T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

NORMLU UZAYLARDA BAZI LİNEER OPERATÖRLERİN SPEKTRUMU

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Osman YILMAZ

Enstitü Anabilim Dalı	**:**	**MATEMATİK**
Enstitü Bilim Dalı	**:**	**FONKSİYONLAR TEORİSİ VE FONKSİYONEL ANALİZ**
Tez Danışmanı	**:**	**Yrd. Doç. Dr. Selma ALTUNDAĞ**

Mayıs 2014

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

NORMLU UZAYLARDA BAZI LİNEER OPERATÖRLERİN SPEKTRUMU

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Osman YILMAZ

Enstitü Anabilim Dalı	:	**MATEMATİK**
Enstitü Bilim Dalı	:	**FONKSİYONLAR TEORİSİ VE FONKSİYONEL ANALİZ**

Bu tez 04 / 06 /2014 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Oybirliği ile kabul edilmiştir.

Yrd. Doç. Dr.	**Yrd. Doç. Dr.**	**Yrd. Doç. Dr.**
Selma ALTUNDAĞ	**Mahpeyker ÖZTÜRK**	**Adil BAŞOĞLU**
Jüri Başkanı	**Üye**	**Üye**

TEŞEKKÜR

Bu tezi hazırlarken her türlü desteğini esirgemeyen değerli hocam Yard. Doç. Dr. Selma ALTUNDAĞ başta olmak üzere Sakarya Üniversitesi Matematik Bölümü'ndeki bütün hocalarıma ve ayrıca birlikte çalıştığımız değerli arkadaşım Merve ABAY'a teşekkürlerimi sunmayı bir borç bilirim.

Yüksek lisans eğitimim boyunca maddi ve manevi desteklerini hiçbir zaman esirgemeyen değerli aileme de ayrıca çok teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

$(Ax)_n$	: x dizisinin A matrisi altındaki dönüşüm dizisi
$B(X,Y)$	: X den Y ye sınırlı lineer dönüşümlerin uzayı
$B(r,s)$	: Alt üçgensel ikili bant matrisi
bv	: Sınırlı salınımlı dizilerin uzayı
bv_p	: p. Kuvvetten sınırlı salınımlı dizilerin uzayı
$\mathbb{C}$	: Kompleks sayılar kümesi
c	: Yakınsak dizilerin uzayı
c_0	: Sıfıra yakınsayan dizilerin uzayı
$\oplus$	: Direkt toplam
$\mathcal{D}(T)$	: T operatörünün tanım kümesi
I	: Özdeşlik (birim) dönüşüm
γ	:Yakınsak seri teşkil eden dizilerin uzayı
l_1	: Mutlak yakınsak seri oluşturan dizilerin uzayı
l_p	: p. kuvvetten mutlak yakınsak seri oluşturan dizilerin uzayı
l_∞	: Sınırlı dizilerin uzayı
$L(X,Y)$	: X den Y ye lineer dönüşümlerin uzayı
(X,Y)	: X dizi uzayını Y dizi uzayı içine dönüştüren matrislerin sınıfı

$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$\mathcal{N}(T)$	: T dönüşümünün çekirdek kümesi
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\mathcal{R}(T)$	: T nin görüntü kümesi
$\overline{\mathcal{R}(T)}$	: T nin görüntü kümesinin kapanışı
$\rho(T)$	: T nin çözücü (resolvent) kümesi
$\sigma(T)$	: T nin spektrum kümesi
σ_c	: Sürekli spektrum
σ_p	: Nokta spektrum
σ_r	: Artık spektrum
T^{-1}	: T dönüşümünün tersi
T^*	: T 'nin adjointi
$U(r,s)$	: Üst üçgensel ikili bant matrisi
X^*	: X uzayının duali
ω	: Kompleks ya da reel terimli bütün dizilerin uzayı
φ	: Altın oran

TABLOLAR

ÖZET

Anahtar kelimeler: Spektrum, İnce Spektrum, Spektrumun Alt Bölümleri, Sonsuz Matrisler, Bazı Dizi Uzayları

Bu çalışma dokuz bölümden oluşmaktadır. İlk bölümde spektrum ile ilgili önceki çalışmalar hakkında kısa bir özet verilip ikinci bölümde konuyla ilgili bazı temel tanım ve teoremler verilmiştir.

Üçüncü bölümde normlu uzaylarda lineer operatörlerin spektrumu ve ince spektrumu ile ilgili tanım ve teoremler verilip ayrıca spektrumun alt bölümleri hakkında bazı tanımlar verilmiştir.

Dördüncü bölümde Cesaro operatörünün c_0 dizi uzayı üzerindeki spektrumu verilmiştir.

Beşinci bölümde Rhaly operatörünün bazı dizi uzayları üzerindeki spektrumu incelenmiştir.

Altıncı bölümde Fibonacci sayıları kullanılarak E. E. Kara ve M. Başarır [29], elde edilen Fibonacci matrisinin c ve $l_p,(1<p<\infty)$ dizi uzayları üzerindeki spektrumunu inceledik.

Yedinci bölümde; Üst üçgensel ikili bant matrislerinin ince spektrumu incelenmiştir.

Sekizinci bölümde; $B(r,s)$ matrisinin γ dizi uzayı üzerindeki spektrumu incelenmiştir.

Son olarak dokuzuncu bölümde; $U(r,s)$ matrisinin γ dizi uzayı üzerindeki spektrumunu inceledik.

Bu çalışmada altıncı ve dokuzuncu bölümde yapılan çalışmalar yaptığımız orijinal çalışmalarımızdır.

THE SPECTRUM OF SOME LİNEER OPERATORS İN NORMED SPACES

SUMMARY

Key Words: Spectrum, Fine Spectrum, Subdivisions of Spectrum, Infinite matrices and Some Sequence Spaces

This study consist of nine sections. After a short summary is given about the spectrum literature in the first section, some definitions and theorems are given about the subject in the second section.

In the third section, some definitions and theorems are given about the spectrum and fine spectrum. In addition this, some definitions are given about the subdivisions of spectrum.

In the fourth section,the spectrumof the Cesaro operator over the sequence space c_0 is investigated.

In the fifth section, the spectrum of the Rhaly operator is examined over some sequence spaces.

In the sixth section, we determined the spectrum of the Fibonacci matrix, which is defined by Kara an Başarır in [29], over the c and $l_p, (1 < p < \infty)$.

In the seventh section, the fine spectrum of the upper triangular double band matrices are examined.

In the eighth section, the spectrum of the $B(r,s)$ is examined over the class of convergent series.

In the last section we determined the spectrum of the $U(r,s)$ over the class of convergent series.

The studies which are given in the sixth and ninth sections is our original work.

BÖLÜM 1. GİRİŞ

Spektral teori fonksiyonel analiz ve uygulamalarının bir alt dalı olup genel olarak bir ters operatörün genel özellikleri ile ilgilenir ve bu ters operatör ile asıl operatör arasındaki ilişkiyi anlamamıza olanak sağlar. Spektrum kümesi nokta spektrumu, sürekli spektrum ve artık spektrum olmak üzere üç ayrık kümeden oluşmaktadır. Spektral teorisi fizikte de büyük bir role sahiptir. Mesela, kuantum mekaniğindeki Hamilton dönüşümlerinin nokta spektrumu sistemin sınır durumundaki enerji seviyesine karşılık gelir ve aynı dönüşümlerin sürekli ve artık spektrumu da sistemin dağılım teorisinde önemli rol oynar.

Günümüzde spektrum ve ince spektrum üzerine birçok çalışma vardır. Bu çalışmaları kısaca özetleyecek olursak şöyledir:

Cesaro operatörünün l_2 Hilbert uzayı üzerindeki spektrumunu 1965'te A. Brown, P.R. Halmos ve A.L. Sheilds incelemiştir. 1972'de G. Leibowitz aynı operatörün spektrumunu $l_p\ (1<p<\infty)$ uzayında inceledi. Daha sonra ise Cesaro operatörünün spektrumu sırasıyla, 1985 yılında c_0 uzayında J.B. Reade tarafından, yine 1985 de $l_p\ (1<p<\infty)$ uzayında M. Gonzalez, 1986 da c, bv ve bv_0 uzaylarında J.I. Okutoyi ve 2003 de c_0 ve bv uzaylarında A.M. Akhmedov ile F. Başar tarafından çalışılmıştır. Cesaro operatörünün ince spektrumu ile ilgili çalışmalar ise 1975 de R.B. Wenger c uzayında, 2004 de A.M. Akhmedov ile F. Başar c_0 uzayında yaptığı çalışmalardır. Ağırlıklı ortalama operatörünün spektrumu 1977 de F.P. Cass ve B.E. Rhoades tarafından c dizi uzayında incelendikten sonra 1978 de J.M. Cardlidge aynı operatörü $l_p\ (1<p<\infty)$ uzayında çalışmıştır. Daha sonra B.E. Rhoades bu operatörün sırasıyla 1983 de c uzayında ve 1987 de ise c_0 uzayındaki ince spektrumunu incelemiştir.

Rhaly operatörünün c_0 ve c uzaylarındaki ince spektrumu M. Yıldırım tarafından 1996 da incelendi. c_0 uzayında p-Cesaro operatörünün spektrumunu 1997 de C. Coşkun inceledi.

B. Altay ile F. Başar 2004 de fark operatörünün c_0 ve c uzayları üzerindeki spektrumunu inceledi. Daha sonra 2007 yılında aynı yazar çifti aynı operatörü l_p uzayında incelediler. Aynı yıl içinde A. M. Akhmedov ve F. Başar bu operatörün $bv_p\left(1 \leq p < \infty\right)$ uzayındaki ince spektrumunu belirlediler.

Genelleştrilmiş fark operatörü $B(r,s)$'nin l_1 ve bv uzayları üzeindeki ince spektrumu 2006 yılında H. Furkan, H. Bilgiç ve K. Kayaduman tarafından incelendikten sonar 2008 de aynı operatörün l_p ve bv_p uzaylarındaki ince spektrumunu ise H. Bilgiç ve H. Furkan incelemiştir. H. Bilgiç ve H. Furkan yazar çifti 2007 de $B(r,s)$ matrisinin daha genel hali olan $B(r,s,t)$ matrisini tanımlayıp bu matrisin l_1 ve bv uzayları üzerindeki ince spektrumunu hesaplamış ve 2010 da ise bu operaörün ince spektrumunu l_p ve bv_p uzaylarında incelemişlerdir. Ayrıca V. Karakaya ile M. Altun'un c_0 ve c uzaylarında üst üçgensel ikili bant matrislerin ince spektrumunu belirlemesi ve P.D. Srivastava ile S. Kumar'ın Δ_v operatörünü l_1 uzayında incelemesi 2010 da spektrum ile ilgili yapılan diğer çalışmalardır. P.D. Srivastava ile S. Kumar 2011 de bir de Δ_{uv}^2 operatörünün c_0 uzayındaki spektrumunu inceledi ve aynı yıl içinde M. Altun üçgensel Toeplitz matrislerinin ince spektrumunu çalışmıştır. 2012 yılında ise P.D. Srivastava ile S. Kumar Δ_{uv}'yi l_1 uzayında ve V. Karakaya, M. Dzh. Manafov ve N. Şimşek l_p uzayında ikinci dereceden fark operatörünün ince spektrumunu incelediler. Son olarak 2013 yılında A. Karaisa ile F. Başar $l_p(0 < p < \infty)$ uzayında $U(r,s,t)$ üst üçgensel üçlü bant matrisinin ince spektrumunu ve M. Yeşilkayagil ile F. Başar c_0 ve c uzaylarında lambda matrisinin ince spektrumunu belirlediler.

BÖLÜM 2. BAZI TANIM VE TEOREMLER

Tanım 2.1 (Metrik uzay)

$X \neq \varnothing$ ve $d : X \times X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. Eğer d fonksiyonu $\forall x, y, z \in X$ için

i) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

ii) $d(x, y) = d(y, x)$

iii) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

şartlarını sağlıyorsa d fonksiyonuna X üzerinde bir metrik denir ve (X, d) ikilisine de bir metrik uzay denir. [33].

Tanım 2.2 (Yoğun küme)

(X, d) bir metrik uzay ve $S \subset X$ olsun. Eğer $\overline{S} = X$ ise S kümesine X 'de yoğun bir küme denir. [33].

Tanım 2.3 (Lineer uzay)

$X \neq \varnothing$ ve $\mathbb{C}$ kompleks sayıların cismi olsun. Eğer

$+ : X \times X \to X$ ve $\cdot : \mathbb{C} \times X \to X$ fonksiyonları $\forall x, y, z \in X$ ve $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ için

1) $x + y = y + x$,

2) $(x + y) + z = x + (y + z)$,

3) $x + e = x$ olacak şekilde bir $e \in X$ vardır,

4) $x + (-x) = e$ olacak şekilde bir $-x \in X$ vardır,

5) $x.1 = x$

6) $\lambda(x+y)=\lambda x+\lambda y$,

7) $(\lambda+\mu)x=\lambda x+\mu x$,

$\lambda(\mu x)=(\lambda\mu)x$

şartlarını sağlıyorsa X kümesine $\mathbb{C}$ cismi üzerinde bir lineer (vektör) uzay denir. [33].

Tanım 2.4 (Normlu uzay)

X bir lineer uzay ve $\|\cdot\|: X\to\mathbb{R}$ olsun. Her $x,y\in X$ her λ skaleri için

i) $\|x\|=0 \Leftrightarrow x=\theta$

ii) $\|\lambda x\|=|\lambda|\|x\|$

iii) $\|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|$

şartlarını sağlayan $\|\cdot\|$ fonksiyonuna X üzerinde bir norm denir ve $(X,\|\cdot\|)$ ikilisine de normlu uzay denir. [33].

Tanım 2.5 (Cauchy dizisi)

(X,d) bir metrik uzay ve (x_n) de X bir dizi olsun. Her $\varepsilon>0$ için $n,m>N$ olduğunda

$d(x_n,x_m)<\varepsilon$

olacak şekilde bir $N=N(\varepsilon)$ sayısı bulunabiliyorsa (x_n) dizisine bir Cauchy dizisi denir. [33].

Tanım 2.6 (Tamlık)

X deki her Cauchy dizisi yakınsak ise (X,d) metrik uzayına tam metrik uzay denir. [33].

Tanım 2.7 (Banach uzayı)

$\left(X,\|\cdot\|\right)$ bir normlu uzay olsun. Eğer X norm metriğine göre tam ise X e tam normlu uzay veya Banach uzayı denir. [10].

Tanım 2.8 (Lineer operatör)

X ve Y iki lineer uzay ve $T:X\to Y$ bir fonksiyon olsun. Eğer T fonksiyonu $\forall x_1,x_2\in X$ ve bütün λ,μ skalerleri için

$$T\left(\lambda x_1+\mu x_2\right)=\lambda T\left(x_1\right)+\mu T\left(x_2\right)$$

şartını sağlanıyorsa T ye lineer operatör denir. X uzayından Y uzayına tanımlı bütün lineer operatörlerin kümesi $L(X,Y)$ ile gösterilir. [30].

Özel olarak $Y=\mathbb{C}$ veya $Y=\mathbb{R}$ alınırsa T ye fonksiyonel denir. T lineer operatörünün tanım kümesi $\mathcal{D}\left(T\right)$, görüntü kümesi $\mathcal{R}(T)$ ve çekirdeği $\mathcal{N}(T)$ olmak üzere

$$\mathcal{D}\left(T\right)=\left\{x\in X:\ Tx\in Y\right\}$$
$$\mathcal{R}(T)=\left\{y\in Y:\ y=Tx,\ x\in X\right\}$$
$$\mathcal{N}(T)=\left\{x\in\mathcal{D}(T):\ Tx=\theta\right\}$$

şeklinde tanımlanır. Ayrıca T operatörünün normu $x\in\mathcal{D}\left(T\right)$ olmak üzere

$$\|T\|=\sup_{x\neq\theta}\frac{\|Tx\|}{\|x\|}$$

ile tanımlanır. [30].

Tanım 2.9 (Sınırlı Lineer Operatör)

X ve Y iki normlu uzay olsun ve $\mathcal{D}\left(T\right)\subset X$ olmak üzere $T:\mathcal{D}(T)\to Y$ bir lineer operatör olsun. Eğer her $x\in\mathcal{D}\left(T\right)$ için $\|Tx\|\leq c\|x\|$ olacak şekilde bir $c\geq 0$ reel sayısı varsa T operatörüne sınırlı lineer operator denir. X uzayından Y uzayına tanımlı bütün sınırlı lineer operatörlerin kümesi $B(X,Y)$ ile gösterilir. Burada $X=Y$ alınırsa $B(X,X)$ yerine sadece $B(X)$ yazılır. [30].

