üst sınır gerçel ölçeklendirme matrisi

$$G \in G_{\Delta} = \left\{ \text{diag}(G_1, \dots, G_{m_r}, 0_{k_{m_r+1}}, \dots, 0_{k_m}) \mid G_i \in C^{k_i \times k_i}, G_i = G_i^* \right\} \quad (4.273)$$

ile ifade edilir. Buna göre karma μ üst sınırının belirlenmesi için QM'nin gerçel öz değerlerinin $\rho_R(QM) > 0$ şartını sağlaması istenir. Bu $0 < \gamma \in R$ ve $x \in C^{n \times n}$ ($x \neq 0$) vektörü için

$$QMx = \gamma x \quad (4.274)$$

ile tanımlanır. $\bar{\sigma}(Q) \leq 1$ şartı ve Denklem 4.44x'den

$$\gamma^2 |x|^2 = |QMx|^2 \leq \bar{\sigma}^2(Q) |Mx|^2 \leq |Mx|^2 \quad (4.275)$$

ifade edilir. Bu eşitsizlikten herhangi mümkün olan x ve γ değerler için

$$x^*(M^*M - \gamma^2 I_n)x \geq 0 \quad (4.276)$$

elde edilir. Aynı şekilde, karma μ üst sınırın gerçel belirsizliklerin ölçeklendirilmesi için G ve Q ölçeklendirilme matrislerin özelliklerini

$$G^* = G; \quad (GQ)^* = GQ \quad (4.277)$$

ve Denklem 4.275 kullanılarak, x değerleri ve $G \in G_{\Delta}$ ölçeklendirme matrisi için

$$x^* = \frac{1}{\gamma} x^* M^* Q^*; \quad x^* G M x = \frac{1}{\gamma} x^* M^* Q G M x \quad (4.278)$$

$$x^* G M x = x^* M^* G x$$

elde edilen denklemden, herhangi mümkün olan x değerleri ve $G \in G_{\Delta}$ ölçeklendirme matrisi için

$$x^*(GM - M^*G)x = 0 \quad (4.279)$$

elde edilir ve Denklem 4.276 ile beraber

$$x^*(M^*M + j(GM - M^*G) - \gamma^2 I_n)x \geq 0 \quad (4.280)$$

yazılır. Mümkün olan tüm γ 'lar için $\gamma \leq \beta$ ve $0 \leq \beta \in R$ olmak üzere Denklem 4.280

$$(M^*M + j(GM - M^*G) - \beta^2 I_n) \leq 0 \quad (4.281)$$

şeklinde ifade edilir. Dolayısıyla, $\mu_{\Delta}(M) \leq \beta$ olup benzerlik dönüşümü ile μ değişmeyip Denklem 4.281'deki M yerine $M_D = DMD^{-1}$ yerine konularak

$$(M_D^* M_D + j(GM_D - M_D^* G) - \beta^2 I_n) \leq 0 \quad (4.282)$$

elde edilir. Denklem 4.282'nin sağ ve solundan D ile çarpılması durumunda

$$(M^* \hat{D} M + j(\hat{G} M - M^* \hat{G}) - \beta^2 \hat{D}) \leq 0 \quad (4.283)$$

ifadesi elde edilir. Burada, $\hat{D} \triangleq D^2 \in D_\Delta$ ve $\hat{G} \triangleq DGD \in G_\Delta$ olup D ve G ölçeklendirme matrisleri $D = \hat{D}^{1/2}$ ve $G = \hat{D}^{-1/2} \hat{G} \hat{D}^{-1/2}$ olarak dönüştürülerek, Denklem 4.283'den $\mu_\Delta(M) \leq \beta$ 'yi minimum yapacak β üst sınır değeri

$$\mu_\Delta(M) \leq \inf_{D \in D_\Delta, G \in G_\Delta} \min_{\beta \in \mathbb{R}} \{ \beta : M^* D M + j(GM - M^* G) - \beta^2 D \leq 0 \} \quad (4.284)$$

ifade edilir. Denklem 4.284'den $M \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $Q \in Q_\Delta$, $D \in D_\Delta$ ve $G \in G_\Delta$ matrisleri ile LMI problemine dönüştürülerek en uygun çözümü bulunur. LMI problemi için $\beta^2 \triangleq \alpha \in \mathbb{R}$ ile $\Phi_\alpha(M, D, G)$ fonksiyonu

$$\Phi_\alpha(M, D, G) = \bar{\lambda}(M^* D M + j(GM - M^* G) - \alpha D) \quad (4.285)$$

ifade edilir. Buna göre gerçel belirsizliklerin varlığında karma üst sınır eşitsizliği LMI probleminin çözümü ile β_{opt} en uygun üst sınır değeri

$$\mu_\Delta(M) \leq \sqrt{\max(0, \alpha_*)} = \beta_{opt} \quad (4.286)$$

$$\alpha_* = \inf_{D \in D_\Delta, G \in G_\Delta} \min_{\alpha \in \mathbb{R}} \{ \alpha : M^* D M + j(GM - M^* G) - \alpha D \leq 0 \} \quad (4.287)$$

ile ifade edilir. Burada üst sınır eşitsizliğinde, D ve G matrisleri ile doğrusal ve konveks yapı oluşturulmuştur. Sadece kompleks belirsizliklerin olması durumunda, karma üst sınır eşitsizliğinin G matrisinde kompleks belirsizliklere karşılık 0'lar ile Denklem 4.272'deki kompleks μ üst sınırı elde edilir. Buna karşın G matrisinde gerçel belirsizliklere karşılık gelen elemanlar asla 0 olamazlar [55].

β_{opt} en uygun üst sınır değerini bulmak için D ve G ölçeklendirme matrisleri ile çok sayıda parametre hesaplamasını içeren en uygunu bulma tekniği kullanılır. Bu tekniğin hesaplama yükünü azaltmak için LMI problemi yeniden yapılandırılır. Bu amaçla $\hat{G} \in \hat{G}_\Delta$ ve $\hat{D} \in \hat{D}_\Delta$ kestirim ölçeklendirme matrisleri

$$\hat{D} \in \hat{D}_\Delta = \left\{ \text{diag}(D_1, \dots, D_{m_r+m_c}, d_1 I_{k_{m_r+m_c+1}}, \dots, d_{m_c} I_{r_m}) \mid D_i \in C^{k_i \times k_i}, \det(D_i) \neq 0, d_i \in C, d_i \neq 0 \right\} \quad (4.288)$$

$$\hat{G} \in \hat{G}_\Delta = \left\{ \text{diag}(g_1, \dots, g_{m_r}, 0_{m_c+m_c}) \mid g_i \in R \right\} \quad (4.289)$$

oluşturulur. $M \in C^{n \times n}$ kabul edilen sistemin model matrisi ile $\beta > 0$ üst sınır değerleri ve herhangi $D \in C^{n \times n}$ ve $G \in C^{n \times n}$ ölçeklendirme matrisleri verildiğinde en uygun bulma tekniğinin algoritmasını oluşturmak için aşağıdaki eşitsizlikler

- a. $D_1 \in D_\Delta$ ve $G_1 \in G_\Delta$ olarak tanımlanırsa, Denklem 4.284

$$\bar{\lambda}_R \left(M^* D_1 M + j(G_1 M - M^* G_1) - \beta^2 D_1 \right) \leq 0 \quad (4.290)$$

yeniden yazılabilir. Denklem 4.290 soldan ve sağdan $D_1^{-1/2}$ ile çarpılırsa

$D_2 = D_1^{1/2}$ ve $G_2 = D_2^{-1} G_1 D_2^{-1}$ olmak üzere yeniden yapılandırılır.

- b. $D_2 \in \hat{D}_\Delta$ ve $G_2 \in \hat{G}_\Delta$ olmak üzere $M_{D_2} = D_2 M D_2^{-1}$ ile Denklem 4.290

$$\bar{\lambda}_R \left(M_{D_2}^* M_{D_2} + j(G_2 M_{D_2} - M_{D_2}^* G_2) \right) \leq \beta^2 \quad (4.291)$$

yeniden oluşturulur.

- c. Denklem 4.291 çarpanlarına ayrılarak

$$\left(\left(\frac{M_{D_2}}{\beta} - j \frac{G_2}{\beta} \right) \left(I_n + \frac{G_2^2}{\beta} \right)^{-1/2} \right)^* \left(\left(\frac{M_{D_2}}{\beta} - j \frac{G_2}{\beta} \right) \left(I_n + \frac{G_2^2}{\beta} \right)^{-1/2} \right) \leq 1 \quad (4.292)$$

yazılabilir. Burada $D_2 = D_3 \in \hat{D}_\Delta$, $G_2/\beta = G_3 \in \hat{G}_\Delta$ ve $M_{D_2} = D_3 M D_3^{-1}$ ile Denklem 4.292'in maksimum öz değerinden

$$\bar{\sigma} \left(\left(\frac{M_{D_3}}{\beta} - j G_3 \right) \left(I_n + G_3^2 \right)^{-1/2} \right) \leq 1 \quad (4.293)$$

maksimum tekil değeri ifade edilir. $\hat{D} = (I_n + G_3^2)^{1/4} D_3$ ve $M_{\hat{D}} = \hat{D} M \hat{D}^{-1}$ ile Denklem 4.293'i sağlayacak

$$\bar{\sigma} \left((I + G_3^2)^{-1/4} \left(\frac{M_{\hat{D}}}{\beta} - j G_3 \right) (I + G_3^2)^{-1/4} \right) \leq 1 \quad (4.294)$$

şekilde yazılabilir.

- d. V birimsel matris ve P hermitik pozitif tanımlı matris kullanılarak $\hat{D} = VP$ kutupsal ayrışımı yazılır. Burada, $D_4 = P$ ve $G_4 = V^* G_3 V$ olarak belirlenir. $D_4 \in \hat{D}_\Delta$ ve $G_4 \in \hat{G}_\Delta$ ile Denklem 4.294

$$\bar{\sigma} \left((I + G_4^2)^{-1/4} \left(\frac{M_{D_4}}{\beta} - jG_4 \right) (I + G_4^2)^{-1/4} \right) \leq 1 \quad (4.295)$$

şekilde yapılandırılır. Yukarıdaki Denklemler ile LMI probleminin yeterli yapısı geliştirilerek β_{opt} en uygun üst sınır değeri bulunur [55].

Denklem 4.291, Denklem 4.293 ve Denklem 4.295'deki yapılarda kullanılan $D \in D_\Delta$ ve $G \in G_\Delta$ ölçeklendirme matrisleri ile $\hat{D} \in \hat{D}_\Delta$ ve $\hat{G} \in \hat{G}_\Delta$ kestirim ölçeklendirme matrisleri arasında dönüştürülerek yapılır. Başlangıçta verilen $G \in G_\Delta$ ölçeklendirme matrisi $G = UAU^*$ öz değer ayrışımı yapıp, buradan U birimsel matrisi başlangıçta verilen $D \in D_\Delta$ ölçeklendirme matrisi ile $\hat{D} = U^*D \in \hat{D}_\Delta$ ve $\hat{G} = \Lambda \in \hat{G}_\Delta$ oluşturulur. Diğer bir yol ile $\hat{D} = VP$ ölçeklendirme matrisi kutupsal ayrışımından (V birimsel matrisi ve P hermitik pozitif tanımlı matris) elde edilen V birimsel matrisinden $G = V^*\hat{G}V \in G_\Delta$ ölçeklendirme matrisi ve $D = P \in D_\Delta$ oluşturulur. Bu dönüşümlerde U ve V birimsel matrisleri ile ölçeklendirme matrislerinin fazlarını ayarlayarak problemin çözümünde esneklik sağlanır.

Karma üst sınır eşitsizliğini iyileştirmek için genelde Denklem 4.290 ve Denklem 4.295'deki yapılar kullanılır. Denklem 4.287'e alternatif olarak Denklem 4.295'in genelleştirilmesi ile

$$\inf_{\substack{D \in D_\Delta, \\ G \in G_\Delta}} \bar{\sigma} \left((I + \hat{G}^2)^{-1/4} \left(\frac{\hat{D}M\hat{D}^{-1}}{\beta} - j\hat{G} \right) (I + \hat{G}^2)^{-1/4} \right) \leq 1 \quad (4.296)$$

en aza indirgeme metodu elde edilir. Burada, \hat{G} kestirim ölçeklendirme matrisi gerçel köşegen matris olup, problemi dengeleyen bir faktör olarak rol oynar. Bu en aza indirgeme metodunun çözümü için en iyi \hat{D} , \hat{G} ve β kestirim değerlerini veren çeşitli algoritmalar geliştirilmiştir [55]. Çözüm için yaygın olarak kullanılan en aza indirgeme algoritması:

- Osborne metodu kullanılarak $\inf_{\hat{D} \in \hat{D}_\Delta} \|\hat{D}M\hat{D}^{-1}\|_F$ değerini minimum yapacak \hat{D} ilk ölçeklendirme matrislerinin kestirilmesi ve bulunan \hat{D} ölçeklendirme matrisi ile $\hat{M} \triangleq \hat{D}M\hat{D}^{-1}$ oluşturulur,

- b. Tanımlanan \hat{M} matrisi için $\rho_R(Q\hat{M}) \leq \mu(\hat{M})$ alt sınırı hesaplanır,
- c. \hat{D} ölçeklendirme matrisi ile $\mu_\Delta(\hat{M}) \leq \bar{\sigma}(\hat{M})$ üst sınırın ilk kestirimi yapılır. Bunu takip eden süreçte bu üst sınır geliştirilir. β üst sınırının herhangi bir sabit değeri için \hat{G} ölçeklendirme matrisinin $\hat{G}_i = \frac{1}{2j\beta}(\hat{M}_i - \hat{M}_i^*)$ her bir elemanı olarak hesaplanır. Burada \hat{M}_i, \hat{M} matrisinin alt matrisidir ($j\hat{G}, \frac{\hat{M}_i}{2\beta}$ 'nin asimetrik hermitik kısmını iptal edecektir). En küçük β sınır değerini bulmak için

$$\bar{\sigma} \left((I + \hat{G}^2)^{-1/4} \left(\frac{\hat{D}\hat{M}\hat{D}^{-1}}{\beta} - j\hat{G} \right) (I + \hat{G}^2)^{-1/4} \right) \leq 1 \quad (4.297)$$

ifadesini sağlayan β değeri alt ve üst sınır değerleri toplanır ve ikiye bölünür. \hat{G} ölçeklendirme matrisi $\hat{G} = U\Lambda U^*$ öz değerlerine ayrıştırılır ve yeni \hat{G} ölçeklendirme matrisi $\hat{G} = \Lambda$ olarak tanımlanır. Burada U birimsel matris ise \hat{D} ölçeklendirme matrisi, $\hat{D} = U^*\hat{D}$ yeni kestirim ölçeklendirme matrisi tanımlanır ve bununla $\hat{M} = \hat{D}\hat{M}\hat{D}^{-1}$ yeni ölçeklendirilmiş sistem model matrisi belirlenir,

- d. Elde edilen \hat{G} ve \hat{D} ilk kestirim ölçeklendirme matrislerinden \hat{G} 'ne yeniden azalan doğrultuda uygun bir adımla yön verilerek yeni bir \hat{G} kestirim ölçeklendirme matrisi hesaplanır. Bu işlem iki defa tekrar edilir,
- e. Önceki aşamada oluşturulan yeni \hat{G} ölçeklendirme matrisi sabit iken

$$\inf_{\substack{\hat{D}_d \in \mathcal{D}_\Delta \\ \hat{D}_d \text{ köşegen}}} \left| \hat{D}_d (I + \hat{G}^2)^{-1/4} \left(\frac{\hat{D}\hat{M}\hat{D}^{-1}}{\beta} - j\hat{G} \right) (I + \hat{G}^2)^{-1/4} \hat{D}_d^{-1} \right|_F \quad (4.298)$$

ifadesini en aza indirgeyen \hat{D}_d ölçeklendirme matrisi bulunup, \hat{D} önceki kestirim ölçeklendirme matrisine eklenerek yeni \hat{D} kestirim ölçeklendirme matrisi Osborne metodu ile bulunur,

- f. Dördüncü aşama tekrar edilir,
- g. Denklem 4.296'daki karma üst sınır problemi ve \hat{G} ölçeklendirme matrisleri kestirimi D ve G ölçeklendirme matrislerine dönüştürülerek Denklem 4.284'deki LMI problemini en aza indirgeyecek şekilde β üst sınır kestirim değeri bulunur. Bu \hat{D}, \hat{G} ve β kestirim değerleri eğim düşümü algoritması ile uygun adım kullanılarak D ve G ölçeklendirme matrisleri geliştirilir. Her adımda öz değer probleminin çözümü ile β yeni üst sınır değeri belirlenir. Verilen tolerans aralığına gelinceye kadar devam edilir ve β_{opt} en uygun üst sınır değeri bulunur.

Yukarıda tanımlanan μ kompleks ve karma sınır şartları, belirsizlik içeren sistemlerin RS ve RP değerlendirmesi için kullanılır.

4.7.3. Temel çevrim teoremi

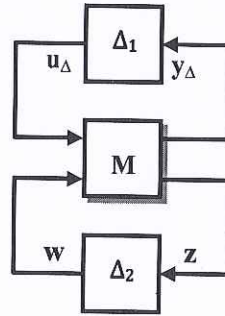
Belirsizlik içeren sistemlerin RS ve RP değerlendirmesi için kullanılan dayanıklılık analizinde M kompleks ve parçalı bir matris

$$M = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \quad (4.299)$$

şeklinde verilse, M_{11} ve M_{22} ile uyumlu olarak Δ_1 ve Δ_2 iki belirsizlik blokları ile oluşan Δ belirsizlik bloğu

$$\Delta = \left\{ \begin{bmatrix} \Delta_1 & 0 \\ 0 & \Delta_2 \end{bmatrix} \mid \Delta_1 \in B\Delta_1, \Delta_2 \in B\Delta_2 \right\} \quad (4.300)$$

ile tanımlanan belirsizlik içeren sistem Şekil 4.38'de gösterilmiştir.



Şekil 4.38. $M-(\Delta_1, \Delta_2)$ belirsizlik içeren sistemin blok diyagramı.

$M-\Delta$ belirsizlik içeren sistemin determinanı

$$\det(I - M\Delta) = \det \begin{bmatrix} I - M_{11}\Delta_1 & -M_{12}\Delta_2 \\ -M_{21}\Delta_1 & I - M_{22}\Delta_2 \end{bmatrix} \quad (4.301)$$

ile ifade edilir. $I - M_{22}\Delta_2$ 'nin tersinin alınabilir olması ile $\det(I - M\Delta)$ 'ı

$$\det(I - M\Delta) = \det(I - M_{22}\Delta_2) \det \left(I - M_{11}\Delta_1 - M_{12}\Delta_2 (I - M_{22}\Delta_2)^{-1} M_{21}\Delta_1 \right) \quad (4.302)$$

olarak yazılabilir. Bu ifade Δ_1 belirsizlik bloğunun ayrılmasıyla

$$\det(I - M\Delta) = \det(I - M_{22}\Delta_2) \det(I - F_\ell(M, \Delta_2)\Delta_1) \quad (4.303)$$

yazılabilir. Buradan, $\Delta_1 \in B\Delta_1$ için $\mu_{\Delta_1}(F_\ell(M, \Delta_2)) < 1$ μ yapısal tekil değer ve $\Delta_2 \in B\Delta_2$ için $\mu_{\Delta_2}(M_{22}) < 1$ μ yapısal tekil değer şartları elde edilir. Bu üç μ yapısal tekil şartları; $\Delta_1 \in B\Delta_1$ için benzer $\mu_1(M_{11})$, $\Delta_2 \in B\Delta_2$ için $\mu_2(M_{22})$ ve $\Delta \in B\Delta$ için $\mu_\Delta(M)$ tanımlanabilir. Belirsizlik içeren herhangi bir sistemin dayanıklı analizinde kullanılmak üzere temel çevrim teoremi

$$\mu_\Delta(M) < 1 \begin{cases} \mu_2(M_{22}) < 1 \\ \max_{\Delta_2 \in B\Delta_2} (F_\ell(M, \Delta_2)) < 1 \end{cases} \quad (4.304)$$

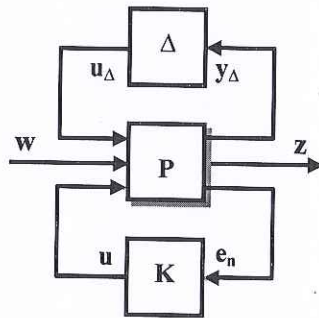
olarak ifade edilir [112]. Doğrusal belirsizlik içeren sistemlerin μ -dayanıklılık performans analizinde bu teorem temel alınır. Bu analizi gerçekleştirmek için sistemin performans özelliklerini içeren Δ_F sanal bloğu ve Δ belirsizlik bloğu ile birlikte Δ_p performans bloğu

$$\Delta_p \triangleq \{\text{diag}[\Delta \ \Delta_F] \mid \Delta, \Delta_F \in B\Delta\} \quad (4.305)$$

oluşturularak bu çalışmada μ -analizde kullanılmak için zemin oluşturulur.

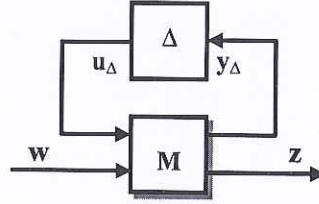
4.7.4. Dayanıklı kararlılık ve dayanıklı performans analizi

Bir kontrolörden sistemin kararlılığını ve performansını, oluşabilen belirsizliklere karşı koruması beklenir. Yapısal belirsizlik içeren bir sistemin LFT ile oluşturulan dayanıklı kontrol genel yapısı Şekil 4.39'da gösterilmiştir.



Şekil 4.39. Dayanıklı kontrol genel yapısı.

Burada, P iç bağlantı gösterimi, w dış kaynaklı giriş sinyalleri, z performans çıktıları, u_Δ ve y_Δ sırasıyla belirsizlik bloku giriş ve çıkış sinyalleri, u ve e_n ise kontrolöre çıkış ve giriş sinyali olarak adlandırılır. Herhangi bir metotla tasarlanan kontrolörün yapısal belirsizlikli sistemde dayanıklılığı ne ölçüde sağladığı μ analizi ile değerlendirilir. Bunun için μ analizinde kullanılan genel yapı LFT kullanılarak Şekil 4.40'da gösterilmiştir.

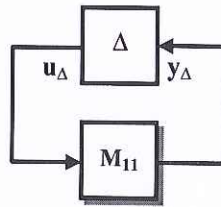


Şekil 4.40. μ Analizi genel yapısı.

M transfer fonksiyon matrisi LFT ile $M = F_l(P, K)$ olarak yazılır. Burada, w ve z giriş ve çıkış sinyalleri arasındaki bağıntı $F_u(M, \Delta)$

$$F_u(M, \Delta) = M_{22} + M_{21}\Delta(1 - M_{11}\Delta)^{-1}M_{12} \quad (4.306)$$

ile ifade edilir. Burada karakteristik denklemin $(1 - M_{11}\Delta)$ olduğu görülür. Bu durumda belirsizlikli sistemin dayanıklı kararlılık analizinde kullanılacak $M_{11} - \Delta$ yapısı Şekil 4.41'de gösterilmiştir.



Şekil 4.41. μ -Analizi dayanıklı kararlılık yapısı blok diyagramı.

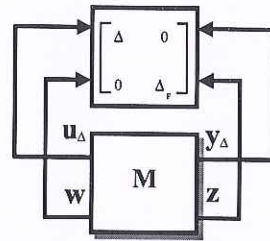
Burada, $\|\Delta\|_\infty < \beta$ olarak verilen belirsizlik bloğuna karşılık çevrimin iyi konumlanması ve kararlılığı

$$\max_w \mu_\Delta(M_{11}) \leq 1 / \beta \quad (4.307)$$

şartının sağlanmasını gerektirir. Bu şartlarda kontrolör, oluşabilecek belirsizliklere karşı sistemin kararlılığını korur. Belirsizlikleri yapısal olarak tanımlanan bir sistemde, herhangi bir metotla tasarlanan kontrolörün, yapısal belirsizlikli sistemin

dayanıklı performansını ne ölçüde sağladığı yine μ analizi ile değerlendirilir ve temel çevrim teoreminden yararlanılarak yapılır [110].

Bir sistemde performans, bozucu sinyallerin sistem cevabına etkisinin azaltılmasıdır. Sistemdeki belirsizlikler düşünüldüğünde tasarlanan kontrolörün belirsizliklere karşı beklenen performansa ulaşması istenir. Sistemden beklenen performans hedefleri performans çıktısı ve dış kaynaklı sinyaller arasında Δ_F sanal bir belirsizlik bloğu Şekil 4.42’de gösterilmiştir.



Şekil 4.42. μ -Analizi dayanıklı performans yapısı blok diyagramı.

Δ_F sanal belirsizlik bloğu; tam blok olup, yapısal belirsizlik bloğunun köşegen yapısına uyumlu olacak şekilde köşegen matrisin bir elemanı olarak eklenir ve Δ_p yapısal performans belirsizlik bloğu

$$\Delta_p = \left\{ \begin{bmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & \Delta_F \end{bmatrix} : \Delta \in \Delta, \Delta_F \in C^{n_w \times n_z} \right\} \quad (4.308)$$

ile ifade edilir. Burada, $\|\Delta\|_\infty < \beta$ olarak verilen belirsizlik bloğuna karşılık; çevrimin iyi konumlanmış, kararlı ve performans hedeflerini sağlaması

$$\max_{\omega} \mu_{\Delta_p}(M) \leq 1/\beta \quad (4.309)$$

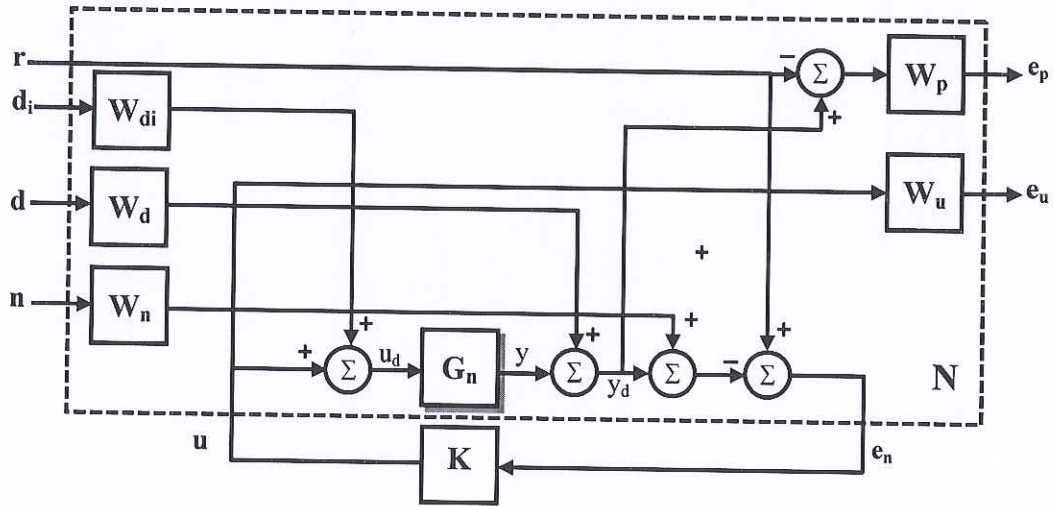
ile mümkündür. Bu şartlarda kontrolör, oluşabilecek belirsizliklere karşı sistemin kararlılığını korur ve beklenen performans hedeflerine ulaştırır.

4.8. Dayanıklı Kontrolör

$\|H\|_\infty$ normu, kapalı çevrim kontrol sisteminin performans hedeflerini karakterize etmek için kullanılır. Bu, sınırlandırılmış sistem girdileri için sınırlandırılmış çıktılarının nasıl değiştiğini gösteren bir ölçüm aracı olarak düşünülebilir. Bu durumda

sistemi kararlı yapan ve performans hedeflerini sağlayan $\|H\|_\infty$ kontrolörün tasarımı en uygun kontrol problemi olarak ele alınır.

Sisteme etki eden dış kaynaklı girdileri karakterize eden ve sistemin çıktısına eklenen performans hedeflerini gösteren ağırlık fonksiyonları ile tanımlanan sınırlı girdilere karşılık sınırlı çıktılı sistem Şekil 4.43'de verilmiştir.



Şekil 4.43. H_∞ dayanıklı kontrol problemi blok diyagramı.

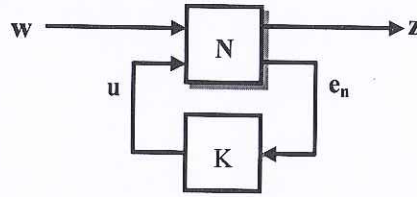
Burada, giriş ve çıkış sinyalleri arasında yazılacak N nominal sistemin iç bağlantılı modeli

$$\begin{bmatrix} e_p \\ e_u \\ e_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -W_p & W_{di}G_nW_p & W_pW_d & 0 & | & G_nW_p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & W_u \\ \hline I & -W_{di}G_n & -W_d & -W_n & | & -G_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ d_i \\ d \\ n \\ u \end{bmatrix} \quad (4.310)$$

ile ifade edilir. Kapalı çevrimli sistemde kontrolör giriş sinyali $e_n(t)$ ve $u(t)$ kontrol sinyali arasındaki ilişki $u = Ke_n$ olduğu düşünülürse, sisteme etki eden $w = [r \ d_i \ d \ n]^T$ dış bozucu sinyaller ile $z = [e_p \ e_u]^T$ performans çıktıları arasındaki $T_{zw} = F_\ell(N, K)$ transfer fonksiyonu doğrusal kesirli dönüşümü (LFT) kullanılarak

$$\begin{bmatrix} e_p \\ e_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_p S & W_{di} W_p G_n S & W_p W_d S & W_n W_p T \\ W_u K S & -W_{di} W_u T & W_d W_u K S & -W_u W_n K S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ d_i \\ d \\ n \end{bmatrix} \quad (4.311)$$

ile ifade edilir. Burada, T_{zw} transfer fonksiyonu matrisinin her bir elemanı sistemin frekansa bağlı performans gereksinimlerini gösterir. $\|H\|_\infty$ kontrol problemi genel blok diyagramı Şekil 4.44'de gösterilmiştir.



Şekil 4.44. $\|H\|_\infty$ kontrol genel yapısı.

Sisteme etki eden $w(t)$ dış kaynaklı bozucu sinyaller ve $z(t)$ performans çıktıları arasında yazılan kapalı çevrim transfer fonksiyonunun $\|H\|_\infty$ normunun en aza indirgenmesiyle sistemin belirtilen performans hedeflerini sağlaması istenir. Bu durumda $\|H\|_\infty$ kontrol problemi

$$\min_{\substack{K \\ \text{kararlı}}} \|F_\ell(N, K)\|_\infty = \min_{\substack{K \\ \text{kararlı}}} \max_{\omega} \overline{\sigma}(F_\ell(N, K)(j\omega)) < \gamma_{\text{opt}} \leq \gamma \quad (4.312)$$

ile ifade edilir. Burada, T_{zw} kapalı çevrim transfer fonksiyonunun $\|H\|_\infty$ normunun γ_{opt} en uygun minimum değeridir. Kontrol problemi; $\|H\|_\infty$ en uygun kontrol problemi olarak ele alınması, teorik olarak mümkün olmasına rağmen genellikle tercih edilmeyen bir durumdur. Bunun en çok ilgi uyandıran nedenlerinden biri, $F_\ell(N, K)$ en uygun kapalı çevrim transfer fonksiyonunun bütün frekans değerlerine karşılık gelen maksimum sabit bir tekil değer genliğine sahip olmasıdır. Böyle bir durumda, yüksek frekanslarda kontrolör $\|F_\ell(N, K)\|_\infty$ 'nu indirgeyemez. Bu da sistemde performans düşüklüğüne yol açar. Bu durumda $\|H\|_\infty$ kontrol problemi alt en uygun kontrol problemi olarak ele alınır. Alt en uygun kontrol teoreminde, $\|F_\ell(N, K)\|_\infty$ 'yi en aza indirgeyen γ değeri, seçilen bir γ_u ve γ_ℓ değerleri arasında

tekrarlama yapılarak γ_{opt} değerine yakın bir değer olan γ değerinin bulunmasıyla çözüme ulaşılır.

N nominal iç bağlantı modeli ve hedeflenen $\|F_\ell(N, K)\|_\infty$ 'nun γ değeri $\|H\|_\infty$ çözümü parametreleştirilebilir. Bu genel olarak DGKF parametreleştirilmesi

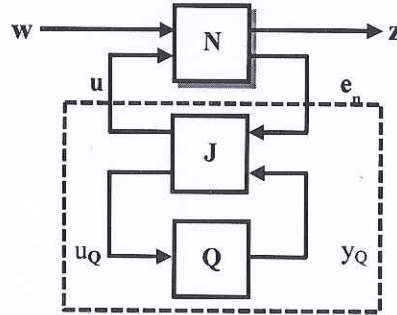
$$K(s) = F_\ell(J(s), Q(s)) \quad (4.313)$$

ile ifade edilir ve $\|F_\ell(N, K)\|_\infty < \gamma$ şartını sağlayan bütün kontrolörler kararlıdır.

Burada $\|Q(s)\|_\infty < \gamma$ şartını sağlayan herhangi bir $Q(s)$ transfer matrisi için sistem kararlı ve $\|F_\ell(N, K)\|_\infty < \gamma$ şartını sağlamaktadır. Aksi takdirde $Q(s)$ 'kararsız olması yada $\|Q(s)\|_\infty > \gamma$ olması durumunda kapalı çevrim transfer fonksiyonu ya kararsız yada $\|F_\ell(N, K)\|_\infty > \gamma$ olacaktır. Bu durumda kontrol problemi

$$\min_K \|F_\ell(N, F_\ell(J, Q))\|_\infty \leq \gamma \quad (4.314)$$

ile ifade edilir ve bu Şekil 4.45'deki gibi gösterilir.



Şekil 4.45. DGKF ile parametrize edilmiş $\|H\|_\infty$ kontrol genel yapısı.

$\|H\|_\infty$ yarı en uygun kontrol metodunda çözüme, Riccati eşitliği yardımıyla ulaşılır.

Riccati denklemi

$$A^T X + XA - XRX + Q = 0 \quad (4.315)$$

ile ifade edilir. Burada X kararlılık çözümü, $A - RX$ 'nin bütün öz değerlerinin negatif olmasını gerektirir. Bu şartı sağlayan çözüm, $X = Ric(H)$ ile gösterilir ve H Hamiltonian matrisi

$$H = \begin{bmatrix} A & -R \\ Q & -A^T \end{bmatrix} \quad (4.316)$$

ile ifade edilir.

$\|H\|_\infty$ yarı en uygun kontrol probleminin çözümünde kullanılan N nominal iç bağlantı modeli durum uzayı

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B_1 w + B_2 u \\ z &= C_1 x + D_{11} w + D_{12} u \\ y &= C_2 x + D_{21} w + D_{22} u \end{aligned} \quad (4.317)$$

ile ifade edilir. Bu matris formunda genel olarak

$$N = \begin{bmatrix} A & B_1 & B_2 \\ C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \quad (4.318)$$

ile gösterilir. Bu ifade Şekil 4.43'de gösterilen sistem için daha detaylı olarak yazılabilir. Bunun için sistemin nominal modeli ve ağırlık fonksiyonlarının ayrı ayrı durum uzayının ve durum değişkenleri ile sistemin giriş ve çıkışları arasındaki bağıntıların yazılması gerekir [113]. Şekil 4.43'de gösterilen sistemde W_{di} ağırlık fonksiyonu durum uzay gösterimi

$$\begin{aligned} \dot{x}_{w_{di}} &= A_{w_{di}} x_{w_{di}} + B_{w_{di}} \tilde{d}_i \\ d_i &= C_{w_{di}} x_{w_{di}} + D_{x_{w_{di}}} \tilde{d}_i \end{aligned} \quad (4.319)$$

ile ifade edilir. G_n nominal sistemin durum uzayı

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B(d_i + u) \\ y &= Cx + D(d_i + u) \end{aligned} \quad (4.320)$$

ile gösterilir. Burada d_i yerine konacak olursa ifade

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + BC_{w_{di}} x_{w_{di}} + BD_{x_{w_{di}}} \tilde{d}_i + Bu \\ y &= Cx + DC_{w_{di}} x_{w_{di}} + DD_{x_{w_{di}}} \tilde{d}_i + Du \end{aligned} \quad (4.321)$$

olarak yazılır. W_d ağırlık fonksiyonu durum uzay gösterimi

$$\begin{aligned}\dot{x}_{w_d} &= A_{w_d} x_{w_d} + B_{w_d} \tilde{d} \\ d &= C_{w_d} x_{w_d} + D_{x_{w_d}} \tilde{d}\end{aligned}\quad (4.322)$$

ile ifade edilir. W_p ağırlık fonksiyonu durum uzay gösterimi

$$\begin{aligned}\dot{x}_{w_p} &= A_{w_p} x_{w_p} + B_{w_p} (y_d - r) \\ e_{w_p} &= C_{w_p} x_{w_p} + D_{w_p} (y_d - r)\end{aligned}\quad (4.323)$$

Burada y_d

$$\begin{aligned}y_d &= y + d \\ y_d &= Cx + DC_{w_{di}} x_{w_{di}} + DD_{x_{w_{di}}} \tilde{d}_i + Du + C_{w_d} x_{w_d} + D_{w_d} \tilde{d}\end{aligned}\quad (4.324)$$

olarak yazılırsa Denklem 4.321'deki ifade

$$\begin{aligned}\dot{x}_{w_p} &= A_{w_p} x_{w_p} + B_{w_p} Cx + B_{w_p} DC_{w_{di}} x_{w_{di}} + B_{w_p} DD_{x_{w_{di}}} \tilde{d}_i + B_{w_p} Du + \\ & B_{w_p} C_{w_d} x_{w_d} + B_{w_p} D_{w_d} \tilde{d} - B_{w_p} r \\ e_{w_p} &= C_{w_p} x_{w_p} + D_{w_p} Cx + D_{w_p} DC_{w_{di}} x_{w_{di}} + D_{w_p} DD_{x_{w_{di}}} \tilde{d}_i + D_{w_p} Du + \\ & D_{w_p} C_{w_d} x_{w_d} + D_{w_p} D_{w_d} \tilde{d} - D_{w_p} r\end{aligned}\quad (4.325)$$

deki gibi yazılabilir. W_n ağırlık fonksiyonu durum uzay gösterimi

$$\begin{aligned}\dot{x}_{w_n} &= A_{w_n} x_{w_n} + B_{w_n} \tilde{n} \\ n &= C_{w_n} x_{w_n} + D_{w_n} \tilde{n}\end{aligned}\quad (4.326)$$

ile ifade edilir. Bunlara ilave olarak kontrolöre giriş sinyali

$$\begin{aligned}e_n &= r - (y_d + n) \\ e_n &= r - Cx - DC_{w_{di}} x_{w_{di}} - DD_{x_{w_{di}}} \tilde{d}_i - Du - C_{w_d} x_{w_d} - D_{w_d} \tilde{d} - C_n x_n - D_n \tilde{n}\end{aligned}\quad (4.327)$$

olarak gösterilir. Bu durumda Şekil 4.43'deki sistem için durum uzay matrisi

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_{w_p} \\ \dot{x}_{w_d} \\ \dot{x}_{w_{di}} \\ \dot{x}_{w_e} \\ \dot{x}_{w_c} \\ e_p \\ e_d \\ e_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 & BC_{w_d} & 0 & 0 & 0 & 0 & BD_{w_d} & 0 & 0 & B \\ B_{w_p} C & A_{w_p} & B_{w_p} DC_{w_{di}} & B_{w_p} C_{w_d} & 0 & 0 & -B_{w_p} & B_{w_p} DD_{x_{w_{di}}} & B_{w_p} D_{w_d} & 0 & B_{w_p} D \\ 0 & 0 & A_{w_d} & 0 & 0 & 0 & 0 & B_{w_d} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{w_{di}} & 0 & 0 & 0 & 0 & B_{w_{di}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{w_e} & 0 & 0 & 0 & 0 & B_{w_e} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{w_c} & 0 & 0 & 0 & 0 & B_{w_c} \\ \hline D_{w_p} C & C_{w_p} & D_{w_p} DC_{w_{di}} & D_{w_p} C_{w_d} & 0 & 0 & -D_{w_p} & D_{w_p} DD_{x_{w_{di}}} & D_{w_p} D_{w_d} & 0 & D_{w_p} D \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{w_n} & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{w_n} \\ \hline C & 0 & DC_{w_{di}} & -C_{w_d} & -C_{w_e} & 0 & -1 & -DD_{x_{w_{di}}} & -D_{w_d} & -D_{w_e} & -D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_{w_p} \\ x_{w_d} \\ x_{w_{di}} \\ x_{w_e} \\ x_{w_c} \\ r \\ d \\ n \\ u \end{bmatrix}\quad (4.328)$$

ile ifade edilir.

