T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MİNKOWSKİ UZAYININ GENELLEŞTİRİLMİŞ TOPOLOJİLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Merve BİLGİN

Enstitü Anabilim Dalı	**:**	**MATEMATİK**
Enstitü Bilim Dalı	**:**	**GEOMETRİ**
Tez Danışmanı	**:**	**Doç. Dr. Soley ERSOY**

Haziran 2015

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MİNKOWSKİ UZAYININ GENELLEŞTİRİLMİŞ TOPOLOJİLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Merve BİLGİN

Enstitü Anabilim Dalı	:	**MATEMATİK**
Enstitü Bilim Dalı	:	**GEOMETRİ**

Bu tez 15/06/2015 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği/~~oyçokluğu~~ ile kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Halis AYGÜN **Jüri Başkanı**	**Doç. Dr. Soley ERSOY** **Üye**	**Doç. Dr. Sadık BAĞCI** **Üye**

BEYAN

Tez içindeki tüm verilerin akademik kurallar çerçevesinde tarafımdan elde edildiğini, görsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçların akademik ve etik kurallara uygun şekilde sunulduğunu, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezde yer alan verilerin bu üniversite veya başka bir üniversitede herhangi bir tez çalışmasında kullanılmadığını beyan ederim.

Merve BİLGİN

15.06.2015

TEŞEKKÜR

Benim için emek veren ve ilgisini hiç esirgemeyen sevgili danışmanım Doç. Dr. Soley ERSOY'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca bana her zaman destek olan anne, baba ve aile büyüklerime teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

$C^L(x)$	: Minkowski uzayının x noktasındaki ışık konisi
$C^S(x)$	: Minkowski uzayının x noktasındaki uzay konisi
$C^T(x)$	: Minkowski uzayının x noktasındaki zaman konisi
c_e	: Öklidyen topolojiye göre kapanış operatörü
c_s	: $s-$topolojisine göre kapanış operatörü
c_t	: $t-$topolojisine göre kapanış operatörü
d_E	: Öklidyen uzaklık fonksiyonu
g	: İç çarpım fonksiyonu
$\Gamma(X)$	: X kümesi üzerinde tanımlı $\gamma-$fonksiyonlarının ailesi
i_e	: Öklidyen topolojiye göre iç operatörü
i_s	: $s-$topolojisine göre iç operatörü
i_t	: $t-$topolojisine göre iç operatörü
M	: $n-$boyutlu Minkowski uzayı
M^E	: Öklidyen topoloji ile birlikte Minkowski uzayı
M^s	: $s-$topolojisi ile birlikte Minkowski uzayı
M^t	: $t-$topolojisi ile birlikte Minkowski uzayı
$N_\varepsilon^E(x)$	: x noktasının $\varepsilon-$yarıçaplı Öklidyen komşuluğu
$N_\varepsilon^s(x)$	: x noktasının $\varepsilon-$yarıçaplı $s-$komşuluğu
$N_\varepsilon^t(x)$	: x noktasının $\varepsilon-$yarıçaplı $t-$komşuluğu
$P(X)$	: X kümesinin kuvvet kümesi
$\mathbb{R}^n$	: $n-$boyutlu Öklid uzayı

ÖZET

Anahtar Kelimeler: Minkowski Uzayının Topolojisi, Genelleştirilmiş Topoloji, Genelleştirilmiş Açık Kümeler.

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmıştır. İkinci bölümde Minkowski uzayı ve Minkowski uzayı üzerindeki s, t ve $e-$topolojileri tanıtılmıştır. Üçüncü bölümde $\gamma-$açık kümeler, genelleştirilmiş açık kümeler, genelleştirilmiş topoloji, genelleştirilmiş bağlantılılık ve genelleştirilmiş topolojik uzaylardaki ayırma aksiyomları tanıtılmıştır.

Dördüncü bölüm bu çalışmanın orijinal kısmını oluşturmaktadır ve üç alt bölüm halinde düzenlenmiştir. Dördüncü bölümün birinci alt bölümünde Minkowski uzayının bazı önemli alt kümelerinin, bu uzay üzerinde tanımlanan s, t ve $e-$topolojilerine göre iç ve kapanış kümeleri araştırılmıştır. Bu alt kümelerinin s, t ve $e-$topolojilerine göre genelleştirilmiş açık küme olup olmadıkları belirlenmiştir. Böylece, Minkowski uzayı üzerinde tanımlanan genelleştirilmiş topolojiler karşılaştırılmıştır. Dördüncü bölümün ikinci alt bölümünde Minkowski uzayının genelleştirilmiş bağlantılılığı incelenmiştir. Son olarak üçüncü alt bölümde ise Minkowski uzayı üzerinde genelleştirilmiş s, t ve $e-$topolojileri ile ayrı ayrı tanımlanan topolojik uzaylar ayırma aksiyomları ile sınıflandırılmıştır.

GENERALIZED TOPOLOGIES OF MINKOWSKI SPACE

SUMMARY

Keywords: Topology of Minkowski Space, Generalized Topology, Generalized Open Sets.

This thesis consists of four chapters. The first chapter is devoted to the introduction. In the second chapter, Minkowski space and $s,\ t,\ e-$topologies on Minkowski space are introduced. In the third chapter $\gamma-$open sets, generalized open sets, generalized topology, generalized connectedness and separation axioms in the generalized topological spaces are recalled.

The fourth chapter constitutes original part of this thesis and it is arranged as three subsections. In the first subsection of the fourth chapter, the interior and the closure sets of some important subsets of Minkowski space are examined with respect to $s,\ t$ and $e-$topologies defined on this space. It is determined that whether these subsets of Minkowski space are generalized open sets or not with respect to $s,\ t$ and $e-$topologies. Thus, the generalized topologies on Minkowski space are compared with each other. In the second subsection of the fourth chapter, the generalized connectedness of Minkowski space is investigated. Finally, in the third subsection of the fourth chapter, the topological spaces defined by generalized s, t and $e-$topologies on Minkowski space, respectively, are classified with the separation axioms.

BÖLÜM 1. GİRİŞ

H. Minkowski 1909'da özel bir metrikle donatılmış dört boyutlu bir uzay tanımlayarak Einstein'ın özel görelilik kuramını geometrik olarak yorumlamış ve bilinen üç boyuta dördüncü boyutu ekleyerek doğanın tasvir edilebileceğini ifade etmiştir.

Einstein 1915 yılında genel görelilik kuramı ile uzay-zaman kavramını ortaya koymuştur.

$3-$uzay$+1-$zaman olmak üzere tanımlanmış olan $4-$boyutlu uzay Minkowski uzay-zamanı olarak adlandırılmış ve ortaya konulan geometrik model fizikçiler, geometriciler kadar topolojiciler için de ilham kaynağı olmuştur.

C. Zeeman [1] Minkowski uzay$-$zamanı üzerinde $4-$boyutlu Öklid uzayının alışılmış topolojisini almanın doğru olmadığını aşağıdaki nedenlerle ortaya koymuştur:

i. $4-$boyutlu Öklid topolojisi yerel homojen olmasına rağmen Minkowski uzayı, her noktasında uzay benzeri vektörleri zaman benzeri vektörlerden ayıran ışık konisi var olduğundan yerel homojen değildir.
ii. Öklid uzayının homeomorfizmler grubu uzay benzeri ve zaman benzeri doğrultuları birbirine dönüştüren her çeşit elemanı içerir ki bu fiziksel olarak mümkün değildir.

Böylece Zeeman Minkowski uzay$-$zamanında zaman benzeri doğru üzerine $1-$boyutlu Öklidyen topoloji ve uzay benzeri hiperdüzlem üzerine $3-$boyutlu Öklidyen topoloji indirgeyen bir topoloji tanımlamıştır [2]. Bu topolojinin ışık ışını üzerine indirgediği topoloji ayrık topolojidir. Zeeman topolojisi yerel homojen değildir ve bu topolojinin homeomorfizmalar grubu homojen olmayan Lorentz grubu ve radyal dönüşümler tarafından üretilir. Öklid topolojisinden kesin ince olan Zeeman topolojisi ile birlikte Minkowski uzay $-$ zamanı Hausdorff uzayıdır. Ayrıca, bağlantılı ve yerel bağlantılıdır. Ancak normal, yerel kompakt veya birinci sayılabilir değildir [2].

Sonuç olarak Zeeman aynı bakış açısı ile bazı alternatif topolojiler önermiştir [2]. Bu topolojiler Nanda tarafından $t-$topolojisi ve $s-$topolojisi olarak adlandırılmış ve homeomorfizmler grubu incelenmiştir [3, 4].

Dossena, Zeeman topolojisi ile birlikte $n-$boyutlu Minkowski uzayının ayrılabilir Hausdorff uzayı olduğunu ancak normal, yerel kompakt, birinci sayılabilir veya Lindelöf uzay olmadığını göstermiş ve $2-$boyuttaki durumları da incelemiştir [5].

G. Agrawal ve S. Shirivastava, sırasıyla, [6] ve [7] çalışmalarında [3] ve [4] çalışmalarını göz önüne alarak $t-$topolojisi ve $s-$topolojisi ile verilen Minkowski uzayının topolojik özelliklerini araştırarak kompakt kümeleri karakterize etmiştir.

Literatürde birçok çalışma topolojik uzaylarda tanımlanan açık benzeri kümeleri incelemeye ayrılmıştır. Bu özel açık benzeri kümeler iç ve kapanış operatörleri ile tanımlanırlar. N. Levine [8], bir topolojik uzayda yarı $-$ açık kümeyi ve buradan yola çıkarak yarı $-$ süreklilik kavramını tanımlamıştır. Daha sonra yarı $-$ açık kümeler gibi açık benzeri kümeler olan $\alpha-$açık ve $\beta-$açık kümeler O. Njastad tarafından [9] tanımlanmış ve aralarındaki ilişkiler incelenmiştir.

Abd El-Monsef, El-Deep ve Mahmoud tarafından $\beta-$açık kümeler incelenmiş ve $\beta-$süreklilik kavramı sunulmuştur [10].

M. H. Stone 1937'de düzenli açık kümeleri tanıtmış ve ardından düzenli açık kümelerle ilgili birçok çalışma yapılmıştır. 2012'de R. Jamunarani ve P. Jeyanthi, α, β, σ ve ön $-$ düzenli kümeleri tanıtmıştır [11].

D. Andrijevic, [12]'de $b-$açık kümeleri tanımlamış ve yukarıda belirtilen diğer açık benzeri kümeler ile $b-$açık kümeleri karşılaştırmıştır.

Literatürde yoğun olarak çalışılmış olan açık benzeri kümeler farklı kurallarla tanımlanmış olmalarına rağmen ortak özelliklere sahiptirler. Açık benzeri kümelerin bu ortak özellikleri Császár tarafından 1997 yılında yayınladığı [13]'de incelenmiştir. Császár $\gamma-$açık kümeleri tanıtmış ve γ fonksiyonunun özel seçimleriyle adı geçen açık benzeri kümelerin elde edilebileceğini ortaya koymuştur [13]. Böylece [14]'de genelleştirilmiş topolojik yapı tanımlanmış ve [15]'de açık benzeri kümelerin ailelerinin birer genelleştirilmiş topoloji oluşturdukları gösterilmiş ve aralarındaki ilişkiler incelenmiştir.

Genelleştirilmiş topolojik uzay kavramı ile birlikte genelleştirilmiş bağlantılılık, sırasıyla, $\alpha-$bağlantılılık [17], $\beta-$bağlantılılık [18], yarı$-$bağlantılılık [19], ön$-$bağlantılılık [20], $b-$bağlantılılık [21] olarak incelenmiştir. Bunlarla birlikte genelleştirilmiş topolojik uzaylarda ayırma aksiyomları da literatürde pek çok kez çalışılmıştır [22, 23, 24, 25, 26, 27].

Bu çalışmada ise Minkowski uzayı üzerinde s, t ve $e-$topolojileri tanıtılarak bu topolojilere göre Minkowski uzayının bazı özel alt kümelerinin iç ve kapanış kümeleri araştırılmıştır. Böylece bu kümelerin genelleştirilmiş açık küme olup olmadıkları incelenmiştir. Minkowski uzayı üzerindeki genelleştirilmiş topolojiler karşılaştırılmıştır. Ayrıca, Minkowski uzayı üzerinde genelleştirilmiş bağlantılılık ve ayırma aksiyomları incelenmiştir.

BÖLÜM 2. MİNKOWSKİ UZAYI ÜZERİNDE TOPOLOJİLER

Tanım 2.1. $\mathbb{R}^n$, $n-$boyutlu standart reel vektör uzayı olsun. $x=(x_0,x_1,...,x_{n-1})$ ve $y=(y_0,y_1,...,y_{n-1})$ olmak üzere

$$g:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$$
$$(x,y)\to g(x,y)=-x_0y_0+\sum_{i=1}^{n-1}x_iy_i$$

şeklinde tanımlı simetrik, dejenere olmayan, bilineer forma Lorentz iç çarpımı adı verilir. Bu iç çarpım ile verilen $(\mathbb{R}^n,g)$ uzayına $n-$boyutlu Minkowski uzayı denir [28]. Çalışmamız boyunca $n-$boyutlu Minkowski uzayı M ile gösterilecektir.

Tanım 2.2. M, $n-$boyutlu Minkowski uzayı ve $x=(x_0,x_1,...,x_{n-1})\in M$ olsun. Eğer

i. $g(x,x)>0$ veya $x=0$ ise x uzay benzeri (spacelike) vektör,

ii. $g(x,x)=0$ ve $x\neq 0$ ise x ışık benzeri (lightlike) vektör,

iii. $g(x,x)<0$ ise x zaman benzeri (timelike) vektör

olarak adlandırılır [28].

Tanım 2.3. M, $n-$boyutlu Minkowski uzayında $x\in M$ için

$$C^S(x)=\{y\in M \mid y=x \text{ veya } g(y-x,y-x)>0\}$$

biçiminde tanımlanan $C^S(x)$ cümlesine M ’nin x ’deki uzay konisi denir [6].

Tanım 2.4. M, $n-$boyutlu Minkowski uzayında $x\in M$ için

$$C^L(x)=\{y\in M \mid g(y-x,y-x)=0\}$$

biçiminde tanımlanan $C^L(x)$ cümlesine M 'nin x 'deki ışık konisi denir [6].

Tanım 2.5. M , $n-$boyutlu Minkowski uzayında $x\in M$ için

$$C^T(x)=\{y\in M \mid y=x \text{ veya } g(y-x,y-x)<0\}$$

biçiminde tanımlanan $C^T(x)$ cümlesine M 'nin x 'deki zaman konisi denir [6].

Tanım 2.6. M , $n-$boyutlu Minkowski uzayı ve $x,y\in M$ olsun. Eğer

i. $g(y-x,y-x)>0$ ise $\{x+t(y-x) \mid t\in\mathbb{R}\}$ kümesine uzay benzeri doğru,

ii. $g(y-x,y-x)=0$ ise $\{x+t(y-x) \mid t\in\mathbb{R}\}$ kümesine ışık benzeri doğru,

iii. $g(y-x,y-x)<0$ ise $\{x+t(y-x) \mid t\in\mathbb{R}\}$ kümesine zaman benzeri doğru denir [6].

Teorem 2.1. M , $n-$boyutlu Minkowski uzayı olsun.

i. $p,x\in M$ olmak üzere d_1, p noktasını x noktasına bağlayan uzay benzeri doğru olsun. Bu durumda $u,v\in d_1$ için $u-v$ uzay benzeri bir vektördür.

ii. $p,x\in M$ olmak üzere d_2, p noktasını x noktasına bağlayan zaman benzeri doğru olsun. Bu durumda $u,v\in d_2$ için $u-v$ zaman benzeri bir vektördür.

iii. $p,x\in M$ olmak üzere d_3, p noktasını x noktasına bağlayan ışık benzeri doğru olsun. Bu durumda $u,v\in d_3$ için $u-v$ ışık benzeri bir vektördür [6].

