T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

PARÇALANMIŞ LİNEER MODELLER ALTINDA PARAMETRELERİN EN İYİ LİNEER YANSIZ TAHMİNLERİNDE PARÇALANMIŞ MATRİS TERSİ YÖNTEMİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Melek ERİŞ

Enstitü Anabilim Dalı	**:**	**MATEMATİK**
Enstitü Bilim Dalı	**:**	**UYGULAMALI MATEMATİK**
Tez Danışmanı	**:**	**Yrd. Doç. Dr. Nesrin GÜLER**

Haziran 2015

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

PARÇALANMIŞ LİNEER MODELLER ALTINDA PARAMETRELERİN EN İYİ LİNEER YANSIZ TAHMİNLERİNDE PARÇALANMIŞ MATRİS TERSİ YÖNTEMİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Melek ERİŞ

Enstitü Anabilim Dalı	**:**	**MATEMATİK**
Enstitü Bilim Dalı	**:**	**UYGULAMALI MATEMATİK**

Bu tez 16/06/2015 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği ile kabul edilmiştir.

Yrd. Doç. Dr. Nesrin GÜLER Jüri Başkanı	**Yrd. Doç. Dr. Ayşe SÖNMEZ Üye**	**Yrd. Doç. Dr. Hakan YAKUT Üye**

BEYAN

Tez içindeki tüm verilerin akademik kurallar çerçevesinde tarafımdan elde edildiğini, görsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçların akademik ve etik kurallara uygun şekilde sunulduğunu, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezde yer alan verilerin bu üniversite veya başka bir üniversitede herhangi bir tez çalışmasında kullanılmadığını beyan ederim.

Melek ERİŞ

14.05.2015

ÖNSÖZ

Bu çalışmada, bir parçalanmış lineer model ve bu modelle ilişkili alt parametrelerin tahmini ele alınmıştır. Ele alınan model altında alt parametrelerin en iyi lineer yansız tahminlerinde parçalanmış matris tersi yöntemi kullanılmıştır.

Bu çalışma boyunca bilgisini, deneyimini ve desteğini hiçbir zaman esirgemeyen değerli hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Nesrin GÜLER'e teşekkürü borç bilirim. Hayatımın her döneminde olduğu gibi bu çalışmamda da maddi ve manevi tüm desteğini benden esirgemeyen aileme ve değerli arkadaşıma sonsuz teşekkür ve minnettarlığımı sunarım.

Ayrıca bu çalışmanın maddi açıdan desteklenmesine olanak sağlayan Sakarya Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri (BAP) Komisyon Başkanlığına (Proje No: 2015-50-01-005) teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

$\mathbb{C}^{mxn}$	: mxn boyutlu kompleks matrisler kümesi
$\mathbb{R}^{nx1}$	: n boyutlu reel vektörler kümesi
$\mathbb{R}^{mxn}$	: mxn boyutlu reel matrisler kümesi
$A,B,C,...$	: Matrisler
$(A:B)$	: Parçalanmış Matris
(a_{ij})	: Elemanları a_{ij} olan matris
$x,y,z,...$	: Vektörler
I	: Birim matris
A'	: A matrisinin transpozu
A^{-1}	: A matrisinin tersi
A^{-}	: A matrisinin genelleştirilmiş tersi
$\mathcal{C}(A)$	: A matrisinin sütun uzayı
$\mathcal{C}(A)^{\perp}$	: $\mathcal{C}(A)$ sütun uzayının dik tümleyeni
$r(A)$	: A matrisinin rankı
P_A	: $\mathcal{C}(A)$ sütun uzayının dik izdüşüm matrisi
$U \oplus V$	: U ve V vektör uzaylarının direkt toplamı
$E(.)$	: Beklenen değer operatörü
$Cov(.)$	: Kovaryans operatörü

ÖZET

Anahtar kelimeler: BLUE, dik izdüşüm, genel lineer model, genel parçalanmış lineer model, matrislerin genelleştirilmiş tersi.