N iç bağlantı modelinin durum uzayı gösteriminde

- (A, B_1) ve (A, B_2) kontrol edilebilir,
- (C_1, A) ve (C_2, A) gözlenebilir,
- $D_{12}^T D_{12} = I$ ve $D_{21}^T D_{21} = I$
- $D_{11} = D_{22} = 0$

olduğu kabul edilir ve $\tilde{D}_{12} = I - D_{12} D_{12}^T$ ve $\tilde{D}_{21} = I - D_{21} D_{21}^T$ olarak yazılırsa buna göre yazılan iki Riccati denklemi

$$X_\infty = \text{Ric} \begin{bmatrix} A - B_2 D_{12}^T C_1 & \gamma^{-2} B_1 B_1^T - B_2 B_2^T \\ -C_1^T \tilde{D}_{12}^T \tilde{D}_{12} C_1 & -(A - B_2 D_{12}^T C_1)^T \end{bmatrix} \quad (4.329)$$

ve

$$Y_\infty = \text{Ric} \begin{bmatrix} (A - B_1 D_{21}^T C_2)^T & \gamma^{-2} C_1 C_1^T - C_2^T C_2 \\ -B_1^T \tilde{D}_{21}^T \tilde{D}_{21} B_1^T & -(A - B_1 D_{21}^T C_2) \end{bmatrix} \quad (4.330)$$

daki gibi ifade edilir. Sistemde K_c geri besleme matrisi, K_f gözlemci kazanç matrisi ve Z_∞ matrisi

$$K_c = (D_{12}^T C_1 + B_2^T X_\infty) \quad (4.331)$$

$$K_f = (B_1 D_{21}^T + Y_\infty C_2^T) \quad (4.332)$$

$$Z_\infty = (I - \gamma^{-2} Y_\infty X_\infty) \quad (4.333)$$

yazılabilir. $X_\infty \geq 0$ ve $Y_\infty \geq 0$ ve spectral yarı çap $\rho(X_\infty Y_\infty) < \gamma^2$ ise DGKF parametresi

$$J(s) = \left[\begin{array}{c|cc} A_\infty & -Z_\infty K_f & Z_\infty (B_2 + \gamma^{-2} Y_\infty C_1^T D_{12}) \\ \hline -K_c & 0 & I \\ \hline -(C_2 + \gamma^{-2} D_{21} B_1^T X_\infty) & I & 0 \end{array} \right] \quad (4.334)$$

$$J(s) = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix} \quad (4.335)$$

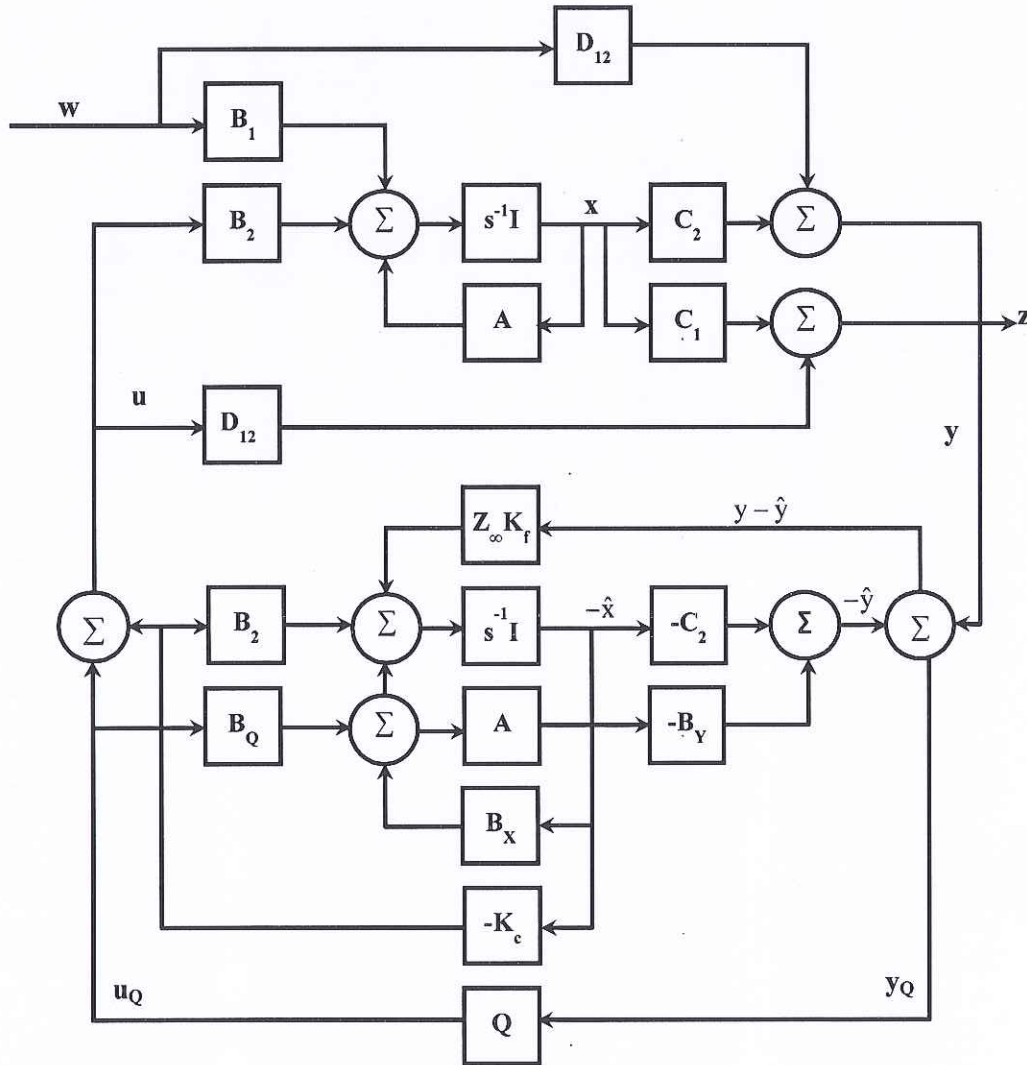
ile ifade edilir. Burada A_∞ parametresi

$$A_\infty = A - B_2 K_c + \gamma^{-2} B_1 B_1^T X_\infty - Z_\infty K_f (C_2 + \gamma^{-2} D_{12} B_1^T X_\infty) \quad (4.336)$$

olarak yazılır. Sistemin kararlılığını ve $\|F_t(N,K)\|_\infty < \gamma$ şartını sağlayan $K(s)$ kontrolörü

$$K(s) = F_t(J(s), Q(s)) = J_{11}(s) + J_{12}(s)Q(s)(I - J_{22}(s)Q(s))^{-1}J_{21}(s) \quad (4.337)$$

ile ifade edilir. $\|H\|_\infty$ yarı en uygun kontrol metodunda kontrolör ve sistemin iç yapısı detaylı olarak Şekil 4.46'da verilmiştir [108].



Şekil 4.46. $\|H\|_\infty$ yarı en uygun kontrol iç yapısı.

Yukarıda verilen çözümde γ değeri bisection algoritması ile en aza indirgenir. Tekrarlamada kullanılan algoritma bisection algoritması (ortay teoremi) olarak adlandırılır. Bisection algoritması

- a. γ_u ve γ_ℓ üst ve alt sınır değerleri $\gamma_\ell \leq \|F_\ell(N, K)\|_\infty \leq \gamma_u$ sağlayacak şekilde seçilir,
- b. $(\gamma_u - \gamma_\ell)/\gamma_\ell \leq$ belirlenen seviye ise durulur, $\|F_\ell(N, K)\|_\infty \approx (\gamma_u + \gamma_\ell)/2$. Aksi takdirde diğer adıma geçilir,
- c. $\gamma = (\gamma_\ell + \gamma_u)/2$,
- d. $\|F_\ell(N, K)\|_\infty \leq \gamma$ olması durumunda γ için H matrisinin $(\rho(X_\infty Y_\infty) < \gamma^2)$ özdeğerleri hesaplanır,
- e. H matrisi öz değerlerinin $j\mathbb{R}$ olması durumunda $\gamma_\ell = \gamma$ dir. Aksi takdirde $\gamma_u = \gamma$ olur ve 2. adıma geri dönlür.

altı adımda yapılır. $\gamma \leq 1$ olması durumunda tasarlanan kontrolörün tanımlanan performans hedeflerine ulaştığı söylenebilir.

4.9. Dayanıklılık Sentezi

μ_Δ yapısal tekil değerler, kapalı çevrimli bir sistem için tasarlanan bir K kontrolörünün dayanıklı performans (RP) analizi için sıklıkla kullanılan güçlü bir araçtır. Bununla beraber sisteme sentez edilerek sistemde RP'ı sağlayacak kontrolörün tasarlanmasını sağlayan bir metot oluşturulur. Bu metot μ -sentezi olarak adlandırılır. Genel olarak μ_Δ 'nın kontrolör tasarımında doğrudan doğruya kullanılmasını sağlayan bir metot yoktur. Bunun için D-K tekrarlama olarak bilinen kontrol metodu ile sistemin dayanıklı kararlılık (RS) ve RP'ı sağlayan K kontrolörü bulunur. H_∞ kontrol metodu ve μ_Δ analizi birleşiminden oluşan bu metot, belirsizlik içeren sistemin dayanıklı kararlılık ve performansı açısından bakıldığında iyi sonuçlar vermektedir [55].

D-K tekrarlama kontrol metodunu klasik $\|H\|_\infty$ kontrol metodundan ayıran en önemli özellik, $\|H\|_\infty$ kontrol metodunun nominal sistemin kullanılmasına karşın, D-K tekrarlama metodu belirsizlik içeren sistem için kullanılmasıdır.

K kontrolörünün $\Delta \in B\Delta$ belirsizlik bloğu ile tanımlanan $F_\ell(P(s), \Delta(s))$ belirsizlik içeren bir sistemin kararlılığı

$$\|F_u((F_\ell(P(s), K(s)), \Delta))\|_\infty \leq 1 \quad (4.338)$$

şartını kullanarak sistemin RP'ı sağlaması istenir. Bu durum, belirsizlik içeren sistemin

$$\max_{\omega} \mu_{\Delta_p}(F_\ell(P, K)(j\omega)) < 1 \quad (4.339)$$

şartını sağlamasını gerektirir. μ -sentezindeki amaç sistemin kararlılığını sağlarken $F_\ell(P, K)$ kapalı çevrim transfer fonksiyonunun $\mu_{\Delta_p}(\cdot)$ değerini en aza indirgeyen K kontrolörünü

$$\min_{\substack{K \\ \text{kararlı}}} \max_{\omega} \mu_{\Delta_p}(F_\ell(P, K)(j\omega)) \quad (4.340)$$

bulmaktır. Δ_p yapısal belirsizlik bloğunun gerçel ve kompleks belirsizlik içermesi durumunda μ üst sınır eşitsizliği değişeceğinden, μ -sentezi kompleks μ -sentezi (D-K tekrarlama) ve karma μ -sentezi (D,G-K tekrarlama) olarak iki kısımda incelenir.

4.9.1. Kompleks μ -sentezi

Belirsizlikli bir sistemde Δ yapısal belirsizlik bloğunun sadece kompleks belirsizliklerden oluşması ($m_r = 0$) durumunda üst sınır eşitsizliği

$$\mu_{\Delta_p}(M) \leq \inf_{D \in D_\Delta} \bar{\sigma}(DMD^{-1}) \quad (4.341)$$

ile ifade edilir. Bu durumda, $D(\omega) \in \hat{D}_\Delta \triangleq \{\hat{D}(\omega)\}$ her ω frekans değerine karşılık birbirinden bağımsız olarak kestirildiğinde, kapalı çevrimli sistemin üst tekil değerini minimum yapan $D(\omega)$ 'ye karşılık üst tekil değer maksimum genliği olan β üst sınır değerini minimum yapan ve sistemin kararlılığını sağlayan

$$\min_{\substack{K \\ \text{kararlı}}} \max_{\omega} \min_{D(\omega) \in \hat{D}_\Delta} \bar{\sigma}(D(\omega)F_\ell(P, K)(j\omega)D(\omega)^{-1}) \quad (4.342)$$

ile K kontrolörü ve β_{opt} en uygun üst sınır değeri elde edilir. Her ω frekans değerinde $D(\omega) \in \hat{D}_\Delta$ frekans bağımlı fonksiyonlardan oluşan ölçeklendirme matrisi ile Denklem 4.342

$$\min_{\substack{K \\ \text{kararlı}}} \min_{D(\omega) \in \hat{D}_\Delta} \max_{\omega} \bar{\sigma}(D(\omega)F_\ell(P, K)(j\omega)D(\omega)^{-1}) \quad (4.343)$$

ile gösterilebilir. M kompleks belirsiz sistem model matrisi ve $D(\omega) \in \hat{D}_\Delta$ ölçeklendirme matrisi ile kontrol problemi

$$\min_{\substack{K \\ \text{kararlı}}} \min_{D(\omega) \in \hat{D}_\Delta} \|DMD^{-1}\|_\infty \quad (4.344)$$

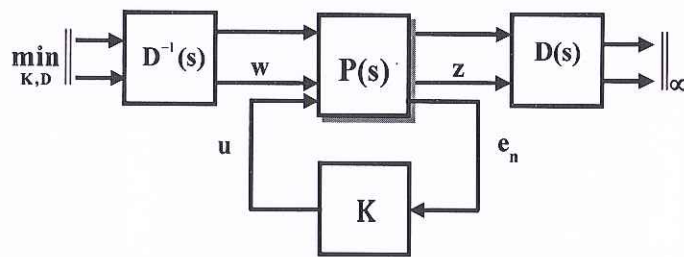
ifade edilir. $U^*U = I$ ve D ile aynı yapıda kompleks bir matris olmak üzere üst sınır

$$\bar{\sigma}[(UD)M(UD)^{-1}] = \bar{\sigma}[UDMD^{-1}U^*]; \quad \bar{\sigma}[UDMD^{-1}U^*] \triangleq \bar{\sigma}(DMD^{-1}) \quad (4.345)$$

olarak yazılabilir. Burada D yerine UD 'nin yazılması üst sınır eşitsizliğini değiştirmez. Bu çarpanla, $\inf_{D \in \hat{D}_\Delta} \bar{\sigma}(DMD^{-1})$ minimum değerini bozmayacak şekilde $D(\omega)$ frekansa bağlı ölçeklendirme matrisi kararlı ve minimum fazlı $D(s)$ transfer fonksiyonuna dönüştürülür. Bu durumda en uygunu bulma problemi

$$\min_{\substack{K \\ \text{kararlı}}} \min_{\substack{D(s) \in \hat{D}_\Delta \\ \text{kararlı-min faz}}} \|D(s)F_\ell(P, K)(s)D^{-1}(s)\|_\infty \quad (4.346)$$

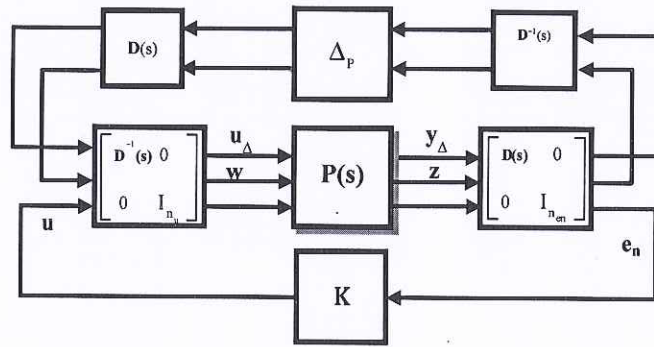
ile ifade edilir ve D-K tekrarlama genel yapısı Şekil 4.47'de gösterilir.



Şekil 4.47. D-K tekrarlama genel gösterimi.

Burada çözüme iki aşamalı tekrarlama yapılarak ulaşılır. D-K tekrarlama sırasında birinci aşamada seçilen D 'ye karşılık sistemi kararlı yapacak olan K kontrolörünün bulunmasıdır. İkinci aşamada, bulunan K kontrolörüne karşılık $\inf_{D \in \hat{D}_\Delta} \bar{\sigma}(DMD^{-1})$ üst sınır değerini en aza indirgeyen $D(\omega)$ ölçeklendirme matrisinin bulunup buna uygun $D(s)$ transfer fonksiyonu oluşturulur. D-K tekrarlama ile kontrolör tasarım işlem sırası

- $P(s)$ belirsizlik içeren sistemin iç bağlantılı modeli için $D_{i-1}(\omega) = I_n$ ölçeklendirme matrisi ile başlangıç şartı belirlenir,
- Her frekans değerinde $D_i(\omega)$ ölçeklendirme matrisine karşılık, kararlı minimum fazlı $D_i(s)$ transfer fonksiyonu matrisi uydurulur. $D_i(s)$ transfer fonksiyon matrisine, $P(s)$ matrisinin boyutlarına uygun olacak şekilde birim matris eklenerek, $P_{D_i}(s) = D_i(s)P(s)D_i(s)^{-1}$ yeni iç bağlantı yapısı oluşturulup Şekil 4.48'de verilmiştir,



Şekil 4.48. $P_{D_i}(s)$ iç bağlantı yapısı.

- H_∞ kontrol metodu ile $K_i(s)$ en uygun kontrolörü

$$K_i(s) = \min_{K \text{ kararlı}} \|F_\ell(P_{D_i}(s), K(s))\|_\infty \quad (4.347)$$

bulunur,

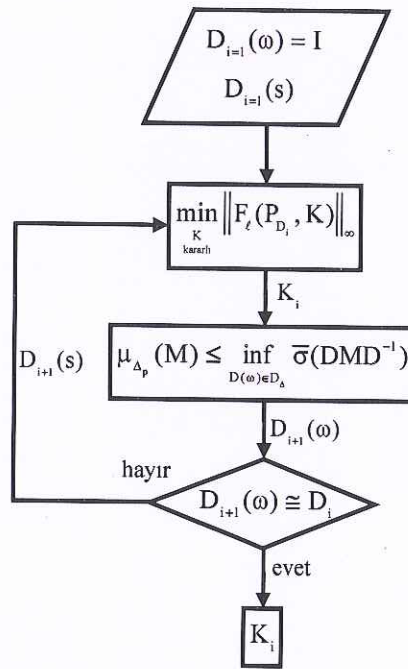
- Kompleks belirsizlikler için tanımlanan μ üst sınır problemi

$$D_{i+1}(\omega) \triangleq \min_{D(\omega) \in D_\Delta} \left\{ \overline{\sigma} \left(D(\omega) F_\ell(P(j\omega), K_i(j\omega)) D^{-1}(\omega) \right) \right\} \quad (4.348)$$

çözülerek her frekansa karşılık gelen yeni $D_{i+1}^*(\omega)$ ölçeklendirme matrisi bulunur,

- $D_{i+1}(\omega)$ ve $D_i(\omega)$ ölçeklendirme matrisleri karşılaştırılır. Birbirine çok yakın olması durumunda tekrarlamaya son verilir, aksi takdirde tekrarlama 2.adımdan başlayarak devam eder. D-K tekrarlamasının akış şeması Şekil 4.49'da gösterilmiştir.

temel olarak beş adımda yapılır [59].



Şekil 4.49. D-K tekrarlama akış şeması.

4.9.1. Karma μ -sentezi

Belirsizlik içeren bir sistemde Δ yapısal belirsizlik bloğunun gerçel ve kompleks belirsizliklerden oluşması durumunda, kontrolör tasarım problemi, Denklem 4.293'deki μ üst sınırı şartı

$$K(s) = \min_{K(j\omega)} \sup_{\omega} \inf_{\substack{D(\omega) \in D_\Delta \\ G(\omega) \in G_\Delta}} \inf_{\beta(\omega) \in \mathbb{R}_+} \{ \beta(\omega) | \bar{\sigma}(\Gamma(\omega)) \leq 1 \} \quad (4.349)$$

şeklinde ifade edilir. Burada $\Gamma(\omega)$

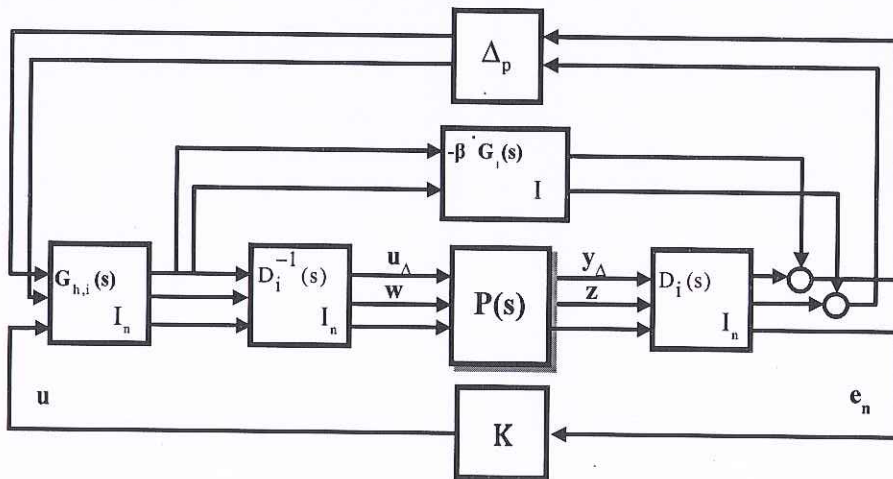
$$\Gamma = \left(\frac{D(\omega)F_\ell(P(j\omega), K(j\omega))D^{-1}(\omega)}{\beta(\omega)} - jG(\omega) \right) (I + G^2(\omega))^{-\frac{1}{2}} \quad (4.350)$$

ile ifade edilir. Çözüm için bulunan K kontrolörüne karşılık β üst sınır değerini en aza indirgeyecek $D(\omega)$ ve $G(\omega)$ ölçeklendirme matrisleri belirlenir. Buna uygun $D(s)$ ve $G(s)$ transfer fonksiyonları oluşturulur. Bu transfer fonksiyonları ile yeniden oluşturulan sistem modeli için $\|H\|_\infty$ kontrol metodu ile sistemi kararlı yapacak ve β üst sınır değerini en aza indirgeyecek K kontrolörü bulunur. Bu metot D,G-K tekrarlama olarak adlandırılır. Kontrolör tasarımı temel olarak

- a. $P(s)$ belirsizlik içeren sistemin iç bağlantılı modeli için $D_{i-1}(\omega) = I_n$, $G_{i-1}(\omega) = 0_n$ ölçeklendirme matrisleri ve $\beta_{i-1} = 1$ ile başlangıç şartı belirlenir,
- b. Her frekans değerinde $D_i(\omega)$ ve $jG_i(\omega)$ ölçeklendirme matrislerine karşılık kararlı minimum fazlı $D_i(s)$ ve $G_i(s)$ transfer fonksiyon matrisi uydurulur. $D_i(s)$ ve $G_i(s)$ transfer fonksiyon matrisleri uygun çarpanlarla değiştirilir. $D_i(s)$, $D_i^{-1}(s)$, $G_{h,i}(s)$ ve $G_i(s)G_{h,i}(s)$ spektral çarpanları kararlı transfer fonksiyonları olup, $G_{h,i}(s)$ çarpanı $(I + G_i(s)G_i(-s)^T)^{-1} = G_{h,i}(s)G_{h,i}(-s)^T$ eşitliğini sağlar. $D_i(s)$ ve $G_{h,i}(s)$ matrislerine birim matris ve $G_i(s)$ matrisine $0_{n_{en} \times n_{nu}}$ sıfır matrisi eklenerek $P(s)$ iç bağlantı yapısının boyutuyla uyumluluğu sağlanır ve P_{DG_i} iç bağlantı yapısı

$$P_{DG_i}(s) = (D_i(s)F_\ell(P, K)(s)D_i^{-1}(s) - \beta_i G_i(s))G_{h,i}(s) \quad (4.351)$$

oluşturulur. P_{DG_i} iç bağlantı yapısı Şekil 4.50'de gösterilmiştir,



Şekil 4.50. $\beta_i G_i(s)$ iç bağlantı yapısı.

- c. H_∞ kontrol metodu ile $K_i(s)$ en uygun kontrolörü

$$K_i(s) \triangleq \min_{K \text{ kararlı}} \|F_\ell(P_{DG_i}(s), K(s))\|_\infty \quad (4.352)$$

bulunur,

- d. $\beta_{i+1} = \|\mu_{\Delta_p}(F_\ell(P_{DG_i}(s), K(s)))\|_\infty$ maksimum üst sınır değeri

$$\beta_{i+1} \triangleq \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \inf_{\substack{D(\omega) \in D_\Delta \\ G(\omega) \in G_\Delta}} \inf_{\beta(\omega) \in \mathbb{R}_+} \{\beta(\omega) | \bar{\sigma}(\Gamma) \leq 1\} \quad (4.353)$$

çözümü ile bulunur,

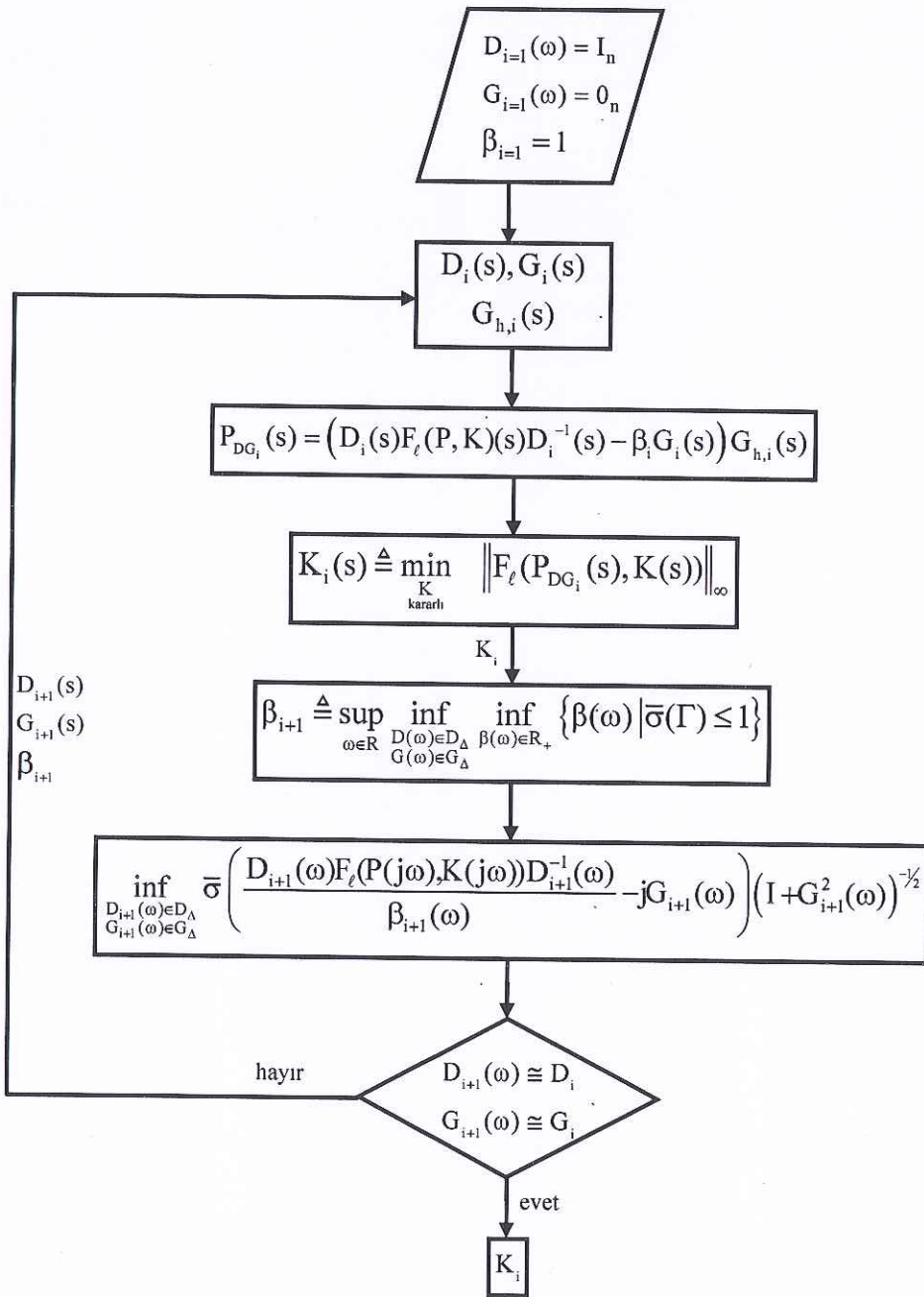
- e. Bulunan β_{i+1} değerine karşılık yeni $D_{i+1}(\omega)$ ve $G_{i+1}(\omega)$ ölçekleri

$$\inf_{\substack{D_{i+1}(\omega) \in D_\Delta \\ G_{i+1}(\omega) \in G_\Delta}} \bar{\sigma} \left(\frac{D_{i+1}(\omega) F_\ell(P(j\omega), K(j\omega)) D_{i+1}^{-1}(\omega)}{\beta_{i+1}(\omega)} - jG_{i+1}(\omega) \right) (I + G_{i+1}^2(\omega))^{-\frac{1}{2}} \quad (4.354)$$

çözümü ile bulunur,

- f. Yeni $D_{i+1}(\omega)$ ve $G_{i+1}(\omega)$ ölçekleri, $D_i(\omega)$ ve $jG_i(\omega)$ ölçekleri ile karşılaştırılır. Birbirine çok yakın olması durumunda tekrarlamaya son verilir, aksi takdirde tekrarlama 2.adımdan başlayarak devam eder. D,G-K tekrarlama şeması Şekil 4.51'da gösterilmiştir.

altı adımda yapılır.



Şekil 4.51. D,G-K tekrarlama akış şeması.

BÖLÜM 5. SİMÜLASYON ÇALIŞMALARI

Ters sarkaç sistemi ile ilgili araştırmalar uzun yıllardır yapılmaktadır. Bu sistem yapısal olarak düzensiz hareket gösteren kararsız, doğrusal olmayan dinamik sistemdir. Bu sistemin gerçek zamanlı dengeleme çalışmaları, modern kontrol kuramı için oldukça uğraştırıcı ve önemli olmuştur [114].

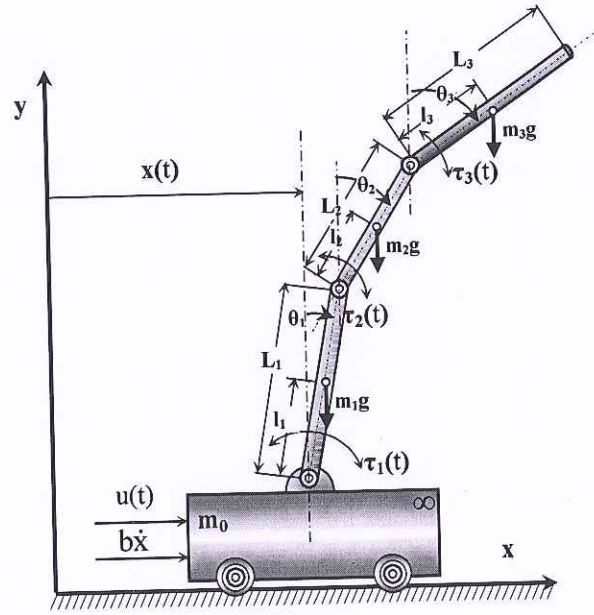
Günümüzde deney düzeneklerinde yapılan gerçek zamanlı deneysel çalışmalardan önce, kontrol metotlarının simülasyon çalışmalarının yapılması gerekmektedir. Buradan yola çıkılarak, bu çalışmada “üçlü ters sarkaç” (TIP) adı verilen bir dinamik sistemi dengelemek için H_{∞} en uygun kontrol metodu tabanlı dayanıklı kontrol simülasyon çalışması yapılmıştır.

5.1. Fiziksel Sistemin Tanımı

Oluşturulan u tahrik kuvveti ile TIP sistemin kontrolünde arabanın referans takibi, sarkaç kollarının dik pozisyonda durması ve kontrol etkinliğinin artırılması hedeflenmiştir.

TIP sistemi Sekil 5.1’de gösterildiği gibi x arabanın pozisyonu, sırasıyla birinci ikinci ve üçüncü sarkaç kollarının dikey doğrultuları θ_1 , θ_2 ve θ_3 ölçülebilir salınım açıları olarak verilmiştir.

Fiziksel sistemin ile ilgili parametreler ve bunların nominal değerleri, ayrıca sistemin modellenmesinde ve kontrolünde kullanılan bazı parametreler Tablo 5.1’de verilmiştir.



Şekil 5.1. Üçlü ters sarkaç sistemi.

Tablo 5.1. Modelde kullanılan parametreler.

Parametre	Açıklaması	Nominal değeri
m_0	Arabanın kütlesi	2.4 [kg]
m_1	Birinci sarkaç kolu kütlesi	1.0 [kg]
m_2	İkinci sarkaç kolu kütlesi	1.0 [kg]
m_3	Üçüncü sarkaç kolu kütlesi	0.4 [kg]
I_1	Birinci sarkaç kolu atalet momenti	1.187×10^{-2} [kgm ²]
I_2	İkinci sarkaç kolu atalet momenti	0.704×10^{-2} [kgm ²]
I_3	Üçüncü sarkaç kolu atalet momenti	0.903×10^{-2} [kgm ²]
L_1	Birinci sarkaç kolu boyu	0.4 [m]
L_2	İkinci sarkaç kolu boyu	0.3 [m]
L_3	Üçüncü sarkaç kolu boyu	0.4 [m]
l_1	Birinci sarkaç kolu yarı boyu	0.2 [m]
l_2	İkinci sarkaç kolu yarı boyu	0.15 [m]
l_3	Üçüncü sarkaç kolu yarı boyu	0.2 [m]
b	Araba yolundaki sürtünme katsayısı	13.6 [Ns/m]
c_1	Birinci sarkaç kolun dönme eksenindeki sürtünme katsayısı	4.5×10^{-3} [Nms/rad]
c_2	İkinci sarkaç kolun dönme eksenindeki sürtünme katsayısı	4.5×10^{-3} [Nms/rad]
c_3	Üçüncü sarkaç kolun dönme eksenindeki sürtünme katsayısı	4.5×10^{-3} [Nms/rad]
θ_1	Birinci sarkaç kolun dikeyle yaptığı salınım açısı	[rad]
θ_2	İkinci sarkaç kolun dikeyle yaptığı salınım açısı	[rad]
θ_3	Üçüncü sarkaç kolun dikeyle yaptığı salınım açısı	[rad]
θ_4	$\theta_2 - \theta_1$	[rad]
θ_5	$\theta_3 - \theta_2$	[rad]
u	Arabaya uygulanan tahrik kuvveti	[N]
τ_1	Birinci sarkaç kolunu etkileyen bozucu tork	[Nm]
τ_2	İkinci sarkaç kolunu etkileyen bozucu tork	[Nm]
τ_3	Üçüncü sarkaç kolunu etkileyen bozucu tork	[Nm]
K_{d1}	Birinci kol bozucu tork ölçek faktörü	4×10^{-4} [N]
K_{d2}	İkinci kol bozucu tork ölçek faktörü	4×10^{-4} [N]
K_{d3}	Üçüncü kol bozucu tork ölçek faktörü	4×10^{-4} [N]
K_{nx}	Araba pozisyonundaki gürültü ölçeklendirme faktörü	5×10^{-5} [N]
K_{n1}	Birinci sarkaç kolu salınım açısındaki gürültü ölçeklendirme faktörü	1.6×10^{-3} [N]
K_{n2}	İkinci sarkaç kolu salınım açısındaki gürültü ölçeklendirme faktörü	1.6×10^{-3} [N]
K_{n3}	Üçüncü sarkaç kolu salınım açısındaki gürültü ölçeklendirme faktörü	1.6×10^{-3} [N]
g	Yer çekimi ivmesi	9.8 [m/s ²]

5.2. Sistemin Dinamik Modeli

TIP sistemi dört serbestlik derecesine sahip olup sistemin hareketi yalnız bir kontrol girişi olan arabaya uygulanan kuvvettir. Sistemin hareket denklemleri Lagrange denklemi kullanarak

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} = Q_i \quad (5.1)$$

elde edilir. Burada L toplam kinetik enerji ile toplam potansiyel enerji farkı olan L Lagrange fonksiyonu, q_i genelleştirilmiş koordinatı, R Rayleigh fonksiyonu ve Q_i genelleştirilmiş dış kuvvetleri göstermektedir. Önce doğrusal olmayan hareket denklemleri elde edilir. Sonra bunlar doğrusallaştırılarak kontrolör tasarımında kullanılır.

5.2.1. Doğrusal olmayan model

Dört serbest dereceli TIP sisteminde q_i genelleştirilmiş koordinat ve kuvvetler

$$q_i = [x \quad \theta_1 \quad \theta_2 \quad \theta_3]^T \quad (5.2)$$

$$Q_i = [u \quad \tau_1 \quad \tau_2 \quad \tau_3]^T$$

ile gösterilir. Lagrange ve Rayleigh fonksiyonlar her bir koordinat için

$$L_0 = \frac{1}{2} m_0 \dot{x}^2 - m_0 g y_0$$

$$L_1 = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}^2 + \frac{1}{2} (m_1 \ell_1^2 + I_1) \dot{\theta}_1^2 + (m_1 \ell_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1) \dot{x} - m_1 g \ell_1 \cos \theta_1$$

$$L_2 = \frac{1}{2} m_2 \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m_2 L_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} (m_2 \ell_2^2 + I_2) \dot{\theta}_2^2 + m_2 L_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 \dot{x} + m_2 \ell_2 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2 \dot{x} \\ + m_2 L_1 \ell_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) - m_2 g (L_1 \cos \theta_1 + \ell_2 \cos \theta_2) \quad (5.3)$$

$$L_3 = \frac{1}{2} m_3 \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m_3 L_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_3 L_2^2 \dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2} m_3 (m_3 \ell_3^2 + I_3) \dot{\theta}_3^2 + m_3 L_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 \dot{x} \\ + m_3 L_2 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2 \dot{x} + m_3 \ell_3 \dot{\theta}_3 \cos \theta_3 \dot{x} + m_3 L_1 L_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \\ + m_3 L_1 \ell_3 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 \cos(\theta_1 - \theta_3) + m_3 L_2 \ell_3 \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 \cos(\theta_2 - \theta_3) \\ - m_3 g (L_1 \cos \theta_1 + L_2 \cos \theta_2 + \ell_3 \cos \theta_3)$$

$$R_0 = \frac{1}{2} b \dot{x}^2; \quad R_1 = \frac{1}{2} c_1 \dot{\theta}_1^2; \quad R_2 = \frac{1}{2} c_2 \dot{\theta}_2^2; \quad R_3 = \frac{1}{2} c_3 \dot{\theta}_3^2$$

ile ifade edilir. Sistem kontrol amacına uygun olarak belli çalışma noktaları etrafında doğrusal davranır. Küçük salınımlarda $\sin \theta_1 \cong \theta_1, \sin \theta_2 \cong \theta_2, \sin \theta_3 \cong \theta_3, \cos \theta_1 \cong 1, \cos \theta_2 \cong 1, \cos \theta_3 \cong 1$ ve $\dot{\theta}_1^2 = 0, \dot{\theta}_2^2 = 0, \dot{\theta}_3^2 = 0$ olup, sistemin doğrusal modeli

$$M\ddot{\mathbf{x}} + N\dot{\mathbf{x}} + P\mathbf{x} + T\tilde{\tau} = Fu$$

$$\ddot{\mathbf{x}} = [\ddot{x} \quad \ddot{\theta}_1 \quad \ddot{\theta}_2 \quad \ddot{\theta}_3]^T; \dot{\mathbf{x}} = [\dot{x} \quad \dot{\theta}_1 \quad \dot{\theta}_2 \quad \dot{\theta}_3]^T; \quad (5.4)$$

$$\mathbf{x} = [x \quad \theta_1 \quad \theta_2 \quad \theta_3]^T; \tilde{\tau} = [\tilde{\tau}_1 \quad \tilde{\tau}_2 \quad \tilde{\tau}_3]^T$$

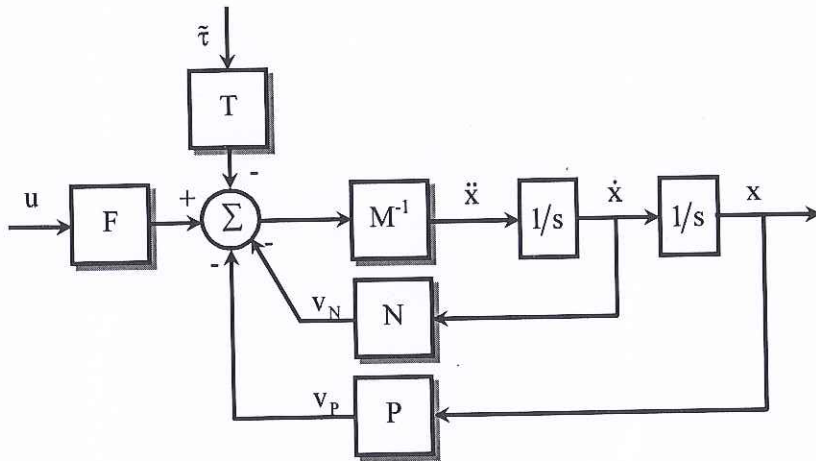
elde edilir. Burada, $\ddot{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^{4 \times 1}$, $\dot{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^{4 \times 1}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{4 \times 1}$, $\tilde{\tau} \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$, $u \in \mathbb{R}$ vektör ve skalar değerler olmak üzere diğer parametreler

$$M = \begin{bmatrix} (m_0 + m_1 + m_2 + m_3) & (m_1 \ell_1 + m_2 L_1 + m_3 L_1) & (m_2 \ell_2 + m_3 L_2) & m_3 \ell_3 \\ (m_1 \ell_1 + m_2 L_1 + m_3 L_1) & (m_1 \ell_1^2 + m_2 L_1^2 + m_3 L_1^2 + I_1) & (m_2 L_1 \ell_2 + m_3 L_1 L_2) & m_3 L_1 \ell_3 \\ (m_2 \ell_2 + m_3 L_2) & (m_2 L_1 \ell_2 + m_3 L_1 L_2) & (m_2 \ell_2^2 + m_3 L_2^2 + I_2) & m_3 L_2 \ell_3 \\ m_3 \ell_3 & m_3 L_1 \ell_3 & m_3 L_2 \ell_3 & m_3 \ell_3^2 + I_3 \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

$$N = \begin{bmatrix} b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_1 + c_2 & -c_2 & 0 \\ 0 & -c_2 & c_2 + c_3 & -c_3 \\ 0 & 0 & -c_3 & c_3 \end{bmatrix}; \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(m_1 \ell_1 + m_2 L_1 + m_3 L_1)g & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(m_2 \ell_2 + m_3 L_2)g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -m_3 \ell_3 g \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ K_{d1} & -K_{d2} & 0 \\ 0 & K_{d2} & -K_{d3} \\ 0 & 0 & K_{d3} \end{bmatrix}; \quad F = [1 \ 0 \ 0 \ 0]^T \quad (5.7)$$

ile ifade edilir. Sistemin blok diyagramı Şekil 5.2'de gösterilmiştir.



Şekil 5.2. TIP sisteminin blok diyagramı.

5.2.2. Nominal modeli

Sistemin doğrusal dinamik modelini dayanıklı kontrolde kullanmak için nominal modeli

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{x}} \\ \bar{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B_{\tilde{\tau}} & B_u \\ C_{\bar{y}} & D_{\bar{y}\tilde{\tau}} & D_{\bar{y}u} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \tilde{\tau} \\ u \end{bmatrix}; \quad G_n = \begin{bmatrix} A & B_{\tilde{\tau}} & B_u \\ C_{\bar{y}} & D_{\bar{y}\tilde{\tau}} & D_{\bar{y}u} \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

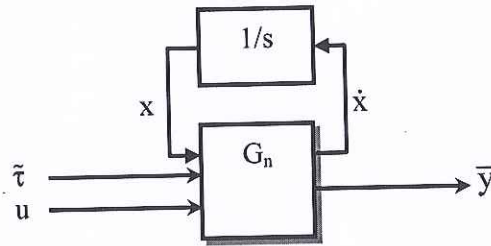
oluşturulur. Burada sistemin $\bar{x} \in \mathbb{R}^{8 \times 1}$, $\dot{\bar{x}} \in \mathbb{R}^{8 \times 1}$ durum değişkenleri ve $\bar{y} \in \mathbb{R}^{4 \times 1}$ ölçüm sinyalleri ile nominal sistemin durum uzay modeli

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}} &= A\bar{x} + B_{\tilde{\tau}}\tilde{\tau} + B_u u \\ \bar{y} &= C_{\bar{y}}\bar{x} + D_{\bar{y}\tilde{\tau}}\tilde{\tau} + D_{\bar{y}u} u \end{aligned} \quad (5.9)$$

ile ifade edilir. Buradaki parametreler

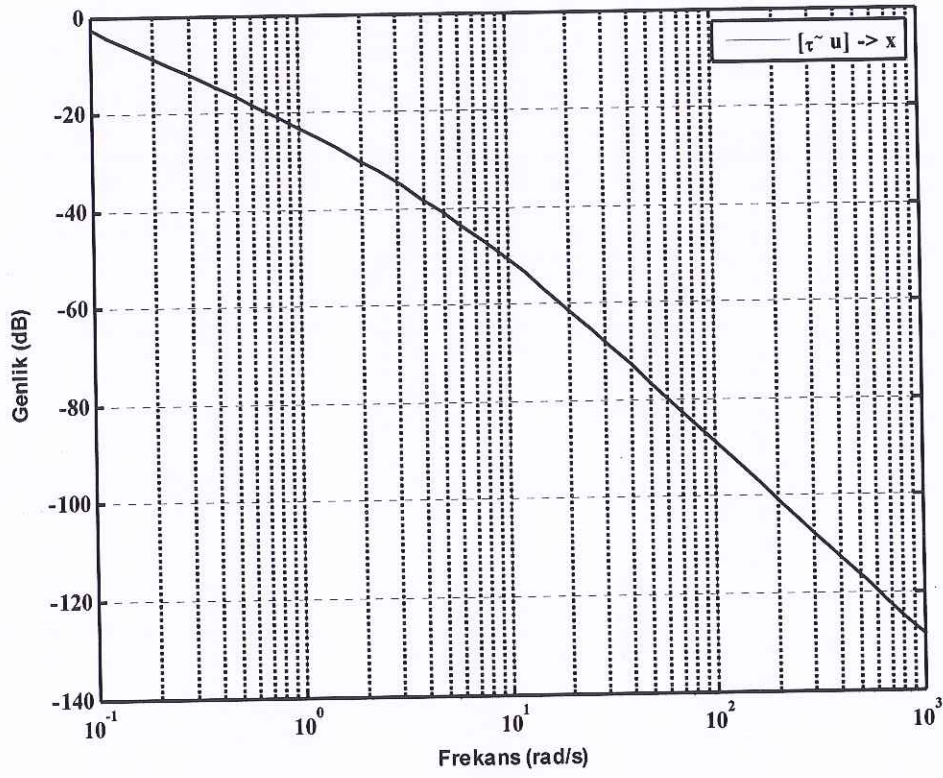
$$\begin{aligned} \bar{x} &= [x \quad \dot{x}]^T; \quad \dot{\bar{x}} = [\dot{x} \quad \ddot{x}]^T; \quad \bar{y} = [x]^T \\ A &= \begin{bmatrix} 0_{(4 \times 4)} & I_4 \\ -M^{-1}P & -M^{-1}N \end{bmatrix}; \quad B_{\tilde{\tau}} = \begin{bmatrix} 0_{(4 \times 3)} \\ -M^{-1}T \end{bmatrix}; \quad B_u = \begin{bmatrix} 0_{(4 \times 1)} \\ M^{-1}F \end{bmatrix} \\ C_{\bar{y}} &= [I_4 \quad 0_{(4 \times 4)}]; \quad D_{\bar{y}\tilde{\tau}} = [0_{(4 \times 3)}]; \quad D_{\bar{y}u} = [0_{(4 \times 1)}] \end{aligned} \quad (5.10)$$

ile ifade edilir. G_n nominal model matrisi ile $F_u(G_n, 1/s)$ LFT yapısı blok diyagramı Şekil 5.3'de gösterilmiştir.