İspat.

i. $u,v\in d_1$ için

$$u=p+a(x-p) \text{ ve } v=p+b(x-p)$$

olacak şekilde $a,b\in\mathbb{R}$ vardır. Bu durumda

$$u-v=(x-p)(a-b)$$

olur. Ayrıca

$$\begin{aligned} g(u-v,u-v) &= -(u_0-v_0)^2+\sum_{i=1}^{n-1}(u_i-v_i)^2 \\ &= -(x_0-p_0)^2(a-b)^2+\sum_{i=1}^{n-1}(x_i-p_i)^2(a-b)^2 \end{aligned}$$

olduğundan

$$g(u-v,u-v)=(a-b)^2\,g(x-p,x-p)$$

elde edilir. Burada

$$(a-b)^2>0 \text{ ve } g(x-p,x-p)>0$$

olduğundan

$$g(u-v,u-v)>0$$

bulunur. Bu yüzden $u-v$ uzay benzeri bir vektördür.

ii. Benzer şekilde $u,v\in d_2$ için

$$g(u-v,u-v)=(a-b)^2\,g(x-p,x-p)$$

olup

$$(a-b)^2 > 0 \text{ ve } g(x-p, x-p) < 0$$

dır. Böylece

$$g(u-v, u-v) < 0$$

bulunur. Bu $u-v$ vektörünün zaman benzeri bir vektör olduğunu gösterir.

iii. $u, v \in d_3$ için

$$g(u-v, u-v) = (a-b)^2 g(x-p, x-p)$$

ve

$$g(x-p, x-p) = 0$$

olduğundan

$$g(u-v, u-v) = 0$$

bulunur. Böylece $u-v$ ışık benzeri bir vektördür.

Teorem 2.2. M , $n-$boyutlu Minkowski uzayı olsun.

i. d_1 uzay benzeri doğru olsun. Bu durumda $\omega \in d_1$ için $C^S(\omega)$ uzay konisi d_1 doğrusunu içerir.

ii. d_2 zaman benzeri doğru olsun. Bu durumda $\omega \in d_2$ için $C^T(\omega)$ zaman konisi d_2 doğrusunu içerir.

iii. d_3 ışık benzeri doğru olsun. Bu durumda $\omega \in d_3$ için $C^L(\omega)$ ışık konisi d_3 doğrusunu içerir [6].

Literatüre girişi Zeeman tarafından [1, 2]'de gerçekleştirilen Minkowski uzayı üzerindeki topoloji kavramı [3, 4, 5, 6, 7]'de ayrıntılı bir şekilde incelenmiştir.

Tanım 2.6. $n-$boyutlu Minkowski uzayı M olsun. $x \in M$ için $N_{\varepsilon}^{E}(x)$, x noktasının $\varepsilon-$yarıçaplı Öklidyen komşuluğu olmak üzere

$$\mathrm{B}^{E}(x)=\left\{N_{\varepsilon}^{E}(x): \varepsilon>0\right\} \tag{2.1}$$

yerel tabanı tarafından üretilen topolojiye M üzerindeki Öklidyen topoloji denir [6]. Çalışmamız boyunca $N_{\varepsilon}^{E}(x)$, x noktasının $\varepsilon-$yarıçaplı Öklidyen komşuluğu $e-$komşuluk olarak adlandırılacaktır. Ayrıca, M Minkowski uzayı üzerinde verilen Öklidyen topoloji, $e-$topolojisi veya τ_e ile gösterilirken $e-$topolojisi ile birlikte Minkowski uzayı M^E ile gösterilecektir. τ_e ailesinin her bir elemanı $e-$açık olarak adlandırılacaktır. Ayrıca M^E, $e-$topolojik uzayında bir $A \subseteq M$ kümesinin içi $i_e(A)$ ve kapanışı $c_e(A)$ ile gösterilecektir.

Tanım 2.7. M^E topolojik uzay ve $U \subseteq M$ olmak üzere her $x \in U$ noktasının $N_{\varepsilon}^{E}(x) \subseteq U$ olacak şekilde en az bir $e-$komşuluğu varsa U alt kümesine $e-$topolojisine göre açıktır denir [6].

Tanım 2.8. $n-$boyutlu Minkowski uzayı M üzerindeki $s-$topolojisi

$$\mathrm{B}^{S}(x)=\left\{N_{\varepsilon}^{s}(x): \varepsilon>0\right\} \tag{2.2}$$

şeklindeki $x \in M$ noktasının komşuluklar ailesi olan yerel taban tarafından üretilir. Burada

$$N_{\varepsilon}^{s}(x)=N_{\varepsilon}^{E}(x) \cap C^{S}(x)$$

dir. $N_\varepsilon^s(x)$ cümlesine x noktasının $\varepsilon-$yarıçaplı $s-$komşuluğu adı verilir. M Minkowski uzayı üzerinde (2.2) yerel tabanı tarafından üretilen topolojiye $s-$topolojisi denir ve üzerindeki $s-$topolojisi ile birlikte Minkowski uzayı M^s ile gösterilir [2]. $s-$topolojisi τ_s ve $s-$topolojisine göre bir $A \subseteq M$ kümesinin içi $i_s(A)$ ve kapanışı $c_s(A)$ ile gösterilecektir. Ayrıca τ_s ailesinin her bir elemanına $s-$açık denir.

Tanım 2.9. (M,τ_s) topolojik uzay olmak üzere $U \subseteq M$ alt kümesinin $s-$topolojisine göre açık olması için gerek ve yeter şart her $x \in U$ için x noktasının $N_\varepsilon^s(x) \subseteq U$ olacak şekilde en az bir $s-$komşuluğunun olmasıdır [6].

Tanım 2.10. $n-$boyutlu Minkowski uzayı M üzerindeki $t-$topolojisi

$$\mathrm{B}^T(x) = \left\{N_\varepsilon^t(x) : \varepsilon > 0\right\} \tag{2.3}$$

şeklindeki $x \in M$ noktasının komşuluklar ailesi olan yerel tabanı tarafından üretilir. Burada

$$N_\varepsilon^t(x) = N_\varepsilon^E(x) \cap C^T(x)$$

dir. M Minkowski uzayı üzerinde (2.3) yerel tabanı tarafından üretilen topolojiye $t-$topolojisi ve $N_\varepsilon^t(x)$ cümlesine x noktasının $\varepsilon-$yarıçaplı $t-$komşuluğu adı verilir [7]. Üzerindeki $t-$topolojisi ile birlikte Minkowski uzayı M^t ile gösterilir. $t-$topolojisini τ_t ile gösterelim. τ_t ailesinin her bir elemanına $t-$açık denir. M^t, $t-$topolojik uzayında bir $A \subseteq M$ kümesinin içi ve kapanışı, sırasıyla, $i_t(A)$ ve $c_t(A)$ ile gösterilecektir.

Tanım 2.11. (M,τ_t) topolojik uzay olmak üzere $U \subseteq M$ alt kümesinin $t-$ topolojisine göre açık olması için gerek ve yeter şart her $x \in U$ için x noktasının $N_\varepsilon^t(x) \subseteq U$ olacak şekilde bazı $N_\varepsilon^t(x)$ komşuluğunun olmasıdır [7].

Minkowski uzayındaki konilerin, sırasıyla, e, s ve $t-$topolojilerine göre açıklık veya kapalılık durumları [6, 7]' de incelenmiştir.

Teorem 2.3. M , $n-$boyutlu Minkowski uzayı ve $x \in M$ olsun. $C^T(x)-\{x\}$ ve $C^S(x)-\{x\}$ kümeleri M^E topolojik uzayında açık, $C^L(x)$ ışık konisi M^E topolojik uzayında kapalı kümedir [6].

İspat. $u=(u_0,u_1,...,u_{n-1})$ ve $x=(x_0,x_1,...,x_{n-1}) \in M^E$ olmak üzere

$$\begin{aligned} &f : M^E \to \mathbb{R} \\ &u \to f(u) = -(u_0-x_0)^2 + \sum_{i=1}^{n-1}(u_i-x_i)^2 \end{aligned}$$

fonksiyonu tanımlansın. Böylece $f(u)=g(u-x,u-x)$ olup bu fonksiyon süreklidir. Buradan

$$\begin{aligned} f^{-1}(0,\infty) &= C^S(x)-\{x\}, \\ f^{-1}(-\infty,0) &= C^T(x)-\{x\}, \\ f^{-1}(\{0\}) &= C^L(x) \end{aligned}$$

olduğu görülür. f fonksiyonu sürekli ve $(0,\infty)$, $(-\infty,0)$ açık aralıkları $\mathbb{R}$ 'de birer $e-$açık küme olduğu için f fonksiyonu altındaki ters görüntüleri de M^E topolojik uzayında $e-$açık küme olur. O halde $C^S(x)-\{x\}$ ve $C^T(x)-\{x\}$ alt kümeleri de birer $e-$açık küme olur. Ancak $\{0\}$ tek nokta kümesi $\mathbb{R}$ 'de $e-$kapalı küme olduğu için f altındaki ters görüntüsü yani $C^L(x)$, M^E topolojik uzayında $e-$kapalı kümedir.

Teorem 2.4. M , $n-$boyutlu Minkowski uzayı ve $x \in M$ olsun. $\varepsilon > 0$ olmak üzere x noktasının $\varepsilon-$yarıçaplı $s-$komşuluğu olan $N_\varepsilon^s(x)$, M^s topolojik uzayında açıktır [6].

İspat. x noktasının $\varepsilon-$yarıçaplı $s-$komşuluğunun M^s topolojik uzayında açık olması için gerek ve yeter şart her $y \in N_\varepsilon^s(x)$ için $N_\delta^s(y) \subseteq N_\varepsilon^s(x)$ olacak şekilde y noktasının en az bir $\delta-$yarıçaplı $s-$komşuluğu olmasıdır. O halde keyfi $y \in N_\varepsilon^s(x)$ noktasını $y \neq x$ olacak şekilde alalım.

$$N_\varepsilon^s(x)-\{x\} = N_\varepsilon^E(x) \cap \left(C^S(x)-\{x\}\right)$$

ve bir önceki teoremden $C^S(x)-\{x\}$ kümesi M^E topolojik uzayında açık olduğundan $N_\varepsilon^s(x)-\{x\}$ kümesi $e-$açıktır. Böylece her $y \in \left(N_\varepsilon^s(x)-\{x\}\right)$ için $N_\delta^E(y) \subseteq N_\varepsilon^s(x)-\{x\}$ olacak şekilde $\delta-$yarıçaplı $e-$komşuluğu $N_\delta^E(y)$ mevcuttur.

$$N_\delta^s(y) = N_\delta^E(y) \cap C^S(y)$$

ve

$$N_\delta^E(y) \subseteq N_\varepsilon^s(x)-\{x\}$$

olduğu için

$$N_\delta^s(y) \subseteq N_\delta^E(y) \subseteq N_\varepsilon^s(x)$$

elde edilir.

Diğer taraftan $y \in N_{\varepsilon}^{s}(x)$ ve $y = x$ alınırsa $N_{\varepsilon}^{s}(y) \subseteq N_{\varepsilon}^{s}(x)$ olur. Dolayısıyla her $y \in N_{\varepsilon}^{s}(x)$ noktasının $\varepsilon -$yarıçaplı $s -$komşuluğu $N_{\varepsilon}^{s}(y) \subseteq N_{\varepsilon}^{s}(x)$ olacak şekilde vardır.

Teorem 2.5. M , $n -$boyutlu Minkowski uzayı ve $x \in M$ olsun.

- **i.** $C^{S}(x)$, M^{E} topolojik uzayında açık küme değildir,
- **ii.** $C^{S}(x)$, M^{s} topolojik uzayında açık kümedir [6].

İspat.
i. $x \in C^{S}(x)$ olmasına rağmen x noktasının $N_{\varepsilon}^{E}(x) \subseteq C^{S}(x)$ olacak şekilde $\varepsilon -$yarıçaplı bir $e -$komşuluğu yoktur.
Dolayısıyla $x \in C^{S}(x)$ için $N_{\varepsilon}^{E}(x) \subseteq C^{S}(x)$ olacak şekilde bir $e -$komşuluk bulunamadığından $C^{S}(x)$ uzay konisi M^{E} topolojik uzayında açık küme değildir.

ii. $C^{S}(x)$ uzay konisinin M^{s} topolojik uzayında açık olabilmesi için her $y \in C^{S}(x)$ noktasının $N_{\varepsilon}^{s}(y) \subseteq C^{S}(x)$ olacak şekilde en az bir $\varepsilon -$yarıçaplı $s -$komşuluğunun olması gerekir. O halde keyfi $y \in C^{S}(x)$ noktası alalım. Bu durumda ya $y \in \left(C^{S}(x) - \{x\}\right)$ ya da $y = x$ şeklindedir.
$y \in \left(C^{S}(x) - \{x\}\right)$ ise $C^{S}(x) - \{x\}$ kümesi $e -$açık olduğundan $N_{\varepsilon}^{E}(y) \subseteq C^{S}(x) - \{x\}$ olacak şekilde $\varepsilon -$yarıçaplı $e -$komşuluk mevcuttur. $N_{\varepsilon}^{s}(y) = N_{\varepsilon}^{E}(y) \cap C^{S}(y)$ olarak tanımlandığından $N_{\varepsilon}^{s}(y) \subseteq C^{S}(x) - \{x\}$ yazılabilir. Böylece $N_{\varepsilon}^{s}(y) \subseteq C^{S}(x)$ olduğu görülür.
Diğer taraftan $y = x$ ise $N_{\varepsilon}^{s}(x) = N_{\varepsilon}^{E}(x) \cap C^{S}(x)$ olduğundan $N_{\varepsilon}^{s}(x) \subset C^{S}(x)$ elde edilir. Sonuç olarak her $y \in C^{S}(x)$ noktası için $N_{\varepsilon}^{s}(y) \subseteq C^{S}(x)$ olacak şekilde en az bir $\varepsilon -$yarıçaplı $s -$komşuluk vardır.

Teorem 2.6. M , $n-$boyutlu Minkowski uzayı olsun. M üzerindeki $s-$topolojisi M üzerindeki $e-$topolojisinden kesin incedir $\left(\tau_e \subset \tau_s,\ \tau_e \neq \tau_s\right)$ [6].

İspat. M üzerindeki $s-$topolojisinin M üzerindeki $e-$topolojisinden kesin ince olabilmesi için $\tau_e \subset \tau_s$ ve $\tau_e \neq \tau_s$ olmalıdır. Herhangi $G \in \tau_e$ kümesi ve herhangi $x \in G$ noktası alalım. O halde x noktasının $\varepsilon-$yarıçaplı bir $e-$komşuluğu $N_\varepsilon^E\left(x\right) \subseteq G$ olacak şekilde mevcuttur. Böylece $N_\varepsilon^s\left(x\right) = N_\varepsilon^E\left(x\right) \cap C^S\left(x\right)$ olarak tanımlı olduğundan $N_\varepsilon^s\left(x\right) \subseteq N_\varepsilon^E\left(x\right)$ olur. Buradan da $N_\varepsilon^s\left(x\right) \subseteq N_\varepsilon^E\left(x\right) \subseteq G$ ve $N_\varepsilon^s\left(x\right) \subseteq G$ elde edilir. Dolayısıyla $G \in \tau_s$ dir. $G \in \tau_e$ iken $G \in \tau_s$ olduğundan $\tau_e \subset \tau_s$ mevcuttur. Ayrıca bir önceki teoremden $C^S\left(x\right)$ uzay konisi M^s topolojik uzayında açık olup M^E topolojik uzayında açık olmadığından $\tau_e \neq \tau_s$ dir. Dolayısıyla ispat tamamlanmış olur.

Teorem 2.7. M , $n-$boyutlu Minkowski uzayı olsun. M üzerindeki $s-$topolojisinin uzay benzeri bir doğru üzerine indirgediği topoloji Öklidyen topolojidir [6].

