T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

n-NORMLU UZAYLARDA MODÜLÜS FONKSİYONU TARAFINDAN TANIMLI BAZI İDEAL YAKINSAK DİZİ UZAYLARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Ömer Faruk ÇELİK

Enstitü Anabilim Dalı	:	MATEMATİK
Enstitü Bilim Dalı	:	FONKSİYONLAR TEORİSİ VE FONKSİYONEL ANALİZ
Tez Danışmanı	:	Yrd. Doç. Dr. Selma ALTUNDAĞ

Mayıs 2013

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

n-NORMLU UZAYLARDA MODÜLÜS FONKSİYONU TARAFINDAN TANIMLI BAZI İDEAL YAKINSAK DİZİ UZAYLARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Ömer Faruk ÇELİK

Enstitü Anabilim Dalı	:	**MATEMATİK**
Enstitü Bilim Dalı	:	**FONKSİYONLAR TEORİSİ VE FONKSİYONEL ANALİZ**

Bu tez 21 / 06 /2013 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Oybirliği ile kabul edilmiştir.

Yrd. Doç. Dr.	**Yrd. Doç. Dr.**	**Doç. Dr.**
Selma ALTUNDAĞ	**Mahpeyker ÖZTÜRK**	**Sadık BAĞCI**
Jüri Başkanı	**Üye**	**Üye**

TEŞEKKÜR

Beni bu konuda çalışmaya yönlendiren ve çalışmamın başından sonuna kadar her aşamasında benden ilgi ve yardımlarını esirgemeyen değerli hocam Yrd. Doç. Dr. Selma ALTUNDAĞ'a ve hayatım boyunca her türlü desteklerini daima yanımda hissettiğim annem Ayfer ÇELİK ve babam Mecit ÇELİK'e sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR ii

İÇİNDEKİLER iii

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ v

ÖZET vi

SUMMARY vii

BÖLÜM 1.

GİRİŞ 1

BÖLÜM 2.

TEMEL TANIM ve TEOREMLER 2

BÖLÜM 3.

İDEAL YAKINSAKLIK 10

3.1. İdeal Yakınsaklık 10

3.2. Lacunary İdeal Yakınsaklık ve λ-İdeal Yakınsaklık 14

BÖLÜM 4.

n-NORMLU UZAYLAR 17

4.1. n-Normlu Uzaylar 17

4.2. n-Normlu Uzaylarda İdeal Yakınsaklık 20

BÖLÜM 5.

MODÜLÜS FONKSİYONU İLE TANIMLI BAZI FARK DİZİ UZAYLARI.... 23

5.1. Fark Dizi Uzayları 23

5.2. Genelleştirilmiş Fark Dizi Uzayları 27

5.3. $W^{I}\left(N_{\theta},\Delta^{m},f,p,\|.,\ldots,.\|\right)$ ve $W_{0}^{I}\left(N_{\theta},\Delta^{m},f,p,\|.,\ldots,.\|\right)$ Dizi Uzayları 29

BÖLÜM 6.
n-NORMLU UZAYLARDA MODÜLÜS FONKSİYONU TARAFINDAN TANIMLI BAZI İDEAL YAKINSAK DİZİ UZAYLARI.................................. 36

BÖLÜM 7.
n-NORMLU UZAYLARDA MODÜLÜS FONKSİYONU TARAFINDAN TANIMLI BAZI LACUNARY İDEAL YAKINSAK DİZİ UZAYLARI............ 47

KAYNAKLAR.. 55
ÖZGEÇMİŞ 58

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	: Kompleks sayılar kümesi
w	: Tüm reel veya kompleks sayı dizileri uzayı
c	: Yakınsak diziler uzayı
c_0	: Sıfıra yakınsak diziler uzayı
ℓ_∞	: Sınırlı diziler uzayı
$f = (f_k)$	: Modülüs fonksiyon dizisi
$\theta = (k_r)$	: Lacunary dizisi
Λ	: Pozitif tam sayıların azalmayan, sonsuza giden dizileri kümesi
$X(\Delta)$	: Fark X dizi uzayı
$\Delta^m(x_k)$	: (x_k) dizisinin m. farkı
I	: Doğal sayıların alt kümelerinin ideali
$\inf X$	: X'in en büyük alt sınırı, infumumu
$\sup X$	: X'in en küçük üst sınırı, supremumu

ÖZET

Anahtar kelimeler: Modülüs Fonksiyonu, De La Vallee-Poussin Ortalaması, Lacunary Dizisi, İdeal Yakınsaklık, n-Norm, Fark Dizisi

Bu çalışma yedi bölümden oluşmaktadır. İlk beş bölüm literatür taramasıdır. Altıncı ve yedinci bölümler özgün kısımlardır.

Birinci bölümde; Modülüs fonksiyonları yardımıyla tanımlanan dizi uzaylarının matematikteki yeri ve öneminden bahsedilmiştir.

İkinci bölümde; temel tanım ve teoremler verilmiştir.

Üçüncü bölümde; ideal yakınsaklık, λ-ideal yakınsaklık, lacunary ideal yakınsaklık incelenmiştir.

Dördüncü bölümde; n-normlu uzaylar ve n-normlu uzaylarda ideal yakınsaklık incelenmiştir.

Beşinci bölümde; fark dizi uzayları ve genelleştirilmiş fark dizi uzayları incelenmiştir.

Altıncı bölümde; $W^I(\lambda, B^m, F, p, \|.,\dots,.\|)$, $W_0^I(\lambda, B^m, F, p, \|.,\dots,.\|)$ ve $W_\infty^I(\lambda, B^m, F, p, \|.,\dots,.\|)$ uzayları tanımlanıp, bu uzayların bazı topolojik özellikleri verilmiştir.

Yedinci bölümde; $W^I(N_\theta, B^m, F, p, \|.,\dots,.\|)$, $W_0^I(N_\theta, B^m, F, p, \|.,\dots,.\|)$ ve $W_\infty^I(N_\theta, B^m, F, p, \|.,\dots,.\|)$ uzayları tanımlanıp, bu uzayların bazı topolojik özellikleri verilmiştir.

SOME IDEAL CONVERGENT SEQUENCE SPACES DEFINED BY A MODULUS FUNCTION IN n-NORMED SPACES

SUMMARY

Key Words: Modulus Function, De La Vallee-Poussin Mean, Lacunary Sequence, Ideal Convergence, n-Norm, Difference Sequence

This study consists of seven chapter. The first five chapters are literature review. Sixth and seventh chapters are original parts.

In the first chapter; it is mentioned the area and importance of the sequence spaces defined by Modulus functions.

In the second chapter; the fundamentel definitions and theorems are given.

In the third chapter; ideal convergence, λ-ideal convergence, lacunary ideal convergence are given.

In the fourth chapter; n-normed spaces and ideal convergence in n-normed spaces are given.

In the fifth chapter; difference sequence spaces and generelized difference sequence are given.

In the sixth chapter; the sequence spaces $W^{I}\left(\lambda, B^{m}, F, p, \|\cdot, \ldots, \cdot\|\right)$, $W_{0}^{I}\left(\lambda, B^{m}, F, p, \|\cdot, \ldots, \cdot\|\right)$, $W_{\infty}^{I}\left(\lambda, B^{m}, F, p, \|\cdot, \ldots, \cdot\|\right)$ are defined and some of the topological properties of these spaces are given.

In the seventh chapter; the sequence spaces $W^{I}\left(N_{\theta}, B^{m}, F, p, \|\cdot, \ldots, \cdot\|\right)$, $W_{0}^{I}\left(N_{\theta}, B^{m}, F, p, \|\cdot, \ldots, \cdot\|\right)$, $W_{\infty}^{I}\left(N_{\theta}, B^{m}, F, p, \|\cdot, \ldots, \cdot\|\right)$ are defined and some of the topological properties of these spaces are given.

BÖLÜM 1. GİRİŞ

Son yıllarda modülüs fonksiyonu kullanılarak bir çok dizi uzayı tanımlamış ve bu dizi uzayları geliştirilerek günümüze kadar gelinmiştir.

Modülüs fonksiyonu tanımı ilk kez Japon Matematikçi Nakano [1] tarafından verildi. Daha sonra Ruckle [2] "$\{e_1, e_2, \ldots\}$ birim vektörlerinin sınırlı kümesini barındıran en küçük FK uzayı var mıdır?" sorusuna cevap ararken ℓ_1 dizi uzayının genelleştirilmişi olan

$$L(f) = \left\{ x = (x_k) : \sum_{k=1}^{\infty} f(|x_k|) \leq \infty \right\}$$

dizi uzayını f Modülüs fonksiyonu yardımıyla tanımladı.

Maddox [3] kuvvetli Cesaro toplanabilen dizilerin uzayı $W(f)$ i tanımladı. Daha sonra Connor [4] Maddox [3] un tanımını Cesaro Matrisi yerine herhangi negatif olmayan regüler matris toplanabilme metodunu alarak $W(A, f)$ toplanabilme tanımına geliştirdi.

Modülüs fonksiyonu kullanılarak Maddox [3], Pehlivan ve Fisher [5], Altın ve Et [6], Kızmaz [7] ve birçok kişi tarafından farklı modülüs dizi uzayları tanımlanmış ve bunların çeşitli özellikleri incelenmiştir. Biz burada, yukarıdaki çalışmaları temel alarak bu uzayları daha genelleştiren dizi uzayları üzerinde çalışacağız.

BÖLÜM 2. TEMEL TANIMLAR ve TEOREMLER

Bu bölümde, diğer bölümlerde kullanılacak olan tanım ve teoremler verilecektir.

Tanım 2.1. [8] X boş olmayan bir küme ve F, reel veya kompleks sayılar cismi olsun.

$$+: X \times X \to X \qquad\qquad .: F \times X \to X$$
$$(x, y) \to x + y \qquad\qquad (\alpha, x) \to \alpha.x$$

dönüşümleri ile toplama ve çarpma işlemleri tanımlansın. Aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa X kümesine F cismi üzerinde "lineer uzay (veya vektör uzayı)" denir. $\forall \alpha, \beta \in F$ ve $\forall x, y, z \in X$ için

1- $x + y = y + x$

2- $(x + y) + z = x + (y + z)$

3- $\forall x \in X$ için $x + \theta = \theta + x = x$ olacak şekilde bir $\theta \in X$ vardır.

4- $\forall x \in X$ için $x + (-x) = (-x) + x = \theta$ olacak şekilde $-x \in X$ vardır.

5- $1.x = x$

6- $\alpha.(x + y) = \alpha.x + \alpha.y$

7- $(\alpha + \beta).x = \alpha.x + \beta.x$

8- $\alpha.(\beta.x) = (\alpha.\beta).x$

$F = \mathbb{R}$ alınırsa X e bir reel vektör uzayı, $F = \mathbb{C}$ alınırsa X e bir kompleks vektör uzayı adı verilir.

Tanım 2.2. [8] X, F cismi üzerindeki bir lineer uzay ve M de X in bir alt kümesi olsun. $\forall x, y \in M$ ve $\alpha \in F$ için

1- $x + y \in M$

2- $\alpha . x \in M$

şartları sağlanıyorsa M ye X nin "alt uzayı" denir. Bu iki şart, $\alpha, \beta \in F$ olmak üzere,

$$\alpha . x + \beta . y \in M$$

olmasına denktir.

Tanım 2.3. [8] X, F cismi üzerinde bir lineer uzay ve $x \in X$ olsun.

$$x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$$

olacak şekilde $x_i \in X$ ve $\alpha_i \in F$ varsa x vektörüne $x_1, x_2, \cdots, x_n$ vektörlerinin "lineer kombinasyonu" denir.

Tanım 2.4. [8] X, F cismi üzerinde bir lineer uzay ve $S = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ de X in sonlu bir alt kümesi olsun. $\alpha_i \in F$ olmak üzere,

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = 0$$

olması her i için $\alpha_i = 0$ olmasını gerektiriyorsa S kümesine veya $x_1, x_2, \cdots, x_n$ vektörlerine (F üzerinde) "lineer bağımsız" denir. Lineer bağımsız olmayan kümeye veya vektörlere de "lineer bağımlı" denir.

Tanım 2.5. [8] X, F cismi üzerinde bir lineer uzay ve $A \subset X$ bir alt küme olsun. $x, y \in A$ keyfi olmak üzere

$$B = \{z \in X : z = \alpha x + (1-\alpha)y, \quad 0 \leq \alpha \leq 1\} \subseteq A$$

ise A kümesine "konveks küme" denir.

Tanım 2.6. [8] X, F cismi üzerinde bir lineer uzay ve $A \subset X$ bir alt küme olsun. A kümesini kapsayan en dar alt uzaya "A nın gereni" denir ve span$X$ ile gösterilir.

Tanım 2.7. [8] X, F cismi üzerinde bir vektör uzayı ve B, X in bir altkümesi olsun. B lineer bağımsız ve B, X i geriyor ise B ye (F üzerinde) X in bir "bazı (tabanı)" denir.

Tanım 2.8. [8] X, F üzerinde sıfırdan farklı bir vektör uzayı olsun. X in herhangi bir bazındaki vektör sayısına X in (F üzerindeki) "boyutu" denir ve kısaca Boy$X$ ile gösterilir. Şayet $X = \{\theta\}$ ise Boy$X = 0$ olarak tanımlanır. Bir vektör uzayının boyutu 0 veya pozitif bir tamsayı ise vektör uzayı "sonlu boyutludur", aksi takdirde "sonsuz boyutludur" denir.

Tanım 2.9. [9] X, F cismi üzerinde bir lineer uzay olsun. $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu, $\forall x, y \in X$ ve $\forall \alpha \in F$ için

1- $\|x\| \geq 0$

2- $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

3- $\|\alpha . x\| = |\alpha| . \|x\|$

4- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

özelliklerini sağlıyorsa $\|\cdot\|$ fonksiyonuna X üzerinde bir "norm" ve $(X, \|\cdot\|)$ ikilisine de bir "normlu vektör uzayı" veya kısaca "normlu uzay" denir.

Tanım 2.10. [9] $(X,\|\cdot\|)$ normlu bir uzay ve bu uzay içerisinde bir dizi $x=(x_n)$ olsun. Eğer $\forall\varepsilon>0$ için $\forall n>n_0$ iken

$$\|x_n-x_0\|<\varepsilon$$

olacak şekilde bir $n_0(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ sayısı varsa "$x=(x_n)$ dizisi x_0 a yakınsaktır" denir. $x=(x_n)$ dizisi x_0 a yakınsak ise $\lim_n x_n=x_0$ veya $x_n\to x_0$ şeklinde yazılır.

Tanım 2.11. [9] $(X,\|\cdot\|)$ normlu bir uzay ve bu uzay içerisinde bir dizi $x=(x_n)$ olsun. Eğer $\forall\varepsilon>0$ için $\forall m,n>n_0$ iken

$$\|x_m-x_n\|<\varepsilon$$

olacak şekilde bir $n_0(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ sayısı varsa $x=(x_n)$ dizisine bir "Cauchy dizisi" denir.

Tanım 2.12. [9] $(X,\|\cdot\|)$ normlu uzayında her Cauchy dizisi yakınsak ise bu normlu uzaya tam normlu uzay veya "Banach uzayı" denir.

