T.C.

SAKARYA ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GENEL PARÇALANMIŞ LİNEER MODELLER ALTINDA TAHMİN EDİCİLERİN ETKİNLİKLERİNİN KARŞILAŞTIRILMASI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Esma KESRİKLİOĞLU

Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK

Tez Danışmanı : Yrd. Doç. Dr. Nesrin GÜLER

Temmuz 2013

T.C.

SAKARYA ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GENEL PARÇALANMIŞ LİNEER MODELLER ALTINDA TAHMİN EDİCİLERİN ETKİNLİKLERİNİN KARŞILAŞTIRILMASI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Esma KESRİKLİOĞLU

Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK

Bu tez 18/07/2013 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Oybirliği ile kabul edilmiştir.

……………….	……………….	……………….
Jüri Başkanı	**Üye**	**Üye**

ÖNSÖZ

Bu çalışmada, bir parçalanmış zayıf singüler lineer model ve bu modelle ilişkili bazı lineer modeller altında regresyon katsayılarının tahmini ele alınmıştır. Ele alınan modellerde alt parametrelerin alışılmış en küçük kareler tahmin edicilerinin en iyi lineer yansız tahmin edicilere göre etkinlikleri incelenmiştir.

Konunun seçiminde ve çalışmamın her aşamasında büyük bir özveri ile çalışmalarımı takip edip, benden hiçbir yardımı esirgemeyen çok değerli danışman hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Nesrin GÜLER'e teşekkürü bir borç bilirim.

Ayrıca, maddi ve manevi destekleriyle her zaman yanımda olan, varlıklarıyla övündüğüm sevgili aileme minnettarlığımı belirtmek isterim.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}^{n\times 1}$	: n boyutlu reel vektörler kümesi
$\mathbb{R}^{m\times n}$	: $m\times n$ boyutlu reel matrisler kümesi
$A, B, C, \ldots$	: Matrisler
$(A:B)$	: Parçalanmış matris
(a_{ij})	: Elemanları a_{ij} olan matris
$x, y, z, \ldots$	: Vektörler; $x = (x_i) \in \mathbb{R}^{n\times 1}$
A'	: A matrisinin transpozu
A^{-1}	: A matrisinin tersi
A^{-}	: A matrisinin genelleştirilmiş tersi
A^{+}	: A matrisinin Moore-Penrose tersi
$\lvert A \rvert$	: A matrisinin determinantı
$r(A)$	: A matrisinin rankı
$\mathcal{C}(A)$	: A matrisinin sütun uzayı
$\mathcal{C}(A)^{\perp}$	: $\mathcal{C}(A)$ sütun uzayının dik tümleyeni
$\mathcal{N}(A)$	: A matrisinin sıfır uzayı
P_A	: $\mathcal{C}(A)$ sütun uzayının dik izdüşüm matrisi
M_A	: $\mathcal{C}(A^{\perp})$ sütun uzayının dik izdüşüm matrisi
$U \oplus V$	: U ve V vektör uzaylarının direkt toplamı
$boy(U)$	: U vektör uzayının boyutu
$\mathbf{0}$	: Sıfır matris
I	: Birim matris
$\in$	: Elemanıdır
$\cap$	: Kesişim
$\subseteq$	: Alt küme/kapsama
$=$	: Eşittir

$\Leftrightarrow$	: Ancak ve ancak
$\sum$	: Toplam sembolü
max	: Minimum
min	: Minimum
$E(.)$	: Beklenen değer operatörü
$D(.)$	: Varyans-kovaryans (dağılım) matrisi operatörü

ÖZET

Anahtar kelimeler: OLSE, BLUE, dik izdüşüm, Gauss-Markov modeli, zayıf singüler model, küçük model, indirgenmiş model, alternatif model, Watson etkinliği, etkinlik çarpanı.

Bu çalışmada bir parçalanmış zayıf singüler lineer model ve bu modelle ilişkili olan bazı lineer modeller altında regresyon katsayılarının tahmini ele alınmıştır. Ele alınan modeller altında alt parametrelerin alışılmış en küçük kareler tahmin edicisi (Ordinary Least Square Estimator OLSE)'lerinin en iyi lineer yansız tahmin edicisi (Best Linear Unbiased Estimator BLUE'larına göre etkinlikleri incelenmiştir.

İlk bölümde, etkinlik kavramı genel olarak tanıtılıp kısa bir literatür bilgisi verilmiştir. Bazı temel kavram ve özellikler ikinci bölümde ele alınmıştır. Üçüncü bölümde, çalışmada ele alınan modeller altında parametrelerin ve bu parametrelerin alt vektörlerinin OLSE ve BLUE'ları ile ilgili bazı sonuçlar ve özellikler verilmiştir. Dördüncü bölümde, öncelikle ele alınan modeller altında parametrelerin OLSE'lerinin BLUE'ya göre etkinlikleri elde edilmiştir ve daha sonra etkinliklerin çarpımsal ayrışımları verilerek bazı karşılaştırmalar yapılmıştır. Son bölüm ise sonuç ve önerilerden oluşmaktadır.

COMPARASİON BETWEEN EFFİCİENCİES OF THE ESTİMATORS UNDER GENERAL PARTİTİONED LİNEAR MODEL

SUMMARY

Key Words: OLSE, BLUE, Orthogonal projection, Gauss Markov model, Partitioned linear model, Weakly singular model, Watson efficiency, Small model, Reduced model, Alternative model, Efficiency factorization.

The estimation of regression coefficients under a partitioned weakly singular linear model and some linear models associated with this model has been considered in this study. OLSEs of sub parameters with respect to BLUEs have been examined.

In the first chapter, the concept of the efficiency has been introduced in general and a short literature information has been given about efficiency. Some fundamental concepts and properties have been considered in the second chapter. In chapter three, some results and properties have been given releated to OLSEs and BLUEs of parameters and sub parameters under the considered models. In the four chapter, firstly, the efficiencies of the OLSEs of parameters with respect to BLUEs have been obtained under considered models, and then some comparisons have been made giving the multiplier compositions of the efficiencies. The last chapter consists of conclusion and proposals.

BÖLÜM 1. GİRİŞ

İstatistikte etkinlik, çeşitli istatistiksel yöntemlerin karşılaştırılmasında kullanılan bir terimdir ve özellikle bir tahmin edicinin, bir deneysel tasarımın ya da bir hipotez testinin en iyi olmasının ölçüsünü ifade eder. Etkinlikler genellikle varyans ve ortalama hata kareler kullanılarak tanımlanır. Genellikle verilen bir yöntem ve kuramsal bir yöntem arasında en iyi yöntem karşılaştırması yapmak için kullanılan göreli etkinlik, yöntemlerin etkinliklerinin oranı olarak tanımlanır. İki yöntemin karşılaştırılmasında kullanılan etkinlik ve göreli etkinlik, teorik olarak verilen yöntem için uygun olan örneklem büyüklüğüne bağlıdır. Fakat çoğunlukla ölçümlerin karşılaştırılmasında temel olarak göreli etkinliklerin limiti olarak tanımlanan asimptotik göreli etkinlik kullanılır.

İstatistiksel tahminde etkinlik konusu 1922 yılında Fisher [1] tarafından ortaya atılmıştır. Fisher tarafından kabul edilmiş olan kriter, bir tahmin edicinin diğer bir tahmin ediciden daha küçük varyansa sahipse daha etkin bir tahmin edici olmasıdır. Wilks [2] dağılım matrislerinin determinantları olarak genelleştirilmiş varyanslar kavramını tanıtmış ve genelleştirilmiş varyansların oranını bir vektör değerli parametrenin tahmininde etkinliğin bir ölçüsü olarak tanımlamıştır. Aitken [3] alışılmış en küçük kareler tahmin edicisi $OLSE$'nin genelleştirilmiş varyansını ele almış ve 1951'de Watson [4] doktora tezinde genelleştirilmiş varyansların oranı olarak $OLSE$'nin etkinliğini tanıtmıştır. Bu nedenle Watson tarafından tanıtılmış olan etkinlik Watson etkinliği olarak bilinir.

$y = X\beta + \varepsilon$ lineer modelinde, X tam sütun ranklı ve V pozitif tanımlı olduğunda β parametreler vektörünün $OLSE$'si ve en iyi lineer yansız tahmin edicisi $BLUE$ sırasıyla

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'y \text{ ve } \tilde{\beta} = (X'V^{-1}X)^{-1}X'V^{-1}y$$

dir ve bu tahmin edicilerin kovaryans matrisleri ise sırasıyla

$$\operatorname{cov}(\hat{\beta}) = (X'X)^{-1}X'VX(X'X)^{-1} \text{ ve } \operatorname{cov}(\tilde{\beta}) = (X'V^{-1}X)^{-1}$$

dir. Gauss-Markov Teoremine göre [5], Löwner sıralaması dikkate alınarak

$$\operatorname{cov}(\hat{\beta} \mid \mathcal{M}) \geq_L \operatorname{cov}(\tilde{\beta} \mid \mathcal{M})$$

yazılır [6] ya da denk olarak $OLSE$ ve $BLUE$'nun kovaryans matrisleri arasındaki fark nonnegatif tanımlıdır biçiminde ifade edilir. $OLSE$'nin $BLUE$'ya göre etkinliğini karşılaştırmak için bazı yöntemler mevcuttur. Bu yöntemlerden en sık kullanılanı, genelleştirilmiş varyansların (kovaryans matrislerinin determinantlarının) oranı olarak tanımlanan Watson etkinliğidir. Watson etkinliği

$$\phi = \frac{|\operatorname{cov}(\tilde{\beta} \mid \mathcal{M})|}{|\operatorname{cov}(\hat{\beta} \mid \mathcal{M})|} = \frac{|X'X|^2}{|X'VX||X'V^{-1}X|} \tag{1.1}$$

olarak tanımlanır [4, 7]. (1.1)'de tanımlanan etkinlik ayrıca $OLSE$'nin toplam etkinliği olarak da bilinir. Kolayca görülür ki Watson etkinliği $\phi \leq 1$ dir. $\phi = 1$ olmasının gerek ve yeter koşulu $\hat{\beta} = \tilde{\beta}$ olmasıdır [8]. $BLUE$ ve $OLSE$'nin eşitliği ile ilgili literatürde birçok çalışma bulunmaktadır [9-27].

Etkinlik konusu literatürde yaygın bir şekilde çalışılmaktadır. Örneğin, Liski ve çalışma arkadaşları [28] bir singüler lineer model için $OLSE$ ve $BLUE$ arasında etkinlik karşılaştırması yapmış ve etkinlik kriterinin üst sınırını elde etmiştir. Liu [29] ise, [28]'de ele alınan konuyu daha genel durum için ele almıştır. Liu ve King [30] bir lineer modelde $OLSE$ ve $BLUE$ arasında etkinlik karşılaştırması yapmak için iki etkinlik kriteri tanımlamıştır. Balakrishnan ve Rao [31] $BLUE$'nun bazı etkinlik özelliklerini vermiştir. 2003 yılında Chu ve Styan [32], OLS ve GLS (genelleştirilmiş en küçük kareler) regresyon doğrularının paralel olduğu durumda basit lineer regresyonda OLS 'nin etkinliğini incelemiştir. Chu ve çalışma arkadaşları [33, 34] bir parçalanmış zayıf singüler lineer model ve bu modelle ilişkili modeller altında parametrenin ve parametrelerin bir alt kümesinin $OLSE$ 'lerinin Watson etkinliğinin bir ayrışımını vermiştir. [35]'te ise [34]'te verilmiş olan etkinlik ayrışımı, alt modeller ve onların dönüştürülmüş modelleri için ele alınmıştır. Chu ve çalışma arkadaşları [36] dik parçalanmış model altında Watson etkinliği ile ilişkili olan bir etkinlik çarpanı tanımlamıştır. Tian ve Wiens [37], genel lineer model altında $OLSE$, ağırlıklı en küçük kareler tahmin edicisi (Weight Least Square Estimator-$WLSE$) ve $BLUE$ 'nun eşitlikleri ve etkinlikleri arasındaki karşılaştırmaları matris rank metodunu kullanarak yapmışlardır. Yang ve Wang [38] ise, Watson etkinliğinin Öklid normuna dayanan bir alternatif formunu vermiştir. [39] ise, bir parçalanmış lineer model ve bu modelle ilişkili olan modeller altında model matrisinin dik ve V dik parçalanma koşulları altında bazı Watson etkinlik ayrışımları verilmiştir. Bunların yanı sıra etkinlik konusu ayrıca uygulamalı bilimlerde de önemli bir rol oynadığından birçok çalışmada ele alınmıştır [23, 29, 40-42, 44, 45].

Bu çalışmada bir parçalanmış lineer modelin yanı sıra bu modelle ilişkili olan indirgenmiş modeller ve bir alternatif model ele alınmaktadır. Ele alınan modeller altında parametrelerin ve alt parametrelerin $OLSE$ 'lerinin $BLUE$ 'ya göre etkinlikleri elde edilecektir. Ayrıca modellerin zayıf singüler model olma koşulları altında etkinliklerin çarpımsal ayrışımları verilerek karşılaştırmalar yapılacaktır.

BÖLÜM 2. GENEL BİLGİLER

Bu bölümde sonraki bölümlerde kullanılacak olan bazı tanımlar ve ispatsız olarak bazı teoremler verilecektir.

2.1. Sütun Uzayı, Satır Uzayı, Sıfır Uzayı ve Bir Matrisin Rankı

Tanım 2.1.1. $x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ vektörleri için $\sum a_i x_i = 0$ olacak şekilde hepsi birden sıfır olmayan $a_1, a_2, ..., a_n$ skalerleri bulunuyorsa, $x_1, x_2, ..., x_n$ vektörlerine lineer bağımlıdır, aksi takdirde lineer bağımsızdır denir [46, 47].

Tanım 2.1.2. A matrisi $m \times n$ boyutlu ve $a_1, a_2, ..., a_n$ sütunlarına sahip olan bir matris olsun. $x' = (x_1, x_2, ..., x_n)$ vektörü için $Ax = x_1 a_1 + x_2 a_2 + ... + x_n a_n$ ifadesi A matrisinin sütunlarının bir lineer kombinasyonunu gösterir. A matrisinin sütunlarının lineer kombinasyonu olarak ifade edilebilen bütün vektörlerin kümesine A matrisinin sütun uzayı denir ve $\mathcal{C}(A)$ ile gösterilir. $\mathcal{C}(A)$, A matrisinin sütunları tarafından gerilir ve sütun uzayı

$$\mathcal{C}(A) = \left\{ y \in \mathbb{R}^{m\times 1} : y = Ax, x \in \mathbb{R}^{n\times 1} \right\}$$

ile ifade edilir [47-49].

Tanım 2.1.3. A matrisinin $a_1, a_2, ..., a_m$ satırları tarafından üretilen $\mathbb{R}^{n\times 1}$ in alt uzayına A matrisinin satır uzayı denir. A matrisinin satır uzayı $\mathcal{C}(A')$ olarak gösterilir [47-49].

Tanım 2.1.4. A matrisinin sütun uzayının boyutuna A matrisinin sütun rankı denir. A matrisinin satır uzayının boyutuna A matrisinin satır rankı denir. Bir A matrisinin satır indirgenmiş eşelon biçimindeki sıfırdan farklı satırların sayısına A matrisinin rankı denir ve $r(A)$ ile gösterilir [47-49].

Tanım 2.1.5. A matrisinin sıfır uzayı,

$$\mathcal{N}(A) = \left\{ x \in \mathbb{R}^{n\times 1} : Ax = 0 \right\} \subseteq \mathbb{R}^{n\times 1}$$

şeklinde tanımlanır [51].

Teorem 2.1.6. A matrisi $m \times n$ boyutlu bir matris ve C matrisi, A matrisinin satır indirgenmiş eşelon biçimi olsun. A matrisinin satır uzayı ile C matrisinin satır uzayı aynıdır [47,49].

Teorem 2.1.7. A $m \times n$ boyutlu bir matris olsun. A matrisinin satır rankı, sütun rankı ve rankı eşittir [47].

Teorem 2.1.8. Uygun boyutlu A, B ve C matrisleri için aşağıdakiler doğrudur:

(a) $\mathcal{C}(A:B) = \mathcal{C}(A) + \mathcal{C}(B)$,

(b) $\mathcal{C}(AB) \subseteq \mathcal{C}(A)$,

(c) $\mathcal{C}(AA') = \mathcal{C}(A)$,

(d) $\mathcal{C}(C) \subseteq \mathcal{C}(A) \Leftrightarrow C$ matrisi AB biçimindedir,

(e) $boy(\mathcal{C}(A)) = r(A)$,

(f) Eğer $\mathcal{C}(A) \subseteq \mathcal{C}(B)$ ve $r(A) = r(B)$ ise $\mathcal{C}(A) = \mathcal{C}(B)$ dir. Özellikle, $\mathcal{C}(I_n) = \mathbb{R}^{n\times 1}$ dir,

(g) $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ için $r(A) \le \min\{m, n\}$,

(h) Bir matrisin bazı satır ya da sütunlarının silinmesiyle elde edilen alt matrisinin rankı, orijinal matrisin rankını geçemez,

(i) $A \in \mathbb{R}^{m\times k}$ ve $B \in \mathbb{R}^{k\times n}$ ise, $r(A) + r(B) - k \le r(AB) \le \min\{r(A), r(B)\}$,

(j) $r(A) = r(A') = r(A'A) = r(AA')$ [46, 49, 50].

