T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜZEY ÜZERİNDEKİ EĞRİLERİN SPİNOR GÖSTERİMİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

İlim KİŞİ

Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Murat TOSUN

Kasım 2012

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜZEY ÜZERİNDEKİ EĞRİLERİN SPİNOR GÖSTERİMİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

İlim KİŞİ

Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK

Bu tez 30/11/2012 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Oybirliği ile kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Murat TOSUN	Doç Dr. M. Ali GÜNGÖR	Yrd. Doç. Dr. Yılmaz GÜNEY
Jüri Başkanı	Üye	Üye

ÖNSÖZ

Tez konusu seçiminde ve çalışmanın her safhasında engin bilgi ve tecrübesinden yararlandığım çok değerli hocam Prof. Dr. Murat TOSUN' a, desteklerini hiçbir zaman esirgemeyen değerli hocalarım Doç. Dr. Mehmet Ali GÜNGÖR ve Doç. Dr. Soley ERSOY' a saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca, hayatım boyunca maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen, sevgileriyle ayakta durmamı sağlayan annem babam ve kardeşlerime ve tez yazımındaki yardımlarından dolayı eşime sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

F	: Genel bir cisim
$\mathbb{R}^3$	: *3* boyutlu reel vektör uzayı
E^3	: 3 boyutlu Öklid uzayı
V	: Vektör uzayı
S	: Yüzey
I	: Aralık
Ψ	: Diffeomorfizm
Γ,ψ	: Spinorlar
$\overline{\psi}$	: ψ spinorunun eşleniği
ψ^t	: ψ spinorunun transpozu
ψ	: ψ spinorunun eşi
$\langle,\rangle$	: İç çarpım
$\lVert.\rVert$	: Norm
Λ	: Vektörel çarpım
α	: Eğri
$\vec{t},\vec{n},\vec{b}$	: Frenet çatısı
$\vec{t},\vec{B},\vec{N}$	: Darboux çatısı
κ	: Eğrilik
τ	: Torsiyon
κ_g	: Jeodezik eğrilik
κ_n	: Normal eğrilik
τ_g	: Jeodezik burulma
$O\ 3$	: Ortogonal grup
$SO\ 3$	: Pozitif ortogonal grup

$U \;\, 2$: Üniter grup

$SU \;\, 2$: Özel üniter grup

ÖZET

Anahtar Kelimeler: Öklid uzayı, eğri, Frenet çatısı, yüzey, Darboux çatısı, spinor.

Bu tez 5 bölümden oluşmaktadır.

İlk bölümde spinorlar ve uygulama alanları ile ilgili kısa bir literatür bilgisi verilmektedir. İkinci bölümde bazı temel kavram ve özellikler verilmektedir. Üçüncü bölümde spinorlar ortonormal taban yardımıyla tanıtılmıştır. 4. bölümde ise E^3 Öklid uzayında eğriler hakkında bilgi verilmiş ve Frenet türev denklemlerinin spinorlar cinsinden ifadesi verilmiştir.

Son bölümde ise yüzey üzerindeki eğrilerin spinor gösterimi Darboux türev denklemleri cinsinden verilmekte ve Frenet çatısının spinor gösterimi ile Darboux çatısının spinor gösterimi karşılaştırılmaktadır.

SPİNOR REPRESENTATİON OF CURVES ON SURFACE

SUMMARY

Key Words: Euclid space, curve, Frenet frame, surface, Darboux frame, spinor.

This thesis consists of five chapters.

In the first chapter, a short literature information about spinors and their areas of application have been given. In the second chapter some fundamental concepts and properties have been given. In the third chapter spinors have been introduced with the help of the orthonormal basis. In the fourth chapter an information about curve theory and spinor represetation of Frenet frame in three dimensional Euclidean space have been given.

In the last chapter spinor represetation of curves on surface has been given with the help of the Darboux equations and spinor representations of Frenet frame and Darboux Frame have been compared.

BÖLÜM 1. GİRİŞ

Spinorlar, matematik ve fizikte, özellikle dönme veya Lorentz grupları gibi ortogonal grup teorisinde uzay vektörü kavramını genişletmek için kullanılan kompleks vektör uzayı elemanlarıdır.

Spinorlar Elie Cartan tarafından 1913 yılında keşfedilmiştir [4]. Daha sonra quantum mekaniğinde elektronun açısal hızının çalışılmasında kullanılmıştır. Spinor teorisi en çok 1929 da B.L. Van der Waerden tarafından geliştirilen izafiyet quantum mekaniği ve onun elektron spinine uygulanması olarak bilinir [15]. Spinor teorisinin temel prensipleri uzun yıllardır bilinse de, gerçekte bazı formülleri (Euler'in rotasyonel parametreleri [18]) 1776 yılına dayanır. Spinor teorisinin günümüzdeki hali Hamilton' un kuaterniyon teorisidir.

Spinorların bahsedilenlerin haricinde başka uygulamaları da vardır. Birim spinorun bileşenleri katı cisimlerin mekaniğinde " Cayley-Klein parametreleri" adı altında 50 yılı aşkın süredir kullanılmaktadır. Spinorlar sadece spinor esaslarına dayanan eksiksiz bir elektromanyetik alandaki teori ile yakından ilişkili olarak görülür [6]. Ayrıca spinor teorisi elektrik iletim hattı ile de ilişkilidir [3].

Özel üniter grup olan $SU(2)$ nin bir parçasını teşkil eden Pauli matrisleri ve iki bileşenli spinorlar cebiri 3 boyutlu reel uzayda dönme hareketlerinin klasik tanımından ziyade daha derli toplu ve hoş bir tanımının verilmesini sağlar. Her ne kadar spinorlar ilk bakışta soyut kavramlar gibi görünse de, onlar elektrik mühendisliğinde kullanılan kompleks sayılardan fazlası değillerdir. Bunun ötesinde spinor dönüşümleri, kuantum mekaniği operatörlerinin klasik mekaniğin dinamik değişkenleri ile benzer olduğu aynı yolla, fiziksel görüntüyü muhafaza ederler [13].

Malesef, spinorla ilgili mevcut literatürün anlaşılması bir hayli güçtür. Çoğu, modern cebir bilgisi olarak varsayılır. Özellikle gruplar teorisi ve tümü de konuyu okuyucuya soyut ve dolaylı bir yolla sunduğundan; okuyucu akıl yürütmeyi başarsa da olan biteni net olarak anlamakta zorlanır. 3 boyutlu Öklid uzayında spinorlar teorisini açıklayabilmenin dört farklı yolu vardır. Bunlar Cartan'ın izotropik vektörleri, Clifford cebiri, spinorlar halkası cebiri, stereografik izdüşümdür [16].

Bu tez çalışmasında Cartan'ın izotropik vektörleri yardımıyla, ikişer ikişer ortogonal olan birim vektör sıralı üçlüsü verildiğinde bu üçlünün iki kompleks bileşenden ibaret olan ve spinor olarak adlandırılan tek bir vektör tarafından ifade edilebileceği ve Darboux türev denklemlerinin tek bir spinor denklemine denk olduğu gösterilmiştir [14].

BÖLÜM 2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde daha sonraki bölümlerde kullanılacak olan kavramlar verilmiştir.

Tanım 2.1. G boş olmayan bir cümle olmak üzere

$$\begin{aligned} *: G\times G &\to G \\ a,b\ &\to a*b \end{aligned}$$

dönüşümü,

i) $*$ işlemi kapalıdır. Yani $\forall a,b\in G$ için $a*b\in G$

ii) $*$ işlemi iyi tanımlıdır. Yani $\forall\ \ a,b\ \ \in G\times G$ için $a*b\in G$ bir tektir.

şartlarını sağlıyorsa G de bir ikili işlem adını alır. Üzerinde ikili işlem tanımlanan bu G cümlesine ise cebirsel yapı adı verilir ve genellikle $G,*$ ile gösterilir [2].

Tanım 2.2. G boş olmayan bir cümle ve $*$, G de bir ikili işlem olsun. $G,*$ cebirsel yapısı aşağıdaki aksiyomları sağlıyorsa $G,*$ sistemine bir grup denir.

i) $*$ işleminin G de birleşme özelliği vardır. Yani $\forall a,b,c\in G$ için $a*\ b*c\ =\ a*b\ *c$ dir.

ii) $*$ işleminin G de etkisiz elemanı vardır. Yani $\forall a\in G$ için $a*e=a=e*a$ olacak şekilde $\exists e\in G$ vardır.

iii) $*$ işlemine göre G deki her elemanın tersi vardır. Yani $\forall a\in G$ için $a*a^{-1}=e=a^{-1}*a$ olacak şekilde $\exists a^{-1}\in G$ vardır.

İlave olarak;

iv) $*$ işleminin G de değişme özelliği vardır. Yani $\forall a,b \in G$ için $a*b=b*a$

aksiyomu da sağlanıyorsa $(G,*)$ cebirsel yapısına değişmeli grup denir [5].

Tanım 2.3. $(G,*)$ ve (H,o) iki grup olmak üzere $f:G \to H$ fonksiyonu verilsin. Eğer f işlem koruyorsa yani $\forall g_1, g_2 \in G$ için

$$f(g_1 * g_2) = f(g_1)\, o f(g_2)$$

ise f ye bir grup homomorfizmi denir [10].

Tanım 2.4. H boş olmayan bir cümle olmak üzere ve $*$ ve o H üzerinde ikili işlemler olsunlar. Aşağıdaki aksiyomları sağlayan $(H,*,o)$ cebirsel yapısına bir halka denir.

i) $(H,*)$ bir değişmeli gruptur.

ii) o işleminin H de birleşme özelliği vardır. Yani $\forall a,b,c \in H$ için $ao(boc) = (aob)oc$ dir.

iii) o işleminin $*$ işlemi üzerine sağdan ve soldan dağılma özelliği vardır. Yani $\forall a,b,c \in H$ için $ao(b*c) = (aob)*(aoc)$ ve $(a*b)oc = (aoc)*(boc)$

ilave olarak;

iv) o işleminin H de birim elemanı vardır. Yani $\forall a \in H$ için $ao\varepsilon = a = \varepsilon oa$ olacak şekilde $\exists \varepsilon \in H$ vardır.

v) o işleminin H de değişme özelliği vardır. Yani $\forall a,b \in H$ için $aob = boa$ dır.

aksiyomları da sağlanıyorsa $(H,*,o)$ cebirsel yapısına birimli ve değişmeli bir halka denir [10].

Tanım 2.5. F boş olmayan bir cümle ve $*$ ve o F üzerinde ikili işlemler olsunlar. Aşağıdaki aksiyomları sağlayan $F,*,o$ cebirsel yapısına bir cisim denir.

i) $F,*,o$ birimli ve değişmeli bir halkadır.

ii) e, $*$ işleminin etkisiz elemanı olmak üzere $F- \; e \;,o$ değişmeli gruptur.[10].

Tanım 2.6. V boş olmayan bir cümle ve $F,+,\cdot$ bir cisim olsun. V üzerinde $\oplus$ ve $\odot$ sembolleriyle gösterilen iç ve dış işlemler sırasıyla aşağıdaki gibi verilsin.

$$\begin{aligned} \oplus : V\times V &\to V \\ u,v &\to u\oplus v \end{aligned} \quad , \quad \begin{aligned} \odot : F\times V &\to V \\ a,u &\to a\odot u \end{aligned}$$

Bu işlemlere göre aşağıdaki aksiyomlar sağlanıyorsa V ye F cismi üzerinde bir vektör uzayı denir.

i) $\forall u,v,w\in V$ için $u\oplus \; v\oplus w \; = \; u\oplus v \; \oplus w$ dir.

ii) $\forall u\in V$ için $u\oplus e=u=e\oplus u$ olacak şekilde $\exists e\in V$ vardır.

iii) $\forall u\in V$ için $u\oplus u^{-1}=e=u^{-1}\oplus u$ olacak şekilde $\exists u^{-1}\in V$ vardır.

iv) $\forall u,v\in V$ için $u\oplus v=v\oplus u$ dur.

v) $\forall a\in F$ ve $\forall u,v\in V$ için $a\odot \; u\oplus v \; = \; a\odot u \; \oplus \; a\odot v$ dir.

vi) $\forall a,b\in F$ ve $\forall \mathrm{u}\in V$ için $a+b \; \odot u= \; a\odot u \; \oplus \; b\odot u$ dur.

vii) $\forall a,b\in F$ ve $\forall \mathrm{u}\in V$ için $a.b \; \odot u=a\odot \; b\odot u$ dur.

viii) $1\in F$ ve $\forall \mathrm{u}\in V$ için $1\odot u=u$ dir .

