T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

NÖTRİNO ÇEKİRDEK SAÇILMA TESİR KESİTLERİNİN REZİDÜ TEOREMİ YARDIMIYLA HESAPLANMASI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Murat SAĞLAM

Enstitü Anabilim Dalı	:	**MATEMATİK**
Enstitü Bilim Dalı	:	**UYGULAMALI MATEMATİK**
Tez Danışmanı	:	**Yrd. Doç. Dr. Mehmet GÜNER**

Ocak 2013

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

NÖTRİNO ÇEKİRDEK SAÇILMA TESİR KESİTLERİNİN REZİDÜ TEOREMİ YARDIMIYLA HESAPLANMASI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Murat SAĞLAM

Enstitü Anabilim Dalı	:	**MATEMATİK**
Enstitü Bilim Dalı	:	**UYGULAMALI MATEMATİK**

Bu tez 14 / 01 /2013 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Oybirliği ile kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Halim ÖZDEMİR	**Yrd. Doç. Dr. Mehmet GÜNER**	**Yrd. Doç. Dr. Hakan YAKUT**
Jüri Başkanı	**Üye**	**Üye**

TEŞEKKÜR

Bu çalışma süresince tüm bilgilerini benimle paylaşmaktan kaçınmayan, her türlü konuda desteğini benden esirgemeyen ve tezimde büyük emeği olan, aynı zamanda kişilik olarak da bana çok şey katan Sakarya Üniversitesi öğretim üyelerinden danışman hocam, Sayın Yrd. Doç. Dr. Mehmet GÜNER'e sonsuz minnet ve teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

EWSR	: Enerji Ağırlıklı Toplam Kuralı
GSC	: Sıkışma katsayısı
NEWSR	: Enerji Ağırlıksız Toplam Kuralı
RPA	: Rasgele Faz Yaklaşımı
QRPA	: Kuaziparçacık Rasgele Faz Yaklaşımı
B(M1)	: İndirgenmiş manyetik dipol uyarılma ihtimali
β	: Kuadropol deformasyon parametresi
δ	: Nilsson deformasyon parametresi
(e,e')	: Elektron-elektron saçılma reaksiyonları
M	: Manyetik dipol operatörü
N	: Nötron sayısı
(p,p')	: Proton-proton saçılma reaksiyonları
Q_i^+, Q_i	: Fonon doğurma, yok etme operatörü
sp	: Tek parçacık
sqp	: Tek-kuaziparçacık
X, Y	: RPA genlikleri
ω	: 1^+ hallerinin enerjileri
Z	: Atom Numarası
α^+, α	: Kuaziparçacık doğurma, yok etme operatörü

ŞEKİLLER LİSTESİ

TABLOLAR LİSTESİ

ÖZET

Anahtar Kelimeler: Nötrino Çekirdek Saçılma Tesir Kesiti, Kuaziparçacık Rastgele Faz Yaklaşımı (QRPA), Nükleer Matris Elemanları, Kontur İntegralleri, Rezidü Teoremi.

Nötrino-çekirdek uyarılma tesir kesitlerinin

$$S_k = \sum_{m>0} \omega_m^k |< m | \sum_i \sigma(i) t_3(i) | 0 >|^2$$

momentum toplamları, Kuaziparçacık Rastgele Faz Yaklaşımı çerçevesinde (QRPA)

$$< \Psi_i | \sum_i \sigma(i) t_3(i) | 0 >$$

nükleer matris elemanlarının analitik özellikleri ve $K^\pi=1^+$ seviyelerinin

$$D(\omega_n)=0$$

dispersiyon denklemi kullanılarak, analitik fonksiyonların kontür integralleri ve rezidü teoremleri yardımıyla hesaplanmıştır. Bu çalışmanın esas özelliği S_k toplamlarının QRPA'daki zor hesaplamalara karşın istenilen potansiyel tabanda hiçbir enerji sınırlaması yapmadan elde edilebilmesidir.

EVALUATION OF THE NUCLEAR MATRIX ELEMENTS FOR THE NEUTRINO NUCLEUS SCATTERİNG CROSS SECTION USING THE RESIDUE THEORY

SUMMARY

Key Words: Neutrino Nucleus Scattering Cross Section S_k Moments, Quasiparticle Random Phase Approximation (QRPA), Nuclear Matrix Eements, Contour Integrals and The Residue Theorem.

The k-th moment S_k of the neutrino nucleus scattering nuclear matrix elements are studied microscopically within Quasiparticle Random Phase Approximation (QRPA) using the analytical expressions of the nuclear matrix elements

$$< \Psi_i \mid \sum_i \sigma(i) t_3(i) \mid 0 >$$

and the dispersion equation $D(\omega_m) = 0$ for the energy of the $K^{\pi}=1^{+}$ states the nuclear part of the neutrino nucleus scattering cross section

$$S_k = \sum_{m>0} \omega_m^k \,|< m \mid \sum_i \sigma(i) t_3(i) \mid 0 >|^2$$

moments are calculated by help of the contour integrals and the residue theorem of the analytical functions. The great practical value of our expressions is that, in contrast to the traditional QRPA, our calculations of S_k moments in any single particle basis with an arbitrarily large number of levels present no particular technical difficulty.

BÖLÜM 1. GİRİŞ

Süpernovaların oluşumunda nötrino çekirdek saçılma tesir kesitleri $\sigma\tau_3$ nükleer matris elemanlarının hesaplanmasını gerektirir. Bu matris elemanlar günümüzde kabuk-model çerçevesinde belirli yaklaşımlar kullanılarak hesaplanmaktadır. Fakat kabuk model çekirdeğin tek parçacık özelliklerinin açıklanmasında başarılıdır. Fakat çekirdek çok parçacıklı bir sistem olduğundan ve kolektif etkileşmeler ön plana çıktığından çekirdek yapısının incelenmesinde daha gelişmiş modellere ve metotlara ihtiyaç vardır. Çekirdek kolektif hareketinin ve titreşimlerinin incelenmesinde mikroskobik model çok başarılıdır. Günümüzde mikroskobik modelin QRPA metodu bu modelin en başarılı yöntemlerinden biridir.

Çekirdek kolektif seviyelerinin uyarılması ile meydana gelen esnek olmayan nötrino çekirdek saçılma tesir kesitinin (σ_ν) analitik ifadesi aşağıdaki gibidir [1], [2];

$$\sigma_\nu = \frac{G_F^2 g_A^2}{\pi} \sum_{i>0} (E_\nu - \omega_i)^2 \,|< \Psi_i \,|\sum_i \sigma_i t_3^i \,|\, \Psi_0 >|^2 \,\delta(E_\nu - E_\nu' - \omega_i) \tag{1.1}$$

Burada G_F ve g_A sırasıyla Fermi ve eksenel vektör sabitleridir. E_ν (E_ν') gelen (saçılan) nötrinonun enerjisi, Ψ_i (Ψ_0) çekirdek uyarılma (taban) durum dalga fonksiyonları, ω_i ise çekirdek uyarılma enerjisidir. σ ve τ_3 sırasıyla spini ve isotopspini temsil eden Pauli matrisleridir.

$< \Psi_i \,|\sum_i \sigma(i) t_3(i) \,|\, \Psi_0 >$ matris elemanları nükleer modeller çerçevesinde hesaplanabilirler. Buradan görüldüğü gibi nötrino-çekirdek saçılma tesir kesitlerini hesaplamak için nükleer matris elemanlarının güvenilir bir biçimde elde edilmesi gerekir.

Spin matris elemanlarının k momentumlu S_k toplamlarını kullanarak (1.1) tesir kesiti için aşağıdaki formülü elde ederiz:

$$\frac{d\sigma}{dE_\nu} = \frac{G_F^2 g_A^2}{\pi}(E_\nu^2 S_0 - 2E_\nu S_1 + S_2) \tag{1.2}$$

Burada S_k spin momentumu aşağıdaki şekilde belirtilmiştir:

$$S_k = \sum_{i>0}{}' \omega_i^k \, |< i \,|\, \sum_j \sigma(j) t_3(j) \,|\, 0 >|^2 \, \delta(E_\nu - E_\nu^{'} - \omega_i) \tag{1.3}$$

Bu ifadedeki $\sum{}'$ simgesindeki ′ indis i'ye göre toplamın ω_i<E_ν değerleri için geçerli olduğunu göstermektedir.

S_k momentumları toplam kuralları olarak da bilinmektedir. Toplam kurallarının enerji ağırlıksız (NEWSR, k=0) ve enerji ağırlıklı (EWSR, k≠0) olmak üzere iki türü vardır. Kuantum mekaniğinde mikro sistemlerin (atomlar, çekirdekler vb.) bir halden diğer hale geçiş matris elemanlarının toplamı, modelden bağımsız bağıntılarla sınırlandırılır ve bu bağıntılar toplam kuralları olarak adlandırılır [3]. Bu kurallar geçiş operatörlerinin veya fiziksel büyüklüklere karşılık gelen diğer operatörlerin komutasyon bağıntılarının ve seviyelerin dalga fonksiyonlarının tamset oluşturduğu matematiksel özelliklerinin yardımıyla elde edilir. Bu toplam kurallarının değerleri çoğunlukla modelden bağımsız olduklarından çok büyük öneme sahiptirler. Toplam kuralı metodu nükleer saçılma reaksiyonlarında, elektromanyetik ve beta geçişlerde nükleer kolektif uyarılmaların özelliklerini incelemek için mikroskobik çekirdek modelinde yoğun biçimde kullanılır [4]. Mesela, elektrik çok-kutup foton soğurmanın toplam tesir kesiti elektrik 2^λ-kutuplu geçiş matris elemanlarının EWSR toplam kuralına indirgenebilir [3]. Matris elemanlarının EWSR ve NEWSR toplam kurallarının yardımıyla çekirdeklerdeki dev rezonansların (dipol, kuadropol, GT ve Fermi) enerjileri kolayca tahmin edilebilir [4]. Çekirdek fiziğinde toplam kuralları, kullanılan modellerin güvenirliliğinin ve parametrelerinin net olarak belirlenmesi için çok büyük öneme sahiptir [5].