2.2. Tersler ve Genelleştirilmiş Tersler

Eğer $AB = I$ ise, B matrisine A matrisinin sağ tersi denir ve bu ters B^{-R} ile gösterilir. A matrisine ise, B matrisinin sol tersi denir ve bu ters A^{-L} ile gösterilir. A matrisinin sağ tersi A tam satır ranklı olduğunda vardır. Benzer şekilde B matrisinin sol tersi B tam sütun ranklı olduğunda vardır. Sağ ters veya sol ters tek olmayabilir. $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ üçgensel bir matris olmak üzere, rank şartları gösterir ki, $m > n$ olduğunda sağ ters olmayabilir ve $m < n$ olduğunda sol ters olmayabilir. Aslında her iki tersin olması için gerek ve yeter şart A matrisinin kare matris ve tam ranklı olmasıdır. Bu durumda, A^{-L} ve A^{-R} tek olur ve birbirine eşit olur. Bu özel matrise, nonsingüler A matrisinin tersi denir ve A^{-1} ile gösterilir. O halde, bir A matrisinin tersi vardır ve bu ters tektir ancak ve ancak A nonsingülerdir. $AA^{-1} = A^{-1}A = I$ dır. Eğer A ve B matrislerinin her ikisi de nonsingüler ve aynı boyutlu ise, $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ dir.

Herhangi bir A matrisi için $ABA = A$ ise, B matrisine A matrisinin genelleştirilmiş tersi denir ve A matrisinin genelleştirilmiş tersi A^{-} ile gösterilir. Eğer $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ ise, $A^{-} \in \mathbb{R}^{n\times m}$ dir. Her matrisin en az bir genelleştirilmiş tersi vardır. Her simetrik matrisin en az bir simetrik genelleştirilmiş tersi vardır. Genel olarak, A^{-} tek değildir. A^{-} matrisinin tek olması için gerek ve yeter koşul A matrisinin nonsingüler olmasıdır, bu durumda $A^{-} = A^{-1}$ dir.

Herhangi bir A matrisi için,

(a) $ABA = A$
(b) $BAB = B$
(c) $AB = (AB)'$
(d) $BA = (BA)'$

koşullarını sağlayan, B matrisine A matrisinin Moore-Penrose tersi denir ve A^+ ile gösterilir. Bir matrisin Moore-Penrose tersi tektir. Eğer A tersinir ise $A^+ = A^{-1}$ dir [49].

Teorem 2.2.1. A_1 ve A_2 tersinir matrisler ise, bu durumda herhangi bir A_3 matrisi için A_3, A_1A_3, A_3A_2 ve $A_1A_3A_2$ matrisleri aynı ranka sahiptir [50].

Tanım 2.2.2. Eğer $P^2 = P$ olacak şekilde bir P matrisi varsa P matrisine idempotent matris denir [49].

Teorem 2.2.3. A, B ve C uygun boyutlu matrisler olmak üzere aşağıdakiler doğrudur:

(a) $(A^+)^+ = A$ ve $(A')^+ = (A^+)'$,

(b) AA^+ ve A^+A idempotenttir,

(c) $r(A) = r(A^+) = r(AA^+) = r(A^+A)$,

(d) $A'AA^+ = A' = A^+AA'$ ve $A'(A^+)'A^+ = A^+ = A^+(A^+)'A'$,

(e) $A = 0 \Leftrightarrow A^+ = 0$, $AB = 0 \Leftrightarrow B^+A^+ = 0$ ve $A^+B = 0 \Leftrightarrow A'B = 0$,

(f) $r(A) = r(A^-A) = r(AA^-) \leq r(A^-)$,

(g) BA^-C, A'nın genelleştirilmiş tersinin seçimine göre değişmezdir ancak ve ancak $\mathcal{C}(B') \subseteq \mathcal{C}(A')$ ve $\mathcal{C}(C) \subseteq \mathcal{C}(A)$ dır,

(h) A^-A ve AA^- matrislerinin her biri idempotenttir,

(i) A matrisi simetrik ve idempotent ise $I - A$ matrisi de simetrik ve idempotenttir [46, 49-51].

2.3. Determinantlar

Tanım 2.3.1. $A = (a_{ij})$ bir $n \times n$ boyutlu matris olmak üzere A matrisinin determinantı $|A|$ ile gösterilir ve aşağıdaki gibi tanımlanır:

(a) $n=1$ için $|A|=a_{11}$,

(b) $n=2$ için $|A|=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$,

(c) $n>2$ için $|A|=a_{11}|A_{11}|-a_{12}|A_{12}|+...+(-1)^{1+n}a_{1n}|A_{1n}|=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{1+i}a_{1i}|A_{1i}|$. Burada A_{1i}, $(1,i)$. minördür [47].

Teorem 2.3.2. A köşegen elemanları $a_{11},...,a_{nn}$ olan bir $n\times n$ boyutlu matris olmak üzere, eğer A üst üçgensel, alt üçgensel veya köşegen matris ise $|A|=a_{11}a_{22}...a_{nn}$ dir [47].

Sonuç 2.3.3. I birim matris olmak üzere $|I|=1$ dir.

Teorem 2.3.4. A ve B kare matrisler olmak üzere $|AB|=|A||B|$ dir [47].

Sonuç 2.3.5. A tersinir bir matris olmak üzere $|A|=\dfrac{1}{|A^{-1}|}$ dir.

2.4. Vektör Uzayları ve İzdüşüm

$S\in\mathbb{R}^{n\times 1}$ olsun. Her $u,v\in S$ ve $a,b\in\mathbb{R}$ için $au+bv\in S$ oluyorsa, S kümesi bir vektör uzayıdır. $\mathbb{R}^{n\times 1}$ vektör uzayının her alt vektör uzayı 0 vektörünü içerir. Eğer S_1, $S_2\in\mathbb{R}^{n\times 1}$ vektör uzayları için, $S_1\cap S_2=\{0\}$ ise S_1 ve S_2 vektör uzaylarına (hemen hemen) ayrık vektör uzayları denir. $\mathrm{S}_1\cap\mathrm{S}_2$ bir vektör uzayıdır, fakat $\mathrm{S}_1\cup\mathrm{S}_2$ bir vektör uzayı olmak zorunda değildir. $S_1\cup S_2$ kümesini içeren en küçük vektör uzayına iki uzayın toplamı denir ve S_1+S_2 ile gösterilir. S_1+S_2, $u\in S_1$ ve $v\in S_2$ olmak üzere, $u+v$ biçimindeki tüm vektörleri içerir. Aynı boyuttan u ve v vektörleri için, eğer $u'v=0$ ise, u vektörü, v vektörüne diktir denir. Eğer S_1 ve S_2 vektör uzayları için S_1 vektör uzayındaki her vektör S_2 vektör uzayındaki tüm vektörlere dik ise S_1 ve S_2 vektör uzayları birbirine diktir denir ve $S_1\perp S_2$ ile gösterilir. Birbirine dik olan iki vektör uzayının toplamına bu vektör uzaylarının direkt toplamı denir ve bu durumda $S_1 + S_2$ ile gösterilen toplam $S_1 \oplus S_2$ şeklinde ifade edilir. Eğer $S_1 \oplus S_2 = \mathbb{R}^{n\times 1}$ ise S_1 ve S_2 alt uzaylarına birbirinin dik tümleyenleri denir ve $S_1 = S_2^{\perp}$ (veya $S_2 = S_1^{\perp}$) şeklinde gösterilir. Açıkça bir S vektör uzayı için $(S^{\perp})^{\perp} = S$ olur. $\{u_1, u_2, ..., u_k\}$ vektörlerinin kümesi aşağıda verilen koşulları sağlıyorsa, S vektör uzayı için bir bazdır.

(a) $u_i \in S$, $i = 1, 2, ..., k$.

(b) $\{u_1, u_2, ..., u_k\}$ lineer bağımsızdır.

(c) S vektör uzayının her elemanı $u_1, u_2, ..., u_k$ vektörlerinin lineer kombinasyonu olarak yazılır.

Her sıfırdan farklı sonlu boyutlu vektör uzayının bazı vardır, ancak bu baz tek olmayabilir. Fakat verilen herhangi bir sonlu vektör uzayının farklı bazlarındaki vektörlerin sayısı aynıdır. Bu sayıya vektör uzayının boyutu denir ve S vektör uzayı için S vektör uzayının boyutu $boy(S)$ ile gösterilir. $n\times 1$ boyutlu vektörleri içeren herhangi bir S vektör uzayı için $S \oplus S^{\perp} = \mathbb{R}^{n\times 1}$ olur. Böylece, y$\in \mathbb{R}^{n\times 1}$ vektörü, $u \in S$ ve $v \in S^{\perp}$ olmak üzere, $y = u + v$ olarak tek türlü yazılabilir. Bu ifadeye, y vektörünün dik ayrışımı denir. Burada u vektörüne, S vektör uzayı üzerinde y vektörünün izdüşümü denir ve bir izdüşüm tek olarak belirlenir [49].

Tanım 2.4.1. S vektör uzayı olmak üzere $\forall v \in S$ için $Pv = v$ ve $Pv \in S$ ise P matrisine bir izdüşüm matrisi denir. Her izdüşüm matrisi bir idempotent matristir [49].

Tanım 2.4.2. P matrisi, S vektör uzayının bir izdüşüm matrisi olmak üzere $I - P$ matrisi $S^{\perp}$ vektör uzayının bir izdüşüm matrisi ise, bu durumda P matrisine S vektör uzayının bir dik izdüşüm matrisi denir [49].

Teorem 2.4.3. Herhangi bir A matrisi için AA^{-} matrisi $\mathcal{C}(A)$ için bir izdüşüm matrisidir. $A(A'A)^{-}A'$ matrisi ise $\mathcal{C}(A)$ için bir dik izdüşüm matrisidir [49].

Teorem 2.4.4. $\mathcal{C}(P_A) = \mathcal{C}(A)$ ve $\mathcal{C}(I - P_A) = \mathcal{C}(A)^{\perp}$ dir [49].

Teorem 2.4.5. A ve B satır sayıları aynı olan matrisler olmak üzere,

(a) $\mathcal{C}(A:B) \subseteq \mathcal{C}(A) \oplus \mathcal{C}((I - P_A)B)$,

(b) $P_{(A:B)} = P_A + P_{(I-P_A)B}$

dir [49].

Teorem 2.4.6. A ve B uygun boyutlu matrisleri için, $\mathcal{C}(A) \subseteq \mathcal{C}(B)$ olsun. Bu durumda
$P_A P_B = P_B P_A = P_A$

dır [51].

Teorem 2.4.7. Uygun boyutlu A ve B matrisleri için

(a) $B'A = 0 \Leftrightarrow \mathcal{C}(B) \subseteq \mathcal{C}(A)^{\perp}$,

(b) $\mathcal{C}(A) \subseteq \mathcal{C}(B) \Leftrightarrow \mathcal{C}(B)^{\perp} \subseteq \mathcal{C}(A)^{\perp}$

dir [49].

2.5. Kuadratik Formlar

Tanım 2.5.1. $\mathrm{y} = (\mathrm{y_i}) \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ vektörü ve simetrik bir $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matrisi için, $Q(y) = y'Ay = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} y_i y_j a_{ij}$ ifadesine, y_{i} elemanlarının bir kuadratik formu ve A matrisine de bu kuadratik formun matrisi denir. $y'Ay$ kuadratik formu, simetrik bir

A matrisi tarafından karakterize edilir ve bu matrise kuadratik formun matrisi denir. Böyle bir matris için aşağıdakiler söylenebilir:

(a) Eğer $\forall y \neq 0$ için $y'Ay > 0$ ise A pozitif tanımlıdır,

(b) Eğer $\forall y \neq 0$ için $y'Ay < 0$ ise A negatif tanımlıdır,

(c) Eğer $\forall y$ için $y'Ay \geq 0$ ise A nonnegatif tanımlıdır [49, 50].

Teorem 2.5.2. A nonnegatif tanımlı ve r ranklı bir matristir ancak ve ancak $A = RR'$ olacak şeklinde r ranklı bir R matrisi vardır [51].

2.6. Löwner Sıralaması

Tanım 2.6.1. Eğer A ve B nonnegatif tanımlı matrisleri için $B - A$ nonnegatif tanımlı ise Löwner sıralamasına göre A, B den daha küçüktür denir. $A \leq_L B$ veya $B \geq_L A$ ile gösterilir. Eğer $B - A$ pozitif tanımlı ise, bu durumda A matrisine kesinlikle B matrisinden küçüktür denir. $A <_L B$ veya $B >_L A$ ile gösterilir [49].

2.7. Schur Tamamlayıcısı

Tanım 2.7.1. $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$ olsun. Eğer A_{11} kare matris ve nonsingüler ise, bu durumda $S = A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$ matrisine A_{11} matrisinin A matrisindeki Schur tamamlayıcısı adı verilir. Benzer şekilde, eğer A_{22} nonsingüler ise $T = A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}$ matrisine A_{22} matrisinin A matrisindeki Schur tamamlayıcısı adı verilir [48].

Tanım 2.7.2. Eğer Tanım 2.7.1'de verilen A_{11} matrisi singüler ise A_{11}^{-1}, A_{11}^{-} ile yer değiştirir ve bu durumda $S = A_{22} - A_{21}A_{11}^{-}A_{12}$ matrisi A_{11} matrisinin A matrisindeki genelleştirilmiş Schur tamamlayıcısı olarak tanımlanır [48].

Tanım 2.7.3. A matrisi Tanım 2.7.1'de verilen parçalı matris olmak üzere, Schur tamamlayıcısının determinant formülü

$$|A| = |A_{11}||A_{22} - A_{21}A_{11}^{-}A_{12}| = |A_{22}||A_{11} - A_{12}A_{22}^{-}A_{21}|$$

dır [48].

2.8. Lineer Denklem Sistemleri

Tanım 2.8.1. $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{k\times t}$ ve $C \in \mathbb{R}^{m\times t}$ bilinen matrisler olmak üzere, $AXB = C$ matris denklem sistemini sağlayan en az bir $X \in \mathbb{R}^{n\times k}$ matrisi varsa, sistem tutarlıdır denir. Aksi durumda sistem tutarsızdır [50].

Teorem 2.8.2. $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{k\times t}$ ve $C \in \mathbb{R}^{m\times t}$ olsun. $AXB = C$ matris denklemini sağlayan bir $X \in \mathbb{R}^{n\times k}$ matrisinin var olmasının yani sistemin tutarlı olmasının gerek ve yeter koşulu $AA^{-}CB^{-}B = C$ olmasıdır. Eğer sistem tutarlı ise $H \in \mathbb{R}^{r\times k}$ herhangi bir matris olmak üzere,

$$X = A^{-}CB^{-} + H - A^{-}AHBB^{-}$$

ile verilen X matrisi $AXB = C$ matris denkleminin genel çözümüdür.

$AXB = C$ matris denkleminde X matrisi yerine $x \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ vektörü, $B = I$ ve C matrisi yerine $g \in \mathbb{R}^{m\times 1}$ vektörü alındığında, $Ax = g$ lineer denklem sistemi elde edilir. Böylece Teorem 2.8.2'nin daha özel bir durumu olarak aşağıdaki teorem verilebilir [50].

Teorem 2.8.3. $Ax = g$ lineer denklem sisteminin tutarlı olabilmesi için gerek ve yeter koşul $AA^{-}g = g$ olmasıdır. Eğer sistem tutarlı ise, bu durumda herhangi bir $h \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ vektörü için $x = A^{-}g + (I - A^{-}A)h$ ile verilen x vektörü $Ax = g$ lineer denklem sisteminin genel çözümüdür [50].

2.9. Rasgele Vektörler ve Bazı İstatistiksel Kavramlar

Rasgele vektör, elemanları rasgele değişkenler olan bir vektör ve benzer şekilde rastgele matris ise, elemanları rastgele değişkenler olan bir matristir. Rasgele vektör ve matrislerle ilgili bazı temel kavram ve teoremler aşağıda verilmektedir. Bu tanım ve teoremler ile ilgili detaylı bilgi için, örneğin, [51, 52] kaynaklarına bakılabilir.

Tanım 2.9.1. $Z = (z_{ij})$ $m \times n$ boyutlu rasgele bir matris olmak üzere. Z matrisinin beklenen değeri, $E(Z) = \left(E(z_{ij})\right)$ dir.

Teorem 2.9.2. Z rasgele bir matris, A, B ve C bilinen uygun boyutlu matrisler olmak üzere, $E(AZB + C) = AE(Z)B + C$ dir.

Sonuç 2.9.3. A ve B bilinen uygun boyutlu matrisler, x ve y ise uygun boyutlu rasgele vektörler olmak üzere $E(Ax + By) = AE(x) + BE(y)$ dir.

Tanım 2.9.4. X rasgele değişkeninin varyansı, $\mathrm{var}(X) = \sigma_x^2 = E(X - \mu)^2$ dir. Burada, $\mu = E(X)$ dir.

Tanım 2.9.5. X ve Y rasgele değişkenleri arasındaki kovaryans, $\mathrm{cov}(X, Y) = \sigma_{XY} = E(X - \mu)(Y - v)$ dir. Burada $\mu = E(X)$, $v = E(Y)$ dir.