V vektör uzayının elemanları ile F cisminin elemanlarını birbirinden ayırt etmek için bundan sonra $\forall u\in V$ elemanını $\vec{u}$ ile göstereceğiz [1].

Tanım 2.7. V, F cismi üzerinde bir vektör uzayı ve $S= \; \vec{v_1},\vec{v_2},...,\vec{v_n} \;$, V nin sonlu bir alt cümlesi olsun. V nin bir $\vec{v}$ vektörü için $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n$ ler F cisminden alınan herhangi skalerler olmak üzere $\vec{v}=\lambda_1\overrightarrow{v_1}+\lambda_2\overrightarrow{v_2}+...+\lambda_n\overrightarrow{v_n}$ ise $\vec{v}$ ye S deki vektörlerin bir lineer bileşimi (kombinasyonu veya terkibi) denir [10].

Tanım 2.8. $S=\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2},...,\overrightarrow{v_n}$, bir V vektör uzayının vektörlerinin kümesi olsun. Eğer V nin her bir elemanı, S nin elemanlarının bir lineer bileşimi olarak yazılabiliyorsa S ye V yi geriyor denir ve $V=S_p\ S$ ile gösterilir [10].

Tanım 2.9. V , F cismi üzerinde bir vektör uzayı ve $S=\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2},...,\overrightarrow{v_n}$, V nin bir alt kümesi olsun. Eğer

$$\lambda_1\overrightarrow{v_1}+\lambda_2\overrightarrow{v_2}+...+\lambda_n\overrightarrow{v_n}=0$$

olacak şekilde hepsi birden sıfır olmayan $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n$ skalerleri mevcut ise S ye lineer bağımlıdır denir. Eğer

$$\lambda_1\overrightarrow{v_1}+\lambda_2\overrightarrow{v_2}+...+\lambda_n\overrightarrow{v_n}=0$$

olduğunda $\forall\lambda_i=0$, $1\leq i\leq n$ oluyorsa S ye lineer bağımsızdır denir [10].

Tanım 2.10. V bir vektör uzayı ve sonlu bir alt kümesi de $S=\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2},...,\overrightarrow{v_n}$ olsun. Eğer

i) S lineer bağımsız
ii) S , V vektör uzayını geriyor

ise S ye V nin bir tabanı (bazı) denir [10].

Tanım 2.11. V bir reel vektör uzayı olsun. Eğer

$$\langle , \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$$

fonksiyonu aşağıdaki aksiyomları sağlıyorsa, $\langle , \rangle$ fonksiyonuna V de bir iç çarpım, V vektör uzayına da $\langle , \rangle$ iç çarpımı ile birlikte bir reel iç çarpım uzayı denir.

i) $\forall \vec{u}, \vec{v} \in V$ için $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle$ (Simetri)

ii) $\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V$ ve $\forall a, b \in \mathbb{R}$ için $\langle a\vec{v} + b\vec{u}, \vec{w} \rangle = a\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle + b\langle \vec{u}, \vec{w} \rangle$ ve

$\langle \vec{u}, a\vec{v} + b\vec{w} \rangle = a\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + b\langle \vec{u}, \vec{w} \rangle$ (Bilineerlik)

iii) $\forall \vec{u} \in V$ için $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle \geq 0$ ve $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = 0$ (Pozitif tanımlılık) [10].

Tanım 2.12. V bir kompleks vektör uzayı olsun. Eğer

$$\langle , \rangle = V \times V \to \mathbb{C}$$

fonksiyonu aşağıdaki aksiyomları sağlıyorsa, $\langle , \rangle$ fonksiyonuna V de bir iç çarpım denir.

i) $\forall \vec{u}, \vec{v} \in V$ için $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \overline{\vec{v}, \vec{u}} \rangle$ (Hermit)

ii) $\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V$ ve $\forall c \in \mathbb{C}$ için $\langle c\vec{u}, \vec{v} \rangle = c\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$, $\langle \vec{u}, c\vec{v} \rangle = \bar{c}\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$,

$\langle \vec{u} + \vec{v}, \vec{w} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$ ve $\langle \vec{u}, \vec{v} + \vec{w} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle$ (Bilineerlik)

iii) $\forall \vec{u} \in V$ için $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle \geq 0$ ve reeldir. $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = 0$ dır. (Pozitif tanımlılık)

Burada " $^{-}$ " eşlenik anlamındadır [10].

Tanım 2.13. Bir $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ için

$$f\left(\vec{x},\vec{y}\right)=\sum_{i=1}^{n}x_i y_i$$

şeklinde tanımlanıyorsa f fonksiyonu $\mathbb{R}^n$ de bir iç çarpımdır. Bu iç çarpıma Öklid anlamındaki iç çarpım veya $\mathbb{R}^n$ de ki standard iç çarpım adı verilir. Burada $\vec{x}=\left(x_1,\ldots,x_n\right)$, $\vec{y}=\left(y_1,\ldots,y_n\right)\in\mathbb{R}^n$ dir [10].

Tanım 2.14. Bir $g:\mathbb{C}^n\times\mathbb{C}^n\rightarrow\mathbb{C}$ fonksiyonu $\forall\vec{x},\vec{y}\in\mathbb{C}^n$ için

$$g\left(\vec{x},\vec{y}\right)=\sum_{i=1}^{n}x_i\overline{y_i}$$

şeklinde tanımlanıyorsa g fonksiyonu $\mathbb{C}^n$ de bir iç çarpımdır. Bu iç çarpıma Hermit anlamındaki iç çarpım veya $\mathbb{C}^n$ de ki standard iç çarpım denir. Burada "$\bar{\ }$" eşlenik anlamındadır ve $\vec{x}=\left(x_1,\ldots,x_n\right)$, $\vec{y}=\left(y_1,\ldots,y_n\right)$, $x_i,y_i\in\mathbb{C}$ dir [10].

Tanım 2.15. Bir V iç çarpım uzayında bir $\vec{u}$ vektörünün normu veya uzunluğu diye $\sqrt{\left\langle\vec{u},\vec{u}\right\rangle}$ reel sayısına denir ve normu 1 olan vektör de birim vektör olarak adlandırılır [10].

Tanım 2.16. Bir V iç çarpım uzayında $\left\langle\vec{u},\vec{v}\right\rangle=0$ ise $\vec{u}$ vektörü $\vec{v}$ vektörüne diktir (ortogonaldir) denir [10].

Tanım 2.17. Her vektörü sıfırdan farklı olan bir S kümesinin vektörleri ikişer ikişer birbirine dik ise bu S kümesine ortogonal küme denir [10].

Tanım 2.18. V bir iç çarpım uzayı ve S kümesi V nin bir bazı olsun. S kümesi ortogonal bir küme ise S ye V nin bir ortogonal bazı, S nin her vektörü aynı zamanda birim vektör ise S ye V nin bir ortonormal bazı denir. [10].

Tanım 2.19. $m,n \in \mathbb{N}$ ve $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$ olmak üzere bütün i,j çiftlerinin cümlesi $A = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ olsun. Bir F cisminde değerler alan A da bir

$$f : A \to F$$
$$i,j \;\to f\; i,j \;= a_{ij}$$

fonksiyonu tanımlayalım ve $a_{ij} \in F$ değerlerini

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ veya } A = \left[a_{ij} \right]$$

biçiminde düzenleyelim. F den seçilen bu cins mn tane elemanın A tablosuna, F üzerinde $m \times n$ tipinde matris denir. $A = \left[a_{ij} \right]$, $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$ matrisi kısaca $A = \left[a_{ij} \right]_{m \times n}$ biçiminde gösterilir ve A matrisine mertebesi $m \times n$ olan bir matris denir. Mertebesi $m \times n$ olan ve bileşenleri bir F cisminden seçilen bütün matrislerin cümlesi F_n^m ile gösterilir [10].

Tanım 2.20. Bir $A \in F_n^m$ matrisinin transpozu A^t ile gösterilir ve j,i bileşeni A nın i,j bileşeni olan bir $n \times m$ matristir. Diğer bir ifadeyle A^t matrisi A matrisinden satır ve kolonlar kendi aralarında yer değiştirilerek elde edilen matristir [10].

Tanım 2.21. Bir $A = \left[a_{ij} \right]$ matrisinde $A = A^t$ ise, yani $a_{ij} = a_{ji}$ ise A matrisine simetrik matris, $A = -A^t$ ise yani $a_{ij} = -a_{ji}$ ise A matrisine ters simetrik matris denir [10].

Tanım 2.22. Bir A matrisi için $A^{-1} = A^t$ ise A matrisine ortogonal matris denir. Bütün ortogonal $A \in \mathbb{R}_n^n$ matrislerinin cümlesi $O\;n$ ile gösterilirse

$$O(n) = \{A : A \in \mathbb{R}_n^n, AA^t = A^t A = I_n, \det A = \pm 1\}$$

dir [10].

Teorem 2.23. $O(n)$ ortogonal matrisler cümlesi matris çarpımı işlemine göre bir grup oluşturur. Bu gruba ortogonal matris grubu adı verilir [10].

Tanım 2.24. $O(n)$ grubunda determinantı 1 olan matrislerin kümesi bir alt gruptur. Bu alt grup $SO(n)$ ile gösterilir. Böylece,

$$SO(n) = \{A : A \in \mathbb{R}_n^n, AA^t = A^t A = I_n, \det A = 1\}$$

dir. $SO(n)$ grubuna pozitif ortogonal grup veya dönme grubu denir. [10].

Tanım 2.25. Bir $A \in \mathbb{C}_n^n$ matrisi için $A^{-1} = \overline{A}^t$ ise A matrisine üniter matris denir. Bütün üniter $A \in \mathbb{C}_n^n$ matrislerinin cümlesi $U(n)$ ile gösterilir. O halde

$$U(n) = \{U : U \in \mathbb{C}_n^n, \overline{U}^t U = U\overline{U}^t = I_n\}$$

dir. Burada “ $\bar{}$ ” eşlenik anlamındadır [10].

Teorem 2.26. $U(n)$ üniter matrisler cümlesi matris çarpımı işlemine göre bir grup oluşturur. Bu gruba üniter grup adı verilir [10].

Tanım 2.27. $U(n)$ grubunda determinantı 1 olan matrislerin kümesi bir alt gruptur. Bu alt grup $SU(n)$ ile gösterilir. Böylece,

$$SU(n) = \{U : U \in \mathbb{C}_n^n, \overline{U}^t U = U\overline{U}^t = I_n, \det U = 1\}$$

dir. $SU\ \ n$ grubuna özel üniter grup adı verilir [10].

Tanım 2.28. Boş olmayan bir cümle A ve V de bir F cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. Eğer

$$f : A \times A \to V$$

fonksiyonu,

i) $\forall P, Q \in A$ için $f\ \ P,Q\ \ + f\ \ Q,R\ \ = f\ \ P,R$

ii) $\forall P \in A$ ve $\forall \vec{\alpha} \in V$ için $f\ \ P,Q\ \ = \vec{\alpha}$ olacak şekilde bir tek $Q \in A$ noktası vardır.

aksiyomlarını sağlıyorsa A ya V vektör uzayı ile birleştirilmiş bir afin uzay adı verilir [8].

Tanım 2.29. A, n-boyutlu V vektör uzayı ile birleştirilmiş bir afin uzay olsun. A afin uzayında alınan $P_0, P_1, ..., P_n$ nokta $n+1$ -lisi için $\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}, ..., \overrightarrow{P_0P_n}$ vektör n-lisi V vektör uzayının bir bazı ise $P_0, P_1, ..., P_n$ nokta $n+1$ -lisine bir afin çatı denir [8].