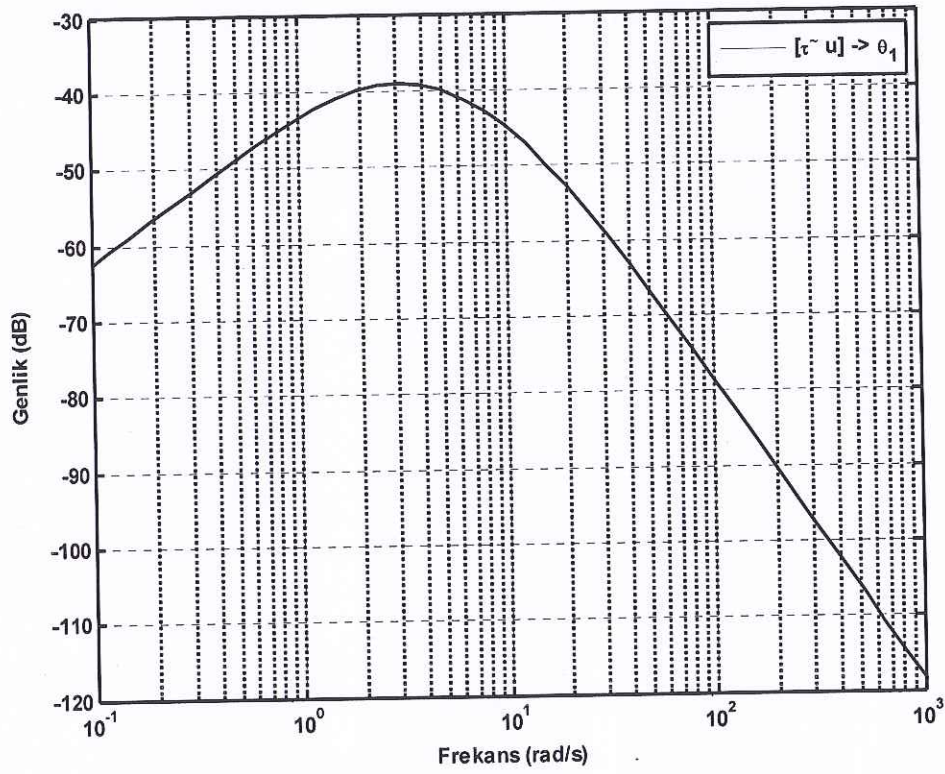


Şekil 5.3. Nominal sistemin blok diyagramı.

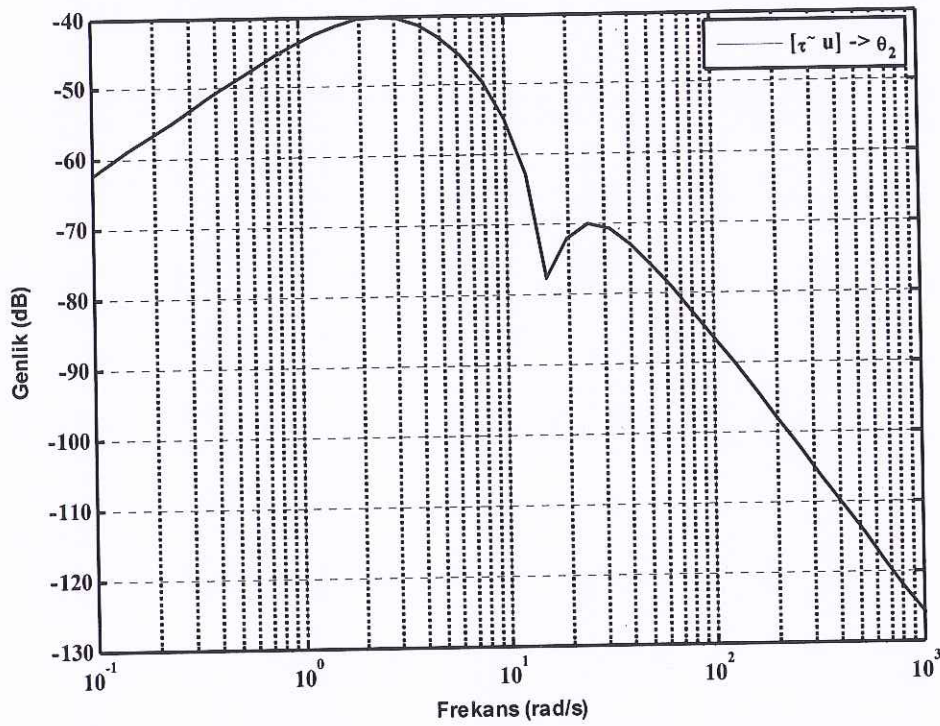
Nominal modelin bozucu ve kontrol girişlerine karşı arabanın pozisyon ve kolların salınım açıları frekans cevapları Şekil 5.4-5.7 arasında gösterilmiştir.



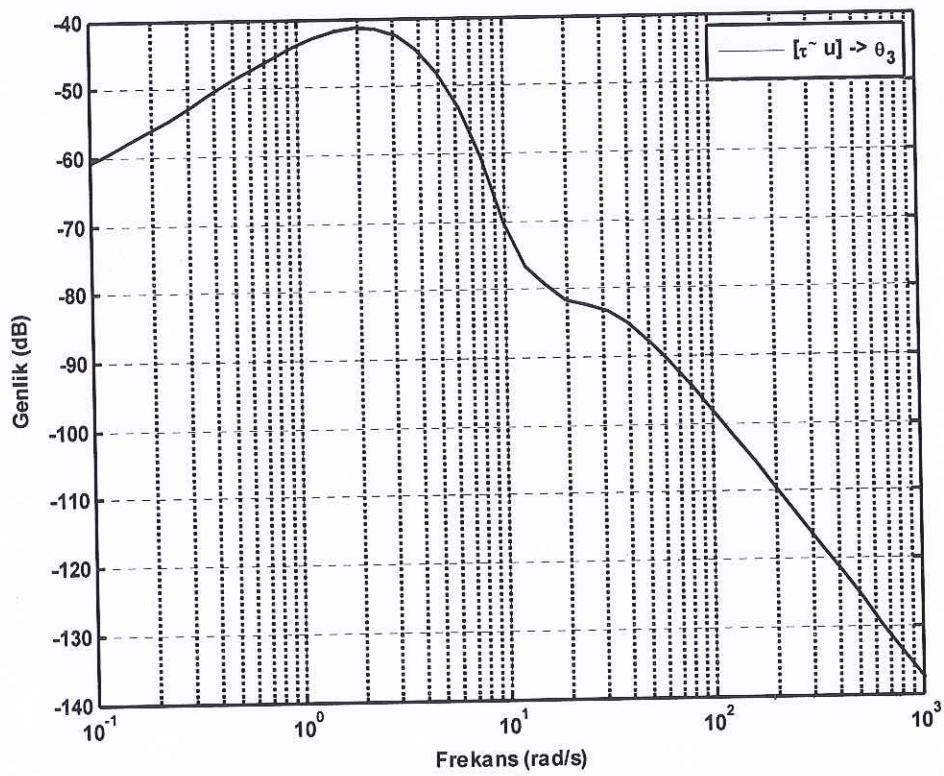
Şekil 5.4. $\tilde{\tau}$ bozucu ve u kontrol girişlerin x araba pozisyonuna frekans cevabı.



Şekil 5.5. $\tilde{\tau}$ bozucu ve u kontrol girişlerin θ_1 birinci kol salınım açısına frekans cevabı.



Şekil 5.6. $\tilde{\tau}$ bozucu ve u kontrol girişlerin θ_2 ikinci kol salınım açısına frekans cevabı.



Şekil 5.7. $\tilde{\tau}$ bozucu ve u kontrol girişlerin θ_3 üçüncü kol salınım açısına frekans cevabı.

5.3. Dayanıklı Kontrol

Üç kollu ters sarkaç sisteminin geri beslemeli kontrolünde, sistemin kararlılığının sağlanması ve performans hedeflerine ulaşması istenir. İhmal edilen ve modellenemeyen dinamikler, parametre değişimleri ve çevresel dış bozucular, sistem modelinde belirsizliklere neden olur. RC metotları ile bu belirsiz etkilere rağmen sistemin kararlılığının sürdürülmesi ve performansının iyileştirilmesi hedeflenir. Bu hedeflerin ışığında ilk adım sistemin performans çıkış sinyallerinin belirlenmesi ve hedeflenen performans doğrultusunda ağırlık filtrelerinin seçimini yapmaktır.

5.3.1. Ağırlık filtreleri

Kapalı çevrimli kontrol sistemlerinde, S duyarlık, T tamamlayıcı duyarlılık ve R kontrol duyarlılığı gibi frekansa bağlı değişen sistem gereksinimleri H_∞ en uygun kontrol probleminde, ağırlık fonksiyonlarıyla gösterilir. Kontrol problemine geçmeden önce sistemin nominal transfer fonksiyonu ve seçilen ağırlık filtreleri ile sistemin genişletilmiş modeli oluşturulur. Giriş ve çıkışı şekillendirmekte kullanılan ağırlık filtrelerin bant genişlikleri ve kazançları kapalı çevrim frekans cevapları üzerinden denemeler yapılarak seçilmiştir. \bar{y} ölçülebilir büyüklüklerdeki ölçüm hataları sistemi olumsuz yönde etkileyen $n = [n_x, n_1, n_2, n_3]^T$ ölçeklendirilmiş gürültü sinyalleri ile $\tilde{z} = [\tilde{z}_{ex}, \tilde{z}_{\theta_1}, \tilde{z}_{\theta_2}, \tilde{z}_{\theta_3}, u]^T$ performans çıkış sinyalleri

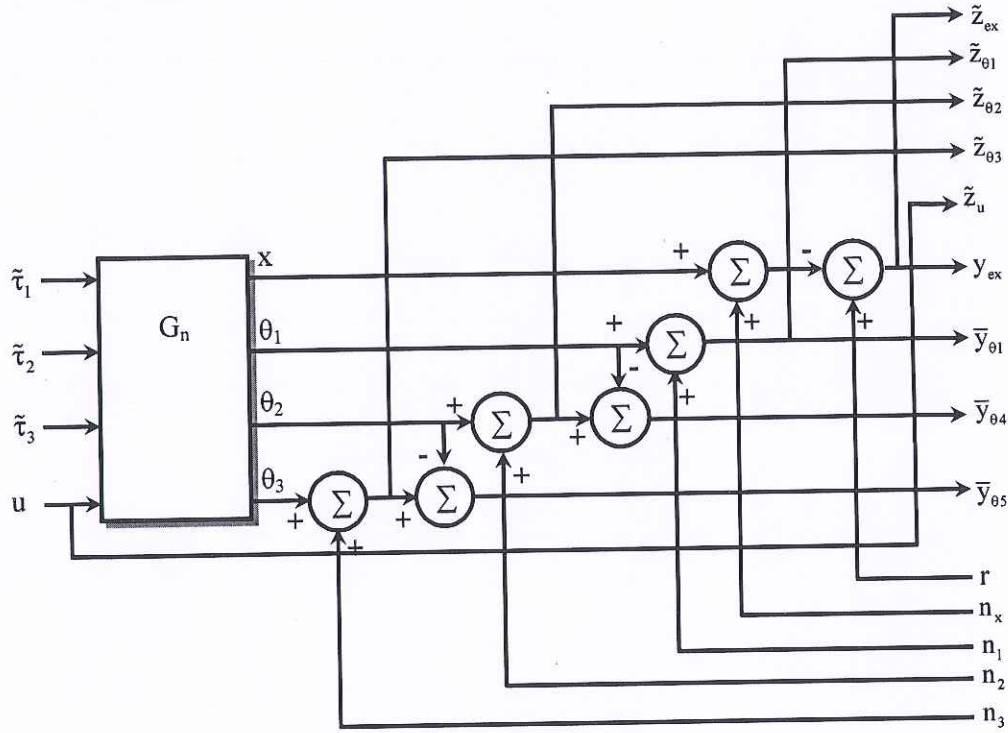
$$\begin{aligned} n_x &= K_{nx} \tilde{n}_x; n_1 = K_{n1} \tilde{n}_1; n_2 = K_{n2} \tilde{n}_2; n_3 = K_{n3} \tilde{n}_3 \\ \tilde{z}_{ex} &= e_x - n_x; \tilde{z}_{\theta_1} = \theta_1 + n_1 \\ \tilde{z}_{\theta_2} &= \theta_2 + n_2; \tilde{z}_{\theta_3} = \theta_3 + n_3 \end{aligned} \quad (5.11)$$

ile ifade edilir. Burada, $e_x = r - x$ araba referans izleme hatasıdır. Aynı şekilde sistemde $y_n \in R^{4 \times 1}$ geri besleme ölçüm sinyali

$$\bar{y}_n = [y_{ex}, \bar{y}_{\theta_1}, \bar{y}_{\theta_4}, \bar{y}_{\theta_5}]^T; y_{ex} = e_x - n_x; \bar{y}_{\theta_1} = \theta_1 + n_1; \bar{y}_{\theta_4} = \theta_4 + n_2; \bar{y}_{\theta_5} = \theta_5 + n_3 \quad (5.12)$$

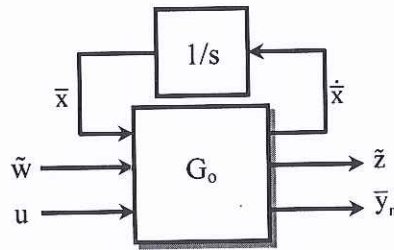
ile ifade edilir. Burada, $\theta_4 = \theta_2 - \theta_1$ ikinci kolun birinci kola göre salınım açısını ve $\theta_5 = \theta_3 - \theta_2$ üçüncü kolun ikinci kola göre salınım açısını gösterir. Sisteme etki eden dış kaynaklı ölçülebilen ve bozucu giriş sinyalleri ile performans ve geri besleme

çıkış sinyallerinden oluşan sistemin genişletilmiş nominal açık çevrim modeli Şekil 5.8'de verilmiştir.



Şekil 5.8. Sistemin genişletilmiş nominal açık çevrim modeli.

Şekil 5.8'de gösterilen sistemin açık çevrim modeli ilerideki N nominal sistem iç bağlantı yapısını oluşturmak için G_o genişletilmiş nominal açık çevrim iç bağlantılı modeli Şekil 5.9'de gösterilmiştir.



Şekil 5.9. Genişletilmiş nominal açık çevrim iç bağlantılı model.

Sistemin $\tilde{z} = \{z_{ex}, z_{\theta_1}, z_{\theta_2}, z_{\theta_3}, u\}^T$ $\tilde{z} \in \mathbb{R}^{5 \times 1}$ performans çıkış sinyalleri ve $\tilde{w} = \{r, \tilde{\tau}, \tilde{n}\}^T$ $\tilde{w} \in \mathbb{R}^{8 \times 1}$ dış kaynaklı bozucu sinyaller ile genişletilmiş açık çevrim model matrisi

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}} \\ \tilde{z} \\ \tilde{y}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B_{\tilde{w}} & B_u \\ C_{\tilde{z}} & D_{\tilde{z}\tilde{w}} & D_{\tilde{z}u} \\ C_{\tilde{y}_n} & D_{\tilde{y}_n\tilde{w}} & D_{\tilde{y}_nu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{w} \\ u \end{bmatrix}; G_o = \begin{bmatrix} A & B_{\tilde{w}} & B_u \\ C_{\tilde{z}} & D_{\tilde{z}\tilde{w}} & D_{\tilde{z}u} \\ C_{\tilde{y}_n} & D_{\tilde{y}_n\tilde{w}} & D_{\tilde{y}_nu} \end{bmatrix} \quad (5.13)$$

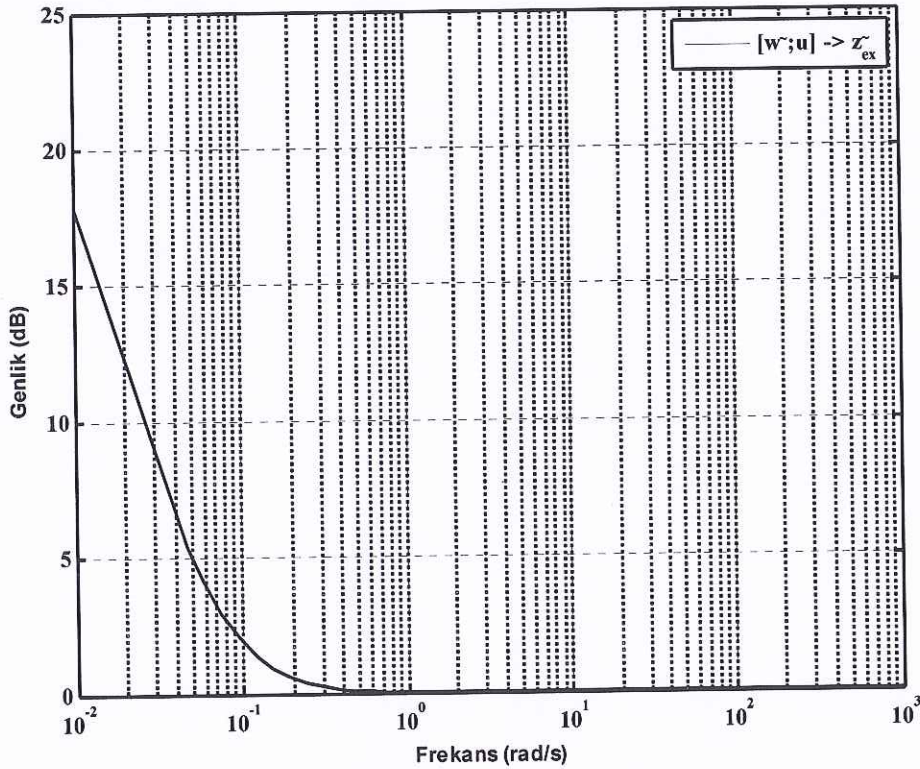
ile gösterilir. Aynı zamanda sistemin durum uzay modeli

$$\begin{aligned}\dot{\bar{x}} &= A\bar{x} + B_{\tilde{w}}\tilde{w} + B_u u \\ \tilde{z} &= C_{\tilde{z}}\bar{x} + D_{\tilde{z}\tilde{w}}\tilde{w} + D_{\tilde{z}u} u \\ \bar{y}_n &= C_{\bar{y}_n}\bar{x} + D_{\bar{y}_n\tilde{w}}\tilde{w} + D_{\bar{y}_nu} u\end{aligned}\quad (5.14)$$

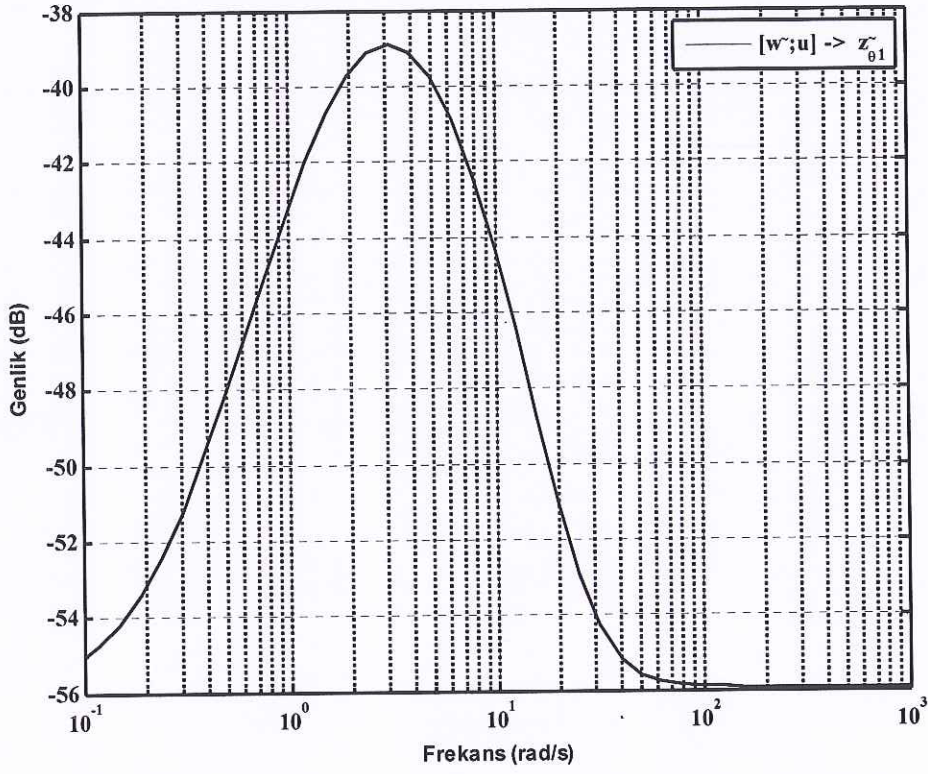
ile ifade edilir. Buradaki parametreler

$$\begin{aligned}A &= \begin{bmatrix} 0_{(4 \times 4)} & I_4 \\ -M^{-1}P & -M^{-1}N \end{bmatrix}; \quad B_{\tilde{w}} = \begin{bmatrix} 0_{(4 \times 1)} & 0_{(4 \times 3)} & 0_{(4 \times 4)} \\ 0_{(4 \times 1)} & -M^{-1}T & 0_{(4 \times 4)} \end{bmatrix}; \quad B_u = \begin{bmatrix} 0_{(4 \times 1)} \\ M^{-1}F \end{bmatrix} \\ C_{\tilde{z}} &= \begin{bmatrix} Z & 0_{(4 \times 4)} \\ 0_{(1 \times 4)} & 0_{(1 \times 4)} \end{bmatrix}; \quad D_{\tilde{z}\tilde{w}} = \begin{bmatrix} R & 0_{(4 \times 3)} & G \\ 0_{(1 \times 4)} & 0_{(1 \times 3)} & 0_{(1 \times 4)} \end{bmatrix}; \quad D_{\tilde{z}u} = \begin{bmatrix} 0_{(4 \times 1)} \\ 1 \end{bmatrix} \\ C_{\bar{y}_n} &= \begin{bmatrix} J & 0_{(4 \times 4)} \end{bmatrix}; \quad D_{\bar{y}_n\tilde{w}} = \begin{bmatrix} R & 0_{(4 \times 3)} & G \end{bmatrix}; \quad D_{\bar{y}_nu} = \begin{bmatrix} 0_{(4 \times 1)} \end{bmatrix} \\ Z &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad G = \begin{bmatrix} -K_{nx} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_{n1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{n2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_{n3} \end{bmatrix}; \quad J = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}; \quad R = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (5.15)$$

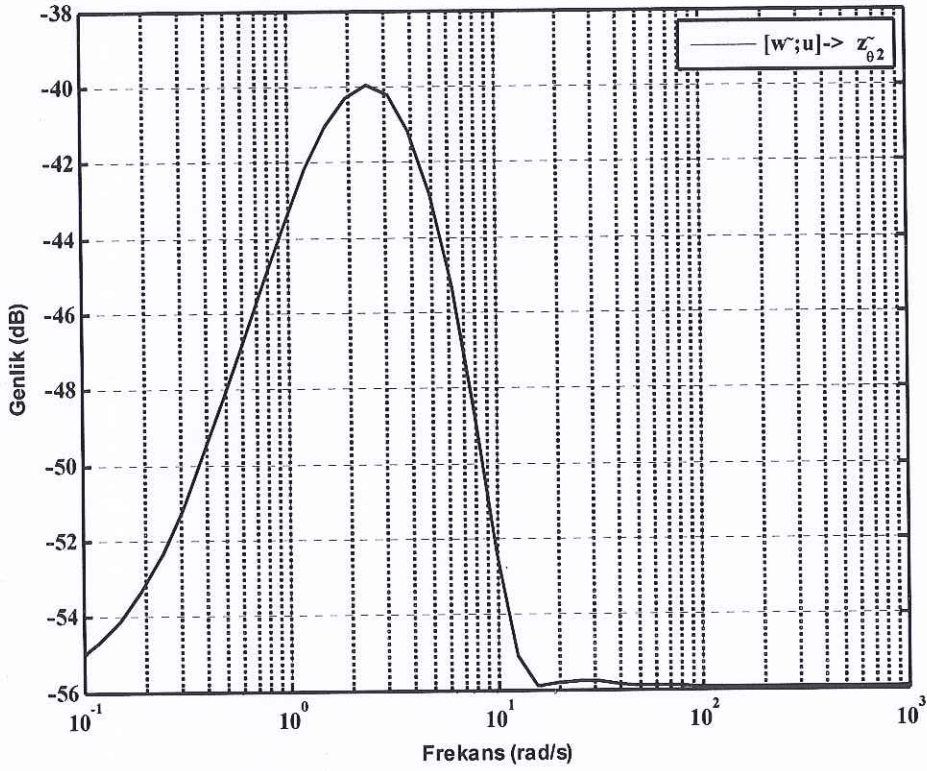
ile ifade edilir. G_0 genişletilmiş nominal açık çevrim iç bağlantılı modelin \tilde{w} bozucu ve u kontrol girişlerine karşı arabanın pozisyonu ve kolların salınım açıları frekans cevapları Şekil 5.10-5.13 arasında gösterilmiştir.



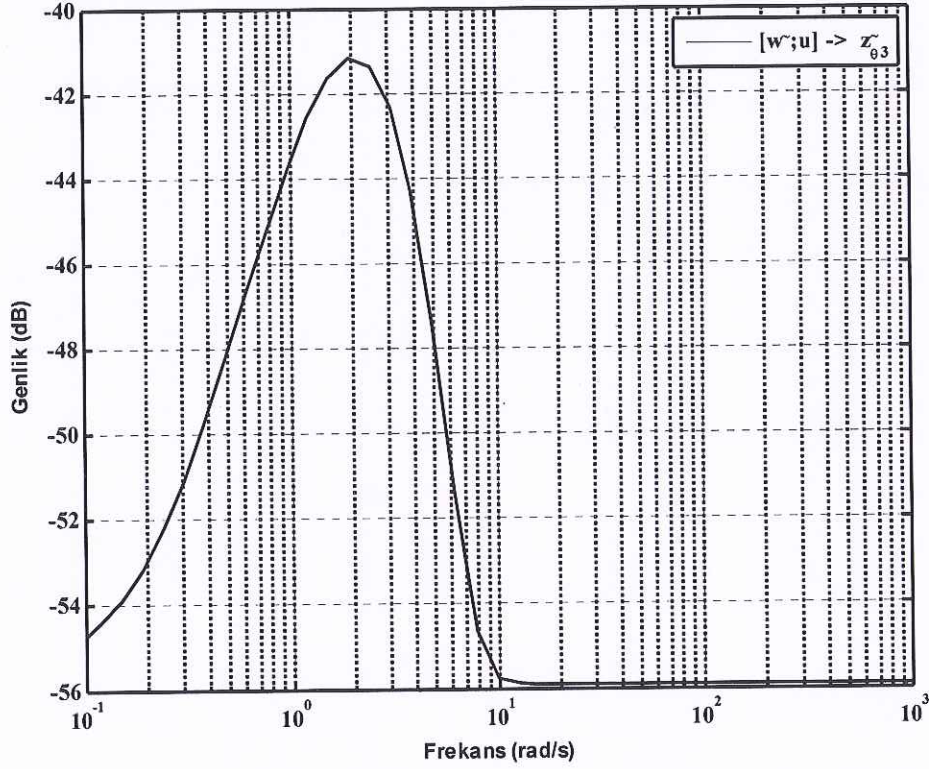
Şekil 5.10. $[w, u]^T$ bozucu girişlerin \tilde{z}_{ex} araba pozisyon hatasına frekans cevabı.



Şekil 5.11. $[w, u]^T$ bozucu girişlerin \tilde{z}_{θ_1} birinci kol salınım açısına frekans cevabı.



Şekil 5.12. $[w, u]^T$ bozucu girişlerin \tilde{z}_{θ_2} ikinci kol salınım açısına frekans cevabı.



Şekil 5.13. $[w; u]^T$ bozucu girişlerin \tilde{z}_{03} üçüncü kol salınım açısına frekans cevabı.

Şekil 5.11-5.13'de bozucu sinyallerin sisteme olan etkisi incelendiğinde, \tilde{w} bütün bozucu giriş sinyallerinin sisteme etki ettiği durumda, sarkaç kollarındaki dinamik değişimlerin, hem düşük hem de yüksek frekanslarda arttığı görülmüştür. Bütün frekanslarda sistemin performans gereksinimlerini karşılamak maliyetli olacağından sistemde frekansa bağlı performans hedeflerinde tercih yapılarak kontrol etkinliği artırılır.

Sistemde öncelikli hedef sarkaç kollarına etki eden, $\tilde{\tau}$ bozucu tork büyüklüğüne karşın arabaya etki eden u kontrol kuvveti ile sarkaçların mümkün olduğu kadar az salınım yaparak dik pozisyonda kararlılığını sağlamaktır. Bu nedenle performans ağırlık filtrelerinin tasarımı, sistemin düşük frekanslarda performans hedefleri dikkate alınarak yapılmıştır. Düşük frekanslarda etkinliği artan bozucu sinyallerin sisteme etkisinin azaltılması, $\tilde{\tau}$ bozucu giriş sinyallerinden $[\tilde{z}_{ex} \tilde{z}_{\theta_1} \tilde{z}_{\theta_2} \tilde{z}_{\theta_3}]^T$ çıkışı

sinyallerine $\bar{\sigma}(S)$ duyarlılık fonksiyonunun maksimum tekil değerinin en aza indirilmesiyle mümkündür. Sistemin frekansa bağlı performans ağırlık filtreleri

$$W_p = \{W_{pex}, W_{p\theta_1}, W_{p\theta_2}, W_{p\theta_3}\} \quad (5.16)$$

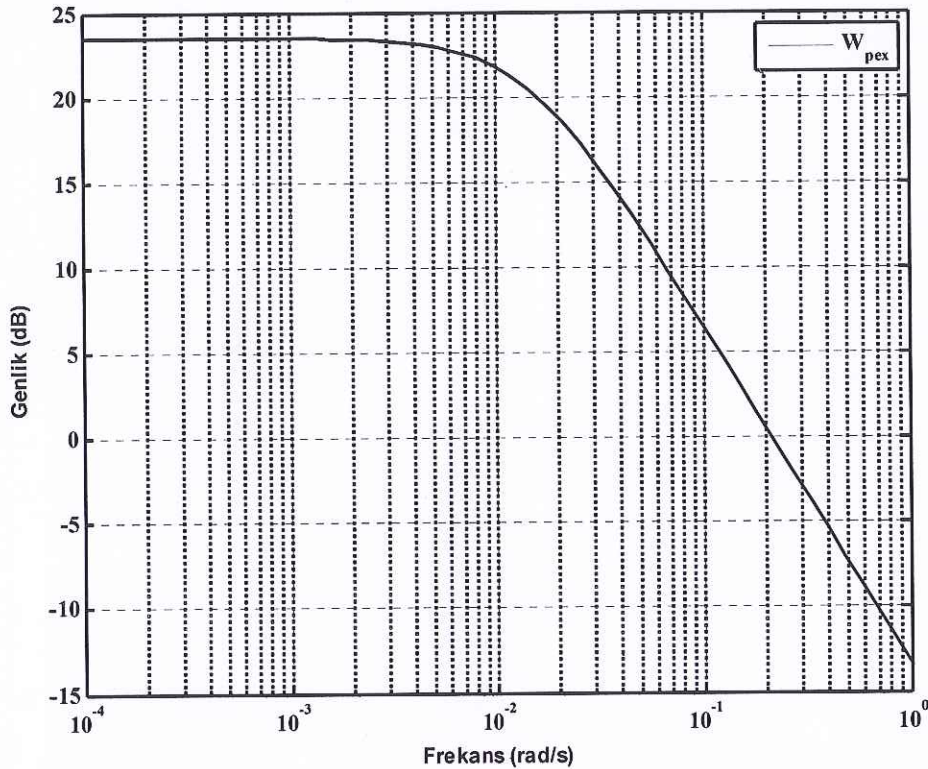
ile gösterilip tasarlanacak kontrolörün $\|W_p S\|_\infty$ 'nı en aza indirgeyerek bozucuların sisteme etkisini azaltması beklenir.

Sistemde önemli olan sarkacın dik pozisyonu olduğundan, araba referans izleme hatası öncelikli performans hedefi olarak kabul edilmez. Bunun için \bar{z}_{ex} arabanın pozisyon performansı için seçilen W_{pex} ağırlık fonksiyonu, arabanın dengeleme hızının düşük olduğu kabul edilerek, kesim frekansı $1/70$ rad/sn olarak seçilmiştir.

W_{pex} performans ağırlık filtresi

$$W_{pex} = \frac{15}{70s+1} \quad (5.17)$$

alçak geçiren frekans filtre olarak seçilip tekil değer frekans cevabı Şekil 5.14'de gösterilmiştir.

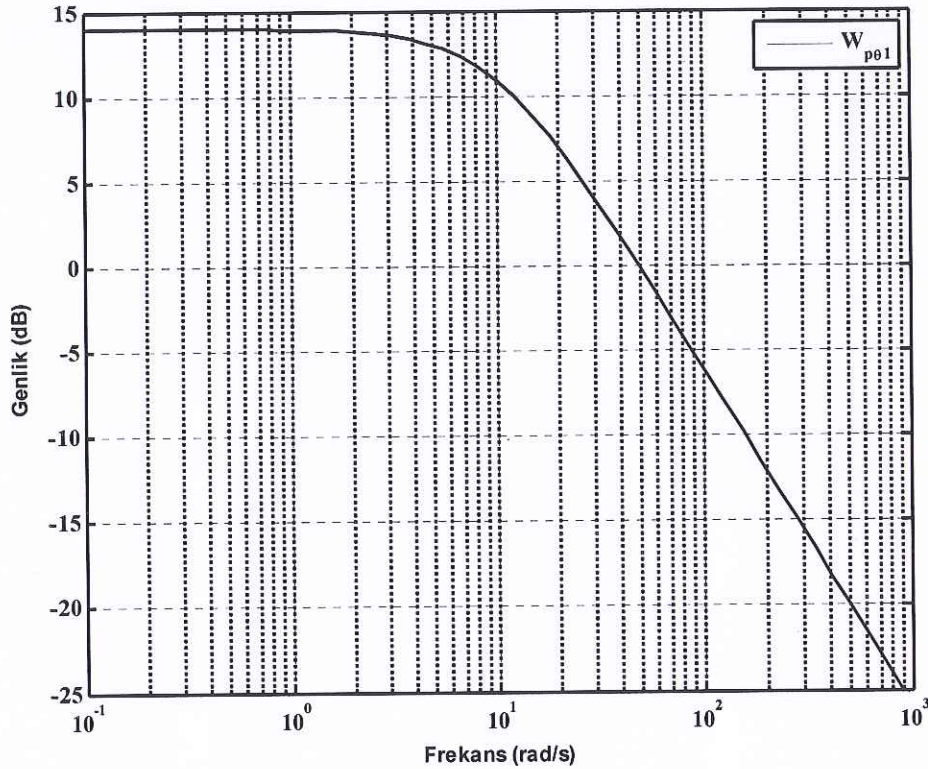


Şekil 5.14. W_{px} ağırlık fonksiyonu frekans cevabı.

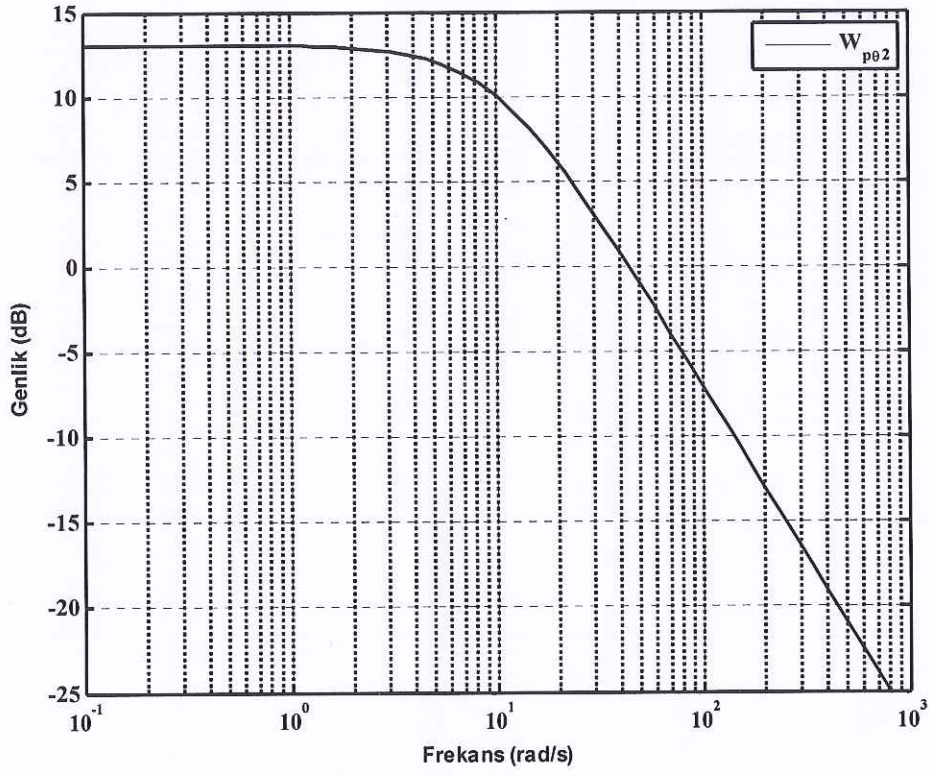
Performans gereksinimlerinin düşük frekanslarda seçilmesi ile sarkaç kollarındaki düşük frekanslarda etkinliği artan Coulomb sürtünmesinin olumsuz etkilerini azaltmaya yardımcı olur. Bu dikkate alındığında \tilde{z}_{θ_1} , \tilde{z}_{θ_2} , \tilde{z}_{θ_3} sarkaçların açılı performans çıktıları için seçilen $W_{p\theta_1}$, $W_{p\theta_2}$, $W_{p\theta_3}$ ağırlık fonksiyonları düşük frekans geçiren filtre ve kesim frekansları 10 rad/s olacak şekilde

$$\begin{aligned} W_{p\theta_1} &= \frac{50}{s+10} \\ W_{p\theta_2} &= \frac{45}{s+10} \\ W_{p\theta_3} &= \frac{40}{s+10} \end{aligned} \quad (5.18)$$

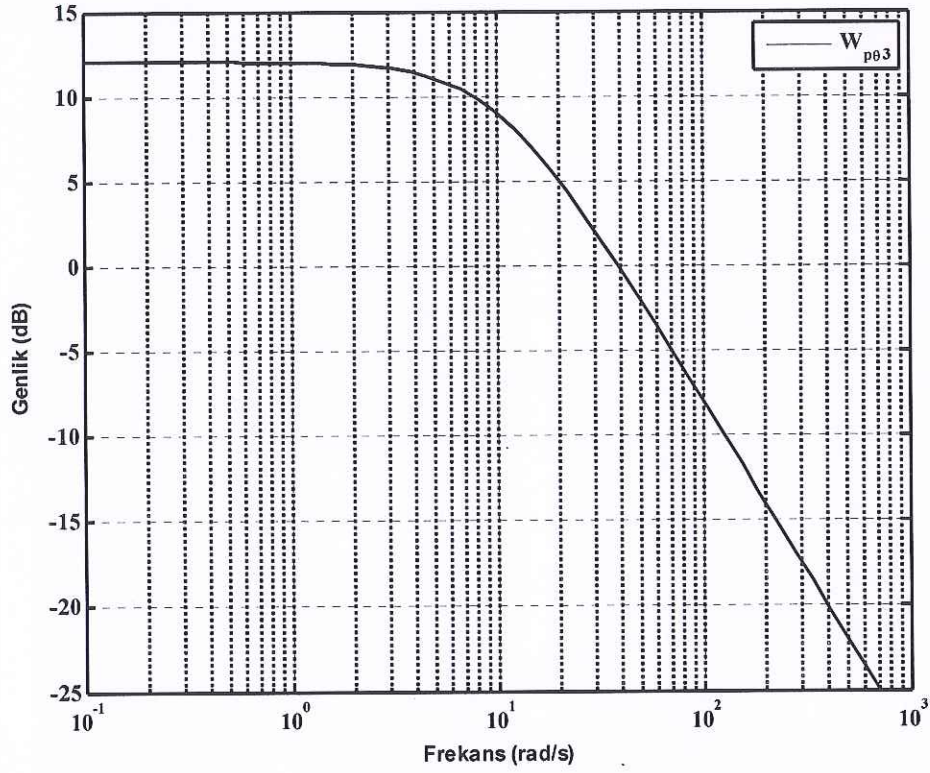
seçilmiştir. $W_{p\theta_1}$, $W_{p\theta_2}$, $W_{p\theta_3}$ ağırlık fonksiyonlarının tekil değer frekans cevapları Şekil 5.15-5.17'da gösterilmiştir.



Şekil 5.15. $W_{p\theta_1}$ ağırlık filtresi frekans cevabı.



Şekil 5.16. W_{p02} ağırlık filtresi frekans cevabı.



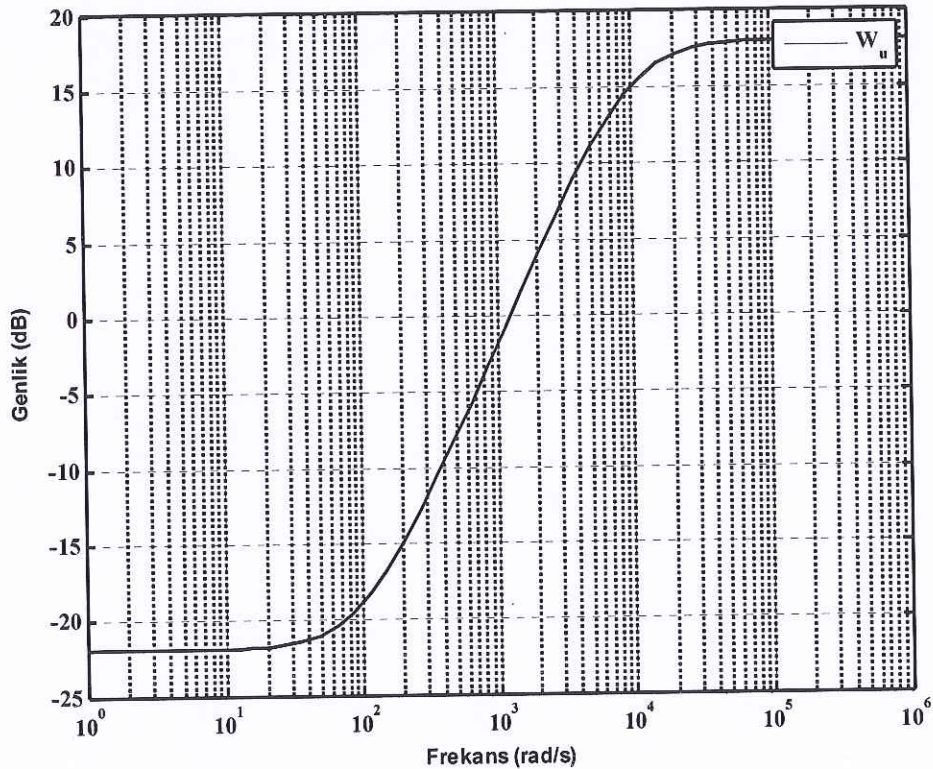
Şekil 5.17. W_{p03} ağırlık filtresi frekans cevabı.

Düşük frekanslarda belirtilen performans hedeflerini garanti altına almak, eyleyicilerin doygunluğa ulaşmasını engelleyerek kontrol etkinliğini arttırmak için W_u kontrol sinyali performans çıkış sinyalleri arasında değerlendirilir.