İspat. d_1, x noktasını y noktasına bağlayan uzay benzeri bir doğru olsun. Her $x \in M$ ve her $\varepsilon > 0$ için d_1 doğrusu üzerine $s-$topolojisi tarafından indirgenmiş topoloji

$$\left\{N_\varepsilon^s\left(x\right) \cap d_1\right\}$$

olacak şekilde mevcuttur. Ancak

$$N_\varepsilon^s\left(x\right) = N_\varepsilon^E\left(x\right) \cap C^S\left(x\right)$$

$$N_\varepsilon^s\left(x\right) \cap d_1 = N_\varepsilon^E\left(x\right) \cap C^S\left(x\right) \cap d_1$$

ve

$$C^S(x) \cap d_1 = d_1$$

olduğundan

$$N_\varepsilon^s(x) \cap d_1 = N_\varepsilon^E(x) \cap d_1$$

olur. Dolayısıyla $(\tau_s)_{d_1} = \tau_e$ olup $s-$topolojisinin d_1 doğrusu üzerine indirgediği topoloji Öklidyen topolojidir.

Teorem 2.8. M, $n-$boyutlu Minkowski uzayı olsun. M üzerindeki $s-$topolojisinin ışık benzeri bir doğru üzerine indirgediği topoloji ayrık topolojidir [6].

İspat. d_3 ışık benzeri bir doğru ve $p \in d_3$ olsun. O halde $d_3 \in C^L(p)$ olur. d_3 doğrusu üzerine $s-$topolojisi tarafından indirgenmiş topoloji

$$\left\{ N_\varepsilon^s(p) \cap d_3 = \{p\} \middle| \, p \in d_3, \forall\, \varepsilon > 0 \right\}$$

şeklindeki topoloji tabanı tarafından üretilen ayrık topolojidir.

Teorem 2.9. M, $n-$boyutlu Minkowski uzayı olsun. M üzerindeki $s-$topolojisinin zaman benzeri bir doğru üzerine indirgediği topoloji ayrık topolojidir [6].

İspat. d_2 zaman benzeri bir doğru ve $p \in d_2$ olsun. O halde $d_2 \in C^T(p)$ olur. d_2 üzerine $s-$topolojisi tarafından indirgenmiş topoloji

$$\left\{ N_\varepsilon^s(p) \cap d_2 = \{p\} \middle| \, p \in d_2, \forall\, \varepsilon > 0 \right\}$$

şeklindeki topoloji tabanı tarafından üretilen ayrık topolojidir.

Teorem 2.10. M , $n-$boyutlu Minkowski uzayı olsun. M^s eğrisel bağlantılıdır [6].

İspat. Her $x, y \in M$ için x noktasını y noktasına bağlayan bir f sürekli fonksiyonu bulunmalıdır. Herhangi $x, y \in M$ alalım. Bu durumda $g(y-x, y-x) > 0$ veya $g(y-x, y-x) \leq 0$ olur. İlk olarak $g(y-x, y-x) > 0$ alalım. Bu durumda $f:[0,1] \to M^s$ dönüşümü

$$f(t) = x + t(y-x),$$

olacak şekilde tanımlanırsa $f(0) = x$, $f(1) = y$ olur ve $f:[0,1] \to [x, y]$ dönüşümü süreklidir [Teorem 2.7.]. O halde $f:[0,1] \to M^s$ dönüşümü de süreklidir. Böylece M^s topolojik uzayında x noktasını y noktasına bağlayan bir eğri bulunmuş olur.

İkinci olarak $g(y-x, y-x) \leq 0$ ve $z \in C^S(x) \cap C^S(y)$ noktası alalım.

$$f_1:[0,1] \to M^s \text{ ve } f_2:[0,1] \to M^s$$

dönüşümleri, sırasıyla,

$$f_1(t) = x + t(z-x) \text{ ve } f_2(t) = y + t(y-z), \; t \in [0,1]$$

olacak şekilde tanımlansın. Böylece Teorem 2.7.'den $f_1:[0,1] \to [x, z]$ ve $f_2:[0,1] \to [z, y]$ dönüşümleri süreklidir. Dolayısıyla $f_1:[0,1] \to M^s$ ve $f_2:[0,1] \to M^s$ dönüşümleri sürekli olup, sırasıyla, x ile z noktalarını ve z ile y noktalarını bağlayan eğrilerdir. Bu fonksiyonların bileşkesi M^s topolojik uzayında x noktasını y noktasına bağlayan eğridir.

Sonuç 2.1. M^s topolojik uzayı bağlantılıdır.

Teorem 2.11. M , $n-$boyutlu Minkowski uzayı ve $x \in M$ olsun. $\varepsilon > 0$ olmak üzere x noktasının $\varepsilon-$yarıçaplı $t-$komşuluğu $N_\varepsilon^t(x)$, M^t topolojik uzayında açıktır [7].

İspat. x noktasının $\varepsilon-$yarıçaplı $t-$komşuluğunun M^t topolojik uzayında açık olması için gerek ve yeter şart her $y \in N_\varepsilon^t(x)$ noktasının $N_\delta^t(y) \subseteq N_\varepsilon^t(x)$ olacak şekilde en az bir $N_\delta^t(y)$, $\delta-$yarıçaplı $t-$komşuluğunun olmasıdır.
O halde keyfi $y \in N_\varepsilon^t(x)$, $y \neq x$ olacak şekilde alalım.

$$N_\varepsilon^t(x) - \{x\} = N_\varepsilon^E(x) \cap \left(C^T(x) - \{x\}\right)$$

ve Teorem 2.3.'den M^E topolojik uzayında $C^T(x) - \{x\}$ açık olduğu için $N_\varepsilon^t(x) - \{x\}$ kümesi de açıktır. Dolayısıyla her $y \in \left(N_\varepsilon^t(x) - \{x\}\right)$ için $N_\delta^E(y) \subseteq N_\varepsilon^t(x) - \{x\}$ olacak şekilde y noktasının $\delta-$yarıçaplı $e-$komşuluğu $N_\delta^E(y)$ mevcuttur. $N_\delta^t(y) = N_\delta^E(y) \cap C^T(y)$ ve $N_\delta^E(y) \subseteq N_\varepsilon^t(x) - \{x\}$ olduğu için

$$N_\delta^t(y) \subseteq N_\delta^E(y) \subseteq N_\varepsilon^t(x)$$

elde edilir.
$y \in N_\varepsilon^t(x)$ ve $y = x$ alınırsa $N_\varepsilon^t(y) \subseteq N_\varepsilon^t(x)$ olur. Sonuç olarak her $y \in N_\varepsilon^t(x)$ noktası için $N_\varepsilon^t(y) \subseteq N_\varepsilon^t(x)$ olacak şekilde en az bir $\delta-$yarıçaplı $t-$komşuluk vardır.

Teorem 2.12. M , $n-$boyutlu Minkowski uzayı ve $x \in M$ olsun.

- **i.** $C^T(x)$, M^E topolojik uzayında açık küme değildir,
- **ii.** $C^T(x)$, M^t topolojik uzayında açık kümedir [7].

İspat.

i. $x \in C^T(x)$ olmasına rağmen x noktasının $N_\varepsilon^E(x) \subseteq C^T(x)$ olacak şekilde $\varepsilon-$ yarıçaplı bir $e-$komşuluğu yoktur. Dolayısıyla $x \in C^T(x)$ noktası için $N_\varepsilon^E(x) \subseteq C^T(x)$ olacak şekilde bir $e-$komşuluk bulunamadığından $C^T(x)$ zaman konisi M^E topolojik uzayında açık değildir.

ii. $C^T(x)$ zaman konisinin M^t topolojik uzayında açık olabilmesi için her $y \in C^T(x)$ noktasının $N_\varepsilon^t(y) \subseteq C^T(x)$ olacak şekilde en az bir $N_\varepsilon^t(y)$ $\varepsilon-$yarıçaplı $t-$komşuluğunun olması gerekir. O halde keyfi $y \in C^T(x)$ noktası alalım. Bu durumda ya $y \in \left(C^T(x) - \{x\}\right)$ ya da $y = x$ olur.

Varsayalım ki $y \in \left(C^T(x) - \{x\}\right)$ olsun. Bu durumda $C^T(x) - \{x\}$ kümesi $e-$açık olduğundan $N_\varepsilon^E(y) \subseteq C^T(x) - \{x\}$ olacak şekilde $\varepsilon-$yarıçaplı $e-$komşuluk mevcuttur.

$$N_\varepsilon^t(y) = N_\varepsilon^E(y) \cap C^T(y)$$

ve

$$N_\varepsilon^E(y) \subseteq C^T(x) - \{x\}$$

olduğu için $N_\varepsilon^t(y) \subseteq C^T(x)$ kapsaması mevcuttur.

Diğer taraftan $y = x$ alınırsa $N_\varepsilon^t(x) = N_\varepsilon^E(x) \cap C^T(x)$ olduğundan $N_\varepsilon^t(x) \subseteq C^T(x)$ vardır. Sonuç olarak her $y \in C^T(x)$ noktası için $N_\varepsilon^t(y) \subseteq C^T(x)$ olacak şekilde en az bir $\varepsilon-$yarıçaplı $t-$komşuluk vardır.

Teorem 2.13. M , $n-$boyutlu Minkowski uzayı olsun. M üzerindeki $t-$topolojisi M üzerindeki $e-$topolojisinden kesin incedir $\left(\tau_e \subset \tau_t,\ \tau_e \neq \tau_t\right)$ [7].

İspat. M , $n-$boyutlu Minkowski uzayı üzerindeki $t-$topolojisinin M üzerindeki $e-$topolojisinden kesin ince olabilmesi için $\tau_e \subset \tau_t$ ve $\tau_e \neq \tau_t$ olmalıdır. Herhangi $G \in \tau_e$ kümesi ve $x \in G$ noktası alalım. O halde $\varepsilon-$yarıçaplı bir $e-$komşuluk $N_\varepsilon^E(x) \subseteq G$ olacak şekilde mevcuttur. $N_\varepsilon^E(x)$ $e-$komşuluğu, $N_\varepsilon^t(x) = N_\varepsilon^E(x) \cap C^T(x)$ olarak tanımlı olduğundan $N_\varepsilon^t(x) \subseteq N_\varepsilon^E(x)$ vardır. Buradan $N_\varepsilon^t(x) \subseteq N_\varepsilon^E(x) \subseteq G$ olup $N_\varepsilon^t(x) \subseteq G$'dir. Dolayısıyla $G \in \tau_t$ olduğu görülür. $G \in \tau_e$ iken $G \in \tau_t$ olduğundan $\tau_e \subset \tau_t$ elde edilir. Ayrıca bir önceki teoremden $C^T(x)$ zaman konisi $e-$açık olmayıp $t-$açık olduğu için $\tau_e \neq \tau_t$'dir. Dolayısıyla ispat tamamlanmış olur.

Teorem 2.14. M , $n-$boyutlu Minkowski uzayı olsun. M üzerindeki $t-$topolojisinin zaman benzeri bir doğru üzerine indirgediği topoloji Öklidyen topolojidir [7].

İspat. d_2, x noktasını y noktasına bağlayan zaman benzeri bir doğru olsun. d_2 doğrusu üzerine $t-$topolojisi tarafından indirgenmiş topoloji

$$\left\{ N_\varepsilon^t(x) \cap d_2 \,\middle|\, x \in d_2, \forall\, \varepsilon > 0 \right\}$$

olacak şekilde mevcuttur. Ancak

$$N_\varepsilon^t(x) = N_\varepsilon^E(x) \cap C^T(x),$$

$$N_\varepsilon^t(x) \cap d_2 = N_\varepsilon^E(x) \cap C^T(x) \cap d_2,$$

ve

$$C^T(x) \cap d_2 = d_2$$

olduğundan

$$N_\varepsilon^t(x)\cap d_2 = N_\varepsilon^E(x)\cap d_2$$

olur. Dolayısıyla $(\tau_t)_{d_2} = \tau_e$ olup $t-$topolojisinin d_2 doğrusu üzerine indirgediği topoloji Öklidyen topolojidir.

Teorem 2.15. M, $n-$boyutlu Minkowski uzayı olsun. M üzerindeki $t-$topolojisinin ışık benzeri bir doğru üzerine indirgediği topoloji ayrık topolojidir [7].

İspat. d_3 ışık benzeri bir doğru ve $p\in d_3$ olsun. O halde $d_3 \in C^L(p)$'dir. d_3 doğrusu üzerine $t-$topolojisi tarafından indirgenmiş topoloji

$$\left\{N_\varepsilon^t(p)\cap d_3 = \{p\} \,\middle|\, p\in d_3, \forall\, \varepsilon>0\right\}$$

şeklindeki topoloji tabanı tarafından üretilen ayrık topolojidir.

Teorem 2.16. M, $n-$boyutlu Minkowski uzayı olsun. M üzerindeki $t-$topolojisinin uzay benzeri bir doğru üzerine indirgediği topoloji ayrık topolojidir [7].

İspat. d_1 uzay benzeri bir doğru ve $p\in d_1$ olsun. O halde $d_1 \in C^S(p)$'dir. d_1 doğrusu üzerine $t-$topolojisi tarafından indirgenmiş topoloji

$$\left\{N_\varepsilon^t(p)\cap d_1 = \{p\} \,\middle|\, p\in d_1, \forall\, \varepsilon>0\right\}$$

şeklindeki topoloji tabanı tarafından üretilen ayrık topolojidir.

Teorem 2.17. M, $n-$boyutlu Minkowski uzayı olsun. Bu durumda M^t eğrisel bağlantılıdır [7].

Sonuç 2.2. M^t topolojik uzayı bağlantılıdır.

BÖLÜM 3. GENELLEŞTİRİLMİŞ AÇIK KÜMELER VE GENELLEŞTİRİLMİŞ TOPOLOJİLER

3.1. Genelleştirilmiş Açık Kümeler

Genelleştirilmiş açık kümeler topolojik uzaylardaki açık kümelere benzer kümelerdir. Açık benzeri kümelerin ilk örneği olan yarı$-$açık kümeler Levine tarafından 1963'te verilmiştir [8]. Daha sonra devam eden çalışmalarda ön$-$açık kümeler, $\alpha-$açık kümeler, $\beta-$açık kümeler, düzenli kümeler ve $b-$açık kümeler tanımlanmış ve bu kümelerin özelliklerini inceleyen ilgili pek çok çalışma yapılarak literatür genişlemiştir [9, 10, 11, 12]. İç ve kapanış operatörleri yardımı ile oluşturulan bu kümelere genelleştirilmiş açık küme adı verilmesi Császár'ın sahip oldukları ortak özellikleri göz önüne alarak γ fonksiyonunu, $\gamma-$açık kümeleri ve genelleştirilmiş topoloji kavramlarını literatüre kazandırması ve ardından $\gamma-$açık kümelerin genelleştirilmiş topoloji oluşturduğunu ortaya koyması ile gerçekleşmiştir [13, 14]. γ fonksiyonunun özel seçimleriyle yarı$-$açık kümeler, ön$-$açık kümeler, $\alpha-$açık kümeler, $\beta-$açık kümeler elde edilebilmekte ve böylece bu kümelerin genelleştirilmiş açık küme olduğu görülmektedir. Adı geçen açık benzeri kümelerin tanımları ve birbirleri ile olan ilişkileri aşağıda verilmiştir.

Tanım 3.1.1. (X,τ) bir topolojik uzay ve $A\subset X$ için $c(A)$ ve $i(A)$, sırasıyla, A kümesinin kapanışı ve içi olmak üzere

a) [8] A, yarı (σ) $-$açık kümedir: $\Leftrightarrow$ $A\subset c(i(A))$,

b) [29] A, ön$-$açık kümedir: $\Leftrightarrow$ $A\subset i(c(A))$,

c) [9] A, $\alpha-$açık kümedir: $\Leftrightarrow$ $A\subset i(c(i(A)))$,

d) [10] A, $\beta-$açık (yarı ön açık) kümedir: $\Leftrightarrow$ $A\subset c(i(c(A)))$,

e) [11] A, α (sırasıyla, β, σ, ön) $-$ düzenli kümedir: $\Leftrightarrow$ $A=i\big(c\big(i(A)\big)\big)$, $\Big($sırasıyla, $A=c\big(i\big(c(A)\big)\big)$, $A=c\big(i(A)\big)$, $A=i\big(c(A)\big)\Big)$,

f) [12] A, $b-$açık kümedir: $\Leftrightarrow$ $A\subset i\big(c(A)\big)\cup c\big(i(A)\big)$.

