T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOĞRUSAL DALGA DENKLEMİNİN ÇÖZÜMLERİNİN DÜZGÜN KARARLILIĞI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Kerime MUTLU

Enstitü Anabilim Dalı	**:**	**MATEMATİK**
Tez Danışmanı	**:**	**Yrd. Doç. Dr. Metin YAMAN**

Şubat 2013

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOĞRUSAL DALGA DENKLEMİNİN ÇÖZÜMLERİNİN DÜZGÜN KARARLILIĞI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Kerime MUTLU

Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK

Bu tez 06/02/2013 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği ile kabul edilmiştir.

Doç. Dr.	Bektaşoğlu **Doç. Dr.**	**Yrd. Doç. Dr.**
Ömer Faruk GÖZÜKIZIL	**Mehmet BEKTAŞOĞLU**	**Metin YAMAN**
Jüri Başkanı	**Üye**	**Üye**

TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanması ve çalışmaların yapılması sırasında her türlü destek ve yardımlarını esirgemeyen tez yöneticisi değerli hocam sayın Yrd. Doç. Dr. Metin YAMAN'a göstermiş olduğu hoşgörü ve sabrından dolayı çok teşekkür eder, sonsuz saygılarımı sunarım.

Bu günlere gelmemde büyük pay sahibi olan babam Bekir MUTLU'ya ve annem Azize MUTLU'ya sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Yüksek lisans çalışmalarım sırasında hiçbir konuda benden yardımlarını esirgemeyen ablam Hasene MUTLU GENÇKAL'a ve eniştem Berkant GENÇKAL'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Manevi olarak desteklerini her zaman yanımda hissettiğim dostlarıma çok teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

α	: Alfa
β	: Beta
γ	: Gama
ε	: Epsilon
η	: Eta
ξ	: Ksi
Φ	: Phi
Ψ	: Psi
Ω	: Omega
ν	: Nu
Δ	: Laplasyen
∇	: Nabla operatörü
R_+	: $[0, \infty)$

ÖZET

Anahtar kelimeler: Doğrusal İntegral Eşitsizliği, Doğrusal Dalga Denklemi.

Bu tez 4 bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde tezde kullanılan notasyonlar ve temel eşitsizlikler verilmiştir. Ayrıca doğrusal integral eşitsizliği verilmiş ve ispatlanmıştır. İkinci bölümde doğrusal dalga denkleminin çözümlerinin düzgün kararlılığı incelenmiştir. Üçüncü bölümde yarı doğrusal dalga denkleminin çözümlerinin düzgün kararlılığı incelenmiştir. Dördüncü bölümde ise tez çalışmasından elde edilen sonuçlar belirtilmiştir.

UNIFORM STABILIZATION OF THE SOLUTION TO LINEAR WAVE EQUATION

SUMMARY

KeyWords: Linear Integral Inequality, Linear Wave Equation

This thesis consists of four chapters. In the first chapter, notations and main inequalities used in the thesis are given. Linear integral inequality is given and proved. In the second chapter, uniform stabilization of the solution to linear wave equation is examined. In the third chapter, uniform stabilization of the solution to quasilinear wave equation is examined. Finally in the fourth chapter, the results are stated gained through the study of thesis.

BÖLÜM 1. GİRİŞ

1.1. Notasyonlar

Bu bölümde işaretler ve semboller tanıtılacaktır.

R^n, n boyutlu Öklit uzayıdır.

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ R^n de bir noktadır.

Ω, R^n de sınırlı bir bölgedir.

$\partial\Omega$, Ω bölgesinin düzgün sınırıdır.

u_x ve u_t sembolleri, $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ ve $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ kısmi türevleridir.

$L_p(\Omega)$, $(p \geq 1)$ Ω üzerinde ölçülebilir fonksiyonları içeren Banach uzayıdır ve

$$\|u\|_{p,\Omega} = \left(\int_\Omega |u|^p \, dx\right)^{1/p} \tag{1.1}$$

sonlu norma sahiptir.

Genel olarak $L_2(\Omega)$ deki norm $\|\cdot\|$ şeklinde gösterilmiştir. u ve v nin skaler çarpımı

$$(u, v)_\Omega = \int_\Omega uv dx \tag{1.2}$$

şeklinde gösterilir.

$$\|u\|_2 = \left(\int_\Omega u^2 \, dx\right)^{1/2} \tag{1.3}$$

$$\|\nabla u\|_2 = \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx\right)^{1/2} \tag{1.4}$$

Green Formülü: Kısmi integrasyonun genelleştirilmiş hali olan Green formülü $\frac{\partial g}{\partial \nu}$, n dış normaline göre türevi göstermek üzere

$$\int_{\Omega} f\Delta g dx = -\int_{\Omega} \nabla f \cdot \nabla g dx + \int_{\partial\Omega} f \frac{\partial g}{\partial \nu} dx \tag{1.5}$$

şeklindedir.

1.2. Temel Eşitsizlikler

1) Cauchy Eşitsizliği:

a, b sabit reel sayıları için

$$ab \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} \tag{1.6}$$

dir.

2) ε- Young Eşitsizliği:

a, b, ε pozitif reel sayılar ve $p, q > 1$ için $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olmak üzere

$$ab \leq \frac{\varepsilon^p a^p}{p} + \frac{1}{q}\frac{b^q}{\varepsilon^q} \tag{1.7}$$

şeklindedir.

3) Hölder Eşitsizliği:

$1 \leq p, q \leq \infty$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ için $u \in L_p(\Omega)$, $v \in L_q(\Omega)$ ise bölge üzerinde

$$\int_\Omega |uv| dx \leq \|u\|_p \|v\|_q \tag{1.8}$$

dir. Özel olarak $p = q = 2$ alınırsa Cauchy-Schwarz eşitsizliği elde edilir.

4) Poincare– Friedrichs Eşitsizliği:

$$\int_\Omega u^2 dx \leq c_1(\Omega) \int_\Omega |\nabla u|^2 dx, \quad u \in H_0^1(\Omega) \tag{1.9}$$

Ω, R^n uzayında sınırlı bir bölgedir ve $c_1(\Omega)$ sabiti Ω bölgesine bağlıdır.

5) Gronwall Eşitsizliği (Türev Formu):

$\eta(\cdot)$, $[0,T]$ de negatif olmayan sürekli bir fonksiyon olsun. Ayrıca hemen hemen her t için,

$$\eta'(t) \leq \Phi(t)\eta(t) + \Psi(t) \tag{1.10}$$

eşitsizliği sağlansın. Burada $\Phi(t)$ ve $\Psi(t)$ negatif olmayan ve $[0,T]$ de integre edilebilen fonksiyonlardır. Buradan her $0 \leq t \leq T$ için,

$$\eta(t) \leq e^{\int_0^t \Phi(s)ds}\left[\eta(0) + \int_0^t \Psi(s)ds\right] \tag{1.11}$$

dir.

6) Gronwall Eşitsizliği (İntegral Formu):

$\xi(t), [0,T]$ de negatif olmayan integrallenebilir bir fonksiyon olsun. Ayrıca hemen hemen her t ve $c_1, c_2 \geq 0$ için,

$$\xi(t) \leq c_1 \int_0^t \xi(s)ds + c_2 \tag{1.12}$$

eşitsizliği sağlansın. Bu durumda hemen hemen her $0 \leq t \leq T$ için,

$$\xi(t) \leq c_2(1 + c_1 t e^{c_1 t}) \tag{1.13}$$

dir.

1.3. Doğrusal İntegral Eşitsizliği

Lemma1.1.

$E: R_+ \to R_+$ fonksiyonu artmayan bir fonksiyon olsun.

$$\int_t^\infty E(s)ds \le TE(t), \qquad \forall t \in R_+ \tag{1.14}$$

olacak biçimde bir $T > 0$ var ise bu durumda

$$E(t) \le E(0)e^{1-\frac{t}{T}}, \qquad \forall t \ge T \tag{1.15}$$

dir.