$x = (x_1, ..., x_p)'$ $p \times 1$ boyutlu rastgele vektörünün kovaryans matrisi (varyans-kovaryans matrisi veya dağılım matrisi)

$$D(x) = \mathrm{cov}(x, x) = \mathrm{cov}(x) = \Sigma = \left(\sigma_{ij}\right) = \left(\mathrm{cov}(x_i, x_j)\right) = \left(E(x_i - \mu_i)(x_j - \mu_j)\right)$$
$$= E(x - \mu)(x - \mu)' = E(xx') - \mu\mu'$$

olarak tanımlanır. Burada $\mu = E(x)$ ve Σ, $p \times p$ boyutlu bir matristir. $y = (y_1, ..., y_q)'$ $q \times 1$ boyutlu rasgele vektör olmak üzere x ve y vektörleri arasındaki kovaryans matrisi,

$$\mathrm{cov}(x,y)=\left(\mathrm{cov}(x_i,x_j)\right)=\left(E(x_i-\mu_i)(y_j-\nu_j)\right)=E(x-\mu)(y-\nu)'=E(xy')-\mu\nu'$$

dir. Burada $\mu=E(x)$ ve $\nu=E(y)$ dir ve $\mathrm{cov}(x,y)$ $p\times q$ boyutlu bir matristir [48]

Teorem 2.9.6. $A\in\mathbb{R}^{k\times m}$ ve $B\in\mathbb{R}^{p\times n}$ bilinen matrisler, $x\in\mathbb{R}^{m\times 1}$ ve $y\in\mathbb{R}^{n\times 1}$ rastgele vektörler olsun. Bu durumda

(a) $\mathrm{cov}(Ax,By)=A\,\mathrm{cov}(x,y)B'$,
(b) $D(Ax)=\mathrm{cov}(Ax,Ax)=A\,\mathrm{cov}(x,x)A'=AD(x)A'$

dir [51, 52].

BÖLÜM 3. LİNEER MODELLERDE TAHMİN

Bir tek parametreyi tahmin etmek için bir tek istatistik kullanılıyorsa, bu durumda parametrelerin nokta tahmin edicisi kullanılıyor denir. Yani nokta tahmin edicisi, bir kitle parametresini tahmin etmek için kullanılan tek bir istatistiktir. Genel olarak bir istatistikten bahsediliyorsa, buna bir tahmin edici ve eğer istatistik belirtilen bir değeri almışsa buna tahmin denir. Q bir parametre olmak üzere $E(T)=Q$ ise, T istatistiğine Q parametresinin yansız tahmin edicisi, $E(T)=Q+$ (bir terim) ise, buna yanlı tahmin edici denir. Yanlı ve yansız tahmin ediciler arasında seçim söz konusu olduğunda yansız tahmin edicinin seçilmesi doğaldır. Ancak iki yansız tahmin edici arasında seçim söz konusu olduğunda yeni bir ölçü kullanmak gerekir. Bu durumda da parametreye yakın olması olasılığı yüksek olan tercih edilir. Bir parametrenin bir yansız tahmin edicisi, diğer herhangi bir yansız tahmin edicisinden daha küçük varyansa sahip ise, bu istatistiğe parametrenin minimum varyanslı tahmin edicisi denir. Parametrelerin bir lineer fonksiyonu, gözlemler vektörünün beklenen değerinin bir lineer fonksiyonuna denk ise, bu durumda parametrelerin lineer fonksiyonuna tahmin edilebilirdir denir.

Genel olarak bir lineer model $y=X\beta+\varepsilon$ biçiminde tanımlanır. Burada $y\in\mathbb{R}^{n\times 1}$ gözlenebilir rastgele değişkenler vektörü, $X\in\mathbb{R}^{n\times p}$ bilinenler matrisi, $\beta\in\mathbb{R}^{p\times 1}$ bilinmeyen parametrelerin vektörü ve $\varepsilon\in\mathbb{R}^{n\times 1}$ ise gözlenebilir olmayan hataların bir vektörüdür.

β parametre vektörünü tahmin etmenin değişik metotları vardır. Bu metotlardan en çok kullanılanı en küçük kareler tahmini (least square estimation-LSE) metodudur. Bu model $\varepsilon=(\varepsilon_i)$ olmak üzere, $\sum\varepsilon_i^2$ ifadesinin β parametresine göre minimumlaştırılması işlemlerini içerir. $E(\varepsilon)=0$ ve $D(\varepsilon)=\sigma^2 I$ olmak üzere, bu işlemler sonucunda elde edilen $X'X\beta = X'Y$ denklemine normal denklem denir. X tam ranklı kabul edildiğinde sistemin tek bir çözümü vardır ve bu çözüm $\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'y$ dir. Bu durumda $\hat{\beta}$ tahminine, alışılmış en küçük kareler tahmin edicisi (OLSE) denir. X 'in tam ranklı olduğu kabulü altında bilinen bir V pozitif tanımlı matrisi için $E(\varepsilon) = 0$ ve $D(\varepsilon) = \sigma^2 V$ olarak alındığında elde edilen normal denklemlere karşılık gelen $X'V^{-1}X\beta = X'V^{-1}y$ denkleminin tek çözümü $\tilde{\beta} = (X'V^{-1}X)^{-1}X'V^{-1}y$ tahmini genelleştirilmiş en küçük kareler tahmin edicisi (generalized least square estimation-GLSE) olarak bilinir.

Lineer modeller altında tahminler ile ilgili daha detaylı bilgilere geçmeden önce çalışmada ele alınan lineer modeller aşağıda tanıtılmıştır.

3.1. Bir Genel Parçalanmış Lineer Model ve Bu Modelle İlişkili Olan Bazı Modeller

$$y = X\beta + \varepsilon = X_1\beta_1 + X_2\beta_2 + \varepsilon \qquad \textbf{(3.1)}$$

parçalanmış lineer modeli ele alınsın. Bu modelin diğer bir gösterimi,

$$\mathcal{M} = \{y, X\beta, V\} = \{y, X_1\beta_1 + X_2\beta_2, V\} \qquad \textbf{(3.2)}$$

biçimindedir. Burada $E(y) = X\beta$, $E(\varepsilon) = 0$ ve $cov(y) = cov(\varepsilon) = V$ dir. Bu modelde $y \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ gözlenebilir rastgele vektör, $\varepsilon \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ rasgele hata vektörü, $X_1 \in \mathbb{R}^{n\times p_1}$ ve $X_2 \in \mathbb{R}^{n\times p_2}$ olmak üzere $X = (X_1 : X_2)$ olarak parçalanmış $n\times p$ boyutlu matris, $\beta_1 \in \mathbb{R}^{p_1\times 1}$, $\beta_2 \in \mathbb{R}^{p_2\times 1}$ olmak üzere $\beta = (\beta_1' : \beta_2')'$ bilinmeyen parametrelerin bir $p\times 1$ boyutlu vektörü ve V bilinen bir $n\times n$ nonnegatif tanımlı matristir. Çalışma boyunca (3.2)'de verilen $\mathcal{M}$ lineer modelinin tutarlı yani,

$$y \in \mathcal{C}(X : V) = \mathcal{C}(X : VM) \qquad \textbf{(3.3)}$$

olduğu kabul edilecektir. Burada M , $\mathcal{C}(X)^{\perp}$ üzerine dik izdüşüm matrisidir. Şimdi çalışmada kullanılacak olan izdüşüm matrisleri ile ilgili bazı gösterimlerden bahsetmek yararlı olacaktır. Herhangi bir A matrisi için P_A ve Q_A ile gösterilen matrisler sırasıyla $\mathcal{C}(A)$ ve $\mathcal{C}(A)^{\perp}$ üzerine dik izdüşüm matrisleri olmak üzere,

$$P_A = AA^{+} = A(A'A)^{-}A' \text{ ve } Q_A = I - P_A \tag{3.4}$$

dır. Özellikle çalışmada,

$$P_i = P_{x_i}\,,\; M_i = I - P_i\,,\; i = 1,2 \text{ ve } H = P_x\,,\; M = I - H$$

gösterimleri kullanılacaktır.

Bu çalışmada tam model olarak bilinen $\mathcal{M}$ modelinin yanı sıra aşağıdaki modeller de ele alınacaktır:

$$\mathcal{M}_1 = \{y, X_1\beta_1, V\}\,,\; \mathcal{M}_2 = \{y, X_2\beta_2, V\}\,, \tag{3.5}$$

$$\mathcal{M}_{12} = \{M_1 y, M_1 X_2\beta_2, M_1 V M_1\}\,, \tag{3.6}$$

$$\mathcal{M}_r = \{y, M_1 X_2\beta_2, V\}\,. \tag{3.7}$$

Burada M_1 matrisi $\mathcal{C}(X_1)^{\perp}$ üzerine dik izdüşüm matrisidir. $\mathcal{M}_1$ ve $\mathcal{M}_2$ modelleri $\mathcal{M}$ modelinin küçük modeli olarak bilinir ve sırasıyla $\beta_2 = 0$ ve $\beta_1 = 0$ kısıtlamaları altında $\mathcal{M}$ tam modelinden elde edilirler. $\mathcal{M}_{12}$ modeli, $\mathcal{M}$ modelinin soldan M_1 dik izdüşüm matrisi ile çarpılmasıyla elde edilmiştir ve $\mathcal{M}$ tam modelinin bir düzgün indirgenmiş modeli olarak bilinir. $\mathcal{M}_r$ modeli ise, diğer modellerden farklı olarak $\mathcal{M}$ modelinden elde edilmemiştir. Ancak $\mathcal{M}_1 X_2\beta_2$ parametrik fonksiyonlar vektörü hakkındaki sonuçları içeren bir alternatif model olarak ele alınabilir.

Çalışmada lineer modeller ile ilgili kullanılacak olan bazı kavramlar ve özellikler aşağıda başlıklar halinde ele alınacaktır.

3.2.Tahmin Edilebilme

Regresyon modelleri ile ilgilenildiği zaman, ele alınan modeller altında parametrelerin ve bu parametrelerin lineer fonksiyonlarının tahmin edicilerinin açık ifadelerini bilmek yararlıdır. Ancak çoğu zaman bu ifadeler tek değildir. Örneğin $\mathcal{M}$ modeli altında $X_2\hat{\beta}_2$ nın $\hat{\beta}_2$ nın seçimine göre değişmez olmasının gerek ve yeter koşulu $X_2\beta_2$ nin $\mathcal{M}$ modeli altında tahmin edilebilir olmasıdır. Diğer bir değişle, $\hat{\beta}_2$ tek olmayabilir, ancak eğer $X_2\beta_2$ tahmin edilebilirse bu durumda $X_2\hat{\beta}_2$ tektir. Aşağıda parametrelerin ve bu parametrelerin bazı lineer fonksiyonlarının $\mathcal{M}$ modeli altında tahmin edilebilme koşulları verilmektedir.

Eğer her $\beta \in \mathbb{R}^{p\times 1}$ için $E(Ay) = AX\beta = K\beta$ olacak şekilde bir A matrisi mevcutsa, yani $K\beta$ bir lineer yansız tahmin ediciye sahipse, $K\beta$ parametrik fonksiyonuna $\mathcal{M}$ modeli altında tahmin edilebilirdir denir. Diğer bir değişle,

$$K\beta \text{ tahmin edilebilirdir} \Leftrightarrow \mathcal{C}(K') \subseteq \mathcal{C}(X') \Leftrightarrow \exists A : K = AX \qquad \textbf{(3.8)}$$

dir. Açıkça görülmektedir ki $X\beta$, $\mathcal{M}$ modeli altında her zaman tahmin edilebilirdir. β vektörü tek başına ele alındığında elde edilen koşul şu şekildedir. $\mathcal{M}$ modeli altında eğer her $\beta \in \mathbb{R}^{p\times 1}$ için $E(Ay) = AX\beta = \beta$ olacak şekilde bir A matrisi varsa, β tahmin edilebilirdir. Diğer bir deyişle,

$$\begin{aligned} \beta \text{ tahmin edilebilirdir} &\Leftrightarrow \exists A : I_p = AX = X'A' &\textbf{(3.9a)} \\ &\Leftrightarrow \mathbb{R}^p = \mathcal{C}(X') \\ &\Leftrightarrow X \text{ tam sütun ranklıdır.} \end{aligned}$$

$\mathcal{M}$ modeli altında $K_2\beta_2$ nin tahmin edilebilme koşulu:

$K_2\beta_2$ tahmin edilebilirdir $\Leftrightarrow \mathcal{C}(K_2') \subseteq \mathcal{C}(X_2'M_1) \Leftrightarrow \exists F : K_2 = FM_1X_2$ **(3.9b)**

dir. Açıkça görülmektedir ki $M_1X_2\beta_2$, $\mathcal{M}$ modeli altında her zaman tahmin edilebilirdir. $X_2\beta_2$ vektörünün $\mathcal{M}$ modeli altında tahmin edilebilir olmasının gerek ve yeter koşulu

$r(M_1X_2) = r(X_2)$ ya da denk olarak $\mathcal{C}(X_1) \cap \mathcal{C}(X_2) = \{0\}$ **(3.9c)**

olmasıdır. Bu koşulun aynı zamanda $X_1\beta_1$ parametresininde $\mathcal{M}$ modeli altında tahmin edilebilme koşulu olduğu açıkça görülmektedir. Ayrıca $\mathcal{M}$ modeli altında

β_2 tahmin edilebilirdir $\Leftrightarrow r(M_1X_2) = r(X_2) = p_2$

dir [14, 34, 48].

3.3. Alışılmış En Küçük Kareler Tahmin Edicisi (OLSE)

En küçük kareler tahmini yöntemindeki düşünce, gözlenmiş y değerlerine mümkün olduğunca yakın olacak şekilde $X\beta$ vektörü için β vektörünü bulmaktır. Buna göre β parametreler vektörünün $\mathcal{M}$ modeli altında $OLSE$'si, $(y - X\beta)'(y - X\beta)$ ifadesinin β vektörüne göre minimumlaştırılmasıyla elde edilen $X'X\beta = X'y$ normal denklem sisteminin çözümü ile elde edilir ve $OLSE(\beta \mid \mathcal{M}) = \hat{\beta}$ ile gösterilir. $X'X\beta = X'y$ normal denklemi β'ya göre çözülürse, herhangi bir u vektörü için

$\hat{\beta} = (X'X)^+ X'y + (I - (X'X)^+(X'X))u$ **(3.10)**

elde edilir. $(X'X)^+ X' = X^+$ olduğundan

$\hat{\beta} = X^+ y + (I - X^+ X)u = X^+ y + R_x u$ **(3.11)** olarak yazılır ve burada R_x, $\mathcal{C}(X')^{\perp}$ üzerine dik izdüşüm matrisidir [53, 54]. $\mathcal{M}$ modeli altında tahmin edilebilir olan bir $K\beta$ parametreler vektörünün $OLSE$'si, $K \in \mathbb{R}^{k\times p}$ olmak üzere

$$OLSE(K\beta \mid \mathcal{M}) = K.OLSE(\beta \mid \mathcal{M}) \quad \textbf{(3.12)}$$

olarak tanımlanır [48]. (3.11), (3.12) deki eşitlikte yerine yazıldığında,

$$OLSE(K\beta \mid \mathcal{M}) = K\hat{\beta} = KX^{+}y + KR_x u \quad \textbf{(3.13)}$$

elde edilir. $K\beta$ tahmin edilebilir olduğunda (3.8)'e göre $K = LX$ olacak şekilde bir L matrisi vardır. Buna göre,

$$OLSE(K\beta \mid \mathcal{M}) = KX^{+}y + L_x R_x u \ = KX^{+}y \quad \textbf{(3.14)}$$

olur. Burada eğer (3.13) ve (3.14)'de özel olarak K matrisi yerine X alınırsa, $X\beta$ parametreler vektörünün $OLSE$'si

$$OLSE(X\beta \mid \mathcal{M}) = X\hat{\beta} = XX^{+}y + XR_x u = XX^{+}y = P_x y$$

elde edilir. Şimdi X matrisinin tam sütun ranklı ve V varyans kovaryans matrisinin pozitif tanımlı olduğu kabul edilsin. Bu durumda $\mathcal{M}$ modeli altında, (3.8)'e göre X tam sütun ranklı olduğunda β tahmin edilebilirdir ve (3.9c)'ye göre

$$\hat{\beta}(\mathcal{M}) = (X'X)^{-1}X'y = X^{+}y \quad \textbf{(3.15)}$$

dır. Ayrıca (3.15)'ten,

$$OLSE(X\beta \mid \mathcal{M}) = X(X'X)^{-1}X'y \quad \textbf{(3.16)}$$

elde edilir. $\mathcal{M}$ modeli altında $M_1X_2\beta_2$, $X_2\beta_2$ ve β_2 paramertelerinin $OLSE$'leri aşağıdaki teoremde ifade edilmiştir.

Teorem 3.3.1. $\mathcal{M}$ parçalanmış lineer modeli ele alınsın. Bu durumda

$$OLSE(M_1X_2\beta_2 \mid \mathcal{M}) = M_1X_2(X_2'M_1X_2)^- X_2'M_1y \tag{3.17}$$

dir. $X_2\beta_2$, $\mathcal{M}$ modeli altında tahmin edilebilir olsun. Bu durumda

$$OLSE(X_2\beta_2 \mid \mathcal{M}) = X_2(X_2'M_1X_2)^- X_2'M_1y \tag{3.18}$$

dır. Ayrıca β_2, $\mathcal{M}$ modeli altında tahmin edilebilir ise

$$\hat{\beta}_2(\mathcal{M}) = (X_2'M_1X_2)^{-1} X_2'M_1y$$

dır [48].

