T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TRİPOTENT MATRİSLERİN BAZI KOMBİNASYONLARININ GRUP TERSİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tuğba PİŞTOFOĞLU

Enstitü Anabilim Dalı	**:**	**MATEMATİK**
Enstitü Bilim Dalı	**:**	**UYGULAMALI MATEMATİK**
Tez Danışmanı	**:**	**Yrd. Doç. Dr. Murat SARDUVAN**

Haziran 2014

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TRİPOTENT MATRİSLERİN BAZI KOMBİNASYONLARININ GRUP TERSİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tuğba PİŞTOFOĞLU

Enstitü Anabilim Dalı	:	**MATEMATİK**
Enstitü Bilim Dalı	:	**UYGULAMALI MATEMATİK**

Bu tez 26 / 06 / 2014 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği ile kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Halim ÖZDEMİR **Jüri Başkanı**	**Yrd. Doç. Dr. Murat SARDUVAN** **Üye**	**Yrd. Doç. Dr. Nesrin GÜLER** **Üye**

TEŞEKKÜR

Tez konusu seçiminde ve bu konunun seçiminden sonra çalışmamın her safhasında büyük bir özveri ile bana yardımcı olan, bilgi ve tecrübelerinden yararlandığım, çok değerli hocam Yrd. Doç. Dr. Murat SARDUVAN'a teşekkürlerimi sunmayı bir borç bilirim.

Ayrıca maddi ve manevi desteklerinden dolayı sevgili dostlarım Hüseyin ASLANBAY, Esra TEKELİ, Nesibe DEMİR'e, benden her zaman yardım ve desteklerini esirgemeyen değerli aileme teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

$\mathbb{C}$	: Kompleks sayılar kümesi
$\mathbb{C}_n$	: $n \times n$ boyutlu kompleks elemanlı matrislerin kümesi
$\mathbb{C}_n^T$	: $n \times n$ boyutlu kompleks elemanlı tripotent matrislerin kümesi
$\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots$	: Matrisler
$\mathbf{I}$	: Birim matris
$\mathbf{0}$	: Elemanları sıfır olan matris
$c_1, c_2, \ldots$	: Skalerler
$\in$	: Elemanıdır
$r(\mathbf{X})$	: $\mathbf{X}$ matrisinin rankı

ÖZET

Anahtar Kelimeler: Tripotent Matris, Karşılıklı Değişmelilik, Grup Ters

Çalışma, toplam dört ana bölümden oluşmaktadır. İlk bölümde, ele alınan konu ile ilgili literatür bilgisini içeren bir giriş verilmektedir.

Bölüm 2'de, Bölüm 4'te elde edilen sonuçlara temel teşkil edecek olan bazı kavram ve teoremler verilmektedir. Bölüm 3'te ise bu çalışmaya esin kaynağı olan çalışmada mevcut bazı sonuçlar hatırlatılmaktadır.

Bölüm 4, bu çalışmanın asıl kısmını oluşturmaktadır. Bölüm 4'te, karşılıklı değişmeli iki ve üç tripotent matrisin bazı kombinasyonlarının, bazı özel koşullar altında, grup terslerinin ifadeleri ortaya koyulmaktadır.

THE GROUP INVERSES OF SOME COMBINATIONS OF TRIPOTENT MATRICES

SUMMARY

Key words: Tripotent Matrix, Mutually Commutativity, Group Inverse

This study organized into four main chapters in totally. In the first chapter, it is given an introduction, which includes some literature information about the subject considered.

In the Chapter 2, some concepts and theorems, which constitute the basis for the results given in the Chapter 4, are given. In the Chapter 3, some existing results from the study, the inspiration for this work, are reminded.

The Chapter 4 constitutes the original part of this work. In the Chapter 4, the group inverses of some combinations of two and three tripotent matrices that mutually commute are established under the some special conditions.

BÖLÜM 1. GİRİŞ

1.1. Gösterimler

n pozitif bir tamsayı olmak üzere, $\mathbb{C}$ ve $\mathbb{C}_n$ sembolleri sırasıyla, kompleks sayılar ve $n \times n$ boyutlu kompleks matrisler kümelerini göstersin. Çalışma boyunca matrisler koyu ve büyük harflerle ($\mathbf{A}$ gibi), skalerler küçük ve italik harflerle (c gibi) gösterilecektir.

1.2. Çalışmanın İçeriği ve Literatür Bilgisi

c_1, c_2 sıfırdan farklı kompleks sayılar ve $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2 \in \mathbb{C}_n$ sıfırdan farklı kompleks matrisler olmak üzere,

$$\mathbf{X} = c_1\mathbf{X}_1 + c_2\mathbf{X}_2 \tag{1.1}$$

olsun. $\mathbf{X}_1$ ve $\mathbf{X}_2$ matrisleri idempotent, tripotent, $t-$ potent veya involutif olduklarında (1.1) biçimindeki $\mathbf{X}$ lineer kombinasyon matrisinin idempotent, involutif veya tripotent olması durumlarından bazıları ve bu $\mathbf{X}$ lineer kombinasyon matrisinin grup tersinin ifadesi literatürde birçok çalışmada mevcuttur.

$\mathbf{X}_1$ ve $\mathbf{X}_2$ matrisleri idempotent iken $\mathbf{X}$ matrisinin idempotent olduğu durum, $\mathbf{X}_1$ ve $\mathbf{X}_2$ değişmeli olduğunda [1,18] çalışmalarında, değişmeli olmadığında [1] çalışmasında ele alınmıştır.
$\mathbf{X}_1$ ve $\mathbf{X}_2$ matrislerinin değişmeli olduğu ve olmadığı durumlarda biri idempotent diğeri tripotent iken $\mathbf{X}$ matrisinin idempotent olduğu durumlar [7] çalışmasında ele alınmıştır.

$\mathbf{X}_1$ ve $\mathbf{X}_2$ matrislerinden biri idempotent diğeri $t-$ potent iken $\mathbf{X}$ matrisinin idempotent olduğu durumlar, $\mathbf{X}_1$ ve $\mathbf{X}_2$ değişmeli olduğunda [10], olmadığında [11] çalışmalarında ele alınmıştır.

$\mathbf{X}_1$ ve $\mathbf{X}_2$ matrisleri her ikisi involutif iken $\mathbf{X}$ matrisinin idempotentliği; her ikisi idempotent, tripotent veya involutif iken $\mathbf{X}$ matrisinin involutifliği; $\mathbf{X}_1$ ve $\mathbf{X}_2$ matrisleri değişmeli olduğu ve olmadığı durumda (her ikisinin tripotent olduğu durum hariç) [19] çalışmasında ele alınmıştır.

$\mathbf{X}_1$, $\mathbf{X}_2$ değişmeli matrislerinin her ikisi idempotent ve tripotent iken $\mathbf{X}$ lineer kombinasyon matrisinin tripotent olduğu durumlar [6] çalışmasında ele alınmıştır.

$\mathbf{X}_1$, $\mathbf{X}_2$ genelleştirilmiş projektörlerinin değişmeli olduğu durumda (1.1) biçimindeki $\mathbf{X}$ lineer kombinasyon matrisinin de genelleştirilmiş projektör olduğu durumlar [3] çalışmasında ele alınmıştır.

$\mathbf{X}_1$, $\mathbf{X}_2$ değişmeli matrislerinin idempotent olduğu durumda (1.1) biçimindeki $\mathbf{X}$ lineer kombinasyon matrisinin idempotent olduğu durumlar [14] çalışmasında, değişmeli olmadığı durumda $\mathbf{X}$ lineer kombinasyon matrisinin tersinirliği [15] çalışmasında ele alınmıştır. Bu çalışmalarda idempotent matrisler Hilbert uzayındaki idempotent dönüşümler olarak ele alınmıştır.

$\mathbf{X}_1$, $\mathbf{X}_2$ matrisleri idempotent iken $\tilde{c}_1+\tilde{c}_2 \neq 0$ koşulunu sağlayan herhangi skalerler için $\tilde{c}_1\mathbf{X}_1+\tilde{c}_2\mathbf{X}_2$ lineer kombinasyonu tersinir ise $c_1+c_2 \neq 0$ koşulunu sağlayan tüm skalerler için de (1.1) biçimli lineer kombinasyonun tersinir olduğu [2] çalışmasında gösterildi. Matrisler tripotent olduklarında da bazı başka koşullar altında bu sonucun sağlandığı [20] çalışmasında ortaya koyuldu.

$\mathbf{X}_1$, $\mathbf{X}_2$ matrisleri idempotent ve $c_1+c_2=0$ iken (1.1) biçimindeki $\mathbf{X}$ lineer kombinasyon matrisinin grup tersinin ifadesi [17] çalışmasında verildi.

Literatürde üç özel tipli matrisin lineer kombinasyonunun ele alındığı çalışmalar da mevcuttur. Şöyle ki, c_1, c_2, c_3 sıfırdan farklı kompleks sayılar ve $\mathbf{X}_1$, $\mathbf{X}_2$, $\mathbf{X}_3$ $n \times n$ boyutlu sıfırdan farklı kompleks matrisler olmak üzere,

$$\mathbf{X} = c_1\mathbf{X}_1 + c_2\mathbf{X}_2 + c_3\mathbf{X}_3 \tag{1.2}$$

olsun. $\mathbf{X}_1$, $\mathbf{X}_2$ ve $\mathbf{X}_3$ matrislerinin idempotent, involutif veya tripotent oldukları durumlar için (1.2) biçimindeki $\mathbf{X}$ lineer kombinasyon matrisinin idempotent veya tripotent olduğu durumlar farklı çalışmalarda incelenmiştir.

$\mathbf{X}_1$, $\mathbf{X}_2$ ve $\mathbf{X}_3$ karşılıklı değişmeli idempotent matrisler olduğunda (1.2) biçimindeki $\mathbf{X}$ lineer kombinasyon matrisinin idempotent olması durumu [18] çalışmasında ele alınmıştır.

$\mathbf{X}_1$, $\mathbf{X}_2$ ve $\mathbf{X}_3$ idempotent matrislerinden herhangi ikisi değişmeli olduğunda $\mathbf{X}$ matrisinin idempotent olması durumu [8] çalışmasında, herhangi ikisi ayrık olduğunda [4] çalışmasında ele alınmıştır.

Dikkat edilirse bu çalışmalar iki veya üç özel tipli matrisin (1.1) ve (1.2) biçimli lineer kombinasyonları ile ilgilidir. Ayrıca, literatürde iki özel tipli matrisin lineer olmayan kombinasyonlarının ele alındığı çalışmalar da mevcuttur. Şöyle ki, $c_1, c_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $c_3, c_4, c_5, c_6, c_7 \in \mathbb{C}$ ve $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2 \in \mathbb{C}_n$ sıfırdan farklı idempotent matrisler olmak üzere,

$$\mathbf{X} = c_1\mathbf{X}_1 + c_2\mathbf{X}_2 + c_3\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2 + c_4\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1 + c_5\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1 + c_6\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2 + c_7\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2 \tag{1.3}$$

biçimindeki $\mathbf{X}$ lineer kombinasyon matrisinin grup involutif olması durumu [21] çalışmasında, grup tersinir olması durumu [17] çalışmasında ele alınmıştır.

Bu çalışmada ise karşılıklı değişmeli iki veya üç tripotent matrisin

$$\mathbf{X} = c_1\mathbf{X}_1 + c_2\mathbf{X}_2 + c_3\mathbf{X}_3 + c_4\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2 + c_5\mathbf{X}_1\mathbf{X}_3 + c_6\mathbf{X}_2\mathbf{X}_3 \quad \textbf{(1.4)}$$

biçimli kombinasyonu ve onun daha alt kombinasyonlarının grup terslerinin ifadeleri ortaya konmuştur.

BÖLÜM 2. ÖN BİLGİLER

Bu bölümde, çalışmanın daha sonraki bölümlerinin daha iyi anlaşılabilmesi için gerekli bazı tanımlar verilmektedir. Ayrıca, yine, daha sonraki bölümlerde verilen sonuçlara temel teşkil edecek gerekli bazı teoremler ispatsız olarak ifade edilmektedir.

2.1. Bazı Özel Tipli Matris Çeşitleri

Tanım 2.1. $\mathbf{X}^2 = \mathbf{X}$ özelliğine sahip bir $\mathbf{X} \in \mathbb{C}_n$ matrisine idempotent matris denir [16].

Tanım 2.2. $\mathbf{X}^3 = \mathbf{X}$ özelliğine sahip bir $\mathbf{X} \in \mathbb{C}_n$ matrisine tripotent matris denir [16]. Bu tip matrislerin sınıfı $\mathbb{C}_n^T$ ile gösterilecektir.

Tanım 2.3. $\mathbf{I}$ uygun boyutlu birim matrisi göstermek üzere, $\mathbf{X}^2 = \mathbf{I}$ özelliğine sahip bir $\mathbf{X} \in \mathbb{C}_n$ matrisine involutif matris denir [22].

Tanım 2.4. t pozitif tamsayı olmak üzere, $\mathbf{X}^t = \mathbf{X}$ özelliğine sahip bir $\mathbf{X} \in \mathbb{C}_n$ matrisine $t-$potent matris denir [10].

Tanım 2.5. $\mathbf{AXA} = \mathbf{A}$, $\mathbf{XAX} = \mathbf{X}$, $\mathbf{AX} = \mathbf{XA}$ koşullarını sağlayan bir $\mathbf{X} \in \mathbb{C}_n$ matrisi mevcutsa $\mathbf{A} \in \mathbb{C}_n$ matrisine grup tersinir matris, buradaki $\mathbf{X} \in \mathbb{C}_n$ matrisine de $\mathbf{A}$ 'nın grup tersi denir ve $\mathbf{A}_g$ ile gösterilir [12].

Teorem 2.1. $\mathbf{X} \in \mathbb{C}_n$ matrisi grup tersinir ise $\mathbf{X}_g$ tektir [12].

Teorem 2.2. Bir $\mathbf{X} \in \mathbb{C}_n$ matrisinin grup tersinir olması için gerek ve yeter koşul $r(\mathbf{X}) = r(\mathbf{X}^2)$ olmasıdır [9].

Tanım 2.6. $\mathbf{X} = \mathbf{X}_g$ özelliğine sahip (yani kendi grup tersine eşit) bir $\mathbf{X} \in \mathbb{C}_n$ matrisine grup involutif matris denir [13].

Tanım 2.7. $\mathbf{X} \in \mathbb{C}_n$ matrisinin transpozesi $\mathbf{X}'$, $\mathbf{X} \in \mathbb{C}_n$ matrisinin eşlenik transpozesi $\mathbf{X}^*$ ile gösterilir ve $(\overline{\mathbf{X}})' = \mathbf{X}^*$ olarak yazılır [12].