İspat:

$$f(x) = e^{x/T} \int_x^\infty E(s)ds, \qquad x \in R_+$$

şeklinde bir fonksiyon tanımlansın. f fonksiyonu süreklidir, ayrıca (1.14) eşitsizliğinden f fonksiyonu artmayandır. Buradan f fonksiyonunda türev alınarak

$$f'(x) = \frac{1}{T}e^{x/T} \int_x^\infty E(s)ds + e^{x/T} \frac{d}{dx}\left(\int_x^\infty E(s)ds\right) \tag{1.16}$$

elde edilir. (1.16) eşitliğinde Leibniz formülünden

$$\frac{d}{dx}\left(\int_x^\infty E(s)ds\right) = E(\infty)\frac{d\infty}{dx} - E(x)\frac{dx}{dx} = -E(x)$$

bulunur. $-E(x)$ eşitlikte yerine yazılırsa

$$f'(x) = \frac{1}{T}e^{x/T} \int_x^\infty E(s)ds - e^{x/T}E(x)$$

şeklini alır. Ayrıca eşitlik $\frac{1}{T}e^{x/T}$ ortak çarpan parantezine alınırsa

$$f'(x) = \frac{1}{T}e^{x/T}\left(\int_x^\infty E(s)ds - TE(x)\right)$$

elde edilir. (1.14) eşitsizliğinden

$\frac{1}{T} > 0,\ e^{x/T} > 0$ ve $\int_x^\infty E(s)ds - TE(x) \leq 0$

olduğu bilindiğinden

$$f'(x) = \frac{1}{T}e^{x/T}\left(\int_x^\infty E(s)ds - TE(x)\right) \leq 0$$

bulunur. (1.14) eşitsizliğinden

$$f(x) \leq f(0) = \int_o^\infty E(s)ds \leq TE(0), \qquad \forall x \in R_+$$

dır. Buradan

$$f(x) = e^{x/T}\int_x^\infty E(s)ds \leq TE(0)$$

elde edilir. Üstteki eşitsizliğin her iki tarafı $e^{-x/T}$ ile çarpılırsa

$$\int_x^\infty E(s)ds \leq TE(0)e^{-x/T}, \qquad \forall x \in R_+ \tag{1.17}$$

bulunur. E pozitif ve artmayan olduğundan dolayı

$$\int_x^\infty E(s)ds = \int_x^{x+T} E(s)ds + \int_{x+T}^\infty E(s)ds \geq \int_x^{x+T} E(s)ds$$

dir. Üstteki eşitsizliğin sağ tarafındaki ifadeye integraller için ortalama değer teoremi uygulanırsa

$$\int_x^{x+T} E(s)ds = (x+T-x)E(t) = TE(t) \qquad x < t < x+T$$

$$\int_x^{x+T} E(s)ds = TE(t) \geq TE(x+T)$$

olur. (1.17) eşitsizliğinden

$$TE(x+T) \leq \int_x^{\infty} E(s)ds \leq TE(0)e^{-x/T}$$

olduğundan dolayı

$$TE(x+T) \leq TE(0)e^{-x/T}$$

dir. Üstteki eşitsizliğin her iki tarafı $1/T$ ile çarpılırsa

$$E(x+T) \leq E(0)e^{-x/T}, \qquad \forall x \in R_+$$

bulunur. $x + T = t \Rightarrow x = t - T$ dönüşümü yapılırsa

$$E(t) \leq E(0)e^{-\frac{t-T}{T}}$$

elde edilir. Üstteki eşitsizlik tekrar yazılırsa

$$E(t) \leq E(0)e^{1-\frac{t}{T}}, \qquad \forall t \geq T$$

bulunur ve ispat tamamlanır.

1.4.Kararlılık

$$\frac{dx}{dt} = f\big(t, x(t)\big) \tag{1.18}$$

denkleminin çözümlerinin kararlılığını üç kategoride incelenebilir.

1) Lyapunov Anlamında Kararlılık:
$\forall\varepsilon > 0$ ve $t_0 \in R$ verildiğinde (1.18) denkleminin çözümü olan $x(t)$ için eğer

$$|x(t_0) - \bar{x}(t_0)| < \delta \text{ iken } |x(t) - \bar{x}(t)| < \varepsilon \qquad \forall t \geq t_0$$

şartını sağlayan bir $\delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$ bulunabilirse $\bar{x}(t)$ çözümüne kararlıdır denir.

2) Asimptotik Kararlılık:
(1.18) in çözümü olan $\bar{x}(t)$ Lyapunov anlamında kararlı ve $\forall t_0 \in R$ verildiğinde $x(t)$ çözümü için eğer

$$|x(t_0) - \bar{x}(t_0)| < \delta \text{ iken } \lim_{t\to\infty}|x(t) - \bar{x}(t)| = 0$$

şartını sağlayan bir $\delta = \delta(t_0) > 0$ bulunabilirse $\bar{x}(t)$ çözümüne asimptotik kararlıdır denir.

3) Düzgün Kararlılık:
$\forall\varepsilon > 0$ verildiğinde (1.18) denkleminin çözümü olan $x(t)$ için eğer bazı $t_0 \in R$ için

$$|x(t_0) - \bar{x}(t_0)| < \delta \text{ iken } \forall\, t \geq t_0 \text{ için } |x(t) - \bar{x}(t)| < \varepsilon$$

şartını sağlayan $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ bulunabilirse $\bar{x}(t)$ çözümüne düzgün kararlıdır denir.

1.5. Doğrusal ve Yarı Doğrusal Diferensiyel Denklem

1) Doğrusal Diferensiyel Denklem:

Eğer bir diferensiyel denklem bilinmeyen fonksiyon ve bilinmeyen fonksiyonun var olan türevlerine göre birinci dereceden(doğrusal) ise diferensiyel denkleme doğrusaldır denir.

2) Yarı Doğrusal Diferensiyel Denklem:

Bir kısmi diferensiyel denklem denklemde görülen en yüksek mertebeden türevlere göre doğrusal ise denkleme yarı doğrusal denklem denir.

BÖLÜM 2. DOĞRUSAL DALGA DENKLEMİNİN ÇÖZÜMLERİNİN DÜZGÜN KARARLILIĞI

Bu bölümde doğrusal dalga denkleminin çözümlerinin düzgün kararlılığı incelenecektir. Aşağıdaki dalga denklemi ele alınsın.

$$u_{tt} - \Delta u + qu = 0 \qquad (x,t) \in (\Omega \times R_+) \tag{2.1}$$

$$u = 0 \qquad (x,t) \in (\Gamma_0 \times R_+) \tag{2.2}$$

$$\partial_\nu u + au + lu_t = 0 \qquad (x,t) \in (\Gamma_1 \times R_+) \tag{2.3}$$

$$u(0) = u_0 \text{ ve } u_t(0) = u_1 \qquad x \in \partial\Omega \tag{2.4}$$

ve $g: R \to R$ fonksiyonu azalmayan, sürekli bir fonksiyon olsun.

$g(0) = 0$ ve

$m(x) = x - x_0, \quad x \in R^n$

$R = R(x_0) = sup\{|x - x_0| : x \in \Omega\}$

$\Gamma_+ = \{x \in \Gamma : m(x) \cdot \nu(x) > 0\}$

$d\Gamma_m = (m \cdot \nu) d\Gamma$

olmak üzere aşağıdaki şartların sağlandığını kabul edelim.

$$q \in L^\infty(\Omega), \quad a, l \in C^1(\Gamma_1) \tag{2.5}$$

$$\overline{\Gamma_0} \cap \overline{\Gamma_1} = \emptyset \tag{2.6}$$

$$\Gamma_0 \neq \emptyset \text{ veya } q \not\equiv 0 \text{ veya } a \not\equiv 0 \tag{2.7}$$

$n \geq 3$ (2.8)

Sistemin enerjisi

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_{\Omega} (u_t^2 + |\nabla u|^2 + qu^2)dx + \frac{1}{2}\int_{\Gamma_1} au^2 d\Gamma \tag{2.9}$$

şeklinde tanımlanır.

Lemma2.1.

Verilen $(u_o, u_1) \in D(A)$ keyfi olmak üzere, (2.1) – (2.4) probleminin çözümü

$$E(S) - E(T) = \int_S^T \int_{\Gamma_1} lu_t^2 d\Gamma \mathrm{dt}, \qquad 0 \leq S < T < \infty \tag{2.10}$$

enerji eşitliğini sağlar.

İspat:

(2.1) denklemi u_t ile çarpılır ve Ω bölgesinde integre edilirse

$$\int_{\Omega} u_t u_{tt}\, dx - \int_{\Omega} u_t \Delta u dx + \int_{\Omega} u_t qu\, dx = 0 \tag{2.11}$$

elde edilir. (2.11) eşitliğinin sol tarafındaki birinci terim düzenlenirse

$$\int_{\Omega} u_t u_{tt}\, dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\Omega} u_t^2\, dx \tag{2.12}$$

bulunur. (2.11) eşitliğinin sol tarafındaki ikinci terime Green Formülü uygulanırsa

$$-\int_{\Omega} u_t\, \Delta u dx = -\left(-\int_{\Omega} \nabla u_t \nabla u dx + \int_{\Gamma} u_t \frac{\partial u}{\partial \nu} d\Gamma\right)$$

$$= \int_{\Omega} \nabla u_t \nabla u dx - \int_{\Gamma} u_t \frac{\partial u}{\partial \nu} d\Gamma$$

$$= \int_{\Omega} \nabla u_t \nabla u dx - \int_{\Gamma_0} u_t \frac{\partial u}{\partial \nu} d\Gamma - \int_{\Gamma_1} u_t \frac{\partial u}{\partial \nu} d\Gamma$$

yazılabilir. (2.2) den dolayı $\int_{\Gamma_0} u_t \frac{\partial u}{\partial \nu} d\Gamma = 0$ dır. O halde

$$- \int_{\Omega} u_t \Delta u dx = \int_{\Omega} \nabla u_t \nabla u dx - \int_{\Gamma_1} u_t \frac{\partial u}{\partial \nu} d\Gamma$$

$$= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \int_{\Gamma_1} u_t \frac{\partial u}{\partial \nu} d\Gamma \tag{2.13}$$

elde edilir. (2.11) eşitliğinin sol tarafındaki üçüncü terim düzenlenirse

$$\int_{\Omega} u_t q u dx = \frac{q}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u^2 dx \tag{2.14}$$

bulunur. (2.12), (2.13), (2.14) ifadeleri, (2.11) de yerlerine yazılırsa

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u_t^2 dx + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \int_{\Gamma_1} u_t \frac{\partial u}{\partial \nu} d\Gamma + \frac{q}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u^2 dx = 0$$

elde edilir. Üstteki eşitlik düzenlenirse

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u_t^2 dx + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \frac{q}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u^2 dx = \int_{\Gamma_1} u_t \frac{\partial u}{\partial \nu} d\Gamma$$

olur. Üstteki eşitliğin her iki tarafına $\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} \int_{\Gamma_1} a u^2 d\Gamma\right)$ eklenirse