$\mathcal{M}$ modeli altında parametreler vektörü ve bu vektörün lineer fonksiyonları için elde edilmiş olan sonuçlar benzer şekilde $\mathcal{M}_1$, $\mathcal{M}_{12}$ ve $\mathcal{M}_r$ modelleri için de ifade edilir. $\mathcal{M}_1$ modeli ele alındığında, herhangi bir u vektörü için

$$\hat{\beta}_1 = (X_1'X_1)^+ X_1'y + [I - (X_1'X_1)^+ X_1'X_1]u = X_1^+y + R_{x_1}u$$

ve

$$OLSE(X_1\beta_1 \mid \mathcal{M}_1) = X_1X_1^+y = P_1y = X_1.OLSE(\beta_1 \mid \mathcal{M}_1) \tag{3.19}$$

dir. $K\beta_1$, $\mathcal{M}_1$ altında tahmin edilebilir olduğunda (3.8)'e göre, $K = LX_1$ olacak şekilde bir L matrisi vardır. Böylece

$$OLSE(K\beta_1 \mid \mathcal{M}_1) = K\hat{\beta}_1 = KX_1^{+}y \tag{3.20}$$

elde edilir. X_1 tam sütun ranklı olduğunda,

$$\hat{\beta}_1(\mathcal{M}_1) = (X_1'X_1)^{-1}X_1'y$$

dir. Buradan ve (3.20)'den

$$OLSE(X_1\beta_1 \mid \mathcal{M}_1) = X_1(X_1'X_1)^{-1}X_1'y$$

olur. $X = (X_1 : X_2)$ ve $\beta = (\beta_1' : \beta_2')'$ için

$$\hat{\beta} = \begin{pmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} X_1' \\ X_2' \end{pmatrix} \quad (X_1 : X_2) \right]^{-1} \begin{pmatrix} X_1' \\ X_2' \end{pmatrix} y = \begin{pmatrix} X_1'X_1 & X_1'X_2 \\ X_2'X_1 & X_2'X_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1' \\ X_2' \end{pmatrix} y$$

dir. Eğer X_1 ile X_2 dik ise,

$$\begin{pmatrix} (X_1'X_1)^{-1}X_1'y \\ (X_2'X_2)^{-1}X_2'y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \end{pmatrix}$$

dir. Buradan da

$$\begin{aligned} OLSE(X\beta \mid \mathcal{M}) &= X_1(X_1'X_1)^{-1}X_1'y + X_2(X_2'X_2)^{-1}X_2'y \\ &= OLSE(X_1\beta_1 \mid \mathcal{M}_1) + OLSE(X_2\beta_2 \mid \mathcal{M}_2) \end{aligned}$$

olduğu görülür.

β_2, $\mathcal{M}_{12}$ ve $\mathcal{M}_r$ modelleri altında tahmin edilebilir olduğunda,

$$\hat{\beta}_2(\mathcal{M}_{12}) = (X_2'M_1X_2)^{-1}X_2'M_1y$$

ve

$$\hat{\beta}_2(\mathcal{M}_r) = (X_2'M_1X_2)^{-1}X_2'M_1y$$

dir.

3.4. En İyi Lineer Yansız Tahmin Edici (BLUE)

Daha önce ifade edildiği gibi, eğer her $\beta \in \mathbb{R}^{p\times 1}$ için $E(Gy) = X\beta$ ise, Gy tahmin edicisi $X\beta$ 'nın bir yansız tahmin edicisidir. Bu lineer yansız tahmin edici eğer diğer tüm yansız tahmin ediciler arasında Löwner sıralamasına göre en küçük kovaryans matrise sahipse, en iyi lineer yansız tahmin edici $(BLUE)$ olarak tanımlanır. Yani, $E(By) = X\beta$ olacak şekildeki her By vektörü için

$$cov(Gy) \leq_L cov(By) \qquad \textbf{(3.21)}$$

dir. Gy lineer tahmin edicisi yansız olduğunda $GX = X$ dir ve ayrıca Teorem 2.9.6 (b)'ye göre $cov(Gy) = GVG'$ olarak yazılır. Bu durumda (3.21)'deki ifade, $BX = X$ olacak şekildeki tüm B matrisleri için

$$GVG' \leq_L BVB' \qquad \textbf{(3.22)}$$

olarak yazılabilir.

Aşağıdaki lemmada temel $BLUE$ denklemi olarak bilinen denklem verilmiştir. Daha detaylı bilgi için [55]'e bakılabilir.

Lemma 3.4.1. $K\beta$, $\mathcal{M}$ modeli altında tahmin edilebilir olsun. Gy, $\mathcal{M}$ modeli altında $K\beta$ 'nın $BLUE$ ' sudur ancak ve ancak G matrisi

$$G(X:VM)=(K:\mathbf{0}) \tag{3.23}$$

denklemini sağlar. Benzer şekilde $\mathcal{M}$ modeli altında $X\beta$'nın $BLUE$'su Ay dir ancak ve ancak

$$A(X:VM)=(X:\mathbf{0}) \tag{3.24}$$

dir.

$K\beta$ tahmin edilebilir olduğundan (3.23) ile verilen denklem daima tutarlıdır. O halde,

$$\mathcal{C}((K:\mathbf{0})')\subseteq\mathcal{C}((X:VM)') \text{ ya da } \mathcal{C}\begin{pmatrix}K'\\ \mathbf{0}\end{pmatrix}\subseteq\mathcal{C}\begin{pmatrix}X'\\ MV\end{pmatrix}$$

dir. Çünkü $K\beta$ tahmin edilebilir olduğunda en az bir L matrisi için (3.8)'e göre $K=LX$ olacak şekilde bir L matrisi vardır ve (3.23) sağlanır. Genel olarak, $BLUE(K\beta\,|\,\mathcal{M})=P_{K;X;V}\,y$ olarak gösterilir. Burada $P_{K;X;V}$, $G(X:V\mathcal{M})=(K:\mathbf{0})$ matris denklemindeki G matrisi için bir çözümdür. Bu denklemin parametrik formda genel çözümü ise, U keyfi olmak üzere

$$G=(K:\mathbf{0})(X:VM)^{+}+UM_{(X:VM)}\,, \tag{3.25}$$

dir. (3.25)'den görüldüğü gibi G tek olmak zorunda değildir. Ancak y rasgele vektörleri $\mathcal{C}(X:V)=\mathcal{C}(X:VM)$ sütun uzayının elemanları olduğu zaman, yani model tutarlı olduğunda, ''bir olasılıkla'' Gy'nin sayısal gözlenmiş değerleri tektir [48]. Ayrıca,

$$BLUE(X\beta\,|\,\mathcal{M})=P_{X;V}\,y \text{ ve } BLUE(AX\beta\,|\,\mathcal{M})=P_{AX;X;V}\,y$$

olarak ifade edilir.

LSE metodu yaklaşımıyla, $\mathcal{M}$ modeli altında β'nın $BLUE$'su $\tilde{\beta}$, $(y - X\beta)V^{-}(y - X\beta)$ ifadesinin β'ya göre minimumlaştırılmasıyla elde edilir. V pozitif tanımlı olduğunda minimumlaştırma ile elde edilen $X'V^{-1}X\beta = X'V^{-1}y$ denklemi tahmin denklemi ya da Aitken denklemi olarak bilinir [34, 56]. Bu denklem ilk olarak 1935'te Aitken [3] tarafından tanıtılmıştır. X tam sütun ranklı ve V pozitif tanımlı olduğunda tahmin denklemi tek olarak,

$$\tilde{\beta}(\mathcal{M}) = (X'V^{-1}X)^{-1}X'V^{-1}y \tag{3.26}$$

çözümüne sahiptir ve bu çözüm $\mathcal{M}$ modeli altında β'nın $BLUE$'sudur. Aynı koşullar altında,

$$\tilde{\beta}_2 = BLUE(\beta_2 \mid \mathcal{M}) = (X_2'\dot{M}_1X_2)^{-1}X_2'\dot{M}_1y$$

dir [48]. Burada,

$$\begin{aligned}
\dot{M}_1 &= V^{-1} - V^{-1}X_1(X_1'V^{-1}X_1)^{-1}X_1'V^{-1} \\
&= V^{-1}(VM_1(M_1VM_1)^{-}M_1) \\
&= M_1(M_1VM_1)^{-}M_1 \\
&= (M_1VM_1)^{+} \\
&= P_vM_2(M_2VM_2)^{+}M_2P_v
\end{aligned}$$

dır. X tam sütun ranklı ve V singüler olduğunda $\mathcal{M}$ modeli altında,

$$BLUE(\beta \mid \mathcal{M}) = (X'V^{-}X)^{-1}X'V^{-}y\,,$$

$$BLUE(\beta_2 \mid \mathcal{M}) = (X_2'M_1(M_1VM_1)^{-}M_1X_2)^{-1}X_2M_1(M_1VM_1)^{-}M_1y$$

dir. $\mathcal{M}$ modeli altında $X\beta$'nın $BLUE$'sunun diğer gösterimleri, ayrıca

$$BLUE(X\beta) = Hy - HVM(MVM)^{-}My \quad \textbf{(3.27)}$$

$$BLUE(X\beta) = X(X'W^{-}X)^{-}X'W^{-}y \quad \textbf{(3.28)}$$

olarak verilebilir [34, 48, 53, 55, 57]. Burada

$$W = V + XVX'$$

ve U, $\mathcal{C}(W) = \mathcal{C}(X:V)$ olacak şekilde keyfi bir matristir.

$\mathcal{M}$ modeli için $BLUE$ ile ilgili elde edilmiş olan bu sonuçlar $\mathcal{M}_1$, $\mathcal{M}_{12}$ ve $\mathcal{M}_r$ modelleri için de elde edilir. X tam sütun ranklı ve V singüler olduğunda $\mathcal{M}_1$ modeli altında,

$$\tilde{\beta}_1(\mathcal{M}_1) = (X_1'V^{-}X_1)^{-1}X_1'V^{-}y$$

dir. X tam sütun ranklı ve V singüler olduğunda $\mathcal{M}_{12}$ modeli altında,

$$\begin{aligned}\tilde{\beta}_2(\mathcal{M}_{12}) &= [X_2'M_1(M_1VM_1)^{-}M_1X_2]^{-}X_2'M_1(M_1VM_1)^{-}M_1y \\ &= (X_2'\dot{M}_1X_2)^{-}X_2'\dot{M}_1y\end{aligned}$$

ve $\mathcal{M}_r$ modeli altında,

$$\tilde{\beta}_2(\mathcal{M}_r) = (X_2'M_1V^{-}M_1X_2)^{-1}X_2'M_1V^{-}y$$

dir.

3.5. Ele Alınan Modeller Altında OLSE ve BLUE'ların Kovaryansları

X tam sütun ranklı olduğunda, β vektörü tahmin edilebilirdir ve $\mathcal{M}$ tam modeli altında $\hat{\beta}(\mathcal{M}) = (X'X)^{-1}X'y$ ve $\tilde{\beta}(\mathcal{M}) = (X'V^{-1}X)^{-1}X'V^{-1}y$ dir. Teorem 2.9.6

(b)'den bilindiği gibi $cov(Ay) = A\,\mathrm{cov}(y)A'$ olduğundan V varyans kovaryans matrisinin pozitif tanımlı olduğu durumda,

$$cov(\hat{\beta}) = cov[(X'X)^{-1}X'y] = (X'X)^{-1}X'VX(X'X)^{-1} \quad \textbf{(3.29)}$$

ve

$$\begin{aligned} cov(\tilde{\beta}) &= (X'V^{-1}X)^{-1}X'V^{-1}VV^{-1}X(X'V^{-1}X)^{-1} \\ &= (X'V^{-1}X)^{-1}X'V^{-1}X(X'V^{-1}X)^{-1} \\ &= (X'V^{-1}X)^{-1} \end{aligned} \quad \textbf{(3.30)}$$

olarak bulunur. BLUE en iyi tahmin edici olduğundan Löwner sıralamasına göre [6], kovaryansı daha küçüktür ve (3.29) ve (3.30)'da verilen kovaryans matrislerine göre

$$\begin{aligned} &\mathrm{cov}(\tilde{\beta}) \leq_L \mathrm{cov}(\hat{\beta}) \\ &(X'V^{-1}X)^{-1} \leq_L (X'X)^{-1}X'VX(X'X)^{-1} \\ &(X'X)^{-1}X'VX(X'X)^{-1} - (X'V^{-1}X)^{-1} \geq_L 0 \end{aligned}$$

olduğu görülür. Ayrıca (3.27) ve (3.28) de verilen $BLUE$ gösterimlerinin kovaryansları,

$$cov[BLUE(X\beta)] = HVH - HVM(MVM)^{-}MVH \quad \textbf{(3.31)}$$

$$cov[BLUE(X\beta)] = X(X'W^{-}X)^{-}X' - XUX' \quad \textbf{(3.32)}$$

olarak ifade edilir.

$\mathcal{M}$ modeli için $OLSE$ ve $BLUE$'nun kovaryans matrisleri ile ilgili elde edilmiş olan sonuçlar $\mathcal{M}_1$, $\mathcal{M}_{12}$ ve $\mathcal{M}_r$ modelleri için aşağıdaki gibi verilebilir. X tam sütun ranklı, V varyans kovaryans matrisinin pozitif tanımlı ve $\dot{M}_1 = M_1(M_1VM_1)^{-}M_1$ olduğu durumda,

$$cov(\hat{\beta}_1 \mid \mathcal{M}_1) = (X_1'X_1)^{-1} X_1'VX_1 (X_1'X_1)^{-1},$$

$$cov(\tilde{\beta}_1 \mid \mathcal{M}_1) = (X_1'V^{-1}X_1)^{-1},$$

$$cov(\hat{\beta}_2 \mid \mathcal{M}_{12}) = (X_2'M_1X_2)^{-1} X_2'M_1VM_1X_2 (X_2'M_1X_2)^{-1},$$

$$cov(\tilde{\beta}_2 \mid \mathcal{M}_{12}) = (X_2'\dot{M}_1X_2)^{-1} X_2'\dot{M}_1V\dot{M}_1X_2 (X_2'\dot{M}_1X_2)^{-1}$$

$$cov(\hat{\beta}_2 \mid \mathcal{M}_r) = (X_2'M_1X_2)^{-1} X_2'M_1VM_1X_2 (X_2'M_1X_2)^{-1},$$

$$cov(\tilde{\beta}_2 \mid \mathcal{M}_r) = (X_2'M_1V^-M_1X_2)^{-1} X_2'M_1V^-VV^-M_1X_2 (X_2'M_1V^-M_1X_2)^{-1}$$

dir.

BÖLÜM 4. BİR GENEL PARÇALANMIŞ LİNEER MODEL VE BU MODELLE İLİŞKİLİ OLAN MODELLER ALTINDA ETKİNLİKLERİN KARŞILAŞTIRILMASI

Bu bölümde, öncelikle $\mathcal{M}$ tam modeli ve bu modelin indirgenmiş modelleri olan $\mathcal{M}_1$, $\mathcal{M}_2$ ve $\mathcal{M}_{12}$ modelleri ile birlikte alternatif bir model olan $\mathcal{M}_r$ modeli altında parametrelerin $OLSE$'lerinin $BLUE$'ya göre etkinlikleri elde edilmiştir. Daha sonra ele alınan modeller altında parametrelerin $OLSE$'lerinin $BLUE$'ya göre etkinliklerinin çarpımsal ayrışımları verilerek karşılaştırmalar yapılmıştır.

4.1. β_2 Alt Vektörünün OLSE ve BLUE'su ile ilgili Bazı Sonuçlar

Teorem 4.1.1. (Genelleştirilmiş Frisch-Waugh-Lovell (FWL) teoremi) $\mathcal{M}$ tam modeli altında $M_1X_2\beta_2$ nin $BLUE$'sunun her gösterimi $\mathcal{M}_{12}$ indirgenmiş modeli altında $BLUE$ kalır ve bunun tersi de doğrudur. Yani, $\mathcal{M}$ ve $\mathcal{M}_{12}$ modelleri altında $M_1X_2\beta_2$'nin $BLUE$'larının kümesi çakışır, yani

$$\{BLUE(M_1X_2\beta_2 \mid \mathcal{M})\} = \{BLUE(M_1X_2\beta_2 \mid \mathcal{M}_{12})\}$$

dir [48, 58-60].

Teorem 4.1.2. $\mathcal{M}$ tam modelinde, X tam sütun ranklı olduğunda

$$\hat{\beta}_2(\mathcal{M}) = \hat{\beta}_2(\mathcal{M}_{12}) \text{ ve } \tilde{\beta}_2(\mathcal{M}) = \tilde{\beta}_2(\mathcal{M}_{12})$$

dir [48].

Çalışmada ele alınan $\mathcal{M}_r$ modeli ayrıca [59] ve [34] tarafından da ele alınmıştır. X tam sütun ranklı olduğunda Teorem 4.1.2'de verilen $\mathcal{M}$ ve $\mathcal{M}_{12}$ modelleri altındaki $OLSE$'lerin eşitliğinin yanı sıra, $\mathcal{M}_r$ altında β_2'nin $OLSE$'si de bunlara eşittir, yani

$$\hat{\beta}_2(\mathcal{M}_{12}) = \hat{\beta}_2(\mathcal{M}_1) = \hat{\beta}_2(\mathcal{M}_r) = (X_2'MX)^{-1}X_2'M_1y \tag{4.1}$$

dir [34]. Ancak X matrisinin tam sütun ranklı olduğu durumda $\mathcal{M}$ ve $\mathcal{M}_{12}$ modelleri altında β_2'nin $BLUE$'ları aynı iken $\mathcal{M}_r$ altında β_2'nin $BLUE$'su bunlardan farklıdır. [59]'da $\mathcal{M}_r$ altında $M_1X_2\beta_2$'nin $BLUE$'sunun $\mathcal{M}$ altında $BLUE$ olması ile ilgili koşullar verilmiştir.