Küresel çekirdeklerde toplam kuralları sistemin Hamilton fonksiyonunun özdeğer ve özfonksiyonları yardımıyla sayısal olarak başarılı bir şekilde hesaplanmaktadır. Fakat deforme çekirdeklerde çekirdek seviyelerinin yüksek yoğunluğa sahip olması ω_i

özdeğerlerinin sayısal olarak bulunmasını oldukça güçleştirir. Bundan dolayı nükleer geçiş matris elemanlarının ve bunlara karşılık gelen toplam kurallarının hesaplanmasında çok büyük hatalar oluşabilir. Mikroskobik modelin Tamm-Dankof yaklaşımında (TDA) nükleer matris elemanlarının analitik özellikleri kullanılarak bu problemin rezidü ve kontur integraller teorisi çerçevesinde çözüm metodu çalışma [6], [7] de verilmiştir. Daha sonra bu metot QRPA'da beta ve elektromanyetik geçişlere başarıyla uygulanarak uygun toplam kuralları analitik olarak hesaplanmıştır [4]. Bu çalışmada TDA ve QRPA çerçevesinde [6], [7] de ileri sürülen metodu uygulayarak nötrino çekirdek saçılma tesir kesitinin (1.1) ifadesindeki S_k toplam kuralları için analitik ifadeler elde edilmiştir.

BÖLÜM 2. SONSUZLUKTA REZİDÜ

2.1. Tekil Noktaların Sınıflandırılması

z_0 noktası yöresindeki bir dairenin tümünde analitik olan f fonksiyonunun z_0 yöresinde $f(z)$ fonksiyonuna yakınsak olan bir kuvvet serisine açılımını bulmak için, Taylor Teoremini kullandık. Fakat

$$f(z)=\frac{1}{z} \text{ veya } f(z)=\frac{e^z}{z^2}$$

gibi fonksiyonlar $z_0=0$ noktasında analitik olmadıklarından, bu fonksiyonlara $z_0=0$ noktası yöresinde Taylor açılımı uygulanamaz. Bu tür fonksiyonların başka bir açılım şekli daha vardır. Yaklaşık olarak 1840 yılları civarında Laurent tarafından formülleştirilmiştir. Bu tür açılımlara da, Laurent açılımı veya serisi adı verilir. Bu Laurent açılımı, daha çok tekil noktaları olan fonksiyonlarla çalışılmak istenildiğinde önemlidir. Bu da bizi karmaşık analizin diğer temel sonuçlarından biri olan ve daha sonra göreceğimiz Cauchy Teoremi ve Rezidü Teoremine götürür.

Şimdi, Laurent teoremini ifade edelim.

Teorem (Laurent Teoremi):

$0 \le r_1 < r_2$ ve $z_0 \in C$ olsun. $A=\{z\in C: r_1<|z-z_0|<r_2\}$ bölgesini göz önüne alalım. $r_1=0$ veya $r_2=\infty$ alabildiğimiz gibi her ikisi birlikte olabilir. f fonksiyonu A bölgesinde analitik olsun. Bu halde Laurent açılımını,

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-z_0)^n} \tag{2.1.1}$$

olarak yazabiliriz. Bu eşitliğin sağ tarafındaki serilerin her ikisi de, $r_1 < p_1 < p_2 < r_2$ olduğunda,

$$B_{p_1 p_2} = \{z : p_1 \leq |z - z_0| \leq p_2\}$$

biçimindeki herhangi bir kümede, mutlak değerce ve düzgün olarak yakınsar. Eğer C eğrisi, r, $r_1 < r < r_2$ olmak üzere z_0 merkezli ve r yarıçaplı çember ise, $f(z)$ fonksiyonunun bu halka bölgesindeki Laurent açılımının katsayıları, $n = 0,1,2,3,...$ sayıları için,

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw \qquad (2.1.2)$$

ve $n = 1,2,3,...$ sayıları için,

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(w)(w - z_0)^{n-1} dw \qquad (2.1.3)$$

biçiminde olacaktır. Eğer $b_n = a_{-n}$ denirse $(2.1.1)$ formülü tek bir gösterim olarak,

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

şeklinde yazılır. Bu seriye A halka bölgesinde f fonksiyonunun z_0 noktası yöresindeki Laurent açılımı denir.

2.2. Singüler Noktalar ve Rezidü Teoremi

Eğer f fonksiyonun z_0 noktasında ayrık bir tekil noktası varsa, bu fonksiyonun z_0 noktasının delik komşuluğunun bir tek Laurent açılımı vardır. Bu açılım,

$$f(z) = \ldots\ldots + \frac{b_2}{(z-z_0)^2} + \frac{b_1}{(z-z_0)} + a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \ldots$$

biçimindedir. Burada, b_1 sayısına f fonksiyonunun z_0 noktasındaki rezidüsü adı verilir. Bu ifadeyi,

$$b_1 = \operatorname{Re}s(f, z_0)$$

ile göstereceğiz.

Laurent açılımını yaparken, b_1 rezidüsünü bulmak pratik uygulamalarda pek kolay değildir. Böylece Laurent açılımını bulmadan rezidüyü hesaplamak için bazı teknik yolları teoremler şeklinde verelim.

Teorem: f fonksiyonunun z_0 noktasında m. mertebeden bir kutbu var olsun. Bu takdirde

$$\operatorname{Re}s_{z_0} f = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left[(z-z_0)^m f(z) \right] \tag{2.2.1}$$

dır. $m = 1$ durumunda $\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}$ sıfırıncı mertebeden türevdir ki bu 1 olarak gösterilir. $0! = 1$ dir. Yani eğer f'nin z_0 da basit kutbu varsa, bu formülden

$$\operatorname{Re}s_{z_0} f = \lim_{z \to z_0} \left[(z-z_0) f(z) \right]$$

olarak bulunur.

Rezidüyü bulmak için, en kolay ve kısa bir işlemle sonuca gidecek bir formülümüz yoktur. Kutup noktasının durumuna göre, en kolay formülün seçilmesi yine bizim sezgi ve becerimize kalıyor. Bu yöntemlerin bazıları Tablo 2.2.1. de özetlenmiştir.

Kaldırılabilir tekil nokta

f fonksiyonunun z_0 noktasında kaldırılabilir bir tekil noktası olması için gerekli ve yeterli koşul,

$$\lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z) = 0$$

olmasıdır.

Teorem: $g(z)$ ve $h(z)$, analitik iki fonksiyon olsun. Bu iki fonksiyonun z_0 noktasında aynı dereceden bir sıfır yeri varsa,

$$f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$$

fonksiyonunun z_0 noktasında kaldırılabilir bir tekil noktası vardır.

Basit kutuplar

Eğer, $\lim_{z \to z_0} [(z - z_0) f(z)]$ limiti mevcut ve sıfırdan farklı ise f fonksiyonu z_0 da bir kutba sahiptir ve bu limit değeri fonksiyonun rezidüsüdür. Yani,

$$\lim_{z \to z_0} [(z - z_0) f(z)] = b_1$$

dir. Şimdi bununla ilgili daha genel bir teorem verelim. Bu teorem tüm rezidü hesapları için çok kullanışlıdır.

Teorem: $g(z)$ fonksiyonu z_0 da k. yıncı mertebeden, $h(z)$ fonksiyonu z_0 da $(k+1)$. mertebeden bir sıfıra sahip ise bu takdirde $\frac{g(z)}{h(z)}$ fonksiyonu z_0 da bir basit kutba sahiptir ve

$$\mathrm{Res}_{z_0}\frac{g}{h} = (k+1)\frac{g^{(k)}(z_0)}{h^{(k+1)}(z_0)} \tag{2.2.2}$$

dır. Aşağıdaki sonuç bu teoremin bir özel durumudur.

Sonuç: $f(z)=\frac{g(z)}{h(z)}$, g ve h, z_0 da analitik $g(z_0)\neq 0$ ve h'nin z_0 da bir basit sıfırı olsun. Bu durumda z_0 da bir basit kutbu vardır ve

$$\mathrm{Res}_{z_0} f = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}$$

dır.

İki katlı kutuplar

Kutupların dereceleri arttıkça, bu noktadaki rezidülerin bulunması problemi gittikçe zorlaşır. Eğer bir kutbun derecesi iki ise, bağıl olarak, diğer yöntemlerden daha kolay ve kullanışlı rezidü formülü bulunabilir.

Kutup iki katlı olunca, ilk rezidü formülümüz önceden verdiğimiz

$$b_1 = \mathrm{Res}(f, z_0) = \lim_{z\to zo}\frac{d}{dz}\left[(z-z_0)^2 f(z)\right]$$

olacaktır. Problemlerin birçoğunda, rezidüyü bulmak için bu formülü kullanabiliriz. İki katlı kutuplar için rezidüyü bulmada kolaylık sağlayan kullanışlı formüllerden biri de aşağıdaki teoremde verilir.

Teorem: g ve h fonksiyonları bir z_0 noktasında analitik olsun. $g(z_0) \neq 0$, $h(z_0) = 0$, $h'(z_0) = 0$ ve $h''(z_0) \neq 0$ olduğunu kabul edelim. Bu halde

$$f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$$

fonksiyonunun bu z_0 noktasında ikinci dereceden bir kutbu vardır ve bu noktadaki rezidü,

$$\operatorname{Res}\left(\frac{g}{h}, z_0\right) = 2\frac{g'(z_0)}{h''(z_0)} - \frac{2g(z_0)h'''(z_0)}{3[h''(z_0)]^2} \tag{2.2.3}$$

şeklindeki formülle bulunabilir.