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u_t^2 dx + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \frac{q}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u^2 dx + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} \int_{\Gamma_1} a u^2 d\Gamma\right)$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} \int_{\Gamma_1} a u^2 d\Gamma\right) + \int_{\Gamma_1} u_t \frac{\partial u}{\partial \nu} d\Gamma$$

elde edilir. Üstteki eşitlik düzenlenirse

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\int_{\Omega} u_t^2\,dx + \frac{1}{2}\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{2}\int_{\Omega} qu^2 dx + \frac{1}{2}\int_{\Gamma_1} au^2 d\Gamma\right]$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\int_{\Gamma_1} au^2 d\Gamma\right) + \int_{\Gamma_1} u_t \frac{\partial u}{\partial \nu} d\Gamma \tag{2.15}$$

bulunur. (2.15) de çözümlerin enerjisi olarak

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_{\Omega} u_t^2\,dx + \frac{1}{2}\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{2}\int_{\Omega} qu^2 dx + \frac{1}{2}\int_{\Gamma_1} au^2 d\Gamma \tag{2.16}$$

şeklinde bir $E(t)$ fonksiyonu tanımlanırsa (2.15) ifadesi

$$\frac{d}{dt}E(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\int_{\Gamma_1} au^2 d\Gamma\right) + \int_{\Gamma_1} u_t \frac{\partial u}{\partial \nu} d\Gamma \tag{2.17}$$

halini alır. (2.3) de

$$\partial_\nu u + au + lu_t = 0$$

veya

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = -au - lu_t$$

olduğundan dolayı (2.17) de yerine yazılırsa

$$\frac{d}{dt}E(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\int_{\Gamma_1} au^2 d\Gamma\right) + \int_{\Gamma_1} u_t(-au - lu_t) d\Gamma$$

olur. Üstteki eşitlik düzenlenirse

$$E'(t) = \int_{\Gamma_1} auu_t\,d\Gamma - \int_{\Gamma_1} auu_t\,d\Gamma - \int_{\Gamma_1} lu_t^2\,d\Gamma$$

$$E'(t) = -\int_{\Gamma_1} lu_t^2\,d\Gamma \tag{2.18}$$

elde edilir.

$$E'(t) = -\int_{\Gamma_1} lu_t^2 \, d\Gamma \leq 0 \tag{2.19}$$

olduğundan dolayı E artmayan bir fonksiyondur. (2.18) eşitliğinin her iki tarafı $0 \leq S < T$ aralığında integre edilirse

$$\int_S^T E'(t)dt = -\int_S^T \int_{\Gamma_1} lu_t^2 \, d\Gamma\text{dt} \tag{2.20}$$

bulunur. (2.20) integraller için ortalama değer teoremi uygulanırsa

$$E(T) - E(S) = -\int_S^T \int_{\Gamma_1} lu_t^2 \, d\Gamma\text{dt}$$

ve

$$E(S) - E(T) = \int_S^T \int_{\Gamma_1} lu_t^2 \, d\Gamma dt \tag{2.21}$$

elde edilir.

$$E(S) - E(T) = \int_S^T \int_{\Gamma_1} lu_t^2 \, d\Gamma\text{dt} \geq 0$$

dır. O halde

$$E(S) - E(T) \geq 0$$

ve

$$E(S) \geq E(T)$$

şeklinde yazılabilir ve ispat tamamlanır.

Teorem 2.1.

$(2.5)-(2.8)$

Γ_0 üzerinde $m \cdot \nu \leq 0$ ve Γ_1 üzerinde $m \cdot \nu \geq 0,$ (2.22)

$Q_1 < 1,$ (2.23)

sağlansın.

$l = (m \cdot \nu)/R$ ve $a = (n-1)(m \cdot \nu)/(2R^2)$ (2.24)

seçilsin. Her $(u_0, u_1) \in H^1_{\Gamma_0}(\Omega) \times L^2(\Omega)$ için (2.1) – (2.4) problemi

$$E(t) \leq E(0)e^{1-\frac{(1-Q_1)t}{2R}}, \quad \forall t \in R_+ \qquad (2.25)$$

kestirimini sağlar.

Lemma2.2.

Verilen $(u_0, u_1) \in D(A)$ ve $0 \leq S < T < \infty$ keyfi, $(2.1)-(2.4)$ probleminin çözümü

$$2\int_S^T E(t)dt = \left[\int_\Omega u_t Mudx\right]_T^S - \int_S^T \int_\Omega (n-2)qu^2 + 2qum \cdot \nabla udxdt$$

$$+\int_S^T \int_{\Gamma_0} \left|\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|^2 d\Gamma_m dt + \int_S^T \int_{\Gamma_1} u_t^2 - |\nabla u|^2 + bu^2 - (ku_t + bu)Mud\Gamma_m dt \qquad (2.26)$$

eşitliğini sağlar.

İspat:

(2.1) denklemi Mu ile çarpılıp Ω bölgesinde integre edilirse

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega u_t\, Mudx - \int_\Omega u_t\, Mu_t dx - \int_\Omega Mu\Delta udx + \int_\Omega quMudx = 0 \qquad (2.27)$$

elde edilir. (2.27) eşitliğinin sol tarafındaki $-\int_\Omega u_t\, Mu_t dx$ ifadesinde

$Mu = 2m \cdot \nabla u + (n-1)u$

şeklinde alınır ve ifadede yerine yazılırsa

$$-\int_{\Omega} u_t(2m \cdot \nabla u_t + (n-1)u_t)dx \tag{2.28}$$

olur. (2.27) eşitliğinin sol tarafındaki üçüncü ifadeye Green formülü uygulanırsa

$$-\int_{\Omega} Mu\Delta u dx = -\left(-\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla(Mu)dx + \int_{\Gamma} Mu\frac{\partial u}{\partial \nu}d\Gamma\right)$$

$$= \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla(Mu)dx - \int_{\Gamma} Mu\frac{\partial u}{\partial \nu}d\Gamma$$

$$= \int_{\Omega} (n+1)|\nabla u|^2 dx + \int_{\Omega} m \cdot \nabla|\nabla u|^2 dx - \int_{\Gamma} Mu\frac{\partial u}{\partial \nu}d\Gamma$$

elde edilir. Γ sınırı Γ_0 ve Γ_1 den oluştuğu için

$$= \int_{\Omega} (n+1)\,|\nabla u|^2 dx + \int_{\Omega} m \cdot \nabla|\nabla u|^2 dx - \int_{\Gamma_0} Mu\frac{\partial u}{\partial \nu}d\Gamma - \int_{\Gamma_1} Mu\frac{\partial u}{\partial \nu}d\Gamma \tag{2.29}$$

şeklinde yazılabilir. (2.27) eşitliğinin sol tarafındaki $\int_{\Omega} quMudx$ ifadesinde

$Mu = 2m \cdot \nabla u + (n-1)u$

yazılırsa ifade

$$\int_{\Omega} qu(2m \cdot \nabla u + (n-1)u)dx \tag{2.30}$$

halini alır. (2.28), (2.29) ve (2.30) ifadeleri (2.27) de yerlerine yazılırsa

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega} u_t Mudx - \int_{\Omega} u_t\,(2m \cdot \nabla u_t + (n-1)u_t)dx + \int_{\Omega} (n+1)\,|\nabla u|^2 dx$$

$$+\int_\Omega m\cdot\nabla|\nabla u|^2dx-\int_{\Gamma_0} Mu\frac{\partial u}{\partial \nu}d\Gamma-\int_{\Gamma_1} Mu\frac{\partial u}{\partial \nu}d\Gamma$$

$$+\int_\Omega qu(2m\cdot\nabla u+(n-1)u)dx=0$$

elde edilir. Üstteki eşitlikte $Mu=2m\cdot\nabla u+(n-1)u$ ifadesi ile (2.3) den

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}+au+lu_t=0\Rightarrow\frac{\partial u}{\partial \nu}=-au-lu_t$$