Şimdi $\tilde{\beta}_2$'nin genel ifadesi ele alınsın. Öncelikle

$$\mathcal{C}(X_1) \cap \mathcal{C}(X_2) = \{0\} \tag{4.2}$$

olduğu kabul edilsin. Bu durumda (3.9c)'ye göre $X_2\beta_2$, $\mathcal{M}$ tam modeli altında tahmin edilebilirdir.

$$W = V + XX' \text{ ve } W_i = V + X_iX_i',\ i = 1,2, \tag{4.3}$$

olmak üzere, (3.23) ve (3.28)'e göre $\mathcal{M}$ tam modeli altında,

$$BLUE(X_2\beta_2 \mid \mathcal{M}) = X_2(X_2'\dot{M}_{1w}X_2)^- X_2'\dot{M}_{1w}y \tag{4.4}$$

$$= X_2(X_2'\ddot{M}_{1w}X_2)^- X_2'\ddot{M}_{1w}y \tag{4.5}$$

dır. Burada,

$$\dot{M}_{1w} = M_1(M_1WM_1)^- M_1 = M_1(M_1W_2M_1)^- M_1, \tag{4.6}$$

$$\ddot{M}_{1w} = P_w\dot{M}_{1w}P_w = W^+ - W^+X_1(X_1'W^+X_1)^- X_1'W^+ \tag{4.7}$$

dir. Ayrıca, eğer $r(M_1X_2) = p_2$ ise, bu durumda $\tilde{\beta}_2(\mathcal{M}_{12}) = X_2(X_2'\dot{M}_{1w}X_2)^- X_2'\dot{M}_{1w}y$ dir. Eğer (4.2)'deki koşul ve

$$\mathcal{C}(X_2) \subseteq \mathcal{C}(X_1 : V)$$

sağlanırsa ya da denk olarak

$$\mathcal{C}(X_1 : X_2 : V) = \mathcal{C}(X_1 : V) \quad \textbf{(4.8)}$$

ise, bu durumda

$$BLUE(X_2\beta_2) = X_2(X_2'\dot{M}_1X_2)^- X_2'\dot{M}_1y \quad \textbf{(4.9)}$$

şeklinde yazılır. Burada,

$$\dot{M}_1 = M_1(M_1VM_1)^- M_1 \quad \textbf{(4.10)}$$

dir. (4.8) koşulu, $\mathcal{M}$ tam modeli ve $\mathcal{M}_1$ küçük modeli arasında herhangi bir çelişki olmadığını gösterir. Aynı problemle $\mathcal{M}_r$ modeli ile $\mathcal{M}$ modeli birlikte ele alındığında da karşılaşılır. Eğer $\mathcal{M}$ modeli zayıf singülerse, bu durumda $\mathcal{M}_r$ modeli ve $\mathcal{M}$ modeli arasında bir çelişki olmaz. Modellerin çelişmeme koşulu ile ilgili daha detaylı bilgi için [59, 61] kaynaklarına bakılabilir. Zayıf singüler modelde $\mathcal{C}(X) \subseteq \mathcal{C}(V)$ olduğundan V ile W yer değiştirebilir. X_2 tam sütun ranklı olduğunda ve (4.2) koşulu sağlandığında,

$$\tilde{\beta}_2(\mathcal{M}) = X_2(X_2'\dot{M}_1X_2)^{-1} X_2'\dot{M}_1y = X_2(X_2'\ddot{M}_1X_2)^{-1} X_2'\ddot{M}_1y \quad \textbf{(4.11)}$$

yazılabilir. Burada,

$$\ddot{M}_1 = P_v\dot{M}_1P_v = P_vM_1(M_1VM_1)^- M_1P_v \quad \textbf{(4.12)}$$

dir. $\mathcal{C}(X_2) \subseteq \mathcal{C}(V)$ olduğu kabul edilirse $\mathcal{M}_{12}$ indirgenmiş modelinde

$$\mathcal{C}(M_1X_2) \subseteq \mathcal{C}(M_1V) = \mathcal{C}(M_1VM_1) \tag{4.13}$$

olur ve bu durumda $\mathcal{M}_{12}$ de zayıf singüler bir modeldir. Böylece

$$\begin{aligned}\tilde{\beta}_2(\mathcal{M}_{12}) &= [X_2{}'M_1(M_1VM_1)^- M_1X_2]^{-1} X_2{}'M_1(M_1VM_1)^- M_1y \\ &= (X_2{}'\dot{M}_1X_2)^{-1} X_2{}'\dot{M}_1y \end{aligned} \tag{4.14}$$

dir. Buradan, $\mathcal{M}$ tam modeli altında β_2'nin $BLUE$'sunun $\mathcal{M}_{12}$ altında β_2'nin $BLUE$'suna eşit yani,

$$\tilde{\beta}_2(\mathcal{M}_{12}) = \tilde{\beta}_2(\mathcal{M}) \tag{4.15}$$

olduğu görülür. Diğer taraftan, $\mathcal{M}_r$ modeli altında β_2'nin $BLUE$'su $\mathcal{M}$ ve $\mathcal{M}_{12}$ modelleri altında β_2'nin $BLUE$'sundan farklıdır. $\mathcal{M}_r$ modeli altında β_2'nin $BLUE$'su:

$$\tilde{\beta}_2(\mathcal{M}_r) = (X_2{}'M_1V^- M_1X_2)^{-1} X_2{}'M_1V^- y$$

dir.

Watson etkinliği ayrışımı ile ilgili temel sonuçları ifade etmeden önce, aşağıda ana sonuçlarda kullanılacak olan iki Lemma verilecektir.

Lemma 4.1.3. $\mathcal{M}$ tam modeli ele alınsın. $X \in \mathbb{R}^{n\times p}$ matrisi $1 \le r \le n$ olmak üzere r ranklı ve V matrisi $1 \le v \le n$ olmak üzere v ranklı olsun. $\dot{M}_1$ ve $\ddot{M}_1$ matrisleri,

$$\dot{M}_1 = M_1(M_1VM_1)^- M_1 \text{ ve } \ddot{M}_1 = P_v\dot{M}_1P_v$$

olarak tanımlansın. $P_1 P_v M_1 = \mathbf{0}$ olduğunda aşağıdakiler sağlanır:

(a) $\ddot{M}_1 = P_v M_1 (M_1 V M_1)^- M_1 P_v = V^+ - V^+ X_1 (X_1' V^+ X_1)^- X_1' V^+$,

(b) $\ddot{M}_1 = M_1 \ddot{M}_1 = \ddot{M}_1 M_1 = M_1 \ddot{M}_1 M_1 = P_v (M_1 V M_1)^+ P_v$.

İspat: (a)'yı ispat etmek için

$$P_A + P_B = P_{(A:B)} \Leftrightarrow A'B = \mathbf{0} \qquad \textbf{(4.16)}$$

ifadesi kullanılacaktır [62]. $A = (V^+)^{\frac{1}{2}} X_1$ ve $B = V^{\frac{1}{2}} M_2$ alınsın. Bu eşitlikler (4.16) da yerine yazıldığında, $P_v = (V^+)^{\frac{1}{2}} V^{\frac{1}{2}}$ ve

$$A'B = X_1'(V^+)^{\frac{1}{2}} V^{\frac{1}{2}} M_2 = X_1' P_v M_1 = X_1' P_1 P_v M_1 = \mathbf{0}$$

olduğundan,

$$P_{(A:B)} = V^{\frac{1}{2}} M_1 (M_1 V M_1)^- M_1 V^{\frac{1}{2}} + (V^+)^{\frac{1}{2}} X_1 (X_1' V^+ X_1)^{-1} X_1' (V^+)^{\frac{1}{2}} = P_v$$

elde edilir. Eşitliğin her iki tarafı sağdan ve soldan $(V^+)^{\frac{1}{2}}$ ile çarpılırsa,

$$V^+ = P_v M_1 (M_1 V M_1)^- M_1 P_v + V^+ X_1 (X_1' V^+ X_1)^{-1} X_1' V^+$$

olur. Buradan,

$$P_v M_1 (M_1 V M_1)^- M_1 P_v = V^+ - V^+ X_1 (X_1' V^+ X_1)^{-1} X_1' V^+$$

bulunur.

(b) $\ddot{M}_1 = P_v \dot{M}_1 P_v \Rightarrow M_1 \ddot{M}_1 = M_1 P_v \dot{M}_1 P_v$

$$= (I - P_1) P_v \dot{M}_1 P_v$$

$$= P_v \dot{M}_1 P_v - P_1 P_v \dot{M}_1 P_v$$

$$= P_v \dot{M}_1 P_v - P_1 P_v M_1 (M_1 V M_1)^{-} M_1 P_v$$

elde edilir. Burada $P_1 P_v M_1 = \mathbf{0}$ ve $P_v \dot{M}_1 P_v = \ddot{M}_1$ olduğundan $M_1 \ddot{M}_1 = \ddot{M}_1$ olduğu ispatlanmış olur. Benzer şekilde

$$\ddot{M}_1 M_1 = P_v \dot{M}_1 P_v M_1$$

$$= P_v \dot{M}_1 P_v (I - P_1)$$

$$= P_v \dot{M}_1 P_1 - P_v \dot{M}_1 P_v P_1$$

$$= P_v \dot{M}_1 P_1 - P_v M_1 (M_1 V M_1)^{-} M_1 P_v P_1$$

dir. Burada $P_1 P_v M_1 = \mathbf{0}$ ve $P_v \dot{M}_1 P_v = \ddot{M}_1$ olduğundan, $\ddot{M}_1 M_1 = \ddot{M}_1$ olduğu ispatlanmış olur.

$$M_1 \ddot{M}_1 M_1 = M_1 P_v \dot{M}_1 P_v M_1$$

$$= (I - P_1) P_v \dot{M}_1 P_v (I - P_1)$$

$$= P_v \dot{M}_1 P_v - P_v \dot{M}_1 P_v P_1 - P_1 P_v \dot{M}_1 P_v + P_v \dot{M}_1 P_v P_1^2$$

$$= P_v \dot{M}_1 P_1 - P_1 P_v M_1 (M_1 V M_1)^{-} M_1 P_v$$

dir. Burada $P_1 P_v M_1 = \mathbf{0}$ ve $P_v \dot{M}_1 P_v = \ddot{M}_1$ olduğundan, $M_1 \ddot{M}_1 M_1 = \ddot{M}_1$ olduğu ispatlanmış olur.

$$M(MVM)^{+} M = (MVM)^{+} M = M(MVM)^{+} = (MVM)^{+} \quad \textbf{(4.17)}$$

olduğundan [48], (4.17) eşitliğindeki ilk ve son ifadeler ele alındığında,

$$\ddot{M} = P_v M (MVM)^{+} M P_v = P_v (MVM)^{+} P_v$$

elde edilir. İspat biter. ■

$\hat{\beta}_2(\mathcal{M}) = \hat{\beta}_2(\mathcal{M}_{12})$ ve $\tilde{\beta}_2(\mathcal{M}) = \tilde{\beta}_2(\mathcal{M}_{12})$ eşitliklerini göz önünde bulundurarak aşağıdaki Lemma verilebilir.

Lemma 4.1.4. X_2 tam sütun ranklı olmak üzere, $\mathcal{M}$ tam modeli ele alınsın ve $\mathcal{C}(X_1) \cap \mathcal{C}(X_2) = \{0\}$ olduğu kabul edilsin. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir:

(a) $\hat{\beta}_2(\mathcal{M}) = \tilde{\beta}_2(\mathcal{M})$,

(b) $\hat{\beta}_2(\mathcal{M}_{12}) = \tilde{\beta}_2(\mathcal{M}_{12})$,

(c) $\mathcal{C}(M_1VM_1X_2) \subseteq \mathcal{C}(M_1X_2)$,

(d) $\mathcal{C}(M_1VM_1(M_1X_2)^{\perp}) \subseteq \mathcal{C}(M_1X_2)^{\perp}$,

(e) $P_{M_1X_2}M_1VM_1 = M_1VM_1P_{M_1X_2}$,

(f) $P_{M_1X_2}M_1VM_1Q_{M_1X_2} = \mathbf{0}$,

(g) $P_{M_1X_2}VM_1 = M_1VP_{M_1X_2}$,

(h) $P_{M_1X_2}VM = \mathbf{0}$.

Burada, $Q_{M_1X_2} = I - P_{M_1X_2}$ dir.

İspat. Öncelikle $\mathcal{M}$ modeli altında β_2'nin $BLUE$'sunun ve $OLSE$'sinin eşit olduğu kabul edilsin. Yani $\hat{\beta}_2(\mathcal{M}) = \tilde{\beta}_2(\mathcal{M}) = (X_2'M_1X_2)^{-1}X_2'M_1y$ olsun. Bu durumda tutarlık koşuluna göre $y \in \mathcal{C}(X : V)$ ve sütun uzayı özelliklerine göre $\mathcal{C}(X : V) = \mathcal{C}(X : VM)$ olduğundan

$$\hat{\beta}_2(\mathcal{M}) = \tilde{\beta}_2(\mathcal{M}) \Leftrightarrow (X_2'M_1X_2)^{-1}X_2'M_1(X_1 : X_2 : VM) = (\mathbf{0} : I_{p_2} : \mathbf{0})$$

dır. $(X_2'M_1X_2)^{-1}X_2'M_1X_1 = \mathbf{0}$ ve $(X_2'M_1X_2)^{-1}X_2'M_1X_2 = I_{p_2}$ olduğundan

$$\hat{\beta}_2(\mathcal{M}) = \tilde{\beta}_2(\mathcal{M}) \Leftrightarrow (X_2'M_1X_2)^{-1}X_2'M_1VM = \mathbf{0} \Leftrightarrow X_2'M_1VM = \mathbf{0}$$

dir. Teorem 4.1.2'ye göre X tam sütun ranklı olduğunda, $\hat{\beta}_2(\mathcal{M}) = \hat{\beta}_2(\mathcal{M}_{12})$ ve $\tilde{\beta}_2(\mathcal{M}) = \tilde{\beta}_2(\mathcal{M}_{12})$ olduğundan

$$\hat{\beta}_2(\mathcal{M}) = \tilde{\beta}_2(\mathcal{M}) \Leftrightarrow \hat{\beta}_2(\mathcal{M}_{12}) = \tilde{\beta}_2(\mathcal{M}_{12})$$

olduğu yani (a) ve (b) arasındaki denklik açıkça görülür.

$$M = I - P_{(X_1:X_2)} = I - P_{X_1} - P_{M_1X_2} = (I - P_{X_1})(I - P_{M_1X_2}) = M_1Q_{M_1X_2}$$

olduğundan

$$X_2'M_1VM = \mathbf{0} \Leftrightarrow X_2'M_1VM_1Q_{M_1X_2} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathcal{C}(M_1VM_1X_2) \subseteq \mathcal{C}(Q_{M_1X_2})^{\perp} = \mathcal{C}(M_1X_2)$$

dır. Böylece (a) ve (c) arasındaki denklik görülür.

$$\begin{aligned} X_2'M_1VM = \mathbf{0} &\Leftrightarrow X_2'M_1M_1VM_1Q_{M_1X_2} = \mathbf{0} \\ &\Leftrightarrow \mathcal{C}(M_1X_2) \subseteq \mathcal{C}(M_1VM_1Q_{M_1X_2})^{\perp} \\ &\Leftrightarrow \mathcal{C}(M_1VM_1Q_{M_1X_2}) \subseteq \mathcal{C}(M_1X_2)^{\perp}, \end{aligned}$$

yani (a) ve (d) arasındaki denklik görülür.

$X_2'M_1VM = \mathbf{0} \Leftrightarrow MVM_1X_2 = \mathbf{0}$ dır. Buradan

$$\begin{aligned} MVM_1X_2 = \mathbf{0} &\Leftrightarrow Q_{M_1X_2}M_1VM_1M_1X_2 = \mathbf{0} \\ &\Leftrightarrow Q_{M_1X_2}M_1VM_1P_{M_1X_2} = \mathbf{0} && \textbf{(4.18)} \\ &\Leftrightarrow M_1VM_1P_{M_1X_2} = P_{M_1X_2}M_1VM_1P_{M_1X_2}\,. && \textbf{(4.19)} \end{aligned}$$

(4.18) aynı zamanda $P_{M_1X_2}M_1VM_1Q_{M_1X_2} = \mathbf{0}$ eşitliğine denktir. Böylece (a) ve (f) arasındaki denklik görülür. $P_{M_1X_2}M_1VM_1Q_{M_1X_2} = \mathbf{0}$ eşitliğinden (a) ve (e) arasındaki denklik de görülür.

$$\begin{aligned} X_2'M_1VM_1 = \mathbf{0} &\Leftrightarrow P_{M_1X_2}VM_1Q_{M_1X_2} = \mathbf{0} \\ &\Leftrightarrow P_{M_1X_2}VM_1P_{M_1X_2} = P_{M_1X_2}VP_{M_1X_2} \\ &\Leftrightarrow P_{M_1X_2}VM_1 = M_1VP_{M_1X_2} \end{aligned}$$

elde edilir. Yani (a) ve (g) arasındaki denklik görülür. Burada $\mathcal{C}(M_1X_2) \subseteq \mathcal{C}(M_1)$ olduğundan $P_{M_1X_2}M_1 = M_1P_{M_1X_2} = P_{M_1X_2}$ eşitliği kullanılmıştır [53].

$$X_2'M_1VM = \mathbf{0} \Leftrightarrow P_{M_1X_2}VM = \mathbf{0}$$

dır. Böylece (a) ve (h) arasındaki denklik görülür. Böylece ispat tamamlanmış olur. ■

4.2. Watson Etkinlik Ayrışımı

Aşağıdaki teoremlerde Watson etkinliği ile ilgili verilecek olan ayrışımlar için model zayıf singüler ve X tam sütun ranklı kabul edilecektir. (4.1)'e göre $\mathcal{M}$, $\mathcal{M}_{12}$ ve $\mathcal{M}_r$ altında β_2'nin $OLSE$'leri çakıştığından

$$\begin{aligned} \operatorname{cov}(\hat{\beta}_2 \mid \mathcal{M}) = \operatorname{cov}(\hat{\beta}_2 \mid \mathcal{M}_{12}) = \operatorname{cov}(\hat{\beta}_2 \mid \mathcal{M}_r) \\ = (X_2'M_1X_2)^{-1}X_2'M_1VM_1X_2(X_2'M_1X_2)^{-1} \end{aligned} \qquad \textbf{(4.20)}$$

dır. $BLUE$'lara karşılık gelen kovaryans matrisleri ise,

$$\operatorname{cov}(\tilde{\beta}_2 \mid \mathcal{M}) = \operatorname{cov}(\tilde{\beta}_2 \mid \mathcal{M}_{12}) = (X_2'\dot{M}_1X_2)^{-1}, \qquad \textbf{(4.21)}$$

$$\operatorname{cov}(\tilde{\beta}_2 \mid \mathcal{M}_r) = (X_2'M_1V^+M_1X_2)^{-1} \qquad \textbf{(4.22}$$

dir. Lemma 4.1.4'ü kullanarak

$$
\begin{aligned}
\operatorname{cov}(\tilde{\beta}_2 \mid \mathcal{M}_{12}) &= (X_2'\dot{M}_1X_2)^{-1} \\
&= [X_2'M_1(M_1VM_1)^{-}M_1X_2]^{-1} \\
&= \{X_2'[V^{+} - V^{+}X_1(X_1'V^{+}X_1)^{-1}X_1'V^{+}]X_2\}^{-1} \\
&= \{X_2'M_1V^{+}[V - X_1(X_1'V^{+}X_1)^{-1}X_1']V^{+}M_1X_2\}^{-1} \qquad \textbf{(4.23)}
\end{aligned}
$$

yazılabilir.