Kontrol etkinliğinin artırılması $\bar{\sigma}(R)$ kontrol duyarlılık fonksiyonunun tekil değerinin en aza indirgenmesiyle sağlanır. Sistemin frekansa bağlı bu performans gereksinimi kontrol probleminde W_u ağırlık fonksiyonuyla gösterilir ve kontrolörün $\|W_u R\|_\infty$ 'i en aza indirgenmesiyle mümkündür. Buradan W_u kontrol ağırlık fonksiyonu yüksek geçirgen filtre olarak

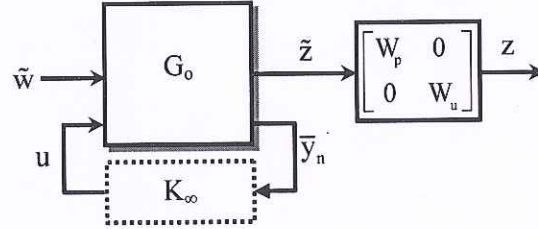
$$W_u = 0.08 \frac{s+100}{0.01s+100} \quad (5.19)$$

seçilmiştir. W_u kontrol ağırlık fonksiyonunun tekil değer frekans cevabı Şekil 5.18'de gösterilmiştir.



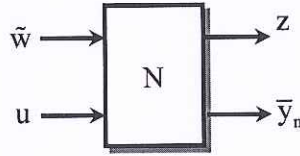
Şekil 5.18. W_u kontrol ağırlık fonksiyonu frekans cevabı.

Tasarlanan W_p, W_u performans ağırlık fonksiyonlarıyla nominal sistemin açık çevrimin girişi $[\tilde{w} \ u]^T$ ve çıkışı $\{z, \bar{y}_n \mid z = [e_{px} \ e_{p\theta 1} \ e_{p\theta 2} \ e_{p\theta 3} \ e_{pu}]^T\}$ olmak üzere blok diyagramı Şekil 5.19'de gösterilmiştir.



Şekil 5.19. Ağırlık filtreleriyle açık çevrim blok diyagramı.

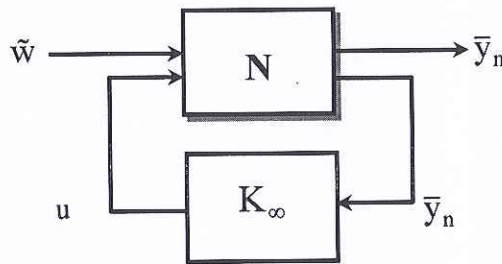
Sistemin açık çevrim transfer fonksiyonu ile ağırlık fonksiyonları birleşiminden oluşan N iç bağlantı modeli Şekil 5.20'de gösterilmiştir.



Şekil 5.20. N nominal sistem iç bağlantı yapısı.

5.3.2. H_∞ kontrol metodu

Sistemi kararlı yapacak ve ağırlık fonksiyonları ile belirlenen performans hedeflerine ulaştıracak kontrolörün tasarımı H_∞ en uygun kontrol problemi olarak ele alınmıştır. Üç kollu ters sarkaç sisteminin $\|H\|_\infty$ en uygun kontrol metodu genel blok diyagramı Şekil 5.21'de gösterilmiştir.



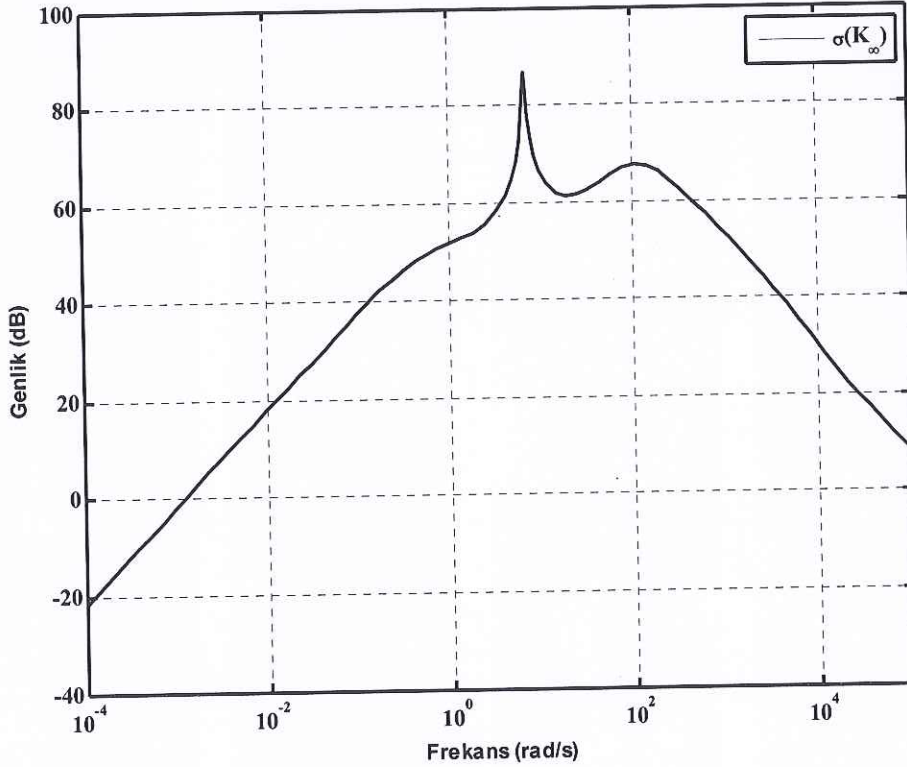
Şekil 5.21. H_∞ genel blok diyagramı.

Sistemin \tilde{w} dış kaynaklı bozucu giriş sinyallerinden z performans çıkış sinyallerine $\|T_{z\tilde{w}}\|_{\infty}$ kapalı çevrimli sistemin H_{∞} normunu minimize ederek sistemi kararlı yapan aynı zamanda hedeflenen performansa ulaştıran kontrolör tasarımı

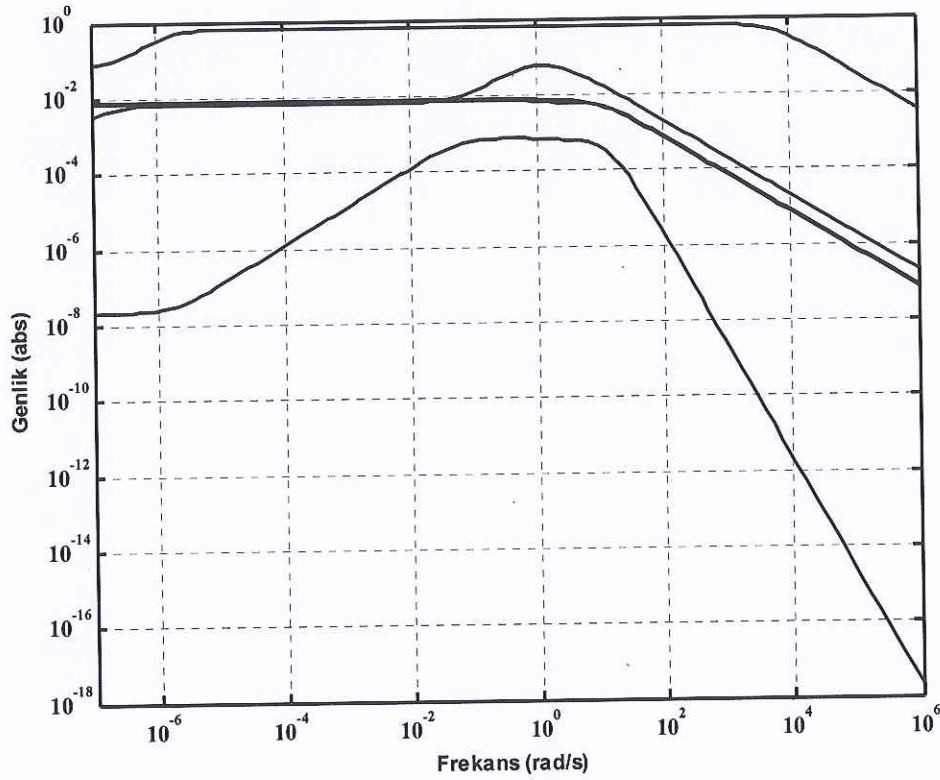
$$\begin{aligned} T_{z\tilde{w}} &= F_{\ell}(N, K_{\infty}) \\ \min_{K_{\infty}} \|T_{z\tilde{w}}\|_{\infty} &\leq \gamma \\ \min_{K_{\infty}} \max_{\omega} \bar{\sigma}(T_{z\tilde{w}}) &\leq \gamma \end{aligned} \quad (5.20)$$

ile yapılır. Bu problem LMI doğrusal matris eşitsizliğinden yararlanılarak çözülmüştür. Buradan on üçüncü dereceden K_{∞} kontrolörü ile $\|T_{z\tilde{w}}\|_{\infty}$ kapalı çevrimli sistemin normu $\gamma = 0.66629$ olarak bulunmuştur.

Tasarlanan kontrolörün ve $T_{z\tilde{w}} = F_{\ell}(N, K_{\infty})$ kapalı çevrimin tekil değer frekans cevapları Şekil 5.22 ve 5.23'de verilmiştir.



Şekil 5.22. K_{∞} kontrolörün tekil değer frekans cevabı.



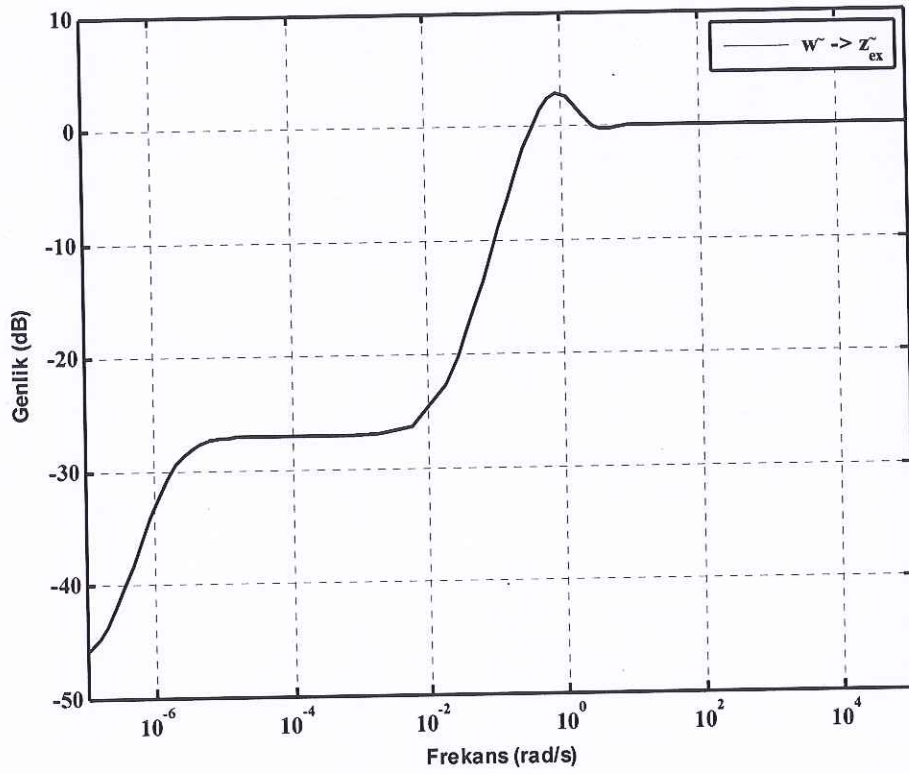
Şekil 5.23. $T_{z\tilde{w}}$ kapalı çevrimin tekil değerleri frekans cevabı.

$T_{z\tilde{w}} = F_l(N, K_\infty)$ kapalı çevrimli sistemin öz değerlerin en küçük ve en büyük gerçel ile kompleks değerleri Tablo 5.2 verilmiştir.

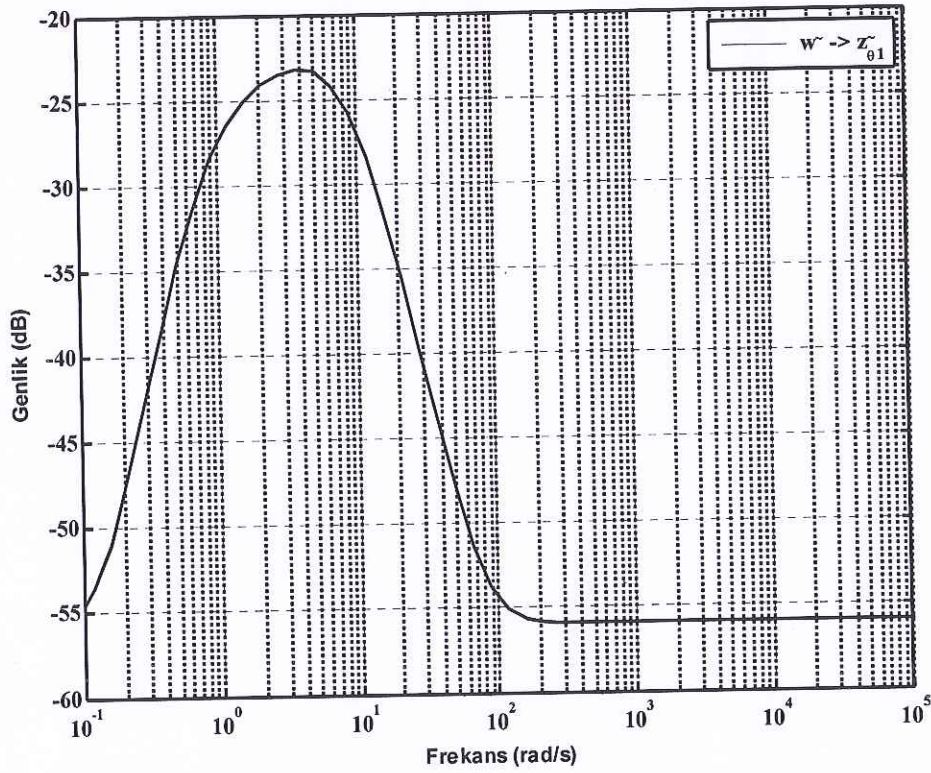
Tablo 5.2. $T_{z\tilde{w}}$ kapalı çevrimli sistemin öz değerleri.

sistemin öz değerleri			
gerçel		kompleks	
en küçük	en büyük	en küçük	en büyük
-11535.5	-7.86104×10^{-7}	$-16.515 \pm 1.6316i$	$-5.7898 \pm 2.0168i$

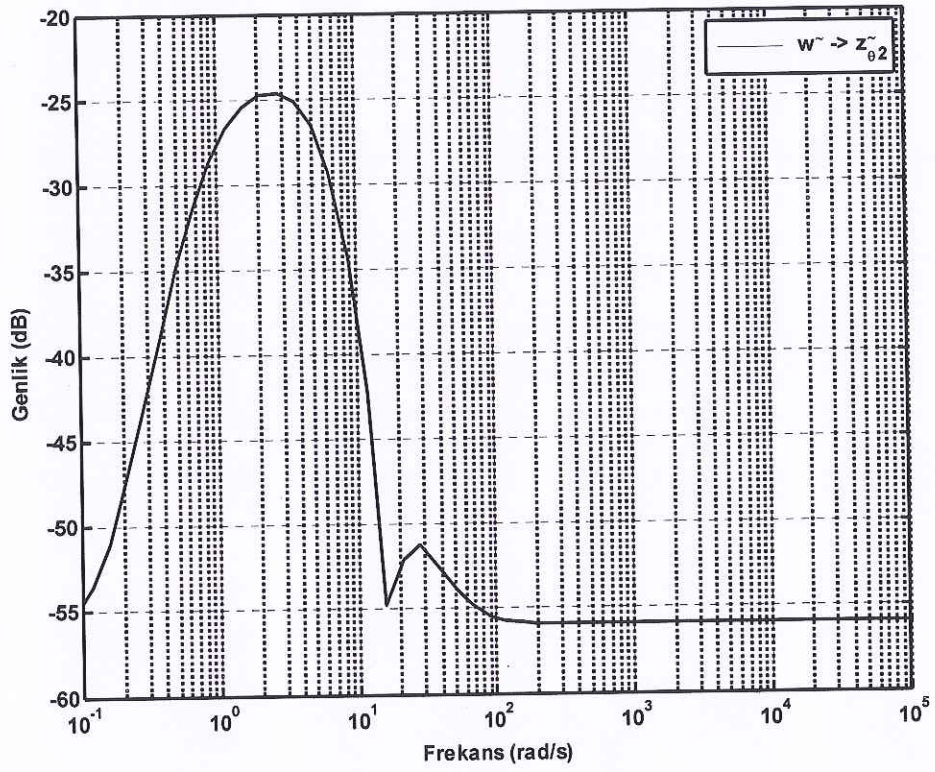
G_o açık çevrim iç bağlantılı model ile kontrolörden oluşan $T_{z\tilde{w}} = F_l(G_o, K_\infty)$ kapalı çevrimli sistemin \tilde{w} bozucu girişlerine karşı arabanın pozisyon ve kolların salınım açılarının tekil değer frekans cevapları Şekil 5.24-5.27 arasında gösterilmiştir.



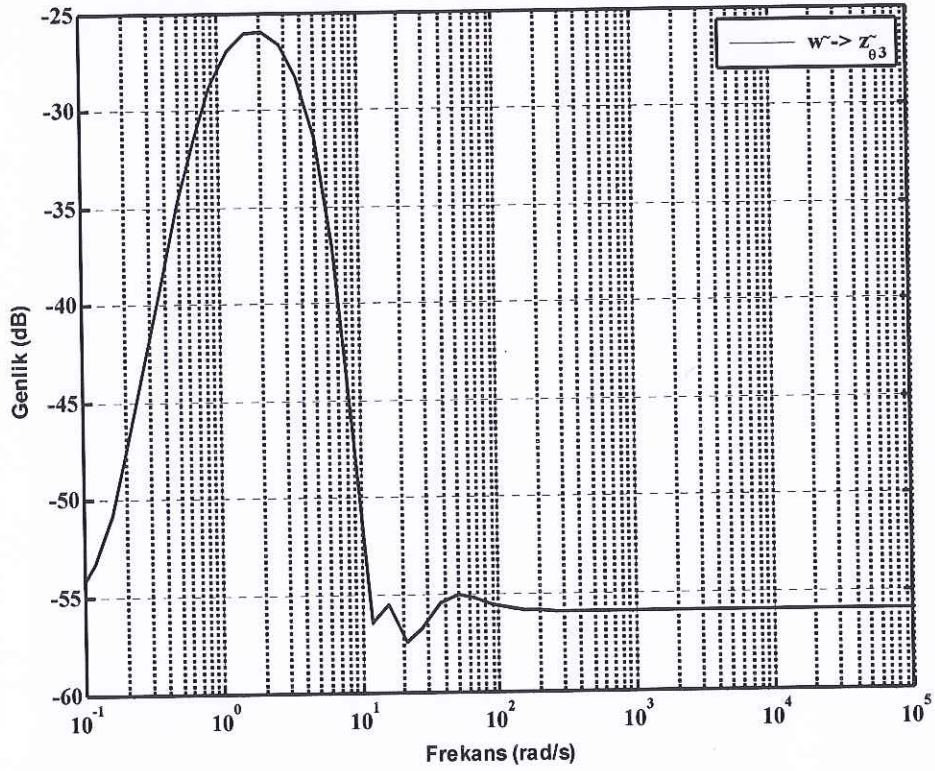
Şekil 5.24. \tilde{w} bozucu girişlerinden \tilde{z}_{ex} araba referans izleme hatasına tekil değeri.



Şekil 5.25. \tilde{w} bozucu girişlerinden \tilde{z}_{01} salınım açısına tekil değeri.



Şekil 5.26. \tilde{w} bozucu girişlerinden \tilde{z}_{θ_2} salınım açısına tekil değeri.



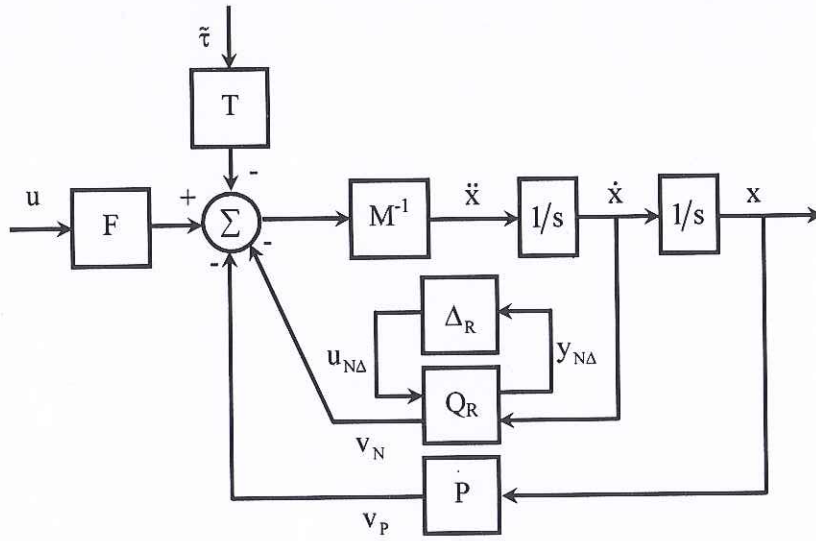
Şekil 5.27. \tilde{w} bozucu girişlerinden \tilde{z}_{θ_3} salınım açısına tekil değeri.

5.3.3. H_∞ kontrolörün dayanıklılık analizi

Nominal sistemde kararlılığı ve performansı sağlayan kontrolörün aynı zamanda sistemdeki belirsizliklere karşı kararlılığı sağlayıp sağlamadığı, RS dayanıklı kararlılık ve performans hedeflerine ulaşip ulaşmadığı RP dayanıklı performans analizi ile değerlendirilir.

Dayanıklılık analizine, sistemdeki parametre ve yapısal olmayan belirsizliklerin bağlantıları ile ağırlık fonksiyonlarından oluşan P belirsizlik içeren iç bağlantılı modelini oluşturmakla başlanır.

Üç kollu ters sarkaç sisteminde sistemdeki b arabadaki sürtünme katsayısındaki $\pm\%15$, c_1 , c_2 ve c_3 sarkaç kollarının bağlantı mafsallarındaki sürtünme katsayılarındaki $\pm\%15$ bağıl sapma sınırları içerisindeki değişimin sistemde belirsizliğe yol açtığı kabul edilerek, LFT doğrusal kesirli dönüşüm kullanılarak parametre belirsizliği içeren sistem modeli Şekil 5.28'deki gibi oluşturulur.



Şekil 5.28. LFT'li parametrik belirsizlik içeren sistem blok diyagramı.

Sistem modelinde, $\bar{b}, \bar{c}_1, \bar{c}_2, \bar{c}_3$ nominal parametre değerleri, $p_b, p_{c1}, p_{c2}, p_{c3}$ parametrelerdeki bağıl sapma sınırları ve $-1 \leq \delta_b, \delta_{c1}, \delta_{c2}, \delta_{c3} \leq 1$ olası parametre belirsizlikleri olmak üzere belirsiz parametreler

$$b = \bar{b}(1 + p_b \delta_b); \quad c_1 = \bar{c}_1(1 + p_{c1} \delta_{c1}); \quad c_2 = \bar{c}_2(1 + p_{c2} \delta_{c2}); \quad c_3 = \bar{c}_3(1 + p_{c3} \delta_{c3}) \quad (5.21)$$

ile ifade edilir. b, c_1, c_2, c_3 parametreleri ile sistemin $N \in R^{4 \times 4}$ belirsiz parametreleri içeren matrisi

$$N = \bar{N} + N_1 \Delta_R N_2 \quad (5.22)$$

ile ifade edilir. Burada \bar{N} nominal parametreler içeren matris, N_1 parametrelerdeki bağıl sapma sınır değerleri matrisi, Δ_R gerçel belirsizlik matrisi ve N_2 gerçel belirsizlik çarpan matrisi

$$\bar{N} = \begin{bmatrix} \bar{b} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{c}_1 + \bar{c}_2 & -\bar{c}_2 & 0 \\ 0 & -\bar{c}_2 & \bar{c}_2 + \bar{c}_3 & -\bar{c}_3 \\ 0 & 0 & -\bar{c}_3 & \bar{c}_3 \end{bmatrix}; \quad N_1 = \begin{bmatrix} \bar{b}\rho_b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{c}_1\rho_{c1} & \bar{c}_2\rho_{c2} & 0 \\ 0 & 0 & -\bar{c}_2\rho_{c2} & \bar{c}_3\rho_{c3} \\ 0 & 0 & 0 & -\bar{c}_3\rho_{c3} \end{bmatrix}; \quad (5.23)$$

$$\Delta_R = \begin{bmatrix} \delta_b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_{c1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta_{c2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta_{c3} \end{bmatrix}; \quad N_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

ile ifade edilir. N belirsiz parametreleri içeren matrisinin LFT gösterimi

$$N = F_u(Q_R, \Delta_R)$$

$$Q_R = \begin{bmatrix} Q_{R11} & Q_{R12} \\ Q_{R21} & Q_{R22} \end{bmatrix}$$

$$N = Q_{R22} + Q_{R21} \Delta_R (I_{(4 \times 4)} - Q_{R11} \Delta_R)^{-1} Q_{R12}$$

$$Q_{R11} = 0_{(4 \times 4)}; \quad Q_{R12} = N_2; \quad Q_{R21} = N_1; \quad Q_{R22} = \bar{N}; \quad (5.24)$$

$$Q_R = \begin{bmatrix} 0_{(4 \times 4)} & N_2 \\ N_1 & \bar{N} \end{bmatrix}$$

$$N = \bar{N} + N_1 \Delta_R (I_{(4 \times 4)} - 0_{(4 \times 4)} \Delta_R)^{-1} N_2$$

ile elde edilir. Şekil 5.27'den sistemin giriş ve çıkışları arasındaki bağıntılar

$$\begin{bmatrix} y_{N\Delta} \\ v_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_{(4 \times 4)} & N_2 \\ N_1 & \bar{N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{N\Delta} \\ \dot{x} \end{bmatrix}$$

$$u_{N\Delta} = [u_{b\Delta}, u_{c1\Delta}, u_{c2\Delta}, u_{c3\Delta}]^T$$

$$y_{N\Delta} = [y_{b\Delta}, y_{c1\Delta}, y_{c2\Delta}, y_{c3\Delta}]^T$$

$$y_{N\Delta} = 0_{(4 \times 4)} u_{N\Delta} + N_2 \dot{x} \quad (5.25)$$

$$v_N = N_1 u_{N\Delta} + \bar{N} \dot{x}$$

$$\ddot{x} = M^{-1} (Fu - T\tau - v_p - v_N)$$

$$\ddot{x} = M^{-1} Fu - M^{-1} T\tau - M^{-1} P\dot{x} - M^{-1} N_1 u_{N\Delta} - M^{-1} \bar{N} \dot{x}$$

$$u_{N\Delta} = \Delta_R y_{N\Delta}$$

ile ifade edilir. Parametrik belirsizliklerle G_p genişletilmiş gerçel belirsizlik içeren iç bağlantı modeli

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{x}} \\ y_{N\Delta} \\ \tilde{z} \\ \bar{y}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B_{N\Delta} & B_{\tilde{w}} & B_u \\ C_{y_{N\Delta}} & D_{y_{N\Delta}u_{N\Delta}} & D_{y_{N\Delta}\tilde{w}} & D_{y_{N\Delta}u} \\ C_{\tilde{z}} & D_{\tilde{z}u_{N\Delta}} & D_{\tilde{z}\tilde{w}} & D_{\tilde{z}u} \\ C_{\bar{y}_n} & D_{\bar{y}_nu_{N\Delta}} & D_{\bar{y}_n\tilde{w}} & D_{\bar{y}_nu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x} \\ u_{N\Delta} \\ \tilde{w} \\ u \end{bmatrix} \quad (5.26)$$

$$G_p = \begin{bmatrix} A & B_{N\Delta} & B_{\tilde{w}} & B_u \\ C_{y_{N\Delta}} & D_{y_{N\Delta}u_{N\Delta}} & D_{y_{N\Delta}\tilde{w}} & D_{y_{N\Delta}u} \\ C_{\tilde{z}} & D_{\tilde{z}u_{N\Delta}} & D_{\tilde{z}\tilde{w}} & D_{\tilde{z}u} \\ C_{\bar{y}_n} & D_{\bar{y}_nu_{N\Delta}} & D_{\bar{y}_n\tilde{w}} & D_{\bar{y}_nu} \end{bmatrix}$$

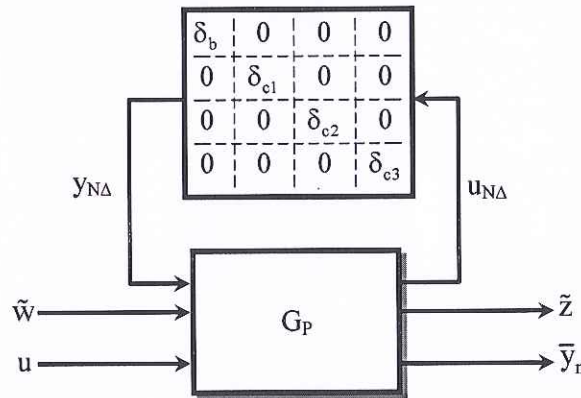
ile gösterilip durum uzay denklemleri

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}} &= A\bar{x} + B_{N\Delta}u_{N\Delta} + B_{\tilde{w}}\tilde{w} + B_u u \\ y_{N\Delta} &= C_{y_{N\Delta}}\bar{x} + D_{y_{N\Delta}u_{N\Delta}}u_{N\Delta} + D_{y_{N\Delta}\tilde{w}}\tilde{w} + D_{y_{N\Delta}u}u \\ \tilde{z} &= C_{\tilde{z}}\bar{x} + D_{\tilde{z}u_{N\Delta}}u_{N\Delta} + D_{\tilde{z}\tilde{w}}\tilde{w} + D_{\tilde{z}u}u \\ \bar{y}_n &= C_{\bar{y}_n}\bar{x} + D_{\bar{y}_nu_{N\Delta}}u_{N\Delta} + D_{\bar{y}_n\tilde{w}}\tilde{w} + D_{\bar{y}_nu}u \end{aligned} \quad (5.27)$$

ile ifade edilir. Buradaki parametreler

$$\begin{aligned} B_{N\Delta} &= \begin{bmatrix} 0_{(4 \times 4)} \\ -M^{-1}N_1 \end{bmatrix}; C_{y_{N\Delta}} = \begin{bmatrix} 0_{(4 \times 4)} & N_2 \end{bmatrix} \\ D_{y_{N\Delta}u_{N\Delta}} &= \begin{bmatrix} 0_{(4 \times 4)} \end{bmatrix}; D_{y_{N\Delta}\tilde{w}} = \begin{bmatrix} 0_{(4 \times 1)} & 0_{(4 \times 3)} & 0_{(4 \times 4)} \end{bmatrix}; D_{y_{N\Delta}u} = \begin{bmatrix} 0_{(4 \times 1)} \end{bmatrix} \\ D_{\tilde{z}u_{N\Delta}} &= \begin{bmatrix} 0_{(4 \times 4)} \\ 0_{(1 \times 4)} \end{bmatrix}; D_{\bar{y}_nu_{N\Delta}} = \begin{bmatrix} 0_{(4 \times 4)} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.28)$$

ile ifade edilir ve G_p genişletilmiş gerçel belirsizlik içeren iç bağlantı modeli ile Δ_R gerçel belirsizlik matrisinden oluşan $F_u(G_p, \Delta_R)$ gerçel belirsizlik içeren sistem modelinin blok diyagramı Şekil 5.29'de gösterilmiştir.



Şekil 5.29. Gerçel belirsizlik içeren sistem blok diyagramı.

Sistemin doğrusal modeli oluşturulurken, doğrusal olmayan dinamiklerin ihmal edilmesi sistemde belirsizliğe yol açar. Bu yığılmış belirsizlikler, W_o belirsizlik ağırlık fonksiyonları ve Δ_C yapısal olmayan belirsizlik bloğu ile birlikte $[\bar{y}_{\theta 1}, \bar{y}_{\theta 4}, \bar{y}_{\theta 5}]$ sarkaç kollarının birbirlerine göre bağıl salınım ölçüm sinyallerine çarpım olarak etki eder. Burada Δ_C yapısal olmayan belirsizlik bloğu

$$\Delta_C = \{\text{diag}(\Delta_{\theta 1}, \Delta_{\theta 4}, \Delta_{\theta 5}) \mid \Delta_{\theta 1}, \Delta_{\theta 4}, \Delta_{\theta 5} \in C\} \quad (5.29)$$

ile ifade edilir. Sistemdeki belirsizlikler $\|\Delta_{\theta 1}\|_{\infty}, \|\Delta_{\theta 4}\|_{\infty}, \|\Delta_{\theta 5}\|_{\infty} \leq 1$ şartını sağlar.

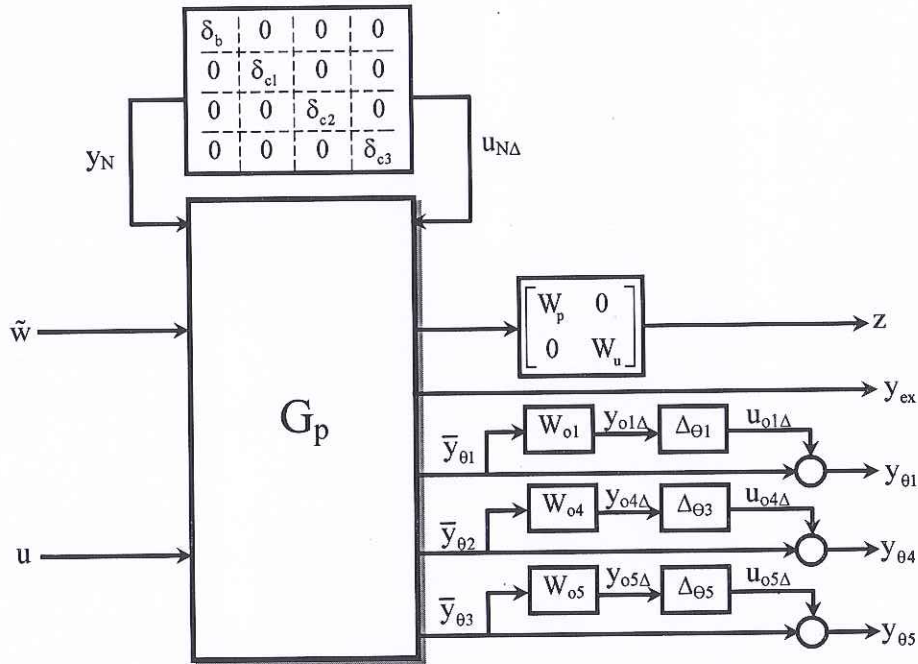
Belirsizlik ağırlık fonksiyonları

$$W_o = \{W_{o1}, W_{o4}, W_{o5}\} \quad (5.30)$$

ile ifade edilip her birinin değeri

$$W_{o1} = W_{o4} = W_{o5} = 0.05 \quad (5.31)$$

olarak seçilmiştir. Δ_C yapısal olmayan belirsizliğinin $y_{o\Delta} = [y_{o1\Delta}, y_{o4\Delta}, y_{o5\Delta}]^T$ giriş sinyalleri ve $u_{o\Delta} = [u_{o1\Delta}, u_{o4\Delta}, u_{o5\Delta}]^T$ da çıkış sinyallerini gösterir. W_o , W_p ve W_u ağırlık fonksiyonları ile yapısal ve yapısal olmayan belirsizlikler içeren sistemin açık çevrim modeli Şekil 5.30'da gösterilmiştir.

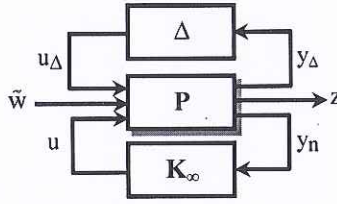


Şekil 5.30. Ağırlık fonksiyonlarıyla belirsizlikler içeren açık çevrim sistemin blok diyagramı.

Sistemdeki Δ_R ve Δ_c belirsizliklerinin tek bir Δ belirsizlik bloğunda köşegen olarak tanımlanmasıyla sistemin Δ genel belirsizlik bloğu

$$\Delta = \{ \text{diag}(\delta_b, \delta_{c1}, \delta_{c2}, \delta_{c3}, \Delta_{\theta1}, \Delta_{\theta4}, \Delta_{\theta5}) \mid \delta_b, \delta_{c1}, \delta_{c2}, \delta_{c3} \in \mathbb{R}, \Delta_{\theta1}, \Delta_{\theta4}, \Delta_{\theta5} \in \mathbb{C} \} \quad (5.32)$$

oluşturulur. Sistemde W_p , W_u , W_o ağırlık fonksiyonları ve G_p genişletilmiş gerçel belirsizlik içeren iç bağlantı modeli ile P belirsizlik içeren iç bağlantılı modeli oluşturulur. Δ belirsizlik bloğu, P belirsizlik içeren iç bağlantılı modeli ve K_∞ kontrolörü ile sistemin RC genel yapısı Şekil 5.31'deki gibi gösterilmiştir.

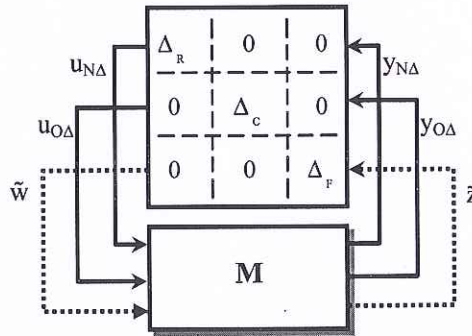


Şekil 5.31. Dayanıklı kontrol genel yapısı.

Şekil 5.31'de $u_\Delta = [u_{N\Delta}, u_{O\Delta}]^T$ belirsizlik giriş sinyalleri ve $y_\Delta = [y_{N\Delta}, y_{O\Delta}]^T$ belirsizlik çıkış sinyalleri $y_n = [y_{ex}, y_{\theta1}, y_{\theta4}, y_{\theta5}]^T$ geri besleme ölçüm sinyalinden oluşan RC genel yapısının dayanıklılık analizinde Δ belirsizlik bloğu RS analizi için kullanılırken, RP analizinde \tilde{w} dış kaynaklı giriş sinyallerinden z performans çıkış sinyallerine Δ_F sanal belirsizlik bloğun dahil edilmesiyle oluşan Δ_p performans belirsizlik bloğu

$$\Delta_p = \{ \text{diag}(\delta_b, \delta_{c1}, \delta_{c2}, \delta_{c3}, \Delta_{\theta1}, \Delta_{\theta4}, \Delta_{\theta5}, \Delta_F) \mid \delta_b, \delta_{c1}, \delta_{c2}, \delta_{c3} \in \mathbb{R}, \Delta_{\theta1}, \Delta_{\theta4}, \Delta_{\theta5} \in \mathbb{C}, \Delta_F \in \mathbb{C}^{8 \times 5} \} \quad (5.33)$$

kullanılır. $M = F_l(P, K_\infty)$ transfer fonksiyonu \tilde{w} dış kaynaklı bozucu sinyallerden z performans çıkış sinyalleri arasında olup performans belirsizlik bloğu ile dayanıklılık analizi genel blok diyagramı Şekil 5.32'de gösterilmiştir.

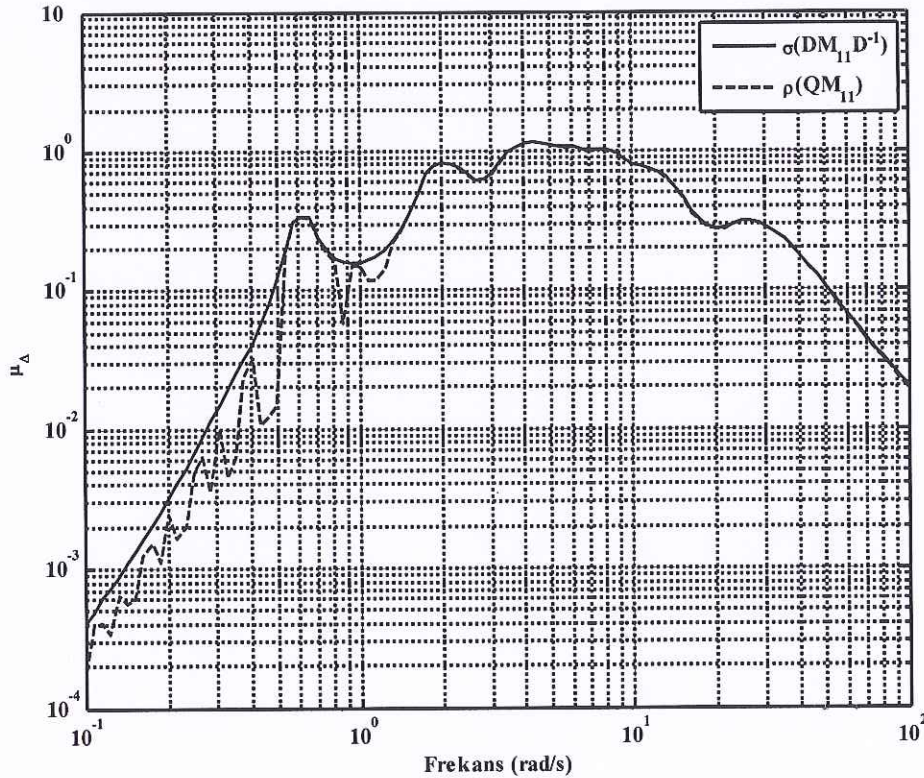


Şekil 5.32. Dayanıklılık analizi genel yapısı.

M transfer fonksiyonu ile Δ belirsizlik bloğu arasındaki $F_u(M,\Delta)=M_{22}+M_{21}\Delta(1-M_{11}\Delta)^{-1}M_{12}$ LFT bağlantısında M_{22} nominal sistem kararlı olduğundan; kararsızlık $(1-M_{11}\Delta)$ teriminden kaynaklanmaktadır. Belirsizlik içeren sistemin RS'ın sağlandığı $\mu_\Delta(M_{11})$ üst sınırı

$$\mu_\Delta(M_{11}) = \frac{1}{\min\{\bar{\sigma}(\Delta) \mid \det(I - M_{11}\Delta) = 0, \Delta \text{ yapısal belirsizlik bloku}\}} \quad (5.34)$$

ile ifade edilir. $\mu_\Delta(M_{11})$ değerine $\max_{Q \in Q_\Delta} \rho(QM_{11}) \leq \mu_\Delta(M_{11}) \leq \inf_{D \in D_\Delta} \bar{\sigma}(DM_{11}D^{-1})$ alt ve üst sınırı ile yaklaşılır. Sistemin dayanıklı kararlılık analizinde $\mu_\Delta(M_{11}) \leq \inf_{D \in D_\Delta} \bar{\sigma}(DM_{11}D^{-1})$ en uygun D ölçeklendirme matrisi ile belirlenen üst sınır kullanılmıştır. $\max_{\omega} \mu_\Delta(M_{11}) \leq 1/\beta_s$ olması durumunda, küçük kazanç teoreminden, sistemin kararlılık şartının sağlandığı $\|\Delta\|_\infty \leq \beta_s$ belirsizlik üst sınır değeri bulunur. $\mu_\Delta(M_{11})$ alt ve üst sınır dayanıklı kararlılık eğrileri Şekil 5.33'de verilmiştir.