şeklinde bulunan ifade yerine yazılırsa

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega u_t\,Mudx-\int_\Omega u_t\,2m\cdot\nabla u_tdx+(1-n)\int_\Omega u_t^2\,dx+(n+1)\int_\Omega|\nabla u|^2\,dx$$

$$+\int_\Omega m\cdot\nabla|\nabla u|^2dx-\int_{\Gamma_0}(2m\cdot\nabla u+(n-1)u)\frac{\partial u}{\partial \nu}d\Gamma-\int_{\Gamma_1} Mu(-au-lu_t)d\Gamma$$

$$+\int_\Omega qu2m\cdot\nabla udx+(n-1)\int_\Omega qu^2dx=0$$

bulunur. (2.2) den

$$\int_{\Gamma_0}(n-1)u\frac{\partial u}{\partial \nu}d\Gamma=0$$

olduğundan dolayı bu durum üstteki eşitlikte yerine yazılırsa

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega u_t\,Mudx-\int_\Omega u_t\,2m\cdot\nabla u_tdx+(1-n)\int_\Omega u_t^2\,dx+(n+1)\int_\Omega|\nabla u|^2\,dx$$

$$+\int_\Omega m\cdot\nabla|\nabla u|^2dx-\int_{\Gamma_0}(2m\cdot\nabla u)\frac{\partial u}{\partial \nu}d\Gamma-\int_{\Gamma_1} Mu(-au-lu_t)d\Gamma$$

$$+\int_\Omega qu2m\cdot\nabla udx+(n-1)\int_\Omega qu^2dx=0$$

elde edilir. Üstteki eşitlikte ifadeler eşitliğin karşı tarafına geçirilir ve düzenlenirse

$$0=-\frac{d}{dt}\int_{\Omega} u_t\, Mudx+\int_{\Omega} u_t\, 2m\cdot\nabla u_t dx-(1-n)\int_{\Omega} u_t^2\, dx$$

$$-(n+1)\int_{\Omega}|\nabla u|^2dx-\int_{\Omega} m\cdot\nabla|\nabla u|^2dx+\int_{\Gamma_0}(2m\cdot\nabla u)\frac{\partial u}{\partial \nu}d\Gamma-\int_{\Gamma_1} auMud\Gamma$$

$$-\int_{\Gamma_1} lu_tMud\Gamma-\int_{\Omega} qu2m\cdot\nabla udx-(n-1)\int_{\Omega} qu^2dx$$

şeklinde yazabiliriz. Üstteki eşitliğin her iki tarafına (2.16) dan $2E(t)$ eklenirse

$$2E(t)=\int_{\Omega} u_t^2\, dx+\int_{\Omega}|\nabla u|^2dx+\int_{\Omega} qu^2dx+\int_{\Gamma_1} au^2\, d\Gamma-\frac{d}{dt}\int_{\Omega} u_t\, Mudx$$

$$+\int_{\Omega} u_t\, 2m\cdot\nabla u_t dx-(1-n)\int_{\Omega} u_t^2\, dx-(n+1)\int_{\Omega}|\nabla u|^2dx-\int_{\Omega} m\cdot\nabla|\nabla u|^2\, dx$$

$$+\int_{\Gamma_0}(2m\cdot\nabla u)\frac{\partial u}{\partial \nu}d\Gamma-\int_{\Gamma_1} auMud\Gamma-\int_{\Gamma_1} lu_t\, Mud\Gamma-\int_{\Omega} qu2m\cdot\nabla udx$$

$$-(n-1)\int_{\Omega} qu^2\, dx$$

bulunur. (2.24) den $d\Gamma_m=(m\cdot\nu)d\Gamma$ olduğundan ve $k=\frac{1}{R}$, $b=\frac{n-1}{2R^2}$ alınırsa üstteki eşitliği

$$2E(t)=\int_{\Omega} u_t^2\, dx+\int_{\Omega}|\nabla u|^2\, dx+\int_{\Omega} qu^2\, dx+\int_{\Gamma_1} bu^2d\Gamma_m-\frac{d}{dt}\int_{\Omega} u_tMu\, dx$$

$$+\int_{\Omega} u_t2m\cdot\nabla u_t dx-(1-n)\int_{\Omega} u_t^2\, dx-(n+1)\int_{\Omega}|\nabla u|^2\, dx-\int_{\Omega} m\cdot\nabla|\nabla u|^2\, dx$$

$$+\int_{\Gamma_0}(2m\cdot\nabla u)\frac{\partial u}{\partial \nu}d\Gamma-\int_{\Gamma_1}(ku_t+bu)Mud\Gamma_m-\int_{\Omega} 2qum\cdot\nabla udx$$

$$-(n-1)\int_{\Omega} qu^2\, dx$$

şeklinde yazabiliriz. Üstteki eşitlik düzenlenirse

$$2E(t) = \int_\Omega u_t^2\,dx + \int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \int_\Omega qu^2\,dx + \int_{\Gamma_1} bu^2 d\Gamma_m - \frac{d}{dt}\int_\Omega u_t Mudx$$

$$+\int_\Omega u_t\,2m\cdot\nabla u_t dx - \int_\Omega u_t^2\,dx + \int_\Omega nu_t^2\,dx - \int_\Omega n|\nabla u|^2\,dx - \int_\Omega |\nabla u|^2\,dx$$

$$-\int_\Omega m\cdot\nabla|\nabla u|^2\,dx + \int_{\Gamma_0}(2m\cdot\nabla u)\frac{\partial u}{\partial \nu}d\Gamma - \int_{\Gamma_1}(ku_t + bu)Mud\Gamma_m$$

$$-\int_\Omega 2qum\cdot\nabla udx - \int_\Omega nqu^2\,dx + \int_\Omega qu^2 dx$$

elde edilir. Üstteki eşitlik düzenlenirse

$$2E(t) = \int_\Omega u_t^2\,dx + \int_\Omega |\nabla u|^2\,dx + \int_\Omega qu^2 dx + \int_{\Gamma_1} bu^2 d\Gamma_m - \frac{d}{dt}\int_\Omega u_t Mudx$$

$$-\int_\Omega nu_t^2 dx + \int_{\Gamma_1} u_t^2\,d\Gamma_m + \int_\Omega nu_t^2\,dx - \int_\Omega u_t^2\,dx - \int_\Omega n|\nabla u|^2 dx$$

$$-\int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \int_\Omega n|\nabla u|^2 dx - \int_{\Gamma_1}|\nabla u|^2 d\Gamma_m + \int_{\Gamma_0}(2m\cdot\nabla u)\frac{\partial u}{\partial \nu}d\Gamma$$

$$-\int_{\Gamma_1}(ku_t + bu)Mud\Gamma_m - \int_\Omega 2qum\cdot\nabla udx - \int_\Omega nqu^2 dx + \int_\Omega qu^2\,dx$$

bulunur. Üstteki eşitlik düzenlenirse

$$2E(t) = \int_{\Gamma_1} u_t^2\,d\Gamma_m - \int_{\Gamma_1}|\nabla u|^2 d\Gamma_m + \int_{\Gamma_1}(bu^2 - (ku_t + bu)Mu)d\Gamma_m$$

$$-\frac{d}{dt}\int_\Omega u_t\,Mudx - \int_\Omega 2qum\cdot\nabla udx + (2-n)\int_\Omega qu^2\,dx + \int_{\Gamma_0}(2m\cdot\nabla u)\frac{\partial u}{\partial \nu}d\Gamma$$

yazılabilir. Üstteki eşitlik düzenlenirse

$$2E(t) = -\frac{d}{dt}\int_\Omega u_t Mudx - \int_\Omega \big((n-2)qu^2 + 2qum\cdot\nabla u\big)dx + \int_{\Gamma_0} 2m\cdot\nabla u\frac{\partial u}{\partial \nu}d\Gamma$$

$$+\int_{\Gamma_1}(u_t^2-|\nabla u|^2+bu^2-(ku_t+bu)Mu)d\Gamma_m$$

elde edilir. Üstteki eşitlik (S,T) aralığında integre edilirse

$$2\int_S^T E(t)dt=\int_\Omega u_tMudx\Big|_T^S-\int_S^T\int_\Omega\big((n-2)qu^2+2qum\cdot\nabla u\big)dxdt$$

$$+\int_S^T\int_{\Gamma_0}2m\cdot\nabla u\frac{\partial u}{\partial\nu}d\Gamma dt+\int_S^T\int_{\Gamma_1}(u_t^2-|\nabla u|^2+bu^2-(ku_t+bu)Mu)d\Gamma_m dt \tag{2.31}$$

bulunarak (2.26) eşitliği sağlanır. Böylece ispat tamamlanır.

İspat (Teorem 2.1.)