Tanım 2.13. [9] $x=(x_k)$, $(k=1,2,3,\ldots)$ şeklindeki reel veya kompleks terimli bütün sınırlı veya sınırsız dizilerden oluşan uzay w ile gösterilsin. $x=(x_k), y=(y_k)\in w$ ve λ bir sabit olmak üzere

$$x+y=(x_k+y_k),\quad \lambda x=(\lambda x_k)$$

şeklinde tanımlanan işlemler altında w bir lineer uzaydır. w nun her alt uzayına bir "dizi uzayı" denir.

Bu çalışmada sık sık kullanacağımız

$$\ell_\infty = \left\{ x = (x_k) : \sup_k |x_k| < \infty \right\}$$

sınırlı diziler uzayı,

$$c = \left\{ x = (x_k) : \lim_k x_k \text{ mevcut} \right\}$$

yakınsak diziler uzayı ve

$$c_0 = \left\{ x = (x_k) : \lim_k x_k = 0 \right\}$$

sıfıra yakınsak diziler uzayı

$$\|x\|_\infty = \sup_k |x_k|$$

normu ile birer Banach uzayıdır [9].

Tanım 2.14. [10] X bir dizi uzayı olsun. X bir Banach uzayı ve

$$\tau_k : X \to \mathbb{C}, \quad \tau_k(x) = x_k, \quad (k = 1,2,3,\ldots)$$

dönüşümü sürekli ise X e bir " BK -uzayı" denir.

Lemma 2.15. [9] Her bir k için $a_k, b_k \in \mathbb{C}$ olsun. $0 \le p_k \le \sup p_k = H$ olmak üzere,

$$|a_k + b_k|^{p_k} \le D\left\{ |a_k|^{p_k} + |b_k|^{p_k} \right\}$$

eşitsizliği sağlanır. Burada $D = \max\left\{1, 2^{H-1}\right\}$ dir.

Bir $K \subset \mathbb{N}$ kümesinin eleman sayısını $|K|$ ile gösterelim. Yani $|K| := cardK$ olsun.

Tanım 2.16. [11] $K \subseteq \mathbb{N}$ olsun. $K(n) := |\{1,2,3,\ldots,n\} \cap K|$ şeklinde tanımlayalım.

$$\underline{d}(K) = \liminf_{n\to\infty} \frac{K(n)}{n}, \ \bar{d}(K) = \limsup_{n\to\infty} \frac{K(n)}{n}$$

sayılarına sırasıyla K kümesinin alt ve üst asimptotik yoğunlukları denir. Eğer $\underline{d}(K) = \bar{d}(K)$ ise, $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{K(n)}{n}\right) = d(K)$ mevcuttur. $d(K)$ sayısına K kümesinin "asimptotik yoğunluğu" denir.

Tanım 2.17. [12] $K \subseteq \mathbb{N}$ için

$$\underline{\delta}(K) = \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{\ln n} \sum_{a\in K, a\le n} \frac{1}{a}, \ \bar{\delta}(K) = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{\ln n} \sum_{a\in K, a\le n} \frac{1}{a}$$

sayılarına sırasıyla K kümesinin alt ve üst logaritmik yoğunlukları denir. Eğer $\bar{\delta}(K) = \underline{\delta}(K)$ ise, $\delta(K) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln n} \sum_{a\in K, a\le n} \frac{1}{a}$ mevcuttur. $\delta(K)$ sayısına K kümesinin "logaritmik yoğunluğu" denir.

Tanım 2.18. [13] $K \subseteq \mathbb{N}$, $t, s \in \mathbb{Z}$ ve $t \ge 0$, $s \ge 1$ olsun. $K \cap [t+1, t+s]$ kümesinin eleman sayısı $K(t+1, t+s)$ olsun.

$$\alpha_s = \liminf_{t\to\infty} K(t+1, t+s), \ \alpha^s = \limsup_{t\to\infty} K(t+1, t+s)$$

olmak üzere,

$$\underline{u}(K) = \lim_{s\to\infty} \frac{\alpha_s}{s}, \ \bar{u}(K) = \lim_{s\to\infty} \frac{\alpha^s}{s}$$

sayılarına sırasıyla K kümesinin alt ve üst düzgün yoğunlukları denir. Eğer $\underline{u}(K)=\overline{u}(K)=u(K)$ ise, $u(K)$ sayısına K kümesinin "düzgün yoğunluğu" denir.

Tanım 2.19. [14] $x=(x_k)$ bir dizi olsun. Eğer her $\varepsilon>0$ için

$$K:=K(\varepsilon):=\left|\{k\in\mathbb{N}:|x_k-L|\geq\varepsilon\}\right|$$

kümesinin yoğunluğu sıfır ise $x=(x_k)$ dizisi L sayısına "istatistiksel yakınsaktır" denir ve

$$st-\lim x=L$$

biçiminde yazılır. Burada istatistiksel yakınsaklık çeşidi kullandığımız yoğunluk çeşidine göre belirlenir. Yani, eğer logaritmik yoğunluk kullanırsak logaritmik istatistiksel yakınsaklık, düzgün yoğunluk kullanırsak düzgün istatistiksel yakınsaklık tanımları elde edilir.

Tanım 2.20. [1] Eğer $f:[0,\infty)\to[0,\infty)$ fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa bu fonksiyona "modülüs fonksiyonu" denir. $\forall x,y\in[0,\infty)$ için,

1- $f(x)=0\Leftrightarrow x=0$,

2- $f(x+y)\leq f(x)+f(y)$,

3- f fonksiyonu artan bir fonksiyondur,

4- f sıfırda sağdan süreklidir.

(2) ve (4) özelliklerinden dolayı f, $[0,\infty)$ da süreklidir. Örnek olarak $0<r\leq 1$ için $f(t)=t^r$ fonksiyonu bir modülüs fonksiyonudur. Modülüs fonksiyonu sınırlı veya sınırsız olabilir.

Örnek 2.21. $f(x)=\dfrac{x}{1+x}$ sınırlı modülüs fonksiyonudur [15].

$0<p<1$ olmak üzere $f(x)=x^p$ sınırsız modülüs fonksiyonudur [15].

Lemma 2.22. [5] f herhangi bir modülüs fonksiyonu ve $0<\delta<1$ olsun. Her bir $x\geq\delta$ için $f(x)\leq 2f(1)\delta^{-1}x$ dir.

İspat. $[h]$, h sayısının tamsayı kısmını göstersin.

$$\begin{aligned} f(x) &\leq f\left(1+\left[\delta^{-1}x\right]\right)\leq f(1)+f\left(\left[\delta^{-1}x\right]\right) \\ &\leq f(1)+\left[\delta^{-1}x\right]f(1)=f(1)\left(1+\left[\delta^{-1}x\right]\right) \\ &\leq f(1)\left(1+\left(\delta^{-1}x\right)\right)\leq 2f(1)\delta^{-1}x. \end{aligned}$$

BÖLÜM 3. İDEAL YAKINSAKLIK

3.1. İdeal Yakınsaklık

Bu bölümde ideal yakınsaklık kavramına girebilmek için öncelikle ideal ve süzgeç tanımlarını verilecek, daha sonra bu kavramlarla ilgili ihtiyaç duyulduğu oranda tanım ve teoremlere değinilecektir.

Tanım 3.1.1. [16] $X \neq \varnothing$ olsun. Eğer X in alt kümelerinin bir $I \subset 2^X$ ailesi

(i) $\varnothing \in I$

(ii) Her $A, B \in I$ için $A \cup B \in I$

(iii) Her $A \in I$ ve $B \subset A$ için $B \in I$

şartlarını sağlıyorsa I kümeler ailesine X kümesinde bir "ideal" denir.

Örnek 3.1.2. $\mathbb{N}$ nin alt kümelerinin bir ailesini

$$I_\delta = \{A \subset \mathbb{N} : \delta(A) = 0\}$$

olarak alırsak, bu aile bir idealdir.

Tanım 3.1.3. [17] $X \neq \varnothing$ olsun. Eğer X in alt kümelerinin bir $F \subset 2^X$ ailesi

(i) $\varnothing \notin F$

(ii) Her $A, B \in F$ için $A \cap B \in F$

(iii) Her $A \in F$ ve $A \subset B$ için $B \in F$

şartlarını sağlıyorsa F kümeler ailesine X kümesinde bir "süzgeç" denir.

Tanım 3.1.4. [18] $I \neq \varnothing$ ve $X \notin I$ ise I idealine "gerçek ideal" denir.

İdeal ile süzgeç arasındaki ilişkiyi aşağıdaki önerme açıkça vermektedir.

Önerme 3.1.5. [18] $I \subset 2^X$ idealinin gerçek ideal olması için gerek ve yeter şart

$$F(I) = \{M \subset X : \exists A \in I \ni M = X - A\}$$

kümeler ailesinin X kümesinde bir süzgeç olmasıdır.

Tanım 3.1.6. [18] $I \subset 2^X$ bir gerçek ideal olsun. Eğer her $x \in X$ için $\{x\} \in I$ ise I idealine "uygun ideal" denir.

Örnek 3.1.7. $I_\delta = \{A \subset \mathbb{N} : \delta(A) = 0\}$ ideali uygun bir idealdir.

Tanım 3.1.8. [18] $I \subset 2^{\mathbb{N}}$, $\mathbb{N}$ de bir gerçek ideal ve $(X, \|\cdot\|)$ bir normlu uzay olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için,

$$A(\varepsilon) = \{n \in \mathbb{N} : \|x_n - \xi\| \geq \varepsilon\} \in I$$

ise $(x_n) \in X$ dizisi $\xi \in X$ e norma göre "I-yakınsaktır" denir. Bu ifade

$$I - \lim_{n \to \infty} x_n = \xi$$

ile gösterilir. Burada $\xi \in X$ elemanına (x_n) dizisinin "I-limiti" denir.

$I \subset 2^{\mathbb{N}}$ olmak üzere Kostyrko [18] tarafından 2000 de tanımlanan gerçek uygun ideal örnekleri verelim.

Örnek 3.1.9.

a. $\mathbb{N}$ nin bütün sonlu alt kümelerinin ailesi I_f, I ideali olarak alınırsa o zaman I_f gerçek uygun bir idealdir. Bilindiği üzere adi anlamda yakınsaklıkta limit noktasının komşuluğu dışında kalan eleman sayısı sonlu bir değerdir. Bu özelliğe sahip kümeler ideal tanımındaki şartları sağlar. Bu yüzden I_f-yakınsaklık adi anlamda yakınsaklığın genelleştirilmesidir. I_f, kapsamaya göre en küçük uygun idealdir [18].

b. $I_d = \{A \subset \mathbb{N} : d(A) = 0\}$ ailesi $\mathbb{N}$ de bir gerçek uygun idealdir. Bilindiği üzere istatistiksel yakınsaklıkta limit noktasının komşuluğu dışında kalan eleman sayısı sonlu veya bütün eleman sayısına göre daha az bir değerdir. Ancak sonlu olması gerekmez sonsuz da olabilir. Ölçüm teorisinde bunun dizinin tüm terimlerine oranı bilindiği gibi sıfırdır. Bu özelliğe sahip kümeler ideal tanımındaki şartları sağlar. Bu yüzden I_d-yakınsaklık istatistiksel yakınsaklığın genelleştirilmesidir [18].

c. $I_u = \{A \subset \mathbb{N} : u(A) = 0\}$ ailesi $\mathbb{N}$ de bir uygun idealdir. I_u-yakınsaklık düzgün istatistiksel yakınsaklık olarak adlandırılır [18].

d. $I_\delta = \{A \subset \mathbb{N} : \delta(A) = 0\}$ ailesi $\mathbb{N}$ de bir uygun idealdir. I_δ-yakınsaklık logaritmik istatistiksel yakınsaklık olarak adlandırılır [18].

Uyarı: Yukarıdaki idealler arasında $I_f \subset I_u \subset I_d \subset I_\delta \subset I$ kapsama bağıntısı vardır.

Uyarı: Eğer I bir uygun ideal ise, X de genel yakınsaklık X de I-yakınsaklığı gerektirir.

Şimdi yakınsaklık aksiyomlarının hangilerinin I-yakınsaklık için de sağlandığını görelim. En iyi bilinen yakınsaklık aksiyomları aşağıdadır.

(i) Her $\{\xi, \xi, \ldots, \xi, \ldots\}$ sabit dizisi ξ ye yakınsar.

(ii) Her bir yakınsak dizinin limiti tek olarak belirlidir.

(iii) Eğer $x=(x_n)$ dizisinin limiti ξ ise, bu dizinin bütün alt dizilerinin limiti de aynıdır.

(iv) Eğer $x=(x_n)$ dizisinin bütün alt dizileri ξ ye yakınsak ise o zaman $x=(x_n)$ de ξ ye yakınsar [18].

Önerme 3.1.10. [18] X in en az iki noktası olduğunu kabul edelim. $I\subset 2^X$ bir uygun ideal olsun.

a. I -yakınsaklık (i), (ii), (iv) şartlarını sağlar.

b. Eğer I sonsuz bir küme içeriyorsa, bu durumda I -yakınsaklık (iii) şartını sağlamaz.

Uyarı: Eğer I sonsuz küme içermeyen bir uygun ideal ise o zaman I -yakınsaklık genel yakınsaklıkla çakışır ve (iii) şartının sağlandığı açıktır.

Teorem 3.1.11. [19] I bir uygun ideal olsun.

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\xi$ ise $I-\lim x_n=\xi$ dir.

(ii) $I-\lim x_n=\xi$, $I-\lim y_n=\eta$ ise $I-\lim(x_n+y_n)=\xi+\eta$ dır.

(iii) $I-\lim x_n=\xi$, $I-\lim y_n=\eta$ ise $I-\lim(x_n.y_n)=\xi.\eta$ dır.

Tanım 3.1.12. [19] $(X,\|\cdot\|)$ bir normlu uzay ve $I\subset 2^X$ bir uygun ideal olsun.

$$A(\varepsilon)=\{n\in\mathbb{N}:\|x_n\|>M\}\in I$$

olacak şekilde $M>0$ sayısı mevcut ise $(x_n)\in X$ dizisine X üzerinde "I -sınırlı" denir.

3.2. Lacunary İdeal Yakınsaklık ve λ-İdeal Yakınsaklık

Tanım 3.2.1. $\theta=(k_r)$ pozitif tam sayıların $r\to\infty$ iken $h_r=k_r-k_{r-1}\to\infty$ şartını sağlayan artan bir dizisi olsun. Bu $\theta=(k_r)$ dizisine "lacunary dizisi" denir. θ tarafından belirlenen aralıklar $I_r=(k_{r-1},k_r]$ ve $\frac{k_r}{k_{r-1}}$ oranı q_r ile gösterilir. Herhangi bir $\theta=(k_r)$ lacunary dizisi için

$$\lim_{r\to\infty}\left(\frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r}|x_k-L|\right)=0$$

olacak şekilde bir L sayısı mevcutsa, (x_k) dizisi L sayısına "kuvvetli lacunary yakınsaktır" denir ve kuvvetli lacunary yakınsak diziler uzayı

$$N_\theta=\left\{x=(x_k):\lim_{r\to\infty}\frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r}|x_k-L|\to 0,\quad en\ az\ bir\ L\ için\right\}$$

şeklinde Freedman [20] tarafından tanımlanmıştır. Bu şekilde tanımlanan kuvvetli lacunary yakınsak N_θ dizi uzayı

$$\|x\|_\theta=\sup_r\left(\frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r}|x_k|\right)$$

normu ile birlikte bir BK-uzayıdır.