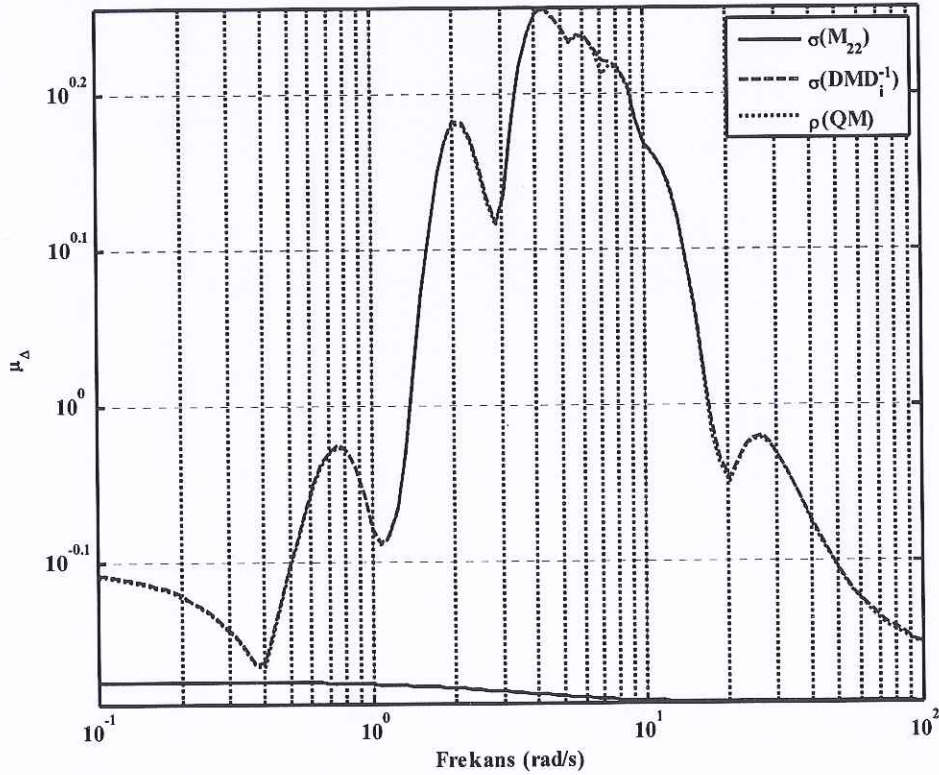


Şekil 5.33. Dayanıklı kararlılık analizi.

Sistemin RP'ın sağlandığı üst sınır, $\mu_{\Delta p}$ yapısal tekil değeri

$$\mu_{\Delta p}(M) = \frac{1}{\min\{\bar{\sigma}(\Delta_p) \mid \det(I - M\Delta_p) = 0, \Delta_p \text{ yapısal belirsizlik bloku}\}} \quad (5.35)$$

ile ifade edilir. $\mu_{\Delta_p}(M)$ değerine $\max_{Q \in Q_{\Delta}} \rho(QM) \leq \mu_{\Delta_p}(M) \leq \inf_{D \in D_{\Delta}} \bar{\sigma}(DMD^{-1})$ alt ve üst sınırı ile yaklaşılır. $\mu_{\Delta_p}(M) \leq \inf_{D \in D_{\Delta}} \bar{\sigma}(DMD^{-1})$ dayanıklılık üst sınırının dikkate alınmasıyla, $\max_{\omega} \mu_{\Delta_p}(M) \leq 1/\beta_p$ olması durumunda, dayanıklı performans şartının sağlandığı $\|\Delta_p\|_{\infty} \leq \beta_p$ belirsizlik bloğu üst sınır değeri bulunur. Sistemin $\bar{\sigma}(M_{22})$ nominal performans, $\mu_{\Delta_p}(M)$ dayanıklı performans Şekil 5.34'de verilmiştir.



Şekil 5.34. Dayanıklı performans analizi.

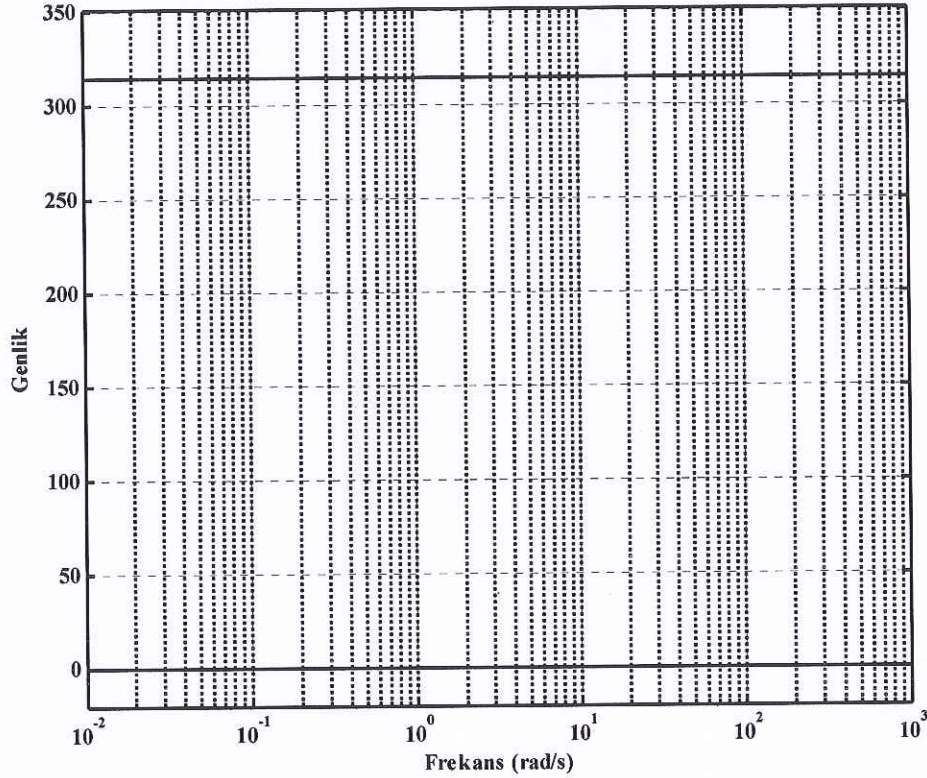
Şekil 5.33'den $\max_{\omega} \mu_{\Delta}(M_{11}) \leq 1.1657$ dayanıklı kararlılık üst sınır değeri ve Şekil 5.34'den $\max_{\omega} \mu_{\Delta_p}(M) \leq 1.7876$ dayanıklı performans üst sınır değeri bulunur. Buna göre kararlılığın $\|\Delta\|_{\infty} \leq 0.85785$ ve performansın $\|\Delta_p\|_{\infty} \leq 0.55941$ belirsizlik üst sınır değerlerinde sağlandığı bulunur. H_{∞} en uygun kontrol metodu nominal sistem için uygulanmış; μ -analizinden elde edilen sonuçlara göre kontrolörün sistemdeki bütün belirsizliklere karşı RS ve RP'yi sağlayamadığı görülmüştür. Bunun için dayanıklı performans analizinde kullanılan $\mu_{\Delta_p}(M) \leq \inf_{D \in D_{\Delta}} \bar{\sigma}(DMD^{-1})$ yapısal tekil değer üst sınırını en aza indirgeyerek RP ve RS'yi garanti altına alan μ -sentez metodu tabanlı D-K tekrarlamasına başvurulur.

5.4. μ -Sentezi

H_∞ en uygun kontrol metodu ve μ -analizi birleşiminden oluşan μ -sentezi metodu, belirsizlik içeren sistemin dayanıklı kararlılık ve performansı açısından bakıldığında iyi sonuçlar verir. Bu kontrol metodunda, D-K tekrarlama olarak bilinen yordam ile sistemin RS ve RP'ı sağlayan kontrolörü bulunur. D-K tekrarlama, $\hat{D}_{\ell 0} = I_{9 \times 9}$ ve $\hat{D}_{r 0} = I_{6 \times 6}$ başlangıç sol ve sağ üst sınır ölçeklendirme matrisleri ile başlatılarak H_∞ kontrol problemi

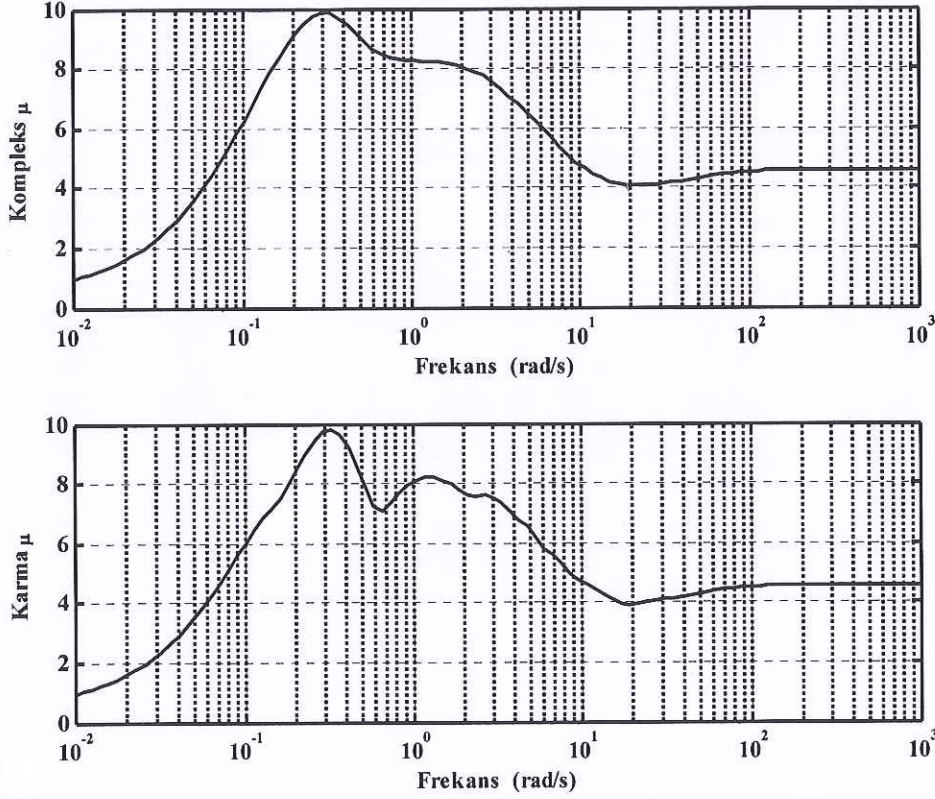
$$\min_{K_{mul}} \left\| \hat{D}_{\ell 0} M_1 \hat{D}_{r 0}^{-1} \right\|_\infty \leq \gamma; \quad \min_{K_{mul}} \max_{\omega} \bar{\sigma}(\hat{D}_{\ell 0} M_1 \hat{D}_{r 0}^{-1}) \leq \gamma; \quad M_1 = F_\ell(P, K_{mul}) \quad (5.36)$$

ile ifade edilir. Problemin çözümünde Riccati eşitliğinden yararlanılarak, γ en uygun değerine, $[\gamma_\ell \ \gamma_u]$ üst ve alt limitler arasında tekrarlama yapılarak ulaşılır. Bu çözümden $\gamma_{mul} = 314.1460$ üst limit değeri ve K_{mul} ilk kontrolörü bulunur. K_{mul} kontrolörü ile kapalı çevrimli sistemin tekil değerleri Şekil 5.35'de gösterilmiştir.



Şekil 5.35. Kapalı çevrimli sistemin tekil değerleri.

Doğrusal matris eşitsizliği (LMI) kullanılarak sistemin D_{e1} ve D_{r1} en uygun ölçeklendirme matrisleri ile $\mu_{\Delta_p}(M_1) \leq \overline{\sigma}(D_{e1}M_1D_{r1}^{-1})$ sistemin dayanıklı performans analizi üst sınır eşitsizliği Şekil 5.36'da gösterilmiştir.



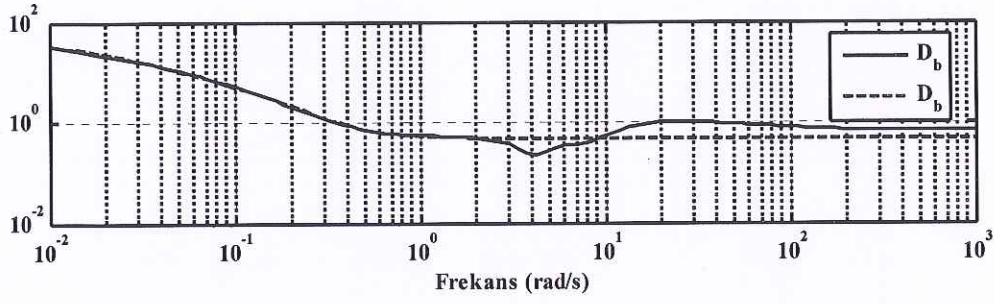
Şekil 5.36. $K_{\mu 1}$ kontrolörü ile dayanıklı performans analizi.

Şekil 5.36'dan $\max_{\omega} \mu_{\Delta_p}(M_1) \leq 9.854$ bulunması ile birinci D-K tekrarlama bitirilmiştir. Birinci tekrarlama elde edilen D_{e1} sol ve D_{r1} sağ üst sınır ölçeklendirme matrisi Δ_p belirsizlik bloğu ile uyumlu olarak

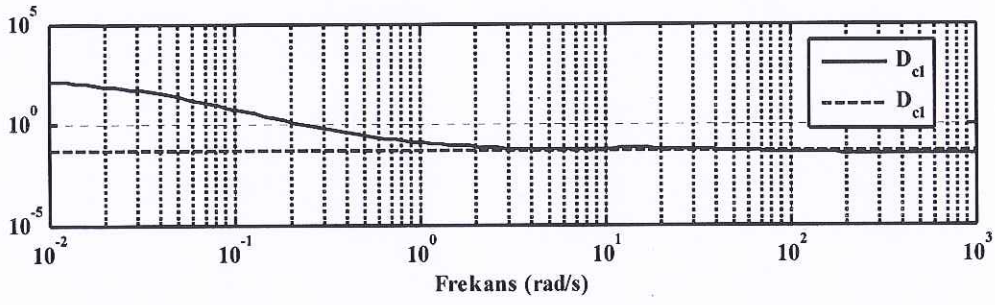
$$D_{r1} = \left\{ \text{diag}(D_b, D_{c1}, D_{c2}, D_{c3}, D_{o1}, D_{o4}, D_{o5}, d_F I_{8 \times 8}), D_b, D_{c1}, D_{c2}, D_{c3}, D_{o1}, D_{o4}, D_{o5} \in \mathbb{C}^{1 \times 1}, d_F \in \mathbb{C} \right\} \quad (5.37)$$

$$D_{e1} = \left\{ \text{diag}(D_b, D_{c1}, D_{c2}, D_{c3}, D_{o1}, D_{o4}, D_{o5}, d_F I_{5 \times 5}), D_b, D_{c1}, D_{c2}, D_{c3}, D_{o1}, D_{o4}, D_{o5} \in \mathbb{C}^{1 \times 1}, d_F \in \mathbb{C} \right\} \quad (5.38)$$

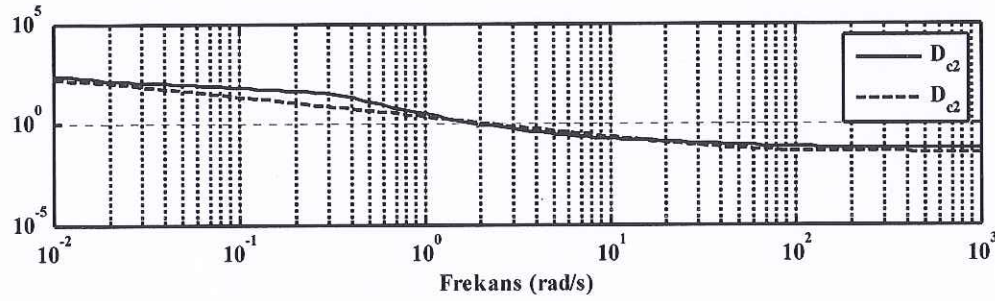
olarak bulunmuştur. İkinci tekrarlama için $D_b, D_{c1}, D_{c2}, D_{c3}, D_{o1}, D_{o4}, D_{o5} \in \mathbb{C}^{1 \times 1}$ üst sınır ölçeklendirme matrislerine \hat{D}_b ikinci dereceden $\hat{D}_{c2}, \hat{D}_{c3}, \hat{D}_{o1}$ birinci dereceden $\hat{D}_{c1}, \hat{D}_{o4}, \hat{D}_{o5}$ sıfıncı dereceden uydurulan eğrilere karşılık gelen transfer fonksiyonları Şekil 5.37-5.43'de verilmiştir.



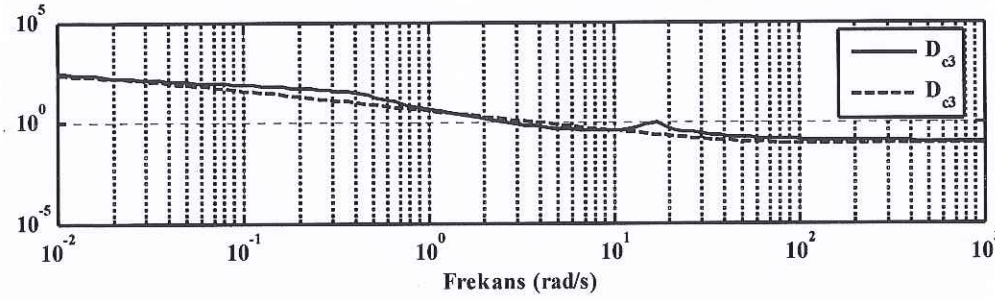
Şekil 5.37. İkinci DK'da D_b ölçeklendirme matrisinden elde edilen \hat{D}_b transfer fonksiyonu.



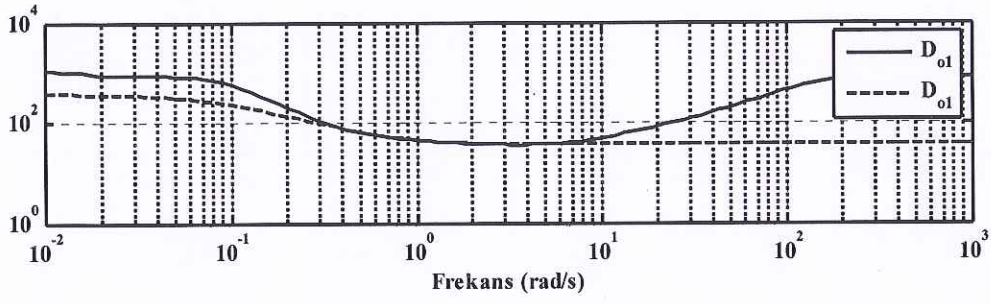
Şekil 5.38. İkinci DK'da D_{c1} ölçeklendirme matrisinden elde edilen \hat{D}_{c1} transfer fonksiyonu.



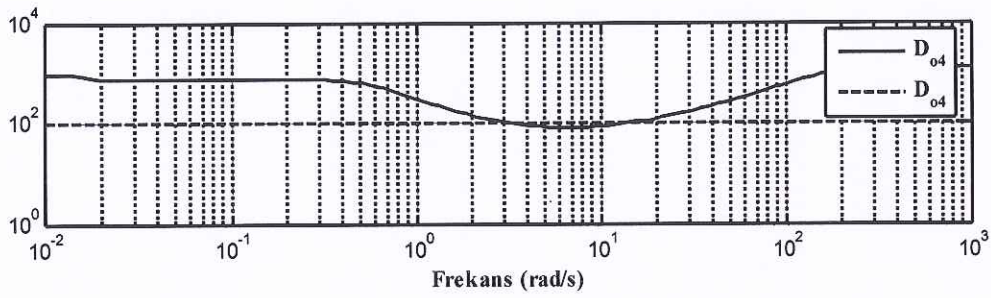
Şekil 5.39. İkinci DK'da D_{c2} ölçeklendirme matrisinden elde edilen \hat{D}_{c2} transfer fonksiyonu.



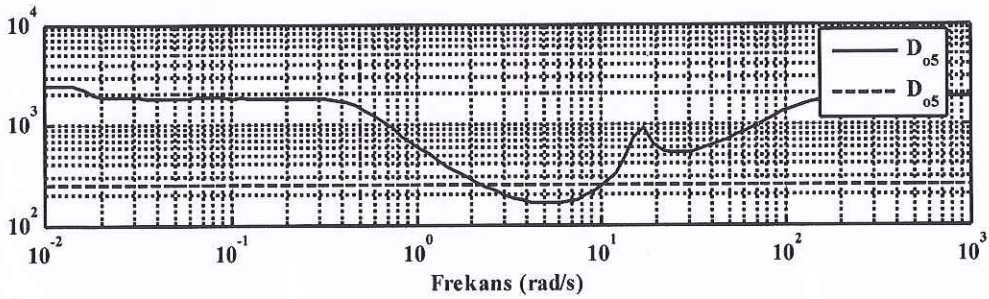
Şekil 5.40. İkinci DK'da D_{c3} ölçeklendirme matrisinden elde edilen \hat{D}_{c3} transfer fonksiyonu.



Şekil 5.41. İkinci DK'da D_{o1} ölçeklendirme matrisinden elde edilen \hat{D}_{o1} transfer fonksiyonu.



Şekil 5.42. İkinci DK'da D_{o4} ölçeklendirme matrisinden elde edilen \hat{D}_{o4} transfer fonksiyonu.



Şekil 5.43. İkinci DK'da D_{o5} ölçeklendirme matrisinden elde edilen \hat{D}_{o5} transfer fonksiyonu.

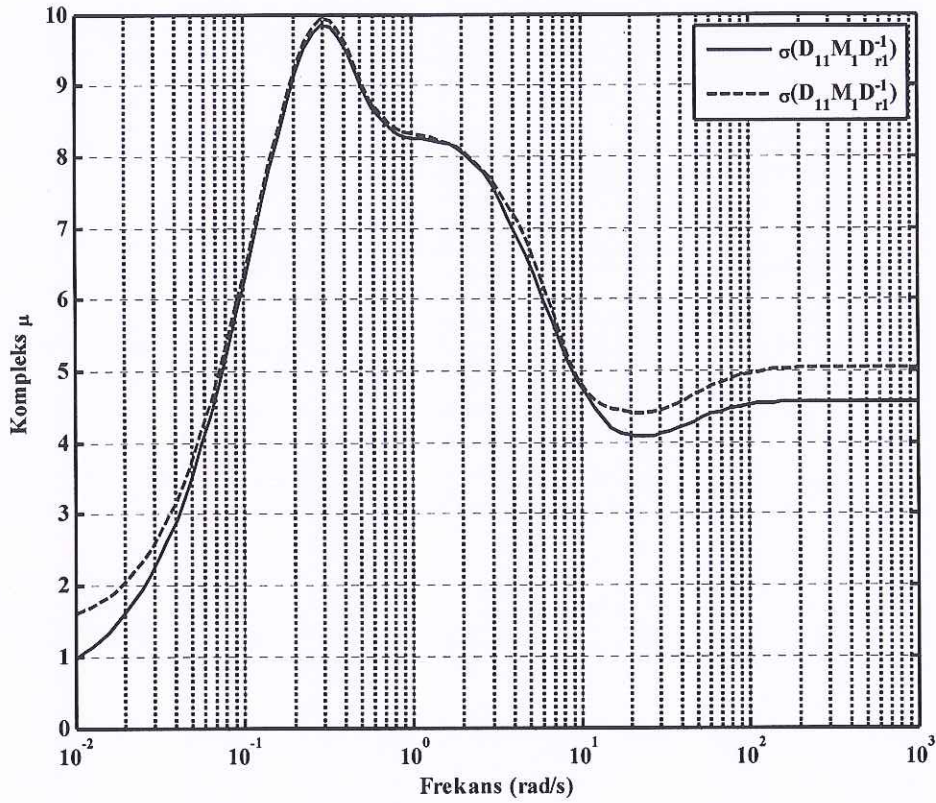
Seçilen \hat{D}_{r1} sağ ve \hat{D}_{l1} sol ölçeklendirme transfer fonksiyonları

$$\hat{D}_{r1} = \left\{ \text{diag}(\hat{D}_b, \hat{D}_{c1}, \hat{D}_{c2}, \hat{D}_{c3}, \hat{D}_{o1}, \hat{D}_{o4}, \hat{D}_{o5}, d_F I_{8 \times 8}), \hat{D}_b, \hat{D}_{c1}, \hat{D}_{c2}, \hat{D}_{c3}, \hat{D}_{o1}, \hat{D}_{o4}, \hat{D}_{o5} \in \mathbb{C}^{1 \times 1}, d_F \in \mathbb{R} \right\} \quad (5.39)$$

$$\hat{D}_{l1} = \left\{ \text{diag}(\hat{D}_b, \hat{D}_{c1}, \hat{D}_{c2}, \hat{D}_{c3}, \hat{D}_{o1}, \hat{D}_{o4}, \hat{D}_{o5}, d_F I_{5 \times 5}), \hat{D}_b, \hat{D}_{c1}, \hat{D}_{c2}, \hat{D}_{c3}, \hat{D}_{o1}, \hat{D}_{o4}, \hat{D}_{o5} \in \mathbb{C}^{1 \times 1}, d_F \in \mathbb{R} \right\} \quad (5.40)$$

ile ifade edilir. \hat{D}_{r1} sağ ve \hat{D}_{l1} sol ölçeklendirme transferi ile sistemin dayanıklılık analizi

$\mu_{\text{sp}}(M_1) \leq \bar{\sigma}(\hat{D}_{l1} M_1 \hat{D}_{r1}^{-1})$ üst sınırı Şekil 5.44'de gösterilmiştir.

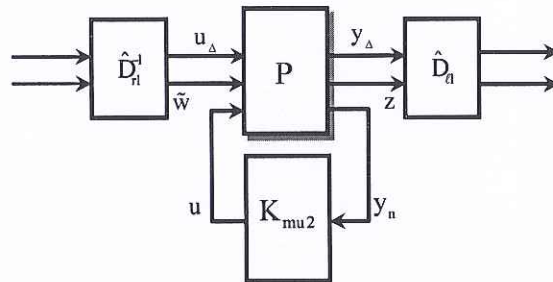


Şekil 5.44. $\bar{\sigma}(D_{11} M_1 D_{r1}^{-1})$ ve $\bar{\sigma}(\hat{D}_{11} M_1 \hat{D}_{r1}^{-1})$ üst sınırları.

Şekil 5.44'den $\bar{\sigma}(D_{11} M_1 D_{r1}^{-1})$ ve $\bar{\sigma}(\hat{D}_{11} M_1 \hat{D}_{r1}^{-1})$ üst sınırlarının çakışması \hat{D}_{r1} sağ ve \hat{D}_{11} sol ölçeklendirme transfer fonksiyonlarının H_∞ kontrol probleminde kullanılabilirliğini göstermiştir. Buradan sistemin kararlılığını ve performansı sağlayan dayanıklılık üst sınırını indirmek için H_∞ kontrol problemi

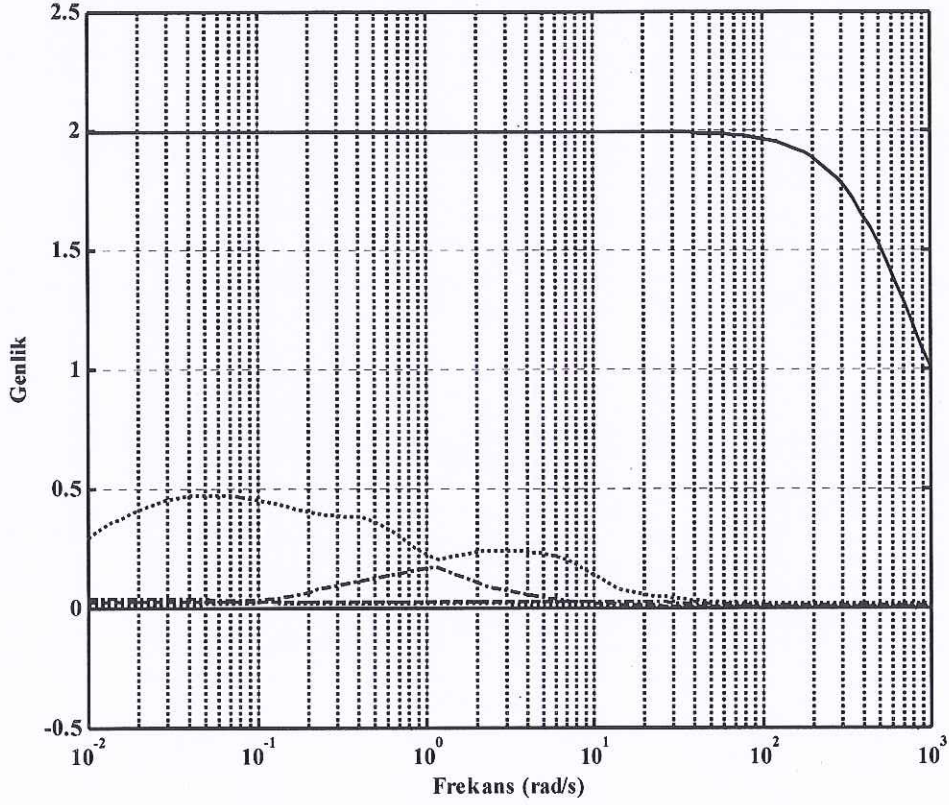
$$\begin{aligned} \min_{K_{mu2}} \|\hat{D}_{11} M_2 \hat{D}_{r1}^{-1}\|_\infty &\leq \gamma \\ \min_{K_{mu2}} \max_{\omega} \bar{\sigma}(\hat{D}_{11} M_2 \hat{D}_{r1}^{-1}) &\leq \gamma \\ M_2 &= F_\ell(P, K_{mu2}) \end{aligned} \quad (5.41)$$

yeniden çözülür. Şekil 5.45'de genel blok diyagramı gösterilmiştir.



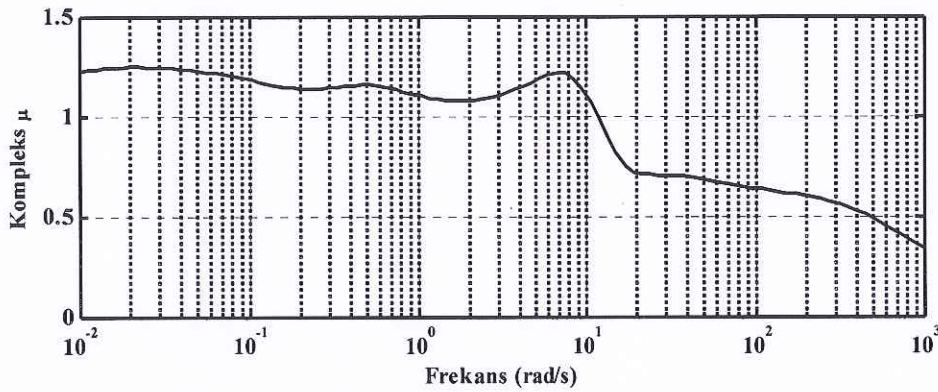
Şekil 5.45. H_∞ kontrol problemi genel yapısı.

İkinci tekrarlama $\gamma_{\mu_2} = 1.9978$ üst limit değeri ve yirmi üçüncü dereceden K_{μ_2} kontrolörü bulunur. K_{μ_2} kontrolörü ile kapalı çevrimli sistemin tekil değerleri Şekil 5.46'da gösterilmiştir.

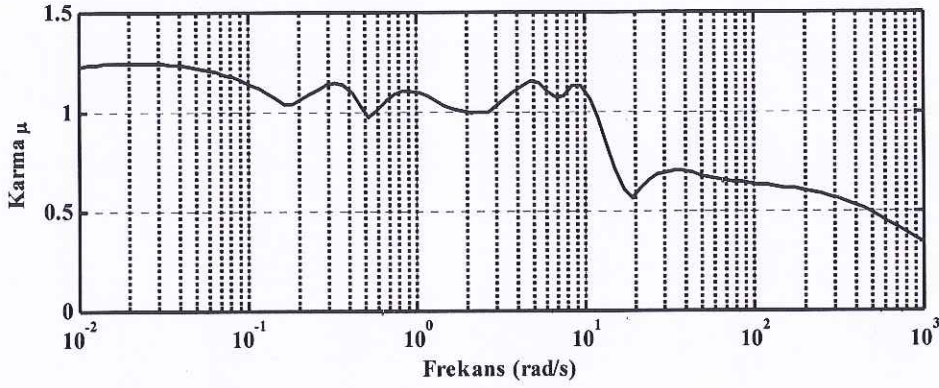


Şekil 5.46. K_{μ_2} kontrolörü ile kapalı çevrimli sistemin tekil değerleri.

Bulunan K_{μ_2} kontrolörü ile yapısal belirsizlik içeren sistemin dayanıklı performans analizi $\mu_{\Delta_p}(M_2) \leq \bar{\sigma}(D_{\ell_2} M_2 D_{i_2}^{-1})$ üst sınır eşitsizliği Şekil 5.47 ve 5.48'de gösterilmiştir.



Şekil 5.47. K_{μ_2} kontrolörü ile kompleks üst sınırı ile RP analizi.



Şekil 5.48. K_{mu2} kontrolörü ile karma üst sınır ile RP analizi.

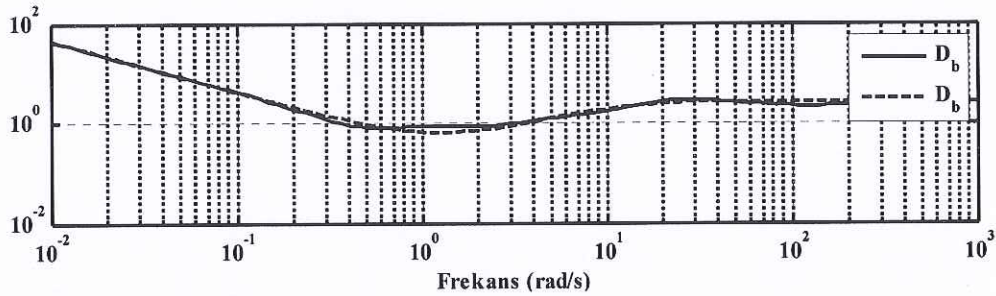
Şekil 5.48'den $\max_{\omega} \mu_{ap}(M_2) \leq 1.172$ bulunması ile ikinci D-K tekrarlama bitirilmiştir.

İkinci tekrarlama D_{e2} sol ve D_{r2} sağ üst sınır ölçeklendirme matrisi

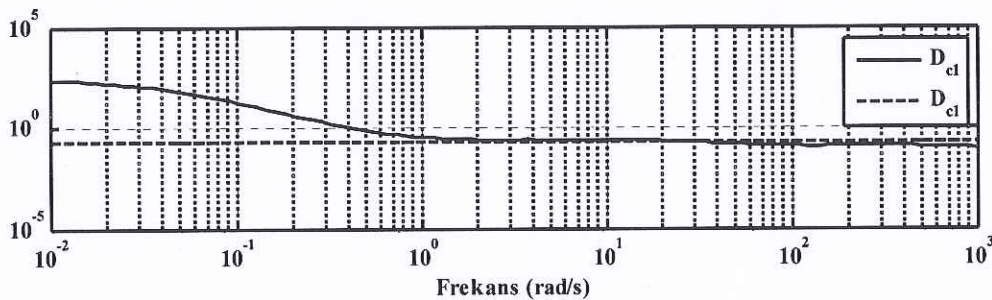
$$D_{r2} = \left\{ \text{diag}(D_b, D_{c1}, D_{c2}, D_{c3}, D_{o1}, D_{o4}, D_{o5}, d_F I_{8 \times 8}), D_b, D_{c1}, D_{c2}, D_{c3}, D_{o1}, D_{o4}, D_{o5} \in C^{1 \times 1}, d_F \in C \right\} \quad (5.42)$$

$$D_{e2} = \left\{ \text{diag}(D_b, D_{c1}, D_{c2}, D_{c3}, D_{o1}, D_{o4}, D_{o5}, d_F I_{5 \times 5}), D_b, D_{c1}, D_{c2}, D_{c3}, D_{o1}, D_{o4}, D_{o5} \in C^{1 \times 1}, d_F \in C \right\} \quad (5.43)$$

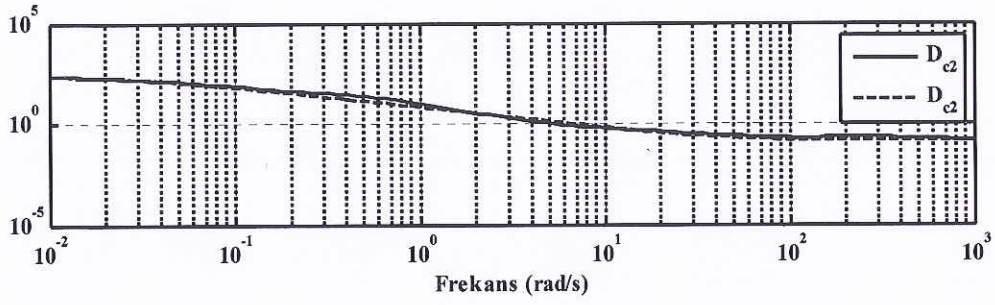
elde edilir. Üçüncü tekrarlama için $D_b, D_{c1}, D_{c2}, D_{c3}, D_{o1}, D_{o4}, D_{o5} \in C^{1 \times 1}$ üst sınır ölçeklendirme matrislerine \hat{D}_b üçüncü dereceden $\hat{D}_{c2}, \hat{D}_{c3}, \hat{D}_{o4}$ birinci dereceden \hat{D}_{o5} dördüncü dereceden ve \hat{D}_{c1} sıfırıncı dereceden uydurulan eğrilere karşılık gelen transfer fonksiyonları Şekil 5.49-55'de verilmiştir.



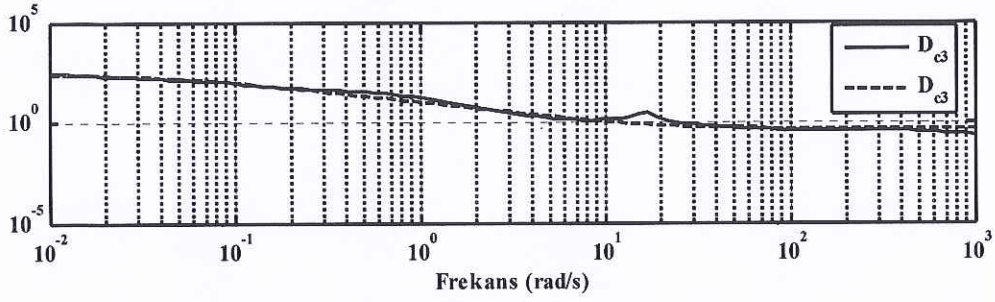
Şekil 5.49. Üçüncü D-K'da D_b ölçeklendirme matrisinden elde edilen \hat{D}_b transfer fonksiyonu.



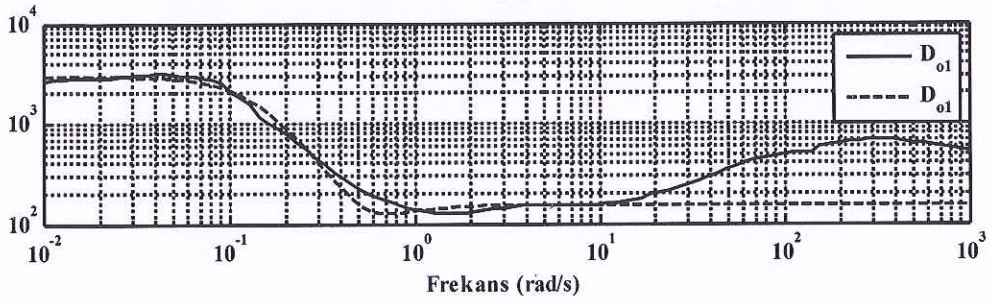
Şekil 5.50. Üçüncü D-K'da D_{c1} ölçeklendirme matrisinden elde edilen \hat{D}_{c1} transfer fonksiyonu.



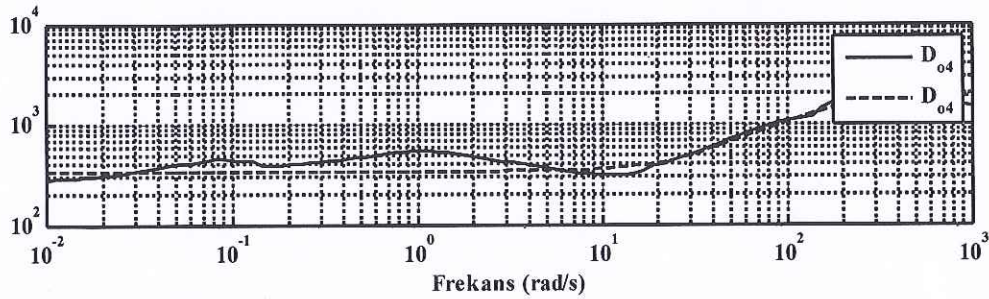
Şekil 5.51. Üçüncü D-K'da D_{c2} ölçeklendirme matrisinden elde edilen \hat{D}_{c2} transfer fonksiyonu.



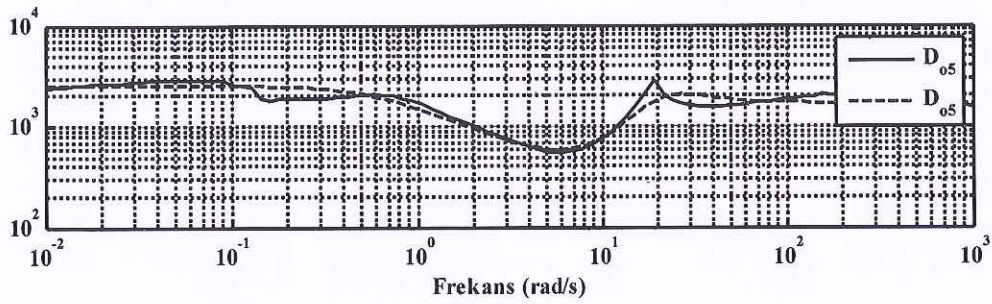
Şekil 5.52. Üçüncü D-K'da D_{c3} ölçeklendirme matrisinden elde edilen \hat{D}_{c3} transfer fonksiyonu.



Şekil 5.53. Üçüncü D-K'da D_{o1} ölçeklendirme matrisinden elde edilen \hat{D}_{o1} transfer fonksiyonu.

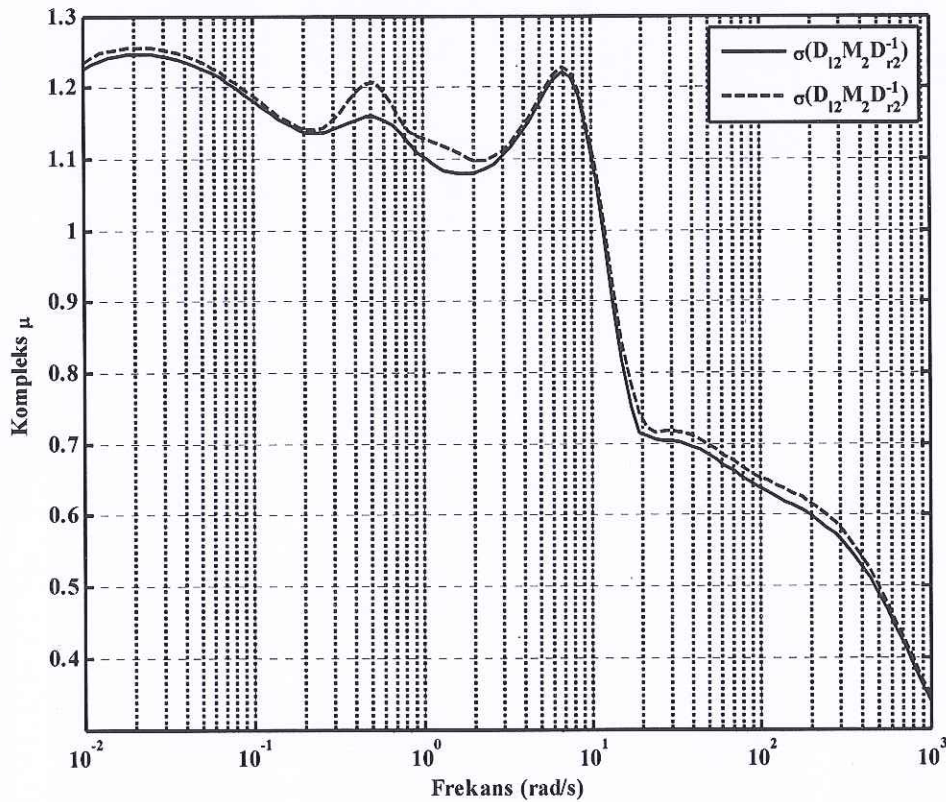


Şekil 5.54. Üçüncü D-K'da D_{o4} ölçeklendirme matrisinden elde edilen \hat{D}_{o4} transfer fonksiyonu.