Teorem (2.1.) in ispatı; Lemma 2.1. , Lemma 2.2.'nin sonuçları kullanılarak yapılır.

$$\left|\int_\Omega u_tMudx\Big|_T^S\right|\le RE|_T^S=RE(S)-RE(T)\le RE(S)+RE(T)$$

dir. O halde aynı zamanda

$$\left|\int_\Omega u_tMudx\Big|_T^S\right|\le 2RE(S)+2RE(T)$$

dir ve bu yüzden (2.31) eşitliğini

$$2\int_S^T E(t)dt\le 2RE(S)+2RE(T)-\int_S^T\int_\Omega\big((n-2)qu^2+2qum\cdot\nabla u\big)dxdt$$

$$+\int_S^T\int_{\Gamma_0}2m\cdot\nabla u\frac{\partial u}{\partial\nu}d\Gamma dt+\int_S^T\int_{\Gamma_1}(u_t^2-|\nabla u|^2+bu^2-(ku_t+bu)Mu)d\Gamma_m dt$$

eşitsizliği seklinde yazabiliriz. $\nabla u=\nu\frac{\partial u}{\partial\nu}$ ve $d\Gamma_m=(m\cdot\nu)d\Gamma$ olduğundan dolayı üstteki eşitsizliğin sağ tarafındaki dördüncü terim içindeki integral

$$\int_{\Gamma_0} 2m \cdot \nabla u \frac{\partial u}{\partial \nu} d\Gamma = \int_{\Gamma_0} 2m \cdot \nu \frac{\partial u}{\partial \nu}\frac{\partial u}{\partial \nu} d\Gamma = 2\int_{\Gamma_0} \left|\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|^2 d\Gamma_m$$

şeklinde bulunur ve üstteki eşitsizlik düzenlenirse

$$2\int_S^T E(t)dt \leq 2RE(S) + 2RE(T) - \int_S^T \int_\Omega \big((n-2)qu^2 + 2qum \cdot \nabla u\big)dxdt$$

$$+\int_S^T 2\int_{\Gamma_0} \left|\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|^2 d\Gamma_m dt + \int_S^T \int_{\Gamma_1} (u_t^2 - |\nabla u|^2 + bu^2 - (ku_t + bu)Mu)d\Gamma_m dt \quad (2.32)$$

halini alır.

$$\int_{\Gamma_0} 2m \cdot \nu \frac{\partial u}{\partial \nu}\frac{\partial u}{\partial \nu} d\Gamma = 2\int_{\Gamma_0} \left|\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|^2 d\Gamma_m$$

eşitliğinde $m \cdot \nu < 0$ ve $\frac{\partial u}{\partial \nu}\frac{\partial u}{\partial \nu} > 0$ olduğundan dolayı

$$2\int_{\Gamma_0} \left|\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|^2 d\Gamma_m < 0$$

olur. (2.32) eşitsizliğinden üstteki ifadeyi çıkartırsak (2.32) eşitsizliğinin sağ tarafı daha büyümüş olur ve (2.32) eşitsizliği tekrar düzenlenirse

$$2\int_S^T E(t)dt + \int_S^T \int_\Omega \big((n-2)qu^2 + 2qum \cdot \nabla u\big)dxdt \leq 2RE(S) + 2RE(T)$$

$$+\int_S^T \int_{\Gamma_1} [u_t^2 - |\nabla u|^2 + bu^2 - (ku_t + bu)Mu]d\Gamma_m dt \quad (2.33)$$

elde edilir. (2.33) eşitsizliğinin sağ tarafındaki üçüncü terimde

$$Mu = 2m \cdot \nabla u + (n-1)u$$

ifadesi yerine yazılırsa

$$\int_S^T \int_{\Gamma_1} [u_t^2 - |\nabla u|^2 + bu^2 - (ku_t + bu)Mu] d\Gamma_m dt$$

$$= \int_S^T \int_{\Gamma_1} [u_t^2 - |\nabla u|^2 + bu^2 - ku_t Mu - buMu] d\Gamma_m dt$$

$$= \int_S^T \int_{\Gamma_1} [u_t^2 - |\nabla u|^2 + bu^2 - ku_t(2m \cdot \nabla u + (n-1)u)$$

$$-bu(2m \cdot \nabla u + (n-1)u)] d\Gamma_m dt$$

elde edilir. Buradan

$$\int_S^T \int_{\Gamma_1} [u_t^2 - |\nabla u|^2 + bu^2 - (ku_t + bu)Mu] d\Gamma_m dt$$

$$= \int_S^T \int_{\Gamma_1} [u_t^2 - |\nabla u|^2 + bu^2 - 2(ku_t + bu)m \cdot \nabla u$$

$$+(1-n)(kuu_t + bu^2)] d\Gamma_m dt \qquad (2.34)$$

eşitliği bulunur. (2.34) ün sağ tarafındaki integral içindeki

$$2(ku_t + bu)m \cdot \nabla u$$

ifadesine Cauchy eşitsizliği uygulanırsa

$$|2(ku_t + bu)m \cdot \nabla u| \leq 2|R(ku_t + bu)||\nabla u|$$

$$|2(ku_t + bu)m \cdot \nabla u| \leq \frac{\left(\sqrt{2}|\nabla u|\right)^2}{2} + \frac{\left(\sqrt{2}R(ku_t + bu)\right)^2}{2}$$

$$|2(ku_t + bu)m \cdot \nabla u| \leq |\nabla u|^2 + R^2(ku_t + bu)^2 \qquad (2.35)$$

eşitsizliği elde edilir. (2.35) eşitsizliği (2.34) eşitsizliğinde yerine yazılırsa

$$\int_S^T \int_{\Gamma_1} [u_t^2 - |\nabla u|^2 + bu^2 - (ku_t + bu)Mu] d\Gamma_m dt \leq \int_S^T \int_{\Gamma_1} [u_t^2 - |\nabla u|^2 + bu^2$$

$$+|\nabla u|^2 + R^2(ku_t + bu)^2 + (1-n)(kuu_t + bu^2)] d\Gamma_m dt$$

$$\int_S^T \int_{\Gamma_1} [u_t^2 - |\nabla u|^2 + bu^2 - (ku_t + bu)Mu] d\Gamma_m dt \leq \int_S^T \int_{\Gamma_1} [u_t^2 + bu^2$$

$$+R^2(ku_t + bu)^2 + (1-n)(kuu_t + bu^2)] d\Gamma_m dt$$

$$\int_S^T \int_{\Gamma_1} [u_t^2 - |\nabla u|^2 + bu^2 - (ku_t + bu)Mu] d\Gamma_m dt \leq \int_S^T \int_{\Gamma_1} [u_t^2 + bu^2$$

$$+R^2(k^2u_t^2 + 2bkuu_t + b^2u^2) + (1-n)(kuu_t + bu^2)] d\Gamma_m dt$$

$$\int_S^T \int_{\Gamma_1} [u_t^2 - |\nabla u|^2 + bu^2 - (ku_t + bu)Mu] d\Gamma_m dt \leq \int_S^T \int_{\Gamma_1} [u_t^2 + bu^2 + R^2k^2u_t^2$$

$$+2R^2bkuu_t + R^2b^2u^2 + (1-n)kuu_t + (1-n)bu^2] d\Gamma_m dt$$

eşitsizliği elde edilir. Üstteki eşitsizlik düzenlenirse

$$\int_S^T \int_{\Gamma_1} [u_t^2 - |\nabla u|^2 + bu^2 - (ku_t + bu)Mu] d\Gamma_m dt$$

$$\leq \int_S^T \int_{\Gamma_1} [u_t^2 + (2 - n + R^2b)bu^2 + R^2k^2u_t^2 + (1 - n + 2R^2b)kuu_t] d\Gamma_m dt$$

eşitsizliği bulunur. Üstteki eşitsizlikte $b = \frac{n-1}{2R^2}$ ve $k = \frac{1}{R}$ ifadeleri yerlerine yazılırsa

$$\int_S^T \int_{\Gamma_1} [u_t^2 - |\nabla u|^2 + bu^2 - (ku_t + bu)Mu] d\Gamma_m dt \leq$$

$$\int_S^T \int_{\Gamma_1} \left[u_t^2 + \left(2 - n + R^2 \frac{n-1}{2R^2}\right) bu^2 + R^2 \frac{1}{R^2} u_t^2 + \left(1 - n + 2\frac{n-1}{2R^2} R^2\right) kuu_t\right] d\Gamma_m dt$$

olur. Üstteki eşitsizlik düzenlenirse

$$\int_S^T \int_{\Gamma_1} [u_t^2 - |\nabla u|^2 + bu^2 - (ku_t + bu)Mu] d\Gamma_m dt$$

$$\leq \int_S^T \int_{\Gamma_1} \left[2u_t^2 + \left(\frac{3-n}{2}\right) bu^2\right] d\Gamma_m dt \qquad (2.36)$$

eşitsizliği elde edilir. (2.36), (2.33) de yerine yazılırsa

$$2\int_S^T E(t)dt + \int_S^T \int_\Omega (n-2)qu^2 + 2qum \cdot \nabla u dxdt \leq 2RE(S) + 2RE(T)$$

$$+\int_S^T \int_{\Gamma_1} \left[2u_t^2 + \left(\frac{3-n}{2}\right) bu^2\right] d\Gamma_m dt$$

olur. Üstteki eşitsizlik düzenlenirse

$$2\int_S^T E(t)dt + \int_S^T \int_\Omega (n-2)qu^2 + 2qum \cdot \nabla u dxdt \leq 2RE(S) + 2RE(T)$$

$$+2\int_S^T \int_{\Gamma_1} u_t^2 d\Gamma_m dt + \frac{3-n}{2}\int_S^T \int_{\Gamma_1} bu^2 d\Gamma_m dt \qquad (2.37)$$

eşitsizliği bulunur. (2.21) eşitliğinde (2.24) ifadesindeki $l = (m \cdot \nu)/R$ ifadesi yerine yazılırsa