Özel olarak $\theta=(2^r)$ olması durumunda kuvvetli Cesaro toplanabilen diziler uzayı $|\sigma_1|$ elde edilir. Burada,

$$|\sigma_1|=\left\{x=(x_k):\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|x_k-L|=0,\quad en\ az\ bir\ L\ için\right\}$$

biçiminde tanımlıdır.

Tanım 3.2.2. [21] $I \subset 2^{\mathbb{N}}$, $\mathbb{N}$ de bir gerçek ideal, $(X, \|.\|)$ bir normlu uzay ve $\theta = (k_r)$ bir lacunary dizisi olsun. Eğer $(x_k) \in X$ ve her $\varepsilon > 0$ için,

$$A(\varepsilon) = \left\{ r \in \mathbb{N} : \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} \|x_k - \xi\| \geq \varepsilon \right\} \in I$$

ise $(x_k) \in X$ dizisi $\xi \in X$ e norma göre "lacunary I-yakınsaktır" denir. Bu ifade

$$I_\theta - \lim x_k = \xi$$

ile gösterilir.

Tanım 3.2.3. [22] $\Lambda = (\lambda_r)$ pozitif tam sayıların $\lambda_{r+1} \leq \lambda_r + 1$, $\lambda_1 = 1$ şartını sağlayan azalmayan ve sonsuza giden bir dizisi olsun. Genelleştirilmiş Vallee-Pousin ortalaması

$$t_r(x) = \frac{1}{\lambda_r} \sum_{k \in I_r} x_k$$

ile tanımlıdır. Burada $I_r = [r - \lambda_r + 1, r]$ dır. Eğer $n \to \infty$ için $t_n(x) \to L$ ise $x = (x_k)$, "(V, λ)-toplanabilir dizidir" denir. Eğer $\lambda_n = n$ ise (V, λ)-toplanabilirlik $|\sigma_1|$-toplanabilirliğe indirgenir. (V, λ)-toplanabilir dizilerin sınıfları

$$[V, \lambda] = \left\{ x = (x_k) : \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} |x_k - L| = 0, \quad en\ az\ bir\ L\ için \right\}$$

olarak tanımlanır.

Tanım 3.2.4. [23] $I \subset 2^{\mathbb{N}}$, $\mathbb{N}$ de bir gerçek ideal, $(X,\|.\|)$ bir normlu uzay ve $\Lambda = (\lambda_r)$ pozitif tam sayıların $\lambda_{r+1} \leq \lambda_r + 1$, $\lambda_1 = 1$ şartını sağlayan azalmayan ve sonsuza giden bir dizi olsun. Eğer $(x_k) \in X$ ve her $\varepsilon > 0$ için,

$$A(\varepsilon) = \left\{ r \in \mathbb{N} : \frac{1}{\lambda_r} \sum_{k \in I_r} \|x_k - \xi\| \geq \varepsilon \right\} \in I$$

ise $(x_k) \in X$ dizisi $\xi \in X$ e norma göre “λ-ideal yakınsaktır” denir. Bu ifade

$$I_\lambda - \lim x_k = \xi$$

ile gösterilir.

BÖLÜM 4. n-NORMLU UZAYLAR

4.1. n-Normlu Uzaylar

Tanım 4.1.1. [24] $2 \leq n \leq d$ olmak üzere X , d boyutlu bir vektör uzayı olsun.

1- $\|x_1, x_2, \ldots, x_n\| = 0 \Leftrightarrow x_1, x_2, \ldots, x_n$ lineer bağımlı,

2- $\|x_1, x_2, \ldots, x_n\|$, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ in her permütasyonu altında değişmeyen,

3- $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ için $\|\alpha x_1, x_2, \ldots, x_n\| = |\alpha| \|x_1, x_2, \ldots, x_n\|$

4- $\|x + y, x_2, \ldots, x_n\| \leq \|x, x_2, \ldots, x_n\| + \|y, x_2, \ldots, x_n\|$

şartlarını sağlayan X^n de tanımlı reel değerli $\|.,\ldots,.\|$ fonksiyonuna X üzerinde bir "n-norm" denir ve $(X, \|.,\ldots,.\|)$ ikilisine "n-normlu uzay" denir.

Örnek 4.1.2. Her $i = 1,\ldots,n$ için $(x_i) = (x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{in}) \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere;

$$\|x_1, \ldots, x_n\|_E = \left| \det \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix} \right|$$

bir Öklid n-norm ve $\langle .,. \rangle$, X de ki iç çarpımı göstermek üzere;

$$\|x_1, \ldots, x_n\|_S = \begin{vmatrix} \langle x_1, x_1 \rangle & \cdots & \langle x_1, x_n \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle x_n, x_1 \rangle & \cdots & \langle x_n, x_n \rangle \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}}$$

bir standart n-normdur.

Bu örneklerden Öklid n-normu ispatlayalım.

(i) $$\|x_1,\ldots,x_n\|_E=\left|\det\begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn}\end{pmatrix}\right|=0 \Leftrightarrow x_1,x_2,\ldots,x_n \text{ lineer bağımlıdır.}$$

(ii) $$\|x_1,x_2,\ldots,x_n\|_E=\|x_2,x_1,\ldots,x_n\|_E=\cdots$$

(iii) $$\det\begin{pmatrix} \alpha x_{11} & \cdots & \alpha x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn}\end{pmatrix}=\alpha\det\begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn}\end{pmatrix}$$

olduğunu biliyoruz. Yukarıdaki eşitlikte her iki tarafın mutlak değeri alınırsa,

$$\left|\det\begin{pmatrix} \alpha x_{11} & \cdots & \alpha x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn}\end{pmatrix}\right|=|\alpha|\left|\det\begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn}\end{pmatrix}\right|$$

eşitliği elde edilir. Bu ise,

$$\|\alpha x_1,x_2,\ldots,x_n\|_E=|\alpha|\|x_1,x_2,\ldots,x_n\|_E$$

demektir.

(iv) $n\times n$ tipindeki A ve B matrislerinin toplamının determinantı genellikle, A ve B matrislerinin determinantlarının toplamı değildir. Bu aşamada en iyi sonuç olarak şunu verebiliriz: Eğer A, B ve C, $n\times n$ tipinde matrisler k-inci satırı (sütunu) hariç diğer bütün satırları eşit ve C nin k-inci satırı A ve B nin k-inci satırlarının toplamı ise bu durumda

$$\det(C)=\det(A)+\det(B)$$

olur [25].

Bu durumda

$$\|x+y,x_2,\ldots,x_n\|_E \le \|x,x_2,\ldots,x_n\|_E + \|y,x_2,\ldots,x_n\|_E$$

olur. Dolayısıyla,

$$\|x_1,\ldots,x_n\|_E = \left|\det\begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix}\right|$$

bir n-normdur.

Tanım 4.1.3. [24] $x(k)$, $(X,\|.,\ldots,.\|)$ n-normlu uzayında bir dizi ve $x\in X$ olsun. Eğer $\forall x_1,x_2,\ldots x_{n-1}\in X$ için,

$$\lim_{k\to\infty}\|x_1,x_2,\ldots x_{n-1},x(k)-x\|=0$$

ise "$x(k)$ dizisi x noktasına yakınsıyor" denir. n-normlu uzayda tanımlanan bu yakınsamaya "n-norma göre yakınsama" denir.

Tanım 4.1.4. [24] $x(k)$, $(X,\|.,\ldots,.\|)$ n-normlu uzayında bir dizi olsun. Eğer $\forall x_1,x_2,\ldots x_{n-1}\in X$ için,

$$\lim_{k,l\to\infty}\|x_1,x_2,\ldots x_{n-1},x(k)-x(l)\|=0$$

ise bu "$x(k)$ dizisine n-norma göre "Cauchy dizisi" denir. Eğer X uzayında her Cauchy dizisi bir $x\in X$ noktasına yakınsak ise, X uzayına "n-norma göre tamdır" denir. n-normlu bir tam uzaya "n-Banach uzay" denir.

4.2. n-Normlu Uzaylarda İdeal Yakınsaklık

Bu bölümde n-normlu uzaylarda ideal yakınsaklık kavramını verilip, daha önce ideal yakınsaklık bölümünde verilen tanım ve teoremler n-normlu uzaylara genişletilmiştir.

Tanım 4.2.1. [26] $I \subset 2^{\mathbb{N}}$, $\mathbb{N}$ de bir gerçek ideal ve $(X, \|.,\ldots,.\|)$ bir n-normlu uzay olsun. Eğer $x_1, x_2, \ldots x_{n-1} \in X$ ve her $\varepsilon > 0$ için,

$$A(\varepsilon) = \{k \in \mathbb{N} : \|x_k - \xi, x_1, x_2, \ldots x_{n-1}\| \geq \varepsilon\} \in I$$

ise "$(x_k) \in X$ dizisi $\xi \in X$'e n-norma göre I-yakınsaktır" denir. Bu ifade

$$I - \lim_{n\to\infty} \|x_k - \xi, x_1, x_2, \ldots x_{n-1}\| = 0$$

ile gösterilir. Burada $\xi \in X$ elemanına "(x_n) dizisinin n-norma göre I-limiti" denir.

Lemma 4.2.2. [26] Eğer I bir uygun ideal ise, $(X, \|.,\ldots,.\|)$ n-normlu uzayındaki genel yakınsaklık $(X, \|.,\ldots,.\|)$ n-normlu uzayında I-yakınsaklığı gerektirir.

Şimdi I-yakınsaklık için verdiğimiz yakınsak aksiyomlarını n-normlu uzayda ideal yakınsaklık için verelim.

(i) $(X, \|.,\ldots,.\|)$ n-normlu uzayındaki her $\{\xi, \xi, \ldots, \xi, \ldots\}$ sabit dizisi ξ ye yakınsar.

(ii) $(X, \|.,\ldots,.\|)$ n-normlu uzayındaki her bir yakınsak dizinin limiti tek olarak belirlidir.

(iii) Eğer $(X, \|.,\ldots,.\|)$ n-normlu uzayındaki $x = (x_n)$ dizisinin limiti ξ ise, bu dizinin bütün alt dizilerinin limiti de aynıdır.

(iv) Eğer $(X,\|.,\dots,.\|)$ n-normlu uzayındaki $x=(x_n)$ dizisinin bütün alt dizileri ξ ye yakınsak ise o zaman $x=(x_n)$ de ξ ye yakınsar [26].

Önerme 4.2.3. [26] $(X,\|.,\dots,.\|)$ n-normlu uzayının en az iki noktası olduğunu kabul edelim. $I\subset 2^X$ bir uygun ideal olsun.

a. $(X,\|.,\dots,.\|)$ n-normlu uzayındaki I-yakınsaklık (i), (ii), (iv) şartlarını sağlar.

b. Eğer I sonsuz bir küme içeriyorsa, o zaman $(X,\|.,\dots,.\|)$ n-normlu uzayındaki I-yakınsaklık (iii) şartını sağlamaz.

Tanım 4.2.4. [26] $I\subset 2^{\mathbb{N}}$, $\mathbb{N}$ de bir gerçek ideal ve $(X,\|.,\dots,.\|)$ bir n-normlu uzay olsun. Eğer $z=x_1,x_2,\dots x_{n-1}\in X$ ve her $\varepsilon>0$ için,

$$A(\varepsilon)=\left\{k\in\mathbb{N}:\left\|x_k-x_{N(\varepsilon,z)},x_1,x_2,\dots x_{n-1}\right\|\geq\varepsilon\right\}\in I$$

olacak şekilde $N(\varepsilon,z)$ sayısı var ise "$(x_k)\in X$ dizisine n-norma göre I-Cauchy dizisi" denir.

Tanım 4.2.5. $I\subset 2^{\mathbb{N}}$, $\mathbb{N}$ de bir gerçek ideal, $(X,\|.,\dots,.\|)$ bir n-normlu uzay ve $\theta=(k_r)$ bir lacunary dizisi olsun. Eğer $x_1,x_2,\dots x_{n-1}\in X$ ve her $\varepsilon>0$ için,

$$A(\varepsilon)=\left\{r\in\mathbb{N}:\frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r}\left\|x_k-\xi,x_1,x_2,\dots x_{n-1}\right\|\geq\varepsilon\right\}\in I$$

ise "$(x_k)\in X$ dizisi $\xi\in X$ elemanına n-norma göre lacunary I-yakınsaktır" denir. Bu ifade

$$I_\theta-\lim_{n\to\infty}\left\|x_k-\xi,x_1,x_2,\dots x_{n-1}\right\|=0$$

ile gösterilir.

Tanım 4.2.6. $I \subset 2^{\mathbb{N}}$, $\mathbb{N}$ de bir gerçek ideal, $(X, \|., \ldots, .\|)$ bir n-normlu uzay ve $\Lambda = (\lambda_r)$ pozitif tam sayıların $\lambda_{r+1} \leq \lambda_r + 1$, $\lambda_1 = 1$ şartını sağlayan azalmayan ve sonsuza giden bir dizi olsun. Eğer $x_1, x_2, \ldots x_{n-1} \in X$ ve her $\varepsilon > 0$ için,

$$A(\varepsilon) = \left\{ r \in \mathbb{N} : \frac{1}{\lambda_r} \sum_{k \in I_r} \|x_k - \xi, x_1, x_2, \ldots x_{n-1}\| \geq \varepsilon \right\} \in I$$

ise "$(x_k) \in X$ dizisi $\xi \in X$ elemanına n-norma göre λ-ideal yakınsaktır" denir. Bu ifade

$$I_\lambda - \lim_{n \to \infty} \|x_k - \xi, x_1, x_2, \ldots x_{n-1}\| = 0$$

ile gösterilir.

BÖLÜM 5. MODÜLÜS FONKSİYONU İLE TANIMLI BAZI FARK DİZİ UZAYLARI

Bu bölümde en bilinen fark dizi uzayları tanımlanacak ve bazı özellikleri incelenecektir. Ayrıca fark dizilerinin genelleştirilmesi verilecektir.

5.1. Fark Dizi Uzayları

Tanım 5.1.1. Fark dizileri; $\Delta x = (x_k - x_{k+1})$ olmak üzere $\ell_\infty(\Delta), c(\Delta), c_0(\Delta)$ dizi uzayları

$$\ell_\infty(\Delta) = \{x = (x_k) : \Delta x \in \ell_\infty\}$$

$$c(\Delta) = \{x = (x_k) : \Delta x \in c\}$$

$$c_0(\Delta) = \{x = (x_k) : \Delta x \in c_0\}$$

olarak Kızmaz [7] tarafından tanımlandı.

Teorem 5.1.2. [7] $\ell_\infty(\Delta), c(\Delta), c_0(\Delta)$ dizi uzayları

$$\|x\|_\Delta = |x_1| + \|\Delta x\|_\infty$$

normu ile birer normlu uzaydır.

İspat: X ; $\ell_\infty(\Delta), c(\Delta), c_0(\Delta)$ dizi uzaylarından birini göstermek üzere $x, y \in X$ ve α bir skaler olsun.

N1) $\|x\|_\Delta = |x_1| + \|\Delta x\|_\infty \geq 0$

N2) $\|x\|_\Delta = |x_1| + \|\Delta x\|_\infty = 0$ olsun. Bu takdirde $x_1 = 0$ ve her $k \in \mathbb{N}$ için $|x_k - x_{k+1}| = 0$ olur. Buradan her $k \in \mathbb{N}$ için $x_k = 0$ elde edilir. O halde $x = 0$ dır. Aksine $x = 0$ olması halinde $\|x\|_\Delta = 0$ olması aşikardır.