Teorem: g ve h fonksiyonları, z_0 noktasında analitik olsun. $g(z_0) = 0$, $g'(z_0) \neq 0$, $h(z_0) = 0$, $h'(z_0) = 0$, $h''(z_0) = 0$ ve $h'''(z_0) \neq 0$ olduğunu kabul edelim. Bu halde g/h fonksiyonunun z_0 noktasında ikinci dereceden bir kutbu vardır ve bu noktadaki rezidüsü,

$$\operatorname{Res}\left(\frac{g}{h}, z_0\right) = 3\frac{g''(z_0)}{h'''(z_0)} - \frac{3}{2} \cdot \frac{g'(z_0)h^{(iv)}(z_0)}{[h'''(z_0)]^2} \tag{2.2.4}$$

formülü ile bulunur. Yine daha önce yazdığımız,

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{d}{dz}\left[(z - z_0)^2 f(z)\right] = b_1$$

ifadesi, yine aynı noktadaki aynı rezidüyü verir.

1. Sonuç: Eğer $f(z)=\dfrac{g(z)}{(z-z_0)^2}$ biçiminde ve $g(z_0)\neq 0$ ise

$$\operatorname{Res}(f,z_0)=g'(z_0)$$

olur.

2. Sonuç: Eğer $f(z)=\dfrac{g(z)}{(z-z_0)^3}$ şeklinde, $g(z_0)=0$ ve $g'(z_0)\neq 0$ ise,

$$\operatorname{Res}(f,z_0)=\frac{g''(z_0)}{2}$$

olur.

Yüksek dereceli kutuplar

Teorem: f fonksiyonunun z_0 noktasında ayrık bir tekil noktası olsun. $k\geq 0$ olan en küçük tamsayısını,

$$\lim_{z\to z_0}(z-z_0)^k f(z)$$

limiti var olacak biçimde seçelim. Bu halde, f fonksiyonunun z_0 noktasında k. yıncı dereceden bir kutbu vardır. Eğer,

$$G(z)=(z-z_0)^k f(z)$$

denirse buna göre, $G(z)$ fonksiyonu bu z_0 noktasında analitik olacak biçimde tek olarak belirlenebilir. Ayrıca, f fonksiyonunun bu noktadaki rezidüsü de,

$$\operatorname{Res}(f,z_0)=\frac{G^{(k-1)}(z_0)}{(k-1)!}$$

formülü ile bulunur.

Böylece,

$$f(z)=\frac{b_k}{(z-z_0)^k}+\frac{b_{k-1}}{(z-z_0)^{k-1}}+\ldots+\frac{b_1}{(z-z_0)}+a_0+a_1(z-z_0)+a_2(z-z_0)^2+\ldots$$

yazılır. Eğer $b_k=0$ ise,

$$\lim_{z\to z_0}(z-z_0)^{k-1}f(z)$$

limiti vardır. Bu da, hipotezdeki verilen k sayısının tanımıyla bir çelişkidir. Buradan, z_0 noktası, f fonksiyonunun k. yıncı dereceden bir kutbu olmalıdır.

Eğer $G(z)$ fonksiyonunun z_0 noktasında $k-1$ kere türevi alınırsa,

$$G^{(k-1)}(z)=(k-1)!\,b_1$$

elde edilir. Böylece,

$$b_1=\frac{G^{(k-1)}(z_0)}{(k-1)!}$$

olur. Buradan,

$$b_1=\operatorname{Res}(f,z_0)=\frac{G^{(k-1)}(z_0)}{(k-1)!} \tag{2.2.5}$$

bulunur.

Esas tekil noktalar

Şimdi, buraya kadar yapılan rezidü formüllerini bir tablo şeklinde düzenleyelim. Gerektiğinde, hemen bu tabloya bakarak verilen problemin hangi formülle çözülebileceğine karar verebiliriz. Verilen bir problemde aslında şu noktadaki rezidüyü bulunuz diye bir soru sorulmaz. Genellikle bize, bir integral verilir. Bu integrali hesaplamak için Cauchy Teoremini ve Rezidü Teoremini kullanırken bu rezidülere ihtiyaç duyarız. Daha ileri, integral alınacak fonksiyonun hangi tekil noktasındaki rezidüsü bulunacağına bile burada karar vermek zorundayız. Özellikle, integrali aldığımız çevre içindeki tekil noktalardan rezidülerin bulunması çok sık kullanılır. Bazı problemlerde de, üzerinde integral aldığımız çevrenin dışındaki noktalarda rezidüler bulunur. Bu nedenle, bir integralde ana fikir integralin hesabıdır. Rezidülerin bulunması bir yan problemdir.

Tablo 2.2.1. de, birinci düşey sütunda fonksiyon türü yazılmıştır. İkinci sütunda, bu fonksiyonun tekil noktasının türünü veren ölçü getirilmiş. İkinci sütunun sonucu olarak, tekil noktanın türü bulunarak üçüncü sütuna konulmuştur. Bundan sonra işlemler kolaylaşır. Bu üç sütun bize, rezidü formülünün hangisini kullanacağımızı verir. Bu son işlemi verecek rezidü formülü de dördüncü sütuna yazılmıştır.

Tablo 2.2.1. Ayrık tekil noktalar ve rezidülerin hesabı

Fonksiyon	Ölçü	Tekil Nokta Türü	Rezidü formülleri
$f(z)$	$\lim\limits_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)=0$	Kaldırılabilir	rezidü = 0
$\dfrac{g(z)}{h(z)}$	g ve h fonksiyonlarının sıfırlarının dereceleri aynı	Kaldırılabilir	rezidü = 0
$f(z)$	$\lim\limits_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)$ var ve $\neq 0$	Basit kutup	rezidü = $\lim\limits_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)$
$\dfrac{g(z)}{h(z)}$	$g(z_0)\neq 0$, $h(z_0)=0$ $h'(z_0)\neq 0$	Basit kutup	rezidü = $\dfrac{g(z_0)}{h'(z_0)}$
$\dfrac{g(z)}{h(z)}$	$g(z)$ ve $h(z)$ fonksiyonlarının sıfırlarının dereceleri sırası ile k ve k+1 ise	Basit kutup	rezidü = $(k+1)\dfrac{g^{(k)}(z_0)}{h^{(k+1)}(z_0)}$
$\dfrac{g(z)}{h(z)}$	$g(z_0)\neq 0$, $h(z_0)=0$, $h'(z_0)=0$ ve $h''(z_0)\neq 0$	İki katlı kutup	rezidü = $2\dfrac{g'(z_0)}{h''(z_0)}-\dfrac{2g(z_0)h'''(z_0)}{3[h''(z_0)]^2}$
$\dfrac{g(z)}{(z-z_0)^2}$	$g(z_0)\neq 0$	İki katlı kutup	rezidü = $g'(z_0)$
$\dfrac{g(z)}{(z-z_0)^2}$	$g(z_0)=0$ ve $g'(z_0)\neq 0$	İki katlı kutup	rezidü = $\dfrac{g''(z_0)}{2}$
$\dfrac{g(z)}{h(z)}$	$g(z_0)=0$, $g'(z_0)\neq 0$, $h(z_0)=0=h'(z_0)=h''(z_0)$, $h'''(z_0)\neq 0$	İki katlı kutup	rezidü = $3\dfrac{g''(z_0)}{h'''(z_0)}-\dfrac{3g'(z_0)h^{(iv)}(z_0)}{2[h'''(z_0)]^2}$
$f(z)$	k, en küçük bir tamsayı olmak üzere, $\lim\limits_{z\to z_0}G(z)=\lim\limits_{z\to z_0}(z-z_0)^k f(z)$ var	k katlı kutup	rezidü = $\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{G^{(k-1)}(z_0)}{(k-1)!}$ veya $\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{1}{(k-1)!}\dfrac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}\left[(z-z_0)^k f(z)\right]$
$f(z)$	$\dfrac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}(z-z_0)^k f(z)$ ifadesinin $z\to z_0$ için limiti vardır	k katlı kutup	rezidü = $\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{1}{(k-1)!}\dfrac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}\left[(z-z_0)^k f(z)\right]$
$\dfrac{g(z)}{h(z)}$	G ve h fonksiyonlarının sıfırlarının dereceleri, sırasıyla, m ve k+m şeklindedir.	k katlı kutup	$G(z)=(z-z_0)^k.\dfrac{g}{h}$ olmak üzere rezidü = $\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{G^{(k-1)}(z)}{(k-1)!}$ biçimindedir.

Bu tablo, rezidüyü bulma teknikleri formüllerini içermektedir. g ve h fonksiyonları, z_0 noktasında analitiktir. Yine, z_0 noktası $f = g/h$ fonksiyonunun ayrık bir tekil noktası olarak alınmıştır. Bu ayrık ve tekil nokta, esas tekil nokta da değildir.

2.3. Sonsuzlukta Rezidü

Cauchy Teoremi, tarihi gelişim içinde matematikçileri bir hayli uğraştırmıştır. Bu nedenle, bu teoremin ispatı için çok değişik fakat temelde aynı olan yöntemler geliştirilmiştir. Örneğin, üçgensel çevreler, dikdörtgensel çevreler, dairesel çevreler, basit bağlantılı ve çok bağlantılı bölgelerde çalışmalar yapılmıştır. Daha ileri, n değişkenli karmaşık fonksiyonlar için Cauchy Teoremini ispatlamışlardır.

Bir C eğrisinin içi ve dışı Jordon Eğrisi Teoremi ile verilir. Herhangi basit kapalı bir C eğrisinin içi ve dışı vardır ve bu C eğrisi, bu iç ve dış bölgelerin sınırıdır. Cauchy Teoreminin en basit bir biçimdeki ifadesi şudur:

Cauchy Teoremi: f fonksiyonu basit kapalı bir C eğrisi içinde ve üzerinde analitik ise

$$\oint_c f = 0$$

olur.

Bu teoreme göre, f fonksiyonu C eğrisinin içindeki bölgenin tümünde analitik olmalıdır. Ancak bu teoremin tersinin doğru olması gerekmez. Yani integral sıfır olmasına karşın, fonksiyonun bu bölgede analitik olması gerekmez.