$$E(S) - E(T) = \int_S^T \int_{\Gamma_1} lu_t^2 \, d\Gamma dt$$

$$E(S) - E(T) = \frac{1}{R}\int_S^T \int_{\Gamma_1} (m \cdot \nu) u_t^2 d\Gamma dt$$

eşitliği elde edilir. $(m \cdot \nu)d\Gamma = d\Gamma_m$ olduğundan dolayı üstteki eşitlik

$$E(S) - E(T) = \frac{1}{R}\int_S^T \int_{\Gamma_1} u_t^2 d\Gamma_m dt$$

şeklinde yazılabilir. Üstteki eşitlik düzenlenirse

$$R[E(S)-E(T)]=\int_S^T\int_{\Gamma_1}u_t^2 d\Gamma_m dt \tag{2.38}$$

bulunur. (2.38), (2.37) eşitsizliğinde yerine yazılırsa

$$2\int_S^T E(t)dt+\int_S^T\int_\Omega (n-2)qu^2+2qum\cdot\nabla udxdt \le 2RE(S)+2RE(T)$$

$$+2R[E(S)-E(T)]+\frac{3-n}{2}\int_S^T\int_{\Gamma_1} bu^2 d\Gamma_m dt$$

eşitsizliği elde edilir. Üstteki eşitsizlik düzenlenirse

$$2\int_S^T E(t)dt+\int_S^T\int_\Omega (n-2)qu^2+2qum\cdot\nabla udxdt \le 4RE(S)$$

$$+\frac{3-n}{2}\int_S^T\int_{\Gamma_1} bu^2 d\Gamma_m dt$$

eşitsizliği elde edilir. Üstteki eşitsizliğin sağ tarafındaki ikinci terim (2.8) ve (2.22), $b>0$ ve $u^2>0$ olduğundan dolayı negatif olur ve eşitsizlikten atılabilir. Böylece üstteki eşitsizlik

$$2\int_S^T E(t)dt+\int_S^T\int_\Omega (n-2)qu^2+2qum\cdot\nabla udxdt \le 4RE(S)$$

şeklinde yazılabilir. (2.23) den üstteki eşitsizlik

$$2(1-Q_1)\int_S^T E(t)dt \le 4RE(S)$$

şeklinde bulunur. Üstteki eşitsizlik düzenlenirse

$$\int_S^T E(t)dt \le \left(\frac{2R}{1-Q_1}\right)E(S)$$

eşitsizliği elde edilir. $T\longrightarrow\infty$ için

$$E(t) \leq E(0)e^{1-\frac{(1-Q_1)t}{2R}}, \quad \forall t \in R_+$$

bulunur ve böylece ispat tamamlanır.

BÖLÜM 3. YARI DOĞRUSAL DALGA DENKLEMİNİN ÇÖZÜMLERİNİN DÜZGÜN KARARLILIĞI

Bu bölümde yarı doğrusal dalga denkleminin çözümlerinin düzgün kararlılığı incelenecektir.

Aşağıdaki dalga denklemi için başlangıç sınır değer problemi ele alınsın.

$$u_{tt} - \Delta u = -\alpha u_t + \nabla\Phi(x)\cdot\nabla u - \beta \mid u \mid^{p-2} u \quad x\epsilon\Omega, \qquad t > 0 \tag{3.1}$$

$$u(x,t) = 0 \qquad x \in \partial\Omega, \quad t > 0 \tag{3.2}$$

$$u(x,0) = u_0(x),\ u_t(x,0) = u_1(\mathrm{x}) \qquad x \in \Omega, \tag{3.3}$$

Burada $\alpha, \beta > 0$ ve $p > 2$ dir. Ω, R^n de sınırlı bir bölgedir. $\partial\Omega$ ise C^2 sınıfından olup Ω bölgesinin sınırıdır.

(3.1) eşitliğinin her iki tarafı $e^{\Phi(x)}u_t$ ile çarpılır ve Ω bölgesinde integre edilirse

$$\int_\Omega e^{\Phi(x)}u_t\, u_{tt}dx - \int_\Omega e^{\Phi(x)}\, u_t\Delta u dx = -\int_\Omega e^{\Phi(x)}u_t\, \alpha u_t dx$$

$$+\int_\Omega e^{\Phi(x)}u_t\nabla\Phi(x)\cdot\nabla u dx - \int_\Omega e^{\Phi(x)}\, u_t\beta|u|^{p-2}u dx \tag{3.4}$$

elde edilir. (3.4) eşitliğinin sol tarafındaki birinci terim düzenlenirse

$$\int_\Omega e^{\Phi(x)}\, u_t u_{tt}dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega e^{\Phi(x)}u_t^2\, dx \tag{3.5}$$

bulunur. (3.4) eşitliğinin sol tarafındaki ikinci terime Green formülü uygulanırsa

$$-\int_{\Omega} e^{\Phi(x)}\, u_t \Delta u dx = -\left(-\int_{\Omega} \nabla\left(e^{\Phi(x)} u_t\right) \cdot \nabla u dx + \int_{\partial\Omega} e^{\Phi(x)}\, u_t \frac{\partial u}{\partial \nu} dx\right)$$

$$= \int_{\Omega} \nabla\left(e^{\Phi(x)} u_t\right) \cdot \nabla u dx - \int_{\partial\Omega} e^{\Phi(x)} u_t \frac{\partial u}{\partial \nu} dx$$

yazılabilir. (3.3) sınır koşulundan dolayı $\int_{\partial\Omega} e^{\Phi(x)} u_t \frac{\partial u}{\partial \nu} dx = 0$ dır. O halde

$$-\int_{\Omega} e^{\Phi(x)}\, u_t \Delta u dx = \int_{\Omega} \nabla\left(e^{\Phi(x)} u_t\right) \cdot \nabla u dx$$

$$= \int_{\Omega} e^{\Phi(x)} u_t\, \nabla\Phi(x) \cdot \nabla u dx + \int_{\Omega} e^{\Phi(x)}\, \nabla u_t \cdot \nabla u dx$$

$$= \int_{\Omega} e^{\Phi(x)}\, u_t \nabla\Phi(x) \cdot \nabla u dx + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\Omega} e^{\Phi(x)} |\nabla u|^2\, dx \quad (3.6)$$

bulunur. (3.4) eşitliğinin sağ tarafındaki birici terim düzenlenirse

$$-\int_{\Omega} e^{\Phi(x)}\, u_t \alpha u_t dx = -\alpha \int_{\Omega} e^{\Phi(x)} u_t^2\, dx \qquad (3.7)$$

elde edilir. (3.4) eşitliğinin sağ tarafındaki ikinci terim olan

$$\int_{\Omega} e^{\Phi(x)} u_t \nabla\Phi(x) \cdot \nabla u\, dx \qquad (3.8)$$

aynen yazılır. (3.4) eşitliğinin sağ tarafındaki üçüncü terim düzenlenirse

$$-\int_{\Omega} e^{\Phi(x)} u_t\, \beta |u|^{p-2} u dx = -\frac{\beta}{p}\frac{d}{dt}\int_{\Omega} e^{\Phi(x)}\, u^p dx \qquad (3.9)$$

bulunur. (3.5), (3.6), (3.7), (3.8) ve (3.9) ifadeleri, (3.4) de yerlerine yazılırsa

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\Omega} e^{\Phi(x)}\, u_t^2 dx + \int_{\Omega} e^{\Phi(x)} u_t\, \nabla\Phi(x) \cdot \nabla u + \int_{\Omega} e^{\Phi(x)} \nabla \mathrm{u_t} \cdot \nabla u dx$$

$$= -\alpha \int_{\Omega} e^{\Phi(x)} u_t^2\, dx + \int_{\Omega} e^{\Phi(x)} u_t \nabla\Phi(x) \cdot \nabla u dx - \frac{\beta}{p}\frac{d}{dt}\int_{\Omega} e^{\Phi(x)}\, u^p dx$$

elde edilir. Üstteki eşitlik düzenlenirse

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\int_{\Omega} e^{\Phi(x)}u_t^2\,dx + \frac{1}{2}\int_{\Omega} e^{\Phi(x)}\,|\nabla u|^2 dx + \frac{\beta}{p}\int_{\Omega} e^{\Phi(x)}u^p dx\right] = -\alpha\int_{\Omega} e^{\Phi(x)}\,u_t^2 dx$$

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\int_{\Omega} e^{\Phi(x)}u_t^2 dx + \frac{1}{2}\int_{\Omega} e^{\Phi(x)}|\nabla u|^2\,dx + \frac{\beta}{p}\int_{\Omega} e^{\Phi(x)}u^p dx\right]$$

$$+\alpha\int_{\Omega} e^{\Phi(x)}u_t^2\,dx = 0 \tag{3.10}$$

bulunur. (3.10) da çözümlerin enerjisi olarak

$$E(t) = \int_{\Omega} e^{\Phi(x)}\,u_t^2 dx + \int_{\Omega} e^{\Phi(x)}|\nabla u|^2\,dx + \frac{2\beta}{p}\int_{\Omega} e^{\Phi(x)}\,u^p dx \tag{3.11}$$

şeklinde bir $E(t)$ fonksiyonu tanımlanırsa (3.10) ifadesi

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{E(t)}{2}\right] + \alpha\int_{\Omega} e^{\Phi(x)}\,u_t^2 dx = 0 \tag{3.12}$$

şeklinde yazılır. Buradan

$$\frac{E'(t)}{2} = -\alpha\int_{\Omega} e^{\Phi(x)}u_t^2\,dx$$

veya

$$E'(t) = -2\alpha\int_{\Omega} e^{\Phi(x)}\,u_t^2 dx \leq 0 \tag{3.13}$$

dır. Bu yüzden E artmayan bir fonksiyondur.