N3)

$$\begin{aligned}
\|\alpha x\|_\Delta &= |\alpha x_1| + \sup_k |\alpha(x_k - x_{k+1})| \\
&= |\alpha||x_1| + |\alpha| \sup_k |(x_k - x_{k+1})| \\
&= |\alpha| \left(|x_1| + \sup_k |x_k - x_{k+1}| \right) \\
&= |\alpha| \|x\|_\Delta
\end{aligned}$$

N4)

$$\begin{aligned}
\|x+y\|_\Delta &= |x_1 + y_1| + \sup_k |(x_k + y_k) - (x_{k+1} + y_{k+1})| \\
&= |x_1 + y_1| + \sup_k |(x_k - x_{k+1}) + (y_k - y_{k+1})| \\
&\leq |x_1| + \sup_k |x_k - x_{k+1}| + |y_1| + \sup_k |y_k - y_{k+1}| \\
&\leq \|x\|_\Delta + \|y\|_\Delta
\end{aligned}$$

Teorem 5.1.3. [7] $\ell_\infty(\Delta)$ dizi uzayı

$$\|x\|_\Delta = |x_1| + \|\Delta x\|_\infty$$

normu ile bir Banach uzayıdır.

İspat: $x^s = (x_1^s, x_2^s, x_3^s, \ldots) \in \ell_\infty(\Delta)$ olmak üzere (x^s), $\ell_\infty(\Delta)$ da bir Cauchy dizisi olsun. Bu durumda $s,t \to \infty$ için

$$\|x^s - x^t\|_\Delta = |x_1^s - x_1^t| + \|\Delta(x^s - x^t)\|_\infty \to 0$$

olur. Buradan $s,t \to \infty$ için

$$|x_1^s - x_1^t| \to 0$$

ve her $k \in \mathbb{N}$ için

$$|(x_k^s - x_k^t) - (x_{k+1}^s - x_{k+1}^t)| \to 0$$

olur. Buna göre (x_1^s), $\mathbb{C}$ de bir Cauchy dizisidir.

$$|x_{k+1}^s - x_{k+1}^t| \leq |(x_k^s - x_k^t) - (x_{k+1}^s - x_{k+1}^t)| + |x_k^s - x_k^t|$$

olmasından dolayı her $k \in \mathbb{N}$ ve $s,t \to \infty$ için,

$$|x_k^s - x_k^t| \to 0$$

elde edilir.

Buna göre $x_k^s = (x_k^1, x_k^2, x_k^3, \ldots)$ dizisi her sabit $k = 1,2,3,\ldots$ için $\mathbb{C}$ de bir Cauchy dizisidir. $\mathbb{C}$ tam olduğundan (x_k^s), $\mathbb{C}$ de yakınsaktır. $\lim_s x_k^s = x_k$, $(k = 1,2,3,\ldots)$ diyelim. (x_s), $\ell_\infty(\Delta)$ da bir Cauchy dizisi olduğundan her $\varepsilon > 0$ için $s,t \geq N$ iken

$\left\|x^s - x^t\right\|_\Delta \leq \varepsilon$ olacak şekilde bir $N = N(\varepsilon)$ doğal sayısı vardır. O halde her $s, t \geq N$ için

$$\left|x_1^s - x_1^t\right| < \varepsilon$$

ve her bir k için

$$\left|\left(x_k^s - x_k^t\right) - \left(x_{k+1}^s - x_{k+1}^t\right)\right| < \varepsilon$$

olur. Bu son iki ifade de $t \to \infty$ için limit alınırsa her $s \geq N$ için

$$\lim_t \left|\left(x_k^s - x_k^t\right) - \left(x_{k+1}^s - x_{k+1}^t\right)\right| = \left|\left(x_k^s - x_k\right) - \left(x_{k+1}^s - x_{k+1}\right)\right| < \varepsilon$$

bulunur. Buradan $s \geq N$ için

$$\left\|x^s - x\right\|_\Delta = \left|x_1^s - x_1\right| + \sup_k \left|\left(x_k^s - x_k\right) - \left(x_{k+1}^s - x_{k+1}\right)\right| < 2\varepsilon$$

elde edilir. Bu ise $\lim_s x^s = x$ demektir.

Şimdi de $x = (x_k) \in \ell_\infty(\Delta)$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}\left|x_k - x_{k+1}\right| &= \left|x_k - x_{k+1} - x_k^N + x_k^N - x_{k+1}^N + x_{k+1}^N\right| \\ &\leq \left|\left(x_k - x_k^N\right) - \left(x_{k+1} - x_{k+1}^N\right)\right| + \left|x_k^N - x_{k+1}^N\right| \\ &\leq \left\|x^N - x\right\|_\Delta + \left|x_k^N - x_{k+1}^N\right|\end{aligned}$$

olması nedeniyle $x = (x_k) \in \ell_\infty(\Delta)$ elde edilir. O halde $\left(\ell_\infty(\Delta), \|\cdot\|_\Delta\right)$ bir Banach uzayı olur.

Sonuç 5.1.4. $c(\Delta)$ ve $c_0(\Delta)$ uzayları $\ell_\infty(\Delta)$ uzayının birer kapalı alt uzayı olduklarından $\|x\|_\Delta = |x_1| + \|\Delta x\|_\infty$ normu ile birer Banach uzayıdırlar.

5.2. Genelleştirilmiş Fark Dizi Uzayları

Et ve Çolak [27] genelleştirilmiş fark dizi uzaylarını, m bir pozitif tam sayı ve

$\Delta^0 x = (x_k)$, $\Delta x = (x_k - x_{k+1})$,

$\Delta^m x = (\Delta^m x_k)$, $\Delta^m x_k = \Delta^{m-1} x_k - \Delta^{m-1} x_{k+1}$

olmak üzere

$$\ell_\infty(\Delta^m) = \{x = (x_k) : \Delta^m x \in \ell_\infty\}$$

$$c(\Delta^m) = \{x = (x_k) : \Delta^m x \in c\}$$

$$c_0(\Delta^m) = \{x = (x_k) : \Delta^m x \in c_0\}$$

olarak tanımladılar ve bu uzayların

$$\Delta^m x_k = \sum_{v=0}^{m} (-1)^v \binom{m}{v} x_{k+v}$$

olmak üzere

$$\|x\|_\Delta = \sum_{i=1}^{m} |x_i| + \|\Delta^m x\|_\infty$$

normu ile birer Banach uzayı olduklarını gösterdiler.

Başar ve Altay [28] Δ fark operatörünün bir genellemesi olan B fark operatörünü tanımladılar ve daha sonra Başarır ve Kayıkçı [29] $s=1$, $t=-1$ ve binomial gösterimi

$$B^m x_k = \sum_{v=0}^{m} (mv) s^{m-v} t^v x_{k+v}$$

olan B^m operatörünü tanımladılar.

X herhangi bir dizi uzayı olmak üzere $X(\Delta)$ dizi uzayını

$$X(\Delta) = \{x = (x_k) : \Delta x \in X\}$$

şeklinde tanımlayalım.

$X(\Delta)$ uzayının bazı topolojik özelliklerini aşağıdaki teoremlerde verebiliriz.

Teorem 5.2.1. [30] $X \subset Y$ ise $X(\Delta) \subset Y(\Delta)$ dır.

Teorem 5.2.2. [30] X bir vektör uzayı ve $A \subset X$ olsun. A konveks ise $A(\Delta)$ ve $X(\Delta)$ da konvekstir.

Teorem 5.2.3. [30] X, $\|\cdot\|$ normu ile bir Banach uzayı ise $X(\Delta)$

$$\|x\|_\Delta = |x_1| + \|\Delta x\|$$

normu ile Banach uzayıdır.

5.3. $W^I(N_\theta, \Delta^m, f, p, \|\cdot,\ldots,\cdot\|)$ ve $W_0^I(N_\theta, \Delta^m, f, p, \|\cdot,\ldots,\cdot\|)$ Dizi Uzayları

$\theta = (k_r)$ pozitif tam sayıların $k_0 = 0$ ve $r \to \infty$ iken $h_r = k_r - k_{-1} \to \infty$ şartını sağlayan artan bir dizisi ve I, $\mathbb{N}$ nin bir uygun ideali olsun. f bir modülüs fonksiyonu, $(X, \|\cdot,\ldots,\cdot\|)$ bir n-normlu uzay ve $p = (p_k)$ pozitif reel sayıların sınırlı bir dizisi olsun. $S(n-X)$ ile $(X,\|.,...,.\|)$ üzerinde tanımlı bütün dizilerin uzayını göstersin.

$$W^I\left(N_\theta,\Delta^m,f,p,\|.,\ldots,.\|\right)=$$
$$\left\{\begin{array}{l} x\in S(n-X):\left\{r\in\mathbb{N}:\dfrac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r}\left[f\left(\left\|\Delta^m x_k-L,z_1,z_2,\ldots,z_{n-1}\right\|\right)\right]^{p_k}\geq\varepsilon\right\}\in I, \\ \text{bazı } L>0, \text{ ve herbir } z_1,z_2,\ldots,z_{n-1}\in X \text{ için}\end{array}\right\},$$

$$W_0^I\left(N_\theta,\Delta^m,f,p,\|.,\ldots,.\|\right)=$$
$$\left\{\begin{array}{l} x\in S(n-X):\left\{r\in\mathbb{N}:\dfrac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r}\left[f\left(\left\|\Delta^m x_k,z_1,z_2,\ldots,z_{n-1}\right\|\right)\right]^{p_k}\geq\varepsilon\right\}\in I, \\ \text{herbir } z_1,z_2,\ldots,z_{n-1}\in X\end{array}\right\}$$

dizi uzayları Şahiner ve Akın [31] tarafından tanımlandı.

Teorem 5.3.1. [31] $W^I\left(N_\theta,\Delta^m,f,p,\|.,\ldots,.\|\right)$ ve $W_0^I\left(N_\theta,\Delta^m,f,p,\|.,\ldots,.\|\right)$ dizi uzayları birer lineer uzaydır.

İspat. İspatı yalnızca $W_0^I\left(N_\theta,\Delta^m,f,p,\|.,\ldots,.\|\right)$ dizi uzayı için yapacağız. Diğeri için benzer şekilde ispatlanabilir. Kabul edelim ki $x,y\in W_0^I\left(N_\theta,\Delta^m,f,p,\|.,\ldots,.\|\right)$ ve $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$ olsun. Böylece

$$\left\{r\in\mathbb{N}:\frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r}\left[f\left(\left\|\Delta^m x_k,z_1,z_2,\ldots,z_{n-1}\right\|\right)\right]^{p_k}\geq\varepsilon\right\}\in I$$

ve

$$\left\{r\in\mathbb{N}:\frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r}\left[f\left(\left\|\Delta^m y_k,z_1,z_2,\ldots,z_{n-1}\right\|\right)\right]^{p_k}\geq\varepsilon\right\}\in I$$

elde edilir.

$\|.,\ldots,.\|$ bir n-norm, f bir modülüs fonksiyonu ve Δ^m nin lineerliğinden

$$\frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r}\left[f\left(\left\|\Delta^m\left(\alpha x_k+\beta y_k\right),z_1,z_2,\ldots,z_{n-1}\right\|\right)\right]^{p_k}$$
$$\leq DT_\alpha^{\sup p_k}\frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r}\left[f\left(\left\|\Delta^m x_k,z_1,z_2,\ldots,z_{n-1}\right\|\right)\right]^{p_k}+DT_\beta^{\sup p_k}\frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r}\left[f\left(\left\|\Delta^m y_k,z_1,z_2,\ldots,z_{n-1}\right\|\right)\right]^{p_k}$$

eşitsizliği elde edilir. Yukarıdaki eşitsizlikte T_α ve T_β, $|\alpha|\leq T_\alpha$ ve $|\beta|\leq T_\beta$ şartlarını sağlayan birer pozitif tamsayıdırlar. Yukarıdaki eşitsizlikten aşağıdaki kapsamayı elde ederiz.

$$\left\{r\in\mathbb{N}:\frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r}\left[f\left(\left\|\Delta^m\left(\alpha x_k+\beta y_k\right),z_1,z_2,\ldots,z_{n-1}\right\|\right)\right]^{p_k}\geq\varepsilon\right\}\subseteq$$
$$\left\{r\in\mathbb{N}:DT_\alpha^{\sup p_k}\frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r}\left[f\left(\left\|\Delta^m x_k,z_1,z_2,\ldots,z_{n-1}\right\|\right)\right]^{p_k}\geq\varepsilon\right\}$$
$$\cup\left\{r\in\mathbb{N}:DT_\beta^{\sup p_k}\frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r}\left[f\left(\left\|\Delta^m y_k,z_1,z_2,\ldots,z_{n-1}\right\|\right)\right]^{p_k}\geq\varepsilon\right\}.$$

Kapsamanın sağındaki iki küme I ya aittir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 5.3.2. [31] f bir modülüs fonksiyonu olsun. Bu takdirde

$$W^I\left(N_\theta,\Delta^m,p,\|.,\ldots,.\|\right)\subset W^I\left(N_\theta,\Delta^m,f,p,\|.,\ldots,.\|\right)$$

kapsaması sağlanır.

İspat. $x\in W^I\left(N_\theta,\Delta^m,p,\|.,\ldots,.\|\right)$ ise

$$\left\{r \in \mathbb{N} : \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} \left[\left(\left\| \Delta^m x_k - L, z_1, z_2, \ldots, z_{n-1} \right\| \right) \right]^{p_k} \geq \varepsilon \right\} \in I$$

olur. Şimdi f nin sürekliliğini kullanırsak; verilmiş bir $\varepsilon > 0$ için, $0 < \delta < 1$ öyleki her t için $0 \leq t \leq \delta \Rightarrow f(t) < \varepsilon$ seçelim. Buradan aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz.

$$\frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} \left[f\left(\left\| \Delta^m x_k - L, z_1, z_2, \ldots, z_{n-1} \right\| \right) \right]^{p_k} = \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r, \left\| \Delta^m x_k - L, z_1, z_2, \ldots, z_{n-1} \right\| \leq \delta} \left[f\left(\left\| \Delta^m x_k - L, z_1, z_2, \ldots, z_{n-1} \right\| \right) \right]^{p_k}$$

$$+ \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r, \left\| \Delta^m x_k - L, z_1, z_2, \ldots, z_{n-1} \right\| > \delta} \left[f\left(\left\| \Delta^m x_k - L, z_1, z_2, \ldots, z_{n-1} \right\| \right) \right]^{p_k}$$

$$\leq \frac{1}{h_r} \left(h_r \max\left(\varepsilon^{\inf p_k}, \varepsilon^{\sup p_k} \right) \right) + \max\{a_1, a_2\} \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} \left[\left(\left\| \Delta^m x_k, z_1, z_2, \ldots, z_{n-1} \right\| \right) \right]^{p_k}.$$

Yukarıdaki eşitsizlikte $a_1 = \left(2f(1)\delta^{-1}\right)^{\inf p_k}$, $a_2 = \left(2f(1)\delta^{-1}\right)^{\sup p_k}$ dır. Buradan

$$\left\{ r \in \mathbb{N} : \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} \left[f\left(\left\| \Delta^m x_k - L, z_1, z_2, \ldots, z_{n-1} \right\| \right) \right]^{p_k} \geq \varepsilon \right\} = \left\{ r \in \mathbb{N} : \frac{1}{h_r} \left(h_r \max\left(\varepsilon^{\inf p_k}, \varepsilon^{\sup p_k} \right) \right) \geq \varepsilon \right\}$$

$$\cup \left\{ r \in \mathbb{N} : \max(a_1, a_2) \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} \left[\left(\left\| \Delta^m x_k - L, z_1, z_2, \ldots, z_{n-1} \right\| \right) \right]^{p_k} \right\}$$

kapsaması elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 5.3.3. [31] f bir modülüs fonksiyonu olsun. Eğer

$$\limsup_{t \to \infty} \frac{f(t)}{t} = \gamma > 0,$$

ise aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$W^I\left(N_\theta, \Delta^m, f, p, \|.,\ldots,.\|\right) = W^I\left(N_\theta, \Delta^m, p, \|.,\ldots,.\|\right).$$

İspat. Teorem 5.3.2 den yalnızca $W^I\left(N_\theta,\Delta^m,f,p,\|.,\ldots,.\|\right)\subseteq W^I\left(N_\theta,\Delta^m,p,\|.,\ldots,.\|\right)$ kapsamasını göstermek yeterli olacaktır.