Örnek 3.1.1. $X=\{a,b,c\}$ kümesi üzerinde $\tau=\{X,\varnothing,\{a\}\}$ topolojisi verilsin. Bu durumda $\{a\}$ kümesi açık olup, sırasıyla, yarı $-$ açık, ön $-$ açık, $\alpha-$açık, $\beta-$açık ve $b-$açık kümedir. Ancak $\{a,c\}$ kümesi $\alpha-$açık olmasına rağmen açık değildir. Ayrıca $\{a,c\}$ kümesi, sırasıyla, yarı $-$ açık, ön $-$ açık, $\beta-$açık ve $b-$açık kümedir.

Örnek 3.1.2. $X=\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi ve üzerinde alışılmış topoloji alınsın. Bu durumda $(0,1]$ kümesi yarı $-$ açık kümedir, ancak $\alpha-$açık değildir. Ayrıca $(0,1]$ kümesinin $\beta-$açık ve $b-$açık küme olduğu da Tanım 3.1.1. yardımıyla kolayca görülür.

Örnek 3.1.3. $X=\{a,b,c\}$ kümesi üzerinde $\tau=\{X,\varnothing,\{b,c\}\}$ topolojisi verilsin. Bu durumda $\{a,b\}$ kümesi ön $-$ açık kümedir, ancak $\alpha-$açık değildir. Ayrıca $\{a,b\}$ kümesi $\beta-$açık ve $b-$açık kümedir.

Önerme 3.1.1. (X,τ) bir topolojik uzay ve yarı $-$ açık, ön $-$ açık, $\alpha-$açık, $\beta-$açık ve $b-$açık kümelerin aileleri, sırasıyla, $SO(X)$, $PO(X)$, $\alpha O(X)$, $\beta O(X)$ ve $BO(X)$ ile gösterilsin. Bu durumda

$$\tau\subset\alpha O(X)\subset PO(X)\subset BO(X)\subset\beta O(X)$$

ve

$$\alpha O(X)\subset SO(X)\subset BO(X)$$

kapsamaları mevcuttur [15, 16].

Önerme 3.1.2. (X,τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. Bu durumda A kümesinin ön$-$düzenli bir küme olması için gerek ve yeter koşul A kümesinin $\alpha-$düzenli küme olmasıdır [11].

Önerme 3.1.3. (X,τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. Bu durumda A kümesinin $\sigma-$düzenli bir küme olması için gerek ve yeter koşul A kümesinin $\beta-$düzenli küme olmasıdır [11].

Tanım 3.1.2. (X,τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olmak üzere

a) A, yarı (σ) $-$kapalı kümedir: $\Leftrightarrow$ $i\big(c(A)\big) \subset A$,

b) A, ön$-$kapalı kümedir: $\Leftrightarrow$ $c\big(i(A)\big) \subset A$,

c) A, $\alpha-$kapalı kümedir: $\Leftrightarrow$ $c\big(i(c(A))\big) \subset A$,

d) A, $\beta-$kapalı (yarı ön kapalı) kümedir: $\Leftrightarrow$ $i\big(c(i(A))\big) \subset A$.

3.2. $\gamma-$Açık Kümeler

Császár [13], genelleştirilmiş açık kümeleri tanımlamak için, $X \neq \emptyset$ ve $P(X)$, X kümesinin kuvvet kümesi olmak üzere

$$\gamma : P(X) \to P(X)$$

biçiminde tanımlı ve monotonluk ($A \subset B$ ise $\gamma A \subset \gamma B$) özelliğini taşıyan fonksiyonları kullanmıştır. X kümesi üzerinde bu şekilde tanımlı tüm fonksiyonların ailesi $\Gamma(X)$ olsun. Eğer

$$\gamma, \gamma' : P(X) \to P(X)$$

fonksiyonları verilmiş ise;

$$\gamma(A)=\gamma A$$
$$\gamma\circ\gamma'=\gamma\gamma'$$
$$\underbrace{\gamma...\gamma}_{\text{n tane}}=\gamma^{n}$$

şeklindeki kısaltmalar mevcuttur [13]. $\Delta\subset\mathbb{Z}\cup\{+,-\}$ ve $n\in\Delta$ olmak üzere Γ_{Δ} ile Γ_{n} alt ailesinin elemanı olan $\gamma\in\Gamma$ fonksiyonlarının sınıfı gösterilmiştir. Bu sınıflar;

$\gamma\in\Gamma_{0}\Leftrightarrow\gamma\varnothing=\varnothing$,

$\gamma\in\Gamma_{1}\Leftrightarrow\gamma X=X$,

$\gamma\in\Gamma_{2}\Leftrightarrow\forall A\subset X$ için $\gamma^{2}A=\gamma A$,

$\gamma\in\Gamma_{+}\Leftrightarrow\forall A\subset X$ için $A\subset\gamma A$,

$\gamma\in\Gamma_{-}\Leftrightarrow\forall A\subset X$ için $\gamma A\subset A$,

$\gamma\in\Gamma_{-2}\Leftrightarrow\forall A\subset X$ için $\gamma^{2}A\subset\gamma A$

biçiminde tanımlıdır [13].

$\gamma\in\Gamma(X)$ fonksiyonundan faydalanarak $\gamma-$açık küme tanımını ifade edelim.

Tanım 3.2.1. X bir küme ve $\gamma\in\Gamma(X)$ olsun. Eğer $A\subset X$ için $A\subset\gamma(A)$ oluyorsa A kümesine $\gamma-$açık küme denir [13].

Tanım 3.2.2. (X,τ) bir topolojik uzay ve $A\subset X$ olmak üzere $(X-A)$, $\gamma-$açık ise A kümesine $\gamma-$kapalı küme denir [13].

Önerme 3.2.1. $\gamma\in\Gamma(X)$ olsun. Bu durumda, $\gamma-$açık kümelerin herhangi sayıda birleşimi yine $\gamma-$açık kümedir [13].

İspat. $\{A_i | i \in I\}$ ailesi $\gamma-$açık kümelerin keyfi bir ailesi olsun. O halde her $i \in I$ için $A_i \subset \gamma A_i$ ve $A_i \subset \bigcup_{i\in I} A_i$ olup γ monoton olduğundan $\gamma A_i \subset \gamma \bigcup_{i\in I} A_i$ kapsaması vardır. Buradan

$$A_i \subset \gamma A_i \subset \gamma \bigcup_{i\in I} A_i$$

dır. Yani $A_i \subset \gamma \bigcup_{i\in I} A_i$ elde edilir. Sonuç olarak her $i \in I$ için $A_i \subset \gamma \bigcup_{i\in I} A_i$ ise $\bigcup_{i\in I} A_i \subset \gamma \bigcup_{i\in I} A_i$ olur ki buradan $\bigcup_{i\in I} A_i$ keyfi birleşimi $\gamma-$açık kümedir.

Sonuç 3.2.1. X bir küme ve $\gamma \in \Gamma(X)$ olsun. $A \subset X$ için A kümesinin kapsadığı, X 'in tüm $\gamma-$açık kümelerinin birleşimine A kümesinin $\gamma-$içi denir ve $i_\gamma(A)$ ile gösterilir [13].

Önerme 3.2.2. $\gamma \in \Gamma(X)$ olsun. Bu durumda, $\gamma-$kapalı kümelerin herhangi sayıda kesişimi yine $\gamma-$kapalı kümedir [13].

Sonuç 3.2.2. X bir küme ve $\gamma \in \Gamma(X)$ olsun. $A \subset X$ için A kümesini kapsayan, X 'in tüm $\gamma-$kapalı kümelerinin kesişimine A kümesinin $\gamma-$kapanışı denir ve $c_\gamma(A)$ ile gösterilir [13].

3.3. Genelleştirilmiş Topoloji

Tanım 3.3.1. $X \neq \emptyset$ bir küme ve $\mu \subset P(X)$ olmak üzere

- **i.** $\emptyset \in \mu$
- **ii.** $\forall\, i \in \mathrm{I} \neq \emptyset$ için $G_i \in \mu$ iken $\bigcup_{i\in \mathrm{I}} G_i \in \mu$

koşulları sağlanıyorsa μ ailesine X kümesi üzerinde bir genelleştirilmiş topoloji ve (X, μ) ikilisine de genelleştirilmiş topolojik uzay denir. Herhangi $A \subset X$ için

$A \in \mu$ ise A kümesine $\mu-$açık küme, eğer $(X - A) \in \mu$ ise A kümesine $\mu-$kapalı küme denir. Ayrıca A kümesinin kapsadığı $\mu-$açık kümelerin en büyüğüne A'nın $\mu-$içi denir ve $i_\mu(A)$ ile gösterilir. A kümesini kapsayan en küçük $\mu-$kapalı kümeye ise A kümesinin $\mu-$kapanışı denir ve $c_\mu(A)$ ile gösterilir [14].

$X \neq \emptyset$, $\gamma : P(X) \to P(X)$ şeklindeki dönüşüm için $\gamma \in \Gamma(X)$ olmak üzere $\gamma-$açık kümelerin ailesi X kümesi üzerinde bir genelleştirilmiş topoloji oluşturur.

Bir topolojik uzayda özel olarak
$\gamma = ci$ ise $\gamma-$açık küme yarı$-$açık küme;
$\gamma = ic$ ise $\gamma-$açık küme ön$-$açık küme;
$\gamma = ici$ ise $\gamma-$açık küme $\alpha-$açık küme;
$\gamma = cic$ ise $\gamma-$açık küme $\beta-$açık küme olarak adlandırılır [14].

$\gamma-$açık kümelerin ailesi X kümesi üzerinde birer genelleştirilmiş topoloji oluşturdukları için yukarıda bahsedilen yarı$-$açık, ön$-$açık, $\alpha-$açık ve $\beta-$açık kümeler genelleştirilmiş açık kümedir.

3.4. Genelleştirilmiş Bağlantılılık

Tanım 3.4.1. Bir (X,τ) topolojik uzayı için eğer X uzayı X ve $\emptyset$ den başka iki ayrık açık kümenin birleşimi şeklinde yazılamıyorsa (X,τ) topolojik uzayına bağlantılı uzay denir.

Tanım 3.4.2. (X,τ) bir topolojik uzay olsun. Bu durumda eğer boş olmayan her $U, V \in \tau$ açık kümesi için $U \cap V \neq \emptyset$ oluyorsa (X,τ) topolojik uzayına indirgenemez (irreducible) uzay denir [30].

Tanım 3.4.3. (X,τ) bir topolojik uzay olmak üzere eğer her $U \in \tau$ açık kümesi için $c(U) \in \tau$ oluyorsa (X,τ) topolojik uzayına aşırı (extremally) bağlantısız uzay denir [9].

Tanım 3.4.4. (X,τ) bir topolojik uzay olsun. Eğer $(X,\alpha O(X))$ (sırasıyla, $(X,\beta O(X))$, $(X,SO(X))$, $(X,PO(X))$, $(X,BO(X))$) uzayı bağlantılı ise (X,τ) topolojik uzayına $\alpha-$bağlantılı [17] (sırasıyla, $\beta-$bağlantılı [18], yarı$-$bağlantılı [19], ön$-$bağlantılı [20], $b-$bağlantılı [21]) uzay denir.

Lemma 3.4.1. (X,τ) bir topolojik uzay olsun. (X,τ) uzayının $\alpha-$bağlantılı olması için gerek ve yeter şart (X,τ) uzayının bağlantılı olmasıdır [17].

Yarı$-$açık, ön$-$açık, $\alpha-$açık, $\beta-$açık ve $b-$açık küme aileleri $\tau \subset \alpha O(X) \subset SO(X) \subset BO(X) \subset \beta O(X)$ kapsamalarını sağladığından ve Lemma 3.4.1'den aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 3.4.1. (X,τ) bir topolojik uzay olmak üzere eğer X uzayı

$$\beta-\text{bağlantılı} \Rightarrow b-\text{bağlantılı} \Rightarrow \text{yarı}-\text{bağlantılı} \Rightarrow \alpha-\text{bağlantılı} \Leftrightarrow \text{bağlantılıdır.}$$

3.5. Genelleştirilmiş Ayırma Aksiyomları

(X,τ) bir topolojik uzay olmak üzere X uzayının T_i $(i=0,1,2,3,4)-$uzayı olması için gerek ve yeter şartlar iyi bilinmektedir. Bilinen bu ayırma aksiyomları dışında literatürde farklı ayırma aksiyomları mevcuttur. N. Levine [31]'de genelleştirilmiş kapalı kümeyi tanımlayarak bir topolojik uzayın $T_{\frac{1}{2}}-$uzayı olma şartını vermiştir. $T_{\frac{1}{2}}-$uzayı ayırma aksiyomları hiyerarşisinde T_0-uzayı ile T_1-uzayı arasındadır. Ayrıca [32]'de bir diğer ayırma aksiyomu ile $T_{2\frac{1}{2}}-$uzayı tanıtılmıştır.

Genelleştirilmiş açık kümelerin literatüre girmesi ile yukarıda bahsedilen ayırma aksiyomları genelleştirilmiş topolojiye uyarlanmıştır.

Tanım 3.5.1. (X,τ) bir topolojik uzay olsun. Bu durumda $A \subset X$ alt kümesi için bir $A \subset U$ kümesi $U \in \tau$ ve $c(A) \subseteq U$ olacak şekilde mevcutsa A kümesine $g-$ kapalı (genelleştirilmiş kapalı) küme denir [31].

Bir (X,τ) topolojik uzayında her kapalı küme $g-$kapalıdır. Çünkü kapalı bir kümenin kapanışı kendisine eşit olacağından $A \subset X$ olan bir A kapalı kümesi alındığında $A \subset U$ olan bir $U \in \tau$ var iken $c(A) \subseteq U$ elde edilir. Buradan her kapalı kümenin $g-$kapalı olduğu görülür. Ancak $g-$kapalı bir kümenin, kapalı olması gerekmez.

Örnek 3.5.1. $X = \{a,b,c\}$ kümesi üzerinde $\tau = \{X, \varnothing, \{b\}\}$ topolojisi verilsin. Bu durumda $\{b,c\}$ kümesi $g-$kapalı bir kümedir. Ancak kapalı değildir.

Tanım. 3.5.2. (X,τ) bir topolojik uzay olsun. Bir $A \subset X$ alt kümesi için yarı$-c(A)$, A kümesinin yarı$-$kapanışı olmak üzere, eğer $A \subset U$ olan U yarı$-$ açık küme, yarı$-c(A) \subset U$ olacak şekilde mevcut ise A kümesine $\sigma g-$kapalı (yarı$-$genelleştirilmiş kapalı) küme denir [33].

Tanım 3.5.2. ile benzer şekilde bir (X,τ) topolojik uzayı üzerinde ön$-$açık, $\alpha-$ açık, $\beta-$açık ve $b-$açık kümeler kullanılarak, sırasıyla, ön$-g-$kapalı, $\alpha g-$ kapalı, $\beta g-$kapalı ve $bg-$kapalı kümelerin tanımları yapılır.

Tanım 3.5.3. Bir (X,τ) topolojik uzayında her $g-$kapalı küme kapalı ise (X,τ) uzayına $T_{\frac{1}{2}}-$uzayı denir [31].

Örnek 3.5.2. $X=\{a,b\}$ kümesi üzerinde $\tau=\{X,\varnothing,\{a\}\}$ topolojisini alalım. Bu durumda (X,τ) topolojik uzayı T_0 ve $T_{\frac{1}{2}}-$uzayı olup T_1-uzayı değildir [31].