$\mathcal{M}$ zayıf singüler modeli altında β 'nın $OLSE$ 'sinin Watson etkinliği, kovaryans matrislerinin determinantlarının oranı yani

$$
\begin{aligned}
eff(\hat{\beta} \mid \mathcal{M}) &= \frac{|cov(\tilde{\beta} \mid \mathcal{M})|}{|cov(\hat{\beta} \mid \mathcal{M})|} \\
&= \frac{|X'V^{+}X|^{-1}}{|X'X|^{-1}|X'VX||X'X|^{-1}} \\
&= \frac{|X'X|^{2}}{|X'VX||X'V^{+}X|} := \phi \qquad \textbf{(4.24)}
\end{aligned}
$$

olarak tanımlanır. $\mathcal{M}$ altında β_1 ve β_2 'nin $OLSE$ 'lerinin etkinlikleri ise,

$$
\begin{aligned}
eff(\hat{\beta}_1 \mid \mathcal{M}) &= \frac{|cov(\tilde{\beta}_1 \mid \mathcal{M})|}{|cov(\hat{\beta}_1 \mid \mathcal{M})|} \\
&= \frac{|X_1'\dot{M}_2X_1|^{-1}}{|X_1'M_2X_1|^{-1}|X_1'M_2VM_2X_1||X_1'M_2X_1|^{-1}} \\
&= \frac{|X_1'M_2X_1|^{2}}{|X_1'M_2VM_2X_1||X_1'\dot{M}_2X_1|} := \phi_1 \qquad \textbf{(4.25)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
eff(\hat{\beta}_2 \mid \mathcal{M}) &= \frac{|cov(\tilde{\beta}_2 \mid \mathcal{M})|}{|cov(\hat{\beta}_2 \mid \mathcal{M})|} \\
&= \frac{|X_2'\dot{M}_1X_2|^{-1}}{|X_2'M_1X_2|^{-1}|X_2'M_1VM_1X_2||X_2'M_1X_2|^{-1}}
\end{aligned}
$$

$$= \frac{| X_2' M_1 X_2 |^2}{| X_2' M_1 V M_1 X_2 \| X_2' \dot{M}_1 X_2 |} := \phi_2 \qquad \textbf{(4.26)}$$

olarak ifade edilir. (4.26)’daki eşitlik $\mathcal{M}$ ve $\mathcal{M}_{12}$ modelleri altında β_2’nin $OLSE$’leri çakıştığından dolayı $\mathcal{M}_{12}$ indirgenmiş modeli altında β_2’nin $OLSE$’sinin etkinliği ile aynıdır. O halde,

$$eff(\hat{\beta}_2 \mid \mathcal{M}_{12}) = eff(\hat{\beta}_2 \mid \mathcal{M}) := \phi_2 \qquad \textbf{(4.27)}$$

dir. $\mathcal{M}_1$ altında β_1’in $OLSE$’sinin etkinliği,

$$eff(\hat{\beta}_1 \mid \mathcal{M}_1) = \frac{| X_1' V^+ X_1 |^{-1}}{| X_1' X_1 |^{-1} | X_1' V X_1 \| X_1' X_1 |^{-1}}$$

$$= \frac{| X_1' X_1 |^2}{| X_1' V X_1 \| X_1' V^+ X_1 |} := \phi_{1/1} \qquad \textbf{(4.28)}$$

dir ve benzer şekilde $\mathcal{M}_2$ altında β_2’nin $OLSE$’sinin etkinliği,

$$eff(\hat{\beta}_2 \mid \mathcal{M}_2) = \frac{| X_2' V^+ X_2 |^{-1}}{| X_2' X_2 |^{-1} | X_2' V X_2 \| X_2' X_2 |^{-1}}$$

$$= \frac{| X_2' X_2 |^2}{| X_2' V X_2 \| X_2' V^+ X_2 |} := \phi_{2/2} \qquad \textbf{(4.29)}$$

dir. $\mathcal{M}_r$ modeli altında β_2’nin $OLSE$’sinin etkinliği,

$$eff(\hat{\beta}_2 \mid \mathcal{M}_r) = \frac{| X_2' M_1 V^+ M_1 X_2 |^{-1}}{| X_2' M_1 X_2 |^{-1} | X_2' M_1 V M_1 X_2 \| X_2' M_1 X_2 |^{-1}}$$

$$= \frac{| X_2' M_1 X_2 |^2}{| X_2' M_1 V M_1 X_2 \| X_2' M_1 V^+ M_1 X_2 |} := \phi_r \qquad \textbf{(4.30)}$$

olarak ifade edilir. Şimdi Watson etkinliğinin ayrışımı ile ilgili ana sonuçlar verilecektir.

Teorem 4.2.1 $\mathcal{M}$ zayıf singüler modeli altında X tam sütun ranklı olmak üzere $\hat{\beta}(\mathcal{M})$'nın ϕ Watson etkinliği,

$$\phi = \phi_{1/1} \cdot \phi_2 \cdot \alpha_1 \tag{4.31}$$

olarak ifade edilir. Burada

$$\alpha_1 = \frac{|X_2' M_1 V M_1 X_2|}{|X_2' M_1 (M_1 V^+ M_1)^- M_1 X_2|} \geq 1 \tag{4.32}$$

etkinlik çarpanıdır. Ayrıca $\alpha_1 = 1$ dir ancak ve ancak $X_2' M_1 V X_2 = \mathbf{0}$ dır.

İspata başlamadan önce belirtilmelidir ki (4.31) ve (4.32)'deki α_1, $\mathcal{M}_1$ ve $\mathcal{M}_{12}$ modellerine göre $\mathcal{M}$ tam modeli ile ilişkili olan etkinlik çarpanıdır.

İspat: $X = (X_1 : X_2)$ parçalanmış matrisi için

$$X'X = \begin{pmatrix} X_1'X_1 & X_1'X_2 \\ X_2'X_1 & X_2'X_2 \end{pmatrix}$$

dir. Bir parçalanmış matrisin determinantı için, Tanım 2.7.3'de verilen Schur tamamlayıcısının determinant formülünü kullanarak,

$$\begin{aligned} |X'X| &= |X_1'X_1|\,|X_2'X_2 - X_2'X_1(X_1'X_1)^- X_1'X_2| \\ &= |X_1'X_1|\,|X_2'[I - X_1(X_1'X_1)^- X_1']X_2| \\ &= |X_1'X_1|\,|X_2'M_1X_2| \end{aligned} \tag{4.33}$$

elde edilir. Burada $M_1 = I - P_1 = I - X_1(X_1'X_1)^- X_1'$ dir. $X'VX$ matrisi

$$X'VX = \begin{pmatrix} X_1'VX_1 & X_1'VX_2 \\ X_2'VX_1 & X_2'VX_2 \end{pmatrix}$$

olarak yazılabileceğinden,

$$
\begin{aligned}
|X'VX| &= |X_1'VX_1||X_2'VX_2 - X_2'VX_1(X_1'VX_1)^- X_1'VX_2| \\
&= |X_1'VX_1||X_2'[V - VX_1(X_1'VX_1)^- X_1'V]X_2|
\end{aligned}
$$

dır. Lemma 4.1.3'e göre $V - VX_1(X_1'VX_1)^- X_1'V = M_1(M_1V^+M_1)^- M_1$ olduğundan

$$
|X'VX| = |X_1'VX_1||X_2'M_1(M_1V^+M_1)^- M_1X_2| \tag{4.34}
$$

olarak yazılabilir. Benzer şekilde $X'V^+X$ matrisi

$$
X'V^+X = \begin{pmatrix} X_1'V^+X_1 & X_1'V^+X_2 \\ X_2'VX_1 & X_2'VX_2 \end{pmatrix}
$$

olarak yazılabileceğinden

$$
\begin{aligned}
|X'V^+X| &= |X_1'V^+X_1||X_2'V^+X_2 - X_2'V^+X_1(X_1'V^+X_1)^- X_1'V^+X_2| \\
&= |X_1'V^+X_1||X_2'[V^+ - V^+X_1(X_1'V^+X_1)^- X_1'V^+]X_2|
\end{aligned}
$$

olur. Lemma 4.1.3'e göre $V - VX_1(X_1'VX_1)^- X_1'V = M_1(M_1V^+M_1)^- M_1$ olduğundan

$$
|X'V^+X| = |X_1'V^+X_1||X_2'M_1(M_1VM_1)^- M_1X_2| \tag{4.35}
$$

elde edilir. (4.33), (4.34) ve (4.35) formülleri (4.24)'de tanımlanan ϕ'de yerine yazılırsa,

$$
\begin{aligned}
\phi &= \frac{|X_1'X_1|^2}{|X_1'VX_1||X_2'M_1(M_1V^+M_1)^- M_1X_2|} \cdot \frac{|X_2'M_1X_2|^2}{|X_1'V^+X_1||X_2'M_1(M_1VM_1)^- M_1X_2|} \\
&= \frac{|X_1'X_1|^2}{|X_1'VX_1||X_1'V^+X_1|} \cdot \frac{|X_2'M_1X_2|^2}{|X_2'M_1VM_1X_2||X_2'M_1X_2|^2} \cdot \frac{|X_2'M_1VM_1X_2|}{|X_2'M_1(M_1V^+M_1)^- M_1X_2|}
\end{aligned} \tag{4.36}
$$

bulunur.

$$\phi_{1/1} = \frac{|X_1'X_1|^2}{|X_1'VX_1||X_1'V^+X_1|}$$

ve

$$\phi_2 = \frac{|X_2'M_1X_2|^2}{|X_2'M_1VM_1X_2||X_2'\dot{M}_1X_2|}$$

olduğundan (4.31) elde edilir. (4.36)'dan ve Lemma 4.1.3'den

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \frac{|X_2'M_1VM_1X_2|}{|X_2'M_1(M_1V^+M_1)^-M_1X_2|} \\ &= \frac{|X_2'M_1VM_1X_2|}{|X_2'M_1VM_1X_2 - X_2'M_1VX_1(X_1'VX_1)^{-1}X_1'VM_1X_2|} \geq 1 \qquad \textbf{(4.37)}\end{aligned}$$

elde edilir.

(4.37)'den $\alpha_1 = 1$ olmasının gerek ve yeter koşulunun $X_2'M_1VX_1 = \mathbf{0}$ olduğu açıkça görülmektedir. ■

Teorem 4.2.2. $\mathcal{M}$ zayıf singüler modelinde, X tam sütun ranklı ve V singüler olmak üzere, aşağıdaki durumlar sağlanır.

(a) $MV = VM \Leftrightarrow \phi = eff(\hat{\beta} \mid \mathcal{M}) = 1$

(b) $M_1V = VM_1 \Leftrightarrow \phi_{1/1} = eff(\hat{\beta}_1 \mid \mathcal{M}_1) = 1$

(c) $MVM_1 = M_1VM \Leftrightarrow \phi_2 = eff(\hat{\beta}_2 \mid \mathcal{M}) = 1$

(d) $P_{M_1X_2}V = VP_{M_1X_2} \Leftrightarrow \phi_r = eff(\hat{\beta}_2 \mid \mathcal{M}_r) = 1$

İspat: (a) Bölüm 1'de belirtildiği gibi $\phi = 1 \Leftrightarrow \hat{\beta}(\mathcal{M}) = \tilde{\beta}(\mathcal{M})$ [62] dir. X tam sütun ranklı olduğunda $\hat{\beta}(\mathcal{M}) = (X'X)^{-1}X'y$ dir. Tutarlılık koşuluna göre $y \in \mathcal{C}(X:V) = \mathcal{C}(X:VM)$ olduğundan

$$\begin{aligned}
\hat{\beta}(\mathcal{M}) = \tilde{\beta}(\mathcal{M}) &\Leftrightarrow (X'X)^{-1}X'(X:VM) = (I_p:\mathbf{0}) \\
&\Leftrightarrow (X'X)^{-1}X'VM = \mathbf{0} \\
&\Leftrightarrow X'VM = \mathbf{0} \\
&\Leftrightarrow P_X VM = \mathbf{0} \qquad \textbf{(4.38)} \\
&\Leftrightarrow VM = MVM \\
&\Leftrightarrow MV = VM\,. \qquad \textbf{(4.39)}
\end{aligned}$$

(4.38) ve (4.39)'dan

$$\phi = 1 \Leftrightarrow \hat{\beta}(\mathcal{M}) = \tilde{\beta}(\mathcal{M}) \Leftrightarrow MV = VM \qquad \textbf{(4.40)}$$

olduğu görülür.

(b) (4.40)'a göre $\phi_{1/1} = 1 \Leftrightarrow \hat{\beta}_1(\mathcal{M}_1) = \tilde{\beta}_1(\mathcal{M}_1) \Leftrightarrow M_1V = VM_1$ dir.

(c) Tutarlılık koşuluna göre $y \in \mathcal{C}(X:V) = \mathcal{C}(X:VM)$ olduğundan

$$\begin{aligned}
\hat{\beta}_2(\mathcal{M}) = \tilde{\beta}_2(\mathcal{M}) &\Leftrightarrow (X_2'M_1X_2)^{-1}X_2'M_1(X_1:X_2:VM) = (\mathbf{0}:I_{P_2}:\mathbf{0}) \\
&\Leftrightarrow X_2'M_1VM = \mathbf{0} \\
&\Leftrightarrow P_{M_1X_2}VM = \mathbf{0}
\end{aligned}$$

dır. Ayrıca

$$\begin{aligned}
P_{M_1X_2}M_1VM = \mathbf{0} &\Leftrightarrow M_1VM = Q_{M_1X_2}M_1VM \\
&\Leftrightarrow M_1VM = MVM \qquad \textbf{(4.41)} \\
&\Leftrightarrow M_1VM = MVM_1
\end{aligned}$$

dir.

(d) $\tilde{\beta}_2(\mathcal{M}_r) = \hat{\beta}_2(\mathcal{M}_r) \Leftrightarrow (X_2' M_1 X_2)^{-1} X_2' M_1 (M_1 X_2 : V Q_{M_1 X_2}) = (I_{P_2} : \mathbf{0})$

$$\Leftrightarrow X_2' M_1 V Q_{M_1 X_2} = \mathbf{0}$$

$$\Leftrightarrow P_{M_1 X_2} V Q_{M_1 X_2} = \mathbf{0}$$

$$\Leftrightarrow P_{M_1 X_2} V = P_{M_1 X_2} V P_{M_1 X_2}$$

$$\Leftrightarrow P_{M_1 X_2} V = V P_{M_1 X_2}$$

dir. Böylece ispat tamamlanır. ■

Sonuç 4.2.3. $\mathcal{M}$ zayıf singüler modelinde X tam sütun ranklı olmak üzere, $\hat{\beta}(\mathcal{M})$ nin Watson etkinliği olan ϕ için

$$\phi \geq \max\{\phi_{1/1} \cdot \phi_2, \phi_1 \cdot \phi_{2/2}\} \qquad \textbf{(4.42)}$$

dir. Ayrıca,

$$\phi = \phi_{1/1} \cdot \phi_2 \geq \phi_1 \cdot \phi_{2/2} \Leftrightarrow \mathrm{cov}(X_1' M_2 y, X_2' y) = \mathbf{0}\,, \qquad \textbf{(4.43)}$$

ve

$$\phi = \phi_1 \cdot \phi_{2/2} \geq \phi_{1/1} \cdot \phi_2 \Leftrightarrow \mathrm{cov}(X_2' M_1 y, X_1' y) = \mathbf{0}\,. \qquad \textbf{(4.44)}$$

İspat: Teorem 4.2.1'e göre $\phi = \phi_{1/1} \cdot \phi_2 \cdot \alpha_1$ ve $\alpha_1 \geq 1$ dir. Buradan $\phi = \phi_{2/2} \cdot \phi_1 \cdot \alpha_2$ ve $\alpha_2 \geq 1$ olduğu da yazılabilir. $0 \leq \phi \leq 1$ olduğundan,

$0 < \dfrac{\phi}{\alpha_1} \cdot \alpha_1 \leq 1$ ve $0 < \dfrac{\phi}{\alpha_2} \cdot \alpha_2 \leq 1$, yani $0<\frac{\phi}{\alpha_1}\leq\frac{1}{\alpha_1}\leq 1$ ve $0<\frac{\phi}{\alpha_2}\leq\frac{1}{\alpha_2}\leq 1$ dir. Böylece $\phi\geq\frac{\phi}{\alpha_1}$ ve $\phi\geq\frac{\phi}{\alpha_2}$ olduğundan $\phi\geq\max\left\{\frac{\phi}{\alpha_1},\frac{\phi}{\alpha_2}\right\}=\max\{\phi_{1/1}\cdot\phi_2,\phi_1\cdot\phi_{2/2}\}$ elde edilir. (4.42) ispatlanmış olur.