Tanım 2.8. $\mathbf{X}^2 = \mathbf{X}^*$ şartını sağlayan $\mathbf{X} \in \mathbb{C}_n$ matrisine genelleştirilmiş projektör denir [5].

BÖLÜM 3. İKİ İDEMPOTENT MATRİSİN BAZI KOMBİNASYONLARININ GRUP TERSİNİR OLMASI İLE İLGİLİ LİTERATÜRDEKİ BAZI SONUÇLAR

$c_1, c_2 \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$, $c_3, c_4, c_5, c_6, c_7 \in \mathbb{C}$ ve $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2 \in \mathbb{C}_n \setminus\{\mathbf{0}\}$ olmak üzere,

$$\mathbf{X} = c_1\mathbf{X}_1 + c_2\mathbf{X}_2 + c_3\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2 + c_4\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1 + c_5\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1 + c_6\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2 + c_7\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2 \qquad \mathbf{(3.1)}$$

kombinasyonu ele alınsın. Bu bölümde $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2$ matrisleri idempotent olduğunda (3.1) biçimli kombinasyonun veya onun daraltılmış bazı kombinasyonlarının grup tersinirliği ile ilgili [17] çalışmasında mevcut olan sonuçlar hatırlatılmaktadır. Bu hatırlatmalar yapılırken sonuçlar, matrisler üzerine $(\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2)^2 = (\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1)^2$ koşulunun ya da $(\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1)^2 = \mathbf{0}$ veya $(\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2)^2 = \mathbf{0}$ koşulunun konulmasına göre gruplandırılmıştır.

3.1. $(\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2)^2 = (\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1)^2$ Koşulunu Sağlayan İki İdempotent Matrisin Bazı Kombinasyonlarının Grup Tersleri

Teorem 3.1. $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2 \in \mathbb{C}_n \setminus\{\mathbf{0}\}$ iki farklı idempotent matris olsun. $c_1, c_2 \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$, $c_3, c_4, c_5, c_6, c_7 \in \mathbb{C}$, $\theta = c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + c_5 + c_6 + c_7 \neq 0$ ve $(\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2)^2 = (\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1)^2$ olmak üzere (3.1) biçimli $\mathbf{X}$ kombinasyon matrisi grup tersinirdir ve grup tersi,

$$
\begin{aligned}
\mathbf{X}_g &= \frac{1}{c_1}\mathbf{X}_1 + \frac{1}{c_2}\mathbf{X}_2 - \left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} + \frac{c_3}{c_1 c_2}\right)\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2 - \left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} + \frac{c_4}{c_1 c_2}\right)\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1 \\
&+ \left(\frac{2}{c_1} + \frac{1}{c_2} + \frac{c_3 + c_4}{c_1 c_2} + \frac{c_3 c_4 - c_2 c_5}{c_1^2 c_2}\right)\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1 + \left(\frac{1}{c_1} + \frac{2}{c_2} + \frac{c_3 + c_4}{c_1 c_2} + \frac{c_3 c_4 - c_1 c_6}{c_1 c_2^2}\right)\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2 \\
&- \left(\frac{2}{c_1} + \frac{2}{c_2} + \frac{c_3 + c_4}{c_1 c_2} + \frac{c_3 c_4 - c_2 c_5}{c_1^2 c_2} + \frac{c_3 c_4 - c_1 c_6}{c_1 c_2^2} - \frac{1}{\theta}\right)\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2 \qquad \textbf{(3.2)}
\end{aligned}
$$

şeklindedir.

İspat.

$$\mathbf{M}_1 = \frac{1}{c_1}\mathbf{X}_1 - \left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} + \frac{c_3}{c_1 c_2}\right)\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2 + \left(\frac{2}{c_1} + \frac{1}{c_2} + \frac{c_3 + c_4}{c_1 c_2} + \frac{c_3 c_4 - c_2 c_5}{c_1^2 c_2}\right)\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1,$$

$$\mathbf{M}_2 = \frac{1}{c_2}\mathbf{X}_2 - \left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} + \frac{c_4}{c_1 c_2}\right)\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1 + \left(\frac{1}{c_1} + \frac{2}{c_2} + \frac{c_3 + c_4}{c_1 c_2} + \frac{c_3 c_4 - c_1 c_6}{c_1 c_2^2}\right)\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2,$$

$$\mathbf{M}_3 = -\left(\frac{2}{c_1} + \frac{2}{c_2} + \frac{c_3 + c_4}{c_1 c_2} + \frac{c_3 c_4 - c_2 c_5}{c_1^2 c_2} + \frac{c_3 c_4 - c_1 c_6}{c_1 c_2^2}\right)\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2$$

olmak üzere, $\mathbf{M} = \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2 + \mathbf{M}_3 + \frac{1}{\theta}(\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2)^2$ biçiminde tanımlansın. Ayrıca, $(\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2)^2 = (\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1)^2$ eşitliği sağdan $\mathbf{X}_1$ ve soldan $\mathbf{X}_2$ ile çarpılsın. Bu durumda, $(\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2)^2\mathbf{X}_1 = (\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1)^2$ ve $\mathbf{X}_2(\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2)^2 = (\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1)^2$ olarak bulunur. Buradan,

$$(\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2)^2\mathbf{X}_1 = \mathbf{X}_2(\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2)^2 = (\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2)^2 = (\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1)^2 \qquad \textbf{(3.3)}$$

yazılabilir. Böylece,

$$\mathbf{X}_1\mathbf{M}_3 = \mathbf{M}_3\mathbf{X}_1 = \mathbf{X}_2\mathbf{M}_3 = \mathbf{M}_3\mathbf{X}_2 = \mathbf{M}_3$$

eşitliklerine ulaşılır. Diğer taraftan, (3.3) göz önünde bulundurularak,

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{X}\left(\mathbf{M}_1+\mathbf{M}_2+\mathbf{M}_3\right)\\
&=\mathbf{X}_1+\frac{c_1}{c_2}\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2-c_1\left(\frac{1}{c_1}+\frac{1}{c_2}+\frac{c_3}{c_1c_2}\right)\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2-c_1\left(\frac{1}{c_1}+\frac{1}{c_2}+\frac{c_4}{c_1c_2}\right)\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1\\
&+c_1\left(\frac{2}{c_1}+\frac{1}{c_2}+\frac{c_3+c_4}{c_1c_2}+\frac{c_3c_4-c_2c_5}{c_1^{\,2}c_2}\right)\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1+c_1\left(\frac{1}{c_1}+\frac{2}{c_2}+\frac{c_3+c_4}{c_1c_2}+\frac{c_3c_4-c_1c_6}{c_1c_2^{\,2}}\right)\left(\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\right)^2\\
&+c_1\mathbf{M}_3+\frac{c_2}{c_1}\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1+\mathbf{X}_2-c_2\left(\frac{1}{c_1}+\frac{1}{c_2}+\frac{c_3}{c_1c_2}\right)\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2-c_2\left(\frac{1}{c_1}+\frac{1}{c_2}+\frac{c_4}{c_1c_2}\right)\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1\\
&+c_2\left(\frac{2}{c_1}+\frac{1}{c_2}+\frac{c_3+c_4}{c_1c_2}+\frac{c_3c_4-c_2c_5}{c_1^{\,2}c_2}\right)\left(\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\right)^2+c_2\left(\frac{1}{c_1}+\frac{2}{c_2}+\frac{c_3+c_4}{c_1c_2}+\frac{c_3c_4-c_1c_6}{c_1c_2^{\,2}}\right)\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\\
&+c_2\mathbf{M}_3+\frac{c_3}{c_1}\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1+\frac{c_3}{c_2}\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2-c_3\left(\frac{1}{c_1}+\frac{1}{c_2}+\frac{c_3}{c_1c_2}\right)\left(\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\right)^2-c_3\left(\frac{1}{c_1}+\frac{1}{c_2}+\frac{c_4}{c_1c_2}\right)\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1\\
&+c_3\left(\frac{2}{c_1}+\frac{1}{c_2}+\frac{c_3+c_4}{c_1c_2}+\frac{c_3c_4-c_2c_5}{c_1^{\,2}c_2}\right)\left(\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\right)^2+c_3\left(\frac{1}{c_1}+\frac{2}{c_2}+\frac{c_3+c_4}{c_1c_2}+\frac{c_3c_4-c_1c_6}{c_1c_2^{\,2}}\right)\left(\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\right)^2\\
&+c_3\mathbf{M}_3+\frac{c_4}{c_1}\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1+\frac{c_4}{c_2}\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2-c_4\left(\frac{1}{c_1}+\frac{1}{c_2}+\frac{c_3}{c_1c_2}\right)\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2-c_4\left(\frac{1}{c_1}+\frac{1}{c_2}+\frac{c_4}{c_1c_2}\right)\left(\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\right)^2\\
&+c_4\left(\frac{2}{c_1}+\frac{1}{c_2}+\frac{c_3+c_4}{c_1c_2}+\frac{c_3c_4-c_2c_5}{c_1^{\,2}c_2}\right)\left(\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\right)^2+c_4\left(\frac{1}{c_1}+\frac{2}{c_2}+\frac{c_3+c_4}{c_1c_2}+\frac{c_3c_4-c_2c_5}{c_1c_2^{\,2}}\right)\left(\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\right)^2\\
&+c_4\mathbf{M}_3+\frac{c_5}{c_1}\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1+\frac{c_5}{c_2}\left(\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\right)^2-c_5\left(\frac{1}{c_1}+\frac{1}{c_2}+\frac{c_3}{c_1c_2}\right)\left(\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\right)^2-c_5\left(\frac{1}{c_1}+\frac{1}{c_2}+\frac{c_4}{c_1c_2}\right)\left(\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\right)^2\\
&+c_5\left(\frac{2}{c_1}+\frac{1}{c_2}+\frac{c_3+c_4}{c_1c_2}+\frac{c_3c_4-c_2c_5}{c_1^{\,2}c_2}\right)\left(\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\right)^2+c_5\left(\frac{1}{c_1}+\frac{2}{c_2}+\frac{c_3+c_4}{c_1c_2}+\frac{c_3c_4-c_1c_6}{c_1c_2^{\,2}}\right)\left(\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\right)^2\\
&+c_5\mathbf{M}_3+\frac{c_6}{c_1}\left(\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\right)^2+\frac{c_6}{c_2}\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2-c_6\left(\frac{1}{c_1}+\frac{1}{c_2}+\frac{c_3}{c_1c_2}\right)\left(\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\right)^2-c_6\left(\frac{1}{c_1}+\frac{1}{c_2}+\frac{c_4}{c_1c_2}\right)\left(\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\right)^2\\
&+c_6\left(\frac{2}{c_1}+\frac{1}{c_2}+\frac{c_3+c_4}{c_1c_2}+\frac{c_3c_4-c_2c_5}{c_1^{\,2}c_2}\right)\left(\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\right)^2+c_6\left(\frac{1}{c_1}+\frac{2}{c_2}+\frac{c_3+c_4}{c_1c_2}+\frac{c_3c_4-c_1c_6}{c_1c_2^{\,2}}\right)\left(\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\right)^2\\
&+c_6\mathbf{M}_3+\frac{c_7}{c_1}\left(\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\right)^2+\frac{c_7}{c_2}\left(\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\right)^2-c_7\left(\frac{1}{c_1}+\frac{1}{c_2}+\frac{c_3}{c_1c_2}\right)\left(\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\right)^2-c_7\left(\frac{1}{c_1}+\frac{1}{c_2}+\frac{c_4}{c_1c_2}\right)\left(\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\right)^2\\
&+c_7\left(\frac{2}{c_1}+\frac{1}{c_2}+\frac{c_3+c_4}{c_1c_2}+\frac{c_3c_4-c_2c_5}{c_1^{\,2}c_2}\right)\left(\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\right)^2+c_7\left(\frac{1}{c_1}+\frac{2}{c_2}+\frac{c_3+c_4}{c_1c_2}+\frac{c_3c_4-c_1c_6}{c_1c_2^{\,2}}\right)\left(\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\right)^2\\
&+c_7\mathbf{M}_3\\
&=\mathbf{X}_1+\mathbf{X}_2-\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2-\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1+\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1+\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2-2\left(\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\right)^2 \qquad \textbf{(3.4)}
\end{aligned}
$$

elde edilir. Yine, (3.3) kullanılarak $\left(\mathbf{M}_1+\mathbf{M}_2+\mathbf{M}_3\right)\mathbf{X}$ çarpımı parçalar halinde yapılırsa,

$$\mathbf{M}_1\mathbf{X} = \mathbf{X}_1 + \frac{c_2}{c_1}\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2 + \frac{c_3}{c_1}\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2 + \frac{c_4}{c_1}\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1 + \frac{c_5}{c_1}\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1 + \frac{c_6}{c_1}\left(\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\right)^2$$

$$+\frac{c_7}{c_1}\left(\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\right)^2 - c_1\left(\frac{1}{c_1}+\frac{1}{c_2}+\frac{c_3}{c_1c_2}\right)\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1 - c_2\left(\frac{1}{c_1}+\frac{1}{c_2}+\frac{c_3}{c_1c_2}\right)\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2$$

$$-c_3\left(\frac{1}{c_1}+\frac{1}{c_2}+\frac{c_3}{c_1c_2}\right)\left(\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\right)^2 - c_4\left(\frac{1}{c_1}+\frac{1}{c_2}+\frac{c_3}{c_1c_2}\right)\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1$$

$$-c_5\left(\frac{1}{c_1}+\frac{1}{c_2}+\frac{c_3}{c_1c_2}\right)\left(\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\right)^2 - c_6\left(\frac{1}{c_1}+\frac{1}{c_2}+\frac{c_3}{c_1c_2}\right)\left(\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\right)^2$$

$$-c_7\left(\frac{1}{c_1}+\frac{1}{c_2}+\frac{c_3}{c_1c_2}\right)\left(\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\right)^2 + c_1\left(\frac{2}{c_1}+\frac{1}{c_2}+\frac{c_3+c_4}{c_1c_2}+\frac{c_3c_4-c_2c_5}{c_1^{\,2}c_2}\right)\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1$$

$$+c_2\left(\frac{2}{c_1}+\frac{1}{c_2}+\frac{c_3+c_4}{c_1c_2}+\frac{c_3c_4-c_2c_5}{c_1^{\,2}c_2}\right)\left(\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\right)^2$$