Rezidü Teoremi:

Şimdi basit bağımlı bir B bölgesinin içinde $a_{1,}a_2,...,a_p$ kutuplarına sahip bulunan, bunların dışında her yerde regüler olan bir $f(z)$ fonksiyonunu göz önüne alalım ve bu kutupları çok küçük $C_{1,}C_2,...,C_p$ daireleri ile çevirerek B'yi çok bağımlı bir bölge haline getirelim. B'nin çevresi C olsun. C ile $C_1, C_2, ..., C_p$ arasında kalan bölgede $f(z)$ regüler olduğundan, Cauchy Teoremi uyarınca,

$$\int_{C^+} f(z)dz = \sum_{i=1}^{p} \int_{C_i^+} f(z)dz$$

dir. C_i dairesinin içindeki bölge B_i ile gösterilsin. Eğer $z = a_i$ noktası n. yinci mertebeden bir kutup ise

$(z-a_i)^{n_i} f(z)$ fonksiyonu B_i'de regülerdir ve

$$\int_{C_i^+} f(z)dz = \int_{C_i^+} \frac{(z-a_i)f(z)}{(z-a_i)^{n_i}} dz$$

integrali $(z-a_i)^{n_i} f(z)$ fonksiyonunun $z = a_i$ noktasındaki $(n_i - 1)$ inci mertebeden türevinin $\dfrac{2\pi i}{(n_i - 1)!}$ ile çarpımına eşittir. Bu göz önünde bulundurarak,

$$\int_{C_i^+} f(z)dz = 2\pi i \sum_{i=1}^{p} R_i$$

şeklinde yazarız. Buradaki R_i

$$R_i = \frac{1}{(n_i - 1)!} \left[\frac{d^{n_i - 1}}{dz^{n_i - 1}} (z-a_i)^{n_i} f(z) \right]_{z=a_i}$$

ile belirlenir ve $z = a_i$ kutbundaki rezidü adını alır.

Kolayca gerçeklemek mümkündür ki; $z = a$'nın bir civarında

$$f(z)=\frac{A_{-n}}{(z-a)^n}+\frac{A_{-n+1}}{(z-a)^{n-1}}+\ldots+\frac{A_{-1}}{(z-a)}+A_0+A_1(z-z_0)+\ldots$$

yazılabiliyorsa, $z=a$ noktası $f(z)$'nin n. yinci mertebeden bir kutbudur ve bu kutuptaki rezidüsü A_{-1}'e eşittir.

Bilindiği gibi Rezidü Teoremi, kapalı bir çevre üzerinde analitik olan bir fonksiyonun bu çevre üzerindeki integralinin, bu çevre içinde f fonksiyonunun rezidüleri toplamının $2\pi i$ ile çarpımına eşit olduğunu ifade eder. Bu teorem kompleks analizin en temel sonuçlarından birisidir ve belirli integralleri hesaplamada bir ilke olarak kullanılır. Ç, z_0 noktası etrafında bir çemberse, bu noktadaki rezidü,

$$b_1=\operatorname{Re} z(f,z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)dz$$

biçimindedir.

Rezidü Teoremi ve bu teoremin uygulamaları bir hayli fazladır. Bu uygulamaları çok değişik biçimlerde göreceğiz. Ayrıca, analizde bilinen çok zor integralleri yine bu Rezidü Teoremi yardımı ile hesaplayabileceğiz.

Jordan Eğrisi Teoremini kabul edersek, basit kapalı eğriler için Rezidü Teoremi şu biçimde ifade edilebilir:

Eğer basit kapalı bir C eğrisi bir A bölgesinde kalıyor ve f fonksiyonu

$$A\setminus\{z_1,z_2,\ldots,z_n\}$$

bölgesinde analitikse, pozitif yönlü C eğrisi için,

$$\int_C f=2\pi i\sum_{i=1}^{n}\operatorname{Re} z(f,z_i)$$

olur. Bu, rezidü teoreminin klasik olarak ifade ediliş şeklidir.

Sonsuzlukta Rezidü

Sonsuzluk tek nokta değildir. Bir fonksiyonun dönüşüm özellikleri düşünüldüğünde, bunu bazen "sonsuzluktaki tek nokta" olarak kullanmak uygun olur, sonsuzluk bir geometrik noktaymış gibi. O zaman $\omega = \frac{1}{s}$ fonksiyonunun $s = 0$ noktasının ω-düzleminde sonsuzluktaki bir noktaya dönüşeceğini söylemek mümkün olur. Buradaki kullanım yani "sonsuzluktaki nokta" ifadesi soyut bir kavramdır. O zaman bu noktaya geometrik bir nokta olarak bakamayız. Çünkü geometrik olarak düşünürsek; bir (genişleyen) dairenin üzerindeki bütün noktalar, sonsuzluktaki noktaya yanaşacaklardır. Bu ise geometrik nokta tanımına göre saçmadır. "Sonsuzluktaki nokta" artık geometrik bir nokta değildir. Buna rağmen "sonsuz noktası" veya "sonsuzluktaki nokta" kavramlarının her ikisi de matematikte kullanılır ve aslında her ikisi de tam olarak tanımlanmamış belirsiz kavramlardır.

Sonsuzluğun geometrik olarak tanımının yetersizliği $\frac{\infty}{\infty}$ ve $\infty - \infty$ gibi anlamı olmayan işlemlere yol açar.

Sonsuzluktaki noktanın bir sonlu nokta olarak tanımlanabilmesi akıllıca bir şeydir. Bunu ise; sonsuz düzlemini bir kürenin sonlu alanına dönüştürerek başarabiliriz. Böyle küreye Riemann küresi denir. Bu küre; düzlem ve küre üzerindeki noktalar arasında birebir eşleme yapılarak kurulur. Küre kompleks düzlem üzerine orijinde oturtulur ve bir ışın N noktasından düzlemdeki S noktasına çekilir. Bu ışın küreyi deler, küreden geçer. q noktası S noktasına tekabül eder. S noktası herhangi bir yönde sonsuzluğa gittiği için, q noktası küre üzerinde tek olan N noktasına gider. Bu yüzden N noktası sonsuzluktaki noktanın küre üzerindeki yansımasıdır. Ayrıca reel ve Im eksenler küre üzerindeki büyük dairelere giderler.

O halde, bütün dönüşümler bir küre yüzeyi üzerinde yerleştirilebildiğinden sonsuzluktaki nokta tektir denir. Elbette eğri ailelerinin biçimleri bozulacak ve mevkii değişecektir.

Bu yüzden Riemann küresi nicel olarak fazla faydalı değildir. Ama kavramsal ve resimli bir değerdir.

Lineer sistemlerin analizindeki temel problem, kapalı yoldaki kontur integrali hesaplamayı içerir. $f(s)$ ayrık singüler noktalara sahip analitik bir fonksiyon olsun. Ayrıca C, n singüler noktası basit kapalı bir eğri olsun. Biz zaten özel durumlar için bunu yapmanın yolunu biliyoruz.

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{c} f(s) ds \tag{2.3.1}$$

denklemi genel prosedürdür.

$f(s)$ ayrık singüler noktalara sahip analitik bir fonksiyon olsun. Ayrıca C, eğri içinde n singüler noktaya sahip, basit kapalı bir eğri olsun. C de $f(s)$'nin integrali, n integralin toplamı şeklinde yazılabilir:

$$\int_{C} f(s) ds = \int_{C_1} f(s) ds + \int_{C_2} f(s) ds + \ldots + \int_{C_n} f(s) ds \tag{2.3.2}$$

(2.3.1) denklemi her bir singülerliğe uygulanır. Notasyonu basitleştirmek için k. yncı singülerlikteki rezidüyü d_k ile gösterelim. O halde (2.3.2) denkleminden

$$\int_{C_k} f(s) ds = 2\pi i d_k$$

ve (2.3.2) denkleminden

$$\int_C f(s)ds = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} d_k \tag{2.3.3}$$

olur.

Basit kutup durumunda $f(s)$, $\dfrac{p(s)}{q(s)}$ şeklinde yazılabilirse, bu denklemde

$$q(s) = (s - s_0)\left[q'(s_0) + \frac{q''(s_0)}{2}(s - s_0) + \ldots\right] \tag{2.3.4}$$

şeklinde seri olarak yazılabilir.

$$a_{-1} = \frac{1}{(n-1)!}\frac{d^{n-1}}{ds^{n-1}}\left[(s - s_0)^n f(s)\right]_{s=s_0}$$

formülünde (2.3.4) yerine yazılırsa

$$a_{-1} = \frac{p(s_0)}{q'(s_0)}$$

elde edilir.

Bu sonuç rezidü teoremi olarak bilinir. Rezidü kutuplarda hesaplanabildiğinden kolaylık sağlar. Esas singülerlikteki rezidü kolay bulunamaz, ama Laurent serisine açılarak elde edilebilir.

Eğer fonksiyon singüler noktaların bir sonlu sayısına sahipse ve eğer fonksiyon sonsuzlukta singülerse, bazen "sonsuzluktaki rezidü" yü tanımlamak uygun olur. Bu nasıl olur? Rezidü teoremi genelleştirilebilir Riemann küresine uygulanarak. Riemann küresi üzerinde kapalı bir C eğrisi dışa sahip değildir. İki içe sahiptir ki bunlardan birisini sonsuzluktaki nokta içerir. Eğer C çevresinde integrasyon, düzlemdeki C eğrisiyle etrafı çevrilebilen (kapatılan) bir veya daha fazla sonlu-düzlem kutuplarına göre pozitif manadaysa, o zaman integrasyon sonsuzluktaki noktayı çevreler.

Eğer sonsuzluktaki nokta sadece singüler noktaysa çevrelenmiş olur, Rezidü teoreminin genişletilmesi

$$\int_C f(s)\,ds = -2\pi i\left[\text{sonsuzluktaki rezidü}\right]$$

şeklinde olur. Bununla birlikte yukarıdaki integral sonlu düzlem rezidülerinin $2\pi i$ kere toplamıdır. Tanımdan,

$$\text{Sonsuzluktaki Rezidü} = -\left[\text{sonlu-düzlem rezidülerinin toplamı}\right]$$

yazılır.