Tanım 2.10 (Ters dönüşüm)

X ve Y normlu uzaylar, $\mathcal{D}(T) \subset X$ ve $\mathcal{R}(T) \subset Y$ olmak üzere $T : \mathcal{D}(T) \to Y$ birebir bir lineer dönüşüm olsun. $\mathcal{R}(T)$ uzayından $\mathcal{D}(T)$ uzayına tanımlı ve her $y_0 \in \mathcal{R}(T)$ elemanını bir $x_0 \in \mathcal{D}(T)$ elemanına taşıyan $T^{-1} : \mathcal{R}(T) \to \mathcal{D}(T)$ dönüşümüne T nin ters dönüşümü denir. [30].

Tanım 2.11 (Dual uzay)

X herhangi bir normlu uzay olmak üzere X den $\mathbb{C}$ ye tanımlı tüm sınırlı lineer fonksiyonellerin oluşturduğu uzaya X in dual uzayı (veya sürekli duali) denir ve X^* ile gösterilir. Yani $X^* = B(X, \mathbb{C})$ dir. [33].

Tanım 2.12 (Adjoint operator)

X ve Y iki normlu uzay olsun ve $T : X \to Y$ sınırlı lineer operatörü verilsin. X^* ve Y^* sırasıyla X ve Y nin dual uzaylarını göstermek üzere her $x \in X$ ve her $g \in Y^*$ için

$$\left(T^* g\right) x = g(Tx)$$

şeklinde tanımlanan $T^* : Y^* \to X^*$ operatörüne T nin adjoint operatörü denir. [30].

Tanım 2.13 (Fibonacci Dizisi)

Fibonacci sayıları kullanılarak $f_0 = 0$ ve $f_1 = 1$, $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$; $n \geq 2$ lineer rekürans bağıntısıyla tanımlanan $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisine Fibonacci dizisi denir. [29].

Fibonacci sayıları çoğu bilimlerde birçok özelliklere sahiptir. Örneğin; Fibonacci dizisinin ardışık terimlerinin oranları $\varphi = \left(1+\sqrt{5}\right)/2$ sayısına yakınsamaktadır. Yani $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f_{n+1}}{f_n} = \varphi$ dir.

Bu $\varphi = \left(1+\sqrt{5}\right)/2$ sayısı da altın oran olarak adlandırılmaktadır. Ayrıca Fibonacci sayılarının sağladığı diğer birkaç özellik aşağıda verilmiştir:

i) $\sum\limits_{k=1}^{n} f_n = f_{n+2} - 1$; $n \geq 2$,

ii) $\sum\limits_{k=1}^{n} f_n^2 = f_n f_{n+1}$; $n \geq 1$,

iii) $\sum\limits_{k=1}^{n} 1/f_k$ yakınsaktır.

[29].

Teorem 2.1 X bir normlu uzay ve $T \in B(X)$ olsun. Bu durumda $T^* \in B(X^*)$ olup $\|T\| = \|T^*\|$ dır. [14].

Teorem 2.2 T nin yoğun bir görüntü kümesine sahip olması için gerek ve yeter şart $T^* \in B(X^*)$ adjoint operatörünün bire-bir olmasıdır. [23].

Teorem 2.3 X bir normlu uzay ve $T \in B(X)$ olsun. Bu durumda T^{-1} in mevcut olması için gerek ve yeter şart T^* ın örten olmasıdır. [23].

Teorem 2.4 X ve Y normlu uzaylar ve $T \in L(X,Y)$ olsun. Bu durumda T^{-1} in mevcut olması için gerek ve yeter şart $\mathcal{N}(T)$ uzayının sadece sıfır vektöründen oluşmasıdır. [30].

Teorem 2.5 T operatörünün sınırlı bir terse sahip olması için gerek ve yeter şart T^* ın örten olmasıdır. [23].

Teorem 2.6 X ve Y normlu uzaylar ve $\mathcal{D}(T) \subset X$ olmak üzere $T : \mathcal{D}(T) \to Y$ bir lineer operatör olsun. Bu durumda

i) T operatörünün sürekli olması için gerek ve yeter şart sınırlı olmasıdır.
ii) Eğer T tek bir noktada sürekli ise süreklidir.

[30].

Tanım 2.14 (Dizi uzayı)

Tanım kümesi doğal sayılar olan $x : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ şeklindeki bir fonksiyona kompleks terimli dizi denir. Tüm kompleks terimli dizlerin uzayına ω diyelim. Bu durumda ω nın herhangi bir alt vektör uzayına bir dizi uzayı denir.

Bazı özel dizi uzayları aşağıdaki gibi tanımlıdır:

1) $c = \left\{ x = x_k : \lim_k x_k \text{ mevcut} \right\}$,

2) $c_0 = \left\{ x = x_k : \lim_k x_k = 0 \right\}$,

3) $l_\infty = \left\{ x = x_k : \sup_k |x_k| < \infty \right\}$,

4) $l_p = \left\{ x = (x_k) : \sum_k |x_k|^p < \infty, 1 < p < \infty \right\}$,

5) $bv = \left\{ x = (x_k) : \sum_k |x_k - x_{k+1}| < \infty \right\}$,

6) $bv_p = \left\{ x = (x_k) : \sum_k |x_k - x_{k+1}|^p < \infty \right\}$.

Ayrıca yakınsak seri teşkil eden dizilerin uzayı da γ ile gösterilir ve

$$\gamma = \left\{ x = (x_k) \in \omega : \left(\sum_{k=0}^{n} x_k \right) \in c \right\}$$

şeklinde tanımlıdır.

Bu uzay $\|x\|_{(l_1:l_1)}=\sum_{k=0}^{\infty}|x_k|$ normu ile l_1 uzayına izomorfiktir. Matris temsili A olan $T:\gamma\to\gamma$ dönüşümü sınırlı bir lineer operator ise $T^*:\gamma^*\to\gamma^*$ opeatörünün matris temsili A matrisinin transpozu olur. [20].

Tanım 2.15 (Matris dönüşümleri)

X ve Y iki dizi uzayı ve $A=(a_{nk})$ da kompleks ya da reel terimli sonsuz bir matris olsun. Eğer $x=(x_k)\in X$ ve $k,n\in\mathbb{N}$ için

$$(Ax)_n=\sum_k a_{nk}x_k$$

serisi yakınsak ise x dizisinin A matrisi altındaki dönüşüm dizisi olan $Ax=\{(Ax)_n\}_{(n\in\mathbb{N})}$ mevcuttur denir. Her $x\in X$ için dönüşüm dizisi mevcut ve Y uzayında ise A matrisi X ten Y ye bir matris dönüşümü tanımlar ve $A:X\to Y$ şeklinde yazılır.

X dizi uzayını Y dizi uzayına dönüştüren tüm matrislerin sınıfı $(X:Y)$ ile gösterilir ve A, X den Y ye bir matris dönüşümü olmak üzere $A\in(X:Y)$ yazılır.

Teorem 2.7 $A=(a_{ij})$ matrisinin c uzayından yine bu uzaya tanımlı sınırlı lineer bir $T\in B(c)$ operatörünü vermesi için gerek ve yeter şart:

i) A matrisinin satırları l_1 uzayında ve onların l_1 normları sınırlı,

ii) A matrsinin bütün sütunları c uzayında,

iii) A matrsinin satır dizilerinin toplamı c uzayında

olmasıdır. [43].

T operatörünün normu, satırların l_1 normlarının supremumudur.

Teorem 2.8 $A=(a_{ij})$ matrisinin c_0 uzayından yine bu uzaya tanımlı sınırlı lineer bir $T \in B(c_0)$ operatörünü vermesi için gerek ve yeter şart:

i) A matrisinin satırları l_1 uzayında ve onların l_1 normları sınırlı,

ii) A matrsinin sütunları c_0 uzayında

olmasıdır. [43].

T operatörünün normu, satırların l_1 normlarının supremumudur.

Teorem 2.9 $A=(a_{ij})$ matrisinin l_1 uzayından yine bu uzaya tanımlı sınırlı lineer bir $T \in B(l_1)$ operatörünü vermesi için gerek ve yeter şart A matrsinin sütunlarının l_1 normlarının supremumunun sınırlı olmasıdır. [18].

T operatörünün, normu satırların l_1 normlarının supremumudur.

Teorem 2.10 $A=(a_{ij})$ matrisinin l_∞ uzayından yine bu uzaya tanımlı sınırlı lineer bir $T \in B(l_\infty)$ operatörünü vermesi için gerek ve yeter şart A matrsinin satırlarının l_1 normlarının supremumu sınırlı olmasıdır. [18].

T operatörünün, normu satırların l_1 normlarının supremumudur.

Teorem 2.11 Eğer $1<p<\infty$ ve $A \in (l_\infty, l_\infty) \cap (l_1, l_1)$ ise $A \in (l_p, l_p)$ dir. [18].

BÖLÜM 3. NORMLU UZAYLARDA LİNEER OPERATÖRLERİN SPEKTRUMU VE İNCE SPEKTRUMU

Bu bölümde normlu uzaylarda lineer operatörler için spektrum, resolvent (çözücü) ve ince spektrum kavramlarına yer verilmiştir.

3.1 Spektrum

Tanım 3.1.1 (Resolvent (çözücü) operator)

$X \neq \{\theta\}$ bir kompleks normlu uzay ve $\mathcal{D}(T) \subset X$ olmak üzere $T : \mathcal{D}(T) \to \mathbb{R}$ bir lineer operator olsun. $\mathcal{D}(T)$ üzerinde tanımlı I birim operatörü ve $\lambda \in \mathbb{C}$ olmak üzere T_λ operatörünü

$T_\lambda = T - \lambda I$

biçiminde tanımlayalım. Eğer T_λ operatörü bir terse sahip ve tersi lineer ise bu operatöre T nin *resolvent* (çözücü) operatörü denir ve $R_\lambda(T) = T_\lambda^{-1} = (T - \lambda I)^{-1}$ veya kısaca R_λ şeklinde gösterilir.

T_λ^{-1} resolvent operatörü, $T_\lambda x = y$ eşitliğini çözmede yardımcı olduğundan çözücü isminin kullanımı tam da uygundur. Daha da önemlisi T_λ^{-1} operatörünün özelliklerinin incelenmesi T operatörünü anlamak için temel olacaktır. Doğal olarak T_λ ve T_λ^{-1}'nin çoğu özelliği λ kompleks sayısına bağlıdır ve spektral teori de bu özellikler ile ilgilenir.

Tanım 3.1.2 (Resolvent ve Spektrum)

$X \neq \{\theta\}$ bir kompleks normlu uzay ve $\mathcal{D}(T) \subset X$ olmak üzere $T:\mathcal{D}(T) \to R$ bir lineer operator olsun. Eğer

T_λ^{-1} mevcut,

T_λ^{-1} sınırlı,

T_λ^{-1} X uzayında yoğun bir küme üzerinde tanımlı

şartları sağlanıyorsa $\lambda \in \mathbb{C}$ sayısına T nin bir regüler değeri denir. T nin tüm regüler değerlerinin oluşturduğu kümeye ise T nin resolvent kümesi denir ve $\rho(T)$ ile gösterilir. Resolvent kümesinin kompleks düzlemdeki tümleyini olan $\sigma(T) = \mathbb{C} \setminus \rho(T)$ kümesine ise T'nin spektrum kümesi denir. Spektrum kümesi, nokta (point) spektrum, sürekli (continuous) spektrum ve artık (residual) spektrum olmak üzere üç ayrık kümeden oluşur.

Tanım 3.1.3 (Özdeğer ve Özvektör)
$T: X \to Y$ bir lineer dönüşüm olsun. Eğer $Tx = \lambda x$ olacak şekilde X de bir $x \neq \theta$ elemanı varsa $\lambda \in \mathbb{C}$ sayısına T nin özdeğeri, $x \in X$ elemanına da T nin bir özvektör denir. [30].

Bu tanıma göre "$\lambda \in \mathbb{C}$ sayısının T nin bir özdeğeri olması için gerek ve yeter şart $(T - \lambda I)$ operatörünün birebir olmamasıdır." önermesi doğrudur. Gerçekten de $\lambda \in \mathbb{C}$, T nin bir özdeğeri ise $Tx = \lambda x$ olacak şekilde X de bir $x \neq \theta$ elemanı vardır. Buradan $(T - \lambda I)x = \theta$ dolayısıyla $x \in \mathcal{N}(T)$ olacaktır. $x \neq \theta$ aldığımızdan $\mathcal{N}(T) \neq \varnothing$ olur. Bu da $(T - \lambda I)$ nın birebir olmadığını gösterir. Benzer şekilde bunun tersi de gösterilebilir. Buradan şu sonuç elde edilir.

Sonuç 3.1.1 $X \neq \{\theta\}$ ve $T \in B(X)$ olsun. O halde λ kompleks sayısı T nin bir özdeğeri ise $\lambda \in \sigma(T)$ olur. [30].

Tanım 3.1.4 (Nokta spektrum) $R_\lambda = T_\lambda^{-1}$ resolvent operatörünün olmadığı $\lambda \in \mathbb{C}$ sayılarının oluşturduğu kümedir ve bu küme $\sigma_p(T)$ ile gösterilir. Bir $\lambda \in \sigma_p(T)$ kompleks sayısı T nin bir özdeğeri olarak adlandırılır.

Tanım 3.1.5 (Sürekli spektrum) $R_\lambda = T_\lambda^{-1}$ resolvent operatörünün mevcut olduğu, $(R3)$ şartının sağlandığı fakat $(R2)$ şartının sağlanmadığı kümedir ve $\sigma_c(T)$ ile gösterilir.

Tnaım 3.1.6 (Artık spektrum) $R_\lambda = T_\lambda^{-1}$ resolvent operatörünün mevcut olduğu fakat $(R3)$ şartının sağlanmadığı kümedir ve $\sigma_r(T)$ ile gösterilir. Burada $R_\lambda = T_\lambda^{-1}$ resolvent operatörü sınrlı olup olmaması önemli değildir. Bu durumda $\sigma(T)$ spektrum kümesini

$$\sigma(T,X) = \sigma_p(T,X) \cup \sigma_c(T,X) \cup \sigma_r(T,X)$$

olarak yazabiliriz. Bu kümeleri bir tabloda gösterelim.

Tablo 3.1.1 Spektrum ve resolvent kümelerinin şartları

λ	Sağlanan şartlar	Sağlanmayan şartlar
$\rho(T)$	$(R1)$-$(R2)$-$(R3)$	
$\sigma_p(T)$		$(R1)$
$\sigma_c(T)$	$(R1)$-$(R3)$	$(R2)$
$\sigma_r(T)$	$(R1)$	$(R3)$

Bilindiği gibi X sonlu boyutlu bir normlu uzay ise $T: X \rightarrow X$ lineer operatörü sınırlıdır ve T^{-1} in mevcut olması için gerek ve yeter şart T nin birebir olmasıdır. Buradan şu sonucu elde edilir.

Sonuç 3.1.2 $X \neq \{\theta\}$ sonlu boyutlu bir normlu uzay ve $T: X \rightarrow X$ bir lineer operator olsun. Bu durumda $\sigma(T)=\sigma_p(T)$ dir.

Teorem 3.1.1 Bir X normlu lineer uzay üzerindeki T lineer operatörünün $\rho(T)$ resolvent kümesi açıktır. Dolayısıyla $\sigma(T)$ spektrum kümesi kapalı bir kümedir.

3.2 İnce (Fine) spectrum

X herhangi bir Banach uzayı ve $T \in B(X)$ olmak üzere $R(T)$ ve T^{-1} için şu durumlar söz konusudur:

I. $R(T)=X$,

II. $R(T) \neq \overline{R(T)}=X$,

III. $\overline{R(T)} \neq X$

ve

(1) T^{-1} mevcut ve sürekli,

(2) T^{-1} mevcut ve süreksiz,

(3) T^{-1} mevcut değil.

Bu durumlar birlikte düşünülürse I_1, I_2, I_3, II_1, II_2, II_3, III_1, III_2 ve III_3 olmak üzere dokuz farklı durum meydana gelir. Mesela; T operatörü (II) ve (3) şartlarını sağlıyorsa $T \in II_2$ yazılır. Eğer $T_\lambda \in I_1$ ya da $T_\lambda \in II_1$ ise bu durumda λ kompleks sayısı T nin resolvent kümesi $\rho(T,X)$ in bir elemanıdır. Diğer durumlar ise T nin spektrum kümesini verir. [20].

Burada nokta, sürekli ve artık spektrum tanımlarında yola çıkılarak:

$$\sigma_p(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda I \in I_3, II_3, III_3\}$$
$$\sigma_c(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda I \in I_2, II_2\}$$
$$\sigma_r(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda I \in III_1, III_2\}$$

sonuçlarına ulaşılır. Bu durumlar bir tablo ile gösterilirse,

Tablo 3.1.2 İnce spektrum incelemeleri

	I	II	III
1	$\rho(T)$	$\rho(T)$	$\sigma_r(T)$
2	$\sigma_c(T)$	$\sigma_c(T)$	$\sigma_r(T)$
3	$\sigma_p(T)$	$\sigma_p(T)$	$\sigma_p(T)$

biçiminde olur.