$$+c_3\left(\frac{2}{c_1}+\frac{1}{c_2}+\frac{c_3+c_4}{c_1c_2}+\frac{c_3c_4-c_2c_5}{c_1^{\,2}c_2}\right)\left(\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\right)^2$$

$$+c_4\left(\frac{2}{c_1}+\frac{1}{c_2}+\frac{c_3+c_4}{c_1c_2}+\frac{c_3c_4-c_2c_5}{c_1^{\,2}c_2}\right)\left(\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\right)^2$$

$$+c_5\left(\frac{2}{c_1}+\frac{1}{c_2}+\frac{c_3+c_4}{c_1c_2}+\frac{c_3c_4-c_2c_5}{c_1^{\,2}c_2}\right)\left(\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\right)^2$$

$$+c_6\left(\frac{2}{c_1}+\frac{1}{c_2}+\frac{c_3+c_4}{c_1c_2}+\frac{c_3c_4-c_2c_5}{c_1^{\,2}c_2}\right)\left(\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\right)^2$$

$$+c_7\left(\frac{2}{c_1}+\frac{1}{c_2}+\frac{c_3+c_4}{c_1c_2}+\frac{c_3c_4-c_2c_5}{c_1^{\,2}c_2}\right)\left(\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\right)^2$$

$$= \mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_1\mathbf{X}_2 + \mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1 + \left(-1+\frac{2\theta}{c_1}+\frac{d\theta}{c_1c_2}+\frac{\theta\left(c_3c_4-c_2c_5\right)}{c_1^{\,2}c_2}\right)\left(\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\right)^2, \tag{3.5}$$

$$\mathbf{M}_2\mathbf{X} = \mathbf{X}_2 - \mathbf{X}_2\mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2 + \left(-1+\frac{2\theta}{c_2}+\frac{c\theta}{c_1c_2}+\frac{\theta\left(c_3c_4-c_1c_6\right)}{c_1c_2^{\,2}}\right)\left(\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\right)^2, \tag{3.6}$$

$$\mathbf{M}_3\mathbf{X} = \theta\mathbf{M}_3 \tag{3.7}$$

olarak bulunur. Dolayısıyla (3.4), (3.5) ve (3.6) birleştirilirse,

$$\left(\mathbf{M}_1+\mathbf{M}_2+\mathbf{M}_3\right)\mathbf{X} = \mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2 - \mathbf{X}_1\mathbf{X}_2 - \mathbf{X}_2\mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2 - 2\left(\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\right)^2 \tag{3.8}$$

olduğu görülür. Ayrıca,

$$\mathbf{X}\frac{1}{\theta}\left(\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\right)^2=\left(\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\right)^2=\frac{1}{\theta}\left(\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\right)^2\mathbf{X} \tag{3.9}$$

ifadesinin sağlandığı (3.3) göz önüne alındığında açıktır. Böylece, (3.4), (3.8) ve (3.9) ifadelerinden,

$$\mathbf{XM}=\mathbf{X}_1+\mathbf{X}_2-\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2-\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1+\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1+\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2-\left(\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\right)^2=\mathbf{MX} \tag{3.10}$$

olduğu görülür. Diğer taraftan, $\mathbf{X}_1$ ve $\mathbf{X}_2$ matrisleri idempotent olduğundan,

$$\mathbf{X}_1\left(\mathbf{X}_1+\mathbf{X}_2-\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2-\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1+\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1+\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2-\left(\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\right)^2\right)=\mathbf{X}_1, \tag{3.11}$$

$$\mathbf{X}_2\left(\mathbf{X}_1+\mathbf{X}_2-\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2-\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1+\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1+\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2-\left(\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\right)^2\right)=\mathbf{X}_2 \tag{3.12}$$

şeklinde elde edilir. Bu durumda (3.10), (3.11) ve (3.12) kullanılarak,

$$\mathbf{XMX}=\mathbf{X},\ \mathbf{MXM}=\mathbf{M} \tag{3.13}$$

elde edilir. Sonuç olarak (3.10) ve (3.13) ifadelerinden $\mathbf{X}$ matrisinin grup tersinir olduğu ve (3.2) biçimli $\mathbf{M}$ matrisinin onun grup tersi olduğu görülür. ■

$\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1=\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2$ eşitliği sağlansın. Bu eşitlik sağdan ve soldan $\mathbf{X}_1$ ile çarpılırsa $\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1=\left(\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1\right)^2$ ve $\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1=\left(\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\right)^2$ bulunur. Buradan,

$$\left(\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\right)^2=\left(\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1\right)^2=\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2=\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1 \tag{3.14}$$

olduğu görülür. (3.1) kombinasyonunda (3.14) göz önüne alınarak Teorem 3.1'den aşağıdaki sonuç yazılır.

Sonuç 3.1.1. $\mathbf{X}_1,\mathbf{X}_2\in\mathbb{C}_n\setminus\{\mathbf{0}\}$ iki farklı idempotent matris olsun. $c_1, c_2\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$, $c_3, c_4, c_5\in\mathbb{C}$, $c_1+c_2+c_3+c_4+c_5\neq 0$ ve $\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1=\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2$ olmak üzere,

$$\mathbf{X} = c_1\mathbf{X}_1 + c_2\mathbf{X}_2 + c_3\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2 + c_4\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1 + c_5\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1$$

matrisi grup tersinirdir ve grup tersi,

$$\begin{aligned}\mathbf{X}_g &= \frac{1}{c_1}\mathbf{X}_1 + \frac{1}{c_2}\mathbf{X}_2 - \left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} + \frac{c_3}{c_1c_2}\right)\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2 - \left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} + \frac{c_4}{c_1c_2}\right)\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1 \\ &+ \left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} + \frac{c_3 + c_4}{c_1c_2} + \frac{1}{c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + c_5}\right)\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1 \qquad \textbf{(3.15)}\end{aligned}$$

şeklindedir. □

$\mathbf{X}_2 = \mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1$ eşitliği sağlansın. Bu ifade soldan ve sağdan $\mathbf{X}_1$ ile çarpılırsa, $\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2 = \mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1$ ve $\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1 = \mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1$ elde edilir. Bu üç ifadeden $\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2 = \mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1 = \mathbf{X}_2\mathbf{X}_1 = \mathbf{X}_2$ yazılabilir. Ayrıca buradaki $\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2 = \mathbf{X}_2$ ifadesi soldan $\mathbf{X}_2$ ile çarpılırsa, bu ifade de kullanılarak

$$\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2 = \mathbf{X}_2\mathbf{X}_1 = \mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1 = \mathbf{X}_2\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2 = \mathbf{X}_2$$

bulunur. Böylece Sonuç 3.1.1'den aşağıdaki sonuç yazılır.

Sonuç 3.1.2. $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2 \in \mathbb{C}_n \setminus \{\mathbf{0}\}$ iki farklı idempotent matris olsun. $c_1, c_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ve $\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1 = \mathbf{X}_2$ olmak üzere $c_1\mathbf{X}_1 + c_2\mathbf{X}_2$ matrisi grup tersinirdir ve grup tersi,

$$\left(c_1\mathbf{X}_1 + c_2\mathbf{X}_2\right)_g = \frac{1}{c_1}\mathbf{X}_1 + \left(\frac{1}{c_1 + c_2} - \frac{1}{c_1}\right)\mathbf{X}_2$$

şeklindedir. □

Aşağıda iki idempotent matrisin bazı kombinasyonlarının grup tersinin varlığı için gerek ve yeter koşullar belirtilmiştir.

Teorem 3.2. $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2 \in \mathbb{C}_n \setminus \{\mathbf{0}\}$ iki farklı idempotent matris olsun. $c_1, c_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $c_3 \in \mathbb{C}$ ve $\theta = c_1 + c_2 + c_3 \neq 0$ olsun. Bu durumda,

$\theta \neq \pm c_1, \pm c_2$ ve $c_1 \neq \pm c_2$ iken,

(i) $$(c_1\mathbf{X}_1 + c_2\mathbf{X}_2 + c_3\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2)_g = \frac{1}{c_1}\mathbf{X}_1 + \frac{1}{c_2}\mathbf{X}_2 + \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{c_1} - \frac{1}{c_2}\right)\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2 \qquad \textbf{(3.16)}$$

olması için gerek ve yeter koşul $\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2 = \mathbf{X}_2\mathbf{X}_1$ olmasıdır.

(ii) $c_1 + c_2 = 0$ ve $c_1 \neq \pm c_3$ iken,

$$(c_1\mathbf{X}_1 - c_1\mathbf{X}_2 + c_3\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2)_g = \frac{1}{c_1}\mathbf{X}_1 - \frac{1}{c_1}\mathbf{X}_2 + \frac{1}{c_3}\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2 \qquad \textbf{(3.17)}$$

olması için gerek ve yeter koşul $\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1 = \mathbf{X}_2\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2 = \mathbf{X}_1\mathbf{X}_2$ olmasıdır.

İspat.

(i) $\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2 = \mathbf{X}_2\mathbf{X}_1$ olsun. Bu ifade sağdan $\mathbf{X}_1$ ile çarpılırsa $\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1 = \mathbf{X}_2\mathbf{X}_1$ olduğu görülür. Buradan $\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1 = \mathbf{X}_2\mathbf{X}_1 = \mathbf{X}_1\mathbf{X}_2$ yazılabilir. Bu ifade (3.15)'te $c_4 = c_5 = 0$ alınarak kullanılırsa (3.16) ifadesi elde edilir.

Şimdi (3.16) sağlansın. Ayrıca, $c_1\mathbf{X}_1 + c_2\mathbf{X}_2 + c_3\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2$ ifadesi $\mathbf{X}$ ile ve (3.16)'nın sağ tarafı $\mathbf{M}$ ile gösterilsin. Bu durumda $\mathbf{XM} = \mathbf{MX}$ sağlanmalı, yani,

$$\mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2 + \left(\frac{c_1}{\theta} - 1 + \frac{c_3}{c_2}\right)\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2 + \frac{c_2}{c_1}\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1 + \frac{c_3}{c_1}\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1 + \left(\frac{c_2}{\theta} - \frac{c_2}{c_1} - 1\right)\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2$$
$$+ \left(\frac{c_3}{\theta} - \frac{c_3}{c_1} - \frac{c_3}{c_2}\right)(\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2)^2$$
$$= \mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2 + \left(\frac{c_2}{\theta} - 1 + \frac{c_3}{c_1}\right)\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2 + \frac{c_1}{c_2}\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1 + \left(\frac{c_1}{\theta} - 1 - \frac{c_1}{c_2}\right)\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1 + \frac{c_3}{c_2}\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2$$
$$+ \left(\frac{c_3}{\theta} - \frac{c_3}{c_1} - \frac{c_3}{c_2}\right)(\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2)^2$$

olmalıdır. Burada düzenleme yapılırsa,

$$\left(\frac{c_1-c_2}{\theta}+\frac{c_3}{c_2}-\frac{c_3}{c_1}\right)\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2+\left(1-\frac{c_1}{\theta}+\frac{c_1}{c_2}+\frac{c_3}{c_1}\right)\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1$$
$$=\left(\frac{c_1}{c_2}-\frac{c_2}{c_1}\right)\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1+\left(1-\frac{c_2}{\theta}+\frac{c_2}{c_1}+\frac{c_3}{c_2}\right)\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2 \quad \textbf{(3.18)}$$

elde edilir. (3.18) ifadesi sağdan $\mathbf{X}_1$ ile çarpılır ve yeniden düzenlenirse,

$$\left(-\frac{c_2}{\theta}+\frac{c_3}{c_2}+\frac{c_1}{c_2}+1\right)\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1=\left(\frac{c_1}{c_2}-\frac{c_2}{c_1}\right)\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1+\left(1-\frac{c_2}{\theta}+\frac{c_2}{c_1}+\frac{c_3}{c_2}\right)\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1$$

ifadesine ulaşılır. Burada $\theta=c_1+c_2+c_3$ olduğu bilgisi kullanılırsa,

$$\left(\frac{\theta}{c_2}-\frac{c_2}{\theta}\right)\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1=\left(\frac{c_1}{c_2}-\frac{c_2}{c_1}\right)\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1+\left(1-\frac{c_2}{\theta}+\frac{c_2}{c_1}+\frac{c_3}{c_2}\right)\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1 \quad \textbf{(3.19)}$$

olur ve (3.19) ifadesi soldan $\mathbf{X}_2$ ile çarpılırsa,

$$\frac{(c_1+c_2)(c_1-c_2)}{c_1c_2}\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1=\frac{(c_1+c_2)(c_1-c_2)}{c_1c_2}\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1$$

eşitliği elde edilir. $c_1\neq\pm c_2$ olduğundan yukarıdaki eşitlik $(\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1)^2=\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1$ olduğunu gösterir. Bu (3.19) ifadesinde kullanılırsa,

$$\left(\frac{\theta}{c_2}-\frac{c_2}{\theta}\right)\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1=\left(\frac{\theta}{c_2}-\frac{c_2}{\theta}\right)\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1$$

bulunur. Burada $\theta\neq\pm c_2$ olduğundan,

$$\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1=\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1 \quad \textbf{(3.20)}$$

eşitliğine ulaşılır. Bu eşitlik (3.18)'de kullanılırsa,

$$\left(\frac{c_1-c_2}{\theta}+\frac{c_3}{c_2}-\frac{c_3}{c_1}\right)\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2+\left(1-\frac{c_1}{\theta}+\frac{c_1}{c_2}+\frac{c_3}{c_1}\right)\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1$$
$$=\left(\frac{c_1}{c_2}-\frac{c_2}{c_1}\right)\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1+\left(1-\frac{c_2}{\theta}+\frac{c_2}{c_1}+\frac{c_3}{c_2}\right)\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2$$

elde edilir. Bu eşitlik sağdan $\mathbf{X}_2$ ile çarpılırsa,

$$\frac{(c_1-c_2)(c_1+c_3)(c_2+c_3)}{c_1c_2\theta}\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2=\frac{(c_1-c_2)(c_1+c_3)(c_2+c_3)}{c_1c_2\theta}\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2$$

olduğu görülür. $\theta \neq \pm c_1$, $\theta \neq \pm c_2$, $c_1 \neq c_2$ kabulü yukarıdaki ifadede göz önüne alınırsa,

$$\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2=\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2 \qquad \textbf{(3.21)}$$

eşitliğine ulaşılır. Böylece (3.20) ve (3.21), (3.18)'de kullanıldığında,

$$\left(\frac{c_1}{\theta}-\frac{\theta}{c_1}\right)\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2=\left(\frac{c_1}{\theta}-\frac{\theta}{c_1}\right)\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1$$

elde edilir. $\theta \neq \pm c_1$ olduğu bilindiğinden yukarıdaki eşitlikten $\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1=\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2$ olduğu görülür.

ii) $\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1=\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2=\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2$ eşitliği sağlansın. Bu durumda Sonuç 3.1.1'den (3.15) ifadesinin var olduğu görülür. (3.15)'te $c_4=c_5=0$ olarak seçilirse (3.17) elde edilir.