Gördük ki, dairesel yolla çevrelenen bir kutbun integrali, yolun yarıçapından bağımsızdır. Eğer yol, bir dairenin kapalı olmayan yayı ise, böyle bir yay boyunca integral genellikle bir fonksiyonun yarıçapıdır. Bununla birlikte, eğer bir kutup basit kutup ise, yarıçap sıfıra yaklaştığı için, integral de yay ile rezidüyle çarpılmış olan yayın karşısındaki açının çarpımıdır.

Şimdi bu söylenenlerin daha iyi anlaşılması için aşağıdaki örneği verelim.

Örnek: f fonksiyonu □ düzlemindeki sonlu tane nokta hariç, analitik olsun.

$$\text{Rez}(f,\infty) = -\text{Rez}\left[g(z) = \left(\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right), 0\right)\right]$$

olarak tanımlayalım.

a) Γ, yeteri kadar büyük bir çemberse,

$$\operatorname{Rez}(f,\infty) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} f\,dz$$

dir.

İspat: f fonksiyonunun yalnız sonlu sayıda kutbu olduğundan, z_0 noktasını, mutlak değeri sıfırdan farklı en küçük ve z noktasını da mutlak değeri en büyük olacak şekilde alabiliriz. Yeteri kadar küçük r sayısı $r < |z_0|$ ve $r < \frac{1}{|z_1|}$ olacak biçimde seçilsin. Eğer γ ve $\tilde{\Gamma}$, sırasıyla, r ve $\frac{1}{r}$ yarıçaplı iki çemberse, f fonksiyonu, sıfır noktası hariç, γ çemberinin içinde ve $\tilde{\Gamma}$ çemberinin dışında analitiktir.

$$\int_{\tilde{\Gamma}} f(w)\,dw = -\int_{\gamma} \frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right) dz = -2\pi i \operatorname{Rez}\left[\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right), 0\right]$$

olur. Burada γ eğrisi pozitif yönlüdür. Eğer $\tilde{\Gamma}$ eğrisi

$$\int_{\tilde{\Gamma}} f(w)\,dw = -2\pi i \operatorname{Rez}\left[\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right), 0\right]$$

eşitliğini veriyorsa, γ eğrisi negatif yönlüdür. Bu halde aynı $\tilde{\Gamma}$ eğrisinin ters yönü Γ eğrisi olarak alınırsa,

$$\int_{\Gamma} f(w)\,dw = -2\pi i \operatorname{Rez}\left[\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right), 0\right] = -2\pi i \operatorname{Rez}(f,\infty)$$

eşitliğini elde ederiz. Böylece,

$$\operatorname{Rez}(f,\infty)=-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} f$$

formülü bulunur. Bu formül, bazı integralleri daha kolay bir biçimde bulmamıza yardım eder.

b) Eğer $\lim_{z\to\infty}\left[-zf(z)\right]$ limiti varsa, bu limit sonsuzluk noktasındaki rezidüye eşittir.

İspat: Eğer

$$\lim_{z\to\infty}\left[-zf(z)\right]$$

limiti varsa,

$$\lim_{z\to\infty}\left[-zf(z)\right]=\lim_{z\to 0}\left[-\frac{1}{z}f\left(\frac{1}{z}\right)\right]=-\lim_{z\to 0}\left[-z\frac{1}{z^2}f\left(\frac{1}{z}\right)\right]=-\operatorname{Rez}\left[\frac{1}{z^2}f\left(\frac{1}{z}\right),0\right]=\operatorname{Rez}(f,\infty)$$

yazılır. Bu da gösterilmek istenen sonuçtur.

c) γ, basit kapalı ve pozitif yönlü bir eğri ise,

$$\int_{\gamma} f=-2\pi i\sum\left[\gamma \text{ eğrisinin dışındaki sonsuz dahil,f fonksiyonunun rezidüleri}\right]$$

dir.

İspat: Γ, f fonksiyonunun tüm kutuplarını içine alan yeteri kadar büyük yarıçaplı bir çember olsun. Bu kutuplar, γ ile Γ eğrileri arasında kalsın. Buna göre, γ_0, γ eğrisi ile Γ eğrisini birleştiren bir doğru parçası ise $-\gamma-\gamma_0+\Gamma+\gamma_0$ eğrisi kapalıdır.

Böylece,

$$\int_{-\gamma} f + \int_{\Gamma} f = \int_{-\gamma-\gamma_0+\Gamma+-\gamma_0} f = 2\pi i \sum_{i=1}^{n} \begin{bmatrix} f \text{ fonksiyonunun } \gamma \text{ ile } \Gamma \text{eğrileri} \\ \text{arasındaki kutuplarının rezidüleri} \end{bmatrix}$$

formülü yazılır. Buradan,

$$\int_{-\gamma} f + \int_{\Gamma} f = -\int_{-\gamma} f - 2\pi i \operatorname{Rez}(f,\infty) = 2\pi i \sum_{i=1}^{n} \begin{bmatrix} \text{sonsuz noktası hariç}, f \text{ fonksiyonunun} \\ \gamma \text{ eğrisi dışındaki rezidüleri} \end{bmatrix}$$

formülü bulunur.

d) $\dfrac{(z-1)^3}{z\left(\dfrac{z}{2}\right)^3}$ fonksiyonunun, $z=\infty$ noktasındaki rezidüsünü hesaplayınız.

Çözüm:

Örneğin (b) kısmına göre,

$$f(z) = \frac{(z-1)^3}{z\left(\dfrac{z}{2}\right)^3}$$

denirse,

$$\lim_{z\to\infty}\left[-zf(z)\right] = \lim_{z\to\infty}\left[-z\frac{(z-1)^3}{z\left(\dfrac{z}{2}\right)^3}\right] = -8 = \operatorname{Rez}(f,\infty)$$

olarak bulunur.

e) γ, sıfır merkezli ve üç yarıçaplı olmak üzere,

$$\int_{\gamma} \frac{(z-1)^3}{z(z+2)^3} dz$$

integralinin hesabı için, iki yöntem bulunuz.

Çözüm:

$$f(z) = \frac{(z-1)^3}{z(z+2)^3} dz$$

olsun.

$$\text{Rez}(f,0) = \lim_{z \to 0} \left[z \frac{(z-1)^3}{z(z+2)^3} \right] = -\frac{1}{8} \text{ ve}$$

$$\text{Rez}(f,-2) = \frac{1}{2} \lim_{z \to 2} \frac{d^2}{dx^2} \left[(z+2)^3 \frac{(z-1)^3}{z(z+2)^3} \right] = \frac{9}{8}$$

olur. Böylece, rezidü teoremine göre,

$$\int_{\gamma} \frac{(z-1)^3}{z(z+2)^3} dz = 2\pi i \left(\frac{9}{8} - \frac{1}{8} \right) = 2\pi i$$

olarak bulunur. Diğer bir yol da,

$$\text{Rez}(f,\infty) = -\lim_{z \to \infty} \left[zf(z) \right] = -\lim_{z \to \infty} \left[z \frac{(z-1)^3}{z(z+2)^3} \right] = -1$$

formülüdür.

Buradan,

$$\int_{\gamma} \frac{(z-1)^3}{z(z+2)^3} dz = -2\pi i(-1) = 2\pi i$$

olarak bulunur.

BÖLÜM 3. NÖTRİNO ÇEKİRDEK SAÇILMA TESİR KESİTLERİNİN REZİDÜ TEOREMİ YARDIMIYLA HESAPLANMASI

3.1. Giriş

Süpernovaların oluşumunda nötrino çekirdek saçılma tesir kesitleri $\sigma\tau_3$ nükleer matris elemanlarının hesaplanmasını gerektirir. Bu matris elemanlar günümüzde kabuk-model çerçevesinde belirli yaklaşımlar kullanılarak hesaplanmaktadır. Fakat çekirdek çok parçacıklı bir sistem olduğundan ve kolektif etkileşmeler ön plana çıktığından çekirdek yapısının incelenmesinde daha gelişmiş modellere ve metotlara ihtiyaç vardır. Çekirdek kolektif hareketinin ve titreşimlerinin incelenmesinde mikroskobik model çok başarılıdır. Günümüzde mikroskobik modelin QRPA metodu bu modelin en başarılı yöntemlerinden biridir.

Çekirdek kolektif seviyelerinin uyarılması ile meydana gelen esnek olmayan nötrino çekirdek saçılma tesir kesitinin (σ_ν) analitik ifadesi aşağıdaki gibidir [1], [2];

$$\sigma_v = \frac{G_F^2 g_A^2}{\pi} \sum_{i>0} (E_v - \omega_i)^2 \,|< \Psi_i \,|\, \sum_i \sigma_i t_3^i \,|\, \Psi_0 >|^2 \, \delta(E_v - E_v' - \omega_i) \qquad (3.1.1)$$

Burada G_F ve g_A sırasıyla Fermi ve eksenel vektör sabitleridir. E_ν (E_v') gelen (saçılan) nötrinonun enerjisi, Ψ_i (Ψ_0) çekirdek uyarılma (taban) durum dalga fonksiyonları, ω_i ise çekirdek uyarılma enerjisidir. σ ve τ_3 sırasıyla spini ve isotopspini temsil eden Pauli matrisleridir.

$< \Psi_i \mid \sum_i \sigma(i)t_3(i) \mid \Psi_0 >$ matris elemanları nükleer modeller çerçevesinde hesaplanabilirler. Buradan görüldüğü gibi nötrino-çekirdek saçılma tesir kesitlerini hesaplamak için nükleer matris elemanlarının güvenilir bir biçimde elde edilmesi gerekir.