Şekil 5.55. Üçüncü D-K'da D_{05} ölçeklendirme matrisinden elde edilen \hat{D}_{05} transfer fonksiyonu.

Seçilen \hat{D}_{r2} sağ ve \hat{D}_{l2} sol ölçeklendirme transfer fonksiyonları ile sistemin dayanıklılık analizi $\mu_{\Delta p}(M_2) \leq \bar{\sigma}(\hat{D}_{l2} M_2 \hat{D}_{r2}^{-1})$ üst sınırı Şekil 5.56'de gösterilmiştir.

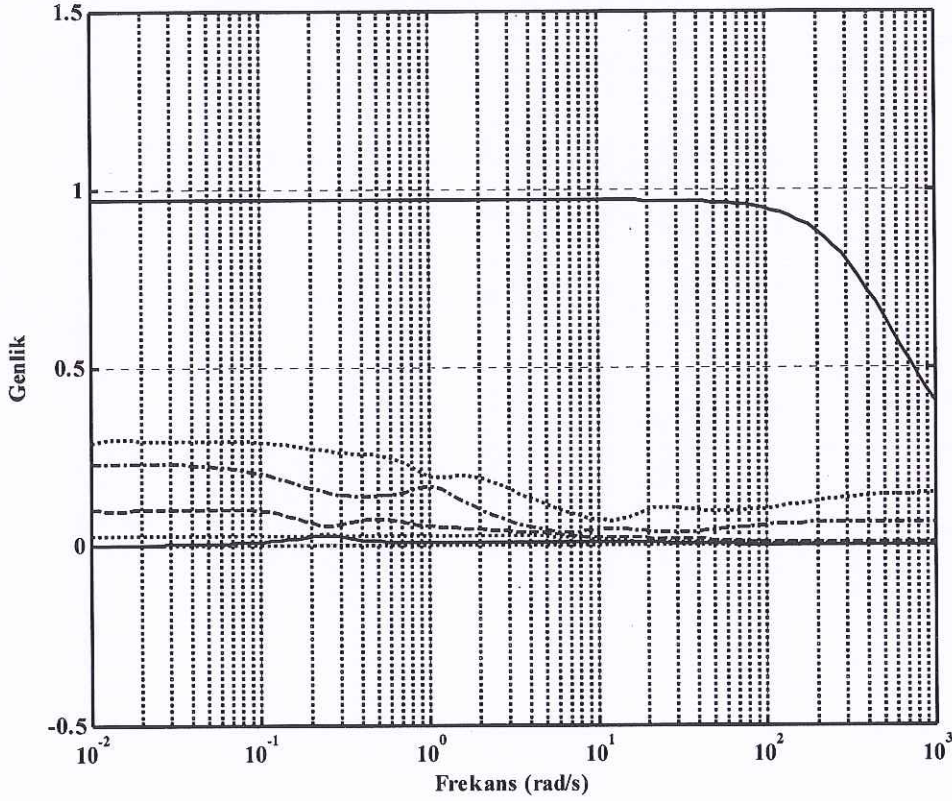


Şekil 5.56. $\bar{\sigma}(D_{l2} M_2 D_{r2}^{-1})$ ve $\bar{\sigma}(\hat{D}_{l2} M_2 \hat{D}_{r2}^{-1})$ üst sınırları.

Buradan sistemin kararlılığını ve performansını sağlayan dayanıklılık üst sınırını indirmek için H_{∞} kontrol problemi

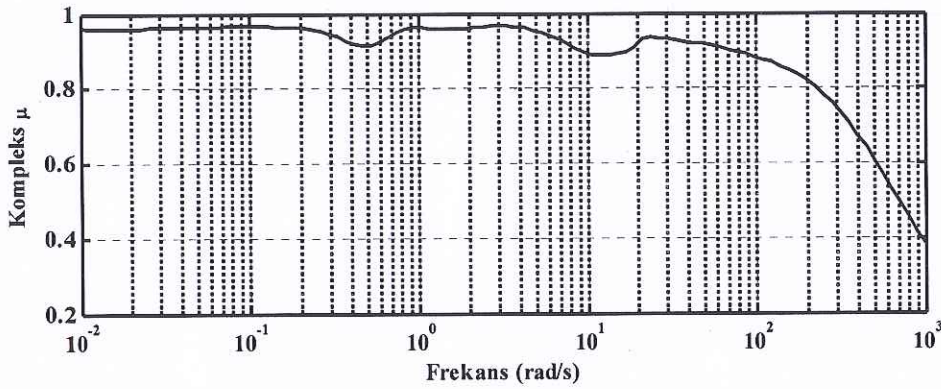
$$\begin{aligned}
 & \min_{K_{mu3}} \|\hat{D}_{l2} M_3 \hat{D}_{r2}^{-1}\|_{\infty} \leq \gamma \\
 & \min_{K_{mu3}} \max_{\omega} \bar{\sigma}(\hat{D}_{l2} M_3 \hat{D}_{r2}^{-1}) \leq \gamma \\
 & M_3 = F_l(P, K_{mu3})
 \end{aligned} \tag{5.44}$$

yeniden çözülür. İkinci tekrarlama da $\gamma_{\mu_3} = 0.9705$ üst limit değeri ve yirmi üçüncü dereceden K_{μ_3} kontrolörü bulunur. K_{μ_3} kontrolörü ile kapalı çevrimli sistemin tekil değerleri Şekil 5.57’de gösterilmiştir.

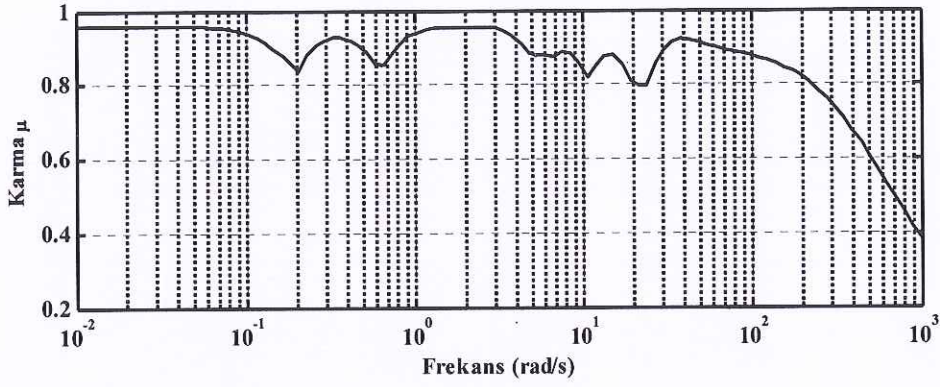


Şekil 5.57. Kapalı çevrimli sistemin tekil değerleri.

Bulunan K_{μ_3} kontrolörü ile yapısal belirsizlik içeren sistemin dayanıklı performans analizi $\mu_{\Delta p}(M_3) \leq \bar{\sigma}(D_{\epsilon_3} M_3 D_{\epsilon_3}^{-1})$ üst sınırı Şekil 5.58-5.59’da gösterilmiştir.



Şekil 5.58. K_{μ_3} kontrolörü ile kompleks üst sınırı ile RP analizi.



Şekil 5.59. $K_{\mu 3}$ kontrolörü ile karma üst sınır ile RP analizi.

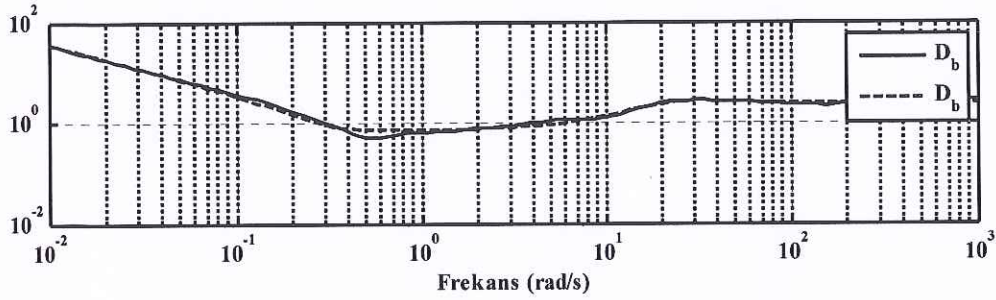
Şekil 5.59'dan $\max_{\omega} \mu_{\Delta p}(M_3) \leq 0.969$ bulunması ile üçüncü D-K tekrarlama bitirilmiştir.

üçüncü tekrarlama $D_{\ell 3}$ sol ve D_{r3} sağ üst sınır ölçeklendirme matrisleri

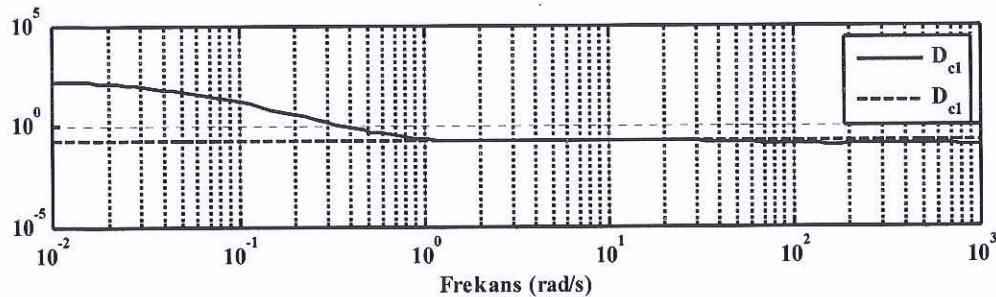
$$D_{r3} = \left\{ \text{diag}(D_b, D_{c1}, D_{c2}, D_{c3}, D_{o1}, D_{o2}, D_{o3}, d_F I_{8 \times 8}), D_b, D_{c1}, D_{c2}, D_{c3}, D_{o1}, D_{o2}, D_{o3} \in C^{1 \times 1}, d_F \in C \right\} \quad (5.45)$$

$$D_{\ell 3} = \left\{ \text{diag}(D_b, D_{c1}, D_{c2}, D_{c3}, D_{o1}, D_{o2}, D_{o3}, d_F I_{5 \times 5}), D_b, D_{c1}, D_{c2}, D_{c3}, D_{o1}, D_{o2}, D_{o3} \in C^{1 \times 1}, d_F \in C \right\} \quad (5.46)$$

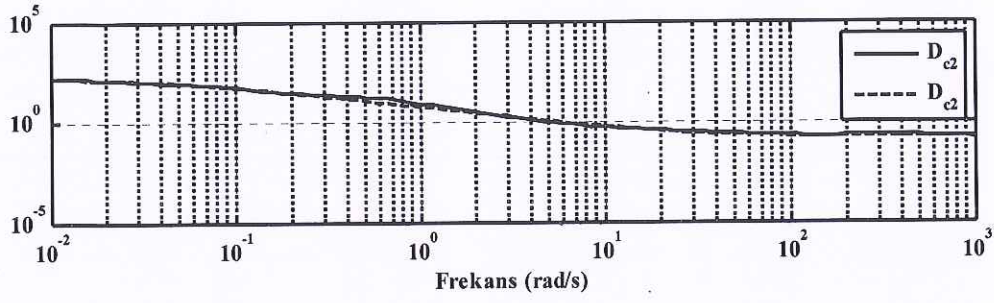
elde edilir. Dördüncü D-K tekrarlama için $D_b, D_{c1}, D_{c2}, D_{c3}, D_{o1}, D_{o2}, D_{o3} \in C^{1 \times 1}$ üst sınır ölçeklendirme matrislerine \hat{D}_b beşinci dereceden $\hat{D}_{c2}, \hat{D}_{c3}, \hat{D}_{o2}$ birinci dereceden $\hat{D}_{o3}, \hat{D}_{o1}$ üçüncü dereceden ve \hat{D}_{c1} sıfırıncı dereceden uydurulan eğrilere karşılık gelen transfer fonksiyonları Şekil 5.60-66'de verilmiştir.



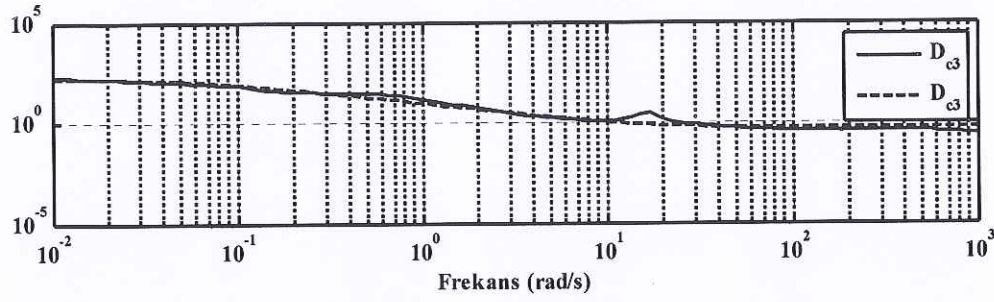
Şekil 5.60. Dördüncü D-K'da D_b ölçeklendirme matrisinden elde edilen \hat{D}_b transfer fonksiyonu.



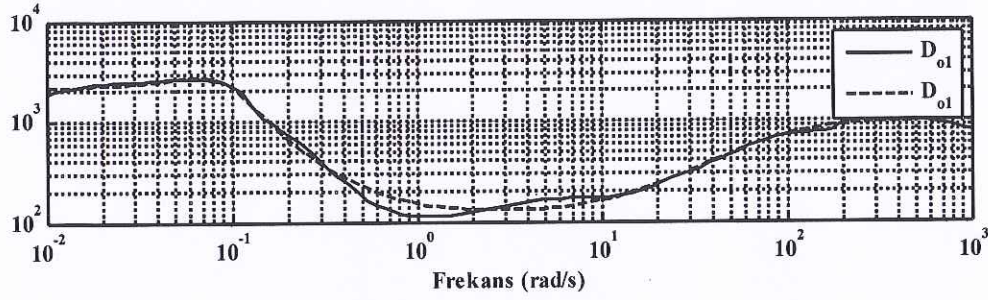
Şekil 5.61. Dördüncü D-K'da D_{c1} ölçeklendirme matrisinden elde edilen \hat{D}_{c1} transfer fonksiyonu.



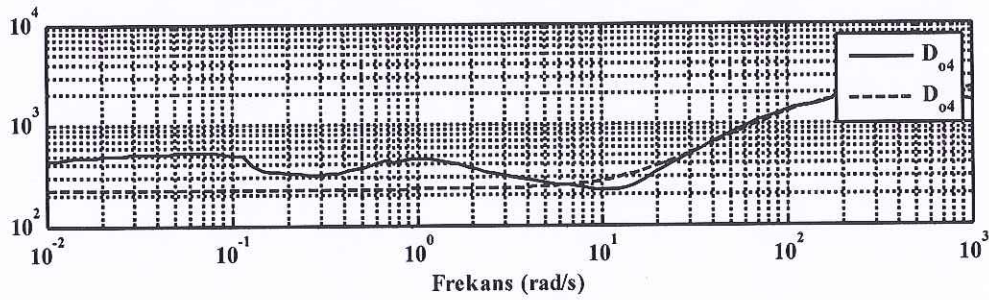
Şekil 5.62. Dördüncü D-K'da D_{c2} ölçeklendirme matrisinden elde edilen \hat{D}_{c2} transfer fonksiyonu.



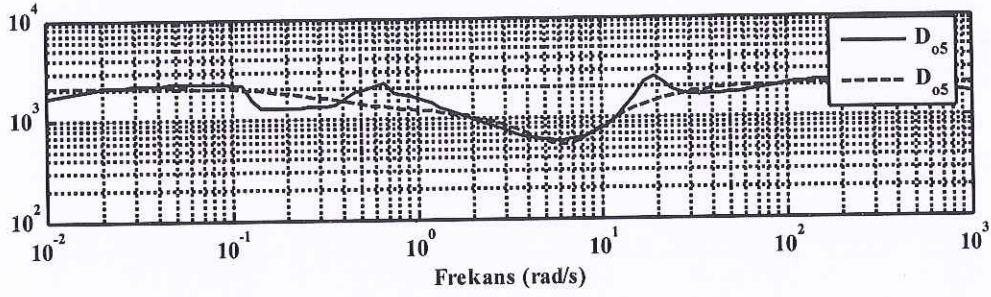
Şekil 5.63. Dördüncü D-K'da D_{c3} ölçeklendirme matrisinden elde edilen \hat{D}_{c3} transfer fonksiyonu.



Şekil 5.64. Dördüncü D-K'da D_{o1} ölçeklendirme matrisinden elde edilen \hat{D}_{o1} transfer fonksiyonu.

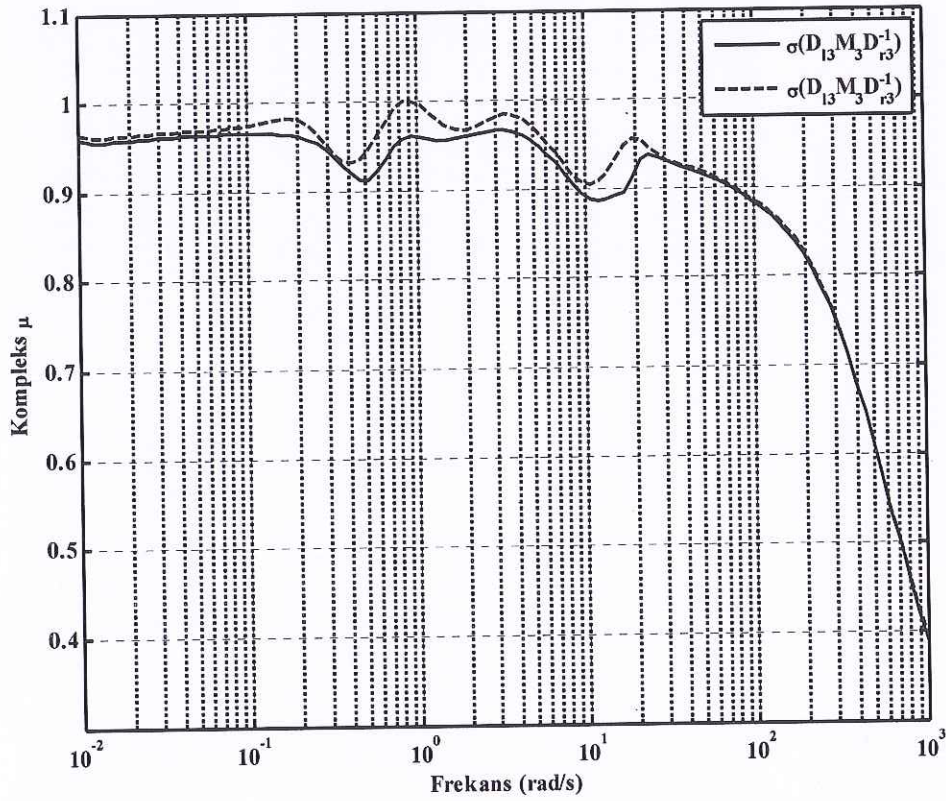


Şekil 5.65. Dördüncü D-K'da D_{o4} ölçeklendirme matrisinden elde edilen \hat{D}_{o4} transfer fonksiyonu.



Şekil 5.66. Dördüncü D-K'da D_{05} ölçeklendirme matrisinden elde edilen \hat{D}_{05} transfer fonksiyonu.

Seçilen \hat{D}_{r3} sağ ve \hat{D}_{l3} sol ölçeklendirme transferi ile sistemin dayanıklılık analizi $\mu_{\Delta_0}(M_3) \leq \bar{\sigma}(\hat{D}_{l3} M_3 \hat{D}_{r3}^{-1})$ üst sınırı Şekil 5.67'de gösterilmiştir.

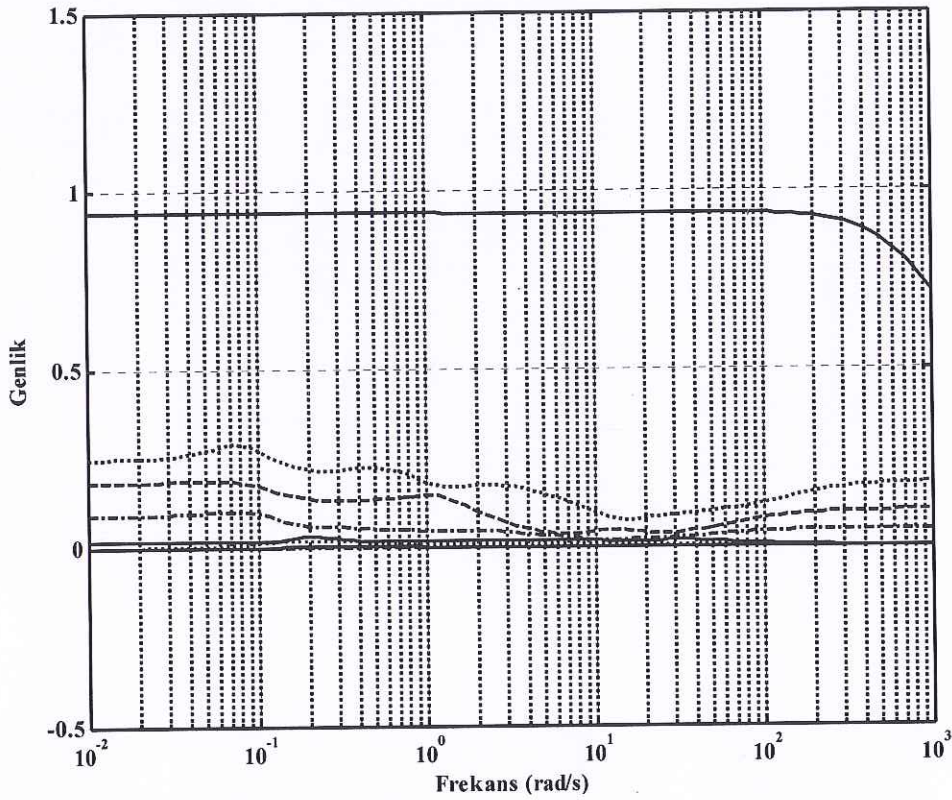


Şekil 5.67. $\bar{\sigma}(D_{l3} M_3 D_{r3}^{-1})$ ve $\bar{\sigma}(\hat{D}_{l3} M_3 \hat{D}_{r3}^{-1})$ üst sınırları.

Buradan sistemin kararlılığını ve performansı sağlayan dayanıklılık üst sınırını indirmek için H_{∞} kontrol problemi

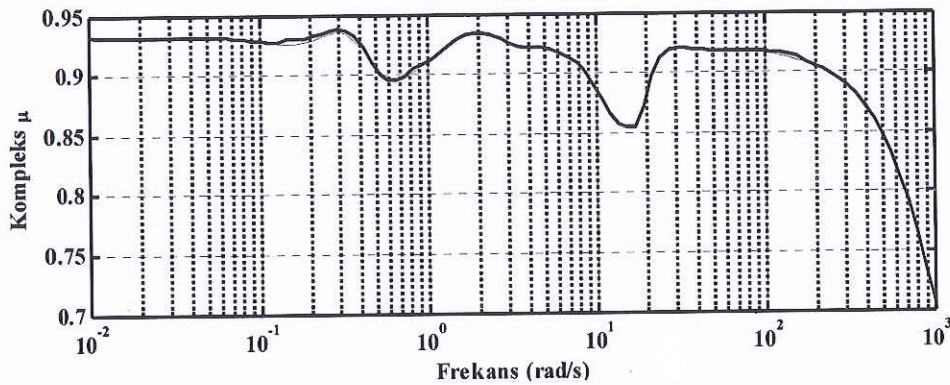
$$\begin{aligned} \min_{K_{mu4}} \left\| \hat{D}_{l3} M_4 \hat{D}_{r3}^{-1} \right\|_{\infty} &\leq \gamma \\ \min_{K_{mu4}} \max_{\omega} \bar{\sigma}(\hat{D}_{l3} M_4 \hat{D}_{r3}^{-1}) &\leq \gamma \\ M_4 &= F_l(P, K_{mu4}) \end{aligned} \quad (5.47)$$

yeniden çözüldür. Dördüncü D-K tekrarlamasında $\gamma_{mu4} = 0.9383$ üst limit değeri ve yirmi üçüncü dereceden K_{mu4} kontrolörü bulunur. K_{mu4} kontrolörü ile kapalı çevrimli sistemin tekil değerleri Şekil 5.68'de gösterilmiştir.

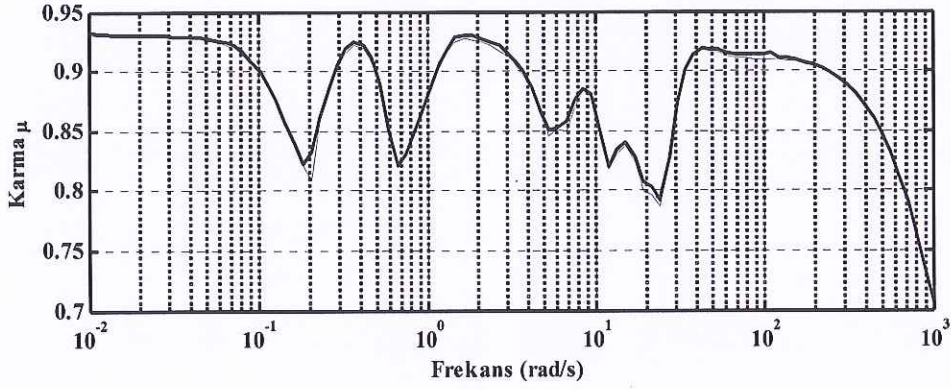


Şekil 5.68. Kapalı çevrimli sistemin tekil değerleri.

Bulunan K_{mu4} kontrolörü ile yapısal belirsizlik içeren sistemin dayanıklı performans analizi $\mu_{\Delta p}(M_4) \leq \bar{\sigma}(D_{l4} M_4 D_{r4}^{-1})$ üst sınır eşitsizliği Şekil 5.69-5.70'de gösterilmiştir.

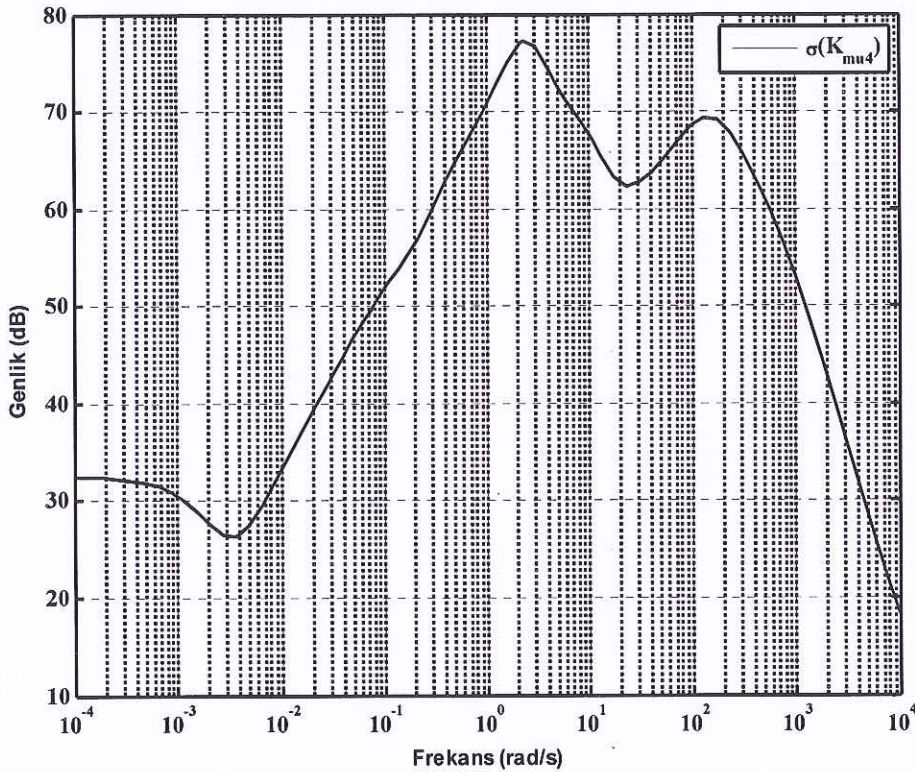


Şekil 5.69. K_{mu4} kontrolörü ile kompleks üst sınırı ile RP analizi.



Şekil 5.70. $K_{\mu 4}$ kontrolörü ile karma üst sınır ile RP analizi.

Şekil 5.70'den $\max_{\omega} \mu_{\Delta p}(M_4) \leq 0.940$ bulunur. D-K tekrarlamasına devam edilmesi halinde $\mu_{\Delta p}(M_4) \leq \bar{\sigma}(D_{\ell 4} M_4 D_{r 4}^{-1})$ üst sınırın daha fazla indirgenemediği görülmüş ve dördüncü D-K tekrarlama ile bitirilmiştir. Tasarlanan $K_{\mu 4}$ kontrolörün tekil değer frekans cevabı Şekil 5.71'de ve μ -sentezine dayalı RC tasarımı için yapılan D-K tekrarlamalarının özeti Tablo 5.3'de verilmiştir.



Şekil 5.71. $K_{\mu 4}$ kontrolörün tekil değer frekans cevabı.

Tablo 5.3. D-K tekrarlama özeti.

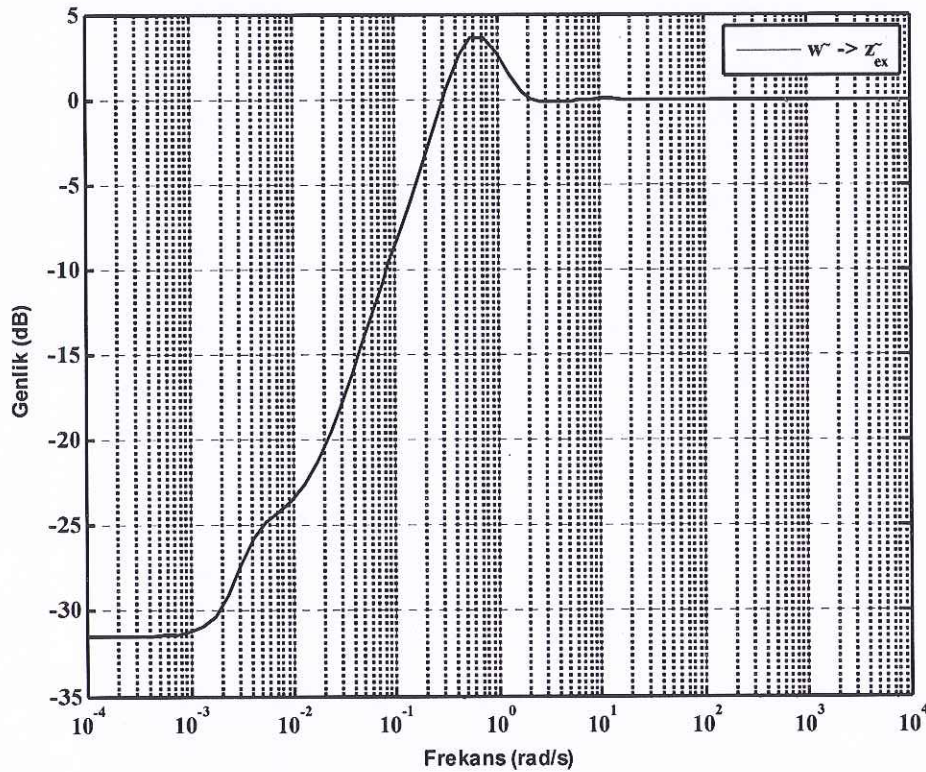
Açıklama	Tekrarlama sayısı (i)			
	1	2	3	4
Kontrolör derecesi	13	23	37	41
Toplam D ölçeklendirme fonksiyonu derecesi	0	10	24	28
γ_{mui}	314.174	1.998	0.970	0.938
$\max_{\omega} \mu_{\Lambda}(M_1)$	9.854	1.247	0.969	0.940

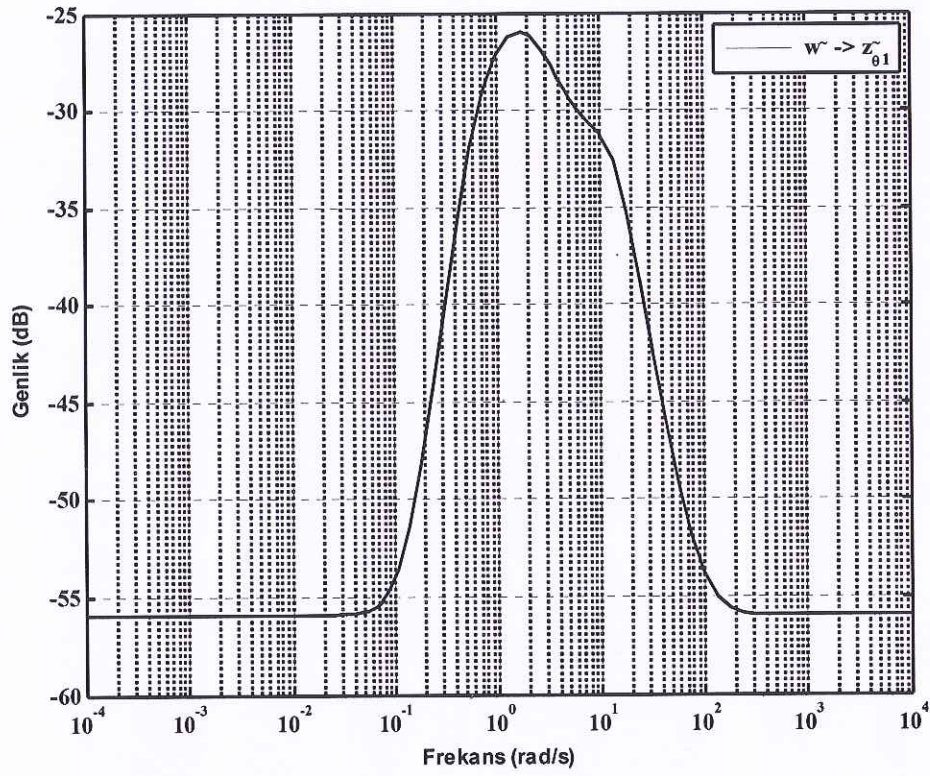
$F_{\ell}(P, K_{mu4})$ kapalı çevrimli sistemin öz değerlerin en küçük ve en büyük gerçel ile kompleks değerleri Tablo 5.4'de verilmiştir.

Tablo 5.4. $F_{\ell}(P, K_{mu4})$ kapalı çevrimli sistemin öz değerleri.

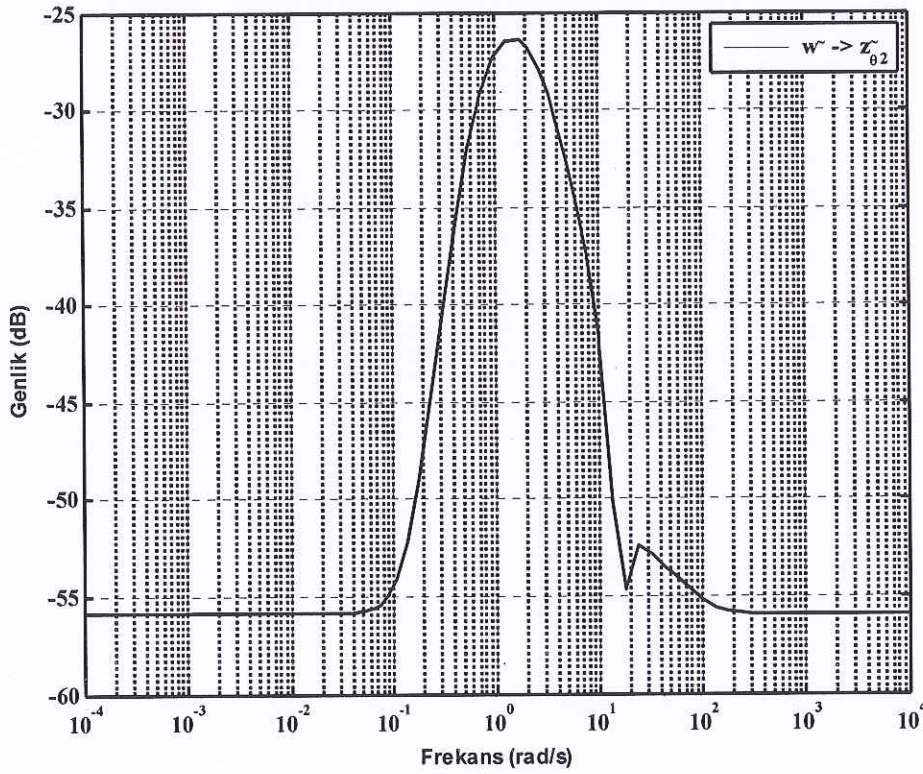
sistemin öz değerleri			
gerçel		kompleks	
en küçük	en büyük	en küçük	en büyük
-10000	-0.00257088	-97.275 ± 5.235 i	-0.00257 ± 0.00248i

G_o genişletilmiş nominal açık çevrim iç bağlantılı model ile K_{mu4} kontrolörden oluşan $T_{z\tilde{w}} = F_{\ell}(G_o, K_{mu4})$ kapalı çevrimli sistemin \tilde{w} bozucu girişlerine karşı arabanın pozisyon ve kolların salınım açılarının tekil değer frekans cevapları Şekil 5.72-5.75'de gösterilmiştir.

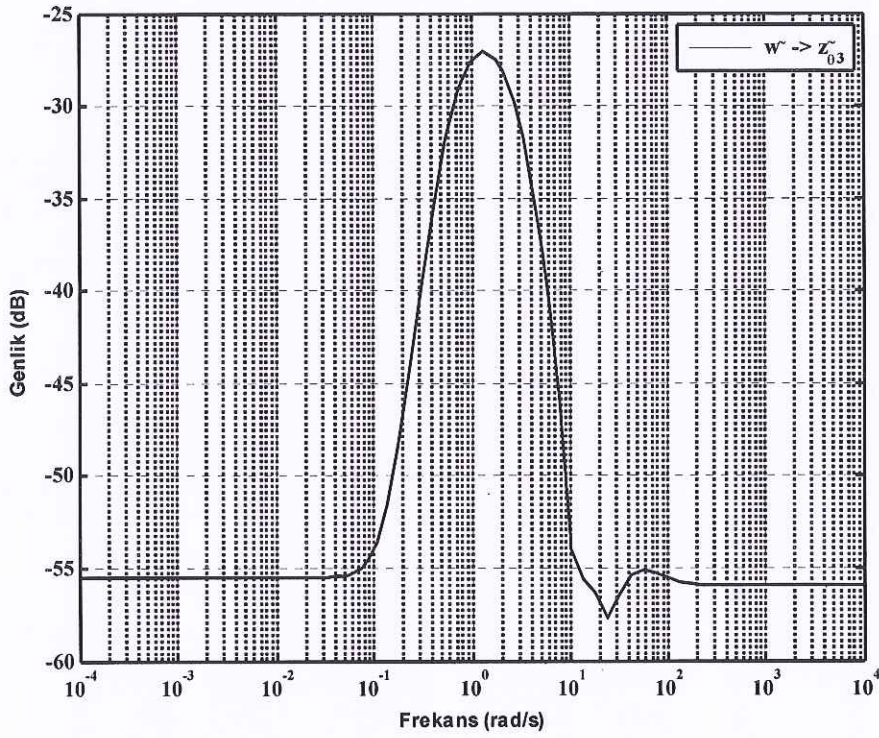
Şekil 5.72. \tilde{w} bozucu girişlerinden \tilde{z}_{ex} araba referans izleme hatasına tekil değeri.



Şekil 5.73. \tilde{w} bozucu girişlerinden \tilde{z}_{01} salınım açısına tekil değeri.

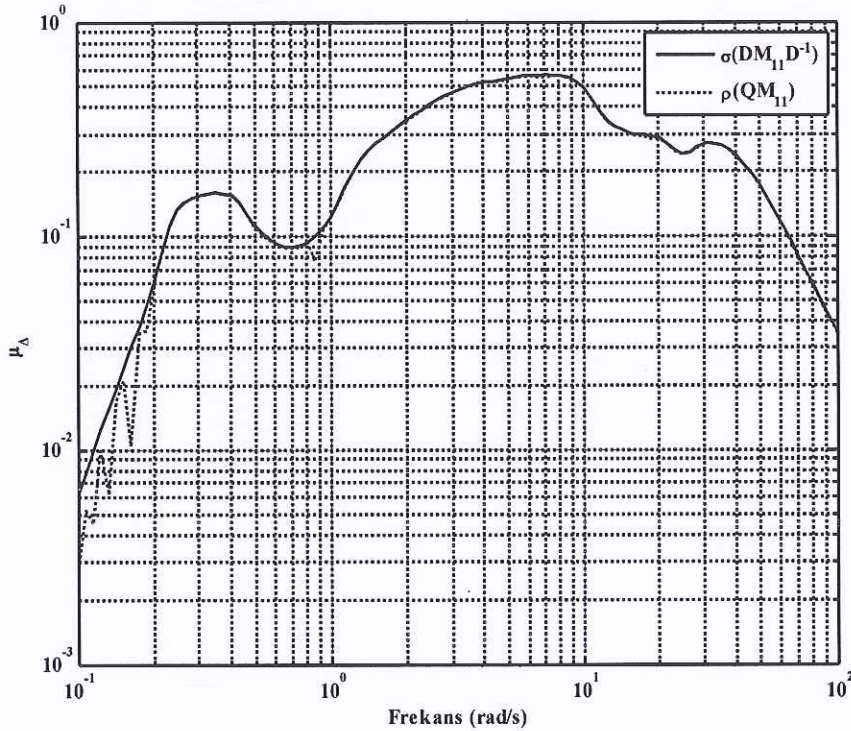


Şekil 5.74. \tilde{w} bozucu girişlerinden \tilde{z}_{02} salınım açısına tekil değeri.



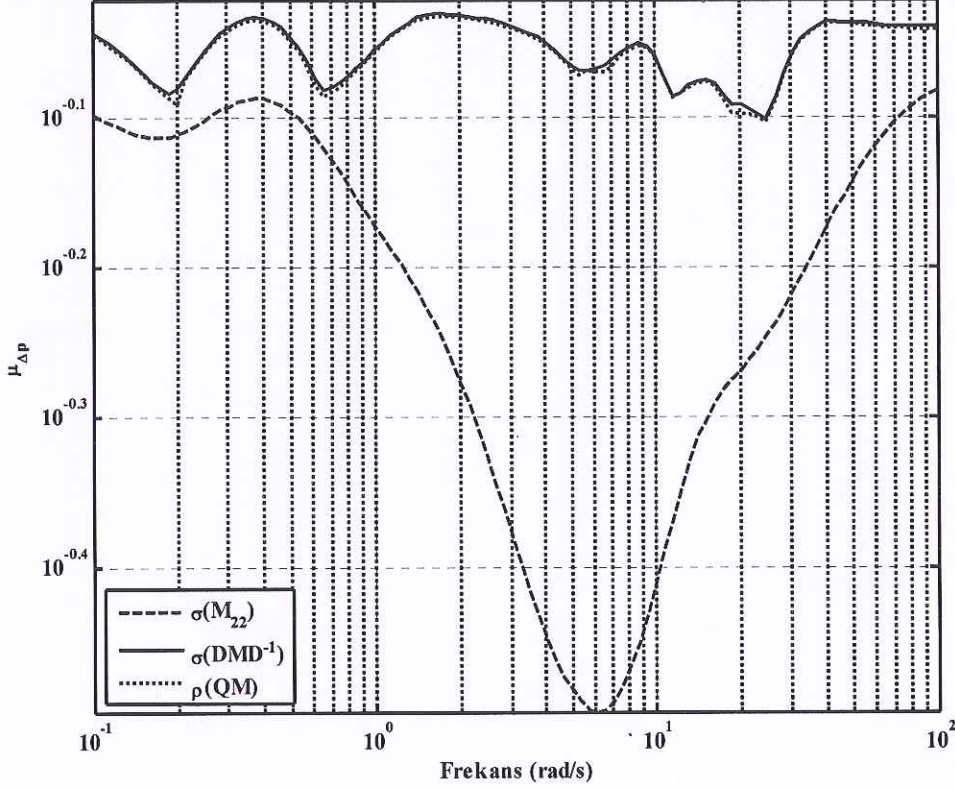
Şekil 5.75. \tilde{w} bozucu girişlerinden \tilde{z}_{03} salınım açısına tekil değeri.