(3.17) sağlansın. Bu durumda $\mathbf{XM}=\mathbf{MX}$ olduğundan,

$$\mathbf{X}_1+\mathbf{X}_2+\left(\frac{c_1}{c_3}-1-\frac{c_3}{c_1}\right)\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2-\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1+\frac{c_3}{c_1}\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1-\frac{c_1}{c_3}\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2+\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2$$
$$=\mathbf{X}_1+\mathbf{X}_2+\left(\frac{c_3}{c_1}-1-\frac{c_1}{c_3}\right)\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2-\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1+\frac{c_1}{c_3}\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1-\frac{c_3}{c_1}\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2+\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2$$

olarak yazılabilir. Bu ifade düzenlenirse,

$$2\left(\frac{c_1}{c_3}-\frac{c_3}{c_1}\right)\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2=\left(\frac{c_1}{c_3}-\frac{c_3}{c_1}\right)\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1+\left(\frac{c_1}{c_3}-\frac{c_3}{c_1}\right)\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2 \qquad \textbf{(3.22)}$$

eşitliğine ulaşılır. (3.22) ifadesi sırasıyla sağdan $\mathbf{X}_1$ ve soldan $\mathbf{X}_2$ ile çarpılırsa $\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1=\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1=\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2$ elde edilir. $c_1\neq\pm c_3$ olduğu bilindiğinden (3.22)'de $\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1=\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2$ eşitliği kullanılırsa,

$$2\left(\frac{c_1}{c_3}-\frac{c_3}{c_1}\right)\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2=2\left(\frac{c_1}{c_3}-\frac{c_3}{c_1}\right)\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1$$

bulunur. Buradan $\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1=\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2=\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2$ olduğu görülür. ■

Yukarıdaki teoremde, ispattan görüldüğü üzere $\theta\neq\pm c_1,\pm c_2$ ve $c_1\neq\pm c_2$ kısıtlamalarının tümü sağlanmazsa teoremin verdiği gerek yeter koşul çalışmaz. Aşağıdaki örnek böyle bir durumu göstermektedir.

Örnek 3.1. $\mathbf{X}_1=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$ ve $\mathbf{X}_2=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}$ olsun. $\mathbf{X}_1$ ve $\mathbf{X}_2$ matrislerinin idempotent olduğu açıktır. Teorem 3.2'de $c_1=1,\ c_2=-1,\ c_3=1$ durumu ele alınsın. $\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\neq\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1$ olmasına rağmen

$$\mathbf{X}_1-\mathbf{X}_2+\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&-1&0&0\end{pmatrix} \quad \text{ve} \quad \left(\mathbf{X}_1-\mathbf{X}_2+\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\right)^2=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&-1&0&0\end{pmatrix}$$ elde

edilir. Böylece, $r\left(\mathbf{X}_1-\mathbf{X}_2+\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\right)=3=r\left(\left(\mathbf{X}_1-\mathbf{X}_2+\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\right)^2\right)$ olduğundan Teorem 2.2 göz önüne alındığında $\mathbf{X}_1-\mathbf{X}_2+\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2$ matrisinin grup tersinir olduğu görülür. Ancak grup tersinin ifadesi (3.16) ve (3.17) ifadelerinden elde edilemez.

Uyarı 3.1. Eğer $\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2=\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1$ ise (3.16) ifadesi $\theta\neq\pm c_1,\pm c_2$ ve $c_1\neq\pm c_2$ ek kısıtlamaları olmadan da sağlanır.

Sonuç 3.1.1'de $c_3=c_4=c_5=0$ alınır ve $c_1=c_2$ olduğu kabul edilirse aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 3.3. $\mathbf{X}_1,\ \mathbf{X}_2\in\mathbb{C}_n\setminus\{\mathbf{0}\}$ iki farklı idempotent matris olsun. $c_1\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ iken,

$$\left(c_1\mathbf{X}_1+c_1\mathbf{X}_2\right)_g=\frac{1}{c_1}\mathbf{X}_1+\frac{1}{c_1}\mathbf{X}_2-\frac{2}{c_1}\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2-\frac{2}{c_1}\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1+\frac{5}{2c_1}\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1 \qquad \textbf{(3.23)}$$

olması için gerek ve yeter koşul $\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1=\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2$ olmasıdır.

İspat. $\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1=\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2$ olsun. Bu durumda $c_2=c_1$ ve $c_3=c_4=c_5=0$ için (3.15) ifadesinden (3.23) elde edilir.

Tersine, (3.23) sağlansın. (3.23)'te özel olarak $c_1=c_2=1$ alınırsa

$$\left(\mathbf{X}_1+\mathbf{X}_2\right)_g=\mathbf{X}_1+\mathbf{X}_2-2\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2-2\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1+\frac{5}{2}\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1$$

olarak elde edilir. Ayrıca, $\left(\mathbf{X}_1+\mathbf{X}_2\right)$ matrisinin grup tersinir olduğu bilindiğinden $\left(\mathbf{X}_1+\mathbf{X}_2\right)\left(\mathbf{X}_1+\mathbf{X}_2\right)_g=\left(\mathbf{X}_1+\mathbf{X}_2\right)_g\left(\mathbf{X}_1+\mathbf{X}_2\right)$ yazılabilir. Bu eşitlikten,

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{X}_1-\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2-\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1+\mathbf{X}_2+\frac{1}{2}\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1-2\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2+\frac{5}{2}\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1\\
&=\mathbf{X}_1+\mathbf{X}_2-\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2-\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1+\frac{1}{2}\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1-2\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2+\frac{5}{2}\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2
\end{aligned}
$$

elde edilir. Buradan $\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1=\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2$ olduğu görülür. Ayrıca $\left(\mathbf{X}_1+\mathbf{X}_2\right)\left(\mathbf{X}_1+\mathbf{X}_2\right)_g=\left(\mathbf{X}_1+\mathbf{X}_2\right)_g\left(\mathbf{X}_1+\mathbf{X}_2\right)$ ifadesi soldan $\left(\mathbf{X}_1+\mathbf{X}_2\right)$ ile çarpılırsa ve $\left(\mathbf{X}_1+\mathbf{X}_2\right)\left(\mathbf{X}_1+\mathbf{X}_2\right)_g\left(\mathbf{X}_1+\mathbf{X}_2\right)=\left(\mathbf{X}_1+\mathbf{X}_2\right)$ olduğu bilgisi kullanılırsa,

$$
\left(\mathbf{X}_1+\mathbf{X}_2\right)^2\left(\mathbf{X}_1+\mathbf{X}_2\right)_g=\mathbf{X}_1+\mathbf{X}_2
$$

olarak bulunur. Yani,

$$
\mathbf{X}_1-\frac{1}{2}\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1+\mathbf{X}_2-3\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2+\frac{7}{2}\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1=\mathbf{X}_1+\mathbf{X}_2
$$

yazılabilir. Bu ifade sağdan $\mathbf{X}_1$ ile çapılırsa,

$$
\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1=\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1=\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2 \tag{3.24}
$$

olduğu görülür. Ayrıca,

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{X}_1\left(\mathbf{X}_1+\mathbf{X}_2-\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2-\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1+3\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1-2\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\right)=\mathbf{X}_1,\\
&\mathbf{X}_2\left(\mathbf{X}_1+\mathbf{X}_2-\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2-\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1+3\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1-2\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\right)=\mathbf{X}_2+\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1-\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2
\end{aligned}
$$

olduğu ve (3.24) eşitliği göz önüne alınırsa,

$$\begin{aligned}
(\mathbf{X}_1+\mathbf{X}_2)_g^2(\mathbf{X}_1+\mathbf{X}_2) &= (\mathbf{X}_1+\mathbf{X}_2)_g(\mathbf{X}_1+\mathbf{X}_2)_g(\mathbf{X}_1+\mathbf{X}_2)\\
&= \left(\mathbf{X}_1+\mathbf{X}_2-2\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2-2\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1+\frac{5}{2}\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1\right)(\mathbf{X}_1+\mathbf{X}_2-\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2-\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1+3\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1-2\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2)\\
&= \mathbf{X}_1+(\mathbf{X}_2+\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1-\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2)-2\mathbf{X}_1(\mathbf{X}_2+\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1-\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2)-2\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1+\frac{5}{2}\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1\\
&= \mathbf{X}_1+\mathbf{X}_2-2\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2-2\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1+\frac{7}{2}\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1-\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Grup ters koşullarından $(\mathbf{X}_1+\mathbf{X}_2)_g^2(\mathbf{X}_1+\mathbf{X}_2)=(\mathbf{X}_1+\mathbf{X}_2)_g$ yazılabilir. Buradan,

$$\mathbf{X}_1+\mathbf{X}_2-2\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2-2\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1+\frac{7}{2}\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1-\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2=\mathbf{X}_1+\mathbf{X}_2-2\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2-2\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1+\frac{5}{2}\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1$$

eşitliğine ulaşılır. Burada gerekli düzenlemeler yapıldığında $\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1=\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2$ olduğu görülür. ■

Şimdiye kadar verilen sonuçlarda $\theta\neq 0$ kabulü mevcuttur. Aşağıdaki sonuçlar $\theta=0$ olduğu durum için verilmektedir.

Teorem 3.4. $\mathbf{X}_1,\,\mathbf{X}_2\in\mathbb{C}_n\setminus\{\mathbf{0}\}$ iki farklı idempotent matris olsun. $c_1,\,c_2\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$, $c_3,\,c_4,\,c_5,\,c_6,\,c_7\in\mathbb{C}$, $\theta=c_1+c_2+c_3+c_4+c_5+c_6+c_7=0$ ve $(\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2)^2=(\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1)^2$ olmak üzere,

$$\mathbf{X}=c_1\mathbf{X}_1+c_2\mathbf{X}_2+c_3\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2+c_4\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1+c_5\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1+c_6\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2+c_7\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2$$

matrisi grup tersinirdir ve grup tersi,

$$\mathbf{X}_g = \frac{1}{c_1}\mathbf{X}_1 + \frac{1}{c_2}\mathbf{X}_2 - \left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} + \frac{c_3}{c_1 c_2}\right)\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2 - \left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} + \frac{c_4}{c_1 c_2}\right)\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1$$
$$+\left(\frac{2}{c_1} + \frac{1}{c_2} + \frac{c_3 + c_4}{c_1 c_2} + \frac{c_3 c_4 - c_2 c_5}{c_1^2 c_2}\right)\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1 + \left(\frac{1}{c_1} + \frac{2}{c_2} + \frac{c_3 + c_4}{c_1 c_2} + \frac{c_3 c_4 - c_1 c_6}{c_1 c_2^2}\right)\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2$$
$$-\left(\frac{2}{c_1} + \frac{2}{c_2} + \frac{c_3 + c_4}{c_1 c_2} + \frac{c_3 c_4 - c_2 c_5}{c_1^2 c_2} + \frac{c_3 c_4 - c_1 c_6}{c_1 c_2^2}\right)\left(\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\right)^2 \tag{3.25}$$

biçiminde verilir.

İspat.

$$\mathbf{N}_1 = \frac{1}{c_1}\mathbf{X}_1 - \left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} + \frac{c_3}{c_1 c_2}\right)\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2 + \left(\frac{2}{c_1} + \frac{1}{c_2} + \frac{c_3 + c_4}{c_1 c_2} + \frac{c_3 c_4 - c_2 c_5}{c_1^2 c_2}\right)\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1,$$

$$\mathbf{N}_2 = \frac{1}{c_2}\mathbf{X}_2 - \left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} + \frac{c_4}{c_1 c_2}\right)\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1 + \left(\frac{1}{c_1} + \frac{2}{c_2} + \frac{c_3 + c_4}{c_1 c_2} + \frac{c_3 c_4 - c_1 c_6}{c_1 c_2^2}\right)\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2,$$

$$\mathbf{N}_3 = -\left(\frac{2}{c_1} + \frac{2}{c_2} + \frac{c_3 + c_4}{c_1 c_2} + \frac{c_3 c_4 - c_2 c_5}{c_1^2 c_2} + \frac{c_3 c_4 - c_1 c_6}{c_1 c_2^2}\right)\left(\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\right)^2$$

olmak üzere $\mathbf{N} = \mathbf{N}_1 + \mathbf{N}_2 + \mathbf{N}_3$ biçiminde tanımlansın. (3.25)'in (3.2) ifadesine benzediği göz önünde bulundurularak (3.4)'ten,

$$\mathbf{XN} = \mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2 - \mathbf{X}_1\mathbf{X}_2 - \mathbf{X}_2\mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2 - 2\left(\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\right)^2 \tag{3.26}$$

olduğu kolaylıkla görülür. Ayrıca $\theta = 0$ olduğundan, (3.5) ve (3.6)'dan,

$$\mathbf{N}_1\mathbf{X} = \mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_1\mathbf{X}_2 + \mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1 - \left(\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\right)^2,$$
$$\mathbf{N}_2\mathbf{X} = \mathbf{X}_2 - \mathbf{X}_2\mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2 - \left(\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\right)^2,$$
$$\mathbf{N}_3\mathbf{X} = \mathbf{0}$$

olduğu görülür. Bu eşitlikler ve (3.26) kullanılarak,

$$\left(\mathbf{N}_1\mathbf{X} + \mathbf{N}_2\mathbf{X} + \mathbf{N}_3\mathbf{X}\right) = \mathbf{NX} = \mathbf{XN} \tag{3.27}$$

eşitliğine ulaşılır. Ayrıca,

$$\mathbf{X}_1\left(\mathbf{X}_1+\mathbf{X}_2-\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2-\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1+\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1+\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2-2\left(\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\right)\right)^2=\mathbf{X}_1-\left(\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\right)^2,$$

$$\mathbf{X}_2\left(\mathbf{X}_1+\mathbf{X}_2-\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2-\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1+\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1+\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2-2\left(\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\right)\right)^2=\mathbf{X}_2-\left(\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\right)^2,$$

$$\begin{aligned}\mathbf{N}\left(\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\right)^2=&\left(\frac{1}{c_1}+\frac{1}{c_2}-\left(\frac{1}{c_1}+\frac{1}{c_2}+\frac{c_3}{c_1c_2}\right)-\left(\frac{1}{c_1}+\frac{1}{c_2}+\frac{c_4}{c_1c_2}\right)+\left(\frac{2}{c_1}+\frac{1}{c_2}+\frac{c_3+c_4}{c_1c_2}+\frac{c_3c_4-c_2c_5}{c_1^{\,2}c_2}\right)\right.\\&+\left(\frac{1}{c_1}+\frac{2}{c_2}+\frac{c_3+c_4}{c_1c_2}+\frac{c_3c_4-c_1c_6}{c_1c_2^{\,2}}\right)\\&\left.-\left(\frac{2}{c_1}+\frac{2}{c_2}+\frac{c_3+c_4}{c_1c_2}+\frac{c_3c_4-c_2c_5}{c_1^{\,2}c_2}+\frac{c_3c_4-c_1c_6}{c_1c_2^{\,2}}\right)\right)\left(\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\right)^2\\=&\;\mathbf{0}\end{aligned}$$

olur. $\theta=0$ olduğu göz önüne alınırsa,

$$\mathbf{XNX}=\mathbf{X}-\left(c_1+c_2+c_3+c_4+c_5+c_6+c_7\right)\left(\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\right)^2=\mathbf{X}, \tag{3.28}$$

$$\mathbf{NXN}=\mathbf{N}-\mathbf{N}\left(\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\right)^2=\mathbf{N} \tag{3.29}$$

olarak bulunur. Böylece, (3.27), (3.28) ve (3.29)'dan $\mathbf{X}$ matrisi grup tersinirdir ve (3.25) sağlanır. ■