$\gamma>0$ olduğundan, her $t\geq 0$ için, $f(t)\geq Bt$ olacak şekilde $B>1$ sabiti vardır. Buradan

$$\frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r}\left[f\left(\left\|\Delta^m x_k-L,z_1,z_2,\ldots,z_{n-1}\right\|\right)\right]^{p_k}\geq B^{\sup p_k}\frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r}\left(\left\|\Delta^m x_k-L,z_1,z_2,\ldots,z_{n-1}\right\|\right)^{p_k}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Bu da bize istediğimiz sonucu verir.

Teorem 5.3.4. [31] f_1 ve f_2 birer modülüs fonksiyonu olsunlar. Eğer

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{f_1(t)}{f_2(t)}>0$$

ise

$$W^I\left(N_\theta,\Delta^m,f_1(t),p,\|.,\ldots,.\|\right)\subseteq W^I\left(N_\theta,\Delta^m,f_2(t),p,\|.,\ldots,.\|\right)$$

kapsaması sağlanır.

Teorem 5.3.5. [31] $\left(X,\|.,\ldots,.\|_E\right)$ ve $\left(X,\|.,\ldots,.\|_S\right)$ sırasıyla Standard ve Euclid n-normlu uzaylar olsunlar. Bu halde

$$W^I\left(N_\theta,\Delta^m,f,p,\|.,\ldots,.\|_E\right)\cap W^I\left(N_\theta,\Delta^m,f,p,\|.,\ldots,.\|_S\right)\subseteq W^I\left(N_\theta,\Delta^m,f,p,\left(\|.,\ldots,.\|_E+\|.,\ldots,.\|_S\right)\right)$$

kapsaması geçerlidir.

İspat. $x\in W^I\left(N_\theta,B^m,F,p,\|.,\ldots,.\|_E\right)\cap W^I\left(N_\theta,B^m,F,p,\|.,\ldots,.\|_S\right)$ alalım. Bu halde

$$\frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r}\left[f\left(\left(\|.,\ldots,.\|_E+\|.,\ldots,.\|_S\right)\left(\Delta^m x_k-L,z_1,z_2,\ldots,z_{n-1}\right)\right)\right]^{p_k}$$

$$\leq D\frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r}\left[f\left(\left\|\Delta^m x_k-L,z_1,z_2,\ldots,z_{n-1}\right\|_E\right)\right]^{p_k}+D\frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r}\left[f\left(\left\|\Delta^m x_k-L,z_1,z_2,\ldots,z_{n-1}\right\|_S\right)\right]^{p_k}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Bu da bize ispatı verir.

Teorem 5.3.6. [31] f, f_1, f_2 birer modülüs fonksiyonu olsunlar. Bu takdirde aşağıdaki kapsamalar sağlanır.

i- $W_0^I\left(N_\theta,\Delta^m,f,p,\|.,\ldots,.\|\right)\subseteq W_0^I\left(f\circ f_1,\Delta^m,p,\|.,\ldots,.\|\right)$

ii- $W_0^I\left(N_\theta,\Delta^m,f_1,p,\|.,\ldots,.\|\right)\cap W_0^I\left(N_\theta,\Delta^m,f,p,\|.,\ldots,.\|\right)\subseteq W_0^I\left(f+f_1,\Delta^m,p,\|.,\ldots,.\|\right)$

iii- $W^I\left(N_\theta,\Delta^m,f,p,\|.,\ldots,.\|\right)\subseteq W^I\left(f\circ f_1,\Delta^m,p,\|.,\ldots,.\|\right)$

iv- $W^I\left(N_\theta,\Delta^m,f_1,p,\|.,\ldots,.\|\right)\cap W^I\left(N_\theta,\Delta^m,f,p,\|.,\ldots,.\|\right)\subseteq W^I\left(f+f_1,\Delta^m,p,\|.,\ldots,.\|\right)$

İspat. İspatı yalnızca (i) ve (ii) şıkları için yapacağız.

(i) f nin sürekliliğini kullanırsak; verilmiş bir $\varepsilon>0$ için, $0<\delta<1$ öyle ki $0<t<\delta\Rightarrow f(t)<\varepsilon$ seçelim. Şimdi $(x_k)\in W^I\left(N_\theta,\Delta^m,f,p,\|.,\ldots,.\|\right)$ olsun. Buradan aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz.

$$\frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_1}\left[f\left(f_1\left(\left\|\Delta^m x_k,z_1,z_2,\ldots,z_{n-1}\right\|\right)\right)\right]^{p_k}+\sum_{k\in I_2}\left[f\left(f_1\left(\left\|\Delta^m x_k,z_1,z_2,\ldots,z_{n-1}\right\|\right)\right)\right]^{p_k}$$

$$\leq\frac{1}{n}n\sup_k\varepsilon^{p_k}+\max\left(1,\left(K\delta^{-1}f(2)\right)^H\right)\frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r}\left[f_1\left(\left\|\Delta^m x_k,z_1,z_2,\ldots,z_{n-1}\right\|\right)\right]^{p_k}.$$

Yukarıdaki eşitsizlikte ilk toplam $\left[f_1\left(\left\|\Delta^m x_k,z_1,z_2,\ldots,z_{n-1}\right\|\right)\right]^{p_k}\leq\delta$, ikinci toplam $\left[f_1\left(\left\|\Delta^m x_k,z_1,z_2,\ldots,z_{n-1}\right\|\right)\right]^{p_k}>\delta$ üzerindendir ve $K\geq 1$ dir. Böylece

$$\left\{r\in\mathbb{N}:\frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r}\left[f\left(f_1\left(\left\|\Delta^m x_k,z_1,z_2,\ldots,z_{n-1}\right\|\right)\right)\right]^{p_k}\geq\varepsilon\right\}\subseteq\left\{r\in\mathbb{N}:\sup_k\varepsilon^{p_k}\geq\varepsilon\right\}$$

$$\cup\left\{r\in\mathbb{N}:\max\left(1,\left(K\delta^{-1}f(2)\right)^H\right)\frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r}\left[f_1\left(\left\|\Delta^m x_k,z_1,z_2,\ldots,z_{n-1}\right\|\right)\right]^{p_k}\right\}$$

kapsaması elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

(ii) $(x_k)\in W_0^I\left(N_\theta,\Delta^m,f_1,p,\|.,\ldots,.\|\right)\cap W_0^I\left(N_\theta,\Delta^m,f,p,\|.,\ldots,.\|\right)$ olsun. Buradan

$$\frac{1}{h_r}\left[f_1+f_2\left(\left\|\Delta^m x_k,z_1,z_2,\ldots,z_{n-1}\right\|\right)\right]^{p_k}\leq$$

$$D\frac{1}{h_r}\left[f_1\left(\left\|\Delta^m x_k,z_1,z_2,\ldots,z_{n-1}\right\|\right)\right]^{p_k}+D\frac{1}{h_r}\left[f_2\left(\left\|\Delta^m x_k,z_1,z_2,\ldots,z_{n-1}\right\|\right)\right]^{p_k}$$

elde edilir. Bu da bize ispatı verir.

Teorem 5.3.7. [31] $m\geq 1$ olsun, bu durumda aşağıdaki kapsamalar sağlanır.

(i) $W_0^I\left(N_\theta,\Delta^{m-1},f,p,\|.,\ldots,.\|\right)\subseteq W_0^I\left(N_\theta,\Delta^m,f,p,\|.,\ldots,.\|\right)$

(ii) $W^I\left(N_\theta,\Delta^{m-1},f,p,\|.,\ldots,.\|\right)\subseteq W^I\left(N_\theta,\Delta^m,f,p,\|.,\ldots,.\|\right)$

İspat. (i) $x\in W_0^I\left(N_\theta,\Delta^{m-1},f,p,\|.,\ldots,.\|\right)$ olsun. Böylece

$$\left\{r\in\mathbb{N}:\frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r}\left[f\left(\left\|\Delta^{m-1}x_k,z_1,z_2,\ldots,z_{n-1}\right\|\right)\right]^{p_k}\geq\varepsilon\right\}\in I$$

elde ederiz. f bir modülüs fonksiyonu olduğundan,

$$\frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r}\left[f\left(\left\|\Delta^m x_k,z_1,z_2,\ldots,z_{n-1}\right\|\right)\right]^{p_k}$$

$$\leq D\left\{\frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r}\left[f\left(\left\|\Delta^{m-1}x_{k+1}, z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}\right\|\right)\right]^{p_k} + \frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r}\left[f\left(\left\|\Delta^{m-1}x_k, z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}\right\|\right)\right]^{p_k}\right\}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Sonuç olarak yukarıdaki eşitsizlikten aradığımız sonuca ulaşırız.

(ii) Benzer şekilde ispatlanabilir.

BÖLÜM 6. n-NORMLU UZAYLARDA MODÜLÜS FONKSİYONU TARAFINDAN TANIMLI BAZI İDEAL YAKINSAK DİZİ UZAYLARI

Bu bölümde bir modülüs fonksiyonu ve bir fark dizisi kullanarak n-normlu uzaylarda λ-ideal yakınsak $W^I\left(\lambda, B^m, F, p, \|\cdot, \ldots, \cdot\|\right)$, $W_0^I\left(\lambda, B^m, F, p, \|\cdot, \ldots, \cdot\|\right)$ ve $W_\infty^I\left(\lambda, B^m, F, p, \|\cdot, \ldots, \cdot\|\right)$ dizi uzaylarını tanımlayacak ve bu uzayların bazı özelliklerini inceleyeceğiz.

$\Lambda = (\lambda_r)$ pozitif tamsayıların $\lambda_{r+1} \leq \lambda_r + 1$, $\lambda_1 = 1$ şartını sağlayan, azalmayan ve sonsuza giden bir dizisi ve I, $\mathbb{N}$ nin bir uygun ideali olsun.. $F = (f_k)$

i) $\forall x > 0$ için $\sup_k f(x) > 0$

ii) $\lim_{x \to 0} f_k(x) = 0$, k ya göre düzgün

şartlarını sağlayan bir modülüs fonksiyon dizisi olsun.

$\left(X, \|\cdot, \ldots, \cdot\|\right)$ bir n-normlu uzay ve $p = (p_k)$ pozitif reel sayıların sınırlı bir dizisi olsun. $S(n-X)$ ile $\left(X, \|\cdot, \ldots, \cdot\|\right)$ üzerinde tanımlı bütün dizilerin uzayını göstermek üzere

$$W^I\left(\lambda, B^m, F, p, \|\cdot, \ldots, \cdot\|\right) =$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x \in S(n-X) : \forall \varepsilon > 0 \left\{ r \in \mathbb{N} : \dfrac{1}{\lambda_r} \sum_{k \in I_r} \left[f_k\left(\left\| B^m x_k - L, z_1, z_2, \ldots, z_{n-1} \right\| \right) \right]^{p_k} \geq \varepsilon \right\} \in I, \\ \text{bazı } L > 0, \text{ ve herbir } z_1, z_2, \ldots, z_{n-1} \in X \text{ için} \end{array} \right\},$$

$$W_0^I\left(\lambda, B^m, F, p, \|.,\ldots,.\|\right) =$$

$$\left\{\begin{array}{l} x \in S(n-X) : \forall \varepsilon > 0 \left\{ r \in \mathbb{N} : \frac{1}{\lambda_r} \sum_{k \in I_r} \left[f_k \left(\left\| B^m x_k, z_1, z_2, \ldots, z_{n-1} \right\| \right) \right]^{p_k} \geq \varepsilon \right\} \in I, \\ \text{herbir } z_1, z_2, \ldots, z_{n-1} \in X \end{array}\right\}$$

ve

$$W_\infty^I\left(\lambda, B^m, F, p, \|.,\ldots,.\|\right) =$$

$$\left\{\begin{array}{l} x \in S(n-X) : \exists K > 0 \text{ öyleki} \left\{ r \in \mathbb{N} : \frac{1}{\lambda_r} \sum_{k \in I_r} \left[f_k \left(\left\| B^m x_k - L, z_1, z_2, \ldots, z_{n-1} \right\| \right) \right]^{p_k} \geq K \right\} \in I, \\ \text{herbir } z_1, z_2, \ldots, z_{n-1} \in X \end{array}\right\}$$

ile tanımlansın.

Teorem 6.1. $W^I\left(\lambda, B^m, F, p, \|.,\ldots,.\|\right)$, $W_0^I\left(\lambda, B^m, F, p, \|.,\ldots,.\|\right)$ ve $W_\infty^I\left(\lambda, B^m, F, p, \|.,\ldots,.\|\right)$ dizi uzayları birer lineer uzaydır.

İspat. İspatı yalnızca $W_0^I\left(\lambda, B^m, F, p, \|.,\ldots,.\|\right)$ dizi uzayı için yapacağız. Diğerleri için benzer şekilde ispatlanabilir. Kabul edelim ki $x, y \in W_0^I\left(\lambda, B^m, F, p, \|.,\ldots,.\|\right)$ ve $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ olsun. Böylece

$$\left\{ r \in \mathbb{N} : \frac{1}{\lambda_r} \sum_{k \in I_r} \left[f_k \left(\left\| B^m x_k, z_1, z_2, \ldots, z_{n-1} \right\| \right) \right]^{p_k} \geq \varepsilon \right\} \in I$$

ve

$$\left\{ r \in \mathbb{N} : \frac{1}{\lambda_r} \sum_{k \in I_r} \left[f_k \left(\left\| B^m y_k, z_1, z_2, \ldots, z_{n-1} \right\| \right) \right]^{p_k} \geq \varepsilon \right\} \in I$$

elde edilir.