3.3 Spektrumun Alt Bölümleri

Spektrum ve ince spektrum dışında Appell [9], spektrumun alt bölümleri olarak adlandırılan yaklaşık nokta (approximate point) spektrum, hatalı (defect) spektrum ve sıkıştırma (compression) spektrum olmak üzere üç spektrum kümesi bulmuştur.

Tanım 3.3.1 (Yaklaşık nokta spektrum)

X bir Banach uzayı olmak üzere, T, X uzayında sınırlı bir lineer operator ve $x = (x_k)$ da X de bir dizi olsun. Eğer

i) $k \to \infty$ için $\|Tx_k\| \to 0$

ii) $\|x_k\| = 1$

şartları sağlanıyorsa $x = (x_k)$ dizisine bir Weyl dizisi denir. Buradan T nin yaklaşık nokta (approximate point) spektrumu

$$\sigma_{ap}(T,X)=\{\lambda\in\mathbb{C}:\lambda I-T \text{ için bir Weyl dizisi mevcuttur}\}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 3.3.2 (Hatalı spektrum)

T nin hatalı (defect) spektrumu $\sigma_{\delta}(T,X)=\{\lambda\in\mathbb{C}:\lambda I-T \text{ örten değildir}\}$ olarak tanımlanır

Tanım 3.3.3 (Sıkıştırma spektrum)

T nin sıkıştırma (compression) spektrumu ise $\sigma_{co}(T,X)=\left\{\lambda\in\mathbb{C}:\overline{R(\lambda I-T)}\neq X\right\}$ şeklinde tanımlanır.

Bu kümeler ayrık olmak zorunda değildir. Ayrıca Appell [9], spektrumun alt bölümleri ve $\sigma(T,X)$ spektrum kümesi arasında

$$\sigma(T,X)=\sigma_{ap}(T,X)\cup\sigma_{\delta}(T,X)$$

$$\sigma(T,X)=\sigma_{ap}(T,X)\cup\sigma_{CO}(T,X)$$

$$\sigma_{r}(T,X)=\sigma_{co}(T,X)\setminus\sigma_{c}(T,X)$$

$$\sigma_{c}(T,X)=\sigma(T,X)\setminus\left[\sigma_{p}(T,X)\cup\sigma_{co}(T,X)\right].$$

ifadelerin geçerli olduğunu göstermiştir.

Bir lineer operatörün spektrumunun alt bölümleri ile ilgili tablo aşağıda verilmiştir:

Tablo 3.1.2 Bir lineer operatörün spektrumunun alt bölümleri

		1	2	3
		T_α^{-1} mevcut ve sınırlı	T_α^{-1} mevcut fakat sınırsız	T_α^{-1} mevcut değil
I	$R(T-\alpha I)=X$	$\alpha \in \rho(T,X)$	-	$\alpha \in \sigma_p(T,X)$ $\alpha \in \sigma_{ap}(T,X)$
II	$\overline{R(T-\alpha I)}=X$	$\alpha \in \rho(T,X)$	$\alpha \in \sigma_c(T,X)$ $\alpha \in \sigma_{ap}(T,X)$ $\alpha \in \sigma_\delta(T,X)$	$\alpha \in \sigma_p(T,X)$ $\alpha \in \sigma_{ap}(T,X)$ $\alpha \in \sigma_\delta(T,X)$
III	$R(T-\alpha I)\neq X$	$\alpha \in \sigma_r(T,X)$ $\alpha \in \sigma_\delta(T,X)$ $\alpha \in \sigma_{co}(T,X)$	$\alpha \in \sigma_r(T,X)$ $\alpha \in \sigma_{ap}(T,X)$ $\alpha \in \sigma_\delta(T,X)$ $\alpha \in \sigma_{co}(T,X)$	$\alpha \in \sigma_p(T,X)$ $\alpha \in \sigma_{ap}(T,X)$ $\alpha \in \sigma_\delta(T,X)$ $\alpha \in \sigma_{co}(T,X)$

[9].

BÖLÜM 4. CESARO OPERATÖRÜNÜN c_0 DİZİ UZAYINDA SPEKTRUMU

Bu bölümde 1985 de J. B. Reade [36], tarafından çalışılan Cesaro operatörünün c_0 dizi uzayı üzerindeki spektrumu incelenmiştir.

Cesaro operatörü, bir $x=(x_n)$ dizisini onun aritmetik ortalaması olan $y=(y_n)=\left(\dfrac{x_0+x_1+\cdots+x_n}{n+1}\right)$ dizisine dönüştüren bir operatördür ve C ile gösterilir. Bu operatörün matris temsili

$$C=\left(c_{nk}\right)=\begin{cases}\dfrac{1}{n+1} & ,0\le k\le n\\ 0 & ,k>n\end{cases}$$

biçiminde tanımlanır. Yani Cesaro matrisi

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \dots \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

Teorem 4.1 $C:c_0\to c_0$ sınırlı bir lineer operatördür ve $\|C\|=1$ dir.

İspat. $C \in B(c_0)$ nin lineer olduğunu göstermek zor değildir. O halde $\|C\| = 1$ olduğunu gösterelim. c_0 dizi uzayından c_0 a tanımlı bir operatörün normu Teorem 2.8 gereğince operatörün matris temsili olan matrisin satırlarının l_1 normlarının supremumudur. O halde C matrisinden $\|C\| = 1$ olduğu hemen görülür.

Teorem 4.2 $\sigma_p(C, c_0) = \varnothing$ dir.

İspat. Kabul edelim ki $\theta \neq x \in c_0$ için $Cx = \lambda x$ eşitliği sağlansın. Bu eşitliği çözersek

$$\begin{aligned} x_1 &= \lambda x_1 \\ \frac{1}{2}(x_1 + x_2) &= \lambda x_2 \\ &\vdots \end{aligned}$$

lineer denklem sistemi elde edilir. Eğer $x = (x_n)$ dizisinin sıfırdan farklı ilk terimi x_N ise $\lambda = \dfrac{1}{N}$ olur ve her $n \geq N$ için

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{n}{n+1-N} \geq 1$$

elde edilir. Buradan $n \to \infty$ için $x_n \to 0$ olur. Bu da $x \in c_0$ olmasıyla çelişir. O halde böyle bir $\theta \neq x \in c_0$ elemanı yoktur. Böylece ispat biter.

Lemma 4.3 Eğer $\operatorname{Re}\left(\dfrac{1}{\lambda}\right) = \alpha$ ise $n \to \infty$ için $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left|1 - \frac{1}{k\lambda}\right| \sim \frac{1}{n^{\alpha}}$ 'dır. Burada $a_n \sim b_n$ notasyonu ile (a_n / b_n) ve (b_n / a_n) dizilerinin sınırlı olması ifade edilmektedir.

Teorem 4.4 $\sigma_p(C^*, l_1) = \left\{\lambda \in \mathbb{C} : \left|\lambda - \dfrac{1}{2}\right| < \dfrac{1}{2}\right\} \cup \{1\}$ dir.

İspat. $\theta \neq x \in l_1$ için $C^* x = \lambda x$ eşitliğini çözersek

$$x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \cdots = \lambda x_1$$
$$\frac{1}{2}x_2 + \cdots = \lambda x_2$$
$$\vdots$$

denklem sistemini ve bu denklem sisteminden de $x_n = \prod_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{1}{k\lambda}\right)x_1$ bulunur. $x \in l_1$ olduğundan $\sum_n |x_n| = \sum_n \left(\prod_{k=1}^{n-1}\left|1-\frac{1}{k\lambda}\right|\right) < \infty$ olmaslıdır. Lemma 4.3 gereğince $\text{Re}\left(\frac{1}{\lambda}\right) = \alpha$ olmak üzere $\sum_n \left(\prod_{k=1}^{n-1}\left|1-\frac{1}{k\lambda}\right|\right)$ serisi ile $\sum_n \frac{1}{|n|^{\alpha}}$ serisinin karakteri aynıdır. $\sum_n \frac{1}{|n|^{\alpha}} < \infty$ olması için gerek ve yeter şart $\alpha > 1$ olmasıdır. Bu da $\left|\lambda - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{2}$ ifadesine denktir. İspatın bu kısmını Reade (1985) göstermiştir. Daha sonra Okutoyi ve Thorpe $\lambda = 1$ in de C^* için bir özdeğer olduğunu göstermiştir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.5 $\sigma\left(C, c_0\right) = \left\{\lambda \in \mathbb{C} : \left|\lambda - \frac{1}{2}\right| \le \frac{1}{2}\right\}$ dir.

İspat. Burada $\left|\lambda - \frac{1}{2}\right| > \frac{1}{2}$ için $\left(C - \lambda I\right)^{-1} \in B(c_0)$ olduğunu göstermek yeterlidir. Eğer $\left(C - \lambda I\right)x = y$ eşitliğinde x in terimleri y nin terimleri cinsinden yazılırsa $\left(C - \lambda I\right)^{-1} = \left(a_{nk}\right)$ olmak üzere

$$a_{nk}=\begin{cases}\dfrac{\lambda^{n-(k+1)}}{(n+1)\prod\limits_{i=k+1}^{n+1}\left(\lambda-\frac{1}{i}\right)} & ,0\le k<n\\[2ex] \dfrac{1}{\lambda-\dfrac{1}{n+1}} & ,n=k\\[2ex] 0 & ,k>n\end{cases}$$

olarak bulunur. Lemma 4.3 gereğince her sabit k için $\lim\limits_{n\to\infty}a_{nk}=0$ olur. Şimdi de $\left|\lambda-\frac{1}{2}\right|>\frac{1}{2}$ için $\left\|\left(C-\lambda I\right)^{-1}\right\|=\sup\limits_{n}\sum\limits_{k}|a_{nk}|<\infty$ olacağını görelim. $n\ge 1$ için $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{\lambda}\right)=\alpha<1$ olmak üzere Lemma 4.3 yardımıyla

$$\sum_{k=0}^{\infty}|a_{nk}|=\sum_{k=0}^{n-1}\left|\frac{\lambda^{n-(k+1)}}{(n+1)\prod\limits_{i=k+1}^{n+1}\left(\lambda-\frac{1}{i}\right)}\right|+\left|\frac{1}{\lambda-\dfrac{1}{n+1}}\right|=\left|\frac{1}{\lambda-\dfrac{1}{n+1}}\right|+\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{(n+1)|\lambda|^{2}\prod\limits_{i=k+1}^{n+1}\left|\lambda-\frac{1}{i}\right|}\right)$$

$$=\left|\frac{1}{\lambda-\dfrac{1}{n+1}}\right|+\frac{1}{(n+1)|\lambda|^{2}}\left\{\frac{1}{\prod\limits_{i=1}^{n+1}\left|1-\dfrac{1}{i\lambda}\right|}+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\prod\limits_{i=1}^{k}\left|1-\dfrac{1}{i\lambda}\right|}{\prod\limits_{i=1}^{n+1}\left|1-\dfrac{1}{i\lambda}\right|}\right\}$$

$$\le O(1)+\frac{1}{(n+1)|\lambda|^{2}}\left\{(n+1)^{\alpha}+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1/k^{\alpha}}{1/(n+1)^{\alpha}}\right)\right\}$$

$$=O(1)+\frac{(n+1)^{\alpha-1}}{|\lambda|^{2}}\left\{1+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k^{\alpha}}\right\}$$

$$\le O(1)+\frac{(n+1)^{\alpha-1}}{|\lambda|^{2}}\left\{1+\int_{0}^{n-1}\frac{dx}{x^{\alpha}}\right\}$$

$$\le O(1)+\frac{(n+1)^{\alpha-1}}{|\lambda|^{2}}\left\{1+\frac{(n-1)^{\alpha-1}}{1-\alpha}\right\}$$

$$\le O(1)+\frac{1}{|\lambda|^{2}}\left\{(n+1)^{\alpha-1}+O(1)\right\}$$

sonucuna ulaşılır. $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{\lambda}\right)=\alpha<1$ olduğundan $\alpha-1<0$ olur. Dolayısıyla yukardaki ifade sonludur. O halde $\left|\lambda-\frac{1}{2}\right|>\frac{1}{2}$ için $\lambda\in\rho\left(C,c_0\right)$ olur. Buna denk olarak $\left|\lambda-\frac{1}{2}\right|\leq\frac{1}{2}$ için $\lambda\in\sigma\left(C,c_0\right)$ olur.

BÖLÜM 5. RHALY OPERATÖRÜNÜN c_0 ve c DİZİ UZAYLARI ÜZERİNDEKİ SPEKTRUMU

Bu bölümde 1996 da M. Yıldırım ın [45], çalışmışmış olduğu Rhaly operatörünün c_0 ve c dizi uzayları üzerindeki spektrumu incelenmiştir.

Rhaly operatörü, $a=(a_n)$ bir skaler dizi olmak üzere

$$R_a = a_{nk} = \begin{cases} a_n & ,0 \le k < n \\ 0 & ,k > n \end{cases}$$

olarak tanımlıdır. Bu operatörün matris gösterimi ise

$$\begin{bmatrix} a_0 & 0 & 0 & \dots \\ a_1 & a_1 & 0 & \dots \\ a_2 & a_2 & a_2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Özel olarak $a_n = \dfrac{1}{(n+1)}$ alınırsa Rhaly operatörü Cesaro operatörüne dönüşür. Burada Rhaly operatörünün spektrumu, $a=(a_n)$ skaler dizisi için

i) $L = \lim\limits_{n}(n+1)a_n$ limiti mevcut, sonlu ve sıfırdan farklı

ii) $\forall n \in \mathbb{N}$ için $a_n > 0$

iii) $i \ne j$ için $a_i \ne a_j$

iv) $a=(a_n)$ monoton artan bir dizi

şartları altında incelenmiştir.

5.1 Rhaly Operatörünün c_0 Uzayındaki Spektrumu

Bu bölümde Rhaly operatörünün c_0 dizi uzayı üzerindeki spektrumu incelnmiştir ve $S=\{a_n : n=0,1,2,\ldots\}$ olarak alınmıştır.

Teorem 5.1.1 R_a Rhaly operatörü olmak üzere $0 \neq \lim_n (n+1)a_n < \infty$ olsun. Bu durumda $S \cap (2L,\infty) \subset \sigma_p(R_a,c_0)$ olur.

İspat. $\theta \neq x \in c_0$ için $R_a x = \lambda x$ eşitliği çözülürse

$$
\begin{aligned}
&a_0 x_0 = \lambda x_0 \\
&a_1(x_0+x_1) = \lambda x_1 \\
&a_2(x_0+x_1+x_2) = \lambda x_2 \\
&\qquad\qquad \vdots
\end{aligned}
$$

denklem sistemi elde edilir. Buradan $\forall n \geq 1$ için $(a_0-\lambda)x_0 = 0$ ve $(\lambda a_n^{-1}-1)x_n = a_{n-1}^{-1}\lambda x_{n-1}$ eşitlikleri sağlanır. Eğer $\lambda = 0$ ise $\forall n \in \mathbb{N}$ için $a_n > 0$ olduğundan $x=\theta$ olur. Bu da bir çelişki olduğundan $0 \notin \sigma_p(R_a,c_0)$'dır. Eğer x dizisinin sıfırdan farklı ilk terimi x_m ise bu durumda $\lambda = a_m$ olur ve $n \geq m+1$ için $x_n = \prod_{j=m+1}^{n} \frac{\lambda a_{j-1}^{-1}}{\lambda a_j^{-1}-1}$ olarak bulunur. $l_2 \subset c_0$ olduğundan $p_n = \frac{1}{n a_n^2}$ olmak üzere Kummer testine göre

$$
\lim_{n\to\infty}\left(p_n \left|\frac{x_n}{x_{n+1}}\right|^2 - p_{n+1} \right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n a_n^2} \frac{|\lambda - a_{n+1}|^2}{|\lambda|^2} \frac{a_n^2}{a_{n+1}^2} - \frac{1}{(n+1)a_{n+1}^2} \right)
$$

$$
= \lim_{n\to\infty} \frac{|\lambda|^2 - 2(n+1)a_{n+1}\operatorname{Re}\lambda + (n+1)a_{n+1}^2}{n(n+1)a_{n+1}^2|\lambda|^2}
$$

$$= \frac{|\lambda|^2 - 2L\operatorname{Re}\lambda}{L^2|\lambda|^2} = \frac{1}{L^2}\left(1 - L\frac{2\operatorname{Re}\lambda}{|\lambda|^2}\right) = v > 0$$

olmalıdır. $v > 0$ olması ise $\lambda = a_m > 2L$ ifadesine eşdeğerdir. Sonuç olarak $S \cap (2L, \infty) \subset \sigma_p(R_a, c_0)$ olur.

Teorem 5.1.2 $0 < L < \infty$ için

$$S \cup \left\{\lambda : \left|\lambda - \frac{L}{2}\right| < \frac{L}{2}\right\} \subset \sigma_p\left(R_a^*, c_0^*\right) \subset S \cup \left\{\lambda : \left|\lambda - \frac{L}{2}\right| \le \frac{L}{2}\right\} \setminus \{0\}$$

olur.