Sonuç 3.1.3. $\mathbf{X}_1,\,\mathbf{X}_2\in\mathbb{C}_n\setminus\{\mathbf{0}\}$ iki farklı idempotent matris olsun. $c_1,\,c_2\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$, $c_3,\,c_4,\,c_5\in\mathbb{C}$, $c_1+c_2+c_3+c_4+c_5=0$ ve $\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1=\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2$ olmak üzere,

$$\mathbf{X}=c_1\mathbf{X}_1+c_2\mathbf{X}_2+c_3\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2+c_4\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1+c_5\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1$$

matrisi grup tersinirdir ve grup tersi,

$$\mathbf{X}_g = \frac{1}{c_1}\mathbf{X}_1 + \frac{1}{c_2}\mathbf{X}_2 - \left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} + \frac{c_3}{c_1c_2}\right)\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2 - \left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} + \frac{c_4}{c_1c_2}\right)\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1$$
$$+\left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} + \frac{c_3 + c_4}{c_1c_2}\right)\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1 \quad \textbf{(3.30)}$$

şeklindedir. □

$\theta \neq 0$ durumunda olduğu gibi aşağıdaki sonuçlarda $\theta = 0$ koşulu altında, iki idempotent matrisin bazı kombinasyonlarının grup tersinin var olması için gerek ve yeter koşullar incelenmektedir.

Teorem 3.5. $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2 \in \mathbb{C}_n \setminus \{\mathbf{0}\}$ iki farklı idempotent matris olsun. $c_1, c_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $c_3 \in \mathbb{C}$, $c_1 + c_2 + c_3 = 0$ ve $c_1 \neq \pm c_2$ için

$$\left(c_1\mathbf{X}_1 + c_2\mathbf{X}_2 + c_3\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\right)_g = \frac{1}{c_1}\mathbf{X}_1 + \frac{1}{c_2}\mathbf{X}_2 - \left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2}\right)\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2 \quad \textbf{(3.31)}$$

olması için gerek ve yeter koşul $\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2 = \mathbf{X}_2\mathbf{X}_1$ olmasıdır.

İspat. $\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2 = \mathbf{X}_2\mathbf{X}_1$ olsun. Bu ifade sırasıyla, sağdan $\mathbf{X}_1$ ve soldan $\mathbf{X}_2$ ile çarpılırsa $\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2 = \mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1$ elde edilir. Dolayısıyla (3.30)'da $c_4 = c_5 = 0$ alarak (3.31) elde edilir.

Tersine olarak (3.31) sağlansın. Ayrıca, $c_1\mathbf{X}_1 + c_2\mathbf{X}_2 + c_3\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2$ ifadesi $\mathbf{X}$ ve (3.31)'un sağ tarafı $\mathbf{M}$ ile gösterilsin. Bu durumda (3.31) sağlandığından $\mathbf{XM} = \mathbf{MX}$ olmalıdır, yani,

$$\mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2 + \left(\frac{c_3}{c_2} - 1\right)\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2 + \frac{c_3}{c_2}\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1 + \frac{c_3}{c_1}\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1 + \frac{c_3}{c_1}\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2 - \left(\frac{c_3}{c_1} + \frac{c_3}{c_2}\right)\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2$$
$$= \mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2 + \left(\frac{c_3}{c_1} - 1\right)\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2 + \frac{c_3}{c_1}\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1 + \frac{c_3}{c_2}\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1 + \frac{c_3}{c_2}\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2 - \left(\frac{c_3}{c_1} + \frac{c_3}{c_2}\right)\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2$$

bulunur. Bu ifade düzenlenirse,

$$\left(\frac{c_3}{c_2}-\frac{c_3}{c_1}\right)\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2+\left(\frac{c_3}{c_1}-\frac{c_3}{c_2}\right)\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1=\left(\frac{c_3}{c_1}-\frac{c_3}{c_2}\right)\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1-\left(\frac{c_3}{c_2}-\frac{c_3}{c_1}\right)\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2 \qquad \textbf{(3.32)}$$

elde edilir. (3.32) ifadesi sırasıyla sağdan ve soldan $\mathbf{X}_2$ ile çarpılırsa,

$$\left(\frac{c_3}{c_2}-\frac{c_3}{c_1}\right)\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2=\left(\frac{c_3}{c_2}-\frac{c_3}{c_1}\right)\left(\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\right)^2 \text{ ve } \left(\frac{c_3}{c_2}-\frac{c_3}{c_1}\right)\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1=\left(\frac{c_3}{c_2}-\frac{c_3}{c_1}\right)\left(\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1\right)^2$$

elde edilir. $c_1 \neq \pm c_2$ olduğundan,

$$\left(\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\right)^2=\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2 \text{ ve } \left(\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1\right)^2=\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1 \qquad \textbf{(3.33)}$$

olduğu görülür. (3.33) eşitlikleri ve $c_1+c_2+c_3=0$ olduğu göz önüne alınırsa,

$$\mathbf{XM}=\mathbf{X}_1+\mathbf{X}_2+\frac{c_2}{c_1}\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2+\frac{c_2}{c_1}\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1+\frac{c_3}{c_1}\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1+\frac{c_3}{c_1}\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2$$

elde edilir. Ayrıca, $\mathbf{XM}=\mathbf{MX}$ ifadesi soldan $\mathbf{X}$ ile çarpılırsa $\mathbf{X}^2\mathbf{M}=\mathbf{XMX}=\mathbf{X}$ olur. Bu ifade açılır ve $c_1+c_2+c_3=0$ olduğu göz önüne alınırsa

$$c_3\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2=-c_1\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1-c_2\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2 \qquad \textbf{(3.34)}$$

eşitliğine ulaşılır. Bu eşitlik (3.33) göz önünde bulundurularak $\mathbf{X}_2$ ile sırasıyla soldan ve sağdan çarpılırsa,

$$\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1=\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2 \text{ ve } \mathbf{X}_1\mathbf{X}_2=\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1 \qquad \textbf{(3.35)}$$

elde edilir. Dolayısıyla $\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2=\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1$ olduğu görülür. ■

Yukarıdaki teoremde $c_1\mathbf{X}_1 + c_2\mathbf{X}_2 + c_3\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2$ kombinasyonunu oluşturan skalerler için verilen koşullar sağlanmadığında da kombinasyonun grup tersi var olabilir. Aşağıdaki örnek bununla ilgilidir.

Örnek 3.2. $\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ve $\mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ olsun. $\mathbf{X}_1$ ve $\mathbf{X}_2$ matrislerinin idempotent olduğu açıktır. Teorem 3.5'te $c_1 = 1,\ c_2 = 1,\ c_3 = -2$ olarak seçilirse $c_1 + c_2 + c_3 = 0$ olur ancak $c_1 \neq \pm c_2$ koşulu sağlanmaz. Bunula birlikte,

$$\mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2 - 2\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ \left(\mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2 - 2\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\right)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

elde edilir. Dolayısıyla $r\left(\mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2 - 2\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\right) = 3 = r\left(\left(\mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2 - 2\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\right)^2\right)$ tir. Teorem 2.2 gereği $\mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2 - 2\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2$ matrisi grup tersinirdir fakat $\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2 \neq \mathbf{X}_2\mathbf{X}_1$ olduğundan bu kombinasyonun grup tersinin ifadesi (3.31)'den elde edilemez.

Uyarı 3.2. $\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2 = \mathbf{X}_2\mathbf{X}_1$ şeklinde ise (3.31) ifadesi $c_1 = \pm c_2$ olduğu durum için de sağlanır.

Teorem 3.5'te $c_1 = -c_2$ olduğu durum için aşağıdaki sonuç elde edilir.

Teorem 3.6. $\mathbf{X}_1,\ \mathbf{X}_2 \in \mathbb{C}_n \setminus \{\mathbf{0}\}$ iki farklı idempotent matris olsun. $c_1 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ olmak üzere,

$$\left(c_1\mathbf{X}_1 - c_1\mathbf{X}_2\right)_g = \frac{1}{c_1}\mathbf{X}_1 - \frac{1}{c_1}\mathbf{X}_2 \qquad \textbf{(3.36)}$$

olması için gerek ve yeter koşul $\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1 = \mathbf{X}_2\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2$ olmasıdır.

İspat. $\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1 = \mathbf{X}_2\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2$ olsun. Bu eşitlik sırasıyla sağdan ve soldan $\mathbf{X}_1$ ve $\mathbf{X}_2$ ile çarpılırsa $(\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2)^2 = (\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1)^2$ olduğu görülür. Dolayısıyla (3.30)'da $c_2 = -c_1$ ve $c_3 = c_4 = c_5 = 0$ olarak seçilirse (3.36) elde edilir.

Tersine olarak (3.36) sağlansın. Grup ters şartlarından $\left(c_1\mathbf{X}_1 - c_1\mathbf{X}_2\right)\left(c_1\mathbf{X}_1 - c_1\mathbf{X}_2\right)_g\left(c_1\mathbf{X}_1 - c_1\mathbf{X}_2\right) = \left(c_1\mathbf{X}_1 - c_1\mathbf{X}_2\right)$ yazılabilir. Dolayısıyla $\left(\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2\right)^3 = \left(\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2\right)$ elde edilir ve bu denklem genişletilirse $\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1 = \mathbf{X}_2\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2$ eşitliğine ulaşılır. ■

3.2. $(\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1)^2 = \mathbf{0}$ veya $(\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2)^2 = \mathbf{0}$ Koşulunu Sağlayan İki İdempotent Matrisin Bazı Kombinasyonlarının Grup Tersleri

Teorem 3.7. $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2 \in \mathbb{C}_n \setminus \{\mathbf{0}\}$ iki farklı idempotent matris olsun. $c_1, c_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $c_3, c_4, c_5, c_6, c_7 \in \mathbb{C}$ ve $(\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1)^2 = \mathbf{0}$ olmak üzere,

$$\mathbf{X} = c_1\mathbf{X}_1 + c_2\mathbf{X}_2 + c_3\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2 + c_4\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1 + c_5\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1 + c_6\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2 + c_7\left(\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\right)^2$$

matrisi grup tersinirdir ve grup tersi,

$$\begin{aligned}
\mathbf{X}_g = {} & \frac{1}{c_1}\mathbf{X}_1 + \frac{1}{c_2}\mathbf{X}_2 - \left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} + \frac{c_3}{c_1c_2}\right)\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2 - \left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} + \frac{c_4}{c_1c_2}\right)\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1 \\
& + \left(\frac{2}{c_1} + \frac{1}{c_2} + \frac{c_3 + c_4}{c_1c_2} + \frac{c_3c_4 - c_2c_5}{c_1^2c_2}\right)\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1 + \left(\frac{1}{c_1} + \frac{2}{c_2} + \frac{c_3 + c_4}{c_1c_2} + \frac{c_3c_4 - c_1c_6}{c_1c_2^2}\right)\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2 \\
& - \left(\frac{2}{c_1} + \frac{2}{c_2} + \frac{2c_3 + c_4 + c_7}{c_1c_2} + \frac{c_3c_4 - c_2c_5 - c_3c_5}{c_1^2c_2} + \frac{c_3c_4 - c_1c_6 - c_3c_6}{c_1c_2^2} + \frac{c_3^2c_4}{c_1^2c_2^2}\right)\left(\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\right)^2
\end{aligned} \tag{3.37}$$

şeklindedir.