Tanım 2.30. Bir reel afin uzay A ve A ile birleşen vektör uzayı V olsun. V de bir iç çarpım işlemi olarak

$$\langle , \rangle = V \times V \to \mathbb{R}$$

$$\vec{x}, \vec{y}\ \ \to \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i,\ \vec{x} = \ \ x_1, x_2, ..., x_n\ \ ,\ \vec{y} = \ \ y_1, y_2, ..., y_n$$

Öklid iç çarpımı tanımlanırsa bu işlem yardımıyla A da uzaklık ve açı gibi metrik kavramlar tanımlanabilir. Böylece A afin uzayı da Öklid uzayı adını alır. Eğer $A = \mathbb{R}^n$ noktalar cümlesi ve $V = \mathbb{R}^n$ n- boyutlu standart vektör uzayı olarak alınırsa

Öklid iç çarpımı ile birlikte A , $\mathbb{R}^n$ vektör uzayı ile birleştirilmiş bir n-boyutlu standart Öklid uzayı adını alır ve E^n ile gösterilir [8].

Tanım 2.31. A, n-boyutlu V iç çarpım uzayı ile birleştirilmiş bir afin uzay olsun. A afin uzayında alınan $P_0, P_1, ..., P_n$ nokta $n+1$ -lisi için $\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}, ..., \overrightarrow{P_0P_n}$ vektör n-lisi V vektör uzayının bir ortonormal bazı ise $P_0, P_1, ..., P_n$ nokta $n+1$ -lisi bir Öklid çatısı veya dik çatı adını alır [8].

Tanım 2.32.

$$d : E^n \times E^n \to \mathbb{R}$$

$$(x, y) \to d(x, y) = \left\|\overrightarrow{xy}\right\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i)^2}$$

şeklinde tanımlı d fonksiyonuna E^n Öklid uzayında uzaklık fonksiyonu ve $d(x, y)$ reel sayısına da x, y noktaları arasındaki uzaklık denir [8].

Tanım 2.33. $\forall x, y, z \in E^n$ için xyz açısının ölçüsü

$$\cos\theta = \frac{\left\langle \overrightarrow{xy}, \overrightarrow{yz} \right\rangle}{\left\|\overrightarrow{xy}\right\| \left\|\overrightarrow{yz}\right\|}$$

eşitliğiyle hesaplanan θ reel sayısıdır [8].

Tanım 2.34. X bir cümle olsun. X in alt cümlelerinin bir koleksiyonu τ olsun. τ koleksiyonu aşağıdaki önermeleri sağlıyorsa X üzerinde bir topoloji ve (X, τ) ikilisi de topolojik uzay olarak isimlendirilir.

i) $X, \phi \in \tau$

ii) $\forall A_1, A_2 \in \tau \Rightarrow A_1 \cap A_2 \in \tau$

iii) $A_i \in \tau$, $i \in I$, $\bigcup_{i \in I} A_i \in \tau$ [8].

Tanım 2.35. X ve Y birer topolojik uzay olsunlar. Bir

$$f : X \to Y$$

fonksiyonu sürekli, f^{-1} tersi var ve f^{-1} de sürekli ise f ye X den Y ye bir homeomorfizm (topolojik dönüşüm) denir. f bir homeomorfizm olduğu zaman X ile Y uzaylarına da topolojik olarak denktirler veya kısaca homeomorfiktirler denir [8].

Tanım 2.36. X bir topolojik uzay olsun. X in P ve Q gibi farklı noktaları için, X de sırasıyla P ve Q noktalarını içine alan A_P ve A_Q açık alt cümleleri $A_P \cap A_Q = \phi$ olacak biçimde bulunabilirse X topolojik uzayına bir Hausdorff uzayı denir [8].

Tanım 2.37. M bir topolojik uzay olsun. M için aşağıdaki önermeler doğru ise M ye bir n-boyutlu topolojik manifold (veya kısaca topolojik n-manifold) denir:

i) M bir Hausdorff uzayıdır.
ii) M nin her bir açık alt cümlesi E^n e veya E^n in bir açık alt cümlesine homeomorftur.
iii) M sayılabilir çoklukta açık cümlelerle örtülebilir [8].

Tanım 2.38. U , E^n de bir açık alt cümle olmak üzere bir

$$f : U \to \mathbb{R}$$

fonksiyonunun k yıncı mertebeden bütün kısmi türevleri var ve sürekli iseler f fonksiyonuna $\mathbb{C}^k$ sınıfından diferensiyellenebilirdir denir ve $\mathbb{C}^k$ sınıfından diferensiyellenebilir fonksiyonların cümlesi $C^k\left(U,\mathbb{R}\right)$ ile gösterilir. Böylece,

$$\mathbb{C}^k(U,\mathbb{R}) = \{f : f : U \to \mathbb{R} \text{ ve } f \text{ fonksiyonu } \mathbb{C}^k \text{ sınıfından}\}$$

$$\mathbb{C}^\infty(U,\mathbb{R}) = \{f : f \in \mathbb{C}^k(U,\mathbb{R}),\ k \in N\}$$

dir [8].

Tanım 2.39. U ve V, sırasıyla, E^n in birer açık alt cümlesi olsunlar. Bir

$$\begin{aligned} \Psi &: U \to V \\ \mathrm{x} &\to \Psi(x) = (f_1(x),\dots,f_n(x)) \end{aligned}$$

fonksiyonu için bütün

$$f_i : U \to \mathbb{R}, 1 \le i \le n$$

koordinat fonksiyonları C^k sınıfından iseler $\Psi \in C^k(U,V)$ dir denir ve f_i fonksiyonları da Ψ nin Öklid koordinat fonksiyonları olarak adlandırılır [8].

Tanım 2.40. E^n in iki açık alt cümlesi U ve V olsun. Bir

$$\Psi : U \to V$$

fonksiyonu için aşağıdaki önermeler sağlanıyor ise Ψ ye C^k sınıfından bir diffeomorfizm ve U ile V ye de k. dereceden diffeomorfiktirler denir

i) $\Psi \in C^k(U,V)$

ii) $\Psi^{-1} : V \to U$ var ve $\Psi^{-1} \in C^k(V,U)$.[8].

Tanım 2.41. M bir n-boyutlu topolojik manifold ve U da E^n in bir açık alt cümlesi olsun. Bu takdirde U bir Ψ homeomorfizmi ile M nin bir W açık alt cümlesine eşlenebilir. Böylece

$$\Psi : U \subset E^n \to W \subset M$$

(Ψ, W) ikilisine M de bir koordinat komşuluğu veya harita denir [8].

Tanım 2.42. $\mathbb{R}^n$ iç çarpım uzayı ile birleştirilmiş afin uzay E^n olsun. $P \in E^n$ ve $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ için $(P, \vec{v})$ sıralı ikilisine E^n afin uzayının P noktasındaki bir tanjant vektörü denir ve $\overrightarrow{v_p}$ ile gösterilir. Böylece E^n nin bir P noktasındaki tanjant vektörlerinin cümlesi $T_{E^n}(P)$ ile gösterilir [8].

Tanım 2.43. E^n in $P \in E^n$ noktasındaki tanjant uzayların birleşimi

$$\bigcup_{P \in E^n} T_{E^n}(P)$$

olsun. Buna göre, bir

$$\mathrm{X} : E^n \to \bigcup_{P \in E^n} T_{E^n}(P)$$

fonksiyonu için,

$$\pi o \mathrm{X} = I : E^n \xrightarrow{\text{özdeşlik}} E^n$$

olacak şekilde bir

$$\pi : \bigcup_{P \in E^n} T_{E^n}(P) \to E^n$$

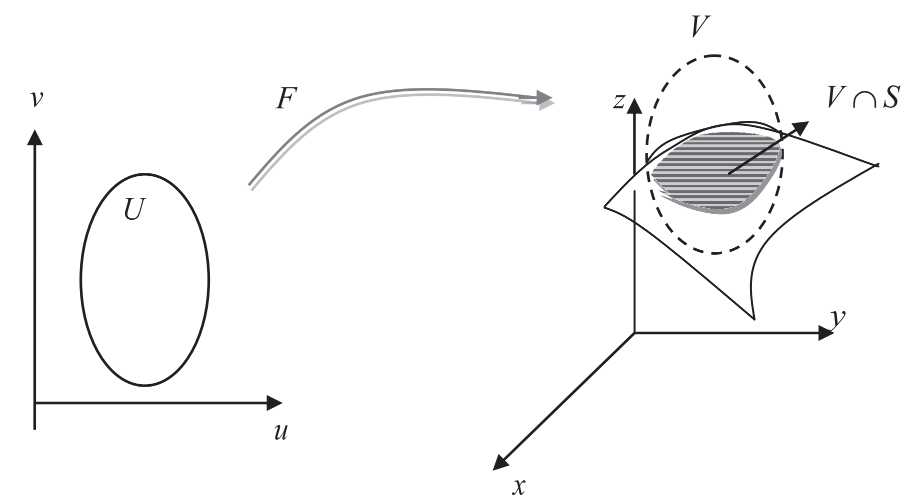
fonksiyonu mevcut ise X e E^n üstünde bir vektör alanı denir [8].

Tanım 2.44. $I \subseteq \mathbb{R}$ bir açık aralık olmak üzere,

$$\begin{aligned} \alpha : I &\to E^n \\ t &\to \alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \ldots, \alpha_n(t)) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı diferensiyellenebilir fonksiyonuna E^n de eğri denir. Burada $t \in I$ ya α eğrisinin parametresi, I, α ikilisine de α eğrisinin koordinat komşuluğu denir [8].

Tanım 2.45. S, E^3 uzayının bir alt kümesi olsun. Her $p \in S$ için p nin E^3 üzerinde bir V komşuluğu ve E^2 nin bir U açık cümlesinden $V \cap S$ ye bir F diffeomorfizmi varsa, S cümlesi E^3 de bir yüzeydir, denir.(Şekil 2.1)



F, U ikilisine S yüzeyinin bir parametrizasyonu veya bir yerel koordinat sistemi ve $V \cap S, F^{-1}$ ikilisine de p nin bir koordinat komşuluğu denir [11].

BÖLÜM 3. ORTONORMAL TABAN ve SPİNORLAR

Bu bölümde ortonormal taban yardımıyla spinorlar tanıtılmıştır.

$\mathbb{R}^3$ de orjin etrafındaki dönmelerin grubu olan $SO(3)$, 2×2 tipinde üniter matrisler grubu olan $SU(2)$ ye homomorfiktir. $SO(3)$ ün elemanları 3 reel bileşenli vektörleri harekete geçirirken, $SU(2)$ nin elemanları spinor adı verilen 2 kompleks bileşenli vektörleri harekete geçirirler.

Bu homomorfizm spinorlar aracılığıyla aşağıdaki şekilde gösterilebilir. Her

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \qquad 3.1$$

spinoru

$$\vec{a} + i\vec{b} = \psi^t \sigma \psi, \qquad \vec{c} = -\overline{\psi}^t \sigma \psi \qquad 3.2$$

eşitlikleri yardımıyla $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ vektörlerini tanımlar. Burada $\vec{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$, bileşenleri, kompleks, simetrik, 2×2 tipinde matrisler olan bir vektördür. Öyle ki,

$$e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad e_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Pauli matrisleri $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ matrisiyle, sırasıyla, soldan çarpılırsa $\vec{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ vektörünün $\sigma_i, 1 \le i \le 3$ bileşenleri

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad 3.3$$

olduğu görülür [14]. Ayrıca,

$$\psi = -\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \overline{\psi} = -\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{\psi_1} \\ \overline{\psi_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\overline{\psi_2} \\ \overline{\psi_1} \end{pmatrix}$$

elde edilir. Burada ψ , ψ nin eşini (veya eşleniğini), $\overline{\psi}$, ψ nin kompleks eşleniğini ve t de transpozu göstermektedir.