Spin matris elemanlarının k momentumlu S_k toplamlarını kullanarak (3.1.1) tesir kesiti için aşağıdaki formülü elde ederiz:

$$\frac{d\sigma}{dE_\nu} = \frac{G_F^2 g_A^2}{\pi}(E_\nu^2 S_0 - 2E_\nu S_1 + S_2) \tag{3.1.2}$$

Burada S_k spin momentumu aşağıdaki şekilde belirtilmiştir.

$$S_k = \sum_{i>0}{}' \omega_i^k \,|< i \,|\sum_j \sigma(j)t_3(j)\,|\,0 >|^2 \,\delta(E_\nu - E_\nu^{'} - \omega_i) \tag{3.1.3}$$

Bu ifadedeki $\sum{}'$ simgesindeki ′ indis i'ye göre toplamın $\omega_i<E_\nu$ değerleri için geçerli olduğunu göstermektedir.

S_k momentumları toplam kuralları olarak da bilinmektedir. Toplam kurallarının enerji ağırlıksız (NEWSR, k=0) ve enerji ağırlıklı (EWSR, k≠0) olmak üzere iki türü vardır. Kuantum mekaniğinde mikro sistemlerin (atomlar, çekirdekler vb.) bir halden diğer hale geçiş matris elemanlarının toplamı, modelden bağımsız bağıntılarla sınırlandırılır ve bu bağıntılar toplam kuralları olarak adlandırılır [3]. Bu kurallar geçiş operatörlerinin veya fiziksel büyüklüklere karşılık gelen diğer operatörlerin komutasyon bağıntılarının ve seviyelerin dalga fonksiyonlarının tamset oluşturduğu matematiksel özelliklerinin yardımıyla elde edilir. Bu toplam kurallarının değerleri çoğunlukla modelden bağımsız olduklarından çok büyük öneme sahiptirler. Toplam kuralı metodu nükleer saçılma reaksiyonlarında, elektromanyetik ve beta geçişlerde nükleer kolektif uyarılmaların özelliklerini incelemek için mikroskobik çekirdek modelinde yoğun biçimde kullanılır [4]. Mesela, elektrik çok-kutup foton soğurmanın toplam tesir kesiti elektrik 2^λ-kutuplu geçiş matris elemanlarının EWSR toplam kuralına indirgenebilir [3]. Matris elemanlarının EWSR ve NEWSR toplam kurallarının yardımıyla çekirdeklerdeki dev rezonansların (dipol, kuadropol, GT ve Fermi) enerjileri kolayca tahmin edilebilir [4]. Çekirdek fiziğinde toplam kuralları, kullanılan modellerin güvenirliliğinin ve parametrelerinin net olarak belirlenmesi için çok büyük öneme sahiptir [5].

Küresel çekirdeklerde toplam kuralları sistemin Hamilton fonksiyonunun özdeğer ve özfonksiyonları yardımıyla sayısal olarak başarılı bir şekilde hesaplanmaktadır. Fakat deforme çekirdeklerde çekirdek seviyelerinin yüksek yoğunluğa sahip olması ω_i özdeğerlerinin sayısal olarak bulunmasını oldukça güçleştirir. Bundan dolayı nükleer geçiş matris elemanlarının ve bunlara karşılık gelen toplam kurallarının hesaplanmasında çok büyük hatalar oluşabilir. Mikroskobik modelin Tamm-Dankof yaklaşımında (TDA) nükleer matris elemanlarının analitik özellikleri kullanılarak bu problemin rezidü ve kontur integraller teorisi çerçevesinde çözüm metodu çalışma [6], [7]'de verilmiştir. Daha sonra bu metot QRPA'da beta ve elektromanyetik geçişlere başarıyla uygulanarak uygun toplam kuralları analitik olarak hesaplanmıştır [4]. Bu çalışmada TDA ve QRPA çerçevesinde [6], [7] de ileri sürülen metodu uygulayarak nötrino çekirdek saçılma tesir kesitinin (3.1.1) ifadesindeki S_k toplam kuralları için analitik ifadeler elde edilmiştir.

3.2. Deforme Çekirdeklerde Spin-Titreşim Karakterli 1^+ Seviyeleri

Manyetik dipol etkileşmeleri tek-çekirdeklerin manyetik dipol momentlerine, M1 geçişlerine ve enerji spektrumlarına tesir ederken, çift-çift çekirdeklerde spin-titreşim 1^+ seviyelerini üretir. Buna göre spin kuvvetlerinin deforme çekirdeklerde 1^+ seviyelerini ürettiği varsayılarak bu seviyeleri temsil eden Hamiltoniyen aşağıdaki gibi seçilebilir [8]:

$$H = H_{sqp} + V_{\sigma\tau} \tag{3.2.1}$$

Burada,

$$V_{\sigma\tau} = \frac{1}{2}\chi_{\sigma\tau}\sum_{i\neq j}\sigma_i\sigma_j\tau_z^i\tau_z^j \tag{3.2.2}$$

bağıntısı izovektör spin kuvvetlerini, H_{sqp} ise tek kuaziparçacık Hamiltoniyenini tasvir etmektedir.

Kuaziparçacık tasvirinde spin operatörünün tesir kesitine katkı sağlayan bozon kısmı aşağıdaki şekilde ifade edilir [8]

$$\vec{\sigma}(\tau) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{ss'} \left\{ \sigma_{ss'}^{(\mu)} [C_{ss'}^{+}(\tau) + C_{ss'}(\tau)] \right\} \tag{3.2.3}$$

Burada kullanılan ve açıklanmamış olan tüm bağıntılar referans [9] daki gibidir. RPA da 1^+ seviyeleri dalga fonksiyonlarına bir fonon fonksiyonu olarak bakılabilir:

$$|\Psi_i> = Q_i^+ |\Psi_0> = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{ss',\tau} [\psi_{ss'}^i(\tau) C_{ss'}^{+}(\tau) - \varphi_{ss'}^i(\tau) C_{ss'}(\tau)] |\Psi_0> \tag{3.2.4}$$

Burada Q_i^+ fonon üretim operatörü, $|0\rangle$ ise çift-çift çekirdeğin taban durumuna karşılık gelen fonon vakumudur. Sistemimiz kesikli spektruma sahiptir ve buna karşılık gelen Ψ_i dalga fonksiyonları da

$$\sum_i |\Psi_i\rangle\langle\Psi_i| = 1$$

şeklinde tamset oluştururlar. Bundan dolayı $C_{ss'}$ ve $C_{ss'}^+$ operatörlerine karşılık gelen iki kuaziparçacıklı seviyelerin $\psi_{ss'}^i(\tau)$ ve $\varphi_{ss'}^i(\tau)$ genlikleri şu şekilde normlanmıştır:

$$\sum_{ss'\tau} [\psi_{ss'}^{i\,2}(\tau) - \varphi_{ss'}^{i\,2}(\tau)] = 1 \tag{3.2.5}$$

Hamiltoniyenin özfonksiyon ve özdeğerlerini bulmak için RPA'nın bilinen işlemlerini kullanarak [9] ve

$$\left[H_{sqp} + V_{\sigma\tau}, Q_i^+\right] = \omega_i Q_i^+ \tag{3.2.6}$$

hareket denklemini çözerek 1^+ seviyelerinin enerjisi olan ω_i kökleri için aşağıdaki dispersiyon denklemi alınır:

$$D(\omega_i) = 1 + \chi_{\sigma\tau}\left(F_n(\omega_i) + F_p(\omega_i)\right) = 0 \tag{3.2.7}$$

Burada,

$$F_n(\omega_i) = 2\sum_{\mu} \frac{\varepsilon_\mu \sigma_\mu^2 L_\mu^2}{\varepsilon_\mu^2 - \omega_i^2}, \tag{3.2.8}$$

$$F_p(\omega_i) = 2\sum_{\nu} \frac{\varepsilon_\nu \sigma_\nu^2 L_\nu^2}{\varepsilon_\nu^2 - \omega_i^2} \tag{3.2.9}$$

olmak üzere, ε_μ nükleonların kuaziparçacık enerjisi, ω_i spin-titreşim karakterli 1^+ seviyelerinin fonon enerjileri ($\omega_{-i} \leq \omega \leq \omega_{+i}$) ve σ_μ ise spin operatörünün tek parçacıklı matris elemanlarıdır. İki kuaziparçacıklı seviyelerin

$$\psi_\mu^i = \frac{g_\mu^i + w_\mu^i}{2}$$

$$\varphi_\mu^i = \frac{g_\mu^i - w_\mu^i}{2}$$

genlikleri için,

$$g_\mu^i(n) = \frac{2}{\sqrt{Y(\omega_i)}} \frac{\varepsilon_\mu \sigma_\mu L_\mu}{\varepsilon_\mu^2 - \omega_i^2} \quad w_\mu^i(n) = \frac{2}{\sqrt{Y(\omega_i)}} \frac{\omega_i \sigma_\mu L_\mu}{\varepsilon_\mu^2 - \omega_i^2} \tag{3.2.10}$$

$$g_\nu^i(p) = -\frac{2}{\sqrt{Y(\omega_i)}} \frac{\varepsilon_\mu \sigma_\nu L_\nu}{\varepsilon_\nu^2 - \omega_i^2} \quad w_\nu^i(p) = -\frac{2_i}{\sqrt{Y(\omega_i)}} \frac{\omega_i \sigma_\nu L_\nu}{\varepsilon_\nu^2 - \omega_i^2} \tag{3.2.11}$$

Burada,

$$Y(\omega_i) = Y_n(\omega_i) + Y_p(\omega_i),$$

$$Y_n(\omega_i) = 4\omega_i \sum_{\mu} \frac{\varepsilon_\mu \sigma_\mu^2 L_\mu^2}{(\varepsilon_\mu^2 - \omega_i^2)^2}$$

$$Y_p(\omega_i) = 4\omega_i \sum_{\nu} \frac{\varepsilon_\nu \sigma_\nu^2 L_\nu^2}{(\varepsilon_\nu^2 - \omega_i^2)^2} \tag{3.2.12}$$

dir. Ayrıca manyetik dipol 1^+ seviyelerinin enerjileri $D(\omega_i)$ fonksiyonunun çözümleri olduğundan dolayı

$$D' = \frac{dD(z)}{dz} \tag{3.2.13}$$

olmak üzere,

$$Y(\omega_i) = \frac{1}{\chi_{\sigma\tau}} D'(\omega_i) \tag{3.2.14}$$

eşitliği mevcuttur. Kullanılan izovektör spin-spin kuvvetlerinin ve (3.1.3) ifadesindeki nötrino-çekirdek uyarılma operatörünün (σt_3) simetrilerinden dolayı 1^+ seviyelerinin en karakteristik büyüklüğü, çekirdek taban halinden uyarılmış hallere σt_3 geçiş matris elemanlarıdır:

$$\widetilde{M} = < \Psi_i \,|\, \sum_i \sigma(i) t_3(i) \,|\, \Psi_0 > \tag{3.2.15}$$

spin operatörünün (3.2.3) ve $|\Psi_i>$ dalga fonksiyonunun (3.2.4) ifadesini (3.2.15) de yerine yazarak $\widetilde{M}(\omega_i)$ izovektör spin uyarılma matris elemanı için,

$$\widetilde{M}(\omega_i) = M_n(\omega_i) - M_p(\omega_i) \tag{3.2.16}$$

ifadesini elde ederiz.