$\|.,\ldots,.\|$ bir n-norm ve f_k, her k için bir modülüs fonksiyonu olduğundan ve B^m nin lineerliğinden

$$\frac{1}{\lambda_r}\sum_{k\in I_r}\left[f_k\left(\left\|B^m(\alpha x_k+\beta y_k),z_1,z_2,\ldots,z_{n-1}\right\|\right)\right]^{p_k}$$

$$=\frac{1}{\lambda_r}\sum_{k\in I_r}\left[f_k\left(\left\|\alpha B^m x_k+\beta B^m y_k,z_1,z_2,\ldots,z_{n-1}\right\|\right)\right]^{p_k}$$

$$\leq\frac{1}{\lambda_r}\sum_{k\in I_r}\left[f_k\left(\left\|\alpha B^m x_k,z_1,z_2,\ldots,z_{n-1}\right\|+\left\|\beta B^m y_k,z_1,z_2,\ldots,z_{n-1}\right\|\right)\right]^{p_k}$$

$$=\frac{1}{\lambda_r}\sum_{k\in I_r}\left[f_k\left(|\alpha|\left\|B^m x_k,z_1,z_2,\ldots,z_{n-1}\right\|+|\beta|\left\|B^m y_k,z_1,z_2,\ldots,z_{n-1}\right\|\right)\right]^{p_k}$$

$$\leq\frac{1}{\lambda_r}\sum_{k\in I_r}\left[f_k\left(|\alpha|\left\|B^m x_k,z_1,z_2,\ldots,z_{n-1}\right\|\right)+f_k\left(|\beta|\left\|B^m y_k,z_1,z_2,\ldots,z_{n-1}\right\|\right)\right]^{p_k}$$

$$\leq\frac{1}{\lambda_r}\sum_{k\in I_r}\left[T_\alpha f_k\left(\left\|B^m x_k,z_1,z_2,\ldots,z_{n-1}\right\|\right)+T_\beta f_k\left(\left\|B^m y_k,z_1,z_2,\ldots,z_{n-1}\right\|\right)\right]^{p_k}$$

$$\leq D\frac{1}{\lambda_r}\sum_{k\in I_r}\left[T_\alpha f_k\left(\left\|B^m x_k,z_1,z_2,\ldots,z_{n-1}\right\|\right)\right]^{p_k}+D\frac{1}{\lambda_r}\sum_{k\in I_r}\left[T_\beta f_k\left(\left\|B^m y_k,z_1,z_2,\ldots,z_{n-1}\right\|\right)\right]^{p_k}$$

$$\leq DT_\alpha^{\sup p_k}\frac{1}{\lambda_r}\sum_{k\in I_r}\left[f_k\left(\left\|B^m x_k,z_1,z_2,\ldots,z_{n-1}\right\|\right)\right]^{p_k}+DT_\beta^{\sup p_k}\frac{1}{\lambda_r}\sum_{k\in I_r}\left[f_k\left(\left\|B^m y_k,z_1,z_2,\ldots,z_{n-1}\right\|\right)\right]^{p_k}$$

eşitsizliği elde edilir. Yukarıdaki eşitsizliklerde T_α ve T_β, $|\alpha|\leq T_\alpha$ ve $|\beta|\leq T_\beta$ şartlarını sağlayan birer pozitif tamsayıdırlar. Yukarıdaki son eşitsizlikten aşağıdaki kapsama elde edelir.

$$\left\{r\in\mathbb{N}:\frac{1}{\lambda_r}\sum_{k\in I_r}\left[f_k\left(\left\|B^m(\alpha x_k+\beta y_k),z_1,z_2,\ldots,z_{n-1}\right\|\right)\right]^{p_k}\geq\varepsilon\right\}\subseteq$$

$$\left\{r\in\mathbb{N}:DT_\alpha^{\sup p_k}\frac{1}{\lambda_r}\sum_{k\in I_r}\left[f_k\left(\left\|B^m x_k,z_1,z_2,\ldots,z_{n-1}\right\|\right)\right]^{p_k}\geq\varepsilon\right\}$$

$$\cup\left\{r\in\mathbb{N}:DT_\beta^{\sup p_k}\frac{1}{\lambda_r}\sum_{k\in I_r}\left[f_k\left(\left\|B^m y_k,z_1,z_2,\ldots,z_{n-1}\right\|\right)\right]^{p_k}\geq\varepsilon\right\}.$$

Kapsamanın sağındaki iki küme I ya aittir. İdealin (iii) şartından sol taraftaki küme de I ya ait olur. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 6.2. $F=(f_k)$ ve $G=(g_k)$ birer modülüs fonksiyon dizisi olsunlar ve $h=\inf p_k>0$ olsun. Bu takdirde aşağıdaki kapsamalar sağlanır:

i- $W^I\left(\lambda,B^m,F,p,\|.,\ldots,.\|\right)\subseteq W^I\left(\lambda,B^m,G\circ F,p,\|.,\ldots,.\|\right)$

ii- $W_0^I\left(\lambda,B^m,F,p,\|.,\ldots,.\|\right)\subseteq W_0^I\left(\lambda,B^m,G\circ F,p,\|.,\ldots,.\|\right)$

iii- $W^I\left(\lambda,B^m,F,p,\|.,\ldots,.\|\right)\cap W^I\left(\lambda,B^m,G,p,\|.,\ldots,.\|\right)\subseteq W^I\left(\lambda,B^m,F+G,p,\|.,\ldots,.\|\right)$

iv- $W_0^I\left(\lambda,B^m,F,p,\|.,\ldots,.\|\right)\cap W_0^I\left(\lambda,B^m,G,p,\|.,\ldots,.\|\right)\subseteq W_0^I\left(\lambda,B^m,F+G,p,\|.,\ldots,.\|\right)$

İspat. **(i)** F nin sürekliliği kullanılırsa; verilmiş bir $\varepsilon>0$ için, öncelikle $\max\left\{\varepsilon_0^{\sup p_k},\varepsilon_0^{\inf p_k}\right\}<\varepsilon$ şartını sağlayan $\varepsilon_0>0$ seçelim ve $0<\delta<1$ öyle ki her k için $0<t<\delta\Rightarrow f_k(t)<\varepsilon_0$ alınabilir. Şimdi $(x_k)\in W^I\left(\lambda,B^m,F,p,\|.,\ldots,.\|\right)$ olsun. Böylece

$$A(\delta)=\left\{r\in\mathbb{N}:\frac{1}{\lambda_r}\sum_{k\in I_r}\left[f_k\left(\left\|B^m x_k-L,z_1,z_2,\ldots,z_{n-1}\right\|\right)\right]^{p_k}\geq\delta^H\right\}\in I$$

dır.

Eğer $r\notin A(\delta)$ ise buradan

$$\frac{1}{\lambda_r}\sum_{k\in I_r}\left[f_k\left(\left\|B^m x_k-L,z_1,z_2,\ldots,z_{n-1}\right\|\right)\right]^{p_k}<\delta^H$$

buradan

$$\sum_{k\in I_r}\left[f_k\left(\left\|B^m x_k - L, z_1, z_2, \dots, z_{n-1}\right\|\right)\right]^{p_k} < \lambda_r \delta^H$$

dir.

Her $k \in I_r$ için

$$\left[f_k\left(\left\|B^m x_k - L, z_1, z_2, \dots, z_{n-1}\right\|\right)\right]^{p_k} < \delta^H$$

buradan

$$f_k\left(\left\|B^m x_k - L, z_1, z_2, \dots, z_{n-1}\right\|\right) < \delta$$

dır.

Yukarıdaki eşitsizlikte G nin sürekliliği kullanılırsa

$$g_k\left(f_k\left(\left\|B^m x_k - L, z_1, z_2, \dots, z_{n-1}\right\|\right)\right) < \varepsilon_0 \quad , \quad \forall k \in I_r$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned}\sum_{k\in I_r}\left[g_k\left(f_k\left(\left\|B^m x_k - L, z_1, z_2, \dots, z_{n-1}\right\|\right)\right)\right]^{p_k} &< \lambda_r \max\left\{\varepsilon_0^{\sup p_k}, \varepsilon_0^{\inf p_k}\right\} \\ &< \lambda_r \varepsilon\end{aligned}$$

sonuç olarak

$$\frac{1}{\lambda_r}\sum_{k\in I_r}\left[g_k\left(f_k\left(\left\|B^m x_k - L, z_1, z_2, \dots, z_{n-1}\right\|\right)\right)\right]^{p_k} < \varepsilon$$

eşitsizliğine ulaşılır. Bu da bize aşağıdaki kapsamayı verir.

$$\left\{r\in\mathbb{N}:\frac{1}{\lambda_r}\sum_{k\in I_r}\left[g_k\left(f_k\left(\left\|B^m x_k-L,z_1,z_2,\ldots,z_{n-1}\right\|\right)\right)\right]^{p_k}\geq\varepsilon\right\}\subset A(\delta).$$

Kapsamanın sağındaki küme I ya aittir. İdealin (iii) şartından sol taraftaki küme de I ya ait olur. Böylece ispat tamamlanır.

(ii) Eğer (i) şıkkının ispatında $L=0$ alınırsa, ispata kolaylıkla ulaşılır.

(iii) $(x_k)\in W^I\left(\lambda,B^m,F,p,\|.,\ldots,.\|\right)\cap W^I\left(\lambda,B^m,G,p,\|.,\ldots,.\|\right)$ olsun. Böylece

$$\frac{1}{\lambda_r}\sum_{k\in I_r}\left[\left(f_k+g_k\right)\left(\left\|B^m x_k-L,z_1,z_2,\ldots,z_{n-1}\right\|\right)\right]^{p_k}$$

$$=\frac{1}{\lambda_r}\sum_{k\in I_r}\left[f_k\left(\left\|B^m x_k-L,z_1,z_2,\ldots,z_{n-1}\right\|\right)+g_k\left(\left\|B^m x_k-L,z_1,z_2,\ldots,z_{n-1}\right\|\right)\right]^{p_k}$$

$$\leq D\frac{1}{\lambda_r}\sum_{k\in I_r}\left[f_k\left(\left\|B^m x_k-L,z_1,z_2,\ldots,z_{n-1}\right\|\right)\right]^{p_k}+D\frac{1}{\lambda_r}\sum_{k\in I_r}\left[g_k\left(\left\|B^m x_k-L,z_1,z_2,\ldots,z_{n-1}\right\|\right)\right]^{p_k}$$

eşitsizliğine ulaşılır. Bu da bize ispatı verir.

(iv) Eğer (iii) şıkkının ispatında $L=0$ alınırsa, ispata kolaylıkla ulaşılır.

Önerme 6.3. $F=(f_k)$ ve $G=(g_k)$ birer modülüs fonksiyon dizisi olsunlar ve $h=\inf p_k>0$ olsun. Bu takdirde aşağıdaki kapsamalar sağlanır.

i- $W^I\left(\lambda,B^m,p,\|.,\ldots,.\|\right)\subseteq W^I\left(\lambda,B^m,G,p,\|.,\ldots,.\|\right)$

ii- $W_0^I\left(\lambda,B^m,p,\|.,\ldots,.\|\right)\subseteq W_0^I\left(\lambda,B^m,G,p,\|.,\ldots,.\|\right)$

İspat. Teorem 6.2'nin (i) ve (ii) şıklarında F ve G modülüs fonksiyon dizileri, $F=(x,x,\ldots)$ ve $G=(g_k)$ olarak alınırsa ispata ulaşılır.

Teorem 6.4. $F=(f_k)$ bir modülüs fonksiyon dizi olsun. Eğer

$$\liminf_{t\to\infty}\,_k \frac{f_k(t)}{t}=\gamma>0, \qquad \text{her } k \text{ için,}$$

ise

$$W^I\left(\lambda,B^m,F,p,\|.,\ldots,.\|\right)=W^I\left(\lambda,B^m,p,\|.,\ldots,.\|\right)$$

ve

$$W_0^I\left(\lambda,B^m,F,p,\|.,\ldots,.\|\right)=W_0^I\left(\lambda,B^m,p,\|.,\ldots,.\|\right)$$

dir.

İspat. İspatı yalnızca $W^I\left(\lambda,B^m,F,p,\|.,\ldots,.\|\right)=W^I\left(\lambda,B^m,p,\|.,\ldots,.\|\right)$ eşitliği için vereceğiz. $W_0^I\left(\lambda,B^m,F,p,\|.,\ldots,.\|\right)=W_0^I\left(\lambda,B^m,p,\|.,\ldots,.\|\right)$ eşitliği için gereken ispat da benzer şekilde yapılabilir. Önerme 6.3. ten dolayı yalnızca $W^I\left(\lambda,B^m,F,p,\|.,\ldots,.\|\right)\subseteq W^I\left(\lambda,B^m,p,\|.,\ldots,.\|\right)$ kapsamasını göstermek yeterli olacaktır.

Herhangi bir modülüs fonksiyonu için , γ ile verilen pozitif limitin varlığı Maddox [32] tarafından gösterilmiştir.

Şimdi $\gamma>0$ ve $x\in W^I\left(\lambda,B^m,F,p,\|.,\ldots,.\|\right)$ olsun. $\gamma>0$ olduğundan, her $t>0$ için, $f_k(t)\geq\gamma t$ (her k için) yazılır. Bu eşitsizlikten

$$\frac{1}{\lambda_r}\sum_{k\in I_r}\left[f_k\left(\left\|B^m x_k-L,z_1,z_2,\ldots,z_{n-1}\right\|\right)\right]^{p_k}\geq\gamma^H\frac{1}{\lambda_r}\sum_{k\in I_r}\left(\left\|B^m x_k-L,z_1,z_2,\ldots,z_{n-1}\right\|\right)^{p_k}$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Önerme 6.5. $F=(f_k)$ ve $G=(g_k)$ birer modülüs fonksiyon dizisi olsunlar. Eğer

$$\liminf_{t\to\infty}\inf_k \frac{f_k(t)}{g_k(t)}>0$$

ise

i- $W^I\left(\lambda,B^m,F,p,\|.,\ldots,.\|\right)\subseteq W^I\left(\lambda,B^m,G,p,\|.,\ldots,.\|\right)$

ii- $W_0^I\left(\lambda,B^m,F,p,\|.,\ldots,.\|\right)\subseteq W_0^I\left(\lambda,B^m,G,p,\|.,\ldots,.\|\right)$

kapsamaları sağlanır.

Teorem 6.6. $m\geq 1$ ve $F=(f_k)$ bir modülüs fonksiyon dizisi olsun. Bu durumda,

i- $W_0^I\left(\lambda,B^{m-1},F,p,\|.,\ldots,.\|\right)\subseteq W_0^I\left(\lambda,B^m,F,p,\|.,\ldots,.\|\right)$

ii- $W^I\left(\lambda,B^{m-1},F,p,\|.,\ldots,.\|\right)\subseteq W^I\left(\lambda,B^m,F,p,\|.,\ldots,.\|\right)$

iii- $W_\infty^I\left(\lambda,B^{m-1},F,p,\|.,\ldots,.\|\right)\subseteq W_\infty^I\left(\lambda,B^m,F,p,\|.,\ldots,.\|\right)$

kapsamaları sağlanır.