Şimdi 3.2 denklemini göz önüne alalım. $\vec{a} + i\vec{b} = x_1, x_2, x_3$ olmak üzere $x_i, 1 \le i \le 3$ bileşenlerini araştıralım. 3.1 , 3.2 ve 3.3 denklemlerinden

$$x_1 = \psi^t \sigma_1 \psi = \psi_1 \quad \psi_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \psi_1 \quad \psi_2 \begin{pmatrix} \psi_1 \\ -\psi_2 \end{pmatrix} = \psi_1^2 - \psi_2^2$$

$$x_2 = \psi^t \sigma_2 \psi = \psi_1 \quad \psi_2 \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \psi_1 \quad \psi_2 \begin{pmatrix} i\psi_1 \\ i\psi_2 \end{pmatrix} = i \ \psi_1^2 + \psi_2^2$$

$$x_3 = \psi^t \sigma_3 \psi = \psi_1 \quad \psi_2 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \psi_1 \quad \psi_2 \begin{pmatrix} -\psi_2 \\ -\psi_1 \end{pmatrix} = -2\psi_1\psi_2$$

elde edilir. Benzer şekilde $\vec{c} = c_1, c_2, c_3$ olmak üzere $c_i, 1 \le i \le 3$ bileşenleri

$$c_1 = -\psi^t \sigma_1 \psi = - \ -\overline{\psi_2} \quad \overline{\psi_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = - \ -\overline{\psi_2} \quad \overline{\psi_1} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ -\psi_2 \end{pmatrix} = \psi_1\overline{\psi_2} + \overline{\psi_1}\psi_2$$

$$c_2 = -\psi^t \sigma_2 \psi = - \ -\overline{\psi_2} \quad \overline{\psi_1} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = - \ -\overline{\psi_2} \quad \overline{\psi_1} \begin{pmatrix} i\psi_1 \\ i\psi_2 \end{pmatrix} = i \ \psi_1\overline{\psi_2} - \overline{\psi_1}\psi_2$$

$$c_3 = -\psi^t \sigma_3 \psi = - \ -\overline{\psi_2} \quad \overline{\psi_1} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = - \ -\overline{\psi_2} \quad \overline{\psi_1} \begin{pmatrix} -\psi_2 \\ -\psi_1 \end{pmatrix} = |\psi_1|^2 - |\psi_2|^2$$

dir. Böylece,

$$
\begin{aligned}
\vec{a}+i\vec{b} &= \left(\psi_1^{\,2}-\psi_2^{\,2},\, i\left(\psi_1^{\,2}+\psi_2^{\,2}\right),\, -2\psi_1\psi_2\right)\\
\vec{c} &= \left(\psi_1\overline{\psi_2}+\overline{\psi_1}\psi_2,\, i\left(\psi_1\overline{\psi_2}-\overline{\psi_1}\psi_2\right),\, \left|\psi_1\right|^2-\left|\psi_2\right|^2\right)
\end{aligned}
\tag{3.4}
$$

olur. Şimdi $\vec{a},\vec{b},\vec{c}\in\mathbb{R}^3$ vektörlerinin boylarını hesaplayalım.

$$
\overline{\vec{c}} = \left(\overline{\psi_1}\psi_2+\psi_1\overline{\psi_2},\, -i\left(\overline{\psi_1}\psi_2-\psi_1\overline{\psi_2}\right),\, \left|\psi_1\right|^2-\left|\psi_2\right|^2\right) = \vec{c}
$$

olduğundan $\vec{c}\in\mathbb{R}^3$ dür. O halde

$$
\begin{aligned}
\left\|\vec{c}\right\| &= \sqrt{\left(\psi_1\overline{\psi_2}+\overline{\psi_1}\psi_2\right)^2+i^2\left(\psi_1\overline{\psi_2}-\overline{\psi_1}\psi_2\right)^2+\left(\left|\psi_1\right|^2-\left|\psi_2\right|^2\right)^2}\\
&= \sqrt{\psi_1^{\,2}\overline{\psi_2}^{\,2}+\overline{\psi_1}^{\,2}\psi_2^{\,2}+2\left|\psi_1\right|^2\left|\psi_2\right|^2-\psi_1^{\,2}\overline{\psi_2}^{\,2}-\overline{\psi_1}^{\,2}\psi_2^{\,2}+2\left|\psi_1\right|^2\left|\psi_2\right|^2+\left|\psi_1\right|^4+\left|\psi_2\right|^4-2\left|\psi_1\right|^2\left|\psi_2\right|^2}\\
&= \sqrt{\left|\psi_1\right|^4+2\left|\psi_1\right|^2\left|\psi_2\right|^2+\left|\psi_2\right|^4}\\
&= \sqrt{\left(\left|\psi_1\right|^2+\left|\psi_2\right|^2\right)^2}\\
&= \left|\psi_1\right|^2+\left|\psi_2\right|^2\\
&= \overline{\psi}^{\,t}\psi
\end{aligned}
\tag{3.5}
$$

dir. $\vec{a}+i\vec{b}$ vektörü bir izotropik vektör olduğundan

$$
\begin{aligned}
\left\langle \vec{a}+i\vec{b},\vec{a}+i\vec{b}\right\rangle &= \left\langle \left(x_1,x_2,x_3\right),\left(x_1,x_2,x_3\right)\right\rangle\\
&= \left\langle \left(\psi_1^{\,2}-\psi_2^{\,2},\, i\left(\psi_1^{\,2}+\psi_2^{\,2}\right),\, -2\psi_1\psi_2\right),\left(\psi_1^{\,2}-\psi_2^{\,2},\, i\left(\psi_1^{\,2}+\psi_2^{\,2}\right),\, -2\psi_1\psi_2\right)\right\rangle\\
&= \left(\psi_1^{\,2}-\psi_2^{\,2}\right)^2+i^2\left(\psi_1^{\,2}+\psi_2^{\,2}\right)^2+\left(-2\psi_1\psi_2\right)^2\\
&= \psi_1^{\,4}+\psi_2^{\,4}-2\psi_1^{\,2}\psi_2^{\,2}-\psi_1^{\,4}-\psi_2^{\,4}-2\psi_1^{\,2}\psi_2^{\,2}+4\psi_1^{\,2}\psi_2^{\,2}\\
&=0
\end{aligned}
$$

dır. Böylece

$$\left\langle \vec{a}+i\vec{b},\vec{a}+i\vec{b}\right\rangle = \left\langle \vec{a},\vec{a}\right\rangle + \left\langle i\vec{b},\vec{a}\right\rangle + \left\langle \vec{a},i\vec{b}\right\rangle + \left\langle i\vec{b},i\vec{b}\right\rangle$$
$$= \left\|\vec{a}\right\|^2 + i\left\langle \vec{b},\vec{a}\right\rangle + i\left\langle \vec{a},\vec{b}\right\rangle + i^2\left\|\vec{b}\right\|^2$$
$$= \left\|\vec{a}\right\|^2 + 2i\left\langle \vec{a},\vec{b}\right\rangle - \left\|\vec{b}\right\|^2$$
$$=0+i0$$

olacağından

$$\left\|\vec{a}\right\|^2 = \left\|\vec{b}\right\|^2 \qquad 3.6$$

ve

$$\left\langle \vec{a},\vec{b}\right\rangle = 0 \qquad 3.7$$

dır. Şimdi $\vec{a}+i\vec{b}$ vektörünün boyunu hesaplayalım.

$$\left\|\vec{a}+i\vec{b}\right\|^2 = \left\langle \vec{a}+i\vec{b},\overline{\vec{a}+i\vec{b}}\right\rangle = \left\langle \vec{a}+i\vec{b},\vec{a}-i\vec{b}\right\rangle = \left\|\vec{a}\right\|^2 + \left\|\vec{b}\right\|^2 + i\left\langle \vec{b},\vec{a}\right\rangle - i\left\langle \vec{a},\vec{b}\right\rangle = \left\|\vec{a}\right\|^2 + \left\|\vec{b}\right\|^2$$

dır. Son denklem ve 3.4 denklemi göz önüne alınırsa

$$\left\|\vec{a}\right\|^2 + \left\|\vec{b}\right\|^2 = \left\|\vec{a}+i\vec{b}\right\|^2 = \left\langle \psi_1{}^2-\psi_2{}^2, i\ \psi_1{}^2+\psi_2{}^2\ , -2\psi_1\psi_2\ ,\ \overline{\psi_1{}^2}-\overline{\psi_2{}^2}, \bar{i}\ \overline{\psi_1{}^2}+\overline{\psi_2{}^2}\ , -\overline{2\psi_1\psi_2}\ \right\rangle$$
$$= \psi_1{}^2-\psi_2{}^2\ \ \overline{\psi_1{}^2}-\overline{\psi_2{}^2}\ + i\bar{i}\ \psi_1{}^2+\psi_2{}^2\ \ \overline{\psi_1{}^2}+\overline{\psi_2{}^2}\ + 4\psi_1\overline{\psi_1}\psi_2\overline{\psi_2}$$
$$= |\psi_1|^4 + |\psi_2|^4 - \psi_1{}^2\overline{\psi_2{}^2} - \overline{\psi_1{}^2}\psi_2{}^2 + |\psi_1|^4 + |\psi_2|^4 + \psi_1{}^2\overline{\psi_2{}^2} + \overline{\psi_1{}^2}\psi_2{}^2 + 4|\psi_1|^2|\psi_2|^2$$
$$=2\left(|\psi_1|^4 + |\psi_2|^4 + 2|\psi_1|^2|\psi_2|^2\right)$$
$$=2\left(|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2\right)^2 \qquad (3.8)$$

bulunur. O halde 3.8 denklemi ve 3.5 denklemlerinden

$$\|\vec{a}\| = \|\vec{b}\| = \|\vec{c}\| = \overline{\psi}^{t}\psi$$

dir. Yani $\vec{a},\vec{b},\vec{c} \in \mathbb{R}^3$ vektörlerinin boyları eşittir. (3.2) denklemini göz önünde bulundurarak $\langle \vec{a} + i\vec{b}, \vec{c} \rangle$ iç çarpımını hesaplayalım.

$$\begin{aligned}
\langle \vec{a} + i\vec{b}, \vec{c} \rangle &= \left\langle \left(\psi_1^2 - \psi_2^2, i(\psi_1^2 + \psi_2^2), -2\psi_1\psi_2\right), \left(\psi_1\overline{\psi_2} + \overline{\psi_1}\psi_2, i(\psi_1\overline{\psi_2} - \overline{\psi_1}\psi_2), |\psi_1|^2 - |\psi_2|^2\right) \right\rangle \\
&= (\psi_1^2 - \psi_2^2)(\psi_1\overline{\psi_2} + \overline{\psi_1}\psi_2) + i^2(\psi_1^2 + \psi_2^2)(\psi_1\overline{\psi_2} - \overline{\psi_1}\psi_2) + (-2\psi_1\psi_2)(|\psi_1|^2 - |\psi_2|^2) \\
&= \psi_1^3\overline{\psi_2} + \psi_1^2\overline{\psi_1}\psi_2 - \psi_2^2\overline{\psi_2}\psi_1 - \psi_2^3\overline{\psi_1} - \psi_1^3\overline{\psi_2} + \psi_1^2\overline{\psi_1}\psi_2 - \psi_2^2\overline{\psi_2}\psi_1 + \psi_2^3\overline{\psi_1} - 2\psi_1\psi_2|\psi_1|^2 + 2\psi_1\psi_2|\psi_2|^2 \\
&= 2\psi_1^2\overline{\psi_1}\psi_2 - 2\psi_2^2\overline{\psi_2}\psi_1 - 2\psi_1\psi_2|\psi_1|^2 + 2\psi_1\psi_2|\psi_2|^2 \\
&= 2\psi_1^2\overline{\psi_1}\psi_2 - 2\psi_2^2\overline{\psi_2}\psi_1 - 2\psi_1\psi_2\overline{\psi_1}\psi_1 + 2\psi_1\psi_2\overline{\psi_2}\psi_2 \\
&= 0
\end{aligned}$$

dır. Bu son denklem ve (3.7) denkleminden

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle = \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle = 0$$

dır. Bu ifade eder ki $\vec{a},\vec{b},\vec{c} \in \mathbb{R}^3$ vektörleri karşılıklı olarak ortogonaldir. İlave olarak $\langle \vec{a}\Lambda\vec{b}, \vec{c} \rangle = \det(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) > 0$ dır. O halde $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ sıralı üçlüsü bir sağ sistemdir.

Tersine; aynı büyüklükte verilen karşılıklı olarak ortogonal ve $\langle \vec{a}\Lambda\vec{b}, \vec{c} \rangle > 0$ olan $\vec{a},\vec{b},\vec{c} \in \mathbb{R}^3$ vektörlerine $\vec{a} + i\vec{b} = \psi^{t}\sigma\psi$, $\vec{c} = -\psi^{t}\sigma\psi$ denklemleriyle verilen bir ψ spinoru karşılık gelir.