Yukarıda

$$M_n(\omega_i) = \sum_{\mu} \sigma_\mu L_\mu g^i_\mu$$

$$M_p(\omega_i) = \sum_{\nu} \sigma_\nu L_\nu g^i_\nu \tag{3.2.17}$$

şeklindedir. Daha sonra (3.2.9) ve (3.2.12) formüllerinin yardımıyla $\widetilde{M}(\omega_i)$ matris elemanı

$$\widetilde{M}(\omega_i) = \frac{1}{2} \frac{\widetilde{F}(\omega_i)}{Y(\omega_i)} \tag{3.2.18}$$

olmak üzere

$$\widetilde{F}(\omega_i) = F_n(\omega_i) - F_p(\omega_i) \tag{3.2.19}$$

şeklinde alınır.

3.3. Enerji Ağırlıklı ve Enerji Ağırlıksız Toplam Kuralları

Nötrino-çekirdek uyarılma geçiş matris elemanlarının S_k toplam kuralı, (3.2.15), (3.2.9) ve (3.2.18) bağıntıları kullanılarak aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$S_k = \frac{1}{4}\sum_{i>0} \omega_i^k \frac{\widetilde{F}(\omega_i)^2}{Y(\omega_i)} \tag{3.3.1}$$

belirtelim ki QRPA metodu ω_i enerjilerinin tüm pozitif ve negatif değerlerini ihtiva ettiği halde, TDA metodunda ω_i enerjileri yalnız pozitif değerler alır. Buna göre QRPA metodunda (3.3.1) ifadesinde

$$Y(-\omega_i) = -Y(\omega_i) \text{ ve } F(-\omega_i) = F(\omega_i)$$

olduğu göz önünde bulunursa toplam altındaki

$$\varphi(z) = \frac{\omega_i^k \widetilde{F}(\omega_i)^2}{Y(\omega_i)}$$

Fonksiyonun ω_i değişkeninin işaretine göre

$$\varphi(-\omega_i) = (-1)^{k+1} \varphi(\omega_i)$$

olduğu görülmektedir. Buradan,

$$S_k = \frac{1}{8}\sum_i \omega_i^k \frac{\widetilde{F}(\omega_i)^2}{Y(\omega_i)} \begin{cases} =0, k-\text{çift} \\ \neq 0, k-\text{tek} \end{cases} \tag{3.3.2}$$

olur.

Küresel çekirdeklerde toplam kuralları başarılı bir şekilde hesaplanmaktadır. Fakat deforme çekirdeklerde çekirdek seviyelerinin yüksek yoğunluğa sahip olması ω_i

özdeğerlerinin (3.2.7) denkleminden sayısal olarak bulunmasını oldukça güçleştirir. Bundan dolayı nükleer geçiş matris elemanlarının ve bunlara karşılık gelen toplam kurallarının hesaplanmasında çok büyük hatalar oluşabilir. Bu bakımdan bu problemin çözüm yolları çalışma [6], [7] de verilmiş ve beta geçiş matris elemanlarının matematiksel özelliklerinden yararlanarak çift beta bozunum toplam kuralı analitik olarak hesaplanmıştır. Bu metot daha sonra çalışma [4] de elektrik ve manyetik dipol geçişlerine başarıyla uygulanmıştır. Biz bu çalışmada [6], [7] de ileri sürülen metodu (3.3.1) ifadesine uygulayarak S_k toplam kuralları için analitik ifadeler elde edeceğiz.

Nötrino-çekirdek saçılma tesir kesitinde yer alan (3.3.1) toplam kuralı için (2.3.14) formülünden yararlanarak aşağıdaki ifade elde edilir,

$$S_k = \frac{1}{4}\chi_{\sigma\tau}\sum_{i>0}\omega_i^k \frac{\widetilde{F}(\omega_i)^2}{D'(\omega_i)} \tag{3.3.3}$$

Kompleks düzlemde analitik fonksiyonların rezidü teoremine göre [10], (3.3.3) ifadesini kontur integral şeklinde aşağıdaki gibi yazabiliriz:

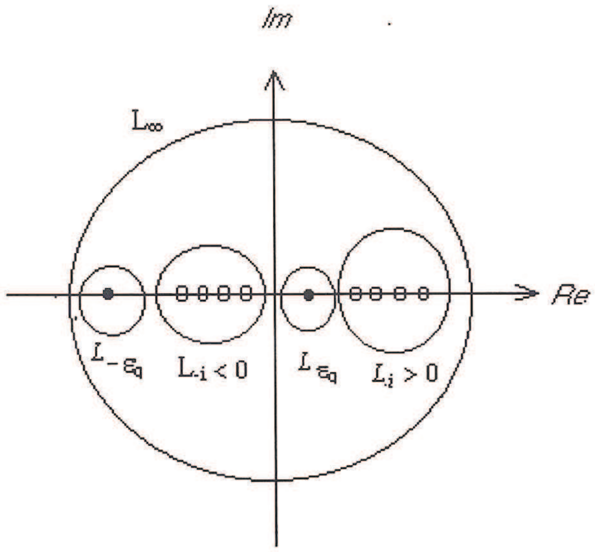
$$S_k = \frac{1}{4}\chi_{\sigma\tau}\frac{1}{2\pi i}\sum_{i>0}\oint \frac{z_i^k\widetilde{F}(z_i)^2}{D(z_i)}dz_i \tag{3.3.4}$$

QRPA metodunda (3.2.2) özelliğinden dolayı (3.1.2) tesir kesitinde çift k momentumlu toplam kuralları S_0 ve S_2 tüm pozitif ve negatif köklerini ihtiva etmek üzere sıfırdır. Buna göre L_i konturu üzere toplam rezidü değerlerini hesaplamak olmadığından. (3.3.4) ifadesinde k=1 olduğunda (3.3.2) den yararlanarak

$$S_1 = \frac{1}{8}\chi_{\sigma\tau}\frac{1}{2\pi i}\sum_{i}\oint \frac{z_i^k\widetilde{F}(z_i)^2}{D(z_i)}dz_i \tag{3.3.5}$$

yazabiliriz. Burada, *i* köklerine göre toplamlar QRPA' da ω_i enerjilerinin tüm pozitif ve negatif değerlerini ihtiva etmektedir.

QRPA' da (3.2.7)' da belirlenen D(z) fonksiyonunun tüm negatif ve pozitif köklerini göz önüne almak suretiyle (3.3.5) ifadesinin kompleks düzlemde integralleme konturu Şekil 3.3.1.'de gösterilmiştir.



Şekil 3.3.1. QRPA metodunda (3.3.5) integrali için z-Kompleks Düzlemi

İntegral altı $f(z) = \dfrac{z_i^k \widetilde{F}(z_i)^2}{D(z_i)}$ fonksiyonun tüm kompleks düzlemde incelenmesi sonucu, $D(\omega_i) = 0$ (bak (3.2.7)) kutuplarından başka ayrıca $z = \mp\varepsilon_\mu$ noktalarında da basit kutuplara sahip olduğu görülür. Bundan başka $z \to \infty$ değerlerinde integral altı ifade z^{-3} ile orantılı olduğundan S_1 integralinin L_∞ konturu üzerinde sıfır olduğu görülmektedir. Buradan Cauchy teoremine göre,

$$S_1 = -\frac{1}{8}\chi_{\sigma\tau}\frac{1}{2\pi i}\sum_\mu [\oint_{L\varepsilon_q} \frac{z_i^k \widetilde{F}(z_i)^2}{D(z_i)} dz_i + \oint_{L-\varepsilon_q} \frac{z_i^k \widetilde{F}(z_i)^2}{D(z_i)} dz] \tag{3.3.6}$$

bulunur. Burada q değişkeni nötron sistemi için q=μ, proton sistemi için ise q=ν değerlerini alır. Uzun ve yorucu hesaplamaların ardından, analitik fonksiyonların rezidü teoreminden yararlanarak kompleks düzlemdeki incelemeler sonucu

$$S_1 = \frac{1}{4}[\sum_\mu \varepsilon_\mu \sigma_\mu^2 L_\mu^2 + \sum_\nu \varepsilon_\nu \sigma_\nu^2 L_\nu^2] \tag{3.3.7}$$

ifadesi elde edilir.

Şimdi Tamm-Dankof metodunu kullanarak (3.1.2) ifadesindeki S_0 ve S_2 toplam momentumlarını hesaplayalım. QRPA dan farklı olarak (3.2.7) seküler denkleminin tüm çözümleri pozitif değere sahiptir. Bu metotta da ω_i uyarılma enerjileri

$$D(\omega_i) = 1 + \chi_{\sigma\tau}\left(F_n(\omega_i) + F_p(\omega_i)\right) = 0 \qquad (3.3.8)$$

denkleminin kökleridir. Burada,

$$F_n(\omega_i) = \sum_\mu \frac{\sigma_\mu^2 L_\mu^2}{\varepsilon_\mu - \omega_i},$$

$$F_p(\omega_i) = \sum_\nu \frac{\sigma_\nu^2 L_\nu^2}{\varepsilon_\nu - \omega_i} \qquad (3.3.9)$$

dır.