Tanım 3.5.4. (X,τ) bir topolojik uzay olsun. Bu durumda eğer X 'deki her farklı iki nokta kapalı komşuluklar ile ayrılmış ise (X,τ) uzayına $T_{2\frac{1}{2}}-$uzayı denir [32].

Literatürde birçok çalışmada açık kümeler, sırasıyla, α (β, yarı, ön ve b)$-$açık kümelerle değiştirilerek ayırma aksiyomları genelleştirilmiştir [22, 23, 24, 25, 26, 27].

Tanım 3.5.5. (X,τ) bir topolojik uzay olsun. Bu durumda eğer (X,τ) uzayının herhangi farklı iki noktası verildiğinde bu noktalardan en az birini içeren bir α (sırasıyla, β, yarı, ön ve b)$-$açık kümesi, diğerini içermeyecek şekilde mevcutsa (X,τ) uzayına α (sırasıyla, β, yarı, ön ve b)$-T_0-$uzayı denir [25].

Tanım 3.5.6. Bir (X,τ) topolojik uzayında her αg (sırasıyla, β, σ, ön ve b)$-g$ kapalı küme α (sırasıyla, β, yarı, ön ve b)$-$kapalı ise (X,τ) uzayına $\alpha-T_{\frac{1}{2}}$ (sırasıyla, β, σ, ön ve b)$-T_{\frac{1}{2}}-$uzayı denir [27, 33, 34].

Tanım 3.5.7. (X,τ) bir topolojik uzay olsun. Bu durumda eğer $x\neq y$ olacak şekilde her $x,y\in X$ noktaları için X 'de x noktasını içeren bir U, α (sırasıyla, β, yarı, ön ve b)$-$açık kümesi y noktasını içermeyecek şekilde ve y noktasını içeren bir V, α (sırasıyla, β, yarı, ön ve b)$-$açık kümesi x noktasını içermeyecek şekilde mevcutsa X uzayına α(sırasıyla, β, yarı, ön ve b)$-T_1-$uzayı denir [25].

Tanım 3.5.8. (X,τ) bir topolojik uzay olsun. Bu durumda X deki farklı her $x,y\in X$ noktaları için $x\in U$ ve $y\in V$ olacak şekilde U ve V ayrık α (sırasıyla,

β, yarı, ön ve b)$-$açık kümeleri mevcutsa X uzayına α (sırasıyla, β, yarı, ön ve b)$-T_2-$uzayı denir [25].

Tanım 3.5.9. (X,τ) bir topolojik uzay olsun. Bu durumda eğer X deki farklı her $x,y\in X$ noktaları için α (sırasıyla, β, yarı, ön ve b)$-$kapalı komşuluklar ile ayrılmış ise (X,τ) uzayına α (sırasıyla, β, yarı, ön ve b)$-T_{2\frac{1}{2}}-$uzayı denir.

BÖLÜM 4. MİNKOWSKİ UZAYININ GENELLEŞTİRİLMİŞ TOPOLOJİLERİ

4.1. Minkowski Uzayındaki Genelleştirilmiş Açık Kümeler

Bu bölümde Minkowski uzayının bazı önemli alt kümelerinin s, t ve $e-$topolojilerine göre iç ve kapanış kümeleri bulunarak bu kümelerin genelleştirilmiş açık olup olmadıkları belirlenecektir.

Bölüm 2'de Minkowski uzayında s, t ve $e-$topolojilerine göre $x \in M$ noktasındaki $C^S(x)$, $C^T(x)$, $C^L(x)$, $C^S(x)-\{x\}$ ve $C^T(x)-\{x\}$ alt kümelerinin açık veya kapalı olup olmama durumları açıklanmıştır. Bunlara ek olarak $C^S(x) \cup C^L(x)$ ve $C^T(x) \cup C^L(x)$ alt uzaylarını inceleyelim.

Önerme 4.1.1 M, $n-$boyutlu Minkowski uzayı ve $x \in M$ olsun. Bu durumda $C^S(x) \cup C^L(x)$ kümesi M^E topolojik uzayında kapalıdır.

İspat. $C^T(x)-\{x\}$ M^E topolojik uzayında açık bir kümedir. O halde $C^T(x)-\{x\}$ kümesinin tümleyeni olan $M-\left(C^T(x)-\{x\}\right)$ kümesi $e-$kapalı bir küme olur. Üstelik

$$\begin{aligned} M-\left(C^T(x)-\{x\}\right) &= \left(M-C^T(x)\right) \cup \{x\} \\ &= \left(\left(C^S(x) \cup C^L(x)\right)-\{x\}\right) \cup \{x\} \\ &= C^S(x) \cup C^L(x) \end{aligned}$$

olduğundan $C^S(x) \cup C^L(x)$ kümesi de M^E topolojik uzayında kapalı bir kümedir.

Sonuç 4.1.1. M Minkowski uzayı üzerindeki s ve t topolojileri $e-$topolojisinden kesin ince oldukları için M^E topolojik uzayında kapalı olan $C^S(x) \cup C^L(x)$ kümesi M^s ve M^t topolojik uzaylarında da kapalı kümedir.

Benzer yolla aşağıdaki önerme ve sonuç verilebilir.

Önerme 4.1.2 M , $n-$boyutlu Minkowski uzayı ve $x \in M$ olsun. Bu durumda $C^T(x) \cup C^L(x)$ kümesi M^E topolojik uzayında kapalıdır.

Sonuç 4.1.2. $C^T(x) \cup C^L(x)$ kümesi M^s ve M^t topolojik uzaylarında kapalı kümedir.

Şimdi Minkowski uzayının bazı alt kümelerinin, sırasıyla, e, s ve $t-$topolojilerine göre iç ve kapanış kümelerini inceleyelim.

Önerme 4.1.3. $e-$topolojisi ile birlikte M Minkowski uzayı M^E ve $x \in M$ olsun. Bu durumda aşağıdaki eşitlikler sağlanır.

i. $i_e\left(C^S(x)\right) = C^S(x) - \{x\}$

ii. $c_e\left(C^S(x)\right) = C^S(x) \cup C^L(x)$

iii. $i_e\left(C^S(x) - \{x\}\right) = C^S(x) - \{x\}$

iv. $c_e\left(C^S(x) - \{x\}\right) = C^S(x) \cup C^L(x)$

v. $i_e\left(C^S(x) \cup C^L(x)\right) = C^S(x) - \{x\}$

vi. $c_e\left(C^S(x) \cup C^L(x)\right) = C^S(x) \cup C^L(x)$

İspat.

i. Teorem 2.5.'den $C^S(x)$ uzay konisi $e-$açık bir küme değildir. Ancak Teorem 2.3.'den $C^S(x) - \{x\}$ alt kümesi $e-$açıktır. Dolayısıyla $C^S(x)$ uzay konisinin kapsadığı en büyük $e-$açık küme $C^S(x) - \{x\}$ olur. O halde;

$$i_e\left(C^S(x)\right)=C^S(x)-\{x\} \text{ dir.}$$

ii. Önerme 4.1.1.'den $C^S(x)\cup C^L(x)$ kümesi M^E topolojik uzayında kapalı bir kümedir ve $C^S(x)\subset C^S(x)\cup C^L(x)$'dir. Aynı zamanda $e-$topolojisine göre $x\in M^E$ noktasındaki $C^S(x)$ uzay konisini kapsayan en küçük $e-$kapalı küme $C^S(x)$ uzay konisinin $e-$kapanışı olacağı için

$$C^S(x)\subset c_e\left(C^S(x)\right)\subset C^S(x)\cup C^L(x)$$

elde edilir.

Tersine, herhangi bir $y\in\left(C^S(x)\cup C^L(x)\right)$ noktası alalım. O halde $y\in C^S(x)$ veya $y\in C^L(x)$ olabilir. $y\in C^S(x)$ ise bir kümenin her noktası kapanış noktası olduğu için $y\in c_e\left(C^S(x)\right)$ elde edilir. Diğer taraftan, eğer $y\in C^L(x)$ ise her $\varepsilon>0$ için en az bir $z\in N_\varepsilon^E(y)$ Öklidyen komşuluğu $N_\varepsilon^E(y)\cap C^S(x)\neq\emptyset$ olacak şekilde mevcuttur. Dolayısıyla $y\in c_e\left(C^S(x)\right)$ olur.

$y\in\left(C^S(x)\cup C^L(x)\right)$ iken $y\in c_e\left(C^S(x)\right)$ olduğu için

$$C^S(x)\cup C^L(x)\subset c_e\left(C^S(x)\right)$$

mevcuttur.

Sonuç olarak $c_e\left(C^S(x)\right)\subset C^S(x)\cup C^L(x)$ ve $C^S(x)\cup C^L(x)\subset c_e\left(C^S(x)\right)$ olduğundan

$$c_e\left(C^S(x)\right)=C^S(x)\cup C^L(x)$$

iddiası doğrulanmış olur.

iii. Teorem 2.3.'den $C^S(x)-\{x\}$ kümesi $e-$açıktır ve açık bir kümenin içi kendisine eşittir. Dolayısıyla $i_e\left(C^S(x)-\{x\}\right)=C^S(x)-\{x\}$ olduğu kolayca görülür.

iv. $C^S(x)-\{x\}\subset C^S(x)$ kapsamasının her iki tarafının Öklidyen topolojiye göre kapanışını alırsak;

$$c_e\left(C^S(x)-\{x\}\right)\subset c_e\left(C^S(x)\right)$$

olur ve (ii)'nin ispatından $c_e\left(C^S(x)\right)=C^S(x)\cup C^L(x)$ olduğu için

$$c_e\left(C^S(x)-\{x\}\right)\subset C^S(x)\cup C^L(x) \tag{4.1}$$

elde edilir.

Tersine, $y\in\left(C^S(x)\cup C^L(x)\right)$ noktasını alalım. $y\in\left(C^S(x)\cup C^L(x)\right)$ ise (ii)'den $y\in c_e\left(C^S(x)\right)$ olur. $y\in c_e\left(C^S(x)\right)$ olduğunda ise iki durum söz konusudur. Birincisi, eğer $y\neq x$ ise $y\in c_e\left(C^S(x)-\{x\}\right)$ olur. İkinci durum ise, eğer $y=x$ ise her $\varepsilon>0$ için en az bir $z\in N_\varepsilon^E(y)$ Öklidyen komşuluğu $N_\varepsilon^E(y)\cap\left(C^S(x)-\{x\}\right)\neq\varnothing$ olacak şekilde mevcuttur. Dolayısıyla $y\in c_e\left(C^S(x)-\{x\}\right)$ olduğu görülür. Her iki durumun sonucunda da $y\in c_e\left(C^S(x)-\{x\}\right)$ elde edilir. O halde;

$$C^S(x)\cup C^L(x)\subset c_e\left(C^S(x)-\{x\}\right) \tag{4.2}$$

olur. (4.1) ve (4.2)'den $c_e\left(C^S(x)-\{x\}\right)=C^S(x)\cup C^L(x)$ eşitliği elde edilir.

v. $C^S(x)\subset C^S(x)\cup C^L(x)$ olduğundan $i_e\left(C^S(x)\right)\subset i_e\left(C^S(x)\cup C^L(x)\right)$ yazılabilir. Ayrıca (i). maddeden $i_e\left(C^S(x)\right)=C^S(x)-\{x\}$ olduğu için

$$C^S(x)-\{x\}\subset i_e\left(C^S(x)\cup C^L(x)\right) \tag{4.3}$$

olur. Tersine $y\in i_e\left(C^S(x)\cup C^L(x)\right)$ noktası alalım. Bir küme içini kapsadığı için $y\in\left(C^S(x)\cup C^L(x)\right)$ olur. $y\in\left(C^S(x)\cup C^L(x)\right)$ noktası için üç durum söz konusudur. Bunlar $y=x$, $y\in\left(C^L(x)-\{x\}\right)$ veya $y\in\left(C^S(x)-\{x\}\right)$ olmasıdır. Ancak $y=x$ veya $y\in\left(C^L(x)-\{x\}\right)$ olduğunda y noktası $C^S(x)\cup C^L(x)$ kümesinin bir iç noktası olamaz. Çünkü $y=x$ veya $y\in\left(C^L(x)-\{x\}\right)$ iken y noktasının $N_\varepsilon^E(y)\subset C^S(x)\cup C^L(x)$ olacak şekilde $\delta-$yarıçaplı hiçbir Öklidyen komşuluğu yoktur. Dolayısıyla sadece $y\in\left(C^S(x)-\{x\}\right)$ olabilir. Bu durumda $y\in i_e\left(C^S(x)\cup C^L(x)\right)$ iken $y\in\left(C^S(x)-\{x\}\right)$ olduğu için

$$i_e\left(C^S(x)\cup C^L(x)\right)\subset C^S(x)-\{x\} \tag{4.4}$$

elde edilir. O halde (4.3) ve (4.4) göz önüne alındığında $C^S(x)\cup C^L(x)$ kümesinin $e-$topolojisine göre içinin $C^S(x)-\{x\}$ kümesi olduğu görülür.

vi. Önerme 4.1.1.'den $C^S(x)\cup C^L(x)$ kümesi $e-$topolojisine göre kapalıdır. Kapalı bir kümenin kapanışı kendisine eşit olduğu için $C^S(x)\cup C^L(x)$ kümesinin M^E topolojik uzayında kapanışı kendisidir. Yani $c_e\left(C^S(x)\cup C^L(x)\right)=C^S(x)\cup C^L(x)$ olur.

Önerme 4.1.4. $e-$topolojisi ile birlikte M Minkowski uzayı M^E ve $x\in M$ olsun. Bu durumda aşağıdaki eşitlikler sağlanır.

i. $i_e\left(C^T(x)\right)=C^T(x)-\{x\}$

ii. $c_e\left(C^T(x)\right)=C^T(x)\cup C^L(x)$

iii. $i_e\left(C^T(x)-\{x\}\right)=C^T(x)-\{x\}$

iv. $c_e\left(C^T(x)-\{x\}\right)=C^T(x)\cup C^L(x)$

v. $i_e\left(C^T(x)\cup C^L(x)\right)=C^T(x)-\{x\}$

vi. $c_e\left(C^T(x)\cup C^L(x)\right)=C^T(x)\cup C^L(x)$

İspat. Önerme 4.1.3. ile benzer şekilde ispatlanabilir.

Önerme 4.1.5. $s-$topolojisi ile birlikte M Minkowski uzayı M^S ve $x\in M$ olsun. Bu durumda aşağıdaki eşitlikler sağlanır.

i. $i_s\left(C^S(x)\right)=C^S(x)$

ii. $c_s\left(C^S(x)\right)=C^S(x)\cup C^L(x)$

iii. $i_s\left(C^S(x)-\{x\}\right)=C^S(x)-\{x\}$

iv. $c_s\left(C^S(x)-\{x\}\right)=C^S(x)\cup C^L(x)$

v. $i_s\left(C^S(x)\cup C^L(x)\right)=C^S(x)$

vi. $c_s\left(C^S(x)\cup C^L(x)\right)=C^S(x)\cup C^L(x)$

İspat.

i. Teorem 2.5.'den $C^S(x)$ uzay konisi $s-$açık bir kümedir. Açık bir kümenin içi kümenin kendisine eşit olacağı için $i_s\left(C^S(x)\right)=C^S(x)$ elde edilir.

ii. $C^S(x)\subset C^S(x)\cup C^L(x)$ olduğu bilinmektedir. Sonuç 4.1.1.'den $C^S(x)\cup C^L(x)$ kümesi $s-$kapalı bir kümedir. Ancak $C^S(x)$ uzay konisini kapsayan en küçük $s-$kapalı küme $c_s\left(C^S(x)\right)$ olduğundan

$$C^S(x)\subset c_s\left(C^S(x)\right)\subset C^S(x)\cup C^L(x) \tag{4.5}$$

mevcuttur.