Ayrıca ψ spinoru da aynı ψ spinorunda olduğu gibi $SU(2)$ dönüşümü altında yeni bir spinora dönüşür. Yani herhangi bir $U \in SU(2)$ için $U\psi = U\psi$ dır.

Herhangi bir $U \in SU(2)$ matrisi için $\psi' = U\psi$ spinoru için

$$\overline{\psi'}^{t}\psi' = \left(\overline{U\psi}\right)^{t} U\psi = \overline{\psi}^{t}\,\overline{U}^{t} U\psi = \overline{\psi}^{t}\psi$$

dir. Böylece, ψ' spinorunu tanımlamada kullanılan $\vec{a}',\vec{b}',\vec{c}'$ vektörlerinin büyüklüğü, ψ spinorunu tanımlamada kullanılan $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ vektörlerinin büyüklüğüne eşittir. Bu yüzden $SU\ \ 2$ nin her bir elemanı, $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ ortogonal tabanını $\vec{a}',\vec{b}',\vec{c}'$ ortogonal tabanına dönüştüren bir dönüşüm oluşturur ki bu dönüşüm ikiye-birdir. Yani $SU\ \ 2$ nin U ve $-U$ şeklinde iki elemanı $\mathbb{R}^3$ ün aynı sıralı üçlüsünü oluşturur. $SU\ \ 2$ den aldığımız U elemanı ψ' spinorunu oluştururken $-U$ elemanı $-\psi'$ spinorunu oluşturur. 3.4 denkleminde ψ spinoru yerine $-\psi$ spinorunu aldığımız takdirde sonuç değişmemektedir. Gerçekten de,

$$\vec{a}+i\vec{b}= \ -\psi_1\ ^2 - \ -\psi_2\ ^2, i\ \ -\psi_1\ ^2 + \ -\psi_2\ ^2\ , -2\ -\psi_1\ \ -\psi_2\ \ ,$$
$$\vec{c}= \ -\psi_1\ \ \overline{-\psi_2}\ + \overline{-\psi_1}\ \ -\psi_2\ , i\ \ -\psi_1\ \ \overline{-\psi_2}\ - \overline{-\psi_1}\ \ -\psi_2\ , \left|-\psi_1\right|^2 - \left|-\psi_2\right|^2$$

şeklinde olup 3.4 denklemiyle aynı sonucu vermektedir. Bu ifade eder ki; homomorfizm ikiye-bir tipindedir [14].

Önerme 3.1. ϕ ve ψ herhangi iki spinor ve λ,μ de herhangi iki karmaşık sayı olmak üzere aşağıdaki eşitlikler geçerlidir [14].

1) $\overline{\phi^t\sigma\psi} = -\phi^t\sigma\psi$

2) $\lambda\phi+\mu\psi\ \ = \bar{\lambda}\phi + \bar{\mu}\psi$

3) $\psi = -\psi$

İspat.

1) Bileşenleri kompleks, simetrik, 2×2 tipinde matrisler olan $\vec{\sigma} = \ \sigma_1,\sigma_2,\sigma_3$ vektörünü göz önüne alalım.

$\sigma_1 = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ için,

$$\overline{\phi^t\sigma_1\psi} = \overline{\phi_1 \quad \phi_2 \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix}} = \overline{\phi_1} \quad \overline{\phi_2}\begin{pmatrix}\overline{\psi_1}\\ -\overline{\psi_2}\end{pmatrix} = \overline{\phi_1}\,\overline{\psi_1} - \overline{\phi_2}\,\overline{\psi_2} \qquad 3.9.a$$

$$-\phi'^{t}\sigma_1\psi = - \quad -\overline{\phi_2} \quad \overline{\phi_1}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\overline{\psi_2}\\ \overline{\psi_1}\end{pmatrix} = - \quad -\overline{\phi_2} \quad \overline{\phi_1}\begin{pmatrix}-\overline{\psi_2}\\ -\overline{\psi_1}\end{pmatrix} = -\overline{\phi_2}\,\overline{\psi_2} + \overline{\phi_1}\,\overline{\psi_1} \qquad 3.9.b$$

dir.

$\sigma_2 = \begin{pmatrix}i & 0\\ 0 & i\end{pmatrix}$ için,

$$\overline{\phi^t\sigma_2\psi} = \overline{\phi_1 \quad \phi_2 \begin{pmatrix}i & 0\\ 0 & i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix}} = \overline{\phi_1} \quad \overline{\phi_2}\begin{pmatrix}-i\overline{\psi_1}\\ -i\overline{\psi_2}\end{pmatrix} = -i \quad \overline{\phi_1}\,\overline{\psi_1} + \overline{\phi_2}\,\overline{\psi_2} \qquad 3.10.a$$

$$-\phi'^{t}\sigma_2\psi = - \quad -\overline{\phi_2} \quad \overline{\phi_1}\begin{pmatrix}i & 0\\ 0 & i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\overline{\psi_2}\\ \overline{\psi_1}\end{pmatrix} = - \quad -\overline{\phi_2} \quad \overline{\phi_1}\begin{pmatrix}-i\overline{\psi_2}\\ i\overline{\psi_1}\end{pmatrix} = -i \quad \overline{\phi_2}\,\overline{\psi_2} + \overline{\phi_1}\,\overline{\psi_1} \qquad 3.10.b$$

dir.

Son olarak, $\sigma_3 = \begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$ için,

$$\overline{\phi^t\sigma_3\psi} = \overline{\phi_1 \quad \phi_2 \begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix}} = \overline{\phi_1} \quad \overline{\phi_2}\begin{pmatrix}-\overline{\psi_2}\\ -\overline{\psi_1}\end{pmatrix} = - \quad \overline{\phi_1}\,\overline{\psi_2} + \overline{\phi_2}\,\overline{\psi_1} \qquad 3.11.a$$

$$-\phi'^{t}\sigma_3\psi = - \quad -\overline{\phi_2} \quad \overline{\phi_1}\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\overline{\psi_2}\\ \overline{\psi_1}\end{pmatrix} = - \quad -\overline{\phi_2} \quad \overline{\phi_1}\begin{pmatrix}-\overline{\psi_1}\\ \overline{\psi_2}\end{pmatrix} = - \quad \overline{\phi_2}\,\overline{\psi_1} + \overline{\phi_1}\,\overline{\psi_2} \qquad 3.11.b$$

$3.9.a - 3.11.b$ denklemlerinden istenen görülür.

2) $\lambda\phi+\mu\psi \;=\begin{pmatrix} \overline{-\lambda\phi_2-\mu\psi_2} \\ \overline{\lambda\phi_1+\mu\psi_1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\overline{\lambda}\overline{\phi_2}-\overline{\mu}\overline{\psi_2} \\ \overline{\lambda}\overline{\phi_1}+\overline{\mu}\overline{\psi_1} \end{pmatrix}=\overline{\lambda}\begin{pmatrix} -\overline{\phi_2} \\ \overline{\phi_1} \end{pmatrix}+\overline{\mu}\begin{pmatrix} -\overline{\psi_2} \\ \overline{\psi_1} \end{pmatrix}=\overline{\lambda}\phi+\overline{\mu}\psi$

3) $\psi=\begin{pmatrix} -\overline{\psi_2} \\ \overline{\psi_1} \end{pmatrix}\Rightarrow\psi=\begin{pmatrix} -\overline{\overline{\psi_1}} \\ \overline{\overline{\psi_2}} \end{pmatrix}=-\psi$ □

Önerme 3.2. Herhangi ϕ ve ψ spinor çiftleri için $\phi^t\sigma\psi=\psi^t\sigma\phi$ dir [14].

İspat. $\vec{\sigma}=\;\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3$ vektörünün bileşenleri olan $\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3$ matrisleri simetriktir. O

halde, $\sigma_1=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ için,

$$\phi^t\sigma_1\psi=\;\phi_1\quad\phi_2\;\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}=\;\phi_1\quad\phi_2\;\begin{pmatrix} \psi_1 \\ -\psi_2 \end{pmatrix}=\phi_1\psi_1-\phi_2\psi_2 \qquad 3.12.a$$

$$\psi^t\sigma_1\phi=\;\psi_1\quad\psi_2\;\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}=\;\psi_1\quad\psi_2\;\begin{pmatrix} \phi_1 \\ -\phi_2 \end{pmatrix}=\phi_1\psi_1-\phi_2\psi_2 \qquad 3.12.b$$

dir.

$\sigma_2=\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$ için,

$$\phi^t\sigma_2\psi=\;\phi_1\quad\phi_2\;\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}=\;\phi_1\quad\phi_2\;\begin{pmatrix} i\psi_1 \\ i\psi_2 \end{pmatrix}=i\;\;\phi_1\psi_1+\phi_2\psi_2 \qquad 3.13.a$$

$$\psi^t\sigma_2\phi=\;\psi_1\quad\psi_2\;\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}=\;\psi_1\quad\psi_2\;\begin{pmatrix} i\phi_1 \\ i\phi_2 \end{pmatrix}=i\;\;\phi_1\psi_1+\phi_2\psi_2 \qquad 3.13.b$$

dir.

$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ için,

$$\phi^t \sigma_3 \psi = \phi_1 \quad \phi_2 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \phi_1 \quad \phi_2 \begin{pmatrix} -\psi_2 \\ -\psi_1 \end{pmatrix} = - \ \phi_1\psi_2 + \phi_2\psi_1 \qquad 3.14.a$$

$$\psi^t \sigma_3 \phi = \psi_1 \quad \psi_2 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = \psi_1 \quad \psi_2 \begin{pmatrix} -\phi_2 \\ -\phi_1 \end{pmatrix} = - \ \phi_1\psi_2 - \phi_2\psi_1 \qquad 3.14.b$$

dir. Böylece son olarak da $3.12.a - 3.14.b$ denklemlerinden ispat tamamlanır. .□

Örnek 3.3. Özel olarak $\psi = \ 1 \quad 0\ ^t$ olarak seçilirse $\psi_1 = 1$ ve $\psi_2 = 0$ olur. Dolayısıyla $\psi = \ -\overline{\psi_2} \quad \overline{\psi_1}\ ^t = \ 0 \quad 1$ olur. Bu seçim 3.4 denkleminde yerine yazılırsa

$$\vec{a} + i\vec{b} = \ \psi_1{}^2 - \psi_2{}^2, i\ \psi_1{}^2 + \psi_2{}^2\ , -2\psi_1\psi_2\ = \ 1^2 - 0^2, i\ 1^2 + 0^2\ , -2.1.0\ = \ 1, i, 0\ = \ 1,0,0\ + i\ 0,1,0\ ,$$

$$\vec{c} = \ \psi_1\overline{\psi_2} + \overline{\psi_1}\psi_2, i\ \psi_1\overline{\psi_2} - \overline{\psi_1}\psi_2\ , |\psi_1|^2 - |\psi_2|^2\ = \ 1.\overline{0} + 0.\overline{1}, i\ 1.\overline{0} - 0.\overline{1}\ , |1|^2 - |0|^2\ = \ 0,0,1$$

elde edilir. Bu ifade eder ki a, b, c üçlüsü $\mathbb{R}^3$ ün bir kanonik bazıdır.

Önerme 3.4. Eğer ψ sıfırdan farklı bir spinorsa ψ, ψ ikilisi lineer bağımsızdır [14].

İspat: Gerçekten de

$$\begin{vmatrix} \psi_1 & -\overline{\psi_2} \\ \psi_2 & \overline{\psi_1} \end{vmatrix} = \psi_1\overline{\psi_1} + \psi_2\overline{\psi_2} = |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2$$

dir. Bu ifade eder ki ψ sıfırdan farklı olmak üzere ψ, ψ ikilisi lineer bağımsızdır.

BÖLÜM 4. E^3 ÖKLİD UZAYINDA EĞRİLER ve SPİNOR FRENET DENKLEMLERİ

Bu bölümde E^3 uzayında eğriler, Frenet türev denklemleri ve Frenet türev denklemlerinin spinorlar cinsinden ifadesi verilmiştir.