İspat.

$$\mathbf{M}_1=\frac{1}{c_1}\mathbf{X}-\left(\frac{1}{c_1}+\frac{1}{c_2}+\frac{c_3}{c_1c_2}\right)\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2+\left(\frac{2}{c_1}+\frac{1}{c_2}+\frac{c_3+c_4}{c_1c_2}+\frac{c_3c_4-c_2c_5}{c_1^2c_2}\right)\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1\,,$$

$$\mathbf{M}_2=\frac{1}{c_2}\mathbf{X}_2-\left(\frac{1}{c_1}+\frac{1}{c_2}+\frac{c_4}{c_1c_2}\right)\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1+\left(\frac{1}{c_1}+\frac{2}{c_2}+\frac{c_3+c_4}{c_1c_2}+\frac{c_3c_4-c_1c_6}{c_1c_2^2}\right)\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\,,$$

$$\mathbf{M}_3=-\left(\frac{2}{c_1}+\frac{2}{c_2}+\frac{2c_3+c_4+c_7}{c_1c_2}+\frac{c_3c_4-c_2c_5-c_3c_5}{c_1^2c_2}+\frac{c_3c_4-c_1c_6-c_3c_6}{c_1c_2^2}+\frac{c_3^2c_4}{c_1^2c_2^2}\right)\left(\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\right)^2$$

olmak üzere, $\mathbf{M}=\mathbf{M}_1+\mathbf{M}_2+\mathbf{M}_3$ biçiminde tanımlansın. Bu ifadede $(\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1)^2=\mathbf{0}$ olduğu göz önüne alınırsa,

$$\begin{aligned}
\mathbf{XM}=&\ \mathbf{X}_1+\frac{c_1}{c_2}\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2-c_1\left(\frac{1}{c_1}+\frac{1}{c_2}+\frac{c_3}{c_1c_2}\right)\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2-c_1\left(\frac{1}{c_1}+\frac{1}{c_2}+\frac{c_4}{c_1c_2}\right)\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1\\
&+c_1\left(\frac{2}{c_1}+\frac{1}{c_2}+\frac{c_3+c_4}{c_1c_2}+\frac{c_3c_4-c_2c_5}{c_1^2c_2}\right)\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1+c_1\left(\frac{1}{c_1}+\frac{2}{c_2}+\frac{c_3+c_4}{c_1c_2}+\frac{c_3c_4-c_1c_6}{c_1c_2^2}\right)\left(\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\right)^2\\
&+c_1\mathbf{M}_3+\frac{c_2}{c_1}\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1+\mathbf{X}_2-c_2\left(\frac{1}{c_1}+\frac{1}{c_2}+\frac{c_3}{c_1c_2}\right)\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2-c_2\left(\frac{1}{c_1}+\frac{1}{c_2}+\frac{c_4}{c_1c_2}\right)\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1\\
&+c_2\left(\frac{1}{c_1}+\frac{2}{c_2}+\frac{c_3+c_4}{c_1c_2}+\frac{c_3c_4-c_1c_6}{c_1c_2^2}\right)\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2+\frac{c_3}{c_1}\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1+\frac{c_3}{c_2}\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\\
&-c_3\left(\frac{1}{c_1}+\frac{1}{c_2}+\frac{c_3}{c_1c_2}\right)\left(\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\right)^2-c_3\left(\frac{1}{c_1}+\frac{1}{c_2}+\frac{c_4}{c_1c_2}\right)\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1\\
&+c_3\left(\frac{1}{c_1}+\frac{2}{c_2}+\frac{c_3+c_4}{c_1c_2}+\frac{c_3c_4-c_1c_6}{c_1c_2^2}\right)\left(\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\right)^2+\frac{c_4}{c_1}\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1+\frac{c_4}{c_2}\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\\
&-c_4\left(\frac{1}{c_1}+\frac{1}{c_2}+\frac{c_3}{c_1c_2}\right)\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2+\frac{c_5}{c_1}\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1+\frac{c_5}{c_2}\left(\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\right)^2-c_5\left(\frac{1}{c_1}+\frac{1}{c_2}+\frac{c_3}{c_1c_2}\right)\left(\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\right)^2\\
&+\frac{c_6}{c_2}\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2+\frac{c_7}{c_2}\left(\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\right)^2\\
=&\ \mathbf{X}_1+\mathbf{X}_2-\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2-\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1+\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1+\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2-\left(\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\right)^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}_1\mathbf{X}=&\ \mathbf{X}_1+\frac{c_2}{c_1}\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2+\frac{c_3}{c_1}\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2+\frac{c_4}{c_1}\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1+\frac{c_5}{c_1}\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1+\frac{c_6}{c_1}\left(\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\right)^2\\
&-c_1\left(\frac{1}{c_1}+\frac{1}{c_2}+\frac{c_3}{c_1c_2}\right)\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1-c_2\left(\frac{1}{c_1}+\frac{1}{c_2}+\frac{c_3}{c_1c_2}\right)\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2-c_3\left(\frac{1}{c_1}+\frac{1}{c_2}+\frac{c_3}{c_1c_2}\right)\left(\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\right)^2
\end{aligned}$$

$$-c_4\left(\frac{1}{c_1}+\frac{1}{c_2}+\frac{c_3}{c_1c_2}\right)\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1-c_6\left(\frac{1}{c_1}+\frac{1}{c_2}+\frac{c_3}{c_1c_2}\right)\left(\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\right)^2$$
$$+c_1\left(\frac{2}{c_1}+\frac{1}{c_2}+\frac{c_3+c_4}{c_1c_2}+\frac{c_3c_4-c_2c_5}{c_1^{\,2}c_2}\right)\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1+c_2\left(\frac{2}{c_1}+\frac{1}{c_2}+\frac{c_3+c_4}{c_1c_2}+\frac{c_3c_4-c_2c_5}{c_1^{\,2}c_2}\right)\left(\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\right)^2$$
$$+c_3\left(\frac{2}{c_1}+\frac{1}{c_2}+\frac{c_3+c_4}{c_1c_2}+\frac{c_3c_4-c_2c_5}{c_1^{\,2}c_2}\right)\left(\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\right)^2$$
$$=\mathbf{X}_1-\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2+\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1$$
$$+\left(1+\frac{2c_2}{c_1}+\frac{2c_3+c_4+c_7}{c_1}+\frac{c_3c_4-c_2c_5-c_3c_5}{c_1^{\,2}}+\frac{c_3c_4-c_1c_6-c_3c_6}{c_1c_2}+\frac{c_3^{\,2}c_4}{c_1^{\,2}c_2}\right)\left(\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\right)^2$$
$$=\mathbf{X}_1-\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2+\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1-\left(\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\right)^2-c_2\mathbf{M}_3$$
$$=\mathbf{X}_1-\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2+\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1-\left(\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\right)^2-\mathbf{M}_3\mathbf{X}$$

ve

$$\mathbf{M}_2\mathbf{X}=\frac{c_1}{c_2}\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1+\mathbf{X}_2+\frac{c_3}{c_2}\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2+\frac{c_4}{c_2}\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1+\frac{c_6}{c_2}\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2$$
$$-c_1\left(\frac{1}{c_1}+\frac{1}{c_2}+\frac{c_4}{c_1c_2}\right)\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1-c_2\left(\frac{1}{c_1}+\frac{1}{c_2}+\frac{c_4}{c_1c_2}\right)\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2-c_3\left(\frac{1}{c_1}+\frac{1}{c_2}+\frac{c_4}{c_1c_2}\right)\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2$$
$$+c_2\left(\frac{1}{c_1}+\frac{2}{c_2}+\frac{c_3+c_4}{c_1c_2}+\frac{c_3c_4-c_1c_6}{c_1c_2^{\,2}}\right)\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2$$
$$=\mathbf{X}_2-\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1+\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2$$

olarak bulunur. Bu eşitliklerden,

$$\mathbf{XM}=\mathbf{X}_1+\mathbf{X}_2-\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2-\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1+\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1+\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2-\left(\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\right)^2=\mathbf{MX}$$

olduğu kolaylıkla görülür. Ayrıca,

$$\mathbf{X}_1\left(\mathbf{X}_1+\mathbf{X}_2-\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2-\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1+\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1+\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2-\left(\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\right)^2\right)=\mathbf{X}_1,$$
$$\mathbf{X}_2\left(\mathbf{X}_1+\mathbf{X}_2-\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2-\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1+\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1+\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2-\left(\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\right)^2\right)=\mathbf{X}_2$$

olduğundan,

$$\mathbf{XMX} = \left(\mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2 - \mathbf{X}_1\mathbf{X}_2 - \mathbf{X}_2\mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2 - \left(\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\right)^2\right)\mathbf{X} = \mathbf{X},$$

$$\mathbf{MXM} = \left(\mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2 - \mathbf{X}_1\mathbf{X}_2 - \mathbf{X}_2\mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2 - \left(\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\right)^2\right)\mathbf{M} = \mathbf{M}$$

olduğu görülür. Dolayısıyla $\mathbf{X}$ matrisi grup tersinirdir ve (3.37) sağlanır. ■

Sonuç 3.2.1. $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2 \in \mathbb{C}_n \setminus \{\mathbf{0}\}$ iki farklı idempotent matris olsun. $c_1, c_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $c_3 \in \mathbb{C}$ ve $\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1 = \mathbf{0}$ olmak üzere,

$$c_1\mathbf{X}_1 + c_2\mathbf{X}_2 + c_3\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2$$

matrisi grup tersinirdir ve grup tersi,

$$\left(c_1\mathbf{X}_1 + c_2\mathbf{X}_2 + c_3\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\right)_g = \frac{1}{c_1}\mathbf{X}_1 + \frac{1}{c_2}\mathbf{X}_2 - \left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} + \frac{c_3}{c_1c_2}\right)\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2 \qquad \textbf{(3.38)}$$

şeklindedir. □

Benzer şekilde, aşağıdaki teorem ve sonucu ispatlanabilir.

Teorem 3.8. $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2 \in \mathbb{C}_n \setminus \{\mathbf{0}\}$ iki farklı idempotent matris olsun. $c_1, c_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $c_3, c_4, c_5, c_6, c_8 \in \mathbb{C}$ ve $\left(\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\right)^2 = \mathbf{0}$ olmak üzere,

$$\mathbf{X} = c_1\mathbf{X}_1 + c_2\mathbf{X}_2 + c_3\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2 + c_4\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1 + c_5\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1 + c_6\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2 + c_8\left(\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1\right)^2$$

matrisi grup tersinirdir ve grup tersi,

$$\mathbf{X}_g = \frac{1}{c_1}\mathbf{X}_1 + \frac{1}{c_2}\mathbf{X}_2 - \left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} + \frac{c_3}{c_1 c_2}\right)\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2 - \left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} + \frac{c_4}{c_1 c_2}\right)\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1$$
$$+\left(\frac{2}{c_1} + \frac{1}{c_2} + \frac{c_3 + c_4}{c_1 c_2} + \frac{c_3 c_4 - c_2 c_5}{c_1^2 c_2}\right)\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1 + \left(\frac{1}{c_1} + \frac{2}{c_2} + \frac{c_3 + c_4}{c_1 c_2} + \frac{c_3 c_4 - c_1 c_6}{c_1 c_2^2}\right)\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2$$
$$-\left(\frac{2}{c_1} + \frac{2}{c_2} + \frac{c_3 + 2c_4 + c_8}{c_1 c_2} + \frac{c_3 c_4 - c_2 c_5 - c_4 c_5}{c_1^2 c_2} + \frac{c_3 c_4 - c_1 c_6 - c_4 c_6}{c_1 c_2^2} + \frac{c_3 c_4^2}{c_1^2 c_2^2}\right)(\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1)^2 \quad \mathbf{(3.39)}$$

şeklindedir. □

Sonuç 3.2.2. $\mathbf{X}_1,\, \mathbf{X}_2 \in \mathbb{C}_n \setminus \{\mathbf{0}\}$ iki farklı idempotent matris olsun. $c_1,\, c_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ve $\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2 = \mathbf{0}$ olmak üzere,

$$c_1\mathbf{X}_1 + c_2\mathbf{X}_2 + c_4\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1$$

matrisi grup tersinirdir ve grup tersi,

$$\left(c_1\mathbf{X}_1 + c_2\mathbf{X}_2 + c_4\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1\right)_g = \frac{1}{c_1}\mathbf{X}_1 + \frac{1}{c_2}\mathbf{X}_2 - \left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} + \frac{c_4}{c_1 c_2}\right)\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1 \quad \mathbf{(3.40)}$$

şeklindedir. □

BÖLÜM 4. TRİPOTENT MATRİSLERİN BAZI KOMBİNASYONLARININ GRUP TERSLERİ

Bu bölüm çalışmanın esas kısmını oluşturmaktadır. Bu bölümün ilk kısmında $c_1,\ c_2,\ c_3 \in \mathbb{C}\setminus\{0\},\ c_4,\ c_5,\ c_6 \in \mathbb{C}$ katsayıları ve $\mathbf{X}_1,\ \mathbf{X}_2,\ \mathbf{X}_3 \in \mathbb{C}_n^T \setminus \{\mathbf{0}\}$ matrisleri ile oluşturulan $\mathbf{X} = c_1\mathbf{X}_1 + c_2\mathbf{X}_2 + c_3\mathbf{X}_3 + c_4\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2 + c_5\mathbf{X}_1\mathbf{X}_3 + c_6\mathbf{X}_2\mathbf{X}_3$ biçimli kombinasyonun bazı koşullar altında grup tersinin ne olduğu verilmektedir. Bu koşullar kombinasyonda matrislerin ve hatta ilk beş teoremde katsayıların kendi içlerinde sağlaması gereken koşullar olarak dizayn edilmiştir. Bu bölümün ikinci kısmında ise yukarıdaki kombinasyonda matris sayısı ikiye düştüğü durum için ilk kısımdaki gibi kombinasyonun grup tersi ile ilgilenilmiştir.

4.1. Üç Tripotent Matrisin Bazı Kombinasyonlarının Grup Tersleri

Teorem 4.1. $\mathbf{X}_1,\ \mathbf{X}_2,\ \mathbf{X}_3 \in \mathbb{C}_n^T \setminus \{\mathbf{0}\}$ birbirinden farklı $\mathbf{X}_i^2\mathbf{X}_j = \mathbf{X}_i\mathbf{X}_j^2 = \mathbf{X}_i^2\mathbf{X}_j^2$ ve $\mathbf{X}_i\mathbf{X}_j = \mathbf{X}_j\mathbf{X}_i$, $i \neq j$, $i, j = 1,2,3,$ koşullarını sağlayan matrisler olsun. Ayrıca $c_1,\ c_2,\ c_3 \in \mathbb{C}\setminus\{0\},\ c_4,\ c_5,\ c_6 \in \mathbb{C},\ c_1 + c_2 + c_4 \neq 0,\ c_1 + c_3 + c_5 \neq 0,\ c_2 + c_3 + c_6 \neq 0,\ c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + c_5 + c_6 = 0,\ c_3 = -c_1,\ c_4 = -c_1$ olsun. Bu durumda,

$$\mathbf{X} = c_1\mathbf{X}_1 + c_2\mathbf{X}_2 + c_3\mathbf{X}_3 + c_4\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2 + c_5\mathbf{X}_1\mathbf{X}_3 + c_6\mathbf{X}_2\mathbf{X}_3 \qquad \textbf{(4.1)}$$

matrisi grup tersinirdir ve grup tersi,

$$\mathbf{X}_g = \frac{1}{c_1}\mathbf{X}_1 + \frac{1}{c_2}\mathbf{X}_2 + \frac{1}{c_3}\mathbf{X}_3 - \left(\frac{c_1^{\ 2} + c_1c_2 + c_2^{\ 2} + c_1c_4 + c_2c_4}{c_1c_2\left(c_1 + c_2 + c_4\right)}\right)\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2$$
$$-\left(\frac{c_1^{\ 2} + c_1c_3 + c_3^{\ 2} + c_1c_5 + c_3c_5}{c_1c_3\left(c_1 + c_3 + c_5\right)}\right)\mathbf{X}_1\mathbf{X}_3 - \left(\frac{c_2^{\ 2} + c_2c_3 + c_3^{\ 2} + c_2c_6 + c_3c_6}{c_2c_3\left(c_2 + c_3 + c_6\right)}\right)\mathbf{X}_2\mathbf{X}_3$$

şeklindedir.