Tersine, herhangi bir $y \in \left(C^S(x) \cup C^L(x)\right)$ noktası alalım. O halde ya $y \in C^S(x)$ ya da $y \in C^L(x)$ şeklindedir. Eğer $y \in C^S(x)$ ise bir kümenin her noktası kapanış noktası olacağı için $y \in c_s\left(C^S(x)\right)$ olur. Eğer $y \in C^L(x)$ ise o zaman her $\varepsilon > 0$ için en az bir $z \in N_\varepsilon^s(y)$ noktası, $N_\varepsilon^s(y) \cap C^S(x) \neq \varnothing$ olacak şekilde mevcuttur. Dolayısıyla $y \in c_s\left(C^S(x)\right)$ olur. $y \in \left(C^S(x) \cup C^L(x)\right)$ iken $y \in c_s\left(C^S(x)\right)$ olduğu için

$$C^S(x) \cup C^L(x) \subset c_s\left(C^S(x)\right) \tag{4.6}$$

elde edilir. Burada (4.5) ve (4.6) göz önüne alındığında $c_s\left(C^S(x)\right) = C^S(x) \cup C^L(x)$ olduğu görülür.

iii. Teorem 2.3.'den $C^S(x) - \{x\}$ kümesi $e-$topolojisine göre açıktır ve Minkowski uzayı üzerindeki $s-$topolojisi $e-$topolojisinden ince olduğu için $C^S(x) - \{x\}$ kümesi $s-$açıktır. Açık bir kümenin içi kendisine eşit olduğu için $i_s\left(C^S(x) - \{x\}\right) = C^S(x) - \{x\}$ olmalıdır.

iv. $C^S(x) - \{x\} \subset C^S(x)$ kapsamasının her iki tarafının $s-$topolojisine göre kapanışını alırsak $c_s\left(C^S(x) - \{x\}\right) \subset c_s\left(C^S(x)\right)$ olur. $c_s\left(C^S(x)\right) = C^S(x) \cup C^L(x)$ eşitliği göz önüne alınarak

$$c_s\left(C^S(x) - \{x\}\right) \subset C^S(x) \cup C^L(x) \tag{4.7}$$

elde edilir.

Diğer taraftan, $y \in \left(C^S(x) \cup C^L(x)\right)$ noktasını alalım. O halde, (ii)'den $y \in c_s\left(C^S(x)\right)$ olur. Burada iki durum söz konusudur. Eğer $y \neq x$ ise $y \in c_s\left(C^S(x) - \{x\}\right)$ olur. Eğer $y = x$ ise o zaman her $\varepsilon > 0$ için en az bir $z \in N_\varepsilon^s(y)$

$\varepsilon-$yarıçaplı $s-$komşuluğu $N_{\varepsilon}^{s}(y)\cap\left(C^{S}(x)-\{x\}\right)\neq\varnothing$ olacak şekilde mevcuttur. Buradan $y\in c_{s}\left(C^{S}(x)-\{x\}\right)$ olduğu görülür. O halde

$$C^{S}(x)\cup C^{L}(x)\subset c_{s}\left(C^{S}(x)-\{x\}\right) \tag{4.8}$$

elde edilir. Dolayısıyla (4.7) ve (4.8) ile $c_{s}\left(C^{S}(x)-\{x\}\right)=C^{S}(x)\cup C^{L}(x)$ sonucuna ulaşılır.

v. $C^{S}(x)\subset C^{S}(x)\cup C^{L}(x)$ olup $i_{s}\left(C^{S}(x)\right)\subset i_{s}\left(C^{S}(x)\cup C^{L}(x)\right)$ yazılabilir. Ayrıca (i)'den $i_{s}\left(C^{S}(x)\right)=C^{S}(x)$ olduğu için

$$C^{S}(x)\subset i_{s}\left(C^{S}(x)\cup C^{L}(x)\right)$$

elde edilir. Diğer taraftan $y\in i_{s}\left(C^{S}(x)\cup C^{L}(x)\right)$ noktası alalım. $i_{s}\left(C^{S}(x)\cup C^{L}(x)\right)\subset C^{S}(x)\cup C^{L}(x)$ olduğu göz önüne alınırsa $y\in\left(C^{S}(x)\cup C^{L}(x)\right)$ olur. Bu durumda $y=x$, $y\in\left(C^{L}(x)-\{x\}\right)$ veya $y\in\left(C^{S}(x)-\{x\}\right)$ olduğu görülür. Fakat eğer $y\in\left(C^{L}(x)-\{x\}\right)$ alınırsa y noktası $C^{S}(x)\cup C^{L}(x)$ kümesinin bir iç noktası olmaz. Çünkü $y\in\left(C^{L}(x)-\{x\}\right)$ iken y noktasının $\varepsilon-$yarıçaplı $s-$komşuluğu $N_{\varepsilon}^{s}(y)\subset C^{S}(x)\cup C^{L}(x)$ olacak şekilde mevcut değildir. O halde $y\in C^{S}(x)$ olur. Buradan

$$i_{s}\left(C^{S}(x)\cup C^{L}(x)\right)\subset C^{S}(x)$$

elde edilir ve çift yönlü kapsamadan iddia ispatlanmış olur.

iv. Sonuç 4.1.1.'den $C^{S}(x)\cup C^{L}(x)$ kümesi $s-$kapalı bir kümedir. $s-$kapalı bir kümenin $s-$kapanışı kendisine eşit olduğundan

$$c_s\left(C^S(x)\cup C^L(x)\right)=C^S(x)\cup C^L(x)$$

olduğu görülür.

Önerme 4.1.6. $t-$topolojisi ile birlikte M Minkowski uzayı M^t ve $x\in M$ olsun. Bu durumda aşağıdaki eşitlikler sağlanır.

i. $i_t\left(C^T(x)\right)=C^T(x)$

ii. $c_t\left(C^T(x)\right)=C^T(x)\cup C^L(x)$

iii. $i_t\left(C^T(x)-\{x\}\right)=C^T(x)-\{x\}$

iv. $c_t\left(C^T(x)-\{x\}\right)=C^T(x)\cup C^L(x)$

v. $i_t\left(C^T(x)\cup C^L(x)\right)=C^T(x)$

vi. $c_t\left(C^T(x)\cup C^L(x)\right)=C^T(x)\cup C^L(x)$

İspat. Önerme 4.1.5. ile benzer şekilde ispatlanabilir.

Önerme 4.1.7. $n-$boyutlu Minkowski uzayı M, üzerindeki $e-$topolojisi ile birlikte M^E olarak verilsin. Bu durumda $C^S(x)$ uzay konisi M^E topolojik uzayında

i. $\sigma-e-$açık,

ii. $b-e-$açık,

iii. $\beta-e-$açık kümedir.

Ancak $C^S(x)$ uzay konisi M^E topolojik uzayında

iv. $\alpha-e-$açık,

v. ön $-e-$ açık,

vi. $\sigma-e-$düzenli, $\beta-e-$ düzenli, $\alpha-e-$düzenli, ön $-e-$ düzenli küme değildir.

İspat.

i. Tanım 3.1.1.'in (a) şıkkından bir kümenin $\sigma-e-$açık olabilmesi için $C^S(x)\subset c_e\left(i_e\left(C^S(x)\right)\right)$ olması gerekir.

Önerme 4.1.3.'ün (i) ve (iv) şıkkından $i_e\left(C^S(x)\right)=C^S(x)-\{x\}$ ve $c_e\left(C^S(x)-\{x\}\right)=C^S(x)\cup C^L(x)$ olduğu bilindiğinden

$$c_e\left(i_e\left(C^S(x)\right)\right)=C^S(x)\cup C^L(x)$$

elde edilir. Ayrıca $C^S(x)\subset C^S(x)\cup C^L(x)$ olduğundan $C^S(x)\subset c_e\left(i_e\left(C^S(x)\right)\right)$ sonucuna ulaşılır ve $C^S(x)\subset c_e\left(i_e\left(C^S(x)\right)\right)$ ise $C^S(x)$ uzay konisi $\sigma-e-$açık bir küme olur.

ii. $C^S(x)$ uzay konisinin $b-e-$açık küme olabilmesi için Tanım 3.1.1.'in (f) şıkkından

$$C^S(x)\subset i_e\left(c_e\left(C^S(x)\right)\right)\cup c_e\left(i_e\left(C^S(x)\right)\right)$$

olması gerekir. O halde Önerme 4.1.3.'den

$$c_e\left(i_e\left(C^S(x)\right)\right)=C^S(x)\cup C^L(x) \text{ ve } i_e\left(c_e\left(C^S(x)\right)\right)=C^S(x)-\{x\}$$

olduğu için

$$i_e\left(c_e\left(C^S(x)\right)\right)\cup c_e\left(i_e\left(C^S(x)\right)\right)=C^S(x)\cup C^L(x) \tag{4.9}$$

eşitliği elde edilir. $C^S(x)\subset C^S(x)\cup C^L(x)$ olduğu bilindiğinden ve (4.9) eşitliğinden

$$C^S(x)\subset i_e\left(c_e\left(C^S(x)\right)\right)\cup c_e\left(i_e\left(C^S(x)\right)\right)$$

sonucuna ulaşılır. Buradan $C^S(x)$ uzay konisi $e-$topolojisine göre $b-$açık küme olur.

iii. Tanım 3.1.1.'in (d) şıkkından herhangi bir $A \subset M$ alt kümesinin $\beta - e -$ açık küme olması için

$$A \subset c_e\left(i_e\left(c_e\left(A\right)\right)\right)$$

olması gerekir. O halde Önerme 4.1.3.'den faydalanarak

$$c_e\left(i_e\left(c_e\left(C^S\left(x\right)\right)\right)\right) = C^S\left(x\right) \cup C^L\left(x\right)$$

eşitliği elde edilir. Ayrıca $C^S\left(x\right) \subset C^S\left(x\right) \cup C^L\left(x\right)$ olduğundan

$$C^S\left(x\right) \subset c_e\left(i_e\left(c_e\left(C^S\left(x\right)\right)\right)\right)$$

bulunur ve buradan $C^S\left(x\right)$ uzay konisinin $\beta - e -$ açık küme olduğu görülür.

iv. $C^S\left(x\right)$ uzay konisinin $\alpha - e -$açık küme olabilmesi için

$$C^S\left(x\right) \subset i_e\left(c_e\left(i_e\left(C^S\left(x\right)\right)\right)\right)$$

olması gerekir [Tanım 3.1.1.(c)]. Ancak Önerme 4.1.3.'den

$$i_e\left(c_e\left(i_e\left(C^S\left(x\right)\right)\right)\right) = C^S\left(x\right) - \{x\}$$

olduğundan $C^S\left(x\right) \not\subset i_e\left(c_e\left(i_e\left(C^S\left(x\right)\right)\right)\right)$ elde edilir. O halde $C^S\left(x\right)$ uzay konisi M^E topolojik uzayında $\alpha -$açık küme değildir.

v. Herhangi bir $A \subset M$ alt kümesinin $e -$topolojisine göre ön$-$açık küme olabilmesi için $A \subset i_e\left(c_e\left(A\right)\right)$ olması gerek ve yeterdir [Tanım 3.1.1.(b)].

O halde $C^S(x)$ uzay konisinin ön $-e-$ açık küme olabilmesi için

$$C^S(x) \subset i_e\left(c_e\left(C^S(x)\right)\right)$$

olmalıdır. Fakat Önerme 4.1.3. yardımıyla verilen

$$i_e\left(c_e\left(C^S(x)\right)\right) = C^S(x) - \{x\}$$

eşitliğinden $C^S(x) \not\subset i_e\left(c_e\left(C^S(x)\right)\right)$ olduğu görülür, yani $C^S(x)$ uzay konisi ön $-e-$ açık küme değildir.

iv. $C^S(x)$ uzay konisinin $\sigma-e-$düzenli, $\beta-e-$düzenli $\alpha-e-$düzenli ve ön $-e-$ düzenli küme olabilmesi için, sırasıyla, $c_e\left(i_e\left(C^S(x)\right)\right) = C^S(x)$, $c_e\left(i_e\left(c_e\left(C^S(x)\right)\right)\right) = C^S(x)$, $i_e\left(c_e\left(i_e\left(C^S(x)\right)\right)\right) = C^S(x)$ ve $i_e\left(c_e\left(C^S(x)\right)\right) = C^S(x)$ olması gerekir. Ancak $C^S(x)$ için Önerme 4.1.3.'den

$$c_e\left(i_e\left(C^S(x)\right)\right) = C^S(x) \cup C^L(x)$$

$$c_e\left(i_e\left(c_e\left(C^S(x)\right)\right)\right) = C^S(x) \cup C^S(x)$$

$$i_e\left(c_e\left(i_e\left(C^S(x)\right)\right)\right) = C^S(x) - \{x\}$$

$$i_e\left(c_e\left(C^S(x)\right)\right) = C^S(x) - \{x\}$$

ifadeleri elde edilir ve $C^S(x)$ uzay konisinin $\sigma-e-$düzenli, $\beta-e-$düzenli $\alpha-e-$düzenli ve ön $-e-$ düzenli küme olmadığı görülür.

Benzer şekilde, $n-$ boyutlu Minkowski uzayı M üzerindeki $e-$ topolojisi ile birlikte $C^T(x)$ zaman konisinin de M^E de $\sigma-e-$açık, $b-e-$açık, $\beta-e-$ açık küme olduğu, ancak $\alpha-e-$açık, ön$-e-$ açık, $\sigma-e-$düzenli, $\beta-e-$ düzenli, $\alpha-e-$düzenli, ön$-e-$ düzenli küme olmadığı görülebilir.

Önerme 4.1.8. $n-$ boyutlu Minkowski uzayı M, üzerindeki $s-$ topolojisi ile birlikte M^s olarak gösterilsin. Bu durumda $C^S(x)$ uzay konisi M^s topolojik uzayında $\alpha-$açık, $\beta-$açık, $\sigma-$açık, ön$-$ açık, $b-$açık, $\alpha-$düzenli ve ön$-$ düzenli kümedir, ancak $\sigma-$düzenli ve $\beta-$düzenli küme değildir.

İspat. Teorem 2.5.'den $C^S(x)$ uzay konisi $s-$açık bir kümedir. O halde uzay konisi $s-$topolojisine göre $\alpha-$açık, $\beta-$açık, $\sigma-$ açık, ön$-$ açık ve $b-$açık bir kümedir (Önerme 3.1.1.). Ayrıca $i_s\left(c_s\left(i_s\left(C^S(x)\right)\right)\right)=C^S(x)$ ve $i_s\left(c_s\left(C^S(x)\right)\right)=C^S(x)$ olduğundan $C^S(x)$ uzay konisi M^s topolojik uzayında $\alpha-$düzenli ve ön$-$ düzenli bir kümedir. $c_s\left(i_s\left(C^S(x)\right)\right)=C^S(x)\cup C^L(x)$ ve $c_s\left(i_s\left(c_s\left(C^S(x)\right)\right)\right)=C^S(x)\cup C^L(x)$ yani $c_s\left(i_s\left(C^S(x)\right)\right)\neq C^S(x)$ ve $c_s\left(i_s\left(c_s\left(C^S(x)\right)\right)\right)\neq C^S(x)$ olduğu için $C^S(x)$ uzay konisi M^s topolojik uzayında $\sigma-$düzenli ve $\beta-$düzenli küme değildir.

Yine benzer şekilde $C^T(x)$ zaman konisi de M^t topolojik uzayında, sırasıyla, $\alpha-$açık, $\beta-$açık, $\sigma-$açık, ön$-$ açık, $b-$açık, $\alpha-$düzenli ve ön$-$ düzenli kümedir. Ancak $C^T(x)$ zaman konisi M^t topolojik uzayında $\sigma-$düzenli ve $\beta-$düzenli küme değildir.