İspat. $\theta \neq x \in l_1$ için $R_a^* x = \lambda x$ eşitliğini çözersek

$$\begin{aligned} a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots &= \lambda x_0 \\ a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots &= \lambda x_1 \\ a_2x_2 + \cdots &= \lambda x_1 \\ &\vdots \end{aligned} \tag{5.1}$$

denklem sistemini elde ederiz. Bu dnklem sisteminden $\lambda a_n^{-1} x_{n+1} = \left(\lambda a_n^{-1} - 1\right) x_n$ eşitliği elde edilir. Eğer $\lambda = 0$ ise $x = \theta$ olup bu da bir çelişki olduğundan $\lambda = 0$ sayısı R_a^* için bir özdeğer değildir. Ayrıca $x_{n+1} = \left(1 - \frac{a_n}{\lambda}\right) x_n$ olacağından her $\lambda = a_m \in S$ için λ'nın bir özdeğer olacağı açıktır. Şimdi de $\left|\lambda - \frac{L}{2}\right| < \frac{L}{2}$ için λ'nın bir özdeğer olacağını gösterelim. Yine (5.1)'den $x_n = \prod_{j=0}^{n-1}\left(1 - \frac{a_j}{\lambda}\right) x_0$ olur. $x \in l_1$ olduğundan $\sum |x_n| < \infty$ olmalıdır. O halde Raabe testini kullanırsak

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{|x_n|}{|x_{n+1}|}-1\right)=\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{\left|\frac{x_n}{x_{n+1}}\right|^2-1}{\left|\frac{x_n}{x_{n+1}}\right|+1}\right)=\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{\frac{|\lambda|^2}{|\lambda-a_n|^2}-1}{\frac{|\lambda|}{|\lambda-a_n|}-1}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n 2\operatorname{Re}\lambda-a_n^2}{|\lambda-a_n|\left(|\lambda|+|\lambda-a_n|\right)}\right)=\frac{L\operatorname{Re}\lambda}{|\lambda|^2}$$

olup eğer $\frac{L\operatorname{Re}\lambda}{|\lambda|^2}>1$ ise $\sum|x_n|$ serisi yakınsak $\frac{L\operatorname{Re}\lambda}{|\lambda|^2}<1$ ise $\sum|x_n|$ serisi ıraksak olacaktır. $\frac{L\operatorname{Re}\lambda}{|\lambda|^2}>1$ ifadesi de $\left|\lambda-\frac{L}{2}\right|<\frac{L}{2}$ ifadesine denk olduğundan $\left|\lambda-\frac{L}{2}\right|<\frac{L}{2}$ için $x\in l_1$ olur. $\left|\lambda-\frac{L}{2}\right|=\frac{L}{2}$ için λ sayısının bir özdeğer olup olmadığı belli değildir. Böylece ispat biter.

Lemma 5.1.3 Eğer $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{\lambda}\right)=\alpha$ ise $N\to\infty$ için $\prod_{k=0}^{N-1}\left|1-\frac{a_k}{\lambda}\right|\sim\frac{1}{N^{\alpha L}}$'dır. Burada $a_n\sim b_n$ notasyonu ile $\left(a_n/b_n\right)$ ve $\left(b_n/a_n\right)$ dizilerinin sınırlı olması ifade edilmektedir.

İspat. $\frac{1}{\lambda}=\alpha+i\beta$ ve $x\in\mathbb{R}$ olmak üzere $e^x\geq 1+x$ eşitsizliğini kullanırsak

$$\prod_{n=0}^{N-1}\left|1-\frac{a_n}{\lambda}\right|=\prod_{n=0}^{N-1}\left(\left|1-\frac{a_n}{\lambda}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}=\prod_{n=0}^{N-1}\left\{1-2\alpha a_n+\left(\alpha^2+\beta^2\right)a_n^2\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$=\prod_{n=0}^{N-1}\left\{\exp\left(-2\alpha a_n+\left(\alpha^2+\beta^2\right)a_n^2\right)\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq\exp\left\{\sum_{n=0}^{N-1}\left(-\alpha a_n+O(a_n^2)\right)\right\}\leq\exp\left\{\sum_{n=0}^{N-1}\frac{1}{n+1}+O(a_n^2)\right\}$$

$$\leq \exp\left\{-\alpha L \log(N) + O(1)\right\} \leq \frac{O(1)}{N^{\alpha L}}$$

olur. Benzer şekilde

$$\prod_{n=0}^{N-1}\left|1-\frac{a_n}{\lambda}\right|^{-1} = \prod_{n=0}^{N-1}\left\{1+\alpha a_n + O(a_n^2)\right\} \leq \exp\left\{\sum_{n=0}^{N-1}\alpha a_n + O(a_n^2)\right\}$$

$$\leq \exp\left\{\alpha L \log(N) + O(a_n^2)\right\} \leq O(1)N^{\alpha L}$$

olur. Böylece ispat biter.

Teorem 5.1.4 $0 < L < \infty$ olmak üzere $\sigma\left(R_a, c_0\right) = \left\{\lambda : \left|\lambda - \frac{L}{2}\right| \leq \frac{L}{2}\right\} \cup S$ dir.

İspat. Teorem 5.1.2 nin sonucu kullanılarak ve Teorem 3.1.2 den $\sigma\left(T^*\right) = \sigma\left(T\right)$ olduğundan

$$S \cup \left\{\lambda : \left|\lambda - \frac{L}{2}\right| < \frac{L}{2}\right\} \subset \sigma_p\left(R_a^*, c_0^*\right) \subseteq \sigma\left(R_a^*, c_0^*\right) = \sigma\left(R_a, c_0\right)$$

kapsamaları sağlanır. Ayrıca spectrum kümesi kapalı bir küme olduğundan

$$S \cup \left\{\lambda : \left|\lambda - \frac{L}{2}\right| \leq \frac{L}{2}\right\} \subseteq \sigma\left(R_a, c_0\right)$$

yazılabilir. Şimdi bu son ifadenin ters kapsamını gösterelim. $\left|\lambda - \frac{L}{2}\right| > \frac{L}{2}$ ve $\lambda \neq a_m$ $\left(m = 0, 1, 2, \ldots\right)$ olsun. $\frac{1}{\lambda} = \alpha + i\beta$ olmak üzere $\left|\lambda - \frac{L}{2}\right| > \frac{L}{2}$ için $\alpha L < 1$ olacağı kolayca görülebilir. $T = \lambda I - R_a$ olmak üzere $T^{-1} = \left(a_{nk}\right)$ operatörü

$$T^{-1}=\left(a_{nk}\right)=\begin{cases}\dfrac{1}{\lambda-a_n} & ,k=n\\ \dfrac{a_n}{\lambda^2\prod\limits_{j=k}^{n}\left(1-\dfrac{a_j}{\lambda}\right)} & ,k<n\\ 0 & ,k>n\end{cases}$$

şeklindedir. $\alpha L<1$ ve $\lambda\neq a_m\ \ (m=0,1,2,\dots)$ olduğundan $\forall k\in\mathbb{N}$ için Lemma 5.1.3 den

$$\lim_{n\to\infty}a_{nk}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{|\lambda|^2\prod\limits_{j=k}^{n}\left|1-\dfrac{a_j}{\lambda}\right|}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(n+1\right)^{\alpha L}a_n n^{\alpha L-1}}{\left(k-1\right)^{\alpha L}}=0$$

olur. Diğer taraftan $n\geq 1$ için ve $\alpha L<1$ olmak üzere Lemma 5.1.3 ü kullanırsak

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left|a_{nk}\right|=\left|a_{nn}\right|+\sum_{k=0}^{n-1}\left|a_{nk}\right|=\frac{1}{\left|\lambda-a_n\right|}+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{a_n}{|\lambda|^2\prod\limits_{j=k}^{n}\left|1-\dfrac{a_j}{\lambda}\right|}$$

$$=\frac{1}{\left|\lambda-a_n\right|}+\frac{a_n}{|\lambda|^2\prod\limits_{j=k}^{n}\left|1-\dfrac{a_j}{\lambda}\right|}\left\{1+\sum_{k=1}^{n-1}\prod_{j=0}^{k-1}\left|1-\frac{a_j}{\lambda}\right|\right\}$$

$$\leq O(1)+\frac{a_n\left(n+1\right)^{\alpha L}}{|\lambda|^2}\left\{1+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k^{\alpha L}}\right\}$$

$$\leq O(1)+\frac{\left(n+1\right)a_n\left(n+1\right)^{\alpha L-1}}{|\lambda|^2}\left\{1+\int_0^{n-1}\frac{dx}{x^{\alpha L}}\right\}$$

$$\leq O(1)+K\left(n+1\right)^{\alpha L-1}\left\{1+\frac{\left(n+1\right)^{1-\alpha L}}{1-\alpha L}\right\}\leq O(1)+K\left\{\left(n+1\right)^{\alpha L-1}+O(1)\right\}$$

$$\leq O(1)+K\left\{\left(n+1\right)^{\alpha L-1}+O(1)\right\}$$

sonucuna ulaşırız. O halde $\alpha L < 1$ için $\sup_n \sum_k |a_{nk}| < \infty$ olur. Yani $T^{-1} = (\lambda I - R_a)^{-1} \in B(c_0)$ olur ve $\lambda \in \rho(R_a, c_0)$'dır. Sonuç olarak $\sigma(R_a, c_0) = \left\{\lambda : \left|\lambda - \frac{L}{2}\right| \leq \frac{L}{2}\right\} \cup S$ olur.

5.2 Rhaly Operatörünün c Dizi Uzayındaki Spektrumu

Leibowitz, [31] de "R_a operatörünün c uzayı üzerinde sınırlı bir lineer operator olması için gerek ve yeter şart $\{(n+1)a_n\}$ dizisinin yakınsak olmasıdır." olduğunu göstermiştir. Ayrıca $R_a : c \to c$ ve $L = \lim_{n\to\infty}(n+1)a_n$ olmak üzere $R_a^* \in B(l_1)$ ve

$$R_a^* = \begin{bmatrix} L & 0 \\ 0 & R_a^t \end{bmatrix}$$

olarak bilinir.

Rhaly operatörünün c dizi uzayları üzerindeki spektrumu ile ilgili teoremlerin ispatı c_0 uzayındaki ispat yöntemlerinin aynısı kullanılarak gösterilebilir. Bu yüzden bu kısımda bu teoremlerin sadece ifadeleri verilmiştir.

Teorem 5.2.1 $0 < L < \infty$ için $S \cap (2L, \infty) \subset \sigma_p(R_a, c)$ dir.

Teorem 5.2.2 $0 < L < \infty$ için

$$\left\{\lambda : \left|\lambda - \frac{L}{2}\right| < \frac{L}{2}\right\} \cup S \cup \{L\} \subset \sigma_p(R_a^*, c^*) \subset S \cup \left(\left\{\lambda : \left|\lambda - \frac{L}{2}\right| \leq \frac{L}{2}\right\} \setminus \{0\}\right)$$

olur.

Teorem 5.2.3 $0 < L < \infty$ olmak üzere $\sigma(R_a, c) = \left\{ \lambda : \left| \lambda - \frac{L}{2} \right| \leq \frac{L}{2} \right\} \cup S$ dir.

Ayrıca Cartlidge, eğer $A \in B(c)$ ise $\sigma(A,c) = \sigma(A, l_\infty)$ olduğunu göstermiştir. [13] O halde şu sonucu verebiliriz.

Sonuç 5.2.4 $0 < L < \infty$ olmak üzere $\sigma(R_a, l_\infty) = \left\{ \lambda : \left| \lambda - \frac{L}{2} \right| \leq \frac{L}{2} \right\} \cup S$ dir.

Rhaly operatörünün özel durumları için iki örnek verelim.

Örnek 5.2.1. Eğer $a = \left(\frac{n+3}{n^2+1} \right)$ ise $\left\{ \lambda : \left| \lambda - \frac{1}{2} \right| < \frac{1}{2} \right\} \cup \{1,2,3\} \subset \sigma_p\left(R_a^*, l_1\right)$, $\sigma_p(R_a, c_0) = 0$ ve $\sigma(R_a, c_0) = \left\{ \lambda : \left| \lambda - \frac{1}{2} \right| \leq \frac{1}{2} \right\} \cup \{2,3\}$ olur.

Örnek 5.2.2. Eğer $a = \left(\sin \frac{1}{n+1} \right)$ ise $\left\{ \lambda : \left| \lambda - \frac{1}{2} \right| < \frac{1}{2} \right\} \cup \{1\} \subset \sigma_p\left(R_a^*, l_1\right)$, ve $\sigma(R_a, c_0) = \left\{ \lambda : \left| \lambda - \frac{1}{2} \right| \leq \frac{1}{2} \right\}$ olur.

BÖLÜM 6. FIBONACCI OPERATÖRÜNÜN c ve $l_p, (1 < p < \infty)$ DİZİ UZAYLARI ÜZERİNDEKİ İNCE SPEKTRUMU

E.E. Kara ve M. Başarır [29], Fibonacci sayılarını kullanarak $F = \left(f_{nk}\right)_{n,k=1}^{\infty}$ matrsini

$$f_{nk} = \begin{cases} \dfrac{f_k^{\,2}}{f_n f_{n+1}} & , \quad 1 \le k \le n \\ 0 & , \quad k > n \end{cases}$$

olarak tanımlamışlardır. Fibonacci matrisinin matris gösterimi

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{4}{6} & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{4}{15} & \frac{9}{15} & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{1}{40} & \frac{1}{40} & \frac{4}{40} & \frac{9}{40} & \frac{25}{40} & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

6.1. Fibonacci Operaörünün c Dizi Uzayı Üzerinde İnce Spektrumu

Bu bölümde F Fibonacci matrsinin sınırlılığını gösterip sırasıyla spektrumu, nokta spektrumu, artık spektrumu ve sürekli spektrumu elde edilmiştir.

Lemma 6.1.1 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi Fibonacci sayılarından elde edilen bir dizi olsun. Bu durumda

$$\sup_k\left(f_k^2\sum_{n=k}^{\infty}1/f_nf_{n+1}\right)<\infty$$

eşitsizliği sağlanır. [29].

Teorem 6.1.1 $F:c\to c$ sınırlı bir lineer operatördür ve $\|F\|_{(c:c)}=1$ dir.

İspat. F nin lineer olduğunu göstermek kolaydır. O halde $\|F\|_{(c:c)}=1$ olduğunu gösterelim Teorem 2.7 den F operatörünün normu satırların l_1 normlarının supremumudur. O halde $\sum_{k=1}^{n}f_n^2=f_nf_{n+1}$; $n\geq 1$ ifadesinden yola çıkılarak

$$\|F\|_{(c:c)}=\sup_n\sum_{k=1}^{\infty}|f_{nk}|=\sup_n\left\{\sum_{k=1}^{n}|f_{nk}|+\sum_{k=n+1}^{\infty}|f_{nk}|\right\}=\sup_n\left\{\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{f_k^{\,2}}{f_nf_{n+1}}\right|\right\}=1$$

bulunur.

Teorem 6.1.2 $\sigma(F,c)=\left\{\lambda:\left|\lambda-\frac{1}{\varphi}\right|\leq\frac{1}{2\varphi}\right\}\cup\left\{\frac{f_n}{f_{n+1}}:n\geq 0\right\}\cup\{1\}$ dir.

İspat. Bu teoremi ispatlamak için öncelikle $\left|\lambda-\frac{1}{\varphi}\right|>\frac{1}{2\varphi}$ olacak şekilde tüm λ kompleks sayıları için $(F-\lambda I)^{-1}$ operatörünün $B(c,c)$ olduğunu gösterelim. $\left|\lambda-\frac{1}{\varphi}\right|>\frac{1}{2\varphi}$ için $(F-\lambda I)$ üçgen matris olduğundan tersi vardır.