İspat.

$$\mathbf{M}_1 = \frac{1}{c_1}\mathbf{X}_1 - \left(\frac{c_1^{\ 2} + c_1c_2 + c_2^{\ 2} + c_1c_4 + c_2c_4}{c_1c_2\left(c_1 + c_2 + c_4\right)}\right)\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2,$$

$$\mathbf{M}_2 = \frac{1}{c_2}\mathbf{X}_2 - \left(\frac{c_2^{\ 2} + c_2c_3 + c_3^{\ 2} + c_2c_6 + c_3c_6}{c_2c_3\left(c_2 + c_3 + c_6\right)}\right)\mathbf{X}_2\mathbf{X}_3,$$

$$\mathbf{M}_3 = \frac{1}{c_3}\mathbf{X}_3 - \left(\frac{c_1^{\ 2} + c_1c_3 + c_3^{\ 2} + c_1c_5 + c_3c_5}{c_1c_3\left(c_1 + c_3 + c_5\right)}\right)\mathbf{X}_1\mathbf{X}_3$$

olmak üzere $\mathbf{M} = \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2 + \mathbf{M}_3$ olsun. Diğer taraftan $\mathbf{X}_i^{\ 2}\mathbf{X}_j = \mathbf{X}_i\mathbf{X}_j^{\ 2} = \mathbf{X}_i^{\ 2}\mathbf{X}_j^{\ 2}$ eşitliği soldan $\mathbf{X}_i$ ile çarpılırsa

$$\mathbf{X}_i^{\ 2}\mathbf{X}_j = \mathbf{X}_i\mathbf{X}_j = \mathbf{X}_i^{\ 2}\mathbf{X}_j^{\ 2} = \mathbf{X}_i\mathbf{X}_j^{\ 2} \qquad \textbf{(4.2)}$$

yazılabilir. Böylece $\mathbf{M}_i\mathbf{X}$, $i = 1,2,3,$ ifadeleri

$$\mathbf{M}_1\mathbf{X} = \mathbf{X}_1^{\ 2} - \frac{c_1 + c_2 + c_4}{c_2}\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2 + \frac{c_3 + c_5}{c_1}\mathbf{X}_1\mathbf{X}_3$$
$$-\frac{\left(c_2\left(c_2 + c_4\right)\left(c_3 + c_5\right) + c_1^{\ 2}\left(c_3 + c_5 + c_6\right) + c_1\left(c_2\left(c_3 + c_5\right) + c_4\left(c_3 + c_5 + c_6\right)\right)\right)}{c_1c_2\left(c_1 + c_2 + c_4\right)}\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\mathbf{X}_3,$$

$$\mathbf{M}_2\mathbf{X} = \mathbf{X}_2^{\ 2} + \frac{c_1 + c_4}{c_2}\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2 - \frac{c_2 + c_3 + c_6}{c_3}\mathbf{X}_2\mathbf{X}_3$$
$$-\frac{\left(c_2^{\ 2}\left(c_4 + c_5\right) + c_3c_4\left(c_3 + c_6\right) + c_2\left(c_3c_4 + \left(c_4 + c_5\right)c_6\right) + c_1\left(c_2^{\ 2} + \left(c_3 + c_6\right)\left(c_2 + c_3\right)\right)\right)}{c_2c_3\left(c_2 + c_3 + c_6\right)}\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\mathbf{X}_3,$$
$$\mathbf{M}_3\mathbf{X} = \mathbf{X}_3^{\ 2} - \frac{c_1 + c_3 + c_5}{c_1}\mathbf{X}_1\mathbf{X}_3 + \frac{c_2 + c_6}{c_3}\mathbf{X}_2\mathbf{X}_3$$
$$-\frac{\left(c_1^{\ 2}\left(c_2 + c_6\right) + (c_3 + c_5)\left(c_1\left(c_2 + c_6\right) + c_3\left(c_2 + c_4 + c_6\right)\right)\right)}{c_1c_3\left(c_1 + c_3 + c_5\right)}\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\mathbf{X}_3$$

olarak bulunur. Yukarıdaki ifadeler, (4.2) eşitliği ve $c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + c_5 + c_6 = 0$, $c_3 = c_4 = -c_1$ koşulları göz önüne alınırsa,

$$\mathbf{MX} = \mathbf{X}_1^{\ 2} + \mathbf{X}_2^{\ 2} + \mathbf{X}_3^{\ 2} - \mathbf{X}_1\mathbf{X}_2 - \mathbf{X}_1\mathbf{X}_3 - \mathbf{X}_2\mathbf{X}_3 \tag{4.3}$$

bulunur. Benzer şekilde,

$$\mathbf{XM} = \mathbf{X}_1^{\ 2} + \mathbf{X}_2^{\ 2} + \mathbf{X}_3^{\ 2} - \mathbf{X}_1\mathbf{X}_2 - \mathbf{X}_1\mathbf{X}_3 - \mathbf{X}_2\mathbf{X}_3 \tag{4.4}$$

olduğu görülür. Yine, (4.2) ve $c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + c_5 + c_6 = 0$ eşitliklerinden,

$$\mathbf{XMX} = \left(c_1\mathbf{X}_1 + c_2\mathbf{X}_2 + c_3\mathbf{X}_3 + c_4\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2 + c_5\mathbf{X}_1\mathbf{X}_3 + c_6\mathbf{X}_2\mathbf{X}_3\right)\mathbf{MX} = \mathbf{X}, \tag{4.5}$$
$$\mathbf{MXM} = \mathbf{M}\left(\mathbf{X}_1^{\ 2} + \mathbf{X}_2^{\ 2} + \mathbf{X}_3^{\ 2} - \mathbf{X}_1\mathbf{X}_2 - \mathbf{X}_1\mathbf{X}_3 - \mathbf{X}_2\mathbf{X}_3\right) = \mathbf{M} \tag{4.6}$$

eşitlikleri kolaylıkla görülür. Dolayısıyla, (4.3), (4.4), (4.5), (4.6) eşitliklerinden $\mathbf{X}$ grup tersinirdir ve grup tersinin ifadesi $\mathbf{M}$ şeklindedir. ∎

Teorem 4.2. $\mathbf{X}_1$, $\mathbf{X}_2$, $\mathbf{X}_3 \in \mathbb{C}_n^T \setminus \{\mathbf{0}\}$ ve birbirinden farklı $\mathbf{X}_i^{\ 2}\mathbf{X}_j = \mathbf{X}_i\mathbf{X}_j^{\ 2} = \mathbf{X}_i^{\ 2}\mathbf{X}_j^{\ 2}$ ve $\mathbf{X}_i\mathbf{X}_j = \mathbf{X}_j\mathbf{X}_i$, $i \neq j$, $i, j = 1,2,3$, koşullarını sağlayan matrisler olsun. Ayrıca c_1, c_2, $c_3 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, c_4, $c_5 \in \mathbb{C}$, $c_i + c_j + c_4 \neq 0$, $c_i + c_k + c_5 \neq 0$, $c_k = -c_j$, $c_4 = -c_j$, $i \neq j$, $j \neq k$, $i \neq k$, $i, j, k = 1,2,3$, olsun. Bu durumda,

$$\mathbf{X} = c_i\mathbf{X}_i + c_j\mathbf{X}_j + c_k\mathbf{X}_k + c_4\mathbf{X}_i\mathbf{X}_j + c_5\mathbf{X}_i\mathbf{X}_k$$

matrisi grup tersinirdir ve grup tersi,

$$\mathbf{X}_g = \frac{1}{c_i}\mathbf{X}_i + \frac{1}{c_j}\mathbf{X}_j + \frac{1}{c_k}\mathbf{X}_k - \left(\frac{c_i^2 + c_ic_j + c_j^2 + c_ic_4 + c_jc_4}{c_ic_j\left(c_i + c_j + c_4\right)}\right)\mathbf{X}_i\mathbf{X}_j$$
$$-\left(\frac{c_i^2 + c_ic_k + c_k^2 + c_ic_5 + c_kc_5}{c_ic_k\left(c_i + c_k + c_5\right)}\right)\mathbf{X}_i\mathbf{X}_k$$

şeklindedir.

İspat.

$$\mathbf{M} = \frac{1}{c_i}\mathbf{X}_i + \frac{1}{c_j}\mathbf{X}_j + \frac{1}{c_k}\mathbf{X}_k - \left(\frac{c_i^2 + c_ic_j + c_j^2 + c_ic_4 + c_jc_4}{c_ic_j\left(c_i + c_j + c_4\right)}\right)\mathbf{X}_i\mathbf{X}_j$$
$$-\left(\frac{c_i^2 + c_ic_k + c_k^2 + c_ic_5 + c_kc_5}{c_ic_k\left(c_i + c_k + c_5\right)}\right)\mathbf{X}_i\mathbf{X}_k$$

olarak tanımlansın. Ayrıca, (4.2) ve $c_k = -c_j$, $c_4 = -c_j$ eşitlikleri göz önünde bulundurulursa,

$$\mathbf{XM} = \mathbf{X}_i^2 + \mathbf{X}_j^2 + \mathbf{X}_k^2 - \mathbf{X}_i\mathbf{X}_j - \mathbf{X}_i\mathbf{X}_k - 2\mathbf{X}_j\mathbf{X}_k + 2\mathbf{X}_i\mathbf{X}_j\mathbf{X}_k, \tag{4.7}$$

$$\mathbf{MX} = \mathbf{X}_i^2 + \mathbf{X}_j^2 + \mathbf{X}_k^2 - \mathbf{X}_i\mathbf{X}_j - \mathbf{X}_i\mathbf{X}_k - 2\mathbf{X}_j\mathbf{X}_k + 2\mathbf{X}_i\mathbf{X}_j\mathbf{X}_k \tag{4.8}$$

olarak bulunur. Yine (4.2) ve $c_k = -c_j$, $c_4 = -c_j$ eşitlikleri göz önünde bulundurulursa,

$$\mathbf{XMX} = \mathbf{X}, \tag{4.9}$$

$$\mathbf{MXM} = \mathbf{M} \tag{4.10}$$

olduğu görülür. Böylece, (4.7), (4.8), (4.9) ve (4.10) eşitliklerinden $\mathbf{X}$ matrisinin grup tersinir olduğu ve grup tersinin $\mathbf{M}$ şeklinde olduğu görülür. ■

Teorem 4.3. $\mathbf{X}_1$, $\mathbf{X}_2$, $\mathbf{X}_3 \in \mathbb{C}_n^T \setminus \{\mathbf{0}\}$ birbirinden farklı $\mathbf{X}_i^2\mathbf{X}_j = \mathbf{X}_i\mathbf{X}_j^2 = \mathbf{X}_i^2\mathbf{X}_j^2$ ve $\mathbf{X}_i\mathbf{X}_j = \mathbf{X}_j\mathbf{X}_i$, $i \neq j$, $i, j = 1,2,3,$ koşullarını sağlayan matrisler olsun. Ayrıca c_1, c_2, $c_3 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $c_4 \in \mathbb{C}$, $c_i + c_j + c_4 \neq 0$, $c_j = \frac{1}{2}i(ic_i + \sqrt{3}c_i)$, $c_k = -\frac{1}{2}i(-ic_i + \sqrt{3}c_i)$, $c_4 = -c_i$, $i \neq j$, $j \neq k$, $i \neq k$, $i, j, k = 1,2,3,$ olsun. Bu durumda,

$$\mathbf{X} = c_i\mathbf{X}_i + c_j\mathbf{X}_j + c_k\mathbf{X}_k + c_4\mathbf{X}_i\mathbf{X}_j$$

matrisi grup tersinirdir ve grup tersi,

$$\mathbf{X}_g = \frac{1}{c_i}\mathbf{X}_i + \frac{1}{c_j}\mathbf{X}_j + \frac{1}{c_k}\mathbf{X}_k - \left(\frac{c_i^2 + c_ic_j + c_j^2 + c_ic_4 + c_jc_4}{c_ic_j\left(c_i + c_j + c_4\right)}\right)\mathbf{X}_i\mathbf{X}_j$$

şeklindedir.

İspat.

$$\mathbf{M} = \frac{1}{c_i}\mathbf{X}_i + \frac{1}{c_j}\mathbf{X}_j + \frac{1}{c_k}\mathbf{X}_k - \left(\frac{c_i^2 + c_ic_j + c_j^2 + c_ic_4 + c_jc_4}{c_ic_j\left(c_i + c_j + c_4\right)}\right)\mathbf{X}_i\mathbf{X}_j$$

olarak tanımlansın. (4.2) ve $c_j = \frac{1}{2}i(ic_i + \sqrt{3}c_i)$, $c_k = -\frac{1}{2}i(-ic_i + \sqrt{3}c_i)$, $c_4 = -c_i$ eşitliklerinden,

$$\mathbf{MX} = \mathbf{X}_i^2 + \mathbf{X}_j^2 + \mathbf{X}_k^2 - \mathbf{X}_i\mathbf{X}_j - \mathbf{X}_i\mathbf{X}_k - \mathbf{X}_j\mathbf{X}_k + \mathbf{X}_i\mathbf{X}_j\mathbf{X}_k, \tag{4.11}$$

$$\mathbf{XM} = \mathbf{X}_i^2 + \mathbf{X}_j^2 + \mathbf{X}_k^2 - \mathbf{X}_i\mathbf{X}_j - \mathbf{X}_i\mathbf{X}_k - \mathbf{X}_j\mathbf{X}_k + \mathbf{X}_i\mathbf{X}_j\mathbf{X}_k \tag{4.12}$$

elde edilir. Benzer şekilde,

$$\mathbf{XMX} = \mathbf{X}, \tag{4.13}$$

$$\mathbf{MXM} = \mathbf{M} \tag{4.14}$$

bulunur. Dolayısıyla, (4.11), (4.12), (4.13), (4.14) eşitliklerinden $\mathbf{X}$ matrisinin grup tersinir ve grup tersinin $\mathbf{M}$ şeklinde olduğu görülür. ■

Teorem 4.4. $\mathbf{X}_1$, $\mathbf{X}_2$, $\mathbf{X}_3 \in \mathbb{C}_n^T \setminus \{\mathbf{0}\}$ birbirinden farklı $\mathbf{X}_i^2\mathbf{X}_j = \mathbf{X}_i\mathbf{X}_j^2 = \mathbf{X}_i^2\mathbf{X}_j^2$ ve $\mathbf{X}_i\mathbf{X}_j = \mathbf{X}_j\mathbf{X}_i$, $i \neq j$, $i, j = 1,2,3,$ koşullarını sağlayan matrisler olsun. Ayrıca c_1, c_2, c_3, $c_4 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $c_2 = \frac{1}{2}i\left(ic_1 + \sqrt{3}c_1\right)$, $c_3 = -\frac{1}{2}i\left(-ic_1 + \sqrt{3}c_1\right)$ olsun. Bu durumda,

$$\mathbf{X} = c_1\mathbf{X}_1 + c_2\mathbf{X}_2 + c_3\mathbf{X}_3 + c_4\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\mathbf{X}_3$$

matrisi grup tersinirdir ve grup tersi,

$$\mathbf{X}_g = \frac{1}{c_1}\mathbf{X}_1 + \frac{1}{c_2}\mathbf{X}_2 + \frac{1}{c_3}\mathbf{X}_3 + \frac{1}{c_4}\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\mathbf{X}_3$$

şeklindedir.