Bu çalışmada, bir genel lineer model ve bu modelin parçalanmış formu ele alınarak parametreler vektörü ve bu vektörün alt parametrelerinin en iyi lineer yansız tahminleri (best linear unbiased estimator- BLUE'ları) ile ilgili bazı sonuçlar parçalanmış matris tersi (inverse partitioned matrix- IPM) yöntemi kullanılarak elde edilmiştir.

İlk bölümde, genel lineer modeller tanıtılmış ve bu modeller altında parametrelerin tahmini ile ilgili kısa bir literatür bilgisi verilmiştir. Bazı temel kavram ve teoremler ikinci bölümde ele alınmıştır. Üçüncü bölümde, $2x2$ ve $3x3$ boyutlu simetrik blok parçalanmış matrislerin genelleştirilmiş tersleri ile ilgili bazı sonuçlar verilmiştir. Dördüncü bölümde, genel lineer model altında tahmin edilebilir olan bazı parametrik fonksiyonlar vektörlerinin BLUE'ları IPM yöntemi kullanılarak elde edilmiştir. Beşinci bölümde, dördüncü bölümde elde edilen sonuçların bir uygulaması verilmiştir. Son bölüm sonuç ve önerilerden oluşmaktadır.

THE INVERSE PARTITIONED MATRIX METHOD IN THE BEST LINEAR UNBIASED ESTIMATION OF PARAMETERS UNDER PARTITIONED LINEAR MODELS

SUMMARY

Keywords: BLUE, orthogonal projection, general linear model, general partitioned linear model, generalized inverse of matrices.

In the study, considering a general linear model and its partitioned form, some results releated to the best linear unbiased estimators (BLUEs) of parameters vector and its subparameters have been obtained by using inverse partitioned matrix (IPM) method.

In the first chapter, general linear models have been introduced and short literature information has been given about estimation of parameters under this models. Some fundamental concepts and theorems have been considered in the second chapter. In the thrid chapter, some results releated to generalized inverses of $2x2$ and $3x3$ dimensional symmetric block partitioned matrices have been given. In the fourth chapter, the BLUEs of some estimable parametric functions vectors under the general linear models have been obtained by using the IPM method. In the fifth chapter, an application of the results obtained in the chapter four has been given. The last chapter consists of conclusion and proposals.

BÖLÜM 1. GİRİŞ

Akıl ile gerçek dünyadaki olguları anlama-anlatma işine modelleme ve anlatımın kendisine model denir. Model, gerçek dünyada karşılaşılan bir problemin ilgili olduğu alanın kavram ve kanunlarına bağlı olarak ifade edilmesidir. Modellemede en çok kullanılan araçlar matematik ve istatistiktir. Özellikle rasgelelik içeren olgularla ilgili problemlerin modellenmesinde istatistik kullanılır [1]. Değişkenler arasındaki ilişkileri ortaya koyma ve ele alınan konu ile ilgili sonuç çıkarma ve tahminlerde bulunma problemlerinde sıklıkla kullanılan lineer modeller genel olarak

$$y = X\beta + \varepsilon \tag{1.1}$$

biçiminde ifade edilir. Bir genel lineer model, $y \in \mathbb{R}^{nx1}$ gözlenebilir rasgele değişkenler vektörünün beklenen değeri $E(y) = X\beta$ ve varyans-kovaryans matrisi $Cov(y) = \sigma^2 V$ kabulü altında $X \in \mathbb{R}^{nxp}$ ve $V \in \mathbb{R}^{nxn}$ matrisleri için herhangi bir rank kısıtlaması olmaksızın

$$\mathcal{M} = \{y, X\beta, \sigma^2 V\}$$

gösterimiyle ifade edilebilir. $X = (X_1 : X_2)$ ve bu matrise karşılık gelecek şekilde $\beta' = (\beta_1' : \beta_2')'$ olmak üzere (1.1)'de verilen genel lineer model

$$y = X\beta + \varepsilon = X_1\beta_1 + X_2\beta_2 + \varepsilon \tag{1.2}$$

genel parçalanmış lineer model olarak ifade edilebilir. Parçalanmış lineer modeller, alt parametrelerin tahmininin yanı sıra orijinal model ile ilişkili olan bazı alt modeller ve indirgenmiş modellerin araştırılmasında da kullanılır.