Kabul edelim ki $y=\left(y_k\right)\in c$ olsun. $(F-\lambda I)x=y$ eşitliğinde x in terimlerini y nin terimleri cinsinden yazarsak;

$$\begin{cases} x_1=-\dfrac{y_0}{\lambda-1} \\ x_2=-\left(\dfrac{y_1}{\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)}+\dfrac{y_0}{f_2f_3\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)(\lambda-1)}\right) \\ x_3=-\left(\dfrac{1}{\left(\lambda-\frac{4}{6}\right)}y_2+\dfrac{1}{f_3f_4\left(\lambda-\frac{4}{6}\right)\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)}y_1+\dfrac{\lambda}{f_3f_4\left(\lambda-\frac{4}{6}\right)\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)(\lambda-1)}y_0\right) \\ \vdots \\ x_n=-\left(\dfrac{1}{\left(\lambda-\dfrac{f_n^2}{f_nf_{n+1}}\right)}y_n+\dfrac{f_n^2}{f_{n+1}f_{n+2}\left(\lambda-\dfrac{f_n^2}{f_nf_{n+1}}\right)\left(\lambda-\dfrac{f_{n-1}^2}{f_{n-1}f_n}\right)}y_{n-1}+\cdots\right. \\ \left.\quad+\dfrac{\lambda^{n-2}.f_2^2}{f_{n+1}f_{n+2}\prod\limits_{k=2}^{n}\left(\lambda-\dfrac{f_k^2}{f_kf_{k+1}}\right)}y_1+\dfrac{\lambda^{n-1}.f_1^2}{f_{n+1}f_{n+2}\prod\limits_{k=1}^{n}\left(\lambda-\dfrac{f_k^2}{f_kf_{k+1}}\right)}y_0\right) \end{cases}$$

ifadesini elde ederiz. Buradan $\left(F-\lambda I\right)^{-1}=(a_{nk})$ ters matrsini

$$a_{nk}=\begin{cases} -\dfrac{\lambda^{n-(k+1)}.f_{k+1}^2}{f_{n+1}f_{n+2}\prod\limits_{i=k}^{n}\left(\lambda-\dfrac{f_i}{f_{i+1}}\right)} & , \quad 0\le k<n \\ -\dfrac{1}{\lambda-\dfrac{f_n}{f_{n+1}}} & , \quad k=n \\ 0 & , \quad k>n \end{cases}$$

olarak elde ederiz. $\left(F-\lambda I\right)^{-1}$ operatörünün $B(c,c)$ olduğunu göstermek için

$$\left\|\left(F-\lambda I\right)^{-1}\right\|_{(c:c)}=\sup_{n}\sum_{k=1}^{\infty}\left|a_{nk}\right|<\infty$$

olduğunu göstermeliyiz. Bunun için $\sum_{k=1}^{\infty}\left|a_{nk}\right|<\infty$ olduğunu gösterelim. $\sum_{k=1}^{\infty}\left|a_{nk}\right|$ serisinin kısmi toplamlar dizisine $\left(S_n\right)$ dersek;

$$S_n=\sum_{k=0}^{n}\left|a_{nk}\right|=\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{f_{k+1}^2}{\left|\lambda\right|^2 f_{n+1}f_{n+2}}.\prod_{i=k}^{n}\frac{1}{\left|1-\frac{f_i}{\lambda f_{i+1}}\right|}\right)+\frac{1}{\left|\lambda-\frac{f_n}{f_{n+1}}\right|}$$

olur. Eğer $\lim_{i\to\infty}\prod_{i=k}^{n}\frac{1}{\left|1-\frac{f_i}{\lambda f_{i+1}}\right|}=\frac{1}{\left|1-\frac{1}{\lambda\varphi}\right|^{n-k+1}}<1$ ise $\prod_{i=k}^{n}\frac{1}{\left|1-\frac{f_i}{\lambda f_{i+1}}\right|}$ sınırlıdır. O halde $\frac{1}{\left|1-\frac{1}{\lambda\varphi}\right|}<1$ için $\prod_{i=k}^{n}\frac{1}{\left|1-\frac{f_i}{\lambda f_{i+1}}\right|}\leq M$ olacak şekilde bir $M>0$ sayısı vardır. Ayrıca $n\to\infty$ için $\frac{1}{\left|\lambda-\frac{f_n}{f_{n+1}}\right|}\to\frac{1}{\left|\lambda-\frac{1}{\varphi}\right|}$ olur. Böylece $\left(S_n\right)$ kısmi toplamlar dizisi sınırlıdır ve dolayısıyla $\sum_{k=1}^{\infty}\left|a_{nk}\right|<\infty$ olur. Bu da $\left(F-\lambda I\right)^{-1}$ in $B(c,c)$ de olduğunu gösterir.

Dolayısıyla $\frac{1}{\left|1-\frac{1}{\lambda\varphi}\right|}\geq 1$ için $\lambda\in\sigma\left(F,c\right)$ olur. $\frac{1}{\left|1-\frac{1}{\lambda\varphi}\right|}\geq 1$ ifadesi de $\left|1-\frac{1}{\lambda\varphi}\right|\leq\frac{1}{2\varphi}$ ifadesine denktir.

Dahası $\lambda=\frac{f_n}{f_{n+1}}$; $n\geq 0$ ve $\lambda=1$ için $\left(F-\lambda I\right)^{-1}$ operatörünün $B\left(c,c\right)$ olmadığı kolayca gösterilebilir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 6.1.3 $\sigma_p(F,c)=\left\{\frac{f_n}{f_{n+1}}:n\geq 0\right\}\cup\{1\}$ dir.

İspat. c de $x \neq \theta$ için $Fx = \lambda x$ eşitliğini çözersek

$$\begin{cases} x_1 = \lambda x_1 \\ x_2 = \dfrac{1}{2\left(\lambda - \dfrac{1}{2}\right)} x_1 \\ x_3 = \dfrac{\lambda}{6\left(\lambda - \dfrac{4}{6}\right)\left(\lambda - \dfrac{1}{2}\right)} x_1 \\ \vdots \\ x_n = \dfrac{\lambda^{n-2}}{f_n f_{n+1}\left(\lambda - \dfrac{f_n}{f_{n+1}}\right)\dots\left(\lambda - \dfrac{1}{2}\right)} x_1 \end{cases}$$

denklem sistemini elde ederiz. $x = (x_n)$ dizisinin sıfırdn farklı ilk terimi x_1 ise $\lambda = 1$ ve buradan $x_1 = x_2 = x_3 = ... = x_n = ...$ elde edilir. Böylece $\lambda = 1$ için $\theta \neq x \in c$ olduğundan $\lambda = 1$ bir özdeğerdir. $x = (x_n)$ dizisinin sıfırdn farklı ilk terimi x_{n_0} ise

$$x_{n_0} = \frac{\lambda^{n_0 - 2}}{f_{n_0} f_{n_0+1}\left(\lambda - \dfrac{f_{n_0}}{f_{n_0+1}}\right)\dots\left(\lambda - \dfrac{4}{6}\right)\left(\lambda - \dfrac{1}{2}\right)} x_1 \ ; \ n > 1$$

olur. Burada $x_{n_0} = 0$ olur ki bu da bir çelişkidir.

Ayrıca $n \geq 0$ için $\lambda = \dfrac{f_n}{f_{n+1}}$ ise $(F - \lambda I)^{-1}$ mevcut olmadığından λ bir özdeğerdir. Böylece ispat tamamlanır.

Eğer $T : c \to c$ sınırlı lineer operatorünün matris temsili A ise $T^* : c^* \to c^*$ adjoint operatörün matris temsili $\mathbb{C} \oplus l_1$ uzayı üzerinde

$$\begin{bmatrix} \chi & 0 \\ b & A^t \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Burada χ, A nın satır toplamlar dizisinin limiti ile A nın sütun limitleri dizisinin toplamlarının farkıdır ve b ise $\forall k \in \mathbb{N}$ için A nın k. Sütununun limitidir. Yani;

$$\chi = \lim_n \sum_k a_{nk} - \sum_k \lim_n a_{nk} \quad \text{ve} \quad b = \lim_n a_{nk}$$

şeklindedir. O halde $F : c \to c$ için $F^* \in B(l_1)$ matrisi

$$F^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & F^t \end{bmatrix}$$

şeklinde olacaktır.

Teorem 6.1.4 $\sigma_p(F^*, c^*) = \left\{ \lambda : \left| \lambda - \frac{1}{\varphi} \right| < \frac{1}{2\varphi} \right\} \cup \left\{ \frac{f_n}{f_{n+1}} : n \geq 0 \right\} \cup \{1\}$ dir.

İspat. $c^* \cong l_1$ uzayında $h \neq \theta$ için $F^* h = \lambda h$ eşitliğini çözersek

$$\left.\begin{array}{l} h_1 = \lambda h_1 \\ h_2 + \frac{1}{2} h_2 + \frac{1}{6} h_3 + \ldots = \lambda h_2 \\ \frac{1}{2} h_3 + \frac{1}{6} h_3 + \ldots = \lambda h_3 \\ \qquad\qquad \vdots \\ \frac{f_{n-2}}{f_{n-1}} h_n + \ldots = \lambda h_n \end{array}\right\} \tag{6.1}$$

lineer denklem sistemini elde edilir.

Eğer $h=(h_n)$ dizisinin sıfırdan farklı ilk terimi h_1 ise $\lambda=1$ ve $h_3=h_4=h_5=\ldots=h_n=\ldots=0$ olup bu da $h=(h_1,h_2,0,\ldots)$ dizisinin θ dan farklı olduğunu ve l_1 olduğunu gösterir. Bu da $\lambda=1$ in bir özdeğer olduğunu gösterir.

Kabul edelim ki $\lambda\neq 1$ olsun. O halde (6.1) ifadesinden $h_n=\lambda^2\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{f_{k-2}}{\lambda f_{k-1}}\right)h_2$ eşitliğini elde ederiz. D'Alambert testine göre $\left|1-\frac{1}{\lambda\varphi}\right|<1$ için $\sum_n |h_n|<\infty$ olur. $\left|1-\frac{1}{\lambda\varphi}\right|<1$ eşitsizliği de $\left|\lambda-\frac{1}{\varphi}\right|<\frac{1}{2\varphi}$ eşitsizliğine denktir. Yani $\left|\lambda-\frac{1}{\varphi}\right|<\frac{1}{2\varphi}$ olacak şekildeki λ kompleks sayıları F^* için özdeğerlerdir.

Ayrıca $n\geq 0$ için $\lambda=\frac{f_n}{f_{n+1}}$ biçimindeki λ kompleks sayılarının da F^* için özdeğer olduğu gösterilebilir. Bu adım ispatı tamamlar.

Teorem 6.1.5 $\sigma_r(F,c)=\left\{\lambda:\left|\lambda-\frac{1}{\varphi}\right|<\frac{1}{2\varphi}\right\}-\left(\left\{\frac{f_n}{f_{n+1}}:n\geq 0\right\}\cup\{1\}\right)$ dir.

İspat. $S=\left\{\lambda:\left|\lambda-\frac{1}{\varphi}\right|<\frac{1}{2\varphi}\right\}$ ve $W=\left\{\frac{f_n}{f_{n+1}}:n\geq 0\right\}\cup\{1\}$ olsun.

Eğer $\lambda\in S-W$ ise $\lambda\in\sigma_p(F^*,c^*)$ dır ve dolayısıyla $(F^*-\lambda I^*)$ operatörünün tersi mevcut değildir. Buradan teorem 2.2 den $\overline{R(F-\lambda I)}\neq c$ 'dir. Ayrıca $\lambda\in S-W$ için $\lambda\notin\sigma_p(F,c)$ olacağından $(F-\lambda I)$ tersinir değildir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 6.1.6 $\sigma_c(F,c)=\left\{\lambda:\left|\lambda-\frac{1}{\varphi}\right|=\frac{1}{2\varphi}\right\}-\left(\left\{\frac{f_n}{f_{n+1}}:n\geq 0\right\}\cup\{1\}\right)$ dir.

İspat. $\lambda\neq 1$ olsun. O halde Teorem 6.1.3 den $\lambda\notin\sigma_p(F^*,c^*)$ dır. Dolayısıyla $(F^*-\lambda I^*)$ tersinir ve Teorem 2.2 den $\overline{R(F-\lambda I)}=c$ olur. Benzer biçimde eğer

$n \geq 0$ için $\lambda \neq \dfrac{f_n}{f_{n+1}}$ ise yine $\overline{R(F-\lambda I)} = c$'dir. Eğer $\left|\lambda - \dfrac{1}{\varphi}\right| = \dfrac{1}{2\varphi}$ ise Teorem 6.1.3 den $\lambda \notin \sigma_p(F^*, c^*)$ dir. Teorem 2.2 den $\overline{R(F-\lambda I)} = c$ olup bu da ispatı tamamlar.

6.2 Fibonacci Operaörünün $l_p, (1 < p < \infty)$ Dizi Uzayı Üzerinde İnce Spektrumu

Bu bölümde Fibonacci operatörünün l_p dizi uzayı üzerindeki nokta spektrumu, artık spektrumu ve sürekli spektrumu kümesini belirleyip bu kümelerin birleşimiyle spectrum kümesini elde edildi.

Teorem 6.2.1 $\sigma_p(F, l_p) = \left\{ \dfrac{f_n}{f_{n+1}} : n \geq 0 \right\}$ dir.

İspat. $l_p, (1 < p < \infty)$ dizi uzayında $x \neq \theta$ için $Fx = \lambda x$ eşitliği göz önüne alınırsa

$$\begin{cases} x_1 = \lambda x_1 \\ x_2 = \dfrac{1}{2\left(\lambda - \dfrac{1}{2}\right)} x_1 \\ x_3 = \dfrac{\lambda}{6\left(\lambda - \dfrac{4}{6}\right)\left(\lambda - \dfrac{1}{2}\right)} x_1 \\ \vdots \\ x_n = \dfrac{\lambda^{n-2}}{f_n f_{n+1}\left(\lambda - \dfrac{f_n}{f_{n+1}}\right)\cdots\left(\lambda - \dfrac{1}{2}\right)} x_1 \end{cases} \tag{6.2}$$

lineer denklem sistemi elde edilir. Eğer $x = (x_n)$ dizisinin sıfırdan farklı ilk terimi x_1 ise $\lambda = 1$ ve (6.2) deki denklem sisteminden $x_2 = x_3 = \ldots = x_n = \ldots = x_1$ eşitliği bulunur. Bu da $x=(x_n)$ dizisinin l_p de oluşuyla çelişir. Eğer $x=(x_n)$ dizisinin sıfırdan farklı ilk terimi x_{n_0} ise (6.2) den

$$x_{n_0}=\frac{\lambda^{n_0-2}}{f_{n_0}f_{n_0+1}\left(\lambda-\frac{f_{n_0}}{f_{n_0+1}}\right)\cdots\left(\lambda-\frac{4}{6}\right)\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)}x_1$$

ve buradan $x_{n_0}=0$ olup bu da çelişkidir.

Dahası, $n\geq 0$ için $\lambda=\frac{f_n}{f_{n+1}}$ ise $(F-\lambda I)^{-1}$ mevcut değildir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 6.2.2 $\sigma_p(F^*,l_p^*)=\left\{\lambda:\left|\lambda-\frac{1}{\varphi}\right|<\frac{1}{2\varphi}\right\}\cup\left\{\frac{f_n}{f_{n+1}}:n\geq 0\right\}\cup\{1\}$ dir.

İspat. $l_p^*\cong l_q$ uzayında $h\neq\theta$ için $F^*h=\lambda h$ eşitliğini çözülürse

$$\begin{cases}\lambda h_1=h_1+\frac{1}{2}h_2+\frac{1}{6}h_3+\ldots\\ \lambda h_2=\frac{1}{2}h_2+\frac{1}{6}h_3+\ldots\\ \quad\vdots\\ \lambda h_n=\frac{f_n}{f_{n+1}}h_n+\ldots\\ \quad\vdots\end{cases}\tag{6.3}$$

lineer denklem sistemi elde edilir. Buradan $h_n=\lambda\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{f_k}{\lambda f_{k+1}}\right)h_1$ olur. $\lambda=1$ ise (6.3) den $h_2=h_3=\ldots=h_n=\ldots=0$ olup bu da $(1<p<\infty)$ için $h=(h_n)\in l_q$ ve $p=1$ için ise $h=(h_n)\in l_\infty\cong l_1^*$ olduğunu gösterir. Eğer $\lambda\neq 1$ ise $p=1$ için $\sum_n|h_n|<\infty$

olması için gerek ve yeter şart $\left|1-\frac{1}{\lambda\varphi}\right|<1$ olmasıdır ve $(1<p<\infty)$ için $\sum_n |h_n|^q<\infty$ olması için gerek ve yeter şart $\left|1-\frac{1}{\lambda\varphi}\right|^q<1$ olmasıdır. Dolayısıyla her iki durumda da $\left|1-\frac{1}{\lambda\varphi}\right|<1$ olması gerekmektedir. Bu da $\left|\lambda-\frac{1}{\varphi}\right|<\frac{1}{2\varphi}$ eşitsizliğine denktir. Ayrıca $n\geq 0$ için $\lambda=\frac{f_n}{f_{n+1}}$ şeklindeki λ kompleks sayılarının F^* opeatörünün birer özdeğeri olduğu açıktır. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 6.2.3 $\sigma_r(F,l_p)=\left\{\lambda:\left|\lambda-\frac{1}{\varphi}\right|<\frac{1}{2\varphi}\right\}-\left(\left\{\frac{f_n}{f_{n+1}}:n\geq 0\right\}\cup\{1\}\right)$ dir.

İspat. Bu teoremin ispatı bir önceki bölümdeki teorem 6.1.4 e benzer olarak yapılır.

Teorem 6.2.4 $\sigma_c(F,l_p)=\left\{\lambda:\left|\lambda-\frac{1}{\varphi}\right|=\frac{1}{2\varphi}\right\}-\left(\left\{\frac{f_n}{f_{n+1}}:n\geq 0\right\}\cup\{1\}\right)$ dir.

İspat. Bu teoremin ispatı da önceki bölümde teorem 6.1.5 deki yol izlenerek ispatlanır.

Teorem 6.2.5 $\sigma(F,l_p)=\left\{\lambda:\left|\lambda-\frac{1}{\varphi}\right|\leq\frac{1}{2\varphi}\right\}\cup\left\{\frac{f_n}{f_{n+1}}:n\geq 0\right\}$ dir.