İspat. (i) $x\in W_0^I\left(\lambda,B^{m-1},F,p,\|.,\ldots,.\|\right)$ olsun. Böylece

$$\left\{r\in\mathbb{N}:\frac{1}{\lambda_r}\sum_{k\in I_r}\left[f_k\left(\left\|B^{m-1}x_k,z_1,z_2,\ldots,z_{n-1}\right\|\right)\right]^{p_k}\geq\varepsilon\right\}\in I$$

elde edilir. f_k, her k için bir modülüs fonksiyonu olduğundan,

$$\frac{1}{\lambda_r}\sum_{k\in I_r}\left[f_k\left(\left\|B^m x_k, z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}\right\|\right)\right]^{p_k}$$

$$=\frac{1}{\lambda_r}\sum_{k\in I_r}\left[f_k\left(\left\|tB^{m-1}x_{k+1}+sB^{m-1}x_k, z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}\right\|\right)\right]^{p_k}$$

$$\leq\frac{1}{\lambda_r}\sum_{k\in I_r}\left[f_k\left(\left\|tB^{m-1}x_{k+1}, z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}\right\|+\left\|sB^{m-1}x_k, z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}\right\|\right)\right]^{p_k}$$

$$=\frac{1}{\lambda_r}\sum_{k\in I_r}\left[f_k\left(|t|\left\|B^{m-1}x_{k+1}, z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}\right\|+|s|\left\|B^{m-1}x_k, z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}\right\|\right)\right]^{p_k}$$

$$\leq\frac{1}{\lambda_r}\sum_{k\in I_r}\left[f_k\left(|t|\left\|B^{m-1}x_{k+1}, z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}\right\|\right)+f_k\left(|s|\left\|B^{m-1}x_k, z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}\right\|\right)\right]^{p_k}$$

$$\leq\frac{1}{\lambda_r}\sum_{k\in I_r}\left[T_t f_k\left(\left\|B^{m-1}x_{k+1}, z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}\right\|\right)+T_s f_k\left(\left\|B^{m-1}x_k, z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}\right\|\right)\right]^{p_k}$$

$$\leq D\frac{1}{\lambda_r}\sum_{k\in I_r}\left[T_t f_k\left(\left\|B^{m-1}x_{k+1}, z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}\right\|\right)\right]^{p_k}+D\frac{1}{\lambda_r}\sum_{k\in I_r}\left[T_s f_k\left(\left\|B^{m-1}x_k, z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}\right\|\right)\right]^{p_k}$$

$$\leq T_t^H D\frac{1}{\lambda_r}\sum_{k\in I_r}\left[f_k\left(\left\|B^{m-1}x_{k+1}, z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}\right\|\right)\right]^{p_k}+T_s^H D\frac{1}{\lambda_r}\sum_{k\in I_r}\left[f_k\left(\left\|B^{m-1}x_k, z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}\right\|\right)\right]^{p_k}$$

eşitsizliği elde edilir.

Burada T_t ve T_s, $|t|\leq T_t$ ve $|s|\leq T_s$ şartlarını sağlayan birer pozitif tamsayıdırlar. Sonuç olarak $x\in W_0^I\left(\lambda, B^m, F, p, \|.,\ldots,.\|\right)$ olur.

(ii) ve **(iii)** benzer şekilde ispatlanabilir.

Tanım 6.7. X bir dizi uzayı olsun. Eğer $(x_k)\in X$ iken, $\forall k\in\mathbb{N}$ için $|\alpha_k|\leq 1$ şartını sağlayan skalerlerin her (α_k) dizisi için $(\alpha_k x_k)\in X$ oluyorsa, X dizi uzayına "solid uzay" denir.

Teorem 6.8. $W_0^I\left(\lambda, B^m, F, p, \|.,\ldots,.\|\right)$ ve $W_\infty^I\left(\lambda, B^m, F, p, \|.,\ldots,.\|\right)$ dizi uzayları solid uzaydır.

İspat. İspatı yalnızca $W_0^I\left(\lambda, B^m, F, p, \|.,\ldots,.\|\right)$ uzayı için yapacağız. $(x_k)\in W_0^I\left(\lambda, B^m, F, p, \|.,\ldots,.\|\right)$ ve (α_k) skalerlerin $\forall k\in\mathbb{N}$ için $|\alpha_k|\le 1$ şartını sağlayan bir dizisi olsun. Böylece

$$\left\{r\in\mathbb{N}:\frac{1}{\lambda_r}\sum_{k\in I_r}\left[f_k\left(\left\|B^m(\alpha_k x_k), z_1, z_2,\ldots,z_{n-1}\right\|\right)\right]^{p_k}\ge\varepsilon\right\}\subseteq$$
$$\left\{r\in\mathbb{N}:\frac{C}{\lambda_r}\sum_{k\in I_r}\left[f_k\left(\left\|B^m x_k, z_1, z_2,\ldots,z_{n-1}\right\|\right)\right]^{p_k}\ge\varepsilon\right\}$$

kapsaması elde edilir. Burada T_{α_k}, $|\alpha_k|\le T_{\alpha_k}$ şartını sağlayan pozitif bir tamsayıdır ve $C=\max\left\{1, T_{\alpha_k}^H\right\}$. Sonuç olarak $(x_k)\in W_0^I\left(\lambda, B^m, F, p, \|.,\ldots,.\|\right)$ olduğunda $\forall k\in\mathbb{N}$ için $|\alpha_k|\le 1$ şartını sağlayan skalerlerin her (α_k) dizisi için $(\alpha_k x_k)\in W_0^I\left(\lambda, B^m, F, p, \|.,\ldots,.\|\right)$ olur. Bu da ispatı bitirir.

Teorem 6.9. $\left(X, \|.,\ldots,.\|_E\right)$ ve $\left(X, \|.,\ldots,.\|_S\right)$ sırasıyla Standard ve Öklid n-normlu uzaylar olsunlar. Bu takdirde

$$W^I\left(\lambda, B^m, F, p, \|.,\ldots,.\|_E\right)\cap W^I\left(\lambda, B^m, F, p, \|.,\ldots,.\|_S\right)\subseteq W^I\left(\lambda, B^m, F, p, \left(\|.,\ldots,.\|_E+\|.,\ldots,.\|_S\right)\right)$$

kapsaması geçerlidir.

İspat. $x\in W^I\left(\lambda, B^m, F, p, \|.,\ldots,.\|_E\right)\cap W^I\left(\lambda, B^m, F, p, \|.,\ldots,.\|_S\right)$ alalım. Bu durumda,

$$\frac{1}{\lambda_r}\sum_{k\in I_r}\left[f_k\left(\left(\|.,\ldots,.\|_E+\|.,\ldots,.\|_S\right)\left(B^m x_k-L, z_1, z_2,\ldots,z_{n-1}\right)\right)\right]^{p_k}$$
$$=\frac{1}{\lambda_r}\sum_{k\in I_r}\left[f_k\left(\left(\left\|B^m x_k-L, z_1, z_2,\ldots,z_{n-1}\right\|_E+\left\|B^m x_k-L, z_1, z_2,\ldots,z_{n-1}\right\|_S\right)\right)\right]^{p_k}$$
$$\le\frac{1}{\lambda_r}\sum_{k\in I_r}\left[f_k\left(\left\|B^m x_k-L, z_1, z_2,\ldots,z_{n-1}\right\|_E\right)+f_k\left(\left\|B^m x_k-L, z_1, z_2,\ldots,z_{n-1}\right\|_S\right)\right]^{p_k}$$

$$\leq D\frac{1}{\lambda_r}\sum_{k\in I_r}\left[f_k\left(\left\|B^m x_k - L, z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}\right\|_E\right)\right]^{p_k} + D\frac{1}{\lambda_r}\sum_{k\in I_r}\left[f_k\left(\left\|B^m x_k - L, z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}\right\|_S\right)\right]^{p_k}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu da bize ispatı verir.

BÖLÜM 7. n-NORMLU UZAYLARDA MODÜLÜS FONKSİYONU TARAFINDAN TANIMLI BAZI LACUNARY İDEAL YAKINSAK DİZİ UZAYLARI

Bu bölümde bir modülüs fonksiyonu ve bir fark dizisi kullanarak n-normlu uzaylarda lacunary ideal yakınsak $W^I\left(N_\theta, B^m, F, p, \|\cdot,\ldots,\cdot\|\right)$, $W_0^I\left(N_\theta, B^m, F, p, \|\cdot,\ldots,\cdot\|\right)$ ve $W_\infty^I\left(N_\theta, B^m, F, p, \|\cdot,\ldots,\cdot\|\right)$ dizi uzaylarını tanımlayacak ve bu uzayların bazı özelliklerini inceleyeceğiz.

$\theta = (k_r)$ pozitif tam sayıların $r \to \infty$ iken $h_r = k_r - k_{-1} \to \infty$ şartını sağlayan artan bir dizisi ve I, $\mathbb{N}$ nin bir uygun ideali olsun. . $F = (f_k)$

i) $\forall x > 0$ için $\sup\limits_k f(x) > 0$

ii) $\lim\limits_{x \to 0} f_k(x) = 0$, k ya göre düzgün

şartlarını sağlayan bir modülüs fonksiyon dizisi olsun.

$\left(X, \|\cdot,\ldots,\cdot\|\right)$ bir n-normlu uzay ve $p = (p_k)$ pozitif reel sayıların sınırlı bir dizisi olsun. $S(n-X)$ ile $\left(X, \|\cdot,\ldots,\cdot\|\right)$ üzerinde tanımlı bütün dizilerin uzayı olmak üzere

$$W^I\left(N_\theta, B^m, F, p, \|\cdot,\ldots,\cdot\|\right) =$$

$$\left\{\begin{array}{l} x \in S(n-X) : \forall \varepsilon > 0 \left\{ r \in \mathbb{N} : \dfrac{1}{h_r} \sum\limits_{k \in I_r} \left[f_k\left(\left\|B^m x_k - L, z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}\right\|\right)\right]^{p_k} \geq \varepsilon \right\} \in I, \\ \text{bazı } L > 0, \text{ ve herbir } z_1, z_2, \ldots, z_{n-1} \in X \text{ için} \end{array}\right\},$$

$$W_0^I\left(N_\theta, B^m, F, p, \|\cdot,\dots,\cdot\|\right) =$$

$$\left\{\begin{array}{l} x \in S(n-X) : \forall \varepsilon > 0 \left\{ r \in \mathbb{N} : \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} \left[f_k\left(\left\|B^m x_k, z_1, z_2, \dots, z_{n-1}\right\|\right)\right]^{p_k} \geq \varepsilon \right\} \in I, \\ \text{herbir } z_1, z_2, \dots, z_{n-1} \in X \end{array}\right\}$$

ve

$$W_\infty^I\left(N_\theta, B^m, F, p, \|\cdot,\dots,\cdot\|\right) =$$

$$\left\{\begin{array}{l} x \in S(n-X) : \exists K > 0 \text{ öyleki} \left\{ r \in \mathbb{N} : \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} \left[f_k\left(\left\|B^m x_k - L, z_1, z_2, \dots, z_{n-1}\right\|\right)\right]^{p_k} \geq K \right\} \in I, \\ \text{herbir } z_1, z_2, \dots, z_{n-1} \in X \end{array}\right\}$$

ile tanımlansın.

Teorem 7.1. $W^I\left(N_\theta, B^m, F, p, \|\cdot,\dots,\cdot\|\right)$, $W_0^I\left(N_\theta, B^m, F, p, \|\cdot,\dots,\cdot\|\right)$ ve $W_\infty^I\left(N_\theta, B^m, F, p, \|\cdot,\dots,\cdot\|\right)$ dizi uzayları birer lineer uzaydır.

İspat. Bölüm 6 da ki Teorem 6.1.e benzer şekilde ispatlanabilir.

Teorem 7.2. $F = (f_k)$ ve $G = (g_k)$ birer modülüs fonksiyon dizisi olsunlar ve $h = \inf p_k > 0$ olsun. Bu takdirde aşağıdaki kapsamalar sağlanır:

(i) $W^I\left(N_\theta, B^m, F, p, \|\cdot,\dots,\cdot\|\right) \subseteq W^I\left(N_\theta, B^m, G \circ F, p, \|\cdot,\dots,\cdot\|\right)$

(ii) $W_0^I\left(N_\theta, B^m, F, p, \|\cdot,\dots,\cdot\|\right) \subseteq W_0^I\left(N_\theta, B^m, G \circ F, p, \|\cdot,\dots,\cdot\|\right)$

(iii) $W^I\left(N_\theta, B^m, F, p, \|\cdot,\dots,\cdot\|\right) \cap W^I\left(N_\theta, B^m, G, p, \|\cdot,\dots,\cdot\|\right) \subseteq W^I\left(N_\theta, B^m, F + G, p, \|\cdot,\dots,\cdot\|\right)$

(iv) $W_0^I\left(N_\theta, B^m, F, p, \|\cdot,\dots,\cdot\|\right) \cap W_0^I\left(N_\theta, B^m, G, p, \|\cdot,\dots,\cdot\|\right) \subseteq W_0^I\left(N_\theta, B^m, F + G, p, \|\cdot,\dots,\cdot\|\right)$

İspat. (i) F nin sürekliliğini kullanırsak; verilmiş bir $\varepsilon > 0$ için, öncelikle $\max\left\{\varepsilon_0^{\sup p_k}, \varepsilon_0^{\inf p_k}\right\} < \varepsilon$ şartını sağlayan $\varepsilon_0 > 0$ seçelim ve $0 < \delta < 1$ öyle ki her k için $0 < t < \delta \Rightarrow f_k(t) < \varepsilon_0$ alabiliriz. Şimdi $(x_k) \in W^I\left(N_\theta, B^m, F, p, \|.,\ldots,.\|\right)$ olsun. Böylece

$$A(\delta) = \left\{ r \in \mathbb{N} : \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} \left[f_k\left(\left\| B^m x_k - L, z_1, z_2, \ldots, z_{n-1} \right\| \right) \right]^{p_k} \geq \delta^H \right\} \in I$$

dır.

Eğer $r \notin A(\delta)$ ise buradan

$$\frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} \left[f_k\left(\left\| B^m x_k - L, z_1, z_2, \ldots, z_{n-1} \right\| \right) \right]^{p_k} < \delta^H$$

buradan

$$\sum_{k \in I_r} \left[f_k\left(\left\| B^m x_k - L, z_1, z_2, \ldots, z_{n-1} \right\| \right) \right]^{p_k} < h_r \delta^H$$

dir.

Her $k \in I_r$ için

$$\left[f_k\left(\left\| B^m x_k - L, z_1, z_2, \ldots, z_{n-1} \right\| \right) \right]^{p_k} < \delta^H$$

buradan

$$f_k\left(\left\| B^m x_k - L, z_1, z_2, \ldots, z_{n-1} \right\| \right) < \delta$$

dır.

Yukarıdaki eşitsizlikte G nin sürekliliği kullanılırsa,

$$g_k\left(f_k\left(\left\|B^m x_k - L, z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}\right\|\right)\right) < \varepsilon_0 \quad , \quad \forall k \in I_r$$

elde edilir. Buradan

$$\sum_{k\in I_r}\left[g_k\left(f_k\left(\left\|B^m x_k - L, z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}\right\|\right)\right)\right]^{p_k} < h_r \max\left\{\varepsilon_0^{\sup p_k}, \varepsilon_0^{\inf p_k}\right\}$$

$$< h_r \varepsilon$$

sonuç olarak

$$\frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r}\left[g_k\left(f_k\left(\left\|B^m x_k - L, z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}\right\|\right)\right)\right]^{p_k} < \varepsilon$$

eşitsizliğine ulaşılır. Bu da bize aşağıdaki kapsamayı verir.

$$\left\{r \in \mathbb{N} : \frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r}\left[g_k\left(f_k\left(\left\|B^m x_k - L, z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}\right\|\right)\right)\right]^{p_k} \geq \varepsilon\right\} \subset A(\delta).$$

Kapsamanın sağındaki küme I ya aittir. İdealin (iii) şartından sol taraftaki küme de I ya ait olur. Böylece ispat tamamlanır.

(ii) Eğer (i) şıkkının ispatında $L = 0$ alınırsa, ispata kolaylıkla ulaşılır.