4.1. Eğriler ve Frenet Türev Denklemleri

Tanım 4.1.1. $I \subseteq \mathbb{R}$ bir açık aralık olmak üzere,

$$\begin{aligned} \alpha : I &\to E^3 \\ t &\to \alpha(t) = \left(\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t)\right) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı diferensiyellenebilir fonksiyonuna E^3 de eğri denir Burada $t \in I$ ya α eğrisinin parametresi, (I, α) ikilisine de α eğrisinin koordinat komşuluğu denir [8].

Tanım 4.1.2. E^3 de M eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $\alpha : I \to E^3$ fonksiyonunun Öklid koordinat fonksiyonları $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ olmak üzere $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $\alpha(t) \in M$ ve

$$\alpha'(t) = \left(\left.\frac{d\alpha_1}{dt}\right|_t, \left.\frac{d\alpha_2}{dt}\right|_t, \left.\frac{d\alpha_3}{dt}\right|_t \right)$$

dır. $(\alpha(t), \alpha'(t)) \in T_{E^3}(t)$ tanjant vektörüne, M eğrisinin $t \in I$ parametre değerine karşılık gelen $\alpha(t)$ noktasında, (I, α) koordinat komşuluğuna göre hız vektörü denir [8].

Tanım 4.1.3. $M \subset E^3$ eğrisi I,α koordinat komşuluğu ile verilsin.

$$\|\alpha'\| : I \to \mathbb{R}$$

$$\text{t} \to \|\alpha'\| \;\; t \;\; = \|\alpha' \;\; t \;\; \| = \sqrt{\sum_{i=1}^{3} \left(\frac{d\alpha_i}{dt} \;\; t \;\; \right)^2}$$

şeklinde tanımlı $\|\alpha'\|$ fonksiyonuna, M eğrisinin I,α koordinat komşuluğuna göre skaler hız fonksiyonu ve $\|\alpha' \;\; t \;\; \|$ reel sayısına da M nin I,α koordinat komşuluğuna göre $\alpha \;\; t$ noktasındaki skaler hızı denir [8].

Tanım 4.1.4. M eğrisi I,α koordinat komşuluğu ile verilmiş olsun. $\forall s \in I$ için

$$\|\alpha' \;\; s \;\; \| = 1$$

ise M eğrisi I,α koordinat komşuluğuna göre birim hızlı eğridir denir. Bu durumda $s \in I$ parametresine, eğrinin yay parametresi adı verilir [8].

Tanım 4.1.5. Her noktasındaki hız vektörü sıfırdan farklı olan eğriye regüler eğri denir [8].

Teorem 4.1.6. E^3 de regüler her eğrinin, birim hızlı olacak şekilde bir koordinat komşuluğu vardır [8].

Tanım 4.1.7. E^3 uzayında bir $\alpha : I \to E^3$ eğrisi için

$$\vec{t} \;\; t \;\; = \frac{\alpha' \;\; t}{\|\alpha' \;\; t \;\; \|}$$

eşitliği ile belirli $\vec{t} \;\; t$ vektörüne, α eğrisinin $\alpha \;\; t$ noktasındaki birim teğet vektörü denir [8].

Tanım 4.1.8. E^3 uzayında bir $\alpha : I \to E^3$ eğrisi için

$$\vec{n}(t) = \vec{b}(t) \Lambda \vec{t}(t)$$

eşitliği ile belirli $\vec{n}(t)$ vektörüne, α eğrisinin $\alpha(t)$ noktasındaki birinci dik vektörü (asli normali) denir [8].

Tanım 4.1.9. E^3 uzayında bir $\alpha : I \to E^3$ eğrisi için

$$\vec{b}(t) = \frac{\alpha'(t) \Lambda \alpha''(t)}{\left\| \alpha'(t) \Lambda \alpha''(t) \right\|}$$

eşitliği ile tanımlı $\vec{b}(t)$ vektörüne, α eğrisinin $\alpha(t)$ noktasındaki ikinci dik vektörü (binormali) denir [8].

Tanım 4.1.10. $\vec{t}(t), \vec{n}(t), \vec{b}(t)$ vektörlerine, $\alpha : I \to E^3$ eğrisinin $\alpha(t)$ noktasındaki Frenet vektörleri denir ve

$$\left\{ \vec{t}(t), \vec{n}(t), \vec{b}(t) \right\}$$

kümesine α eğrisinin $\alpha(t)$ noktasındaki Frenet çatısı denir [8].

Eğer M eğrisi, (I, α) koordinat komşuluğu ile verilmiş ise $s \in I$ yay-parametresi olmak üzere,

$$\vec{t} = \alpha'$$
$$\vec{n} = \frac{\alpha''}{\left\| \alpha'' \right\|}$$
$$\vec{b} = \vec{t} \Lambda \vec{n}$$

dir [8].

Tanım 4.1.11. $M \subset E^3$ eğrisi $\;I,\alpha\;$ koordinat komşuluğu ile verilsin. $t \in I$ ya karşılık gelen $\alpha\;t$ noktasındaki Frenet 3-ayaklısı, $\;\vec{t}\;t\;,\vec{n}\;t\;,\vec{b}\;t\;$ olsun. Buna göre

$$k_1 : I \to \mathbb{R},\qquad\qquad k_2 : I \to \mathbb{R},$$

$$\mathrm{t} \to \mathrm{k}_1\;t\; = \left\langle \vec{t}'\;t\;,\vec{n}\;t\; \right\rangle \quad \text{ve} \quad \mathrm{t} \to \mathrm{k}_2\;t\; = \left\langle \vec{n}'\;t\;,\vec{b}\;t\; \right\rangle$$

şeklinde tanımlı $k_i,\; 1 \le i \le 2$ fonksiyonuna M eğrisinin i-yinci eğrilik fonksiyonu ve $t \in I$ için $\mathrm{k}_i\;t$ reel sayısına da $\alpha\;t$ noktasında M nin i-yinci eğriliği denir. Bundan sonra özel olarak k_1 ve k_2 eğriliklerini sırası ile κ ve τ ile göstereceğiz ve bunları, eğrinin eğrilik ve burulma fonksiyonları olarak adlandıracağız [8].

Teorem 4.1.12. $M \subset E^3$ eğrisi $\;I,\alpha\;$ koordinat komşuluğu ile verilsin. $s \in I$ yay-parametresi olmak üzere, $\alpha\;s$ noktasında birinci ve ikinci eğrilik fonksiyonları, sırasıyla, $\kappa\;s\;,\;\tau\;s$ ve Frenet 3-ayaklısı $\;\vec{t}\;s\;,\vec{n}\;s\;,\vec{b}\;s\;$ ise

1) $\vec{t}'\;s\; = \kappa\;s\;\vec{n}\;s$

2) $\vec{n}'\;s\; = -\kappa\;s\;\vec{t}\;s\; + \tau\;s\;\vec{b}\;s$ $\qquad\qquad$ 4.1.1

3) $\vec{b}'\;s\; = -\tau\;s\;\vec{n}\;s$

dir [8].

4.2. Spinorlar-Frenet Türev Denklemleri İlişkisi

$\alpha : I \to E^3$, birim hızlı regüler bir eğri ve bu eğrinin Frenet çatısı $\;t\;s\;,n\;s\;,b\;s$ olmak üzere Frenet türev denklemlerinin

$$\vec{t}'\ s\ = \kappa\ s\ \vec{n}\ s$$

$$\vec{n}'\ s\ = -\kappa\ s\ \vec{t}\ s\ + \tau\ s\ \vec{b}\ s$$

$$\vec{b}'\ s\ = -\tau\ s\ \vec{n}\ s$$

olduğunu biliyoruz. Spinorlarla ilgili verilen bölüm 3 de ki sonuçlara göre

$$\vec{n} + i\vec{b} = \psi^{t}\sigma\psi\,, \qquad \vec{t} = -\psi^{t}\sigma\psi\,, \qquad 4.2.1$$

ve $\overline{\psi}^{t}\psi = 1$ olacak şekilde bir ψ spinoru vardır. Böylece ψ spinoru $\vec{n}, \vec{b}, \vec{t}$ üçlüsünü temsil eder ve $\dfrac{d\psi}{ds}$, Frenet denklemleriyle verilen α eğrisi boyunca $\vec{n}, \vec{b}, \vec{t}$ üçlüsünün değişimine karşılık gelir.

Önerme 3.4. e göre ψ, ψ , iki bileşenli spinorlar için bir taban olduğundan dolayı öyle f ve g fonksiyonları (muhtemelen kompleks değişkenli) vardır ki

$$\frac{d\psi}{ds} = f\psi + g\psi \qquad 4.2.2$$

yazılışı tek türlüdür. 4.2.1 denklemindeki $\vec{n} + i\vec{b} = \psi^{t}\sigma\psi$ nin s ye göre türevini alırsak

$$\frac{dn}{ds} + i\frac{db}{ds} = \frac{d\psi^{t}}{ds}\sigma\psi + \psi^{t}\sigma\frac{d\psi}{ds} \qquad 4.2.3$$

bulunur. Eğer 4.1.1 ve 4.2.2 denklemleri 4.2.3 denkleminde yerine yazılırsa

$$
\begin{aligned}
-\kappa\vec{t} - i\tau(\vec{n} + i\vec{b}) &= (f\psi + g\psi)^{t}\sigma\psi + \psi^{t}\sigma(f\psi + g\psi) \\
&= f(\psi^{t}\sigma\psi + \psi^{t}\sigma\psi) + g(\psi^{t}\sigma\psi + \psi^{t}\sigma\psi) \\
&= 2f(\psi^{t}\sigma\psi) - 2g(-\psi^{t}\sigma\psi) \\
&= 2f(\vec{n} + i\vec{b}) - 2g(\vec{t})
\end{aligned}
$$

bulunur. σ matrisleri simetrik olduğundan dolayı $\psi^{t}\sigma\psi = \psi^{t}\sigma\psi$ dır. Böylece

$$-\kappa\vec{t} - i\tau(\vec{n} + i\vec{b}) = 2f(\vec{n} + i\vec{b}) - 2g(\vec{t})$$

elde edilir. Burada son denklemden

$$f = \frac{-i\tau}{2}, \quad g = \frac{\kappa}{2} \tag{4.2.4}$$

olduğu görülür. O halde (4.2.2) denklemi ve (4.2.4) denklemleri dikkate alınırsa

$$
\begin{aligned}
\frac{d\psi}{ds} &= -i\frac{\tau}{2}\psi + \frac{\kappa}{2}\psi \\
&= \frac{1}{2}(-i\tau\psi + \kappa\psi)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Böylece aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 4.2.1. Kabul edelim ki iki bileşenli ψ spinoru, birim hızlı bir eğrinin $\{\vec{n}, \vec{b}, \vec{t}\}$ üçlüsünü temsil etsin. Bu takdirde, Frenet türev formülleri

$$\frac{d\psi}{ds} = \frac{1}{2}(-i\tau\psi + \kappa\psi)$$

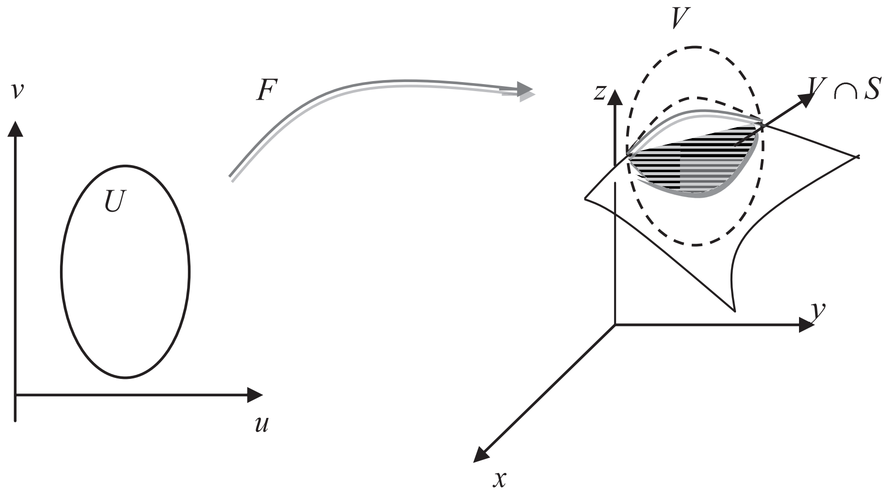
ile verilen bir tek spinor denklemine denktir. Burada κ ve τ, sırasıyla, birim hızlı eğrinin eğriliği ve burulmasıdır [14].