İspat. Spektrum kümesi nokta spektrum, artık spektrum ve sürekli spektrum kümelerinin birleşimi olduğundan istenilen sonuç hemen elde edilir.

BÖLÜM 7. ÜST ÜÇGENSEL İKİLİ BANT MATRİSLERİNİN İNCE SPEKTRUMU

Bu kısımda Karakaya ve Altun [28], tarafından çalışılan $U(r,s)$ matrisinin ince spektrumu $U(r,s)$ matrisi alt üçgensel ikili bant matrisi olan $B(r,s)$ nin transpozesidir. Bir alt üçgensel ikili bant matrisi

$$B(r,s)=\begin{bmatrix} r & 0 & 0 & \cdots \\ s & r & 0 & \cdots \\ 0 & s & r & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

biçiminde tanımlıdır. Burada $r,s\in\mathbb{R}$ ve $s\neq 0$ dır.[11] O halde üst üçgensel ikili bant matrsi olan $U(r,s)$ matrisi

$$U(r,s)=\begin{bmatrix} r & s & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & r & s & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & r & s & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

biçiminde olur. Burada $r,s\in\mathbb{R}$ dir. $s=0$ için spektral sonuçlar açık olduğundan $s\neq 0$ durumunu göz önüne alacağız.

7.1. $U(r,s)$ Matrisinin c_0 Dizi Uzayı Üzerinde İnce Spektrumu

Lemma 7.1.1 (a_n) dizisi, bazı $\alpha\in\mathbb{C}$'ler için $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1}+\alpha a_n)$ mevcut (b diyelim) ve sonlu olacak şekilde kompleks sayıların bir dizisi olsun. Bu durumda

(a) Eğer $|\alpha| \neq 1$ ise (a_n) dizisi yakınsaktır ve $\lim_{n\to\infty} a_n = b/(1+\alpha)$ olur.

(b) Her $|\alpha| = 1$ için (a_n) dizisi ıraksak olabilir. [40].

Teorem 7.1.2 $U: c_0 \to c_0$ sınırlı bir lineer operatördür ve $\|U(r,s\|_{(c_0:c_0)} = |r| + |s|$ dir.

İspat. Bir A matrisinin c_0 uzayındaki normu satırların l_1 normlarının supremumu olarak tanımlanır. Yani her $n,k \in \mathbb{N}$ için $U(r,s) = (u_{nk})$ ise $\|U(r,s\| = \sup_n \sum_{k=0}^{\infty} |u_{nk}|$ şeklinde tanımlanır. O halde

$$\|U(r,s\| = \sup_n \sum_{k=0}^{\infty} |u_{nk}| = \sup\left(|r|,\ |r|+|s|,\ |r|+|s|,\ldots\right) = |r|+|s|$$

olarak bulunur.

Teorem 7.1.3 $\sigma_p(U,c_0) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - r| < |s|\}$ dir.

İspat. λ komleks sayısı U operatörünün bir özdeğeri olsun. Bu özdeğere karşılık gelen bir $x = (x_1, x_2, \ldots) \in c_0$ özvektörü için

$$\begin{aligned} rx_1 + sx_2 &= \lambda x_1 \\ rx_2 + sx_3 &= \lambda x_2 \\ &\vdots \end{aligned} \qquad \textbf{(7.1)}$$

lineer denklem sistemi sağlanır. Eğer $x_1 = 0$ ise $s \neq 0$ olacağından her $k \in \mathbb{N}$ için $x_k = 0$ olur. Bu yüzden $x_1 \neq 0$ alalım. O halde (7.1) deki eşitlkten her $k \in \mathbb{N}$ için

$$x_k = \left(\frac{\lambda - r}{s}\right)^{k-1} x_1$$

ifadesini elde ederiz. $x=(x_k)\in c_0$ olduğundan $k\to\infty$ için $x_k\to 0$ olmalıdır. Bu da $|\lambda-r|<|s|$ eşitsizliğini gerektirir.

Eğer $T:c_0\to c_0$ operatörü A matrisiyle temsil edilen sınırlı bir lineer operator ise bu durumda $T^*:c_0^*\to c_0^*$ adjoint operatörünün matris temsili de A matrsinin transpozu ile temsil edilir.

Teorem 7.1.4 Herhangi bir $\lambda\in\mathbb{C}$ için $U_\lambda:c_0\to c_0$ yoğun bir görüntü kümesine sahiptir.

İspat. $U^t=B(r,s)$ olduğundan ve [10] da Teorem 2.2 den $\sigma_p\left(B(r,s),l_1\right)=\varnothing$ olduğundan $\sigma_p\left(U^t,l_1\right)=\varnothing$ olur. Bu yüzden tüm $\lambda\in\mathbb{C}$ ler için $\left(U^t-\lambda I\right)$ birebirdir. O halde teorem 2.2 den $U_\lambda=\left(U-\lambda I\right)$ yoğun bir görüntü kümesine sahiptir. Böylece ispat tamalanmış olur.

Sonuç 7.1.5 $\sigma_r\left(U,c_0\right)=\varnothing$ dir.

Teorem 7.1.6 $\sigma_c\left(U,c_0\right)=\{\lambda\in\mathbb{C}:|\lambda-r|=|s|\}$ ve $\sigma\left(U,c_0\right)=\{\lambda\in\mathbb{C}:|\lambda-r|\le|s|\}$ dir.

İspat. $y\in l_1$ olsun. $U_\lambda^*x=y$ eşitliğini göz önüne alırsak

$$\left.\begin{aligned}(r-\lambda)x_1&=y_1\\ sx_1+(r-\lambda)x_2&=y_2\\ sx_2+(r-\lambda)x_3&=y_3\\ &\vdots\end{aligned}\right\}$$

lineer denklem sistemini ve denklem sisteminden de her $k\in\mathbb{N}$ için

$$x_k=\frac{1}{r-\alpha}\sum_{i=0}^{k}\left(\frac{-s}{r-\alpha}\right)^{k-i}y_i$$

eşitliğini elde ederiz. $|s|<|r-\lambda|$ olmak üzere her $k \in \mathbb{N}$ için

$$\left(|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_k|\right) \leq \frac{1}{|r-\lambda|-|s|}\left(|y_1|+|y_2|+\cdots+|y_k|\right)$$

olacağı açıkça görülebilir. Bu son eşitsizlikte her iki taraftan $k \to \infty$ için limit alınırsa $\|x\|_{l_1} \leq \frac{1}{|r-\lambda|-|s|}\|y\|_{l_1}$ olur. Bu yüzden eğer $|s|<|r-\lambda|$ ise U_λ^* örten ve Teorem 2.5 den U_λ sınırlı bir terse sahiptir. Dolayısıyla $\sigma_c = (U, c_0) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - r| \leq |s|\}$ olur. Teorem 7.1.3 ve sonuç 7.1.5 den $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - r| < |s|\} \subset \sigma(U, c_0) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - r| \leq |s|\}$ sonucuna ulaşılır. Spektrum kümesi kapalı olduğundan

$$\sigma(U, c_0) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - r| \leq |s|\}$$

olur. O halde $\sigma_c(U, c_0) = \sigma(U, c_0) \setminus \left(\sigma_c(U, c_0) \cup \sigma_r(U, c_0)\right)$ olduğundan

$$\sigma_c(U, c_0) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - r| = |s|\}$$

sonucu elde edilir.

Teorem 7.1.7 Eğer $|\lambda - r| < |s|$ ise $\lambda \in I_3\sigma(U, c_0)$ dir.

İspat. $|\lambda - r| < |s|$ olsun. Bu durumda teorem 6.1.3'ten $\lambda \in I_3$'tür. O halde geriye $|\lambda - r| < |s|$ için U_λ nın örten olduğunu göstermek kalır.

$y = (y_1, y_2, \ldots) \in c_0$ ve $a = \|y\|$ olsun. $y = (y_1, y_2, \ldots)$ dizisini öyle seçelim ki $x_1 = 0$ ve $k \geq 2$ için $x_k = \frac{1}{s}\sum_{i=1}^{k-1}\left(\frac{\lambda - r}{s}\right)^{k-i-1} y_i$ olsun. Ayrıca $U_\lambda x = y$ denklem sistemini çözersek

$$(r-\lambda)x_1 + sx_2 = y_1$$
$$(r-\lambda)x_2 + sx_3 = y_2$$
$$\vdots$$
$$(r-\lambda)x_{k-1} + sx_k = y_{k-1}$$
$$\vdots$$

lineer denklem sistemi elde edilir ve buradan $k \geq 2$ için $x_k = \dfrac{\lambda - r}{s} x_{k-1} + \dfrac{1}{s} y_{k-1}$ olur. O halde $x \in c_0$ olduğunu gösterirsek ispat tamamlanır. $y = (y_1, y_2, \ldots) \in c_0$ ve $|\lambda - r| < |s|$ olduğundan

$$\lim_{k\to\infty}\left(x_k - \frac{\lambda - r}{s} x_{k-1} \right) = \frac{1}{s} \lim_{k\to\infty} y_{k-1} = 0$$

olur. O halde Lemma 6.1.1'den $\lim_{k\to\infty} x_k = 0$ olur. Böylece $x \in c_0$ sonucuna varılır. Bu da ispatı tamamlar.

Teorem 7.1.8 Eğer $|\lambda - r| = |s|$ ise $\lambda \in II_2\sigma(U, c_0)$ dir.

İspat. $|\lambda - r| = |s|$ ise teorem 7.1.6 dan $\lambda \in I_2 \cup II_2$ dir. $\lambda \in II$ olduğunu göstermek için $|\lambda - r| = |s|$ olduğunda U_λ nın örten olmadığını göstermeliyiz. $y = (y_1, y_2, \ldots) \in c_0$ dizisininin genel terimini $y_k = \left(\dfrac{\lambda - r}{s} \right)^{k-1} \dfrac{1}{k}$ olarak tanımlayalım.

Kabul edelim ki $x \in c_0$ olsun ve $U_\lambda x = y$ eşitliği sağlansın. Bu eşitlikten

$$(r-\lambda)x_1 + sx_2 = y_1 = 1$$
$$(r-\lambda)x_2 + sx_3 = y_2 = \left(\frac{\lambda - r}{s} \right) \frac{1}{2}$$
$$(r-\lambda)x_3 + sx_4 = y_2 = \left(\frac{\lambda - r}{s} \right)^2 \frac{1}{3}$$
$$\vdots$$

lineer denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sisteminden

$$x_n - \left(\frac{\lambda - r}{s}\right)^{n-1} x_1 = \frac{1}{s}\left(\frac{\lambda - r}{s}\right)^{n-2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1}\right)$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikte her iki tarafın mutlak değeri alınıp üçgen eşitsizliği uygulanırsa

$$\frac{1}{|s|}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1}\right) \le |x_1| + |x_n|$$

olur. Bu son eşitsizlikte $n \to \infty$ için

$$\frac{1}{|s|}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} \le \lim_{n\to\infty}\left(|x_1| + |x_n|\right)$$

olur. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ serisi ıraksak olduğundan $\lim_{n\to\infty}|x_n| = \infty$ olacaktır. Bu da $x \in c_0$ olmasıyla çelişir. O halde $U_\lambda x = y$ olacak şekilde hiç bir $x \in c_0$ yoktur. Yani U_λ örten değildir. Böylece ispat biter.

7.2. $U(r,s)$ Matrisinin c Dizi Uzayı Üzerinde İnce Spektrumu

Teorem 7.2.1 $U : c \to c$ sınırlı bir lineer operatördür ve $\|U(r,s\|_{(c_0:c_0)} = |r| + |s|$ dir.

İspat. Bu reoremin ispatı teorem 7.1.2 dekine benzer olarak yapılabilir.

Teorem 7.2.2 $\sigma_p(U,c) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - r| < |s|\} \cup \{r+s\}$ dir.

İspat. Teorem 7.1.3 den $|\lambda - r| < |s|$ için $\lambda \in \sigma(U,c_0)$ olduğundan $\lambda \in \sigma(U,c)$ ifadesi de sağlanır. Şimdi $\lambda = r+s$ durumuna bakalım. $\theta \ne x \in c$ için $Ux = \lambda x$ eşitliğini çözersek

$$
\begin{aligned}
rx_1 + sx_2 &= (r+s)x_1 \\
rx_2 + sx_3 &= (r+s)x_2 \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

lineer denklem sistemini elde ederiz. Bu denklem sisteminden $k \in \mathbb{N}$ için $x_k = \left(\frac{\lambda - r}{s}\right)^{k-1} x_1$ olacaktır. Bu durumda $x \in c$ olması için ya $|\lambda - r| < |s|$ olmalı ya da $\lambda = r + s$ olmalıdır. Böylece ispat biter.

Eğer $T : c \to c$ sınırlı lineer operatorünün matris temsili A ise $T^* : c^* \to c^*$ adjoint operatörün matris temsili $\mathbb{C} \oplus l_1$ uzayı üzerinde

$$
\begin{bmatrix} \chi & 0 \\ b & A^t \end{bmatrix}
$$

şeklindedir. Burada χ, A nın satır toplamlar dizisinin limiti ile A nın sütun limitleri dizisinin toplamlarının farkıdır ve b ise $\forall k \in \mathbb{N}$ için A nın k. sütununun limitidir. Yani;

$$
\chi = \lim_n \sum_k a_{nk} - \sum_k \lim_n a_{nk} \quad \text{ve} \quad b = \lim_n a_{nk}
$$

şeklindedir. O halde $U_\lambda : c \to c$ matrisi için $U_\lambda^* : l_1 \to l_1$ matrisi

$$
\begin{bmatrix} r+s-\lambda & 0 \\ 0 & U_\lambda^t \end{bmatrix}
$$

olur.

Teorem 7.2.3 $U_\lambda : c \to c$ operaörünün yoğun bir ggörüntü kümesine sahip olması için gerek ve yeter şart $\lambda \neq r + s$ olmasıdır.

İspat. Öncelikle $\sigma_p\left(U^*,\mathbb{C}\oplus l_1\right)=\{r+s\}$ olduğunu gösterelim. Kabul edelim ki λ $U^*:\mathbb{C}\oplus l_1\to\mathbb{C}\oplus l_1$ operatörü için bir özdeğer olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}
&(r+s)x_1=\lambda x_1\\
&rx_2=\lambda x_2\\
&sx_2+rx_3=\lambda x_3\\
&sx_3+rx_4=\lambda x_4\\
&\qquad\vdots
\end{aligned}\tag{7.2}$$

denklem sistemini sağlayan bir $x\in l_1$ elemanı vardır. Buradan $x_2=x_3=\ldots=0$ olur. O halde $\lambda=r+s$ sayısı $(1,0,0,\ldots)$ özvektörüne karşılık gelen bir özdeğerdir.Şimdi kabul edelim ki $\lambda\neq r+s$ olsun. Bu durumda (7.2) den $x_1=0$ olur. x dizisinin sıfırdan farklı ilk terimi x_k olsun. Bu durumda (7.2) den $sx_{k-1}+rx_k=\lambda x_k$ olduğundan ve $x_{k-1}=0$ olduğundan $\lambda=r$ olur. Ayrıca yine (7.2) den $sx_k+rx_{k+1}=\lambda x_{k+1}$ ve buradan da $x_k=0$ olur ki bu da bir çelişkidir. O halde U^* operatörünün $\lambda=r+s$ dışında özdeğeri yoktur. Böylece teorem 2.2 den istenilen sonuç elde edilir.

Sonuç 7.2.4 $\sigma_r(U,c)=\varnothing$ dir.

Teorem 7.2.5 $\sigma_c(U,c)=\left\{\lambda\in\mathbb{C}:|\lambda-r|=|s|\right\}\setminus\{r+s\}$ ve $\sigma(U,c)=\left\{\lambda\in\mathbb{C}:|\lambda-r|\leq|s|\right\}$ dir.

İspat. Bu teoremin ispatı teorem 7.1.6 deki teoremin ispatındaki aynı yoldan yapıldığından bu ispatı vermeyeceğiz.

Ayrıca Cartlidge [11], eğer bir A matris operatörü c üzerinde sınırlı ise $\sigma(A,c)=\sigma(A,l_\infty)$ olduğunu göstermiştir. O halde şu sonucu verelim.

Sonuç 7.2.6 $\sigma(U,l_\infty)=\{\lambda\in\mathbb{C}:|\lambda-r|\le|s|\}$ dir.

Burada şunu belirtelim ki bölüm 7.2 de elde edilen sonuçlar [13] de bulunan sonuçlarla eşittir. Bu da μ uzayı c_0,c veya l_∞ uzaylarından biri olmak üzere $\sigma(U,\mu)=\sigma(U^*,\mu)$ olduğunu gösterir. Aslında bir matrisin spektrumu ile transpoz matrisinin spektrumunun aynı uzayda eşit olması gibi genel bir sonuç yoktur.Şimdi vereceğimiz teoremin ispatı Teorem 7.1.7 nin ispatındaki aynı yöntemle bulunduğundan bu teoremin ispatını vermeyeceğiz.