İspat.

$$\mathbf{M} = \frac{1}{c_1}\mathbf{X}_1 + \frac{1}{c_2}\mathbf{X}_2 + \frac{1}{c_3}\mathbf{X}_3 + \frac{1}{c_4}\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\mathbf{X}_3$$

olarak tanımlansın. (4.2)'nin sağlandığı açıktır. (4.2) göz önüne alınarak $\mathbf{XM} = \mathbf{MX}$ olduğu kolayca görülebilir. Ayrıca, $c_2 = \frac{1}{2}i\left(ic_1 + \sqrt{3}c_1\right)$, $c_3 = -\frac{1}{2}i\left(-ic_1 + \sqrt{3}c_1\right)$ eşitlikleri ve (4.2)'den $\mathbf{XMX} = \mathbf{X}$ ve $\mathbf{MXM} = \mathbf{M}$ olduğu kolaylıkla görülür. Böylece $\mathbf{X}$ grup tersinirdir ve grup tersi $\mathbf{M}$ şeklindedir. ■

Yukarıdaki dört teoremin ispatında, teoremin ifadesinde $\mathbf{X}$ matrisinin grup tersi olduğu iddia edilen matris $\mathbf{M}$ olarak alındı. Bu $\mathbf{M}$ için grup ters koşullarının sağlandığı görüldü. Böylece teoremler ispatlandı. Aşağıdaki teoremlerde de aynı işlemler uygulanarak ispatları kolayca yapılabilir. Burada grup ters koşullarının sağlanıp sağlanmadığı kontrol edilirken teoremlerdeki katsayı ve matrisler için olan ek koşulların da kullanıldığına dikkat ediniz.

Teorem 4.5. $\mathbf{X}_1$, $\mathbf{X}_2$, $\mathbf{X}_3 \in \mathbb{C}_n^T \setminus \{\mathbf{0}\}$ birbirinden farklı $\mathbf{X}_i^2\mathbf{X}_j = \mathbf{X}_i\mathbf{X}_j^2$ ve $\mathbf{X}_i\mathbf{X}_j = \mathbf{X}_j\mathbf{X}_i$, $i \neq j$, $i, j = 1,2,3,$ koşullarını sağlayan matrisler olsun. Ayrıca c_1, c_2, $c_3 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $c_2 = \frac{1}{2} i\left(ic_1 + \sqrt{3}c_1\right)$, $c_3 = -\frac{1}{2} i\left(-ic_1 + \sqrt{3}c_1\right)$ olsun. Bu durumda,

$$\mathbf{X} = c_1\mathbf{X}_1 + c_2\mathbf{X}_2 + c_3\mathbf{X}_3$$

matrisi grup tersinirdir ve grup tersi,

$$\mathbf{X}_g = \frac{1}{c_1}\mathbf{X}_1 + \frac{1}{c_2}\mathbf{X}_2 + \frac{1}{c_3}\mathbf{X}_3$$

şeklindedir. □

Teorem 4.6. $\mathbf{X}_1$, $\mathbf{X}_2$, $\mathbf{X}_3 \in \mathbb{C}_n^T \setminus \{\mathbf{0}\}$ birbirinden farklı $\mathbf{X}_i\mathbf{X}_j = \mathbf{X}_j\mathbf{X}_i$ ve $\mathbf{X}_i^2\mathbf{X}_j = \mathbf{X}_i\mathbf{X}_j^2 = \mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\mathbf{X}_3 = \mathbf{X}_3$, $i \neq j$, $i, j = 1,2,3,$ koşullarını sağlayan matrisler olsun. Ayrıca c_1, $c_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $c_3 \in \mathbb{C}$ olsun. Bu durumda,

$$\mathbf{X} = c_1\mathbf{X}_1 + c_2\mathbf{X}_2 + c_3\mathbf{X}_3$$

matrisi grup tersinirdir ve grup tersi,

$$\mathbf{X}_g = \frac{1}{c_1}\mathbf{X}_1 + \frac{1}{c_2}\mathbf{X}_2 - \left(\frac{c_1^2 + c_1c_2 + c_2^2 + c_1c_3 + c_2c_3}{c_1c_2\left(c_1 + c_2 + c_3\right)}\right)\mathbf{X}_3$$

şeklindedir. □

4.2. İki Tripotent Matrisin Bazı Kombinasyonlarının Grup Tersleri

Teorem 4.7. $\mathbf{X}_1$, $\mathbf{X}_2 \in \mathbb{C}_n^T \setminus \{\mathbf{0}\}$ birbirinden farklı $\mathbf{X}_1^2\mathbf{X}_2 = \mathbf{X}_1\mathbf{X}_2^2 = \mathbf{X}_1^2\mathbf{X}_2^2$ ve $\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2 = \mathbf{X}_2\mathbf{X}_1$ koşullarını sağlayan matrisler olsun. Ayrıca c_1, $c_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $c_3 \in \mathbb{C}$, $c_1 + c_2 + c_3 = 0$ olsun. Bu durumda,

$$\mathbf{X} = c_1\mathbf{X}_1 + c_2\mathbf{X}_2 + c_3\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2$$

matrisi grup tersinirdir ve grup tersi,

$$\mathbf{X}_g = \frac{1}{c_1}\mathbf{X}_1 + \frac{1}{c_2}\mathbf{X}_2 + c_3\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2$$

şeklindedir. □

Teorem 4.8. $\mathbf{X}_1$, $\mathbf{X}_2 \in \mathbb{C}_n^T \setminus \{\mathbf{0}\}$ birbirinden farklı $\mathbf{X}_1^2\mathbf{X}_2 = \mathbf{X}_1\mathbf{X}_2^2 = \mathbf{X}_1^2\mathbf{X}_2^2$ ve $\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2 = \mathbf{X}_2\mathbf{X}_1$ koşullarını sağlayan matrisler olsun. Ayrıca c_1, $c_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $c_3 \in \mathbb{C}$ olsun. Bu durumda,

$$\mathbf{X} = c_1\mathbf{X}_1 + c_2\mathbf{X}_2 + c_3\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2$$

matrisi grup tersinirdir ve grup tersi,

$$\mathbf{X}_g = \frac{1}{c_1}\mathbf{X}_1 + \frac{1}{c_2}\mathbf{X}_2 - \left(\frac{c_1^2 + c_1c_2 + c_2^2 + c_1c_3 + c_2c_3}{c_1c_2\left(c_1 + c_2 + c_3\right)}\right)\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2$$

şeklindedir. □

Teorem 4.9. $\mathbf{X}_1$, $\mathbf{X}_2 \in \mathbb{C}_n^T \setminus \{\mathbf{0}\}$ birbirinden farklı $\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2 = \mathbf{X}_2\mathbf{X}_1$ ve $\mathbf{X}_1^2\mathbf{X}_2 = \mathbf{X}_1\mathbf{X}_2^2$ koşullarını sağlayan matrisler olsun. Ayrıca $c_1 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ olsun. Bu durumda,

$$\mathbf{X} = c_1\mathbf{X}_1 - c_1\mathbf{X}_2$$

matrisi grup tersinirdir ve grup tersi,

$$\mathbf{X}_g = \frac{1}{c_1}\mathbf{X}_1 - \frac{1}{c_1}\mathbf{X}_2$$

şeklindedir. □

Teorem 4.10. $\mathbf{X}_1$, $\mathbf{X}_2 \in \mathbb{C}_n^T \setminus \{\mathbf{0}\}$ birbirinden farklı $\mathbf{X}_1{}^2\mathbf{X}_2 = -\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2{}^2$ ve $\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2 = \mathbf{X}_2\mathbf{X}_1$ koşullarını sağlayan matrisler olsun. Ayrıca $c_1 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ olsun. Bu durumda,

$$\mathbf{X} = c_1\mathbf{X}_1 + c_1\mathbf{X}_2$$

matrisi grup tersinirdir ve grup tersi,

$$\mathbf{X}_g = \frac{1}{c_1}\mathbf{X}_1 + \frac{1}{c_1}\mathbf{X}_2$$

şeklindedir. □

BÖLÜM 5. TARTIŞMALAR VE ÖNERİLER

$c_1, \quad c_2, \quad c_3 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \quad c_4, \quad c_5, \quad c_6 \in \mathbb{C}, \quad \mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3 \in \mathbb{C}_n^T \setminus \{\mathbf{0}\}$ olmak üzere $\mathbf{X} = c_1\mathbf{X}_1 + c_2\mathbf{X}_2 + c_3\mathbf{X}_3 + c_4\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2 + c_5\mathbf{X}_1\mathbf{X}_3 + c_6\mathbf{X}_2\mathbf{X}_3$ kombinasyonu göz önüne alınsın. Bölüm 4'te, bu kombinasyon ve bu kombinasyonun daha alt versiyonlarından oluşan kombinasyonlar için bazı koşullar altında grup tersin ifadesi ortaya koyuldu. Böylece, çalışmanın esas bölümü olan Bölüm 4'te on farklı teorem ifade ve ispat edildi.

Bu çalışma hazırlanırken daha önce iki idempotent matrisin $\mathbf{X} = c_1\mathbf{X}_1 + c_2\mathbf{X}_2 + c_3\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2 + c_4\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1 + c_5\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1 + c_6\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2 + c_7\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2$ biçimli kombinasyonunun grup tersinirliği problemini ele alan [17] çalışmasından esinlenildi.

Bundan sonra bu kuadripotent, EP, vb. farklı özel tipli matrisler için oluşturulan çeşitli kombinasyonların grup tersinirliği problemleri ele alınabilir.

KAYNAKLAR

[1] BAKSALARY, J.K., BAKSALARY, O.M., Idempotency of linear combinations of two idempotent matrices, Linear Algebra Appl., 321, 3–7, 2000.

[2] BAKSALARY, J.K., BAKSALARY, O.M., Nonsingularity of linear combinations of idempotent matrices, Linear Algebra Appl., 388, 25–29, 2004.

[3] BAKSALARY, J.K., BAKSALARY, O.M., On linear combinations of generalized projectors, Linear Algebra Appl., 388, 17–24, 2004.

[4] BAKSALARY, O.M., Idempotency of linear combinations of three idempotent matrices, two of which are disjoint, Linear Algebra Appl., 388, 67–78, 2004.

[5] BAKSALARY, O.M., Revisitation of generalized and hypergeneralized projectors, Statistical Inference, Econometric Analysis and Matrix Algebra, 317–324, 2008.

[6] BAKSALARY, J.K., BAKSALARY, O.M., and ÖZDEMİR, H., A note on linear combinations of commuting tripotent matrices, Linear Algebra Appl., 388, 45–51, 2004.

[7] BAKSALARY, J.K., BAKSALARY, O.M., and STYAN, G.P.H., Idempotency of linear combinations of an idempotent matrix and a tripotent matrix, Linear Algebra Appl., 354, 21–34, 2002.

[8] BAKSALARY, O.M., BENÍTEZ, J., Idempotency of linear combinations of three idempotent matrices, two of which are commuting, Linear Algebra Appl., 424, 320–337, 2007.

[9] BEN–ISRAEL, A., GREVILLE, T.N.E., Generalized Inverses: Theory and Applications, Wiley, New York, 1974.

[10] BENÍTEZ, J., THOME, N., Idempotency of linear combinations of an idempotent matrix and a $t-$ potent matrix that commute, Linear Algebra Appl., 403, 414–418, 2005.

[11] BENÍTEZ, J., THOME, N., Idempotency of linear combinations of an idempotent matrix and a $t-$ potent matrix that do not commute, Linear

Multilinear Algebra, 56(6), 679–687, 2008.

[12] BERNSTEIN, D.S., Matrix Mathematics, Theory, Facts and Formulas, Princeton University Press, New Jersey, 2009.

[13] BRU, R., THOME, N., Group inverse and group involutory matrices, Linear Multilinear Algebra, 45, 207–218, 1998.

[14] CHEN, Y.N., DU, H.K., Idempotency of linear combinations of two idempotent operators, Acta Math. Sinica (Chin. Ser.), 50(5), 1171–1176, 2007.

[15] DU, H., YAO, X., DENG, C., Invertibility of linear combinations of two idempotents, Proc. Amer. Math. Soc., 134(5), 1451–1457, 2005.

[16] GRAYBILL, F.A., Introduction to Matrices with Applications in Statistics, Wadsworth Group, Canada, 1983.

[17] LIU, X., WU, L., YU, Y., The group inverse of the combinations of two idempotent matrices, Linear Multilinear Algebra, 59(1), 101–115, 2011.

[18] ÖZDEMİR, H., ÖZBAN, A.Y., On idempotency of linear combinations of idempotent matrices, Appl. Math. Comput., 159, 439–448, 2004.

[19] SARDUVAN, M., ÖZDEMİR, H., On linear combinations of two tripotent, idempotent, and involutive matrices, Appl. Math. Comput., 200, 401–406, 2008.

[20] SARDUVAN M., ÖZDEMİR H., On nonsingularity of linear combinations of tripotent matrices, Acta Univ. Apulensis Math. Inform., 25, 159–164, 2011.

[21] WU, L., LIU, X., YU, Y., The group involutory matrix of the combinations of two idempotent matrices, J. Appl. Math., 1–17, 2012.

[22] VENIT, S., BISHOP, W., Elementary Linear Algebra, PWS Publishers, Massachusetts, 1985.

ÖZGEÇMİŞ

Tuğba PİŞTOFOĞLU, 24.07.1989 tarihinde Sakarya'da doğdu. İlk, orta ve lise eğitimini 2007 yılında Sakarya'da tamamladı. Aynı yıl İstanbul Teknik Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Mühendisliği Bölümü'nde lisans eğitimine başladı ve buradan 2012 yılında mezun oldu. Yine aynı yıl Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik EABD Uygulamalı Matematik Bilim Dalı'nda yüksek lisans programına kaydoldu ve halen öğrenimine devam etmektedir.