BÖLÜM 5. E^3 ÖKLİD UZAYINDA YÜZEYLER ve SPİNOR-DARBOUX DENKLEMLERİ

Bu bölümde E^3 Öklid uzayında yüzeyler kısaca tanıtılmış ve Darboux türev denklemlerinin spinorlar cinsinden ifadesi verilmiştir.

5.1. E^3 Öklid Uzayında Yüzeyler ve Darboux Türev Denklemleri

Tanım 5.1.1. S, E^3 uzayının bir alt kümesi olsun. Her $p \in S$ için p nin E^3 üzerinde bir komşuluğu V ve $U \subset E^2$ bir açık alt cümle olmak üzere $F: U \to V \cap S$ fonksiyonu bir diffeomorfizm ise S ye E^3 de bir yüzey denir. (Şekil 5.1.1.)



Ayrıca F, U ikilisine S yüzeyinin bir parametrizasyonu veya bir yerel koordinat sistemi ve $V \cap S, F^{-1}$ ikilisine de p nin bir koordinat komşuluğu denir

Teorem 5.1.2. U, E^2 nin açık bir alt cümlesi ve $f: U \to \mathbb{R}$ diferensiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda

$$M = \{ (p_1, p_2, f(p_1, p_2)) : (p_1, p_2) \in U \}$$

eşitliği ile verilen M cümlesi bir yüzeydir [11].

Tanım 5.1.3. $\alpha : I \to E^3$ eğrisi ve bir S yüzeyi verilsin.

$$\forall t \in I \text{ için } \alpha(t) \in S$$

ise α eğrisi S yüzeyi üstünde (veya içinde) bir eğridir denir. [11].

Tanım 5.1.4. p, S yüzeyinin bir noktası ve $\overrightarrow{v_p} \in T_p(E^3)$ olsun. $\overrightarrow{v_p}$ tanjant vektörü S içinde p den geçen en az bir eğrinin hız vektörü ise $\overrightarrow{v_p}$ vektörü p noktasında S ye teğettir denir. p noktasında S ye teğet olan bütün vektörlerin cümlesi $T_p(S)$ ile gösterilir [11].

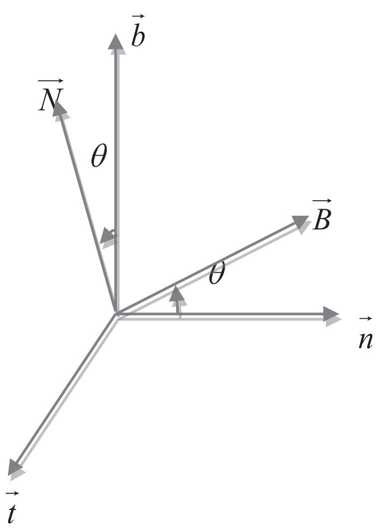
Tanım 5.1.5. S, E^3 de bir yüzey olmak üzere,

$$Z : S \to \bigcup_{p \in S} T_p(E^3) \quad , \quad Z(p) \in T_p(E^3)$$

biçiminde bir Z fonksiyonuna S üstünde bir (Öklidyen) vektör alanı denir. Her $p \in S$ için, $\overrightarrow{Z_p} \in T_p(S)$ ise Z ye S üstünde teğet vektör alanı denir. Her $p \in S$ için, $\overrightarrow{Z_p}$ vektörü $T_p(S)$ uzayına dik ise Z ye S üstünde dik (normal) vektör alanı denir [11].

Tanım 5.1.6. E^3, 3-boyutlu Öklid uzayında bir S yüzeyi üzerinde diferensiyellenebilir bir birim normal vektör alanına S üzerinde bir yönlendirme denir. Üzerinde bir yönlendirme seçilmiş olan bir yüzeye yönlendirilmiş yüzey denir [9].

Tanım 5.1.7. E^3 Öklid uzayında bir S yönlendirilmiş yüzeyi üzerinde bir α eğrisi verilsin. Bu α eğrisinin her noktasına Frenet üç ayaklısı dediğimiz bir üç ayaklı karşılık getirilebilir olduğunu biliyoruz. Şimdi de eğrinin üzerinde bulunduğu yüzeyle ilgili formülleri kapsayacak olan diğer bir üç ayaklı tanımlayalım. Öyle ki, eğrinin bir $\alpha \;\; s$ noktasındaki teğet birim vektörü $\vec{t}$ olsun. Yüzeyin bu noktada teğet düzlemine çizilen dikme ise bu yüzeyin söz konusu noktadaki normalini belirtsin. Bu dikme üzerinde yönü yüzeyin belirlenmiş bir tarafına doğru seçilen $\vec{N}$ birim vektörüne yüzeyin $\alpha \;\; s$ noktasındaki normal birim vektörü denir. $\vec{t}$ ve $\vec{N}$ verilince $\vec{t}\Lambda\vec{N}$ ile tanımlanan $\vec{B}$ vektörü alınırsa $\vec{t}\,,\vec{N}\,,\vec{B}$ gibi yeni bir üç ayaklı elde edilir ve Darboux üç ayaklısı adını alır. Bu ifade eder ki yüzey üzerinde bir α eğrisi verildiğinde $\vec{t},\vec{n},\vec{b}$ den ibaret olan Frenet ve $\vec{t}\,,\vec{N}\,,\vec{B}$ den ibaret olan Darboux üç ayaklısı vardır. $\vec{t}$ ayrıtları aynı olan bu iki üç ayaklı birbirine sıkı sıkıya bağlıdır.(Şekil 5.1.2)



İki durumda da teğet vektörleri aynı olduğu için $\vec{n}$ ve $\vec{b}$ düzlemindeki dönmeyle $\vec{B}$ ve $\vec{N}$ çiftini oluşturan θ açısı vardır. Bu dönüşüme karşılık gelen matris aşağıdaki şekilde gösterilebilir.

$$\begin{bmatrix} \vec{t} \\ \vec{B} \\ \vec{N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{t} \\ \vec{n} \\ \vec{b} \end{bmatrix} \qquad 5.1.1$$

Son denklemden

$$\begin{aligned} \vec{t} &= \vec{t} \\ \vec{B} &= \vec{n}\cos\theta + \vec{b}\sin\theta \\ \vec{N} &= -\vec{n}\sin\theta + \vec{b}\cos\theta \end{aligned} \qquad 5.1.2$$

dir. 5.1.2 denkleminde $\vec{B}$ eşitliği $\cos\theta$ ve $\vec{N}$ eşitliği $-\sin\theta$ ile çarpılıp taraf tarafa toplanırsa

$$\cos\theta\vec{B} - \sin\theta\vec{N} = \vec{n}\,(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = \vec{n}$$

elde edilir.

Teorem 5.1.8. E^3 Öklid uzayında bir S yönlendirilmiş yüzeyi üzerinde bir α eğrisi verilsin. α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki Darboux çatısı $\{\vec{t}(s), \vec{B}(s), \vec{N}(s)\}$ olmak üzere Darboux türev formülleri

1) $\vec{t}\,' = \kappa\cos\theta\vec{B} - \kappa\sin\theta\vec{N}$

2) $\vec{B}\,' = -\kappa\vec{t}\cos\theta + \vec{N}\left(\tau + \dfrac{d\theta}{ds}\right)$

3) $\vec{N}\,' = \kappa\vec{t}\sin\theta - \vec{B}\left(\tau + \dfrac{d\theta}{ds}\right)$

dir [17].

İspat. 5.1.2 denklemini göz önüne alalım. Burada $\vec{t}, \vec{B}$ ve $\vec{N}$ nin s ye göre türevlerini alırsak, sırasıyla,

$$\frac{d\vec{t}}{ds}=\kappa\vec{n}=\kappa\ \ \vec{B}\cos\theta-\vec{N}\sin\theta\ \ =\kappa\cos\theta\vec{B}-\kappa\sin\theta\vec{N} \qquad 5.1.3$$

$$\begin{aligned}
\frac{d\vec{B}}{ds}&=\frac{d\vec{n}}{ds}\cos\theta-n\sin\theta\frac{d\theta}{ds}+\frac{d\vec{b}}{ds}\sin\theta+b\cos\theta\frac{d\theta}{ds}\\
&=\ \ -\kappa\vec{t}+\tau\vec{b}\ \ \cos\theta-n\sin\theta\frac{d\theta}{ds}-\tau n\sin\theta+b\cos\theta\frac{d\theta}{ds}\\
&=-\kappa\vec{t}\cos\theta+b\cos\theta\left(\tau+\frac{d\theta}{ds}\right)-n\sin\theta\left(\tau+\frac{d\theta}{ds}\right) \qquad 5.1.4\\
&=-\kappa\vec{t}\cos\theta+\ \ b\cos\theta-n\sin\theta\ \ \left(\tau+\frac{d\theta}{ds}\right)\\
&=-\kappa\vec{t}\cos\theta+\vec{N}\left(\tau+\frac{d\theta}{ds}\right)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\frac{d\vec{N}}{ds}&=-\frac{d\vec{n}}{ds}\sin\theta-n\cos\theta\frac{d\theta}{ds}+\frac{d\vec{b}}{ds}\cos\theta-b\sin\theta\frac{d\theta}{ds}\\
&=-\ \ -\kappa\vec{t}+\tau\vec{b}\ \ \sin\theta-n\cos\theta\frac{d\theta}{ds}-\tau n\cos\theta-b\sin\theta\frac{d\theta}{ds}\\
&=\kappa\vec{t}\sin\theta-b\sin\theta\left(\tau+\frac{d\theta}{ds}\right)-n\cos\theta\left(\tau+\frac{d\theta}{ds}\right) \qquad 5.1.5\\
&=\kappa\vec{t}\sin\theta-\ \ b\sin\theta+n\cos\theta\ \ \left(\tau+\frac{d\theta}{ds}\right)\\
&=\kappa\vec{t}\sin\theta-\vec{B}\left(\tau+\frac{d\theta}{ds}\right)
\end{aligned}$$

elde edilir. O halde Darboux türev formülleri matris formunda

$$\begin{bmatrix}\vec{t}\,'\\ \vec{B}'\\ \vec{N}'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & \kappa\cos\theta & -\kappa\sin\theta\\ -\kappa\cos\theta & 0 & \tau+\frac{d\theta}{ds}\\ \kappa\sin\theta & -\tau-\frac{d\theta}{ds} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\vec{t}\\ \vec{B}\\ \vec{N}\end{bmatrix} \qquad 5.1.6$$

ile verilebilir. Burada

$$\kappa\cos\theta=\kappa_g \text{ jeodezik eğrilik}$$
$$-\kappa\sin\theta=\kappa_n \text{ normal eğrilik}$$
$$\tau+\frac{d\theta}{ds}=\tau_g \text{ jeodezik burulma}$$

dır. Dolayısıyla 5.1.6 denklemi

$$\begin{bmatrix}\vec{t}\,' \\ \vec{B}\,' \\ \vec{N}\,'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & \kappa_g & \kappa_n \\ -\kappa_g & 0 & \tau_g \\ -\kappa_n & -\tau_g & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\vec{t} \\ \vec{B} \\ \vec{N}\end{bmatrix} \qquad 5.1.7$$

şeklini alır.

5.2. Spinorlar-Darboux Türev Denklemleri İlişkisi

Bu bölüm tezimizin orijinal kısmı olup, Darboux türev denklemleri bir tek spinor denklem ile ifade edilmiştir. Ayrıca Frenet spinor denklemi ve Darboux spinor denklemi arasındaki ilişki verilmiştir.