Dördüncü D-K tekrarlama neticesinde elde edilen K_{mu4} kontrolörü ile belirsizlik içeren sisteminden oluşan $M = F_\ell(P, K_{mu4})$ kapalı çevrim transfer fonksiyonu ile RS'in sağlandığı $\max_{Q \in Q_s} \rho(QM_{11}) \leq \mu_\Delta(M_{11}) \leq \inf_{D \in D_s} \sigma(DM_{11}D^{-1})$ alt ve üst sınır dayanıklı kararlılık eğrileri Şekil 5.76'da verilmiştir.



Şekil 5.76. Dayanıklı kararlılık analizi.

Sistemin RP'ın sağlandığı, $\max_{Q \in Q_\Delta} \rho(QM) \leq \mu_{\Delta p}(M) \leq \inf_{D \in D_\Delta} \bar{\sigma}(DMD^{-1})$ alt ve üst RP eğrileri ve sistemin $\bar{\sigma}(M_{22})$ nominal performans eğrisi Şekil 5.77'de verilmiştir.



Şekil 5.77. Dayanıklı performans analizi.

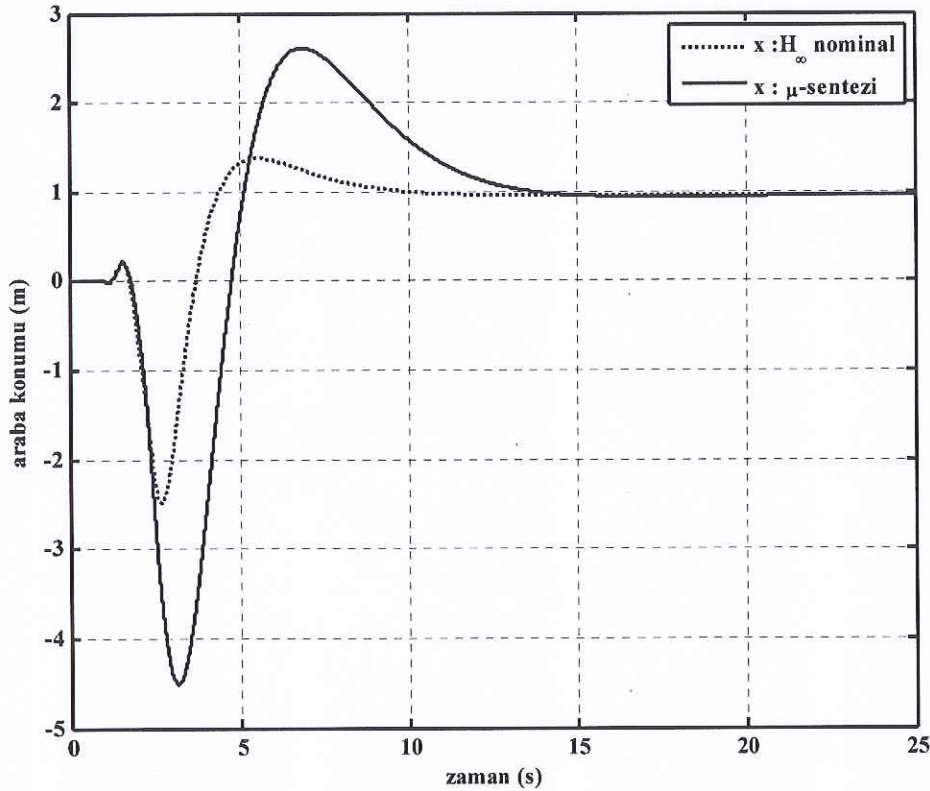
Şekil 5.76'dan RS üst sınır değeri $\max_{\omega} \mu_{\Delta}(M_{11}) \leq 0.5745$ ve Şekil 5.77'den RP üst sınır değeri $\max_{\omega} \mu_{\Delta p}(M) \leq 0.9328$ bulunur. Buna göre tasarlanan $K_{\mu 4}$ kontrolörün kararlılığı $\|\Delta\|_{\infty} \leq 1.7405$ ve performansı $\|\Delta_p\|_{\infty} \leq 1.072$ belirsizlik üst sınır değerlerinde sağladığı bulunur. Özet olarak K_{∞} nominal kontrolör ve $K_{\mu 4}$ μ -sentez tabanlı kontrolörlerinin dayanıklılık analizi sonuçları Tablo 5.5'de verilmiştir.

Tablo 5.5. Dayanıklılık analizi sonuçları.

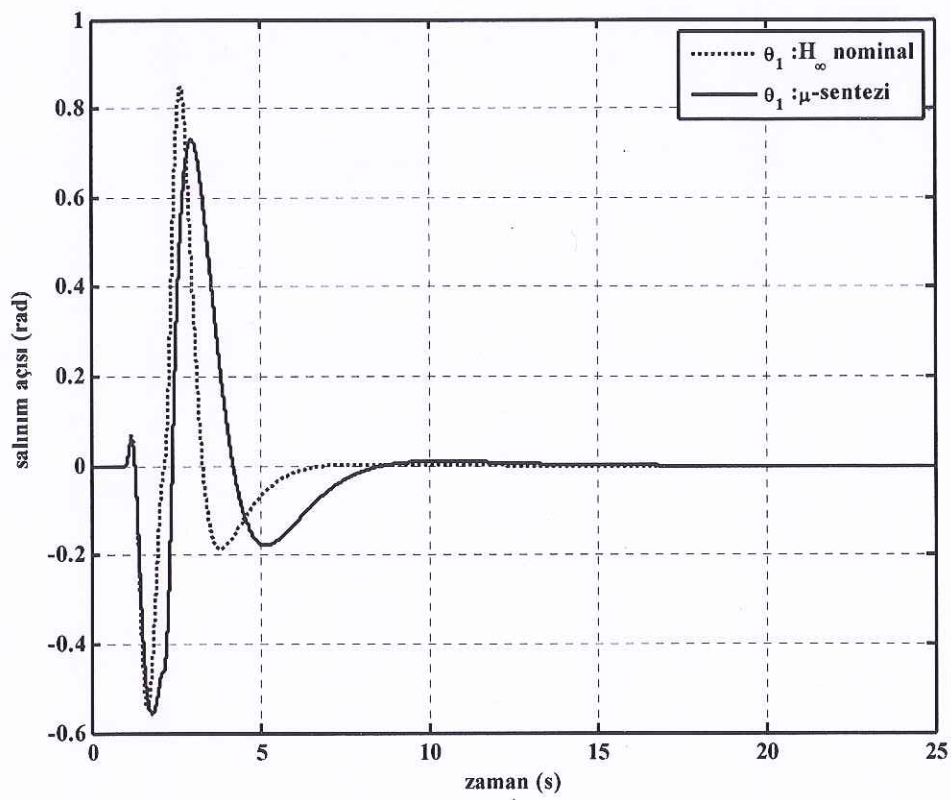
Analiz sonuçları	Dayanıklılık üst sınırı		Belirsizlik üst sınırı	
	RS	RP	RS	RP
Kontrolör	$\max_{\omega} \mu_{\Delta}(M_{11})$	$\max_{\omega} \mu_{\Delta p}(M)$	$\ \Delta\ _{\infty}$	$\ \Delta_p\ _{\infty}$
K_{∞} kontrolör	1.165	1.7876	0.8578	0.559
$K_{\mu 4}$ kontrolör	0.5745	0.9328	1.74	1.072

Tasarlanan K_{∞} nominal ve $K_{\mu 4}$ μ -sentez tabanlı iki dayanıklı kontrolörün tasarım amaçları doğrultusundaki başarımını göstermek için zaman tanım alanında iki farklı durum için simülasyon çalışması yapılmıştır.

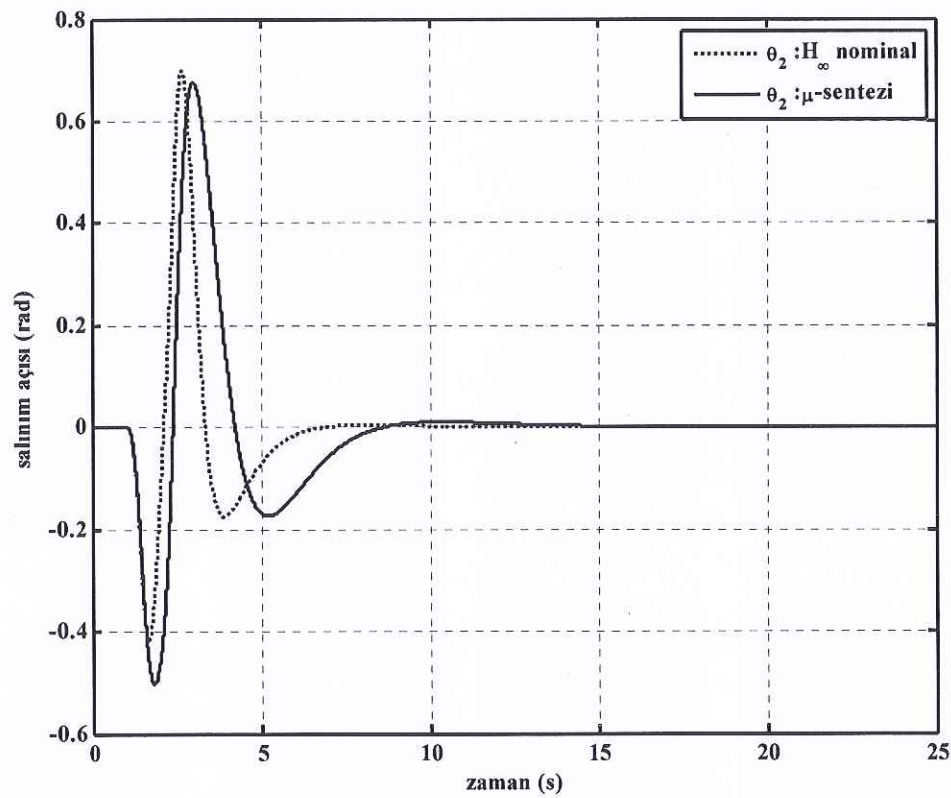
Birinci durum için tüm sarkaç kolları dik konumda dengede iken 3-4 saniye aralığında 100 [N]'luk bozucu tork aynı anda üç kola etki ettirilerek sarkaç kolları tekrar dik konuma getirilmeye çalışılmıştır. Aynı zamanda arabanın verilen $r=1$ [m]'lik referans değerine gitmesi hedeflenmiştir. Her iki dayanıklı kontrolörün kullanımı ile sistemin tüm kollarına etkiyen bozucu torklara karşı araba konumu ve sarkaç salınımlarının zaman tanım alanındaki cevapları ve kontrolörlerin çıkış sinyalleri Şekil 5.78-5.82'de verilmiştir. Bu durumdaki simülasyon çalışmaları 25 saniye içinde gözlenmiştir. Burada esas hedef sarkaç kollarının herhangi bir anda dış bozucuların etkisinde dik konumda tutmanın yanında verilen referans değerine giderken de tüm kolları dik konuma getirmektir.



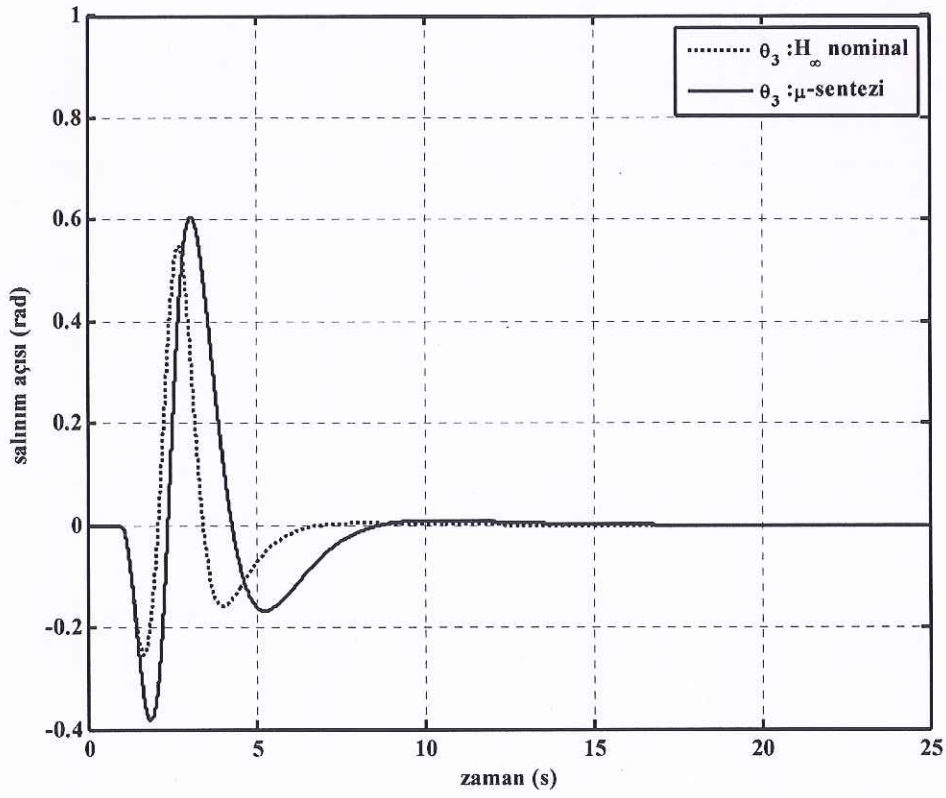
Şekil 5.78. Birinci durum için araba referans konum takibi.



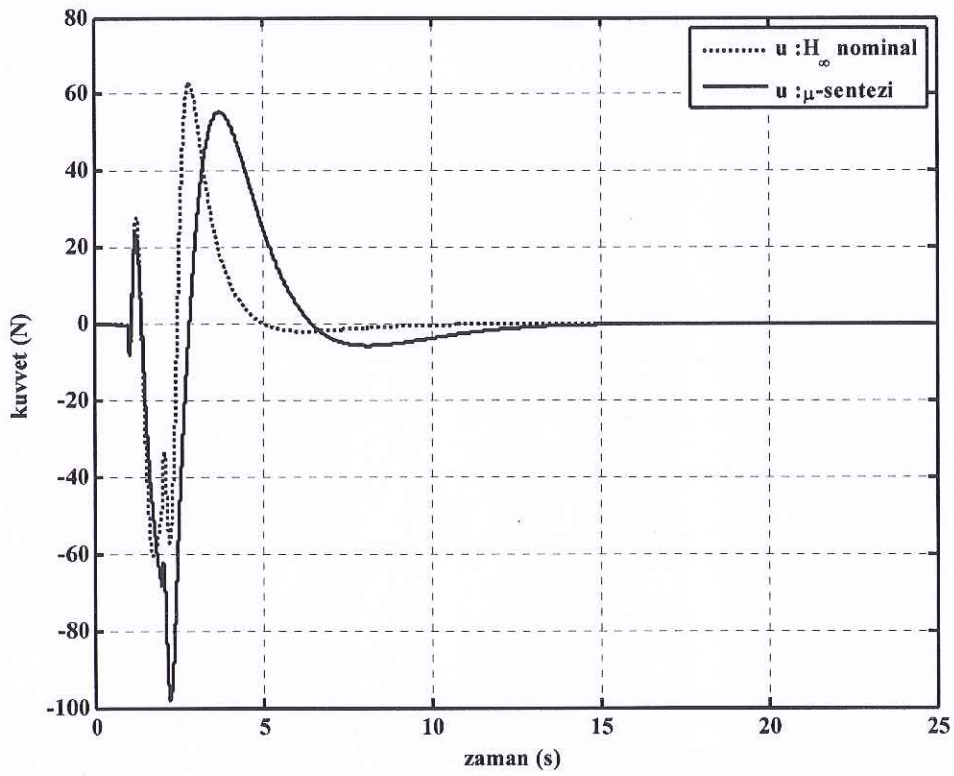
Şekil 5.79. Birinci durum için birinci sarkaç kolunun bozucu torklara karşı zaman cevapları.



Şekil 5.80. Birinci durum için ikinci sarkaç kolunun bozucu torklara karşı zaman cevapları.

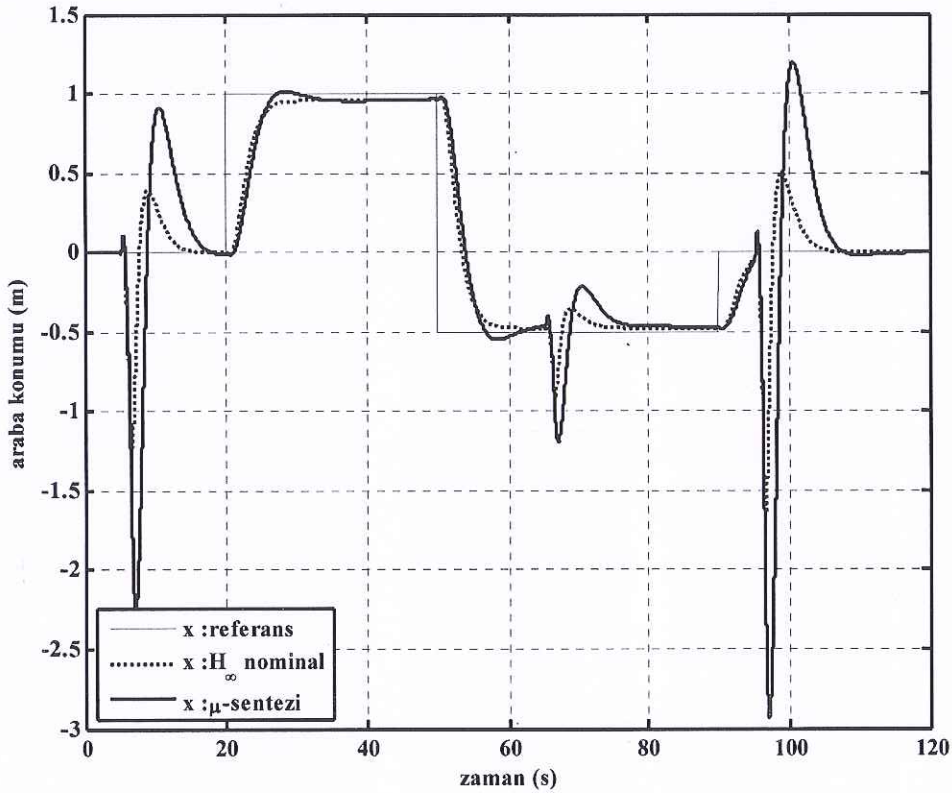


Şekil 5.81. Birinci durum için üçüncü sarkaç kolunun bozucu torklara karşı zaman cevapları.

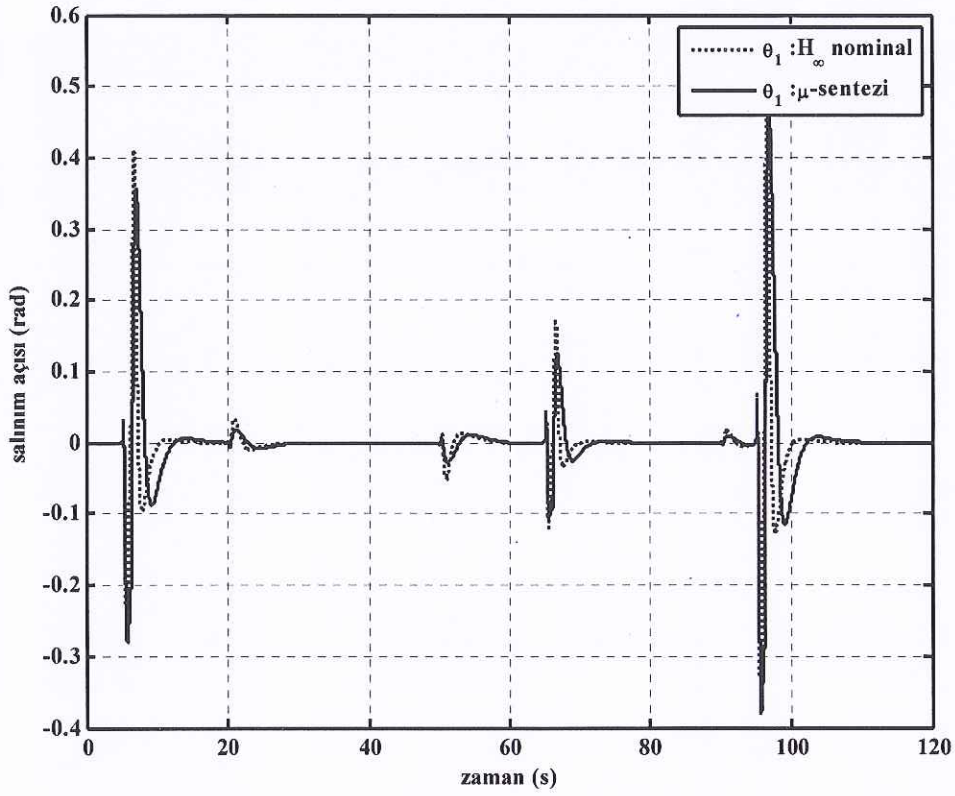


Şekil 5.82. Birinci durum için kontrolörlerin bozucu torklara karşı zaman cevapları.

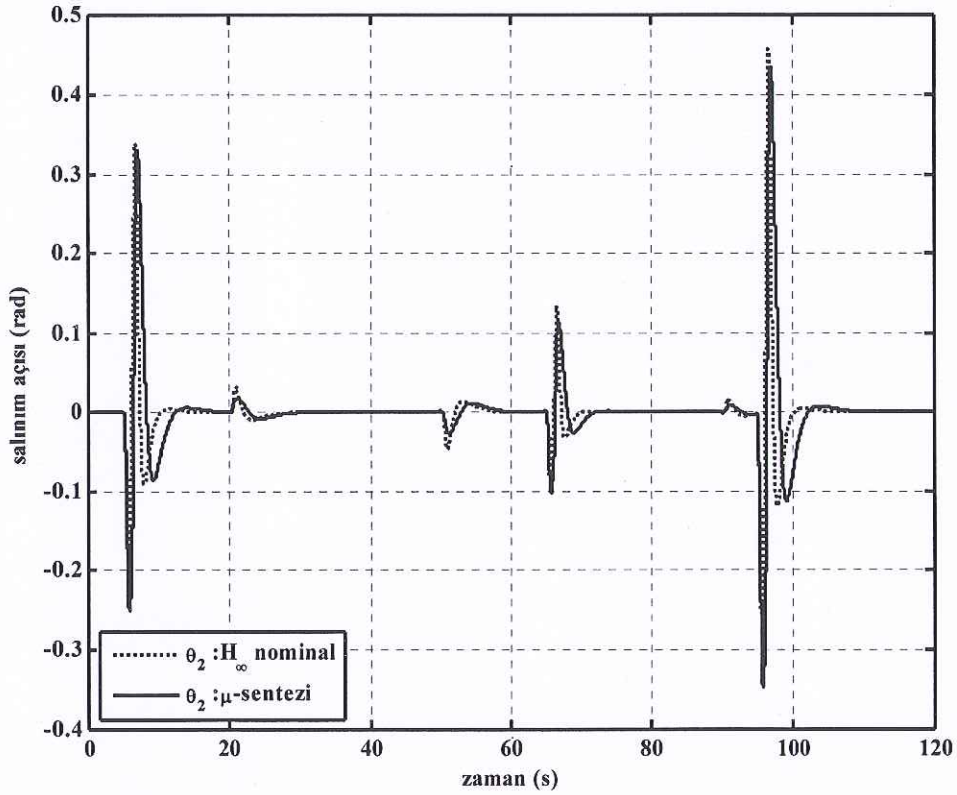
İkinci durumda, birinci durumda olduğu gibi başlangıçta tüm sarkaç kolları dik ve araba sıfır konumunda dengede iken 5-6 saniye aralığında 50 [N]'luk saat yönü tersinde bozucu tork aynı anda üç kola etki ettirilerek sarkaç kolları tekrar dik konuma getirilmeye çalışılmıştır. 20 saniye sonra araba 50 inci saniye içerisinde $r=1$ [m] referans konumuna ardından 80 saniyeye kadar $r=-0.5$ [m] referans değerine ve bu arada 65-66 saniye aralığında 50 [N] saat yönünde ikinci kola bozucu tork etki ettirilmiştir. 80-120 saniye aralığında araba tekrar başlangıç noktasına getirilmeğe çalıştırılırken 95-96 saniye aralığında 50 [N]'luk bir bozucu tork üçüncü sarkaç koluna saat yönü tersinde uygulanmıştır. Bu ikinci durum için her iki dayanıklı kontrolörün bozucu torqlara karşı araba konumu ve sarkaç salınımlarının zaman tanım alanındaki cevapları ve kontrolörlerin çıkış sinyalleri Şekil 5.83-5.87'de verilmiştir. Bu ikinci durumdaki simülasyon çalışmaları 120 saniye için gözlenmiştir. Burada esas hedef birinci durumda olduğu gibi sarkaç kollarının herhangi bir anda dış bozucuların etkisinde dik konumu yanında verilen referans değerlerine giderken de tüm kolların dik konuma getirmektir.



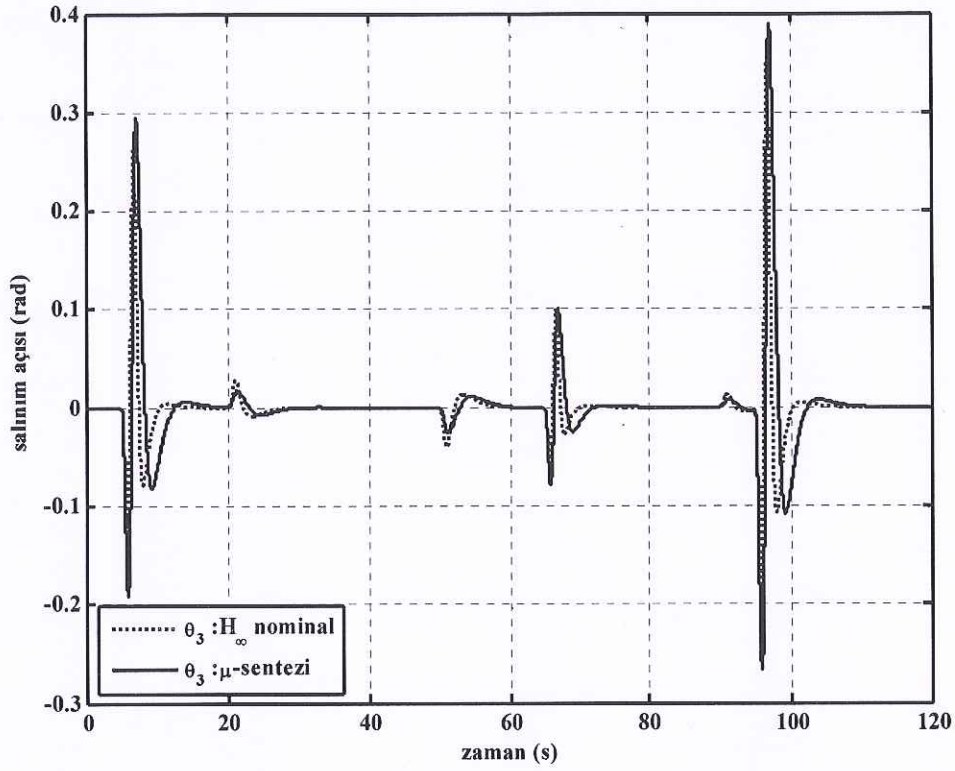
Şekil 5.83. İkinci durum için araba referans konum takibi.



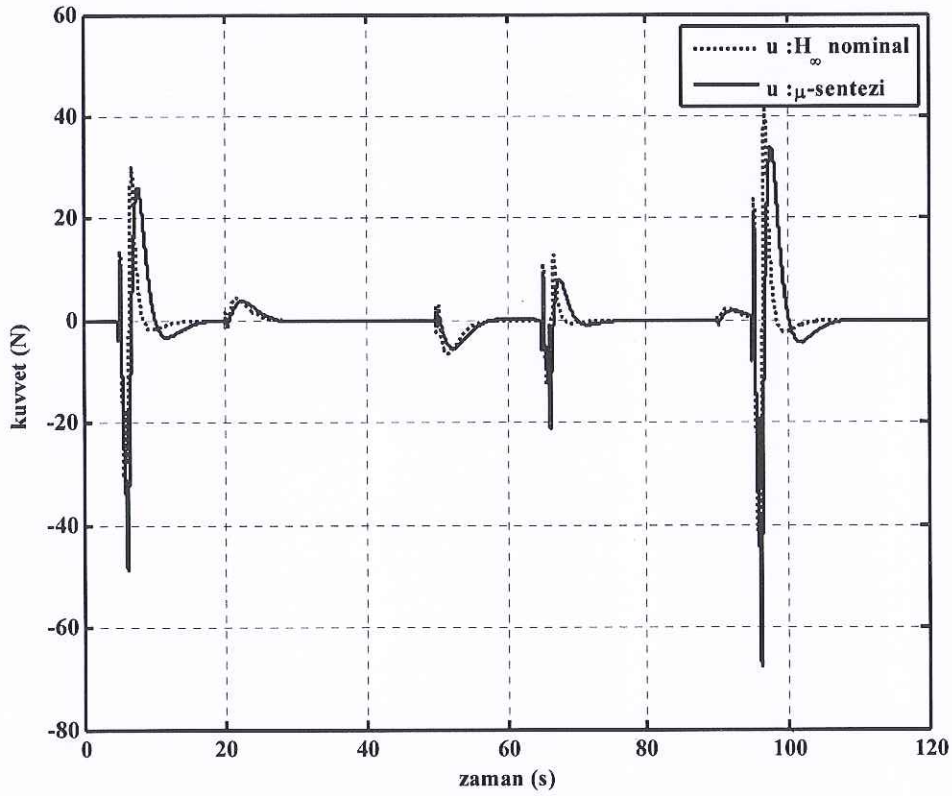
Şekil 5.84. İkinci durum için birinci sarkaç kolunun bozucu torklara karşı zaman cevapları.



Şekil 5.85. İkinci durum için ikinci sarkaç kolunun bozucu torklara karşı zaman cevapları.



Şekil 5.86. İkinci durum için üçüncü sarkaç kolunun bozucu torklara karşı zaman cevapları.



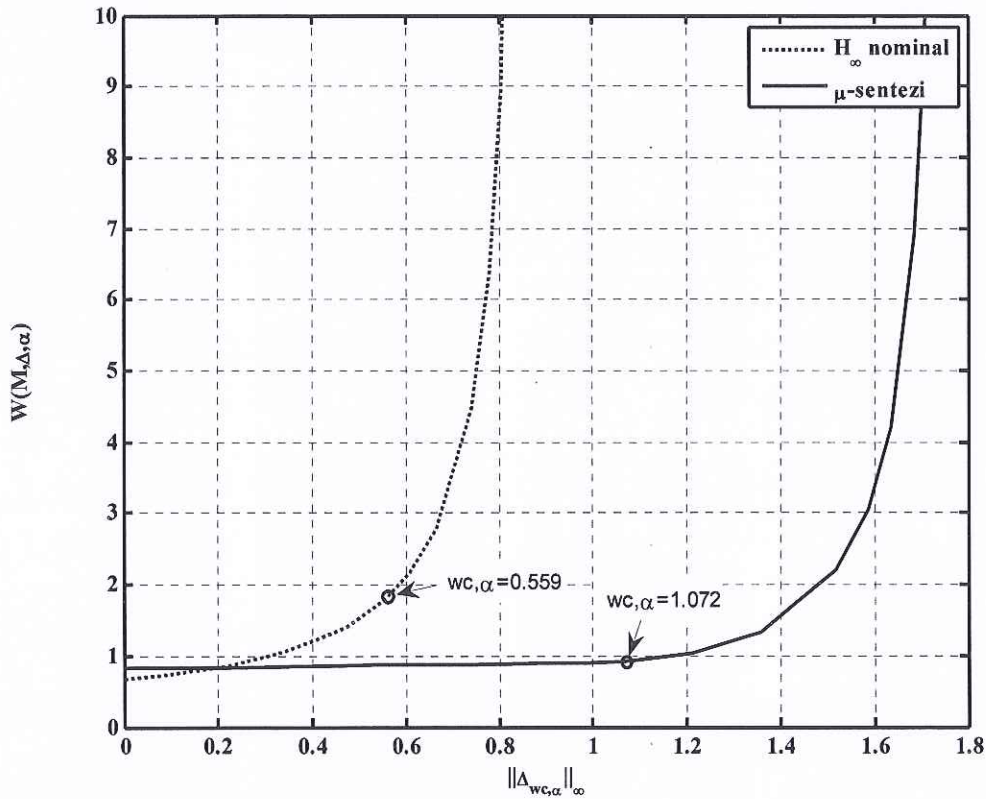
Şekil 5.87. İkinci durum için kontrolörlerin bozucu torklara karşı zaman cevapları.

5.5. En Kötü Durum Performans Analizi

Tasarlanan K_∞ ve $K_{\mu 4}$ kontrolörleri ile oluşturulan kapalı çevrimli sistemlerde, belirsizliklerin artışı karşında sistem performansındaki değişim, performans düşüş eğrisi ile değerlendirilir. $\alpha > 0$ olmak üzere $\|\Delta\|_\infty \leq \alpha$ normla sınırlanmış belirsizlik bloğu ile kapalı çevrimli sistemin en kötü performansı

$$W(M, \Delta, \alpha) = \max_{\substack{\Delta \in \Delta \\ \max \sigma(\Delta) \leq \alpha}} \|F_u(M, \Delta)\|_\infty \quad (5.48)$$

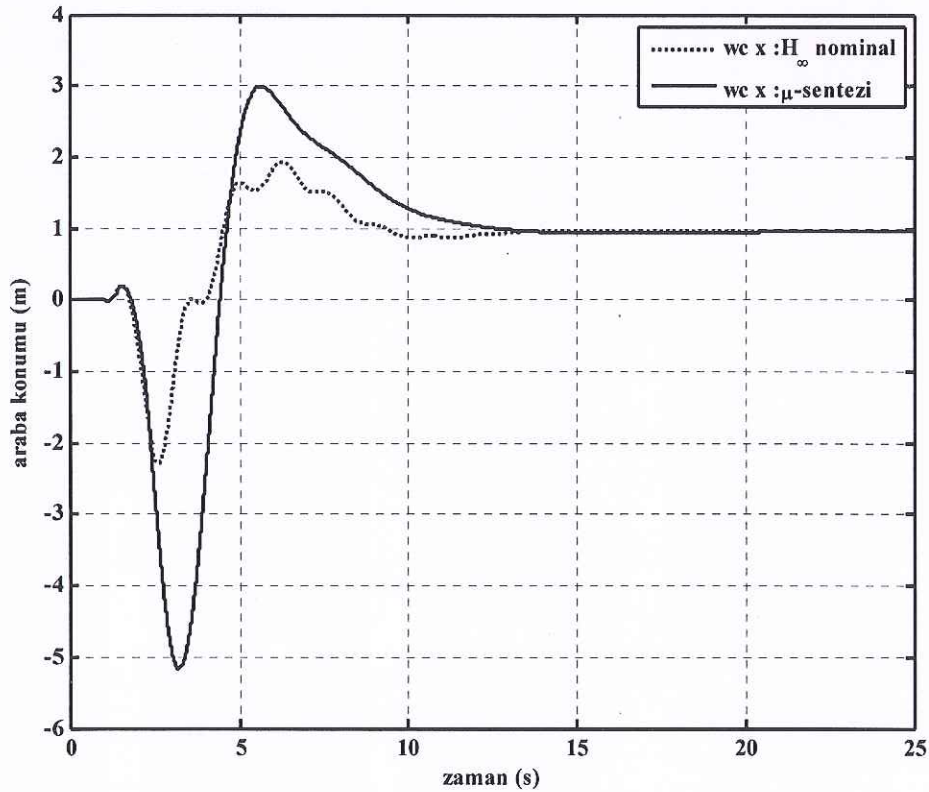
ile ifade edilir. Burada, $\alpha=0.8578$ H_∞ kontrolörü ile kararlılığın bozulduğu belirsizlik en üst sınır değerini ve $\alpha=1.74$ $K_{\mu 4}$ kontrolörü ile kararlılığın bozulduğu belirsizlik en üst sınır değerini kapsayacak şekilde performans değişiminde en üst dayanıklılık performans belirsizlik sınırları H_∞ kontrolörü için $\alpha=0.559$ ve $K_{\mu 4}$ kontrolörü için $\alpha=1.072$ olan $\|\Delta\|_\infty = \|\Delta_{wc, \alpha}\|_\infty$ en kötü durum belirsizlik bloğu ile tanımlanır. α 'nın artışına bağlı olarak K_∞ ve $K_{\mu 4}$ kontrolörleri ile oluşturulan $F_u(F_\ell(P, K_\infty), \Delta_{wc, \alpha})$ ve $F_u(F_\ell(P, K_{\mu 4}), \Delta_{wc, \alpha})$ belirsizlik içeren kapalı çevrimli sistemlerdeki performans düşüşü Şekil 5.88'de gösterilmiştir.



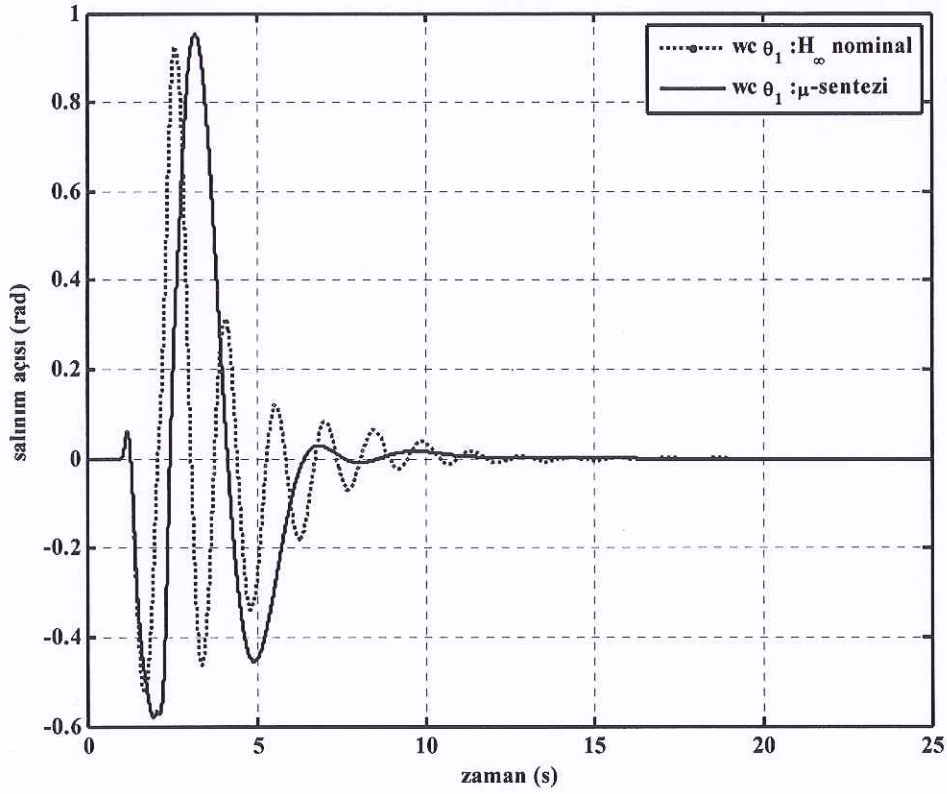
Şekil 5.88. Performans düşüş eğrisi.

Şekil 5.88'den $\|\Delta\|_{\infty}$ büyüklüğünün artışına bağlı olarak K_{∞} kontrolörü ile oluşturulan geri beslemeli sistemde performansın hızla düştüğü görülür. Diğer taraftan $K_{\mu 4}$ kontrolörün artan $\|\Delta\|_{\infty}$ büyüklüğüne rağmen sistemde performansı garanti altına aldığı görülür.

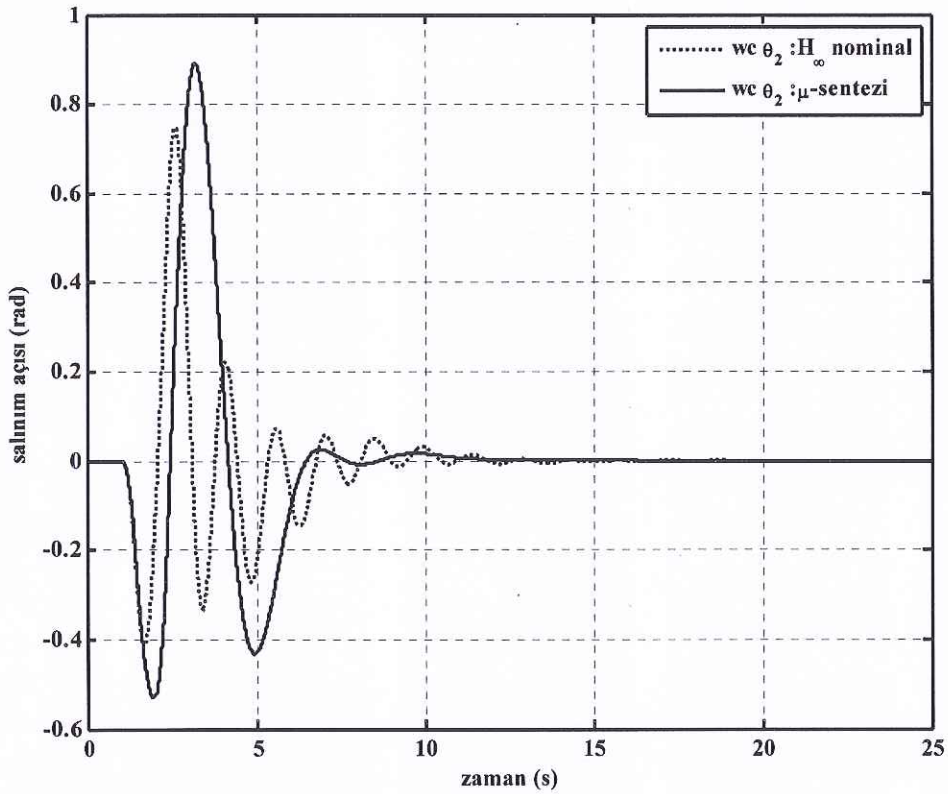
Tablo 5.5'den RP'nin sağlandığı belirsizlik üst sınır değerleri kullanılarak en kötü durum $\|\Delta_{wc,0.559}\|_{\infty}$ ve $\|\Delta_{wc,1.072}\|_{\infty}$ belirsizlik blokları ile sistemin tüm kollarına etkiyen bozucu torklara ve değişen araba referans konumlarına karşı sarkaç salınımlarının ve tahrik kuvvetlerin her iki simülasyon durumu için zaman cevapları Şekil 5.89-5.98'de verilmiştir.



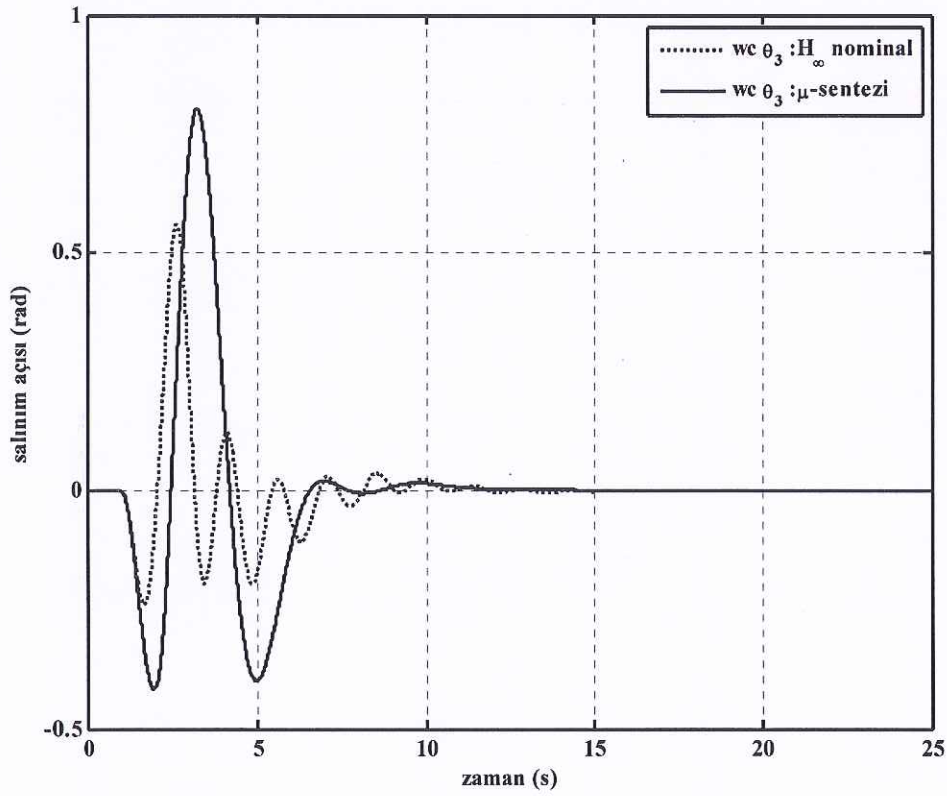
Şekil 5.89. Birinci durum için en kötü durumda araba referans konum takibi.