(iii) $(x_k) \in W^I\left(N_\theta, B^m, F, p, \|.,\ldots,.\|\right) \cap W^I\left(N_\theta, B^m, G, p, \|.,\ldots,.\|\right)$ olsun. Böylece

$$\frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r}\left[\left(f_k + g_k\right)\left(\left\|B^m x_k - L, z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}\right\|\right)\right]^{p_k}$$

$$= \frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r}\left[f_k\left(\left\|B^m x_k - L, z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}\right\|\right) + g_k\left(\left\|B^m x_k - L, z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}\right\|\right)\right]^{p_k}$$

$$\leq D\frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r}\left[f_k\left(\left\|B^m x_k - L, z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}\right\|\right)\right]^{p_k} + D\frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r}\left[g_k\left(\left\|B^m x_k - L, z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}\right\|\right)\right]^{p_k}$$

eşitsizliğine ulaşılır. Bu da bize ispatı verir.

(iv) Eğer (iii) şıkkının ispatında $L = 0$ alınırsa, ispata kolaylıkla ulaşılır.

Önerme 7.3. $F = (f_k)$ ve $G = (g_k)$ birer modülüs fonksiyon dizisi olsunlar ve $h = \inf p_k > 0$ olsun. Bu takdirde aşağıdaki kapsamalar sağlanır.

$$W^I\left(N_\theta, B^m, p, \|.,\ldots,.\|\right) \subseteq W^I\left(N_\theta, B^m, G, p, \|.,\ldots,.\|\right)$$

$$W_0^I\left(N_\theta, B^m, p, \|.,\ldots,.\|\right) \subseteq W_0^I\left(N_\theta, B^m, G, p, \|.,\ldots,.\|\right).$$

İspat. Teorem 7.2'nin (i) ve (ii) şıklarında F ve G modülüs fonksiyon dizileri, $F = (x, x, \ldots)$ ve $G = (g_k)$ olarak alınırsa ispata ulaşılır.

Teorem 7.4. $F = (f_k)$ bir modülüs fonksiyon dizi olsun. Eğer

$$\lim_{t\to\infty}\inf_k \frac{f_k(t)}{t} = \gamma > 0, \qquad \text{her } k \text{ için,}$$

ise

$$W^I\left(N_\theta, B^m, F, p, \|.,\ldots,.\|\right) = W^I\left(N_\theta, B^m, p, \|.,\ldots,.\|\right)$$

ve

$$W_0^I\left(N_\theta, B^m, F, p, \|.,\ldots,.\|\right) = W_0^I\left(N_\theta, B^m, p, \|.,\ldots,.\|\right)$$

dir.

İspat. İspatı yalnızca $W^I\left(N_\theta, B^m, F, p, \|.,\ldots,.\|\right) = W^I\left(N_\theta, B^m, p, \|.,\ldots,.\|\right)$ eşitliği için vereceğiz. $W_0^I\left(N_\theta, B^m, F, p, \|.,\ldots,.\|\right) = W_0^I\left(N_\theta, B^m, p, \|.,\ldots,.\|\right)$ eşitliği için gereken ispat da benzer şekilde yapılabilir. Önerme 7.3. ten yalnızca $W^I\left(N_\theta, B^m, F, p, \|.,\ldots,.\|\right) \subseteq W^I\left(N_\theta, B^m, p, \|.,\ldots,.\|\right)$ kapsamasını göstermek yeterli olacaktır.

Herhangi bir modülüs fonksiyonu için , γ ile verilen pozitif limitin varlığı Maddox [32] tarafından gösterilmiştir.

Şimdi $\gamma > 0$ ve $x \in W^I\left(N_\theta, B^m, F, p, \|.,\ldots,.\|\right)$ olsun. $\gamma > 0$ olduğundan, her $t > 0$ için, $f_k(t) \geq \gamma t$ (her k için) yazılır. Bu eşitsizlikten

$$\frac{1}{h_r}\sum_{k \in I_r}\left[f_k\left(\left\|B^m x_k - L, z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}\right\|\right)\right]^{p_k} \geq \gamma^H \frac{1}{h_r}\sum_{k \in I_r}\left(\left\|B^m x_k - L, z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}\right\|\right)^{p_k}$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Önerme 7.5. $F = (f_k)$ ve $G = (g_k)$ birer modülüs fonksiyon dizisi olsunlar. Eğer

$$\lim_{t \to \infty} \inf_k \frac{f_k(t)}{g_k(t)} > 0$$

ise

i- $W^I\left(N_\theta, B^m, F, p, \|.,\ldots,.\|\right) \subseteq W^I\left(N_\theta, B^m, G, p, \|.,\ldots,.\|\right)$

ii- $W_0^I\left(N_\theta, B^m, F, p, \|.,\ldots,.\|\right) \subseteq W_0^I\left(N_\theta, B^m, G, p, \|.,\ldots,.\|\right)$

kapsamaları sağlanır.

Teorem 7.6. $m \geq 1$ ve $F = (f_k)$ bir modülüs fonksiyon dizisi olsun. Bu durumda,

(i) $W_0^I\left(N_\theta, B^{m-1}, F, p, \|.,\ldots,.\|\right) \subseteq W_0^I\left(N_\theta, B^m, F, p, \|.,\ldots,.\|\right)$

(ii) $W^I\left(N_\theta, B^{m-1}, F, p, \|.,\ldots,.\|\right) \subseteq W^I\left(N_\theta, B^m, F, p, \|.,\ldots,.\|\right)$

(iii) $W_\infty^I\left(N_\theta, B^{m-1}, F, p, \|.,\ldots,.\|\right) \subseteq W_\infty^I\left(N_\theta, B^m, F, p, \|.,\ldots,.\|\right)$

kapsamaları sağlanır.

İspat. Bölüm 6 da ki Teorem 6.6. ya benzer şekilde ispatlanabilir.

Teorem 7.9. $W_0^I\left(N_\theta, B^m, F, p, \|.,\ldots,.\|\right)$ ve $W_\infty^I\left(N_\theta, B^m, F, p, \|.,\ldots,.\|\right)$ dizi uzayları solid uzaydırlar.

İspat. İspatı yalnızca $W_0^I\left(N_\theta, B^m, F, p, \|.,\ldots,.\|\right)$ uzayı için yapacağız. $(x_k) \in W_0^I\left(N_\theta, B^m, F, p, \|.,\ldots,.\|\right)$ ve (α_k) skalerlerin $\forall k \in \mathbb{N}$ için $|\alpha_k| \leq 1$ şartını sağlayan bir dizisi olsun. Böylece

$$\left\{ r \in \mathbb{N} : \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} \left[f_k\left(\left\| B^m(\alpha_k x_k), z_1, z_2, \ldots, z_{n-1} \right\| \right) \right]^{p_k} \geq \varepsilon \right\} \subseteq$$

$$\left\{ r \in \mathbb{N} : \frac{C}{h_r} \sum_{k \in I_r} \left[f_k\left(\left\| B^m x_k, z_1, z_2, \ldots, z_{n-1} \right\| \right) \right]^{p_k} \geq \varepsilon \right\}.$$

Burada T_{α_k}, $|\alpha_k| \leq T_{\alpha_k}$ şartını sağlayan pozitif bir tamsayıdır ve $C = \max\left\{1, T_{\alpha_k}^H\right\}$.

Sonuç olarak $(x_k) \in W_0^I\left(N_\theta, B^m, F, p, \|.,\ldots,.\|\right)$ olduğunda $\forall k \in \mathbb{N}$ için $|\alpha_k| \leq 1$ şartını sağlayan skalerlerin her (α_k) dizisi için $(\alpha_k x_k) \in W_0^I\left(N_\theta, B^m, F, p, \|.,\ldots,.\|\right)$ olur. Bu da ispatı bitirir.

Teorem 7.8. $(X,\|.,\ldots,.\|_E)$ ve $(X,\|.,\ldots,.\|_S)$ sırasıyla Standard ve Öklid n-normlu uzaylar olsunlar. Bu takdirde

$$W^I\left(N_\theta,B^m,F,p,\|.,\ldots,.\|_E\right)\cap W^I\left(N_\theta,B^m,F,p,\|.,\ldots,.\|_S\right)\subseteq W^I\left(N_\theta,B^m,F,p,\left(\|.,\ldots,.\|_E+\|.,\ldots,.\|_S\right)\right)$$

kapsaması geçerlidir.

İspat. $x\in W^I\left(N_\theta,B^m,F,p,\|.,\ldots,.\|_E\right)\cap W^I\left(N_\theta,B^m,F,p,\|.,\ldots,.\|_S\right)$ alalım. Bu halde

$$\frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r}\left[f_k\left(\left(\|.,\ldots,.\|_E+\|.,\ldots,.\|_S\right)\left(B^m x_k-L,z_1,z_2,\ldots,z_{n-1}\right)\right)\right]^{p_k}$$

$$=\frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r}\left[f_k\left(\left(\|B^m x_k-L,z_1,z_2,\ldots,z_{n-1}\|_E+\|B^m x_k-L,z_1,z_2,\ldots,z_{n-1}\|_S\right)\right)\right]^{p_k}$$

$$\leq\frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r}\left[f_k\left(\|B^m x_k-L,z_1,z_2,\ldots,z_{n-1}\|_E\right)+f_k\left(\|B^m x_k-L,z_1,z_2,\ldots,z_{n-1}\|_S\right)\right]^{p_k}$$

$$\leq D\frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r}\left[f_k\left(\|B^m x_k-L,z_1,z_2,\ldots,z_{n-1}\|_E\right)\right]^{p_k}+D\frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r}\left[f_k\left(\|B^m x_k-L,z_1,z_2,\ldots,z_{n-1}\|_S\right)\right]^{p_k}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu da bize ispatı verir.

KAYNAKLAR

[1] NAKANO, II., Concave modulars, J. Math. Soc. Japan, 5, 29-49, 1953.

[2] RUCKLE, W.H., FK spaces in which the sequence of coordinate vectors is bounded, Can. J. Math., 25, 973-978, 1973.

[3] MADDOX, I.J., Sequence spaces defined by a modulus, Math. Proc. Camb. Philos. Soc., 100 (1986), 161-166.

[4] CONNOR, J., On strong matrix summability with respect to a modulus and statistical convergence, Canad. Math.bull., 32, 2, 194-198, 1989.

[5] PEHLİVAN, S., FISHER, B., Some sequence spaces defined by a modulus function, Math. Slovaca, 45, 275-280, 1995.

[6] ALTIN, Y., ET, M., Generalized difference sequence spaces defined by a modulus function in a locally convex space, Soochow. J. Math., 31, 233-243, 2005.

[7] KIZMAZ, H., On certain sequence spaces, Canad. Math. Bull., 24, 169-176, 1981.

[8] BAYRAKTAR, M., Fonksiyonel analiz, Gazi Kitabevi, Ankara, 2006.

[9] MADDOX, I.J., Elements of functional analysis, Cambridge University Press, London, UK, 1970.

[10] GOES, G., GOES, S., Sequence of bounded variation and sequence of Fourier Cofficients. I, Math. Z., 118, 93-102, 1970.

[11] BUCK, R.C., Generalized asymptotic density, Amer. J. Math., 75, 335-346, 1953.

[12] HALBERSTAM, H., ROTH, K.F., Sequences I. Oxford, Clarendon Press, London, UK, 1966.

[13] BROWN, T.C., FREEDMAN, A.R., The uniform density of sets of integers and Fermat's last theorem. C. R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada, 11, 1-6, 1990.

[14] FAST, H., Sur la convergence statistique., Colloq. Math., 2, 241-244, 1951.

[15] MADDOX, I.J., Statistical converge in a locally convex space, Math. Proc. Camb. Phil. Soc.100, 141-145, 1988.

[16] KURATOWSKI, C., Topologie, Volume I, PWN Warszawa, 1966.

[17] NAGATA, J., Modern general topology, North-Holland Publ. Comp., Amsterdam-London, 1974.

[18] KOSTYRKO, P., MACAJ, M., SALAT, T., I-convergence, Real Anal. Exchange, 26, 2, 669-686, 2000.

[19] KOSTYRKO, P., MACAJ, M., SALAT, T., SLEZIAK, M., I-convergence and extremal I-limit points, Math. Slovaca, 55, 443-464, 2005.

[20] FREEDMAN, A.R., SEMBER, A.J., RAPHAEL, M., Some Cesaro-type summability spaces, Proc. Lond. Math. Soc., 37, 508-520, 1978.

[21] CHOUDHARY, B., HAZARIKA, B., TRIPATHY, B.C., Lacunary I-convergent sequences, Kyungpook J. Math. 52, 473-482, 2012.

[22] LINDBERG, K.J., Contractive projections in Orlicz sequence spaces and continuous function space, Ph. D. Thesis, University of California, Berkeley, 1971.

[23] SAVAŞ, E., On some new sequence spaces in 2-normed spaces using ideal convergence and an Orlicz function, Journal of Inequalities and Applications, Article ID 482392, 8 pages, 2010.

[24] GUNAWAN, H., MASHADI, M., On n-normed spaces, Int. J. Math. Math. Sci. 27, 10, 631-639, 2001.

[25] KOLMAN, B., HILL, D.R., Elementary linear algebra with applications, AKIN, Ö., Palme Yayıncılık, Ankara, 2002.

[26] ŞAHİNER, A., GÜRDAL, M., SALTAN, S., GUNAWAN, H., Ideal convergence in 2-normed spaces, Taiwanese J. Math. 11, 1477-1484, 2007.

[27] ET, M., ÇOLAK, R., On some generalized difference sequence spaces, Soochow J. Math. 21, 4, 377-386, 1995.

[28] BAŞAR, F., ALTAY, B., On the space of sequences of p-bounded variation and related matrix mappings, Ukranian Math. J., 55, 1, 136-147, 2003.

[29] BAŞARIR, M., KAYIKÇI, M., On the generalized B^m-Riesz difference sequence space and β-property, J. Ineq. Appl., vol. 2009, Article ID 385029, 18 pages, 2009.

[30] ÇOLAK, R., On some generalized difference sequence spaces, Soochow. J. Math., 21, 377-386, 1995.

[31] ŞAHİNER, A., AKIN, H.S., New sequence spaces in multiple normed spaces, Applied Mathematics and Computation, 218, 1030-1035, 2011.

[32] MADDOX, I.J., Inclusion between FK spaces and Kuttner's theorem, Math. Proc. Camb. Philos. Soc. 101, 523-527, 1987.

ÖZGEÇMİŞ

Ömer Faruk Çelik, 1988 yılında İstanbul'da doğdu. İlk, orta ve lise eğitimini İstanbul'da tamamladı. 2005 yılında girdiği İstanbul Ticaret Üniversitesi Burslu Matematik bölümünü 2010 yılında bitirdi. 2011 yılında Sakarya Üniversitesinde Matematik yüksek lisans öğrenimine başladı. 2009 yılında Anadolu Üniversitesi Açıköğretim fakültesinde İktisat eğitimine başladı ve 2013 yılında mezun oldu. 2010 yılından beri çeşitli özel eğitim kurumlarında öğretmenlik yapmaktadır.

Ö. F. ÇELİK	*n*-NORMLU UZAYLARDA MODÜLÜS FONKSİYONU TARAFINDAN TANIMLI BAZI İDEAL YAKINSAK DİZİ UZAYLARI	MAYIS 2013