Teorem 3.1.

$p > 2$ ve $u \in C\big([0,T];\ H_0^1(\Omega)\big) \cap C^1\big([0,T]; L^2(\Omega)\big)$ için (3.1) – (3.3) probleminin çözümü olan $u(x,t)$ fonksiyonu C, Ω bölgesine ait bir sabit, A ve a, $e^{\Phi(x)}$ üstel fonksiyonun üst ve alt sınırı olmak üzere ve

$$\gamma = 1 + \frac{2}{\alpha} + \frac{2AC}{\alpha} \tag{3.14}$$

tanımlanarak

$$E(t) \le E(0)e^{1-\frac{t}{\gamma}}, \quad \forall t \ge 0 \tag{3.15}$$

kestirimini sağlar.

İspat:

(3.1) eşitliğinin her iki tarafı $e^{\Phi(x)}u$ ile çarpılır ve Ω bölgesinde integre edilirse

$$\int_\Omega e^{\Phi(x)}\, u u_{tt} dx - \int_\Omega e^{\Phi(x)} u \Delta u dx = -\int_\Omega e^{\Phi(x)}\, u \alpha u_t dx$$

$$+\int_\Omega e^{\Phi(x)} u \nabla\Phi(x) \cdot \nabla u\, dx - \int_\Omega e^{\Phi(x)}\, u\beta |u|^{p-2} u dx \tag{3.16}$$

elde edilir. (3.16) eşitliğinin sol tarafındaki birinci terim düzenlenirse

$$\int_\Omega e^{\Phi(x)} u u_{tt} dx = \int_\Omega \left[\left(e^{\Phi(x)} u u_t\right)_t - e^{\Phi(x)} u_t^2\right] dx$$

$$= \frac{d}{dt}\int_\Omega e^{\Phi(x)} u u_t dx - \int_\Omega e^{\Phi(x)} u_t^2\, dx \tag{3.17}$$

bulunur. (3.16) eşitliğinin sol tarafındaki ikinci terime Green formülü uygulanırsa

$$-\int_\Omega e^{\Phi(x)}\,u\Delta u dx=-\left[-\int_\Omega \nabla\left(e^{\Phi(x)}u\right)\cdot\nabla u dx+\int_{\partial\Omega} e^{\Phi(x)}u\frac{\partial u}{\partial \nu}dx\right]$$

$$=\int_\Omega \nabla\left(e^{\Phi(x)}u\right)\cdot\nabla u dx-\int_{\partial\Omega} e^{\Phi(x)}\,u\frac{\partial u}{\partial \nu}dx$$

yazılabilir. (3.2) sınır koşulundan dolayı $\int_{\partial\Omega} e^{\Phi(x)}u\frac{\partial u}{\partial \nu}dx=0$ dır. O halde

$$-\int_\Omega e^{\Phi(x)}u\Delta u dx=\int_\Omega \nabla\left(e^{\Phi(x)}u\right)\cdot\nabla u dx$$

$$=\int_\Omega e^{\Phi(x)}u\nabla\Phi(x)\cdot\nabla u dx+\int_\Omega e^{\Phi(x)}\,\nabla u\cdot\nabla u dx$$

$$=\int_\Omega e^{\Phi(x)}u\nabla\Phi(x)\cdot\nabla u dx+\int_\Omega e^{\Phi(x)}|\nabla u|^2 dx \qquad (3.18)$$

bulunur. (3.16) eşitliğinin sağ tarafındaki birinci terim düzenlenirse

$$-\int_\Omega e^{\Phi(x)}\,u\alpha u_t dx=-\frac{\alpha}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega e^{\Phi(x)}\,u^2 dx \qquad (3.19)$$

elde edilir. (3.16) eşitliğinin sağ tarafındaki ikinci terim olan

$$\int_\Omega e^{\Phi(x)}u\nabla\Phi(x)\cdot\nabla u dx \qquad (3.20)$$

aynen yazılır. (3.16) eşitliğinin sağ tarafındaki üçüncü terim düzenlenirse

$$-\int_\Omega e^{\Phi(x)}\,u\beta|u|^{p-2}u dx=-\beta\int_\Omega e^{\Phi(x)}\,u^p dx \qquad (3.21)$$

bulunur. (3.17), (3.18), (3.20) ve (3.21) ifadeleri, (3.16) da yerlerine yazılırsa

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega e^{\Phi(x)}uu_t\,dx-\int_\Omega e^{\Phi(x)}u_t^2\,dx+\int_\Omega e^{\Phi(x)}\,u\nabla\Phi(x)\cdot\nabla u dx$$

$$+\int_{\Omega} e^{\Phi(x)}|\nabla u|^2\,dx$$

$$=-\alpha\int_{\Omega} e^{\Phi(x)}\,uu_t dx+\int_{\Omega} e^{\Phi(x)}\,u\nabla\Phi(x)\cdot\nabla u dx-\beta\int_{\Omega} e^{\Phi(x)}\,u^p dx$$

olur. Üstteki eşitlik düzenlenirse

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega} e^{\Phi(x)}\,uu_t dx-\int_{\Omega} e^{\Phi(x)}u_t^2\,dx+\int_{\Omega} e^{\Phi(x)}|\nabla u|^2 dx+\beta\int_{\Omega} e^{\Phi(x)}\,u^p dx$$

$$=-\alpha\int_{\Omega} e^{\Phi(x)}uu_t\,dx$$

elde edilir. Üstteki eşitliğin her iki tarafına

$$2\int_{\Omega} e^{\Phi(x)}\,u_t^2 dx+\frac{2\beta}{p}\int_{\Omega} e^{\Phi(x)}\,u^p dx$$

eklenir ve düzenlenirse

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega} e^{\Phi(x)}\,uu_t dx-\int_{\Omega} e^{\Phi(x)}u_t^2\,dx+\int_{\Omega} e^{\Phi(x)}\,|\nabla u|^2 dx+\beta\int_{\Omega} e^{\Phi(x)}u^p\,dx$$

$$+2\int_{\Omega} e^{\Phi(x)}\,u_t^2 dx+\frac{2\beta}{p}\int_{\Omega} e^{\Phi(x)}u^p dx=-\alpha\int_{\Omega} e^{\Phi(x)}\,uu_t dx+2\int_{\Omega} e^{\Phi(x)}\,u_t^2 dx$$

$$+\frac{2\beta}{p}\int_{\Omega} e^{\Phi(x)}u^p\,dx$$

elde edilir. Üstteki eşitlik düzenlenirse

$$\int_{\Omega} e^{\Phi(x)}u_t^2\,dx+\int_{\Omega} e^{\Phi(x)}\,|\nabla u|^2 dx+\frac{2\beta}{p}\int_{\Omega} e^{\Phi(x)}\,u^p dx=-\frac{d}{dt}\int_{\Omega} e^{\Phi(x)}\,uu_t dx$$

$$-\alpha\int_{\Omega} e^{\Phi(x)}\,uu_t dx+2\int_{\Omega} e^{\Phi(x)}u_t^2\,dx+\left(\frac{2\beta}{p}-\beta\right)\int_{\Omega} e^{\Phi(x)}u^p\,dx \qquad (3.22)$$

bulunur. (3.22) eşitliğinde (3.11) den dolayı

$$\int_\Omega e^{\Phi(x)} u_t^2\, dx + \int_\Omega e^{\Phi(x)} |\nabla u|^2 dx + \frac{2\beta}{p}\int_\Omega e^{\Phi(x)} u^p dx = E(t)$$

fonksiyonu ve daha önceden bulduğumuz (3.19) ifadesi yerlerine yazılırsa

$$E(t) = -\frac{\alpha}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega e^{\Phi(x)} u^2 dx - \frac{d}{dt}\int_\Omega e^{\Phi(x)} u u_t dx + 2\int_\Omega e^{\Phi(x)} u_t^2\, dx$$

$$-\beta\left(1-\frac{2}{p}\right)\int_\Omega e^{\Phi(x)}\, u^p dx \qquad (3.23)$$

elde edilir.