Hesaplamalar TDA metodunda da S_k momentumları için elde edilen ifadenin QRPA da elde edilen (3.3.1) ifadesi ile aynı olduğunu göstermiştir:

$$S_k = \frac{1}{4}\sum_{i>0} \omega_i^k \frac{\widetilde{F}(\omega_i)^2}{Y(\omega_i)} \qquad (3.3.10)$$

Burada,

$$Y_n(\omega_i) = \sum_\mu \frac{\sigma_\mu^2 L_\mu^2}{(\varepsilon_\mu - \omega_i)^2},$$

$$Y_p(\omega_i) = \sum_\nu \frac{\sigma_\nu^2 L_\nu^2}{(\varepsilon_\nu - \omega_i)^2} \qquad (3.3.11)$$

şeklindedir ve $\widetilde{F}(\omega_i) = F_n(\omega_i) - F_p(\omega_i)$ ifadesi (3.2.19) da belirlenmiştir Ayrıca manyetik dipol 1^+ seviyelerinin enerjileri $D(\omega_i)=0$ denkleminin çözümleri olduğundan dolayı

$$D' = \frac{dD(z)}{dz} \tag{3.3.12}$$

olmak üzere,

$$Y(\omega_i) = \frac{1}{\chi_{\sigma\tau}} D'(\omega_i) \tag{3.3.13}$$

eşitliği mevcuttur. Belirtelim ki TDA' da elde ettiğimiz (3.3.13) bağıntısı QRPA' daki (3.2.14) formülünün aynısıdır. Buna göre (3.3.10) bağıntısı için QRPA da elde edilen (3.3.3) formülü elde edilir:

$$S_k = \frac{1}{4}\chi_{\sigma\tau} \sum_{i>0} \omega_i^k \frac{\widetilde{F}(\omega_i)^2}{D'(\omega_i)} \tag{3.3.14}$$

Kompleks düzlemde

$$S_k = \frac{1}{4}\chi_{\sigma\tau} \frac{1}{2\pi i} \sum_{i>0} \oint \frac{z_i^k \widetilde{F}(z_i)^2}{D(z_i)} dz_i \tag{3.3.15}$$

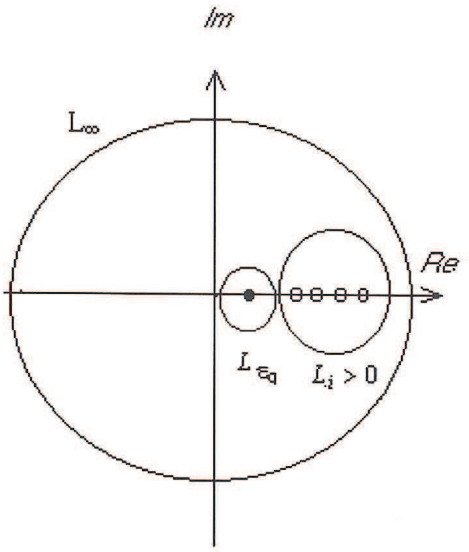
olur.

Şimdi (3.3.15) kontur integralinden S_0 ve S_2 toplam momentumları için

$$S_0 = \frac{1}{4}\chi_{\sigma\tau} \frac{1}{2\pi i} \sum_{i>0} \oint \frac{\widetilde{F}(z_i)^2}{D(z_i)} dz_i \tag{3.3.16}$$

$$S_2 = \frac{1}{4}\chi_{\sigma\tau} \frac{1}{2\pi i} \sum_{i>0} \oint \frac{z_i^2 \widetilde{F}(z_i)^2}{D(z_i)} dz_i \tag{3.3.17}$$

ifadelerini elde ederiz. İncelemeler S_0 ve S_2 integrallerinin kompleks düzlemde aynı kutuplara sahip olduğunu göstermiştir. Bu ifadelerinin kompleks düzlemde integralleme konturleri Şekil 3.3.2.'de gösterilmiştir.



Şekil 3.3.2. QRPA metodunda (3.3.16) ve (3.3.17) integralleri için z-Kompleks Düzlemi

Araştırmalarda S_0 momentumunun (3.3.16) ifadesinde integral altı $f(z) = \frac{\tilde{F}(z_i)^2}{D(z_i)}$ fonksiyonunun tüm kompleks düzlemde incelenmesi sonucu bu fonksiyonun, $D(\omega_i) = 0$ kutuplarından başka $z = \varepsilon_q$ (q=μ, ν) noktalarında da basit kutuplara sahip olduğu görülür. Bundan başka z' nin büyük değerlerinde integral altı ifade QRPA'dan farklı olarak bu defa z^{-2} ila orantılı olduğundan S_0 integralinin L_∞ kontürü üzerinde sıfır olduğu görülmektedir. Buradan Cauchy Teoremine göre,

$$S_0 = -\frac{1}{8}\frac{1}{2\pi i}\sum_{\mu}[\oint_{L_{\varepsilon_q}} \frac{\tilde{F}(z_i)^2}{D(z_i)}dz_i + \oint_{L_{-\varepsilon_q}} \frac{\tilde{F}(z_i)^2}{D(z_i)}dz] \tag{3.3.18}$$

bulunur.

Analitik fonksiyonların rezidü teoreminden yararlanarak kompleks düzlemdeki incelemeler sonucu (3.3.6) formülü için

$$S_0 = \frac{1}{4}[\sum_{\mu}\sigma_{\mu}^2 L_{\mu}^2 + \sum_{\nu}\sigma_{\nu}^2 L_{\nu}^2] \tag{3.3.19}$$

ifadesi elde edilir.

Şimdi S_2 integralini hesaplayalım. İncelemeler (3.3.17) ifadesinde integral altı

$$f(z) = \frac{z_i^2 \widetilde{F}(z_i)^2}{D(z_i)}$$

fonksiyonunun tüm kompleks düzlemde incelenmesi sonucu, $D(\omega_i) = 0$ kutuplarından başka ayrıca $z = \varepsilon_{\mu}$ ve ε_{ν} noktalarında da basit kutuplara sahip olduğu görülür. Burada da Cauchy teoreminden yararlanarak rezidü teoremi yardımıyla

$$S_2 = \frac{1}{4}[\sum_{\mu}\varepsilon_{\mu}^2\sigma_{\mu}^2 L_{\mu}^2 + \sum_{\nu}\varepsilon_{\nu}^2\sigma_{\nu}^2 L_{\nu}^2] + \frac{1}{4}\chi_{\sigma\tau}\frac{1}{2\pi i}\oint_{L_\infty}\frac{z_i^2\widetilde{F}(z_i)^2}{D(z_i)}dz_i \tag{3.3.20}$$

bulunur.

Elde ettiğimiz (3.3.7), (3.3.19) ve (3.3.20) ifadelerinin karşılaştırılması S_2 momentumundan farklı olarak S_0 ve S_1 toplam momentumlarının yalnız ortalama alan parametrelerine bağlı oldukları yani mikroskobik model parametrelerinden bağımsız olduklarını göstermiştir. Sonuç olarak bu makalede nötrino-çekirdek saçılma tesir kesitinin nükleer kısmını ifade eden S_0 ve S_1 toplam momentumlarını etkin kuvvetlerden bağımsız tek parçacık model bazında istenildiği kadar enerji seviyeleri kullanarak mikroskobik modelin karmaşık özdeğer ve özfonksiyon problemini nümerik olarak çözmeden bu problemin analitik yolla nasıl hesaplanabileceğini gösterdik.

KAYNAKLAR

[1] LANGANKE K. et al, Phys. Rev. Lett. 93, 202501-4, 2004.

[2] LEE H. C. Nuclear Physics A294, 473-491, (1978).

[3] BOHR O. and MOTTELSON B.,Nuclear Structure vol.1 and 2, Benjamin, New York, 1975.

[4] ERBIL H., GERÇEKLIOĞLU M., ILHAN M. and KULIEVA.A. "Sum Rule Approach to Nuclear Collective Vibration'', Math. Comp. Appl. 2 1977 1-11.

[5] ROWE D.J. ''Nuclear Collective Motion'' Methuen, London, 1970.

[6] BALAEV S.K., KULIEV A.A. and SALAMOV D.J. Bulletin of academy of sciences of the USSR, Phys. Series 54 1990 38.

[7] ALIEV T.M., BALAEV S.K., KULIEV A.A. AND SALAMOV D.J. Bulletin of academy of sciences of the USSR, Phys. Series 53 19892140.

[8] GABRAKOV S.I., KULIEV A.A., PYATOV N.I, SALAMOV D. J., SCHULZ H. Nucl. Phys. A182, 625 1972.

[9] KULIEV A.A., AMAND F., GÜNER M. and RODIN V. J. Phys. G 30, 1253 2004.

[10] CARTAN H. ''Elementary Theory of Analytic Functions of One or Several Complex Variables'', Dover Publications, New York, 1995.

ÖZGEÇMİŞ

Murat SAĞLAM, 30.09.1982 de Kayseri'nin Kocasinan İlçesi'nde doğdu. İlköğrenimini Şehit Üsteğmen Mustafa Şimşek İlkokulu'nda, ortaöğrenimini ise Sema Yazar Anadolu Lisesi'nde tamamladı. Lisans eğitimini, Sivas Cumhuriyet Üniversitesi, Eğitim Fakültesi Matematik Öğretmenliği Bölümü'nde tamamladı.2006-2009 yılları arasında İstanbul'da özel bir kurumda matematik öğretmeni olarak görev yaptı. 17.08.2009 tarihinde Sakarya Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı'nda yüksek lisans öğrenimine başladı. Halen Kocaeli'nde özel bir kurumda matematik öğretmeni olarak görev yapmakta ve yüksek lisans öğrenimine devam etmektedir.