Teorem 4.2.1'e göre, $\alpha_1=1\Leftrightarrow X_2'M_1VX_1=\mathbf{0}\Leftrightarrow \operatorname{cov}(X_1'M_2y,X_2'y)=\mathbf{0}$ dır. Böylece (4.43) görülür. (4.44)'de benzer şekilde elde edilir. ■

Teorem 4.2.4. $\mathcal{M}$ zayıf singüler modeli ele alınsın. X tam sütun ranklı ve V singüler olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir.

(a) $X_2'M_1V^+X_1=\mathbf{0}$,

(b) $\tilde{\beta}_2(\mathcal{M})=\tilde{\beta}_2(\mathcal{M}_r)$,

(c) $\phi_2=\phi_r$.

İspat: Öncelikle (b) ve (c) arasındaki denklik gösterilecektir. $\hat{\beta}_2(\mathcal{M})=\hat{\beta}_2(\mathcal{M}_r)$ olduğundan, $\tilde{\beta}_2(\mathcal{M})=\tilde{\beta}_2(\mathcal{M}_r)\Leftrightarrow\phi_2=\phi_r$ dir. O halde (b) ve (c) arasındaki denklik sağlanır.

Şimdi (a)'nın sağlandığı kabul edilsin. Bu durumda $V^+X_1\in\mathcal{C}(M_1X_2)^{\perp}$ dir O halde $V^+X_1=Q_{M_1X_2}A$ olacak şekilde bir A matrisi vardır. Model zayıf singüler kabul edildiğinden

$$\mathcal{C}(X_1)\subseteq\mathcal{C}(V) \text{ ve } \mathcal{C}(M_1X_2)\subseteq\mathcal{C}(V) \qquad \textbf{(4.45)}$$

dir. (4.45)'deki birinci ifadeye göre $X_1=VV^+X_1$ yazılabilir. Böylece

$$X_1=VV^+X_1=VQ_{M_1X_2}A\Leftrightarrow\mathcal{C}(X_1)\subseteq\mathcal{C}(VQ_{M_1X_2}) \qquad \textbf{(4.46)}$$

elde edilir. [59]'da verilmiş olan Sonuç 1'e göre (4.46) sağlanır $\Leftrightarrow \tilde{\beta}_2(\mathcal{M}) = \tilde{\beta}_2(\mathcal{M}_r)$ dir. O halde (b) elde edilir.

(b)'nin sağlandığı kabul edilsin. Bu durumda (4.46)'ya göre

$$\begin{aligned} X_2'M_1V^+X_1 &= X_2'M_1V^+VQ_{M_1X_2}A \\ &= X_2'M_1VV^+AX_2'M_1VV^+P_{M_1X_2}A \end{aligned}$$

dir. Model zayıf singüler olduğundan (4.45)'teki ikinci ifadeye göre

$$M_1X_2 = VV^+M_1X_2 \Leftrightarrow P_{M_1X_2} = VV^+P_{M_1X_2} \tag{4.47}$$

yazılabileceğinden $X_2'M_1V^+X_1 = \mathbf{0}$ olduğu görülür. O halde (a) elde edilir. ■

Teorem 4.2.5. X tam sütun ranklı ve V singüler olmak üzere, $\mathcal{M}$ zayıf singüler modeli ele alınsın. $\hat{\beta}_1(\mathcal{M}_1)$ tam etkinliğe sahip, yani $M_1V = VM_1$ ise, aşağıdaki ifadeler sağlanır:

(a) $X_2'M_1VX_1 = \mathbf{0}$ ve bundan dolayı $\alpha_1 = 1$,

(b) $X_2'M_1V^+X_1 = \mathbf{0}$ ve bundan dolayı $\phi_2 = \phi_r$,

(c) $\phi = \phi_2 = \phi_r$.

İspat: (a) $M_1V = VM_1$ kabul edildiğinden, $X_2'M_1VX_1 = X_2'VM_1X_1 = \mathbf{0}$ olur. Teorem 4.2.1'e göre, bu durumda $\alpha_1 = 1$ dir.

(b) $M_1V = VM_1 \Leftrightarrow M_1V^+ = V^+M_1$ olduğundan, $X_2'M_1V^+X_1 = X_2'V^+M_1X_1 = \mathbf{0}$ olur. Teorem 4.2.4'e göre, bu durumda $\phi_2 = \phi_r$ dir.

(c) $M_1V = VM_1$ olduğundan (b)'ye göre $\phi_2 = \phi_r$ ve (a)'ya göre $\alpha_1 = 1$ dir. Ayrıca Teorem 4.2.2'ye göre $M_1V = VM_1 \Leftrightarrow \phi_{1/1} = 1$ olduğundan Teorem 4.2.1'e göre $\phi = \phi_2$ elde edilir. Yani $\phi = \phi_2 = \phi_r$ olduğu görülür.

Teorem 4.2.6. X tam sütun ranklı ve V singüler olmak üzere, $\mathcal{M}$ zayıf singüler modeli ele alınsın. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir.

(a) $\phi = \phi_2$ veya $eff(\hat{\beta} \mid \mathcal{M}_{12}) = eff(\hat{\beta}_2 \mid \mathcal{M}_{12})$,

(b) $\phi_{1/1} = \dfrac{1}{\alpha_1}$,

(c) $X_1'VX_1 - X_1'VM_1X_2(X_2'M_1VM_1X_2)^{-1}X_2'M_1VX_1 = X_1'X_1(X_1'V^+X_1)^{-1}X_1'X_1$,

(d) $MV^+X_1 = \mathbf{0}$,

(e) $\mathcal{C}(V^+X_1) \subset \mathcal{C}(X)$,

(f) $\mathcal{C}(X_1) \subset \mathcal{C}(VX)$.

İspat: Teorem 4.2.1'e göre $\phi = \phi_{1/1} \cdot \phi_2 \cdot \alpha_1$ olduğundan $\phi = \phi_2 \Leftrightarrow \phi_{1/1} \dfrac{1}{\alpha_1}$ dir. Böylece (a) ve (b) arasındaki denklik görülür.

(b)'nin sağlandığı kabul edilsin. Bu durumda

$$\frac{|X_1'X_1|^2}{|X_1'V^+X_1|} = \frac{|X_1'VX_1|\,|X_2'M_1(M_1V^+M_1)^- M_1X_2|}{|X_2'M_1VM_1X_2|}$$

dir.

$$|X_2'M_1(M_1V^+M_1)^- M_1X_2| = |X_2'M_1VM_1X_2 - X_2'M_1VX_1(X_1'VX_1)^{-1}X_1'M_1VX_2|$$

olduğundan

$$|X_1'VX_1 - X_1'M_1VX_2(X_2'M_1VM_1X_2)^{-1}X_2'M_1VX_1| = |X_1'X_1(X_1'V^+X_1)^{-1}X_1'X_1| \qquad \textbf{(4.48)}$$

elde edilir. Ayrıca Löwner sıralamasına göre

$$X_1'VX_1 - X_1'M_1VX_2(X_2'M_1VM_1X_2)^{-1}X_2'M_1VX_1 \geq X_1'X_1(X_1'V^+X_1)^{-1}X_1'X_1 \tag{4.49}$$

sağlanır. Çünkü

$$X_1'V^{\frac{1}{2}}(I - P_{V^{\frac{1}{2}}M_1X_2} - P_{V^{+\frac{1}{2}}X_1})V^{\frac{1}{2}}X_1 \; X_1'V^{\frac{1}{2}}(I - P_{V^{\frac{1}{2}}M_1X_2} - P_{V^{+\frac{1}{2}}X_1})V^{\frac{1}{2}}X_1$$

$$= X_1'V^{\frac{1}{2}}[I - V^{\frac{1}{2}}M_1X_2(X_2'M_1VM_1X_2)^{-1}X_2'M_1V^{\frac{1}{2}} - V^{+\frac{1}{2}}X_1(X_1'V^+X_1)^{-1}X_1'V^{+\frac{1}{2}}]V^{\frac{1}{2}}X_1 \tag{4.50}$$

dır. (4.48)'deki determinantlar pozitif olduğundan (4.48) ve (4.49) birlikte (c)'yi gösterir. Diğer taraftan (c)'nin (b)'yi gösterdiği açıktır.

(c)'deki ifade gösterir ki

$$V^{\frac{1}{2}}X_1 = V^{\frac{1}{2}}M_1X_2(X_2'M_1VM_1X_2)^{-1}X_2'M_1VX_1 + V^{+\frac{1}{2}}X_1(X_1'V^+X_1)^{-1}X_1'X_1 \tag{4.51}$$

sağlanmak zorundadır. (4.51) $Q_{M_1X_2}V^{+\frac{1}{2}}$ ile soldan ve $X_1^+V^+X_1$ ile sağdan çarpılırsa

$$M_{M_1X_2}P_1V^+X_1 = M_{M_1X_2}V^+X_1 \tag{4.52}$$

$$P_1V^+X_1 = M_{M_1X_2}V^+X_1 \tag{4.53}$$

$$MV^+X_1 = \mathbf{0} \tag{4.54}$$

elde edilir. Böylece (c), (d)'yi gösterir. Eğer (4.54) soldan $X_1'VM_1X_2(X_2'M_1VM_1X_2)^{-1}X_2'M_1V$ ile çarpılırsa

$$V^{\frac{1}{2}}X_1'VM_1X_2(X_2'M_1VM_1X_2)^{-1}X_2'M_1VP_1V^+X_1 = -X_1'VP_{M_1X_2}V^+X_1$$

elde edilir. (4.54) soldan $X_1'V$ ile çarpılırsa

$$X_1'VP_{M_1X_2}V^+X_1 = X_1'X_1 - X_1'VP_1V^+X_1$$

bulunur. Bunların sonucu olarak

$$-X_1'VM_1X_2(X_2'M_1VM_1X_2)^{-1}X_2'M_1VP_1V^+X_1 = X_1'X_1 - X_1'VP_1V^+X_1 \qquad \textbf{(4.55)}$$

elde edilir. (4.55) sağdan $(X_1'V^+X_1)^{-1}X_1'X_1$ ile çarpıldığında

$$X_1'VX_1 - X_1'VM_1X_2(X_2'M_1VM_1X_2)^{-1}X_2'M_1VX_1 = X_1'X_1(X_1'V^+X_1)^{-1}X_1'X_1 \qquad \textbf{(4.56)}$$

olur ve (c) ile (d)'nin denkliği görülür.

$MV^+X_1 = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathcal{C}(V^+X_1) \subseteq \mathcal{C}(M)^\perp = \mathcal{C}(X)$ olduğundan (d) ve (e) denktir.

$\mathcal{C}(V^+X_1) \subseteq \mathcal{C}(X) \Leftrightarrow V^+X_1 = XA$ dır. Bu durumda $VV^+X_1 = VXA$ olur. Model zayıf singüler olduğundan dolayı $X_1 = VV^+X_1$ dir. Böylece

$$X_1 = VV^+X_1 = VXA \Leftrightarrow \mathcal{C}(X_1) \subseteq \mathcal{C}(VX)$$

elde edilir. Tersine $\mathcal{C}(X_1) \subseteq \mathcal{C}(VX)$ ise $X_1 = VXA$ olacak şekilde bir A matrisi vardır. Bu durumda $V^+VV^+X_1 = V^+VXA$ olur. $V^+VV^+ = V^+$ ve model zayıf singüler olduğundan $V^+X_1 = XA$ elde edilir. Yani $\mathcal{C}(V^+X_1) \subseteq \mathcal{C}(VX)$ olur. Böylece (e) ile (f) arasındaki denklik görülür. ■

BÖLÜM 5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada $\mathcal{M} = \{y, X\beta, V\} = \{y, X_1\beta_1 + X_2\beta_2, V\}$ parçalanmış lineer modeli ile birlikte bu modelin küçük modelleri $\mathcal{M}_1 = \{y, X_1\beta_1, V\}$ ve $\mathcal{M}_2 = \{y, X_2\beta_2, V\}$, indirgenmiş modeli $\mathcal{M}_{12} = \{M_1 y, M_1 X_2\beta_2, M_1 V M_1\}$ ve bir alternatif model olarak $\mathcal{M}_r = \{y, M_1 X_2\beta_2, V\}$ ele alındı. Bu modeller altında parametrelerin etkinlikleri ve etkinliklerin çarpımsal ayrışımları verilerek bazı karşılaştırmalar yapıldı.

Bölüm 3'te $\mathcal{M}$, $\mathcal{M}_1$, $\mathcal{M}_2$, $\mathcal{M}_{12}$ ve $\mathcal{M}_r$ modellerinde regresyon katsayılarının tahminleri ve bu tahminlerle ilgili bazı sonuçlar ele alındı. $X'X\beta = X'Y$ normal denkleminin β parametresine göre çözümünden elde edilen $\hat{\beta}$ tahmininin OLSE ve bu normal denklemlere karşılık gelen ve V matrisinin pozitif tanımlı olduğu durumda $X'V^{-1}X\beta = X'V^{-1}y$ tahmin denkleminin β parametresine göre çözümünden elde edilen $\tilde{\beta}$ tahmininin $BLUE$ olarak tanımlandığı ifade edilerek, X tam ranklı ve V pozitif tanımlı olduğunda $\mathcal{M}$ tam modeli altında $\hat{\beta}(\mathcal{M}) = (X'X)^{-1}X'y$ ve $\tilde{\beta}(\mathcal{M}) = (X'V^{-1}X)^{-1}X'V^{-1}y$ olduğu verildi. Daha genel olarak $\mathcal{M}$ tam modeli altında tahmin edilebilir olan bir $K\beta$ parametreler vektörünün $OLSE$ ve $BLUE$'ları verilerek alt modeller altındaki parametreler için de $OLSE$ ve $BLUE$'lar benzer şekilde elde edildi. Ayrıca, ele alınan modeller altında parametreler için elde edilen $BLUE$ ve $OLSE$'lerin kovaryans matrisleri verildi. $BLUE$ en iyi lineer yansız tahmin edici olduğundan Löwner sıralamasına göre, kovaryansının daha küçük olduğu, yani $\operatorname{cov}(\tilde{\beta}) \leq \operatorname{cov}(\hat{\beta})$ şeklinde yazıldığı ifade edildi.

Bölüm 4'te öncelikle ele alınan modeller altında parametrelerin $OLSE$'lerinin $BLUE$'lara göre etkinlikleri elde edildi. Daha sonra etkinliklerin çarpımsal ayrışımları verilerek bazı karşılaştırmalar yapıldı. Bunun için ele alınan modeller altında parametrelerin $BLUE$ ve $OLSE$'leri ile ilgili bazı eşitliklerden bahsedildi. $\{BLUE(M_1X_1\beta_2 \mid \mathcal{M})\} = \{BLUE(M_1X_1\beta_2 \mid \mathcal{M}_{12})\}$ olduğu ve X matrisinin tam sütun ranklı olduğu durumda ise $\hat{\beta}_2(\mathcal{M}) = \hat{\beta}_2(\mathcal{M}_{12})$, $\tilde{\beta}_2(\mathcal{M}) = \tilde{\beta}_2(\mathcal{M}_{12})$ ve ayrıca $\hat{\beta}_2(\mathcal{M}_{12}) = \hat{\beta}_2(\mathcal{M}_1) = \hat{\beta}_2(\mathcal{M}_r)$ yazılabileceği ifade edildi. Daha sonra X matrisinin tam sütun ranklı olduğu durumda $\mathcal{M}$ ve $\mathcal{M}_{12}$ modelleri altından β_2'nin $BLUE$'ları aynı iken, $\mathcal{M}_r$ altında β_2'nin $BLUE$'sunun bunlardan farklı olduğu gösterildi. Bunların sonucu olarak $\mathcal{M}$, $\mathcal{M}_{12}$ ve $\mathcal{M}_r$ modelleri altında

$$\mathrm{cov}(\hat{\beta}_2 \mid \mathcal{M}) = \mathrm{cov}(\hat{\beta}_2 \mid \mathcal{M}_{12}) = \mathrm{cov}(\hat{\beta}_2 \mid \mathcal{M}_r) \text{ ve } \mathrm{cov}(\tilde{\beta}_2 \mid \mathcal{M}) = \mathrm{cov}(\tilde{\beta}_2 \mid \mathcal{M}_{12})$$

yazılabileceği ifade edildi. $OLSE$'sinin Watson etkinliği, kovaryans matrislerinin determinantlarının oranı olarak tanımlandığından, $\mathcal{M}$ modelinin zayıf singüler model olması koşulu altında

$$eff(\hat{\beta} \mid \mathcal{M}) = \frac{|cov(\tilde{\beta} \mid \mathcal{M})|}{|cov(\hat{\beta} \mid \mathcal{M})|} = \frac{|X'X|^2}{|X'VX||X'V^+X|} := \phi$$

$$eff(\hat{\beta}_1 \mid \mathcal{M}) = \frac{|cov(\tilde{\beta}_1 \mid \mathcal{M})|}{|cov(\hat{\beta}_1 \mid \mathcal{M})|} = \frac{|X_1'M_2X_1|^2}{|X_1'M_2VM_2X_1||X_1'\dot{M}_2X_1|} := \phi_1$$

$$eff(\hat{\beta}_2 \mid \mathcal{M}) = \frac{|cov(\tilde{\beta}_2 \mid \mathcal{M})|}{|cov(\hat{\beta}_2 \mid \mathcal{M})|} = \frac{|X_2'M_1X_2|^2}{|X_2'M_1VM_1X_2||X_2'\dot{M}_1X_2|} := \phi_2$$