$$E'(t) = -2\alpha\int_\Omega e^{\Phi(x)} u_t^2\, dx$$

olduğundan dolayı (3.23) ifadesinde

$$2\int_\Omega e^{\Phi(x)} u_t^2\, dx = -\frac{1}{\alpha}E'(t)$$

yazılırsa

$$E(t) = -\frac{\alpha}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega e^{\Phi(x)}\, u^2 dx - \frac{d}{dt}\int_\Omega e^{\Phi(x)}\, u u_t dx - \frac{1}{\alpha}E'(t)$$

$$-\beta\left(1-\frac{2}{p}\right)\int_\Omega e^{\Phi(\mathrm{x})}\, u^p dx \qquad (3.24)$$

bulunur. $p > 2$ olduğundan dolayı $1-\frac{2}{p} > 0$ olur ve üstteki eşitlikte sağ taraftaki dördüncü ifadeyi eşitlikten çıkartırsak

$$E(t) \le -\frac{\alpha}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega e^{\Phi(x)}\, u^2 dx - \frac{d}{dt}\int_\Omega e^{\Phi(x)} u u_t\, dx - \frac{1}{\alpha}E'(t)$$

elde edilir. Üstteki eşitsizliğin her iki tarafı (S,T) aralığında integre edilirse

$$\int_S^T E(t)\,dt \leq -\frac{\alpha}{2}\int_S^T \left[\frac{d}{dt}\left(\int_\Omega \, e^{\Phi(x)}u^2 dx\right)\right] dt - \int_S^T \left[\frac{d}{dt}\left(\int_\Omega \, e^{\Phi(x)}uu_t\,dx\right)\right] dt$$

$$-\frac{1}{\alpha}\int_S^T E'(t)\,dt$$

$$\int_S^T E(t)\,dt \leq \frac{\alpha}{2}\int_\Omega \, e^{\Phi(x)}u^2(S)dx - \frac{\alpha}{2}\int_\Omega \, e^{\Phi(x)}\,u^2(T)dx + \int_\Omega \, e^{\Phi(x)}u(S)u_t(S)dx$$

$$-\int_\Omega \, e^{\Phi(x)}u(T)\,u_t(T)dx + \frac{1}{\alpha}\big(E(S) - E(T)\big)$$

$$\int_S^T E(t)\,dt \leq \frac{\alpha}{2}\int_\Omega \, e^{\Phi(x)}\,u^2(S)dx + \frac{1}{\alpha}E(S) + \int_\Omega \, e^{\Phi(x)}u(S)\,u_t(S)dx$$

$$-\int_\Omega \, e^{\Phi(x)}u(T)\,u_t(T)dx \qquad (3.25)$$

eşitsizliği bulunur. (3.25) eşitsizliğinin sağ tarafındaki birinci terime A, $e^{\Phi(x)}$ üstel fonksiyonun üst sınırı yani $e^{\Phi(x)} \leq A$ özelliğini kullanarak

$$\frac{\alpha}{2}\int_\Omega \, e^{\Phi(x)}u^2\,(S)dx \leq \frac{A\alpha}{2}\int_\Omega \, u^2\,(S)dx$$

yazılabilir. Üstteki eşitsizliğe Poincare-Friedrichs eşitsizliği uygulanırsa

$$\frac{\alpha}{2}\int_\Omega \, e^{\Phi(x)}u^2\,(S)dx \leq \frac{AC\alpha}{2}\int_\Omega \, |\nabla u|^2(S)\,dx$$

elde edilir. Üstteki eşitsizliğe a, $e^{\Phi(x)}$ üstel fonksiyonun alt sınırı yani $a \leq e^{\Phi(x)}$ özelliğini kullanarak

$$\frac{\alpha}{2}\int_\Omega \, e^{\Phi(x)}\,u^2(S)dx \leq \frac{AC\alpha}{2a}\int_\Omega \, e^{\Phi(x)}|\nabla u|^2(S)\,dx$$

bulunur. Üstteki eşitsizlikten

$$\frac{\alpha}{2}\int_\Omega \, e^{\Phi(x)}\,u^2(S)dx \leq \frac{AC\alpha}{2a}E(S) \qquad (3.26)$$

elde edilir. (3.25) eşitsizliğinin sağ tarafındaki üçüncü terime Cauchy-Schwarz eşitsizliği uygulanırsa

$$\left|\int_\Omega e^{\Phi(x)} u u_t \, dx\right| \le \frac{1}{2}\int_\Omega e^{\Phi(x)} u^2 dx + \frac{1}{2}\int_\Omega e^{\Phi(x)} u_t^2 dx$$

bulunur. Üstteki eşitsizliğin sağ tarafındaki birinci terime Poincare-Friedrichs eşitsizliğini ve A, $e^{\Phi(x)}$ üstel fonksiyonunun üst sınırı yani $e^{\Phi(x)} \le A$ özelliğini kullanarak

$$\left|\int_\Omega e^{\Phi(x)} u u_t dx\right| \le \frac{1}{2} AC \int_\Omega |\nabla u|^2 + \frac{1}{2}\int_\Omega e^{\Phi(x)} u_t^2 dx$$

yazılabilir. Üstteki eşitsizliğe a, $e^{\Phi(x)}$ üstel fonsiyonunun alt sınırı yani $a \le e^{\Phi(x)}$ özelliğini kullanarak

$$\left|\int_\Omega e^{\Phi(x)} u u_t dx\right| \le \frac{AC}{2a}\int_\Omega e^{\Phi(x)} |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{2}\int_\Omega e^{\Phi(x)} u_t^2 dx$$

elde edilir. Üstteki eşitsizlik düzenlenirse

$$\left|\int_\Omega e^{\Phi(x)} u u_t dx\right| \le \frac{1}{2}\left(\frac{AC}{a} + 1\right)\left[\int_\Omega \left(e^{\Phi(x)} |\nabla u|^2 + e^{\Phi(x)} u_t^2\right) dx\right]$$

$$\left|\int_\Omega e^{\Phi(x)} u u_t dx\right| \le \frac{1}{2}\left(1 + \frac{AC}{a}\right) E(t)$$

$$\left|\int_\Omega e^{\Phi(x)} u u_t dx\right| \le \frac{1}{2}\left(1 + \frac{AC}{a}\right) E(S), \qquad S \le t \le T \tag{3.27}$$

bulunur. (3.25), (3.26), (3.27) eşitsizliklerinden dolayı

$$\int_S^T E(t) dt \le \frac{AC\alpha}{2a} E(S) + \frac{1}{\alpha} E(S) + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{AC}{a}\right) E(S)$$

$$\int_S^T E(t)\, dt \le \left(\frac{AC\alpha}{2a} + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{AC}{a}\right)\right) E(S)$$

yazılabilir. Üstteki eşitsizlik (3.14) eşitliğinde tanımlanan γ ile

$$\int_S^T E(t)dt \leq \gamma E(S), \quad \forall S < T$$

şeklinde yazılabilir. Lemma 1.1. den dolayı

$$E(t) \leq E(0)e^{1-\frac{t}{\gamma}}, \quad \forall t \geq 0$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

BÖLÜM 4. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmada doğrusal dalga denkleminin çözümlerinin düzgün kararlılığına ilişkin çeşitli makalelerde yer alan problemler ele alınmış ve çözüm basamakları açık şekilde incelenmiştir. İlk olarak doğrusal integral eşitsizliği ifade ve ispat edilmiştir. Daha sonra ise doğrusal dalga denklemi ele alınarak; Green formülü, Cauchy-Schwarz eşitsizliği, Cauchy eşitsizliği, Poincare-Friedrichs eşitsizliği ve çeşitli işlemler kullanılarak kestirimler elde edilmiştir. En sonunda doğrusal integral eşitsizliği yardımıyla yarı doğrusal dalga denkleminin çözümlerinin düzgün kararlı olduğu gösterilmiştir.

Bu çalışma dalga denkleminin çözümlerinin düzgün kararlılığına ilişkin çeşitli makalelerden bir derleme olup ek kaynak olarak kullanılabilir.

KAYNAKLAR

[1] KOMORNIK, V., Exact Controllability and Stabilization. The Multiplier Method, Masson-John Wiley, Paris, 1994.

[2] MESSAOUDI, A.S., Energy decay of solutions of a semilinear wave equation, J. Apl. Math., 2;1037-1048, 2000.

[3] ASSILA, M., GUESMIA, A., Energy decay for a damped nonlinear hyperbolic equation, Appl. Math. Letters, 12;49-52, 1999.

[4] KALANTAROV, V.K., LADYZHENSKAYA, O.A., The occurence of collapse for quasilinear equations of parabolic and hyperbolic type, J. Soviet Math., 10;53-70, 1978.

[5] KOMORNIK, A., ZUAZUA, E., A direct method for the boundary stabilization of the wave equation, J. Math. Pure and Appl., 69;33-54, 1990.

[6] A.ASSILA, M., Decay estimates for the wave equation with a nonlinear nonmonotone weak damping, Applicable Analysis, 69;3-4, 1998.

[7] HARAUX, A., ZUAZUA, E., Decay estimates for some semilinear damped hyperbolic problems, Arch. Ratio Mech. Anal., 100;191-206, 1988.

ÖZGEÇMİŞ

Kerime MUTLU, 1984 yılında Bursa'da doğdu. İlk, orta ve lise eğitimini Bursa'da tamamladı. 2008 yılında Uludağ Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünden mezun oldu. Şu anda Bursa Orhaneli A. Necati Yılmaz Teknik ve Endüstri Meslek Lisesi'nde matematik öğretmenliği yapmaktadır.