Teorem 7.2.7 Eğer $|\lambda-r|<|s|$ ise $\lambda\in I_3\sigma(U,c)$ dir.

Teorem 7.2.8 Eğer $|\lambda-r|=|s|$ ve $\lambda\neq r+s$ ise $\lambda\in II_2\sigma(U,c)$'dir. Eğer $\lambda=r+s$ ise $\lambda\in II_3\sigma(U,c)$ dir.

İspat. Eğer $\lambda=r+s$ ise Teorem 7.2.1 ve Teorem 7.2.3 den $\lambda\in II_3$ olur.
$|\lambda-r|=|s|$ ve $\lambda\neq r+s$ olsun. Bu durumda Teorem 7.2.5 den $\lambda\in 2$ dir. $\lambda\in II$ olduğunu göstermek için Teorem 7.1.8 in ispatında kullanılan yöntemle

$$y_k=\left(\frac{\lambda-r}{s}\right)^{k-1}\frac{1}{k}$$

tanımlarsak aynı sebeplerden dolayı $U_\lambda x=y$ eşitliğini sağlayacak $x\in c$ bulunmaz. Yani U_λ örten olmayacaktır. O halde Teorem 7.2.3 den $\lambda\neq r+s$ olduğundan U_λ yoğun bir görüntü kümesine sahiptir. Bu da ispatı tamamlar.

BÖLÜM 8. GENELLEŞTİRİLMİŞ FARK OPERATÖRÜ $B(r,s)$ NİN γ UZAYI ÜZERİNDEKİ SPEKTRUMU

Bu kısımda Dutta ve Tripathy [20], tarafından belirlenen $B(r,s)$ genelleştirilmiş fark operatörünün bütün yakınsak seriler uzayındaki spektrumunu incelenmiştir.

Genelleştirilmiş fark operatörü $B(r,s)$,

$$B(r,s)=\begin{bmatrix} r & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ s & r & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & s & r & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

Eğer matris temsili A olan $T:\gamma\to\gamma$ operatörü sınırlı lineer bir opratör ise $T^*:\gamma^*\to\gamma^*$ adjoint operatörü, A matrisinin transpozu tarafından tanımlanır ve γ dizi uzayı $\|x\|=\sum_{k=0}^{\infty}|x_k|$ normu ile l_1 uzayına izomorftur.

Şimdi verilecek olan teorem normu tanımlamaya yardım eder ve $B(r,s)\in B(\gamma)$ olduğunu kanıtlar.

Teorem 8.1 $B(r,s):\gamma\to\gamma$ operatörü $\|B(r,s)\|_{(\gamma,\gamma)}\leq|r|+|s|$ normu ile sınırlı ve lineer bir operatördür.

İspat: $B(r,s)$ nin lineer olduğunu göstermek kolaydır. Bu durumda sınırlı olduğunu gösterelim.

$$\|B(r,s)x\|_{(\gamma,\gamma)} = \sup_n \left|\sum_{k=0}^{n} sx_{k-1} + rx_k\right| \le \sup_n |s| \left|\sum_{k=0}^{n} x_{k-1}\right| + \sup_n |r| \left|\sum_{k=0}^{n} x_k\right| \le (|s|+|r|)\|x\|_\gamma$$

dir. Dolayısıyla $\|B(r,s)\|_{(\gamma,\gamma)} \le |r|+|s|$. Yani $B(r,s):\gamma \to \gamma$ sınırlı ve lineerdir.

Teorem 8.2 $\sigma(B(r,s),\gamma) = \{\alpha \in \mathbb{C} : |\alpha - r| \le s\}$ dir.

İspat: $|\alpha - r| > |s|$ iken $(B(r,s)-\alpha I)^{-1} \in B(\gamma)$ olduğunu göstermeliyiz. Yani $|\alpha - r| \le |s|$ için $(B(r,s)-\alpha I)$ operatörünün terslenebilir olmadığını göstermeliyiz. $|\alpha - r| > |s|$ olsun. $(B(r,s)-\alpha I)$ alt üçgensel matris olduğundan $(B(r,s)-\alpha I)^{-1}$ mevcuttur. $(B(r,s)-\alpha I)x = y$ denklem sistemi çözülürse

$$x_0 = \frac{1}{r-\alpha} y_0$$

$$x_1 = \frac{1}{r-\alpha} y_1 - \frac{s}{(r-\alpha)^2} y_0$$

$$x_2 = \frac{1}{r-\alpha} y_2 - \frac{s}{(r-\alpha)^2} y_1 + \frac{s^2}{(r-\alpha)^3} y_0$$

$$\vdots$$

$$x_n = \sum_{k \le n} \frac{(-s)^{n-k}}{(r-\alpha)^{n-k+1}} y_k$$

$$\vdots$$

ifadesi elde edilir. $(B(r,s)-\alpha I)^{-1} = (a_{nk})$ tersinir matrisi

$$a_{nk} = \begin{cases} \dfrac{(-s)^{n-k}}{(r-\alpha)^{n-k+1}}, & n \leq k \text{ ise} \\ 0, & n > k \text{ ise} \end{cases}$$

şeklindedir. O halde

$$\|B(r,s)\|_{(\gamma,\gamma)}^{-1} = \sup_n \sum_{k=0}^{n} \left| \frac{(-s)^{n-k}}{(r-\alpha)^{r-k+1}} \right| = \frac{1}{r-\alpha} \sup_n \sum_{k=0}^{n} \left| \frac{s}{r-\alpha} \right|^{n-k} = \frac{1}{r-\alpha} \sum_{k=0}^{n} \left| \frac{s}{r-\alpha} \right|^{n} < \infty$$

elde edilir. Bu yüzden $(B(r,s)-\alpha I)^{-1} \in B(\gamma)$ dır.

$|\alpha - r| \leq |s|$ ve $\alpha \neq r$ olsun. Dolayısıyla

$$\|B(r,s)\|_{(\gamma,\gamma)}^{-1} = \sup_n \sum_{k=0}^{n} \left| \frac{(-s)^{n-k}}{(r-\alpha)^{r-k+1}} \right| = \frac{1}{r-\alpha} \sup_n \sum_{k=0}^{n} \left| \frac{s}{r-\alpha} \right|^{n-k} = \frac{1}{r-\alpha} \sum_{k=0}^{n} \left| \frac{s}{r-\alpha} \right|^{n} = \infty$$

dır. Bu yüzden $(B(r,s)-\alpha I)^{-1} \notin B(\gamma)$ dır.

Şimdi $|\alpha - r| \leq |s|$ ve $\alpha = r$ olsun. Bu durumda $(B(r,s)-\alpha I)$ matrisi,

$$B(s) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots \\ s & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & s & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

şeklindedir. $(B(r,s)-sI)x = \theta$ olduğundan $x = \theta$ elde edilir. Dolayısıyla $B(s)$ matrisi birebirdir.

$B(s)^* x = \theta$ iken $x \neq \theta$ olduğundan $B(s)$ yoğun bir görüntüye sahip değildir. Ayrıca $B(s)$ matrisi $|\alpha - r| \leq |s|$ için terslenebilir değildir. Bu ispatı tamamlar.

Teorem 8.3 $\sigma_p\left(B(r,s),\gamma\right)=\varnothing$ dir.

İspat: $x\neq\theta$ ve $x\in\gamma$ için $B(r,s)x=\alpha x$ olsun. Bu eşitlikten

$$
\begin{aligned}
& rx_0=\alpha x_0\\
& sx_0+rx_1=\alpha x_1\\
& \vdots\\
& sx_k+rx_{k+1}=\alpha x_{k+1}\\
& \vdots
\end{aligned}
$$

lineer denklem sistemi elde edilir. $\alpha\neq r$ ise $x_0=0$ dır. Dolayısıyla $x=\theta$ olur. Bu da $x\neq\theta$ olmasıyla çelişir. Bu yüzden $\alpha=r$ dir.

Eğer x_i, $x=(x_n)$ dizisinin sıfırdan farklı ilk terimi ise $sx_i+rx_{i+1}=\alpha x_{i+1}$ eşitliğinden $s\neq 0$ olduğundan $x=\theta$ dir. Bu da $x\neq\theta$ olmasıyla çelişir.

Dolayısıyla $\sigma_p\left(B(r,s),\gamma\right)=\varnothing$ dir.

Teorem 8.4 $\sigma_p\left(B(r,s)^*,\gamma^*\right)=\left\{\alpha\in\mathbb{C}:|\alpha-r|<|s|\right\}$ dir.

İspat: Kabul edelim ki $x\neq\theta$, $x\in\gamma^*\cong l_1$ için $B(r,s)^*x=\alpha x$ olsun.

$$
B(r,s)^*=\begin{bmatrix} r & s & 0 & \cdots\\ 0 & r & s & \cdots\\ 0 & 0 & r & \cdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}
$$

olup

$$rx_0 + sx_1 = \alpha x_0$$
$$rx_1 + sx_2 = \alpha x_1$$
$$\vdots$$
$$rx_k + sx_{k+1} = \alpha x_k$$
$$\vdots$$

denklem sistemini elde edilir. Denklem sistemi çözülerek $x_n = \left(\frac{\alpha - r}{s}\right)^n x_0$, $(n \in \mathbb{N})$ bulunur. Dolayısıyla $x = (x_n) \in \gamma^*$ olması için gerek ve yeter koşul $|\alpha - r| < |s|$ olmasıdır. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 8.5 $\sigma_r\left(B(r,s),\gamma\right) = \{\alpha \in \mathbb{C} : |\alpha - r| < |s|\}$ dir.

İspat: Teorem 8.4 den dolayı $|\alpha - r| < |s|$ için $\left(B(r,s)^* - \alpha I\right)$ operaörü birebir değildir. Teorem 2.2 den dolayı $\left(B(r,s) - \alpha I\right)$ operatörü γ uzayından yoğun bir görüntü kümesine sahip değildir. $\alpha \neq r$ için $\left(B(r,s) - \alpha I\right)$ alt üçgensel matris olduğundan dolayı bir terse sahiptir. Dolayısıyla

$$\sigma_r\left(B(r,s),\gamma\right) = \{\alpha \in \mathbb{C} : |\alpha - r| < |s|\}$$

dir.

Teorem 8.6 $\sigma_c\left(B(r,s),\gamma\right) = \{\alpha \in \mathbb{C} : |\alpha - r| = |s|\}$ dır.

İspat: $\sigma(X,T) = \sigma_p(X,T) \cup \sigma_r(X,T) \cup \sigma_c(X,T)$ olduğundan dolayı

$$\sigma_c\left(B(r,s),\gamma\right) = \{\alpha \in \mathbb{C} : |\alpha - r| = |s|\}$$

elde edilir.

BÖLÜM 9. $U(r,s)$ MATRSİNİN YAKINSAK SERİ TEŞKİL EDEN γ DİZİ UZAYI ÜZERİNDEKİ SPEKTRUMU

Bu bölümde γ dizi uzayı üzerinde $U(r,s)$ matrisinin ince spektrumunu inceleyeceğiz. $U(r,s)$ matrisi alt üçgensel ikili bant matrisi olan $B(r,s)$ nin transpozesidir. Bir alt üçgensel ikili bant matrisi

$$B(r,s)=\begin{bmatrix} r & 0 & 0 & \cdots \\ s & r & 0 & \cdots \\ 0 & s & r & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

biçiminde tanımlıdır. O halde üst üçgensel ikili bant matrsi olan $U(r,s)$ matrisi

$$U(r,s)=\begin{bmatrix} r & s & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & r & s & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & r & s & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

biçiminde olur. Burada $r,s\in\mathbb{R}$ dir. [28] $s=0$ için spectral sonuçlar açık olduğundan $s\neq 0$ durumunu göz önüne alacağız.

Teorem 9.1 $U(r,s):\gamma\to\gamma$ sınırlı bir lineer operatördür ve $|r+s|\leq\|U(r,s)\|_{(\gamma:\gamma)}\leq|r|+|s|$ dir.

İspat. $U(r,s)$ nin lineer olduğunu göstermek kolaydır. O halde sınırlı olup olmadığına bakalım. Herhangi bir $x\in\gamma$ ve her $k\in\mathbb{N}$ için $U(r,s)x=(rx_k+sx_{k+1})$ olduğundan

$$\left\|U(r,s)x\right\|_{(\gamma:\gamma)} = \sup_n \left|\sum_{k=0}^{n} rx_k + sx_{k+1}\right| = \sup_n \left|r\sum_{k=0}^{n} x_k + s\sum_{k=0}^{n} x_{k+1}\right|$$

$$\leq |r| \sup_n \left|\sum_{k=0}^{n} x_k\right| + |s| \sup_n \left|\sum_{k=0}^{n} x_{k+1}\right| = \left(|r|+|s|\right)\|x\|_{\gamma} \qquad \textbf{(9.1)}$$

olur. Diğer taraftan $e^{(2)} \in \gamma$ alırsak $U(r,s)e^{(2)} = (s, r, 0, 0, 0, \ldots)$ olacağından

$$\left\|U(r,s)\right\|_{(\gamma:\gamma)} \geq \frac{\left\|U(r,s)e^{(2)}\right\|_{(\gamma:\gamma)}}{\left\|e^{(2)}\right\|_{(\gamma:\gamma)}} = |s+r| \qquad \textbf{(9.2)}$$

bulunur. O halde (9.1) ve (9.2) den sonuç elde edilir.

Teorem 9.2 $\sigma_p\left(U(r,s),\gamma\right) = \left\{\alpha \in \mathbb{C} : |\alpha - r| < |s|\right\}$ dir.

İspat. $\theta \neq x \in \gamma$ için $U(r,s)x = \alpha x$ denklemini çözülürse

$$\left.\begin{array}{l} rx_0 + sx_1 = \alpha x_0 \\ rx_1 + sx_2 = \alpha x_1 \\ rx_2 + sx_3 = \alpha x_2 \\ \quad\vdots \\ rx_n + sx_{n+1} = \alpha x_n \\ \quad\vdots \end{array}\right\}$$

lineer denklem sistemi elde edilir ve buradan da $n \in \mathbb{N}$ için $x_n = \left(\frac{\alpha - r}{s}\right)^n x_0$ bulunur. Eğer $x = (x_n)$ dizisinin sıfırdan farklı ilk terimi x_0 ise $r = \alpha$ olup her $i \in \mathbb{N}$ için $x_i = 0$ olur. Bu da $x \neq \theta$ olmasıyla çelişir. Şimdi, $\alpha \neq r$ alalım. $x \in \gamma$ aldığımızdan $\left(\sum_{k=0}^{n} x_k\right) \in c$ olur. Yani; $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} x_k = \sum_{k=0}^{\infty} x_k < \infty$'dir. Diğer taraftan

$\sum_{k=0}^{\infty}|x_k| = \sum_{k=0}^{\infty}\left|\frac{\alpha - r}{s}\right| < \infty$ olması için gerek ve yeter şart $|r-\alpha| < |s|$ olmasıdır. Mutlak yakınsaak her seri yakınsaktır önermesinden $|r-\alpha| < |s|$ için $\left(\sum_{k=0}^{n} x_k\right) \in c$ diyebiliriz. Böylece $\alpha \in \sigma_p\left(U(r,s),\gamma\right)$ olması için gerek ve yeter şart $|r-\alpha| < |s|$ olmasıdır. Bu da ispatı tamamlar.

Teorem 9.3 $\sigma_p\left(U^*(r,s),\gamma^*\right) = \varnothing$ dir.

İspat. $\theta \neq x \in \gamma^* \cong l_1$ için $U^*(r,s)x = \alpha x$ denklemini göz önüne alırsak

$$\left.\begin{aligned} rx_0 &= \alpha x_0 \\ sx_0 + rx_1 &= \alpha x_1 \\ sx_1 + rx_2 &= \alpha x_2 \\ &\vdots \\ sx_{k-1} + rx_k &= \alpha x_k \\ &\vdots \end{aligned}\right\} \tag{9.3}$$

lineer denklem sistemini elde ederiz. Eğer Eğer $x = (x_n)$ dizisinin sıfırdan farklı ilk terimi x_0 ise $r = \alpha$ ve herhangi bir $i \in \mathbb{N}$ için $x_{i-1} = 0$ olur. Bu da bir çelişkidir. Eğer $1 \leq j \leq n$ ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $x = (x_n)$ dizisinin sıfırdan farklı ilk terimi x_j ise (9.3) den $x_j = \left(\frac{s}{\alpha - r}\right)x_{j-1}$ olup bu da $x_j = 0$ olduğunu gösterir. O halde $U^*(r,s)x = \alpha x$ denkleminin çözümü olacak $\theta \neq x \in \gamma^* \cong l_1$ elemanı yoktur. Böylece ispat biter.

Sonuç 9.4 $\sigma_r\left(U(r,s),\gamma\right) = \varnothing$ dir.

Teorem 9.5 $\sigma\left(U(r,s),\gamma\right) = \left\{\alpha \in \mathbb{C} : |\alpha - r| \leq |s|\right\}$ dir.