olduğu verildi. Ayrıca $eff(\hat{\beta}_2 \mid \mathcal{M}_{12}) = eff(\hat{\beta}_2 \mid \mathcal{M}) := \phi_2$ olduğu ifade edildi. Benzer şekilde diğer ele alınan modeller altında

$$eff(\hat{\beta}_1 \mid \mathcal{M}_1) = \frac{|X_1'V^+X_1|^{-1}}{|X_1'X_1|^{-1}|X_1'VX_1||X_1'X_1|^{-1}} \frac{|X_1'X_1|^2}{|X_1'VX_1||X_1'V^+X_1|} := \phi_{1/1}$$

$$eff(\hat{\beta}_2 \mid \mathcal{M}_2) = \frac{|X_2'X_2|^2}{|X_2'VX_2||X_2'V^+X_2|} := \phi_{2/2}$$

$$eff(\hat{\beta}_2 \mid \mathcal{M}_r) = \frac{|X_2' M_1 X_2|^2}{|X_2' M_1 V M_1 X_2||X_2' M_1 V^+ M_1 X_2|} := \phi_r$$

olarak verildi. Teorem 4.2.1'de $\mathcal{M}$ zayıf singüler modeli altında X tam sütun ranklı olmak üzere Schur tamamlayıcısının determinant formülünden yararlanılarak, $\hat{\beta}(\mathcal{M})$'nın ϕ Watson etkinliğinin bir çarpımsal ayrışımı edildi. Burada $\alpha_1 = \frac{|X_2' M_1 V M_1 X_2|}{|X_2' M_1 (M_1 V^+ M_1)^- M_1 X_2|} \geq 1$ etkinlik çarpanı olarak verildi. Ayrıca $\alpha_1 = 1$ olmasının gerek ve yeter koşulunun $X_2' M_1 V X_2 = \mathbf{0}$ olduğu gösterildi. Teorem 4.2.2'de X tam sütun ranklı olmak üzere, ele alınan modeller altında $OLSE$ ve $BLUE$'ların eşit olmasına karşılık gelen koşullar verildi. Diğer bir değişle

$$MV = VM \Leftrightarrow \phi = eff(\hat{\beta} \mid \mathcal{M}) = 1$$

$$M_1 V = V M_1 \Leftrightarrow \phi_{1/1} = eff(\hat{\beta}_1 \mid \mathcal{M}_1) = 1$$

$$MVM_1 = M_1 VM \Leftrightarrow \phi_2 = eff(\hat{\beta}_2 \mid \mathcal{M}) = 1$$

$$P_{M_1 X_2} V = V P_{M_1 X_2} \Leftrightarrow \phi_r = eff(\hat{\beta}_2 \mid \mathcal{M}_r) = 1$$

durumlarının sağlandığı gösterildi. Ayrıca Sonuç 4.2.3'te ϕ için $\phi \geq \max\{\phi_{1/1} \cdot \phi_2, \phi_1 \cdot \phi_{2/2}\}$, $\phi = \phi_{1/1} \cdot \phi_2 \geq \phi_1 \cdot \phi_{2/2} \Leftrightarrow \mathrm{cov}(X_1' M_2 y, X_2' y) = \mathbf{0}$ ve $\phi = \phi_1 \cdot \phi_{2/2} \geq \phi_{1/1} \cdot \phi_2 \Leftrightarrow \mathrm{cov}(X_2' M_1 y, X_1' y) = \mathbf{0}$ olduğu verildi. Teorem 4.2.4'te, $\phi_2 = \phi_r$ eşitliğinin $X_2' M_1 V^+ X_1 = \mathbf{0}$ ve $\tilde{\beta}_2(\mathcal{M}) = \tilde{\beta}_2(\mathcal{M}_r)$ ifadelerine denk olduğu gösterildi. Teorem 4.2.5'te ise, $M_1 V = V M_1$ olduğu durumda $X_2' M_1 V X_1 = \mathbf{0}$ (ve bundan dolayı $\alpha_1 = 1$) ve ayrıca $X_2' M_1 V^+ X_1 = \mathbf{0}$ (ve bundan dolayı $\phi_2 = \phi_r$) ve $\phi = \phi_2 = \phi_r$ ifadelerinin sağlandığı gösterildi. Son olarak $\phi = \phi_2$, $\phi_{1/1} = \frac{1}{\alpha_1}$, $X_1' V X_1 - X_1' V M_1 X_2 (X_2' M_1 V M_1 X_2)^{-1} X_2' M_1 V X_1 = X_1' X_1 (X_1' V^+ X_1)^{-1} X_1' X_1$, $MV^+ X_1 = \mathbf{0}$, $\mathcal{C}(V^+ X_1) \subset \mathcal{C}(X)$, $\mathcal{C}(X_1) \subset \mathcal{C}(VX)$ ifadelerinin denk olduğu verildi.

Teorem 4.2.1'de verilmiş olan $\phi = \phi_{1/1} \cdot \phi_2 \cdot \alpha_1$ ayrışımının, $\phi = \phi_{1/1} \cdot \phi_{2/2} \cdot \alpha_2$ şekilde ifade edilebileceği koşullar belirlenerek α_1 ve α_2 etkinlik çarpanları arasındaki ilişki araştırılabilir. Ayrıca model matrisinin k parçaya ayrılması durumunda problem genelleştirilebilir.

KAYNAKLAR

[1] FISHER, R.A., On the mathematical foundations of theoretical statistics, Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Series A: Mathematical and Fhysical Sciences, 222, 309-368, 1922.

[2] WILKS, S.S., Certain genelalizations in the analysis of variance, Biometrika, 24, 471-494, 1932.

[3] AITKEN, A.C., On least squares and linear combination of observations, Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, 55, 1935.

[4] WATSON, G.S., Serial correlation in regression analysis. Ph.D. Thesis, Dept. of Experimental Statistics, North Carolina State College, Raleigh, 1951.

[5] ALBERT, A., The Gauss–Markov theorem for regression models with possibly singular covariances, SIAM Journal on Applied Mathematics, 24, 182–187, 1973.

[6] WANG, S.G., Chow, J.S.C., Advanced Linear Models: Theory and Applications, Dekker, 1994.

[7] WATSON, G.S., Serial correlation in regression analysis, I. Biometrika, 42, 327-341, 1955.

[8] PUNTANEN, S., Some further results related to reduced singular linear models, Comm. Statist. Theory Methods, 26, 375-385, 1997.

[9] ANDERSON, T.W., On the theory of testing serial correlation, Skandinavisk Aktuarietidskrift, 31, 88–116, 1948.

[10] BAKSALARY, J.K., PUNTANEN, S., STYAN, G.P.H., On T.W. Anderson's contributions to solving the problem of when the ordinary least-squares estimator is best linear unbiased and to characterizing rank additivity of matrices, In The Collected Papers of T. W. Anderson: 1943–1985 (G. P. H. Styan, ed.), Wiley, 1579–1591, 1990.

[11] BAKSALARY, J.K., HAUKE, J., LIU, X., LIU, S., Relationships between partial orders of matrices and their powers, Linear Algebra and its Applications, 379, 277–287, 2004.

[12] BAKSALARY, O.M., TRENKLER, G., A projector oriented approach to the best linear unbiased estimator, Statistical Papers, 50, 721–733, 2009.

[13] CHU, K.L., Inequalities and equalities associated with ordinary least squares and generalized least squares in partitioned linear models, Ph.D. Thesis, Dept. of Mathematics & Statistics, McGill University, Montréal, 2004.

[14] GROβ, J., The general Gauss–Markov model with possibly singular dispersion matrix, Statistical Papers, 45, 311–336, 2004.

[15] ISOTALO, J., Linear estimation and prediction in the general Gauss–Markov model. Acta Universitatis Tamperensis Series A, 1242. Ph.D. Thesis, Dept. of Mathematics, Statistics and Philosophy, University of Tampere, 2007.

[16] ISOTALO, J., PUNTANEN, S., STYAN, G.P.H., Some comments on the Watson efficiency of the ordinary least squares estimator under the Gauss–Markov model, Calcutta Statistical Association Bulletin, 61, 1–15. (Proceedings of the Sixth International Triennial Calcutta Symposium on Probability and Statistics, 29–31 December, 2006, N. Mukhopadhyay and M. Pal, eds.), 2009.

[17] KRUSKAL, W., When are Gauss–Markov and least squares estimators identical? A coordinate-free approach, The Annals of Mathematical Statistics, 39, 70–75, 1968.

[18] MITRA, S.K., RAO, C.R., Conditions for optimality and validity of simple least squares theory, The Annals of Mathematical Statistics, 40, 1617–1624, 1969.

[19] PUNTANEN, S., STYAN, G.P.H., The equality of the ordinary least squares estimator and the best linear unbiased estimator (with discussion), Amer. Statist, 43, 153-164, 1989.

[20] PUNTANEN, S., STYAN, G.P.H., WERNER, H.J., Two matrix-based proofs that the linear estimator Gy is the best linear unbiased estimator, J. Statist. Plann. Inference, 88, 173-179, 2000.

[21] RAO, C.R., Least squares theory using an estimated dispersion matrix and its application to measurement of signals, Proc. Fifth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability: Berkeley, California, 1965/1966, vol. 1, L.M. Le Cam and J. Neyman, eds., Univ. of California Press, Berkeley, 355-372, 1967.

[22] RAO, C.R., A note on a previous lemma in the theory of least squares and some further results, Sankhyā, Ser. A, 30, 259–266, 1968.

[23] WATSON, G.S., Linear least squares regression, The Annals of Mathematical Statistics, 38, 1679–1699, 1967.

[24] ZYSKIND, G., On canonical forms, non-negative covariance matrices and best and simple least squares linear estimators in linear models, The Annals of Mathematical Statistics, 38, 1092–1109, 1967.

[25] ZYSKIND, G., Parametric augmentations and error structures under which certain simple least squares and analysis of variance procedures are also best, Journal of the American Statistical Association, 64, 1353–1368, 1969.

[26] ZYSKIND, G., Error structures, projections and conditional inverses in linear model theory, In A Survey of Statistical Design and Linear Model (J. N. Srivastava, ed.), North-Holland, 647–663, 1975.

[27] ZYSKIND, G., MARTİN, F.B., On best linear estimation and a general Gauss-Markov theorem in linear models with arbitrary nonnegative covariance structure, SIAM J. Appl. Math., 17, 1190-1202, 1969.

[28] LISKI, E.P., PUNTANEN, S., WANG, S.G., Bounds for the trace of the difference of the covariance matrices of the OLSE and BLUE, Linear Algebra and its Applications, 176, 121–130, 1992.

[29] LIU, S., Efficiency comparisons between the OLSE and the BLUE in a singular linear model, Journal of Statistical Planning and Inference, 84, 191–200, 2000.

[30] LIU, S., KING, M.L., Two Kantorovich-type inequalities and efficiency comparisons between the OLSE and BLUE, Journal of Inequalities and Application, 7, 169–177, 2002.

[31] BALAKRISHNAN, N., RAO, C.R., Some efficiency properties of best linear unbiased estimators, J. Statist. Plann. Inf., 113, 551-555, 2003.

[32] CHU, K.L., STYAN, G.P.H., On the efficiency of OLS in simple linear regression, with special reference to the situation where the OLS and GLS regression lines are paralel, Report 2003-04, Dept. of Mathematics and Statistics, McGill University, Montr´eal (Qu´ebec), Canada, November 2003.

[33] CHU, K.L., ISOTALO, J., PUNTANEN, S. STYAN, G.P.H., On decomposing the Watson efficiency of ordinary least squares in a partitioned weakly singular linear model, Report 2003-05, Dept. of Mathematics and Statistics, McGill University, Montr´eal (Qu´ebec), Canada, November 2003.

[34] CHU, K.L., ISOTALO, J., PUNTANEN, S., STYAN, G.P.H., On decomposing the Watson efficiency of ordinary least squares in a partitioned weakly singular linear model, Sankhyā, 66, 634–651, 2004.

[35] CHU, K.L., ISOTALO, J., PUNTANEN, S., STYAN, G.P.H., Some further results concerning the decomposition of the Watson efficiency in partitioned linear models, Sankhyā, 67, 74–89, 2005.

[36] CHU, K.L., ISOTALO, J., PUNTANEN, S., STYAN, G.P.H., The efficiency factorization multiplier for the Watson efficiency in partitioned linear models: some examples and a literature review. Journal of Statistical Planning and Inference, 137, 3336–3351, 2007.

[37] TIAN, Y., WİENS, D.P., On equality and proportionality of ordinary least squares, weighted least squares and best linear unbiased estimators in the general linear model, Statistics & Probability Letters, 76, 1265–1272, 2006.

[38] YANG, H., WANG, L., An alternative form of the Watson efficiency, Journal of Statistical Planning and Inference, 139, 2767–2774, 2009.

[39] KESRİKLİOĞLU E., GÜLER N., Dik parçalanmış lineer model ve bu modelin indirgenmiş modelleri altında parametrelerin OLSE'leri ile ilişkili bazı Watson etkinlik ayrışımları, Beykent Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Fen ve Mühendislik Bilimleri Dergisi, 6(1), 77-86, 2013.

[40] BALTAGI, B.H., Applications of a necessary and sufficient condition for OLS to be BLUE, Statistics & Probability Letters, 8, 457–461, 1989.

[41] DRURY, S.W., LIU, S., LU, C.Y., PUNTANEN, S. STYAN, G.P.H., Some comments on several matrix inequalities with applications to canonical correlations: historical background and recent developments, Sankhyā, Ser. A, 64, 453–507, 2002.

[42] KRAMER, W., Finite sample efficiency of ordinary least squares in the linear regression model with autocorrelated errors, Journal of the American Statistical Association, 75, 1005–1009, 1980.

[43] LIU, S., On matrix trace Kantorovich-type inequalities, In Innovations in Multivariate Statistical Analysis: A Festschrift for Heinz Neudecker (R.D.H. Heijmans, D.S.G. Pollock, A. Satorra, eds.), Kluwer, 39–50, 2000.

[44] LUATI, A., PROIETTI, T., On the equivalence of the weighted least squares and the generalised least squares estimators, with applications to kernel smoothing. Annalsof the Institute of Statistical Mathematics, 62, 2010.

[45] WANG, S.G., SHAO, J., Constrained Kantorovich inequalities and relative efficiency of least squares, Journal of Multivariate Analysis, 11, 284–298, 1992.

[46] MAGNUS, J.R., NEUDECKER, H., Matrix Differantial Calculus with Applications in statistics and Econometrics, John Wiley, G.Britain, 1988.

[47] VENIT, S., BİSHOP, W., Elementary Linear Algebra, PWS publishers, Massachusetts, 1985.

[48] PUNTANEN, S., STYAN, G.P.H., ISOTALO, J., Matrix Tricks for Linear Statistical Models, Our Personal Top Twenty, Springer, Heidelberg, 2011.

[49] SENGUPTA, D., JAMMALAMADAKA, S.R., Linear Models an Intergated Approach, World Scientific, Singapore, 2003.

[50] GRAYBILL, F.A., Introduction to Matrices with Applications in Statistics, Wadworth Publising Company inc., California, 1969.

[51] SEBER, G.A.F., Linear Regression Analysis, John Wiley, New York, 1977.

[52] JOHNSON, R.A., WICHERN, D.W., Applied Multivariate Statistical Analysis, Prentice-Hall, New Jersey, 1982.

[53] HARVILLE, D.A., Matrix algebra from a statiscians perspective, Springer, 1997.

[54] TIAN, Y., PUNTANEN, S., On the equivalence of estimations under a general linear model and its transformed models, Linear Algebra and its Applications, 430, 2622–2641, 2009.

[55] RAO, C.R., Representations of best linear unbiased estimators in the Gauss-Markoff model with a singular dispersion matrix, J. Multivariate Anal., 3, 276-292, 1973.

[56] HINKELMANN, K., Aitken equations, In Kotz, Read & Banks, 117, 23-24, 1997.

[57] CHU, K.L., ISOTALO, J., PUNTANEN, S., STYAN, G.P.H., Inequalities and equalities for the generalized efficiency function in orthogonally partitioned linear models, In Inequalities and Applications (T. M. Rassias & D. Andrica, eds.), Cluj University Press, 13–69, 2008.

[58] DAVIDSON, R., MACKINNON, J.G., Econometric Theory and Methods, Oxford University Press, New York, 2004.

[59] GROβ, J., PUNTANEN, S., Estimation under a general partitioned linear model, Linear Algebra Appl., 321, 131-144, 2000.

[60] LOVELL, M., Seasonal adjustment of economic time series, Journal of the American Statistical Association, 58, 993–1010, 1963.

[61] HASLETT, S.J., PUNTANEN, S., Effect of adding regressors on the equality of the BLUEs under two linear models, Journal of Statistical Planning and Inference, 140, 104–110, 2010.

[62] PUNTANEN, S., Some matrix results related to a partitioned singular linear model, Comm. Statist. Theory Methods, 25, 269-279, 1996.

ÖZGEÇMİŞ

Esma KESRİKLİOĞLU, 01.01.1986 tarihinde Malatya'da doğdu. İlk, orta ve lise eğitimini 2002 yılında tamamladı. 2003 yılında İnönü Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde lisans eğitimine başladı. 2007 yılında lisans eğitimini tamamladı. 2008-2009 yılları arasında Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Eğitimi Tezsiz Yüksek Lisans programını tamamladı. 2008-2010 yılları arasında özel bir dershanede matematik öğretmeni olarak çalıştı. 2011 yılında Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik anabilim dalında Yüksek Lisans'a başladı. Halen aynı üniversitede Yüksek Lisans öğrenimine devam etmektedir.