Önerme 4.1.9. M, $n-$ boyutlu Minkowski uzayı olmak üzere M^E, $e-$topolojisi ile donatılmış Minkowski uzayı olsun. Bu durumda $C^S(x)-\{x\}$ kümesi M^E topolojik uzayında $\alpha-$açık, $\beta-$açık, $\sigma-$açık, ön$-$ açık, $b-$açık, $\alpha-$düzenli ve ön$-$ düzenli kümedir, ancak $\sigma-$düzenli ve $\beta-$düzenli küme değildir.

İspat. $C^S(x)-\{x\}$ kümesi $e-$topolojisine göre açık kümedir (Teorem 2.3.). Dolayısıyla Önerme 3.1.1.'den $C^S(x)-\{x\}$ kümesi M^E topolojik uzayında, sırasıyla, $\alpha-$açık, $\beta-$açık, $\sigma-$açık, ön$-$açık ve $b-$açık kümedir. Ayrıca $i_e\left(c_e\left(i_e\left(C^S(x)-\{x\}\right)\right)\right)=C^S(x)-\{x\}$ ve $i_e\left(c_e\left(C^S(x)-\{x\}\right)\right)=C^S(x)-\{x\}$ olduğundan $C^S(x)-\{x\}$ kümesi M^E topolojik uzayında $\alpha-$düzenli ve ön$-$düzenli bir kümedir. Ancak M^E topolojik uzayında $c_e\left(i_e\left(C^S(x)-\{x\}\right)\right)\neq C^S(x)-\{x\}$ ve $c_e\left(i_e\left(c_e\left(C^S(x)-\{x\}\right)\right)\right)\neq C^S(x)-\{x\}$ olduğundan $C^S(x)-\{x\}$ alt kümesi $\sigma-$düzenli ve $\beta-$düzenli küme değildir.

Önerme 4.1.10. M Minkowski uzayı üzerindeki Öklidyen topolojiye göre M^E topolojik uzayında $C^T(x)-\{x\}$ kümesi $\alpha-$açık, $\beta-$açık, $\sigma-$açık, ön$-$açık, $b-$açık, $\alpha-$düzenli ve ön$-$düzenli kümedir, fakat $\sigma-$düzenli ve $\beta-$düzenli küme değildir.

İspat. Teorem 2.3.'e göre $C^T(x)-\{x\}$ kümesi M^E topolojik uzayında açık bir kümedir. Dolayısıyla ispat Önerme 4.1.9.'un ispatı ile benzer şekilde kolayca elde edilir.

Önerme 4.1.11. M^s, $s-$topolojisi ile birlikte $n-$boyutlu M topolojik uzayı olsun. Bu durumda $C^S(x)-\{x\}$ kümesi $\alpha-s-$açık, $\beta-s-$açık, $\sigma-s-$açık, ön$-s-$açık, $b-s-$açık kümedir, ancak $\sigma-s-$düzenli, $\beta-s-$düzenli, $\alpha-s-$düzenli ve ön$-s-$düzenli küme değildir.

İspat. Teorem 2.3.'den $C^S(x)-\{x\}$ alt kümesi $e-$açıktır. M Minkowski uzayı üzerindeki $s-$topolojisi M üzerindeki Öklidyen topolojiden kesin ince olduğu için $C^S(x)-\{x\}$ kümesi $s-$açık bir kümedir. Ayrıca $\alpha-$açık, $\beta-$açık, $\sigma-$açık, ön$-$açık ve $b-$açık kümelerin ailesi açık kümelerin ailesinden ince olduğu için M^s

de $s-$açık olan $C^S(x)-\{x\}$ alt uzayı $\alpha-s-$açık, $\beta-s-$açık, $\sigma-s-$açık, ön$-s-$açık, $b-s-$açık kümedir. Ancak Önerme 4.1.5.'den yararlanarak

$$c_s\left(i_s\left(C^S(x)-\{x\}\right)\right)=C^S(x)\cup C^L(x)$$

$$c_s\left(i_s\left(c_s\left(C^S(x)-\{x\}\right)\right)\right)=C^S(x)\cup C^S(x)$$

$$i_s\left(c_s\left(i_s\left(C^S(x)-\{x\}\right)\right)\right)=C^S(x)$$

$$i_s\left(c_s\left(C^S(x)-\{x\}\right)\right)=C^S(x)$$

ifadeleri elde edilir ve Tanım 3.1.1.(e) göz önüne alınarak $C^S(x)-\{x\}$ kümesinin $\sigma-s-$düzenli, $\beta-s-$düzenli, $\alpha-s-$düzenli ve ön$-s-$düzenli küme olmadığı görülür.

Önerme 4.1.12. M Minkowski uzayı üzerindeki $t-$topolojisine göre $C^T(x)-\{x\}$ alt kümesi $\alpha-t-$açık, $\beta-t-$açık, $\sigma-t-$açık, ön$-t-$açık, $b-t-$açık kümedir, ancak $\sigma-t-$düzenli, $\beta-t-$düzenli, $\alpha-t-$düzenli ve ön$-t-$düzenli küme değildir.

İspat. Teorem 2.3.'den $C^T(x)-\{x\}$ kümesi M^E topolojik uzayında açık olup M uzayı üzerindeki $t-$topolojisi $e-$topolojisinden kesin ince olduğu için $C^T(x)-\{x\}$ kümesi M^t topolojisine göre de açıktır. Buradan Önerme 4.1.11.'in ispatı ile benzer olarak ispat kolayca elde edilir.

Önerme 4.1.13. G kümesi M^E topolojik uzayında herhangi bir $e-$açık küme olsun. Bu durumda G kümesi M^s topolojisinde, sırasıyla, α, σ, b, β ve ön$-s-$açık kümedir.

İspat. G kümesi M^E topolojik uzayında herhangi bir $e-$açık küme olsun. M Minkowski uzayı üzerindeki $s-$topolojisi M üzerindeki $e-$topolojisinden kesin ince olduğu için G kümesi $s-$açık kümedir. O halde Önerme 3.1.1.'den G kümesi ve ön$-s-$açık küme olur.

Ayrıca Minkowski uzayı üzerindeki $t-$topolojisi de $e-$topolojisinden kesin ince olduğu için herhangi bir G $e-$açık kümesi, sırasıyla, α, σ, b, β ve ön$-t-$açık kümedir.

Önerme 4.1.14. M, $n-$boyutlu Minkowski uzayı olsun. Bu durumda tüm $\alpha-s-$açık ve $\alpha-e-$açık kümelerin aileleri, sırasıyla, $\alpha O\left(M^s\right)$ ve $\alpha O\left(M^E\right)$ olsun. $\alpha O\left(M^s\right)$ ailesi $\alpha O\left(M^E\right)$ ailesinden kesin incedir.

İspat. $G \subseteq M$ olmak üzere G kümesi M^E topolojik uzayında keyfi bir $\alpha-e-$açık küme olsun. G kümesi $\alpha-e-$açık küme ise

$$G \subset i_e\left(c_e\left(i_e(G)\right)\right) \tag{4.10}$$

mevcuttur. Diğer taraftan Minkowski uzayı üzerindeki $s-$topolojisi $e-$topolojisinden kesin ince olduğu için bir kümenin $s-$topolojisine göre içi o kümenin $e-$topolojisine göre içini kapsar ve bir kümenin $s-$topolojisine göre kapanışı o kümenin $e-$topolojisine göre kapanışı tarafından kapsanır. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} & i_e(G) \subset i_s(G) \\ \Rightarrow\ & c_e\left(i_e(G)\right) \supset c_s\left(i_s(G)\right) \\ \Rightarrow\ & i_e\left(c_e\left(i_e(G)\right)\right) \subset i_s\left(c_s\left(i_s(G)\right)\right) \end{aligned}$$

olduğu görülür ve (4.10) göz önüne alındığında

$$G \subset i_s\left(c_s\left(i_s(G)\right)\right)$$

elde edilir. Bu durumda $G \subset i_s\left(c_s\left(i_s(G)\right)\right)$ ise G kümesi $\alpha - s -$açık bir küme olur. Herhangi bir G $\alpha - e -$açık kümesi aldığımızda bu kümenin $\alpha - s -$açık küme olduğu görüldüğünden $\alpha O\left(M^s\right)$ ailesi $\alpha O\left(M^E\right)$ ailesinden incedir. Ayrıca Önerme 4.1.7. ve 4.1.8.'den $C^S(x)$ uzay konisi $\alpha - e -$açık bir küme olmamasına rağmen $\alpha - s -$açık bir kümedir. Dolayısıyla $\alpha O\left(M^s\right)$ ailesi $\alpha O\left(M^E\right)$ ailesinden kesin incedir.

Önerme 4.1.15. M, $n-$boyutlu Minkowski uzayı olsun. Bu durumda tüm ön$-s-$açık ve ön$-e-$açık kümelerin aileleri, sırasıyla, $PO\left(M^s\right)$ ve $PO\left(M^E\right)$ olmak üzere $PO\left(M^s\right)$ ailesi $PO\left(M^E\right)$ ailesinden kesin incedir.

İspat. M^E topolojik uzayında bir $G \subseteq M$ kümesi keyfi bir ön$-e-$açık küme olsun. G kümesi ön$-e-$açık küme ise $G \subset i_e\left(c_e(G)\right)$ mevcuttur. Diğer taraftan Minkowski uzayı üzerindeki $s-$topolojisi $e-$topolojisinden kesin ince olduğu için

$$c_e(G) \supset c_s(G)$$
$$\Rightarrow \quad i_e\left(c_e(G)\right) \subset i_s\left(c_s(G)\right)$$

olur. $G \subset i_e\left(c_e(G)\right) \subset i_s\left(c_s(G)\right)$ ise $G \subset i_s\left(c_s(G)\right)$ elde edilir. Bu durumda G kümesi ön$-s-$açık küme olur. O halde $PO\left(M^s\right)$ ailesi $PO\left(M^E\right)$ ailesinden incedir. Ayrıca Önerme 4.1.7. ve 4.1.8.'den $C^S(x)$ uzay konisi ön$-e-$açık bir küme olmamasına rağmen ön$-s-$açık bir kümedir. Dolayısıyla $PO\left(M^s\right)$ ailesi $PO\left(M^E\right)$ ailesinden kesin incedir.

Benzer şekilde düşünüldüğünde Minkowski uzayındaki tüm $\alpha - t -$ açık kümelerin ailesi $\alpha O\left(M^{t}\right)$ ve tüm ön $-t-$ açık kümelerin ailesi $PO\left(M^{t}\right)$ olmak üzere $\alpha O\left(M^{t}\right)$ ve $PO\left(M^{t}\right)$ aileleri de, sırasıyla, $\alpha O\left(M^{E}\right)$ ve $PO\left(M^{E}\right)$ ailelerinden kesin incedir.

4.2. Minkowski Uzayının Genelleştirilmiş Bağlantılılığı

Minkowski uzayının s ve $t-$ topolojilerine göre eğrisel bağlantılı dolayısıyla bağlantılı olduğu [6, 7]'de gösterilmiştir. Şimdi Minkowski uzayının, üzerindeki genelleştirilmiş s ve $t-$ topolojilerine göre bağlantılılığını inceleyelim.

Önerme 4.2.1. $n-$ boyutlu M Minkowski uzayı $s-$ topolojisi ile birlikte M^{s} ile gösterilsin. Bu durumda M^{s} topolojik uzayı indirgenemez (irreducible) uzay değildir.

İspat. M^{s} topolojik uzayının indirgenemez uzay olabilmesi için her $U,\ V \subset M^{s}$ $s-$ açık kümeleri için $U \cap V \neq \varnothing$ olmalıdır (Tanım 3.4.2.). Ancak Teorem 2.3.'den görüleceği gibi $C^{S}\left(x\right)-\left\{x\right\}$ ve $C^{T}\left(x\right)-\left\{x\right\}$ kümeleri $e-$ topolojisine göre açıktır ve Minkowski uzayı üzerindeki $s-$ topolojisi Minkowski uzayı üzerindeki Öklidyen topolojiden kesin ince olduğu için $C^{S}\left(x\right)-\left\{x\right\}$ ve $C^{T}\left(x\right)-\left\{x\right\}$ kümeleri birer $s-$ açık kümedir. Üstelik

$$C^{S}\left(x\right)-\left\{x\right\} \cap C^{T}\left(x\right)-\left\{x\right\} = \varnothing$$

olduğu için M^{s} uzayı indirgenemez uzay değildir.

Sonuç 4.2.1. $s-$ topolojisi ile birlikte $n-$ boyutlu M Minkowski uzayı M^{s} olmak üzere, $\left(M, \alpha O\left(M^{s}\right)\right)$, $\left(M, \beta O\left(M^{s}\right)\right)$, $\left(M, SO\left(M^{s}\right)\right)$ ve $\left(M, PO\left(M^{s}\right)\right)$ topolojik uzayları da indirgenemez uzay değildir.

İspat. Önerme 3.1.1.'den herhangi bir $\left(X, \tau\right)$ topolojik uzayı için

$$\tau \subset \alpha O(X) \subset PO(X) \subset BO(X) \subset \beta O(X) \text{ ve } \alpha O(X) \subset SO(X) \subset BO(X)$$

kapsamaları mevcuttur.

Dolayısıyla M^s uzayı için de benzer şekilde

$$\tau(s) \subset \alpha O(M^s) \subset PO(M^s) \subset BO(M^s) \subset \beta O(M^s)$$

ve

$$\alpha O(M^s) \subset SO(M^s) \subset BO(M^s)$$

olduğundan $(M, \alpha O(M^s))$, $(M, \beta O(M^s))$, $(M, SO(M^s))$, $(M, BO(M^s))$ ve $(M, PO(M^s))$ uzayları da indirgenemez uzay değildir.

Önerme 4.2.2. M^t, $t-$topolojisi ile birlikte $n-$boyutlu M Minkowski uzayı olmak üzere, M^t uzayı indirgenemez uzay değildir.

Sonuç 4.2.2. $n-$boyutlu M Minkowski uzayı $t-$topolojisi ile birlikte M^t ile verilsin. Bu durumda $(M, \alpha O(M^t))$, $(M, \beta O(M^t))$, $(M, SO(M^t))$ ve $(M, PO(M^t))$ topolojik uzayları da indirgenemez uzay değildir.

Önerme 4.2.3. $s-$topolojisi ile birlikte M Minkowski uzayı M^s olmak üzere, M^s uzayı aşırı (extremally) bağlantısız uzay değildir.

İspat. $C^S(x)$ kümesi M^s topolojik uzayında açık bir küme olup $C^S(x)$ kümesinin $s-$kapanışının $C^S(x) \cup C^L(x)$ kümesi olduğu Bölüm 4.1.'de gösterilmiştir. Ayrıca

Önerme 4.1.5. (v)'den $i_s\left(C^S(x)\cup C^L(x)\right)=C^S(x)$ olduğu için $C^S(x)\cup C^L(x)$ kümesi $s-$açık bir küme değildir. Dolayısıyla M^s topolojik uzayında en az bir tane açık olup kapanışı açık olmayan bir küme bulunmaktadır. O halde M^s topolojik uzayı aşırı bağlantısız uzay değildir.

Önerme 4.2.4. $n-$boyutlu M Minkowski uzayı $t-$topolojisi ile birlikte M^t olmak üzere, M^t topolojik uzayı aşırı bağlantısız uzay değildir.

İspat. $C^T(x)$ kümesi Minkowski uzayı üzerindeki $t-$topolojisine göre açıktır. Ancak $c_t\left(C^T(x)\right)=C^T(x)\cup C^L(x)$ ve $i_t\left(C^T(x)\cup C^L(x)\right)=C^T(x)$ olduğundan $C^T(x)$ kümesinin $t-$topolojisine göre kapanışı $t-$açık olmadığından M^t topolojik uzayı aşırı bağlantısız uzay değildir.

Önerme 4.2.5. M^s, $s-$topolojisi ile birlikte $n-$boyutlu M Minkowski uzayı olsun. Bu durumda M^s topolojik uzayı $\alpha-$bağlantılıdır.