İspat. $y=(y_k)\in\gamma^*\cong l_1$ alalım ve $\left(U^*(r,s)-\alpha I\right)x=y$ eşitliğini çözersek aşağıdaki lineer denklem sistemini elde ederiz:

$$\left.\begin{array}{l}(r-\alpha)x_0=y_0\\ sx_0+(r-\alpha)x_1=y_1\\ sx_1+(r-\alpha)x_2=y_2\\ \qquad\quad\vdots\end{array}\right\}. \tag{9.4}$$

(9.4) deki denklem sisteminden her $k\in\mathbb{N}$ için $x_k=\dfrac{1}{r-\alpha}\displaystyle\sum_{i=0}^{k}\left(\frac{-s}{r-\alpha}\right)^{k-i}y_i$ bulunur. $|s|<|r-\alpha|$ ve her $k\in\mathbb{N}$ için $\displaystyle\sum_{i=0}^{k}|x_k|\le\frac{1}{|r-\alpha|-|s|}\sum_{i=0}^{k}|y_k|$ eşitsizliğini göstermek zor değildir. O halde $k\to\infty$ için $\|x\|_{l_1}\le\dfrac{1}{|r-\alpha|-|s|}\|y\|_{l_1}$ olur. Böylece $|s|<|r-\alpha|$ için $\left(U^*(r,s)-\alpha I\right)$ örten olacağından Teorem 2.3 gereğince $\left(U(r,s)-\alpha I\right)$ sınırlı bir terse sahiptir. Yani $|s|<|r-\alpha|$ için $\sigma_c=\left(U(r,s),\gamma\right)\subset\left\{\alpha\in\mathbb{C}:|\alpha-r|\le|s|\right\}$ dir. Teorem 9.2 ve Sonuç 9.4 ü birleştirirsek

$$\left\{\alpha\in\mathbb{C}:|\alpha-r|<|s|\right\}\subset\sigma\left(U(r,s),\gamma\right)\subset\left\{\alpha\in\mathbb{C}:|\alpha-r|\le|s|\right\}$$

olur. Herhangi bir sınırlı lineer operatörünün spektrum kümesi kapalı olduğundan $\sigma\left(U(r,s),\gamma\right)=\left\{\alpha\in\mathbb{C}:|\alpha-r|\le|s|\right\}$ sonucuna ulaşılır.

Teorem 9.6 $\sigma_c\left(U(r,s),\gamma\right)=\left\{\alpha\in\mathbb{C}:|\alpha-r|=|s|\right\}$ dir.

İspat. $\sigma(U,\gamma)=\sigma_p(U,\gamma)\cup\sigma_c(U,\gamma)\cup\sigma_r(U,\gamma)$ olduğundan $\sigma_c=\left(U(r,s),\gamma\right)=\left\{\alpha\in\mathbb{C}:|\alpha-r|=|s|\right\}$ olur.

Teorem 9.7 Eğer $|r-\alpha|<|s|$ ise $\alpha\in\sigma\left(U,\gamma\right)I_3$ olur.

İspat. Bu teoremi ispatlamak için $|r-\alpha|<|s|$ olmak üzere $U_{\alpha}^{-1}=\left(U(r,s)-\alpha I\right)^{-1}$ mevcut olmadığını ve $U_{\alpha}^{-1}=\left(U(r,s)-\alpha I\right)^{-1}$ operatörünün örten olduğunu göstermeliyiz. $S=\{\alpha : |r-\alpha|<|s|\}$ olmak üzere $\alpha\in S$ olsun. Bu durumda Teorem 9.2 gereğince $\alpha\in\sigma_p(U,\gamma)$ olacağından U_{α}^{-1} mevcut değildir.

Şimdi $|r-\alpha|<|s|$ için U_{α}^{-1} operatörünün örten olduğunu gösterelim. $y=\left(y_0,y_1,y_2,\ldots\right)\in\gamma$ için $U_{\alpha}x=y$ eşitliğini göz önüne alırsak

$$\left.\begin{array}{l}(r-\alpha)x_0+sx_1=y_0\\(r-\alpha)x_1+sx_2=y_1\\(r-\alpha)x_2+sx_3=y_2\\\qquad\qquad\vdots\end{array}\right\}\qquad\textbf{(9.5)}$$

lineer denklem sistemini elde ederiz. Eğer $x=(x_0,x_1,x_2\ldots)$ dizisi için $x_0=0$ alırsak (9.5) den $k\geq 1$ için $x_k=\frac{1}{s}\sum_{i=0}^{k-1}\left(\frac{r-\alpha}{s}\right)^{k-i-1}y_i$ olur. Her $k\geq 1$ ve $|r-\alpha|<|s|$ için $\sum_{i=0}^{k-1}\left|\frac{r-\alpha}{s}\right|^{k-i-1}\leq\frac{|s|}{|s|-|r-\alpha|}$ olduğundan $x_k=\frac{1}{s}\sum_{i=0}^{k-1}\left(\frac{r-\alpha}{s}\right)^{k-i-1}y_i$ olacağı açıktır. $k\to\infty$ için $\sum_{i=0}^{k-1}\left|\frac{r-\alpha}{s}\right|^{k-i-1}\leq\frac{|s|}{|s|-|r-\alpha|}$ eşitsizliğinin her iki tarafı için limit alınırsa

$$\lim_{k\to\infty}\left(\sum_{i=0}^{k-1}|x_i|\right)\leq\frac{1}{|s|-|r-\alpha|}\lim_{k\to\infty}\left(\sum_{i=0}^{k-1}|y_i|\right)<\infty$$

olacaktır ve dolayısıyla $x\in\gamma$ olacaktır. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 9.8 Eğer $|r-\alpha|=|s|$ ise $\alpha\in\sigma\left(U,\gamma\right)II_2$ olur.

İspat. $|r-\alpha|=|s|$ olsun. Bir önceki teoreme benzer şekilde U_{α}^{-1} ters operatörünün örten olduğu gösterilebilir. Diğer taraftan $|r-\alpha|=|s|$ ise $\alpha\in\sigma_c\left(U,\gamma\right)$ olur ve böylece $\overline{R(U_{\alpha})}=\gamma$ eşitliği sağlanır. Bu da ispatı tamamlar.

Sonuç 9.9 Aşağıdaki ifadeler sağlanır:

a) $\sigma_{ap}\left(U(r,s),\gamma\right)=\left\{\alpha\in\mathbb{C}:\left|\alpha-r\right|\le\left|s\right|\right\}$,

b) $\sigma_{\delta}\left(U(r,s),\gamma\right)=\left\{\alpha\in\mathbb{C}:\left|\alpha-r\right|=\left|s\right|\right\}$,

c) $\sigma_{co}\left(U(r,s),\gamma\right)=\varnothing$.

İspat. (a) Tablo 3.1.3 den $\sigma_{ap}\left(U(r,s),\gamma\right)=\sigma\left(U(r,s),\gamma\right)\setminus\sigma\left(U(r,s),\gamma\right)III_1$ olduğu için Sonuç 9.4 den $\sigma\left(U(r,s),\gamma\right)III_1=\sigma\left(U(r,s),\gamma\right)III_2=\varnothing$ olur. Benzer şekilde (b) ve (c) deki eşitlikler de Sonuç 9.4, Teorem 9.3 ve Teorem 9.7 yardımıyla

$$\sigma_{\delta}\left(U(r,s),\gamma\right)=\sigma\left(U(r,s),\gamma\right)\setminus\sigma\left(U(r,s),\gamma\right)I_3$$

$$\sigma_{co}\left(U(r,s),\gamma\right)=\sigma\left(U(r,s),\gamma\right)III_1\cup\sigma\left(U(r,s),\gamma\right)III_2\cup\sigma\left(U(r,s),\gamma\right)III_3$$

olacağı görülebilir.

KAYNAKLAR

[1] AKHMEDOV, A. M. and BAŞAR, F., On the fine spectrum of the Cesáro operator in c_0, Mathematical Journal of Ibaraki University, vol. 36, pp. 25–32, 2004.

[2] AKHMEDOV, A.M. and BAŞAR, F., The fine spectra of the difference operator Δ over the sequence space $bv_p, (1 \le p < \infty)$, Acta Math. Sin. (Engl. Ser.) 23, 1757–1768, 2007.

[3] AKHMEDOV, A.M., and EL-SHABRAWY, S. R., On the fine spectrum of the operator $\Delta_{a,b}$ over the sequence space c, Computers & Mathematics with Applications, vol. 61, no. 10, pp. 2994–3002, 2011.

[4] ALTAY, B., ve BAŞAR, F., On the fine spectrum of the difference operator Δ on c_0 and c, Information Sciences, vol. 168, no. 1–4, pp. 217–224, 2004.

[5] ALTAY, B., BAŞAR, F., On the fine spectrum of the generalized difference operator $B(r,s)$ over the sequence spaces c_0 and c, Internat. J. Math. Math. Sci. 18, 3005-3013, 2005.

[6] ALTAY, B., and KARAKUŞ, M., On the spectrum and the fine spectrum of the Zweier matrix as an operator on some sequence spaces, Thai Journal of Mathematics, vol. 3, no. 2, pp. 153–162, 2005.

[7] ALTAY, B. and BAŞAR, F., The fine spectrum and the matrix domain of the difference operator Δ on the sequence space $l_p, (0 < p < 1)$, Communications in Mathematical Analysis, vol. 2, no. 2, pp. 1–11, 2007.

[8] ALTUN, M., On the fine spectra of triangular Toeplitz operators, Applied Mathematics and Computation, vol. 217, no. 20, pp. 8044–8051, 2011.

[9] APPELL, J., PASCALE, E. and VIGNOLI, A., Nonlinear Spectral Theory, vol. 10 of de Gruyter Series in Nonlinear Analysis and Applications, Walter de Gruyter, Berlin, Germany, 2004.

[10] BAYRAKTAR, M. 1994. Fonksiyonel Analiz. Atatürk Üni. yay. Erzurum. 311 shf.

[11] FURKAN, H., BİLGİÇ, H. and KAYADUMAN, K., On the fine spectrum of the generalized difference operator $B(r,s)$ over the

sequence spaces l_1 and bv , Hokkaido Math. J. 35, 893–904, 2006.

[12] BİLGİÇ, H. and FURKAN, H., On the fine spectrum of the generalized diffrerence operator $B(r,s)$ over the sequence spaces l_p and bv_p, Nonlinear Anal. 68, 499–506, 2008.

[13] BİLGİÇ, H. and FURKAN, H., On the fine spectrum of the operator $B(r,s,t)$ over the sequence spaces l_1 and bv, Mathematical and Computer Modelling, vol. 45, no. 7-8, pp. 883–891, 2007.

[14] BROWN, A. and PAGE, E., (1970) Elements of Functional Analysis. Von Nostrand Reinhold Comp. sh 237-242.

[15] BROWN, A., HALMOS,. P.R., ve SHEILDS, A.L., (1965). Cesaro Operators. Acta Sci. Math., 26 125-137.

[16] CARTLIDGE, J.P., Weighted mean matrices as operators on l_p, Ph.D. dissertation, Indiana University, Indiana, 1978.

[17] CASS, F.P., RHOADES, B.E., (1977) Mercerian Theorems Via Spectral Theory. Pasific J.M., 73, 31-34.

[18] CHOUDHARY, B., NANDA, S., Functional Analysis with Applications, John Wiley & Sons Inc, New York, Chishester, Brisbane, Toronto, Singapore, 1989.

[19] COŞKUN, C., The spectra and fine spectra for p-Cesáro operators, Turkish Journal of Mathematics, vol. 21, no. 2, pp. 207–212, 1997.

[20] DUTTA, A. J., TRIPATHY, B. C., Fine spectrum of the generalized difference operator over the class of convergent series, International Journal of Analysis, 1–4, 2013.

[21] FURKAN, H., BİLGİÇ, H., KAYADUMAN, K., On the fine spectrum of the generalized difference operator $B(r,s)$ over the sequence spaces l_1 and bv, Hokkaido Math. J. 35, 897-908, 2006.

[22] FURKAN, H., BİLGİÇ, H. and BAŞAR, F., On the fine spectrum of the operator $B(r,s,t)$ over the sequence spaces l_p and bv_p, $(1<p<\infty)$, Computers &Mathematics with Applications, vol. 60, no. 7, pp. 2141–2152, 2010.

[23] GOLDBERG, S. (1966), Unbounded Linear Operators, Mc Oraw-Hill Book Comp.

[24] GOLDBERG S., Unbounded Linear Operators, Dover Publications, Inc. New York, 1985.

[25] GONZÁLEZ, M., The fine spectrum of the Cesáro operator in $l_p(1<p<\infty)$," Archiv der Mathematik, vol. 44, no. 4, pp. 355–358, 1985.

[26] KARAİSA, A. and BAŞAR, F., Fine spectra of upper triangular triple

band matrix over the sequence space $l_p, 0 < p < \infty$, Abstract and Applied Analysis. Volume 2013, Article ID 342682, 10 pages, 2013.

[27] KARAKAYA, V. and ALTUN, M., Fine spectra of upper triangular double-band matrices, Journal of Computational and Applied Mathematics, vol. 234, no. 5, pp. 1387-1394, 2010.

[28] KARAKAYA, V., MANAFOV, M. Dzh. and ŞİMŞEK, N., On the fine spectrum of the second order difference operator over the sequence spaces l_p and $bv_p, (1 < p < \infty)$, Mathematical and Computer Modelling, vol.55, 426–431, 2012.

[29] KARA, E. E. and BAŞARIR, M., An application of Fibonacci numbers into infinite Toeplitz matrices, Caspian J. of Math. Sci., Unv. of Mazandaran, Iran, 1 (1), 43-47, 2012.

[30] KREYSZIG, E., Introductory Functional Analysis with Applications, John Wiley & Sons Inc, New York, 1978.

[31] LEIBOWITZ, G., (1972). Spektra of Discrete Cesaro Operators. Tamkang J. Math. , 3 123-132.

[32] LEİBOWITZ, G., J. Math. Anal. Appl., 128, 272-286, 1987.

[33] MADDOX, I. J., Element of Functional Analysis, Cambridge University Press, London, UK, 1970.

[34] OKUTOYI, J. T., On the spectrum of C_1 as an operator on bv, Communications, Faculty of Science, University of Ankara. Series A1, vol. 41, no. 1-2, pp. 197–207, 1992.

[35] PANİGRAHI, B. L. and SRIVASTAVA, P. D., Spectrum and fine spectrum of generalized second order difference operator Δ_{uv}^2 on sequence space c_0, Thai Journal of Mathematics, vol. 9, no. 1, pp. 57–74, 2011.

[36] READE, J. B., On the spectrum of the Cesáro operator, The Bulletin of the London Mathematical Society, vol. 17, no. 3, pp. 263–267, 1985

[37] RHOADES, B. E., The fine spectra for weighted mean operators, Pacific Journal of Mathematics, vol. 104, no. 1, pp. 219–230, 1983.

[38] SRIVASTAVA, P.D. and KUMAR, S., Fine spectrum of the generalized difference operator Δ_v on sequence space l_1, Thai Journal of Mathematics, vol. 8, no. 2, pp. 221–233, 2010.

[39] SRIVASTAVA, P.D. and KUMAR, S., Fine spectrumof the generalized difference operator Δ_{uv} on sequence space l_1, Applied Mathematics and Computation, vol. 218, no. 11, pp. 6407–6414, 2012.

[40] STEVIĆ, S., A note on bounded sequences satisfying linear inequalities, Indian J. Math. 43 (2), 223-230, 2001.

[41] WENGER, R. B., The fine spectra of the Hölder summability operators, Indian Journal of Pure and Applied Mathematics, vol. 6, no. 6, pp. 695–712, 1975.

[42] WILANSKY, A., (1964) Topological divisors of zero and Tauberian Theorems. Tans. Amer. Math. Soc., 113: 240-251.

[43] WILANSKY, A., (1984) Summability Through Functional Analysis. North Holland Matematics Studies 85, Amsterdam, New York, Oxford.

[44] YEŞİLKAYAGİL, M. and BAŞAR, F., On the fine spectrum of the operator defined by a lambda matrix over the sequence space c_0 and c, Hindawi Publishing Corporation Abstract and Applied Analysis Volume 2013, Article ID 687393, 13 pages, 2013.

[45] YILDIRIM, M., On the spectrum and fine spectrum of the compact Rhaly operators, Indian Journal of Pure and Applied Mathematics, vol. 27, no. 8, pp. 779–784, 1996.

ÖZGEÇMİŞ

Osman Yılmaz, 1987 yılında Gaziantep'de doğdu. İlk, orta öğrenimini Gaziantep'in Yavuzeli ilçesinde tamamladıktan sonra lise eğitimini Gaziantep Mimar Sinan Lisesi'nde tamamladı. 2006 yılında Muğla Üniversitesi Fen-Edebiya Fakültesi Matematik bölümüne girdiği lisans eğitimini 2010'da bitirdi. 2012 yılında Sakarya Üniversitesi Matematik Bölümü'nde yüksek lisans eğitimine başladı.