S, E^3 Öklid uzayında yönlendirilmiş bir yüzey ve α, S yüzeyinde birim hızlı bir eğri olsun. α eğrisinin Darboux çatısı $\vec{t},\vec{B},\vec{N}$ olmak üzere Darboux türev formüllerinin

$$\begin{aligned}\vec{t}\,' &= \kappa_g\vec{B}+\kappa_n\vec{N} \\ \vec{B}\,' &= -\kappa_g\vec{t}+\tau_g\vec{N} \\ \vec{N}\,' &= -\kappa_n\vec{t}-\tau_g\vec{B}\end{aligned} \qquad 5.2.1$$

olduğunu biliyoruz. 3. bölümde spinorlar ve ortonormal bazlar ile ilgili verilen bilgiler dikkate alınırsa

$$\vec{B}+i\vec{N}=\Gamma^{t}\sigma\Gamma, \qquad \vec{t}=-\Gamma^{t}\sigma\Gamma, \tag{5.2.2}$$

ve $\overline{\Gamma}^{t}\Gamma=1$ olacak şekilde bir Γ spinoru vardır. $\vec{B},\vec{N},\vec{t}$ üçlüsü Γ spinoru ile temsil edilir. Ayrıca $\dfrac{d\Gamma}{ds}$, Darboux denklemleriyle verilen α eğrisi boyunca $\vec{B},\vec{N},\vec{t}$ üçlüsünün değişimine karşılık gelir.

Önerme 3.4.göz önüne alınırsa Γ,Γ, iki bileşenli spinorlar için bir tabandır. Böylece öyle h ve k fonksiyonları (muhtemelen kompleks değişkenli) vardır ki

$$\frac{d\Gamma}{ds}=h\Gamma+k\Gamma \tag{5.2.3}$$

yazılışı tek türlüdür. 5.2.2 denklemindeki $\vec{B}+i\vec{N}=\Gamma^{t}\sigma\Gamma$ nin s ye göre türevi alınırsa

$$\frac{d\vec{B}}{ds}+i\frac{d\vec{N}}{ds}=\frac{d\Gamma^{t}}{ds}\sigma\Gamma+\Gamma^{t}\sigma\frac{d\Gamma}{ds} \tag{5.2.4}$$

elde edilir. Böylece 5.2.1 ve 5.2.3 denklemleri 5.2.4 denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}-i\tau_g\ \vec{B}+i\vec{N}\ +\ -i\kappa_n-\kappa_g\ \vec{t}&=\ f\Gamma+g\Gamma^{\ t}\ \sigma\Gamma+\Gamma^{t}\sigma\ f\Gamma+g\Gamma\\ &=f\ \Gamma^{t}\sigma\Gamma+\Gamma^{t}\sigma\Gamma\ +g\ \Gamma^{t}\sigma\Gamma+\Gamma^{t}\sigma\Gamma\\ &=2f\ \Gamma^{t}\sigma\Gamma\ -2g\ -\Gamma^{t}\sigma\Gamma\\ &=2f\left(\vec{B}+i\vec{N}\right)-2g\left(\vec{t}\right)\end{aligned}$$

bulunur. σ matrisleri simetrik olduğundan. $\Gamma^{t}\sigma\Gamma=\Gamma^{t}\sigma\Gamma$ dır. O halde

$$-i\kappa_n-\kappa_g \ \vec{t}-i\tau_g \ \vec{B}+i\vec{N} \ =2h \ \vec{B}+i\vec{N} \ -2k \ \vec{t}$$

elde edilir. Burada son denklemden

$$h=\frac{-i\tau_g}{2}\ ,\ k=\frac{i\kappa_n+\kappa_g}{2} \qquad 5.2.5$$

olduğu görülür. O halde 5.2.3 ve 5.2.5 denklemleri göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}\frac{d\Gamma}{ds}&=\left(-\frac{i\tau_g}{2}\right)\Gamma+\left(\frac{i\kappa_n+\kappa_g}{2}\right)\Gamma\\ &=\frac{1}{2}\ \ -i\tau_g\ \ \Gamma+\ i\kappa_n+\kappa_g\ \ \Gamma\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 5.2.1. Kabul edelim ki E^3 de yönlendirilmiş bir S yüzeyi üzerinde birim hızlı bir eğrinin $\vec{B},\vec{N},\vec{t}$ üçlüsü iki bileşenli Γ spinoru ile temsil edilsin. Bu takdirde, Darboux türev formülleri aşağıdaki şekilde verilen bir tek spinor denklemine sahiptir.

$$\frac{d\Gamma}{ds}=\left(-\frac{i\tau_g}{2}\right)\Gamma+\left(\frac{i\kappa_n+\kappa_g}{2}\right)\Gamma$$

Burada (5.2.6) denklemi Darboux spinor denklemi olarak adlandırılır ve τ_g, κ_g ve κ_n sırasıyla birim hızlı eğrinin jeodezik burulma, jeodezik eğrilik ve normal eğriliğidir.

Şimdi de $\vec{n},\vec{b},\vec{t}$ üçlüsünü temsil eden ψ spinoru ile $\vec{B},\vec{N},\vec{t}$ üçlüsünü temsil eden Γ spinoru arasındaki ilişkiyi araştıralım. Bunun için 5.1.1 5.2.2 ve 4.2.1

denklemlerini göz önüne alalım. Eğer 5.1.1 denklemleri 5.2.2 denklemlerinde yerine yazılırsa

$$
\begin{aligned}
\vec{n}+i\vec{b} &= \cos\theta\vec{B}-\sin\theta\vec{N}+i\sin\theta\vec{B}+i\cos\theta\vec{N} \\
&= \vec{B}\ \ \cos\theta+i\sin\theta\ \ +i\vec{N}\ \ \cos\theta+i\sin\theta \\
&=\ \ \cos\theta+i\sin\theta\ \ \ \vec{B}+i\vec{N} \\
&= e^{i\theta}\ \ \vec{B}+i\vec{N}
\end{aligned}
$$

elde edilir. Böylece aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 5.2.2. S, E^3 Öklid uzayında yönlendirilmiş bir yüzey olmak üzere, α, S yüzeyinde birim hızlı bir eğri olsun. Böylece $\vec{n},\vec{b},\vec{t}$ sıralı üçlüsünü temsil eden ψ spinoru ile $\vec{B},\vec{N},\vec{t}$ sıralı üçlüsünü temsil eden Γ spinoru arasındaki ilişki

$$
\begin{gathered}
\psi^t\sigma\psi = e^{i\theta}\ \ \Gamma^t\sigma\Gamma \\
\vec{t}=\vec{t}.
\end{gathered}
$$

ile verilir.

BÖLÜM 6. TARTIŞMA VE ÖNERİLER

Bölüm 1’ de, spinorların tarihsel gelişiminden ve uygulama alanlarından söz edildi. Ayrıca spinorları açıklayabilmenin dört farklı yolu olduğu vurgulanarak bu çalışma boyunca hangi yolu kullandığımız belirtildi.

Bölüm 2’ de çalışma boyunca kullanılan bazı temel tanım ve teoremler ispatsız olarak verildi.

Bölüm 3’ te, çalışmada ki esas sonuçların elde edilmesine yol gösteren, literatürdeki bir çalışma detaylı olarak incelendi [14]. O çalışmada $\mathbb{R}^3$ de orjin etrafındaki dönmelerin grubu olan $SO(3)$ ile 2×2 tipinde üniter matrisler grubu olan $SU(2)$ arasındaki homomorfizm ayrıntılı olarak anlatılmış ve bunun bir sonucu olarak spinorlar ve ortonormal taban arasındaki ilişki incelenmişti. Bölüm 4’ te bir önceki bölümde verilen sonuçlara bağlı olarak Frenet vektörlerinin spinorlar cinsinden ifadesi verilmiş ve Frenet türev denklemlerinin tek bir spinor denklemine eşdeğer olduğu gösterilmiştir.

5. bölüm tezimizin orijinal kısmı olup bu bölümde, E^3 Öklid uzayında yüzeyler kısaca tanıtılmış ve Darboux vektörlerinin spinorlar cinsinden ifadesi verilerek Darboux türev denklemlerinin tek bir spinor denklemine eşdeğer olduğu gösterilmiştir. Ayrıca bu bölümde Frenet türev denklemlerinin spinor gösterimi ile Darboux türev denklemlerinin spinor gösterimi arasındaki ilişki verilmiştir.

Diferensiyel geometride yüzey üzerindeki eğrilerin Darboux çatılarının birçok uygulaması vardır. Örneğin; D-helisler, Bertrand eğrileri, Smarandache eğrileri gibi eğriler ve Minkowski uzayında dual Darboux çatıları ile çalışmalar gibi pek çok çalışma literatürde mevcuttur.

Yüzey üzerindeki eğrilerle ilgili bu tarz çalışmalara spinor Darboux denklemleri kullanılarak gelecekteki çalışmalarda yer verilebilir. Ayrıca yüzey üzerinde ki eğrilerin spinor gösterimleri sadece E^3 Öklid uzayında değil $\mathbb{R}_1^3$ Minkowski uzayı veya G_3 Galilean uzayı gibi diğer üç boyutlu uzaylarda da verilebilir.

KAYNAKLAR

[1] AKKAŞ, S., HACISALİHOĞLU, H.H., ÖZEL, Z., SABUNCUOĞLU, A., Soyut Matematik, Ankara, 1984.

[2] BAYRAKTAR, M., Fonksiyonel Analiz, Gazi Kitabevi, 2006.

[3] BRILLOUIN, L., J. phys. Et radium 7, 401 1936.

[4] CARTAN, E., The Theory of Spinors, Dover Publ., 1966.

[5] ÇALLIALP, F., Örneklerle Soyut Cebir, Birsen Yayınevi, İstanbul, 2009.

[6] DE BROGLİE, L., Une nouvelle theorie de la lumiere, Hermann& Cie, Paris, France, 1940-42.

[7] DIRAC, P.A.M., Spinorsin Hilbert Space, Plenum Press, 1974.

[8] HACISALİHOĞLU, H.H., Diferensiyel Geometri, 1. Cilt, Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları, 4,2000.

[9] HACISALİHOĞLU, H.H., Diferensiyel Geometri, 2. Cilt, Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları, 3,2000.

[10] HACISALİHOĞLU, H.H., Lineer Cebir, Gazi Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Yayınları, 3, 1985.

[11] HACISALİHOĞLU, H.H., SABUNCUOĞLU, A., Diferensiyel Geometri, Milli Eğitim Basımevi, 1983.

[12] LAWSON, H.B., Spin Geometry, Princeton University Press, 1989.

[13] MONTAGUE, B.W., Elementary spinor algebra for polarized beams in strage rings, Particle Accelerators, 11, 219-231,1981..

[14] TORRES DEL CASTILLO, G.F., SANCHEZ BARRALES, G., Spinor formulation of the differential geometry of curves, Revista Colombiana de Matematicas, 38, 27-34, 2004.

[15] VAN DER WAERDEN, Die gruppentheoretische Methode in der Quanten mechanik (Julius Springer, Berlin, Germany, 1932), pp. 57-87; Weyl, Gruppentheorie und Quantenmechanik (S. Hirzel, Leipzig, Germany, 1931), second edition, pp. 121-133; Kramers, Quantentheorie des Elektrons und der Strahlung (Akademische Verlagsgesellschaft, 1938), pp. 258-280; Wigner, Gruppentheorie und ihre Anwendung (Friedrich Vieweg& Sohn, Braunschweig, Germany, 1931), pp. 164-183; Cartan, Leçons sur la Theorie des spineurs (Hermann& Cie, Paris, France, 1938); also, O. Laporte and G. E. Uhlenbeck, Phys. Rev. 37, 1380, 1931.

[16] VIVARELLI, M.D., Development of spinor descriptions of rotational mechanics from Euler's rigid body displacement theorem, Celestial Mechanics, 32, 193-207, 1984,

[17] WEATHERBURN, C.E., Differential Geometry of Three Dimensions, Cambridge University Press, 1927.

[18] WHİTTAKER, H., Analytical Dynamics, Dover Publications, New York, 1944.

ÖZGEÇMİŞ

İlim KİŞİ, 24.02.1986 tarihinde Giresun'da doğdu. Lise eğitimini 2005 yılında Giresun Hamdi Bozbağ Anadolu Lisesi'nde tamamladı. 2005 yılında Uludağ Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde lisans eğitimine başladı ve 2009 yılında lisans eğitimini tamamladı. 2009-2010 eğitim öğretim yılında Kocaeli Teknik ve Endüstri Meslek Lisesi'nde matematik öğretmenliği yaptı. 2010 yılında Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik EABD' da yüksek lisans programına kaydoldu. 2012 yılında Kocaeli Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde araştırma görevlisi olarak çalışmaya başladı.