İspat. Lemma 3.4.1.'den M^s topolojik uzayının $\alpha-$bağlantılı olması için gerek ve yeter şart M^s topolojik uzayının bağlantılı olmasıdır. Ayrıca Sonuç 2.1.'den M^s topolojik uzayı bağlantılı olduğundan $\alpha-$bağlantılıdır.

Önerme 4.2.6. M^s topolojik uzayı yarı$-$bağlantılı uzay değildir.

İspat. M^s topolojik uzayının indirgenemez uzay olmadığı Önerme 4.2.1.'de gösterilmiştir. Dolayısıyla, M^s topolojik uzayı yarı$-$bağlantılı uzay değildir [35, Teorem 17].

Sonuç 4.2.2. M^s topolojik uzayı $\beta-$bağlantılı ve $b-$bağlantılı uzay değildir.

Önerme 4.2.7. M Minkowski uzayı, üzerindeki $t-$topolojisi ile birlikte M^t olmak üzere, M^t topolojik uzayı $\alpha-$bağlantılı, ancak yarı, β veya $b-$bağlantılı uzay değildir.

İspat. M^t topolojik uzayı bağlantılı olduğundan $\alpha-$bağlantılıdır, ancak indirgenemez uzay olmadığından yarı$-$bağlantılı değildir. Ayrıca Minkowski uzayındaki yarı, b ve $\beta-t-$açık kümeler için $SO\left(M^t\right)\subset BO\left(M^t\right)\subset \beta O\left(M^t\right)$ mevcuttur. M^t topolojik uzayı yarı$-$bağlantılı olmadığından β veya $b-$bağlantılı uzay değildir.

4.3. Minkowski Uzayında Genelleştirilmiş Ayırma Aksiyomları

$n-$boyutlu Minkowski uzayının Öklidyen topoloji ile birlikte Hausdorff uzayı olduğu bilinmektedir. Dahası, Minkowski uzayı üzerindeki s ve $t-$topolojileri Minkowski uzayı üzerindeki Öklidyen topolojiden kesin ince oldukları için M^s ve M^t topolojik uzayları da Hausdorff uzayıdır [6, 7]. Minkowski uzayındaki s ve $t-$açıklar, sırasıyla, α (β, σ, ön ve b)$-s$ ve $t-$açık kümeler olarak genelleştirildiğinde yine Hausdorffluk aksiyomu sağlanır.

Önerme 4.3.1. M^s topolojik uzayı, sırasıyla, $\alpha,$ $\beta,$ yarı, ön ve $b-T_2-$uzayıdır.

İspat. $s-$topolojisi ile birlikte $n-$boyutlu M Minkowski uzayı Hausdorff uzayı olduğundan farklı her $x,y\in M$ noktaları için $N_\varepsilon^s\left(x\right)\cap N_\varepsilon^s\left(y\right)=\varnothing$ olacak şekilde en az birer tane $s-$açık komşuluklar mevcuttur. Ayrıca $\alpha-s-$açık, $\beta-s-$açık, $\sigma-s-$açık, ön$-s-$açık ve $b-s-$açık kümelerin aileleri $s-$açık kümelerin ailesini kapsadığından $N_\varepsilon^s\left(x\right)$ ve $N_\varepsilon^s\left(y\right)$ $s-$açık komşulukları, sırasıyla, $\alpha-s-$açık, $\beta-s-$açık, $\sigma-s-$açık, ön$-s-$açık ve $b-s-$açık komşuluklardır. Dolayısıyla Minkowski uzayında farklı her $x,y\in M$ noktaları için $N_\varepsilon^s\left(x\right)\cap N_\varepsilon^s\left(y\right)=\varnothing$ olacak şekilde $\alpha-s-$açık (sırasıyla, $\beta-s-$açık, $\sigma-s-$açık, ön$-s-$açık, $b-s-$açık) komşulukları vardır. O halde $n-$boyutlu M Minkowski uzayı $s-$topolojisi ile birlikte, sırasıyla, α, β, yarı, ön ve $b-T_2-$uzayıdır.

Bir (X,τ) topolojik uzayı $T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_{\frac{1}{2}} \Rightarrow T_0-$uzayı olduğu bilindiğinden aşağıdaki sonuç aşikardır.

Sonuç 4.3.1. M^s topolojik uzayı, sırasıyla, α, β, yarı, ön ve $b-T_i\left(i=0,\frac{1}{2},1\right)$ uzayıdır.

Önerme 4.3.2. M^t topolojik uzayı, sırasıyla, α, β, yarı, ön ve $b-T_i\left(i=0,\frac{1}{2},1,2\right)$ uzayıdır.

İspat. $n-$boyutlu M Minkowski uzayı $t-$topolojisi ile birlikte Hausdorff uzayıdır [7]. Ayrıca $\tau(t)\subset\alpha O(M^t)\subset PO(M^t)\subset BO(M^t)\subset\beta O(M^t)$ ve $\alpha O(M^t)\subset SO(M^t)\subset BO(M^t)$ kapsamaları mevcut olduğundan M^t topolojik uzayı, sırasıyla, α, β, yarı, ön ve $b-T_2-$ uzayıdır. Dahası Sonuç 4.3.1. ile benzer şekilde M^t topolojik uzayı, sırasıyla, α, β, yarı, ön ve $b-T_i\left(i=0,\frac{1}{2},1\right)$ uzayı olur.

Agrawal ve Shrivastava [6, 7], $n-$boyutlu M Minkowski uzayının $s-$topolojisi ve $t-$topolojisi ile birlikte düzenli uzay olmadığını göstermişlerdir. Ayrıca bir topolojik uzay hem T_1-uzayı hem de düzenli uzay ise T_3-uzayı olduğu bilinmektedir. Dolayısıyla Minkowski uzayının, sırasıyla, s ve $t-$topolojileri ile birlikte T_3-uzayı olmadığı anlaşılmaktadır. Ancak Minkowski uzayının s ve $t-$topolojilerine göre $T_{2\frac{1}{2}}-$uzayı olup olmadığını inceleyebiliriz.

Teorem 4.3.1. M^s, $s-$topolojisi ile birlikte $n-$boyutlu M Minkowski uzayı olmak üzere, M^s topolojik uzayı $T_{2\frac{1}{2}}-$uzayıdır.

İspat. Herhangi $x,y\in M$ ve $x\neq y$ olsun. O halde d_E, M üzerinde tanımlı Öklidyen uzaklık fonksiyonu olmak üzere $d_E\left(x,y\right)=\varepsilon$ olacak şekilde $\varepsilon>0$ dır. $N^s_{\frac{\varepsilon}{3}}\left(x\right)$ ve $N^s_{\frac{\varepsilon}{3}}\left(y\right)$, sırasıyla, x ve y noktalarının $\dfrac{\varepsilon}{3}$ yarıçaplı $s-$komşulukları olsun. Kabul edelim ki $c_s\left(N^s_{\frac{\varepsilon}{3}}\left(x\right)\right)\cap c_s\left(N^s_{\frac{\varepsilon}{3}}\left(y\right)\right)\neq\varnothing$ olsun. Bu durumda $\exists\ z\in\left(c_s\left(N^s_{\frac{\varepsilon}{3}}\left(x\right)\right)\cap c_s\left(N^s_{\frac{\varepsilon}{3}}\left(y\right)\right)\right)$ noktası mevcuttur. Dolayısıyla $z\in c_s\left(N^s_{\frac{\varepsilon}{3}}\left(x\right)\right)$ ve $z\in c_s\left(N^s_{\frac{\varepsilon}{3}}\left(x\right)\right)$ olur. Ayrıca $s-$komşuluk tanımından $N^s_{\frac{\varepsilon}{3}}\left(x\right)=N^E_{\frac{\varepsilon}{3}}\left(x\right)\cap C^S\left(x\right)$ ve $N^s_{\frac{\varepsilon}{3}}\left(y\right)=N^E_{\frac{\varepsilon}{3}}\left(y\right)\cap C^S\left(y\right)$ olduğundan $c_s\left(N^s_{\frac{\varepsilon}{3}}\left(x\right)\right)\subset c_s\left(N^E_{\frac{\varepsilon}{3}}\left(x\right)\right)$ ve $c_s\left(N^s_{\frac{\varepsilon}{3}}\left(y\right)\right)\subset c_s\left(N^E_{\frac{\varepsilon}{3}}\left(y\right)\right)$ kapsamaları vardır. Buradan $z\in c_s\left(N^E_{\frac{\varepsilon}{3}}\left(x\right)\right)$ ve $z\in c_s\left(N^E_{\frac{\varepsilon}{3}}\left(x\right)\right)$ olur. O halde $d_E\left(z,x\right)\leq\dfrac{\varepsilon}{3}$ ve $d_E\left(z,y\right)\leq\dfrac{\varepsilon}{3}$ eşitsizlikleri mevcuttur. Üstelik üçgen eşitsizliğinden $d_E\left(x,y\right)\leq d_E\left(z,x\right)+d_E\left(z,y\right)$ olduğu için $\varepsilon\leq\dfrac{2\varepsilon}{3}$ eşitsizliği elde edilir ki bu bir çelişkidir. Dolayısıyla $c_s\left(N^S_{\frac{\varepsilon}{3}}\left(x\right)\right)\cap c_s\left(N^S_{\frac{\varepsilon}{3}}\left(y\right)\right)=\varnothing$ olduğu görülür. Sonuç olarak Minkowski uzayındaki farklı her iki nokta $s-$kapalı komşuluklar ile ayrılmış olur. O halde Tanım 3.5.4.'e göre $n-$boyutlu Minkowski uzayı $s-$topolojisi ile birlikte $T_{2\frac{1}{2}}-$uzayıdır.

Teorem 4.3.1.'den yola çıkarak aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 4.3.2. M^s topolojik uzayı, sırasıyla, α, β, yarı, ön ve $b-T_{2\frac{1}{2}}-$ uzayıdır.

Teorem 4.3.2. M^t, $t-$topolojisi ile birlikte $n-$boyutlu Minkowski uzayı olmak üzere, M^t topolojik uzayı $T_{2\frac{1}{2}}-$uzayıdır.

İspat. Teorem 4.3.1'in ispatına benzer şekilde yapılır.

Sonuç 4.3.3. M^t topolojik uzayı, sırasıyla, α, β, yarı, ön ve $b-T_{2\frac{1}{2}}-$ uzayıdır.

KAYNAKLAR

[1] Zeeman, E.C., Causality implies the Lorentz group, J. Math. Phys., 5: 490-493, 1964.

[2] Zeeman, E.C., The topology of Minkowski space, Topology, 6: 161-170, 1966.

[3] Nanda S., Weaker versions of Zeeman's conjectures on topologies for Minkowski space, J. Math. Phys., 13: 12-15, 1972.

[4] Nanda S., Topology for Minkowski space, J. Math. Phys., 12: 394-401, 1971.

[5] Dossena G., Some results on the Zeeman topology, J. Math. Phys., 48(11), Article ID 113507, 13 pages, 2007.

[6] Agrawal, G., Shrivastava, S., A study of non-Euclidean $s-$topology, ISRN Mathematical Physics, Article ID 896156, 11 pages, 2012.

[7] Agrawal, G., Shrivastava, S., $t-$topology on the $n-$dimensional Minkowski space, J. Math. Phys., Article ID 053515, 6 pages, 2009.

[8] Levine, N., Semi-open sets and semi-continuity in topological spaces, Amer. Math. Monthly, 70: 36-41, 1963.

[9] Njastad, O., On some classes of nearly open sets, Pacific J. Math, 15: 961-970, 1965.

[10] Abd El-Monsef, M.E., El-Deep, S.N., Mahmoud, R.A., $\beta-$open sets and $\beta-$continuous mappings, Bull Fac. Sci. Assiut Univ. A, A12, no. 1: 77-90., 1983.

[11] Jamunarani, R., Jeyanthi, P., Regular sets in generalized topological spaces, Acta Math. Hungar., 135 (4): 342-349, 2012.

[12] Andrijevic, D., On $b-$open sets, Mat. Vesnik, 48: 59-64, 1996.

[13] Császár, A., Generalized open sets, Acta Math. Hungar., 75, no. 1-2: 65-87. 1997.

[14] Császár, A., Generalized topology, generalized continuity, Acta Math. Hungar., 96, no. 4: 351-357, 2002.

[15] Császár, A., Generalized open sets in generalized topologies, Acta Math. Hungar., 106: 53-66, 2005.

[16] Ekici, E., On weak structures due to Császár, Acta Math. Hungar., 134(4): 565-570, 2012.

[17] Jafari, S., Noiri, T., Properties of $\beta-$connected spaces, Acta Math. Hungar., 101 (3): 227-236, 2003.

[18] Popa, V., Noiri, T., Weakly $\beta-$continuous functions, An. Univ. Timişoam Ser. Mat. Inform., 32: 83-92, 1994.

[19] Popa, V., Properties of H-almost continuous functions, Bull. Math. Soc. Sci. Math. R.S. Roumanie (N.S.), 31(79): 163-168, 1987.

[20] Pipitone, V., Russo, G., Spazi semiconnessi e spazi semiaperti, Rend. Circ. Mat. Palermo, 2 (24): 273-285, 1975.

[21] Ekici, E., On separated sets and connected spaces, Demonstratio Math., XL (1), pp. 209–217, 2007.

[22] Maheshwari, S.N., Prasad, R., Some new separation axioms, Ann. Soc. Sci. Bruxelles, 89: 395-402, 1975.

[23] Kar, A., Bhattacharyya, P., Some weak separation axioms, Bull. Calcutta Math. Soc., 82: 415-422, 1990.

[24] Caldas, M., Georgiou, D.N., Jafari, S., Characterizations of low separation axioms via $\alpha-$open sets and $\alpha-$closure operator, Bol. Soc. Paran. Mat., 21: 1-14, 2003.

[25] Császár, A., Separation axioms for generalized topologies, Acta Math. Hungar., 104 (1-2): 63-69, 2004.

[26] Roy, B., Muhkerjee, M. N., A unified theory for R_0, R_1 and certain other separation properties and their variant forms, Bol. Soc. Paran. Mat., 28: 15-24, 2010.

[27] Renukadevi, V., Sivaraj, D., Weak separation axioms in generalized topological spaces, Kyungpook Math. J., 54: 387-399, 2014.

[28] O'neill, B., Semi-Riemannian Geometry with applications to relativity, Academic Press, London, 1983.

[29] Mashhour, A.S., Abd El-Monsef, M.E., El-Deep, S.N., On precontinuous and weak precontinuous mappings, Proc. Math. Phys. Soc. Egypt, 53: 47-53, 1982.

[30] Macdonald, I.G., Algebraic geometry, W. A. Benjamin, Inc., New York, pp. 13-22, 1968.

[31] Levine, N., Generalized closed sets in topology, Rend. Circ. Math.Palermo, 19(2), pp. 89-96, 1970.

[32] Willard, S., General Topology, Addison-Wesley, 1970.

[33] Bhattacharyya, P., Lahiri, B.K., Semi-generalized closed set in topology, Indian J. Math., 29: 375-382, 1987.

[34] Maki, H., Umehara, J., Noiri, T., Every topological space is pre-$T_{1/2}$, Mem. Fac. Sci Kochi Univ.(Math), 17: 33-42, 1996.

[35] Thompson, T., Characterizations of irreducible space, Kyungpook Math. J., 21: 191-194, 1981.

ÖZGEÇMİŞ

Merve BİLGİN, 05.02.1991 tarihinde Düzce'de doğdu. İlköğrenimini Düzce, Cumayeri, Nimet Pısak İlköğretim Okulu'nda, ortaöğrenimini Düzce Süper Lisesi'nde tamamladı. 2008 yılında Sakarya Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü'nde başladığı lisans eğitimini 2012 yılında tamamladı. 2012 yılında Düzce'de özel bir kurumda Matematik Öğretmeni olarak görev yapmaya başladı. Halen, aynı kurumda Matematik Öğretmeni olarak görev yapmaktadır.