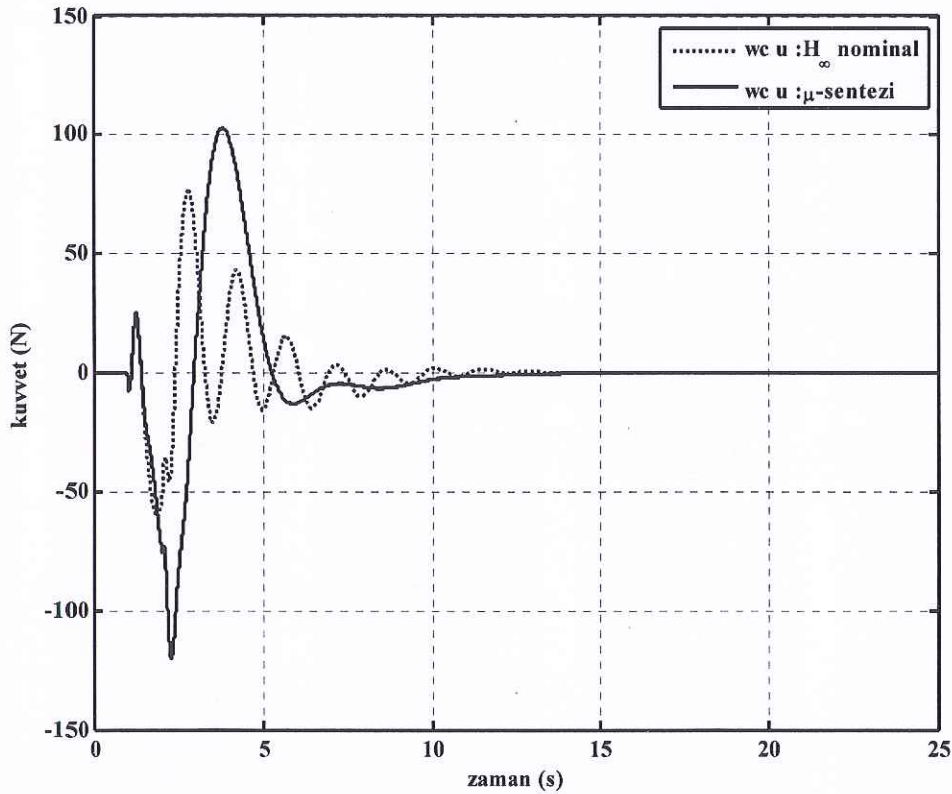
Şekil 5.90. Birinci durum için en kötü durumda b birinci sarkaç kolunun zaman cevapları.



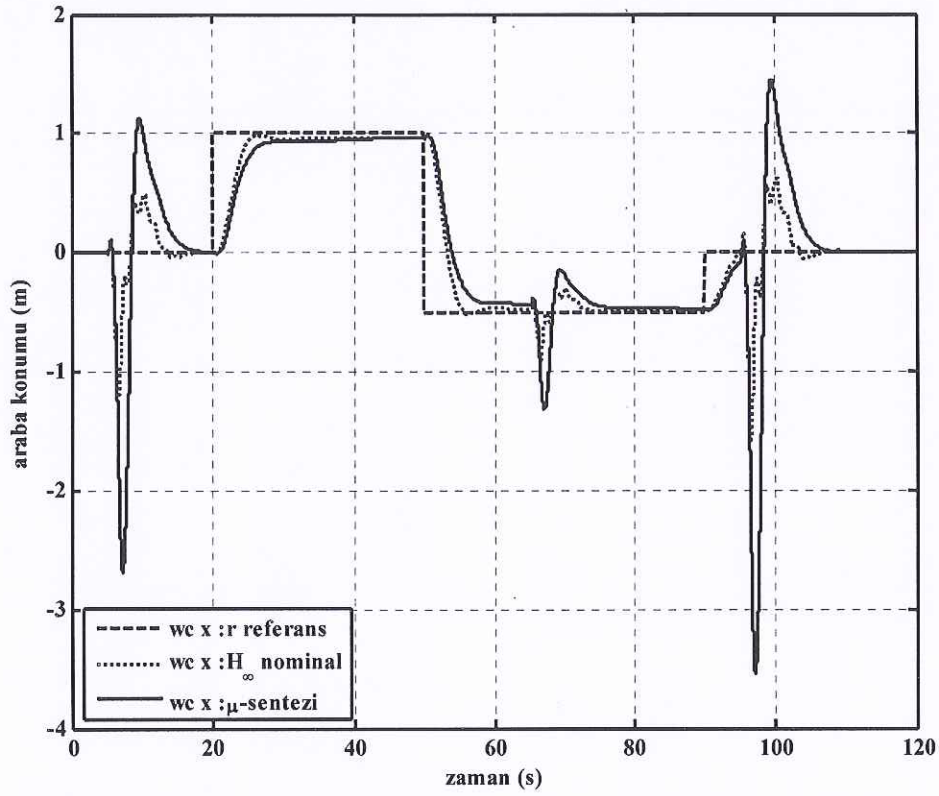
Şekil 5.91. Birinci durum için en kötü durumda ikinci sarkaç kolunun zaman cevapları.



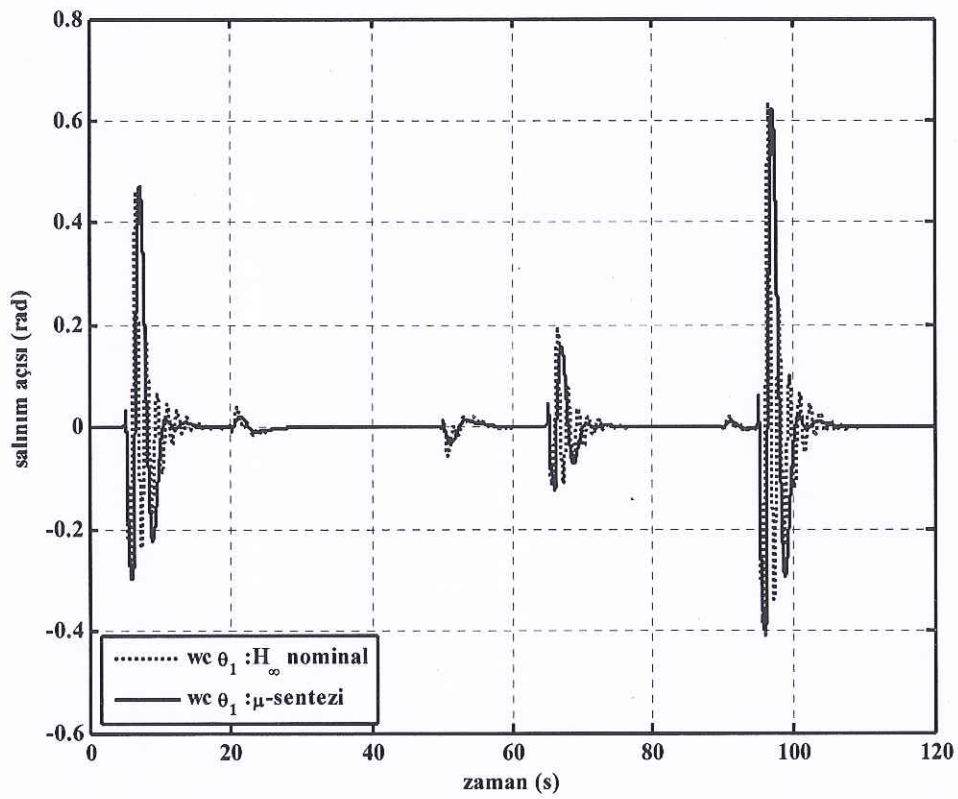
Şekil 5.92. Birinci durum için en kötü durumda üçüncü sarkaç kolunun zaman cevapları.



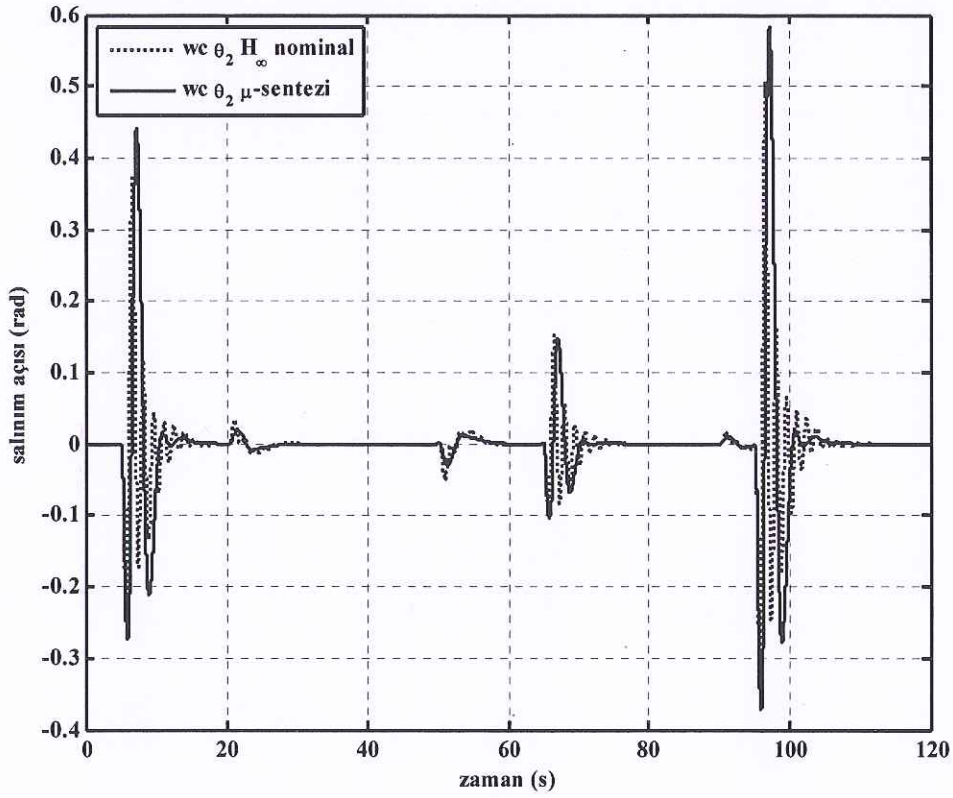
Şekil 5.93. Birinci durum için en kötü durumda kontrolörlerin zaman cevapları.



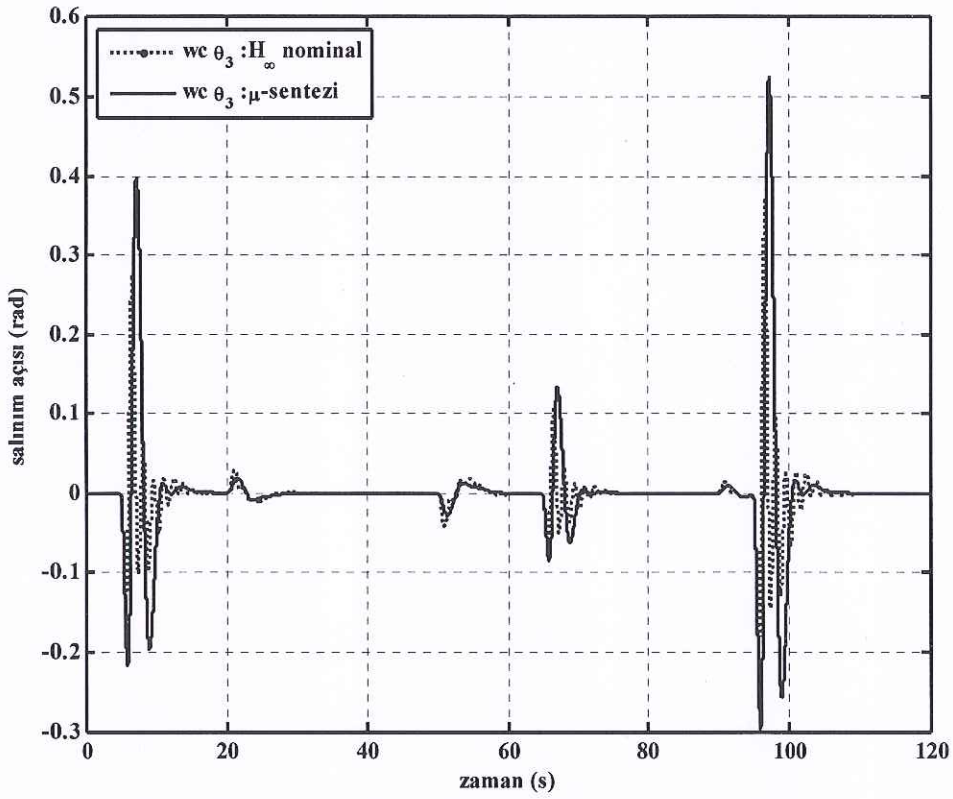
Şekil 5.94. İkinci durum için en kötü durumda araba referans konum takibi.



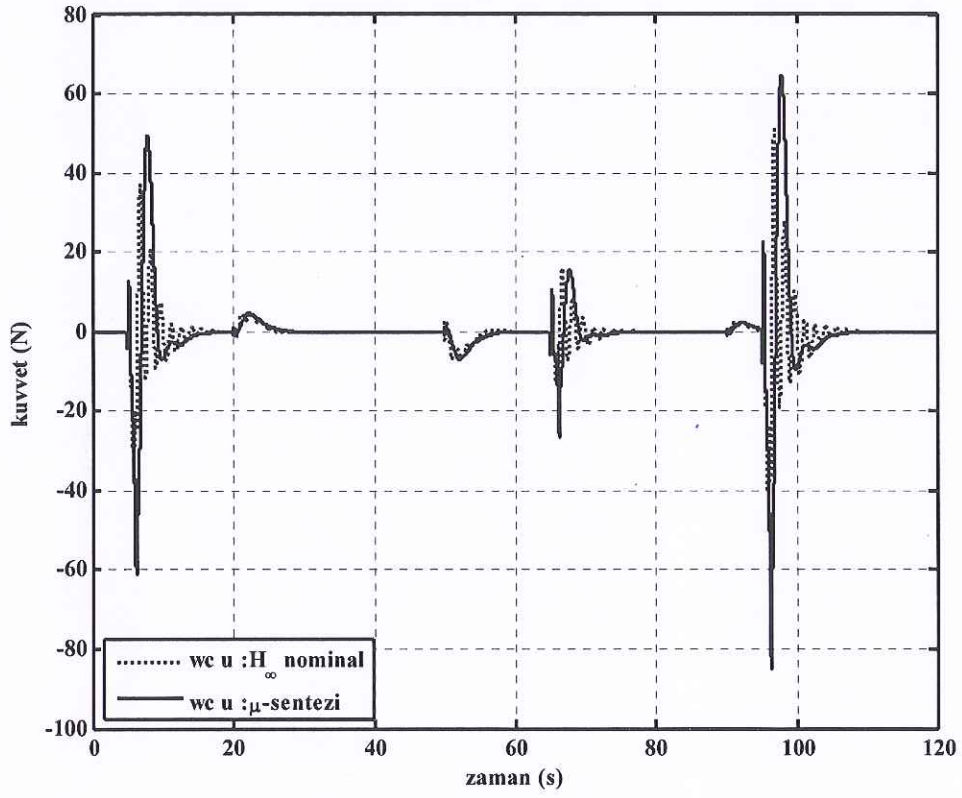
Şekil 5.95. İkinci durum için en kötü durumda üçüncü sarkaç kolunun zaman cevapları.



Şekil 5.96. İkinci durum için en kötü durumda ikinci sarkaç kolunun zaman cevapları.



Şekil 5.97. İkinci durum için en kötü durumda üçüncü sarkaç kolunun zaman cevapları.



Şekil 5.98. İkinci durum için en kötü durumda kontrolörlerin zaman cevapları.

BÖLÜM 6. SONUÇLAR

Gerçek sistem ile kontrolör tasarımında kullanılan sistem modeli arasındaki farklardan kaynaklanan belirsizlikler kontrol sisteminin kararsızlığına ve performans düşüşüne neden olacağından sistemi olası belirsizliklere dayanıklı kılacak kontrolör tasarımı önem kazanmaktadır.

Bu tezde, sistemdeki modelleme hataları ve çevrim içi ölçülemeyen ve zamanla değişen parametrelerin belirsizlikleri etkisi altında ve sistem cevabına olumsuz yönde etki eden bozucu sinyallerin varlığı göz önünde bulundurularak kuramsal çalışma ve zaman ve frekans tanım alanında simülasyon çalışmaları yapılmıştır.

Doğrusal olmayan dört serbestlik dereceli üç kollu ters sarkaç serbestlik derecesinin altında tek bir tahrik kuvveti ile hareket ettirilen sistem için sürtünme parametreleri ve salınım açıları ölçüm değişimine duyarlı iki dayanıklı kontrolörün tasarım amaçları doğrultusundaki başarısını göstermek için zaman tanım alanındaki simülasyon çalışmaları, nominal sistem ve belirsizliklerin etkin olduğu en kötü durumda olmak üzere iki farklı durum için yapılmış sonuçlar karşılaştırmalı olarak değerlendirilmiştir.

Birinci durumda, sarkaç kollarına etki eden bozucu büyüklüğe karşın arabanın sarkaç kollarının dik konuma getirilmesi aynı zamanda verilen bir referans değerine arabanın gitmesi hedeflenmiştir. Elde edilen sonuçlar değerlendirildiğinde, ve H_∞ en uygun kontrol metoduna tabanlı nominal ve μ -sentez tabanlı dayanıklı kontrolörlerin sarkaç açılarını dengelemede birbirlerine yakın cevaplar verdiği, arabanın referans takibi açısından bakıldığında ise H_∞ nominal kontrolörün az aşım ve kısa oturma zamanı açısından daha iyi sonuçlar verdiği görülmüştür.

İkinci durumda sarkaç kolları gelişi güzel bozucu büyüklüklerine maruz bırakılmış ve aynı şekilde arabanın konumu değiştirilerek sistemin kararlılığı ve performansı için simülasyon çalışmaları yapılmıştır. Elde edilen sonuçlar değerlendirildiğinde, birinci duruma benzer sonuçlar izlenmiştir.

Nominal sistem kullanılarak elde edilen yukarıdaki sonuçlar, aynı şartlarda belirsizliğin etkin olduğu en kötü durumda simülasyonu yapılarak elde edilen sonuçlarla karşılaştırıldığında daha sağlıklı sonuçlara ulaşmak mümkün olmuştur. Her iki durumda, H_∞ en uygun kontrol tabanlı nominal kontrolörle, kapalı çevrimli sistemde performansın bozulduğu en kötü durum belirsizliğinin oluşabilecek belirsizlik sınırının altında olmasına rağmen, en kötü durumda sarkaç kollarına etki eden bozucu etkilere karşı kolları dengeye getirmekte zorlandığı salınımların fazla olduğu görülmüştür. Diğer yandan olası belirsizlik sınırının üstünde de sistem performansını sağlayabilen μ -sentez tabanlı dayanıklı kontrolör ile yapılan en kötü durum simülasyon sonuçlarının nominal sistemin cevaplarına yakın sonuçlar verdiği görülmüştür.

Simülasyon ortamında, üç kollu ters bir sarkaç için dış bozucu sinyallere karşı μ -sentez tabanlı dayanıklı kontrolün kararlılığı ve performansının H_∞ tabanlı nominal kontrolöre göre daha üstün olduğu, dış bozucuların etkisine karşı sistemin performansını iyileştirdiği, dayanıklı kararlılığının ve dayanıklı performans sınırlarının büyük olduğu bulunmuştur.

Parametre değişimlerine göre μ -sentez tabanlı kontrolörün; daha geniş aralıktaki belirsizliklere karşı daha güvenli olduğu görülmüştür. Her iki kontrolörün zaman tanım alanındaki cevaplardan yaklaşık olarak aynı oturma zamanında kolları denge durumuna getirdiği gözlenmiştir. Frekans cevaplarından her iki dayanıklı kontrolör yaklaşık olara aynı cevabı vermiştir. Elde edilen simülasyon sonuçları her iki kontrolörün üçlü ters sarkacın dengelenmesinde başarılı olduğunu göstermiştir.

Bu gözlem ve elde edilen veriler ışığında, bu çalışmada uygulanan iki kontrolör tasarımının gerçek zaman uygulanmasında yararlı olacağı düşünülebilir.

KAYNAKLAR

- [1] OGATA, K. , “Modern Control Engineering”, 3rd Edition, Prentice-Hall Inc., 1997.
- [2] KUO, B. C., “Otomatik Kontrol Sistemleri”, Çeviren ve Uyarlayan: Atilla Bir, Literatür Yayıncılık, Yedinci Basım, İstanbul, 1999.
- [3] ZHOU, K., and DOYLE, J. C., “Essentials of Robust Control”, Prentice-Hall Inc., 1998.
- [4] BLAKELOCK, J. H., Automatic Control of Aircraft and Missiles, John Wiley & Sons Inc., 1965.
- [5] LEE, H. C., CHOI, Y. S., and CHOI, J. W., “Autopilot Design for Agile Missile Using Time-Varying Control Technique”, 16th IFAC Symposium on Automatic Control in Aerospace, Saint-Petersburg, Vol. 2, pp. 103-108, 2004.
- [6] GOOGWIN, G. C., “A Brief Overview of Nonlinear Control”, Centre for Integrated Dynamics and Control, Department of Electrical and Computer Engineering, The University of Newcastle, Australia, 2002.
- [7] HELTON, J. W., and JAMES, M. R., “Extending H_{∞} Control to Nonlinear Systems”, Bulletin of the American Mathematical Society, Vol. 38, No. 1, pp. 93-96, 2000.
- [8] LIU, R., “Nonlinear Control of Electro-Hydraulic Servo-systems: Theory and Experiment”, MSc. Thesis, University of Illinois at Urbana Champaign, 1998.
- [9] HARKEGAR, O., “Backstepping and Control Allocation with Applications to Flight Control”, PhD. Thesis, Linköping University, Sweden, 2003.
- [10] AGUIAR, A. P., HESPANHA, J. P., and KOKOTOVIC, P. V., “Path-Following for Non-Minimum Phase System Removes Performance Limitations”, Center for Control Engineering and Computation, University of California, Santa Barbara, 2004.
- [11] HARKEGAR, O., “Backstepping Designs for Aircraft Control-Where is There to Gain?”, Working Report, Linköping University, Sweden, 2001.

- [12] VUILMET, C., "A MIMO Backstepping Control with Acceleration Feedback for Torpedo", 38th Southeastern Symposium on System Theory, Tennessee Technological University, Cookeville, pp.157-162, 2006.
- [13] DAMIANO, A., GATTO, G. L., MARONGIU, I., and PISANO, A., "Second-Order Sliding-Mode Control of DC Drives", IEEE Transactions on Industrial Electronics, Vol. 51, No. 2, pp. 364-373, 2004.
- [14] THUHRAL, A., and INNOCENTI, M., "A Sliding Mode Missile Pitch Autopilot Synthesis for High Angle of Attack Maneuvering", IEEE Transactions on Control Systems Technology, Vol. 6, No. 3, pp. 359-371, 1998.
- [15] XING, G. Q., and BAINUM, P. M., "H-infinity Robust Controller Design and Comparison with LQG, PID Controllers for an Expandable Launch Vehicle", AIAA/AAS Astrodynamics Conference, pp.183-191, San Diego, CA, 1996.
- [16] ELISANTE, E., RANGAIAH, G. P., and PALANKI, S., "Robust Controller Synthesis for Multivariable Nonlinear Systems with Unmeasured Disturbances", Chemical Engineering Science, Elsevier, Vol. 59, pp. 977-986, 2004.
- [17] PASSINO, K. M., "Intelligent Control: an Overview of Techniques", Department of Electrical Engineering, The Ohio State University, 2001.
- [18] ÖZKAN, B., Dynamic Modeling, Guidance, and Control of Homing Missiles, Ph.D. Thesis, Middle East Technical University, Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara, 2005.
- [19] LIN, C. L., and SU, H. W., "Intelligent Control Theory in Guidance and Control System Design: An Overview", National Science Council ROC(A), Vol. 24, No. 1, pp. 15-30, 2000.
- [20] KIM, K., The Control of Nonlinear Nonminimum Phase Systems, Coordinate Systems Laboratory Technical Report, Electrical and Computer Engineering, University of Illinois at Urbana-Champaign, 2000.
- [21] SHTESSEL, Y. B., and SHKOLNIKOV, I. A., "Non-minimum Phase Tracking on Sliding Modes", Department of Alabama in Huntsville, 1998.
- [22] CALISE, A. J., SHARMA, M., and CORBAN, J. E., "An Adaptive Autopilot Design for Guided Munitions", AIAA, 2000.
- [23] CHEN, G., and YING, H., "On the Stability of Fuzzy PI Control Systems", Institute of Space Systems Operations, University of Houston, 1993.
- [24] WHITE, B. A., BLUMEL, A. L., and HUGHES, E. J., "A Robust Fuzzy Autopilot Design Using Multi-Criteria Optimization", International Journal of Fuzzy Systems, Vol. 2, No. 2, pp. 129-138, 2000.

- [25] SUTTON, R., and CRAVEN, P. J., "A Fuzzy Autopilot Design Approach That Utilizes Non-Linear Consequent Terms", *Journal of Marine Science and Technology*, Vol. 9, No. 2, pp. 65-74, 2001.
- [26] FRANCIS, B. A., "A Course in H_∞ Control Theory", No.88, *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, Springer-Verlag, 1987.
- [27] FRANCIS, B. A., and DOYLE, J. C., "Linear Control Theory with an H_∞ Optimality Criterion", *SIAM Journal on Control and Optimization*, Vol. 25, No. 4, pp. 815-844, 1987.
- [28] DOYLE, J. C., Glover, K., KHARGONEKAR, P. P., and FRANCIS, B. A., "State-space Solutions to Standard H_2 and H_∞ Control Problems", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 34, No. 8, pp. 831-847, 1989.
- [29] HUNG, Y. S., "H Optimal Control Part I, II", *International Journal of Control*, Vol. 49, No. 4, pp. 1291-1359, 1989.
- [30] GREEN, M., Glover, K., KHARGONEKAR, P. P., and DOYLE, J. C., "A J-Spectral Factorization Approach to H_∞ Control", *SIAM Journal on Control and Optimization*, Vol. 28, No. 6, pp. 1350-1371, 1989.
- [31] DOYLE, J., FRANCIS, B., and TANNENBAUM, A., "Feedback Control Theory" Macmillan Pub. Co., New York, U.S.A., 1990.
- [32] BOYD, S., EL GHAOU, L., FERON, E., and BALAKRISHNAN, V., "Linear Matrix Inequalities in Systems and Control Theory", 15, SIAM, 1994.
- [33] NESTTEROV, Y., and NEMIROVSKI, A., "A General Approach to Polynomial-time Algorithms Design for Convex Programming" Technical Report, Cent. Econ., and Math. Inst., USSR Acad. Sci., Moscow, 1988.
- [34] GAHINET, P., and APKARIAN, P., "A Linear Matrix Inequality Approach to H_∞ Control", *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 4, pp. 421-448, 1994.
- [35] GAHINET, P., NEMIROVSKI, A., LAUB, A.J. and CHILALI, M., "The LMI Control Toolbox" Proceeding on the IEEE Conference on Decision and Control, pp. 2038-2041, 1994.
- [36] CHILALI, M., and GAHINET, P., " H_∞ Design with Pole Placement Constraints; LMI Approach", *IEEE, Transactions on Automatic Control*, 41, 3, pp. 358-367, 1996.
- [37] CHILALI, M., GAHINET, P., and SCHERER, C., "Multi objective Output-Feedback Control via LMI Optimization", *IEEE*, Proceeding on IFAC 13th Triennial World Congress, San Francisco, USA, 1996.

- [38] ZAMES, G., "On the Input-Output Stability of Time-Varying Nonlinear Feedback Systems Part I: Conditions Derived Using Concepts of Loop Gain, Conicity, and Positivity", IEEE, Transactions on Automatic Control, Vol.11, pp. 228-238, 1966.
- [39] ZAMES, G., "On the Input-Output Stability of Time-Varying Nonlinear Feedback Systems Part II: Conditions Involving Circles in the Frequency Plane and Sector Nonlinearities", IEEE, Transactions on Automatic Control, Vol.11, pp. 465-476, 1966.
- [40] SAFONOV, G. M., "Stability and Robustness of Multivariable Feedback Systems", MIT Press Boston, Massachusetts, 1980.
- [41] DOYLE, J., "Robustness of Multi-loop Linear Feedback Systems", Honeywell System and Research Center, 1979.
- [42] SILJAK, D. D., "Parameter Space Methods for Robust Control Design: A Guided Tour", IEEE, Transactions on Automatic Control, Vol.34, No.7, pp. 674-688, 1989.
- [43] DOYLE, J., "Analysis of Feedback Systems with Structured Uncertainties", IEEPROC, Vol.129, Pt. D, No.6, 1982.
- [44] STEIN, Q., "Beyond Singular Values and Loop Shapes", Honeywell System and Research Center, 1985.
- [45] DOYLE, J., "Structured Uncertainty in Control System Design", IEEE, Proceedings of 24th Conference on Decision and Control, 1985.
- [46] SAFONOV, G. M., "Tight Bounds on the Response of Multivariable Systems with Component Uncertainty", Proceeding of Annual Allerton Conference on Communication, Control and Computing, pp. 451-460, 1999.
- [47] PACKARD, A., FAN M., and DOYLE J., "A Power Method for the Structured Singular Value", IEEE, Proceedings of the 27th Conference on Decision and Control, Vol.3, pp. 2132-2137, 1988.
- [48] GASTON R., and SAFONOV, G. M., "Exact Calculation of the Multi-loop Stability Margin", IEEE, Transactions on Automatic Control, Vol.33, No.2, pp. 156-171, 1988.
- [49] DOYLE, J., GLOVER, K., KHARGONEKAR P., and FRANCIS, B., "State-Space Solution to Standard H_2 and H_∞ Control Problems", IEEE, Transactions on Automatic Control, Vol.34, No.8, pp. 831-847, 1989.
- [50] DOYLE J., PACKARD, A., and ZHOU, K., "Review of LFTs, LMIs, and μ ", Proceedings of the 30th IEEE Conference on Decision and Control, Vol.2, pp. 1227-1232, 1991.

- [51] FAN M., and TITS, A. L., "A Measure of Worst-Case H_{∞} Performance and of Largest Acceptable Uncertainty", Technical Research Report 91-97, University of Maryland, 1997.
- [52] KWAKERNAAK. H., "Robust Control and H_{∞} Optimization Tutorial Paper", *Automatica*, Vol. 29, No.2, pp.255-273, 1993.
- [53] GREEN, M., and LIMEBEER, D. J. N., "Linear Robust Control", Prentice-Hall, Inc. 1995.
- [54] ZHOU, K., DOYLE, J. C., and GLOVER, K. "Robust and Optimal Control", Prentice-Hall, Inc. 1996.
- [55] YOUNG, P. M., "Robustness with Parametric and Dynamic Uncertainty" California Institute of Technology, Ph.D. Thesis, 1993.
- [56] LOF, L. D. E., "Parametric Uncertainty Modeling and Identification for μ Based Control Systems", Eindhoven University Technology Department of Electrical Engineering, M.Sc. Thesis, 1991.
- [57] HOW, J. P., "Robust Control Design with Real Parameter Uncertainty Absolute Stability Theory", Massachusetts Institute of Technology, Ph.D. Thesis, 1993.
- [58] BANJERDPONGCHAI, D., "Parameter Robust Controller Synthesis Using Linear Matrix Inequalities", Stanford University, Ph.D. Thesis, 1997.
- [59] CLAUSEN, T. S., "System Identification and Robust Control a Synergistic Approach", Department of Control Engineering Aalborg University, Ph.D. Thesis, 1995.
- [60] BRITO, L. A. R., "Control of 3 dof Birotor Helicopter Using Robust Control Methods", Texas A&M University, 2009.
- [61] OLIVEIRA, C. M., "Modeling, Identification and Control of a Quadrotor Aircraft", Czech Technical University, M.Sc. Thesis, 2011.
- [62] RÖDÖNYI, G., "Iterative Design of Structured Uncertainty Models and Robust Controllers for Linear Systems", Budapest University of Technology and Economics, Ph.D. Thesis, 2010.
- [63] YANG, C., "Robust Rudder Roll Damping Control", Aalborg University Department of Control Engineering, Ph.D. Thesis, 1998.
- [64] KRUEGER, D. L., "Parametric Uncertainty Reduction in Robust Multivariable Control", Naval Postgraduate School, Ph.D. Thesis, 1993.
- [65] LANZON, A., "Weight Selection in Robust Control: An Optimization Approach", University of Cambridge, Ph.D. Thesis, 2000.

- [66] NAWASH, N., "H-Infinity Control of an Autonomous Mobile Robot", Cleveland State University, M.Sc. Thesis, 2001.
- [67] BOULET, B., "Modeling and Robust Control of Large Flexible Space Structures", University of Toronto, Ph.D. Thesis, 1996.
- [68] YAZICI, A., ve KARAMANCIOĞLU, A., "Doğrusal Kuadratik Kontrol Altındaki Ters Sarkaç Sisteminin İncelemesi", D.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi, pp. 75-86, 2006.
- [69] CARDOSO, A., and DOURADO, A., "Robust Model-Based Fault Tolerant Control of a Mobile Structure - Application to an Inverted Pendulum", 7th International Symposium on Intelligent Robotic Systems, 1999.
- [70] POURSHAGHAGHI, H. R., JAHED-MOTLAGH, M. R., MONTAZER A., and POSHTAN, J., "Optimized Multi-objective H_{∞} Control Applied to Inverted Pendulum", IEEE, 33rd IECON, 2007.
- [71] LINDEN, G. W., "H $_{\infty}$ Control of an Experimental Inverted Pendulum with Dry Friction", IEEE, 1st IECON, 1992.
- [72] CHEANG, S. U., and CHEN, W. J., "Stabilizing Control of an Inverted Pendulum System Based on H_{∞} Loop Shaping Design Procedure", 3d World Congress on Intelligent Control and Automation, 2000
- [73] KIM, K. J., "A Freely Movable Cart Type inverted Pendulum Controller design using PID, LQ , H_{∞} ", 10th.CISL Winter Workshop, pp. 290-301. 1997.
- [74] ÇAVDAROĞLU, M. E., and OLGAÇ, N., "Robust Control of Cart-Pendulum Dynamics against Uncertain Multiple Time Delays", American Control Conference, 2008.
- [75] KAJIWARA, H., APKARIAN, P., and GAHINET, P., "LPV Techniques for Control of an Inverted Pendulum", IEEE, Control Systems, Vol.19, No.1, pp. 44-54, 1999.
- [76] ZHANG, J., and LIN, X., "Robust Control of the Inverted Pendulum", IEEE, ISSCA, 2008.
- [77] LIU, Y., and ZHOU, S., "Static H_{∞} Loop Shaping Real-time Control of a Double Inverted Pendulum System", ICAL, pp. 670- 674, 2009.
- [78] PHILLIPS, C. L., "Control of a Dual Inverted Pendulum System Using Linear Quadratic and H_{∞} Methods", MIT, Master Thesis, 1994.
- [79] BOGDANOV, A., "Optimal Control of a Double Inverted Pendulum on a Cart", Department of Computer Science & Electrical Engineering, Technical Report CSE-04-006, 2004.

- [80] NIEMANN, H., and POULSEN J. K., "Design and Analysis of Controllers for a Double Inverted Pendulum", ISA Transactions, Vol. 44 pp. 145-163, 2005.
- [81] ZHONG, W., and RÖCK, H., "Energy and Passivity Based Control of the Double Inverted Pendulum on a Cart", IEEE, CCA, pp. 896-901, 2001.
- [82] NIEMANN, H., and POULSEN J. K., "Design Passive Fault Tolerant Control of a Double Inverted Pendulum: a Case Study", Control Engineering Practice, Vol. 13, pp. 1047-1059, 2005.
- [83] ELTOHAMY, K. G., and KUO, C. Y., "Real Time Stabilization of a Triple Link Inverted Pendulum Using Single Control Input ", IEEE, Control Theory and Application, Vol. 144, pp. 498-504, 1997.
- [84] FURUTA, K., OCHIAI, T., and ONO, N., "Attitude Control of Triple Inverted Pendulum", International Journal of Control, Vol.39, pp. 1351-1365, 1984.
- [85] MEDRANO, G. A., and TSACHOURIDIS, V. A., "Discrete Time H_{∞} Control of a Triple Inverted Pendulum with Single Control Input", IEEE, Control Theory and Application, Vol. 146, No.6, pp. 567-577, 1999.
- [86] TSACHOURIDIS, V. A., "Robust control of a Triple Inverted Pendulum", IEEE, International Conference on Control Applications, 1999.
- [87] JI, B., and CONG, S., "Modeling and Simulation for a Triple Inverted Pendulum", IEEE, 5th. World Congress on Intelligent Control and Automation, 2004.
- [88] GRAICHEN, K., TREUER, M., and ZEITZ, M., "Fast Side-Stepping of the Triple Inverted Pendulum via Constrained Nonlinear Feed forward Control Design", IEEE, 44th. Conference on Decision and Control, and the European Control Conference, 2005.
- [89] FER, H., and ENNS, D. F., "An Application of Dynamic Inversion to Stabilization of a Triple Inverted Pendulum on a Cart", IEEE, International Conference on Control Applications, 1996.
- [90] ZENG, Y., XIA, C., and CAO, H., "Novel LMI Based Swing-up Robust Controller for a Serial Double Inverted Pendulum", IEEE, International Conference on Robotics and Biomimetics, 2009.
- [91] LANZON, A., and TSOTRAS P., "A Combined Application of H_{∞} Loop-Shaping and μ -Synthesis to Control High Speed Flywheels", IEEE, Transactions on Control Systems, Vol. 13, No. 5, pp. 766-777, 2005.
- [92] PORUMAMILLA, H., and KELKAR, A. G., "Robust Control and μ Analysis of Active Pneumatic Suspension", American Control Conference, pp. 2200-2005, 2005.

- [93] FALLAH, H. S., BHAT R., and XIE, W., "H_∞ Robust Control of Active Suspensions: A Practical Point of View", American Control Conference, pp. 1385-1390, 2009.
- [94] SENAME, O., and DUGARD L., "Robust Control of Quarter-Car Semi-Active Suspensions", Laboratoire d'Automatique de Grenoble, France, 2005.
- [95] SPONG, M. W., "On the Robust Control of Robot Manipulators", IEEE, Transactions on Automatic Control, Vol. 37, No. 11, pp. 1782-1786, 1992.
- [96] FUJITA, M., NAMERIKAWA, T., MATSUMURAF., and UCHIDA, K., "μ-Synthesis of an Electromagnetic Suspension System", IEEE, Transactions on Automatic Control, Vol. 40, No. 3, pp. 530-536, 1995.
- [97] ROBERTS, G. N., SHARIF, M. T., STTUON, R., and AGARWAL, A., "Robust Control Methodology Applied to the Design of a Combined Steering/ Stabilizer System for Warships", IEE Proc. Control Theory Appl., Vol. 144, No.2, pp. 128-136, 1997.
- [98] BARROS, D., FEKRI, S., and ATHANS, M., "Robust Mixed-μ Synthesis Performance for Mass-Spring System with Stiffness Uncertainty", IEEE, Proceedings of the 13th Mediterranean Conference on Control and Automation, pp. 743-748, 2005.
- [99] VASCONCELOS, J. F., ATHANS, M., FEKRI S., and SILVESTRE, C., and OLIVEIRA, P., "Uncertainty versus Performance Trade-offs in Robust Feedback Control: a MIMO Case Study", IEEE, Proceedings of the 45th Conference on Decision & Control, pp. 1196-1202, 2006.
- [100] KALEEMULLAH, M., FARIS, W. F., and HASBULLAH, F., "Design of Robust H_∞, Fuzzy and LQR Controller for Active Suspension of a Quarter Car Model", 4th International Conference on Mechatronics (ICOM), 2011.
- [101] DELLERUD, G. E., and PAGANINI F., "A Course in Robust Control Theory: A Convex Approach", Springer, 2010.
- [102] SKOGESTAD, S., and POSTLETHWAITE, I., "Multivariable Feedback Control Analysis and Design", John Wiley & Sons, Chichester, U.K., 2001.
- [103] ASTRÖM, K.J., and HAGGLUND, T., "PID Controller Theory Design and Tuning" 2th. Edition, Instrument Society of America, U.S.A., 1995.
- [104] GREEN, M., and LIMEBEER D.J.N., "Linear Robust Control" Prentice Hall, 1994.
- [105] GOODWIN, G.C., GRAEBE S.F., and SALGADO M.E., "Control System Design", Pearson US Imports and PHIPES, United Kingdom, 2000.

- [106] PENA, R.S.S., and SZNAIER, M., "Robust Systems: Theory and Application", John Wiley & Sons, Canada, 1998.
- [107] HU, J., UNBEHAUEN, H., and BOHN, C., "A Practical Approach to Selecting Weighting Functions for H_{∞} Control and its Application to a Pilot Plant", UKACC, Vol.2, pp. 998-1003,1996.
- [108] CLAUSEN, T. S., ANDERSEN, P., and STOUSTRUP, J., "Robust Control" 4th. Edition, Department of Control Engineering, Institute of Electronic Systems Aalborg University, Aalborg, Denmark, 2001.
- [109] DOYLE, J., FRANCIS, B., and TANNENBAUM, A., "Feedback Control Theory" Macmillan Pub. Co., New York, U.S.A., 1990.
- [110] BALAS, G.J., DOYLE, J.C., GLOVER, K., PACKARD, A., and SMITH, R., " μ -Analysis and Synthesis Toolbox For Use with Matlab", Version 3, Musyn Inc. and The Math Works, Inc., 2001.
- [111] DAMEN, A., and WEILAND, S., "Robust Control", Measurement and Control Group Department of Electrical Engineering Eindhoven University of Technology, Eindhoven, Netherlands, 2002.
- [112] PACKARD, A., and DOYLE J., "The Complex Structured Singular Value", Automatica, 1993.
- [113] XUE, D., CHEN Y., and ATHERTON D., P.," Linear Feedback Control Analysis and Design with Matlab", Society for Industrial and Applied Mathematics., Philadelphia, U.S.A., 2007.
- [114] ARSLAN, Ş., "İkili Sarkaç Sisteminin Bulanık Mantık Tabanlı Kayan Kipli Kontrolü", 13. Ulusal Makina Teorisi Sempozyumu, pp. 297-307, Sivas Cumhuriyet Üniversitesi, 07-09 Haziran 2007.

ÖZGEÇMİŞ

Seda UYGURLU, 1985’de Üsküdar-İSTANBUL’da doğdu. İlköğrenimin ilk beş yılını Elazığ Namık Kemal İlk Okulu’nda sürdürdü, ardından Pendik Orhan Sinan Hamzaoğlu İlköğretim Okulu’nda devam etti ve 1999’da mezun oldu. 2003 yılında Maltepe Halit Armay Lisesi’nden mezun oldu.

Yüksek öğrenimine 2004 yılında Sakarya Üniversitesi Makine Mühendisliği bölümüne başladı ve 2008 yılında, lisans eğitimini tamamlayarak mezun oldu. Aynı yıl Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü’nde “Makine Tasarımı ve İmalatı Bölümü”nde yüksek lisans eğitimine başladı. Halen bu bölümde yüksek lisans öğrencisi olarak öğrenimini sürdürmektedir.