Genel lineer modeller altında parametrik fonksiyonların en iyi lineer yansız tahmin edicileri (BLUE'ları) regresyon analizindeki çalışmaların ana konularından biridir. Regresyon modelleri altında parametrik fonksiyonlar tahmin edilebilir olduğu zaman BLUE'ların uygun istatistiksel özellikleri sahip olmalarından dolayı istatistik literatüründe BLUE'lar ile ilgili birçok çalışmaya rastlamak mümkündür [2-4].

$\mathcal{M}$ modeli altında tahmin edilebilir bir $K\beta$ parametrik fonksiyonlar vektörünün BLUE'su Gy olmak üzere, BLUE'ların istatistiksel ve cebirsel özellikleri G katsayı matrisi vasıtasıyla belirlenir. Gy vektörünün $\mathcal{M}$ modeli altında $K\beta$ vektörünün BLUE'su olması için gerek ve yeter koşul G matrisinin temel BLUE denklemi olarak bilinen

$$G\left(X : VQ\right) = \left(K : 0\right) \tag{1.3}$$

denklemini sağlamasıdır [5,6]. Diğer bir deyişle Gy vektörünün $\mathcal{M}$ modeli altında $K\beta$ vektörünün BLUE'su olmasının gerek ve yeter koşulu G matrisi

$$\begin{pmatrix} V & X \\ X' & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G' \\ L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ K' \end{pmatrix} \tag{1.4}$$

denkleminin çözümü olacak şekilde bir $L \in \mathbb{R}^{pxn}$ matrisinin mevcut olmasıdır. Görüldüğü gibi G katsayı matrisi (1.3) ve (1.4)'te verilen matris denklemleri vasıtasıyla elde edilmektedir. Bilindiği gibi $x \in \mathbb{R}^{nx1}$, $y \in \mathbb{R}^{mx1}$ ve $A \in \mathbb{R}^{mxn}$ olmak üzere $Ax = y$ lineer denklem sisteminin $m = n$ ve $|A| \neq 0$ olduğunda tek çözümü

$x = A^{-1}y$ dir. Burada A^{-1}, $AA^{-1} = A^{-1}A = \mathrm{I}$ olacak şekilde A matrisinin tersidir. A matrisinde $m \neq n$ ya da A matrisinin tersinir olmayan kare matris olması durumda $Ax = y$ tutarlı lineer denklem sisteminin bir çözümü $x = A^{-}y$ dir. Burada A^{-}, $AA^{-}A = A$ olacak şekilde A matrisinin genelleştirilmiş tersidir.

Parçalanmış matrislerin genelleştirilmiş tersleri (1.4) denkleminden de görüldüğü gibi lineer modellerle ilgili çalışmalarda önemli bir rol oynamaktadır. Bir genel lineer model altında ele alınan lineer tahmin problemi

$$\begin{pmatrix} V & X \\ X' & 0 \end{pmatrix}$$

parçalanmış matrisinin bir genelleştirilmiş tersini hesaplama problemine indirgenmektedir. Bu parçalanmış matrisin bir genelleştirilmiş tersi

$$C = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & -C_4 \end{pmatrix}$$

olmak üzere genel lineer model altında tahminlerin C matrisi kullanılarak elde edilmesi parçalanmış matris tersi yöntemi (IPM) olarak bilinir [7,8]. Literatürde C matrisinin alt matrislerinin belirlenmesi ve bu matrislerin istatistiksel uygulamalarıyla ilgili çalışmalar mevcuttur [8-13].

Bu çalışmada genel lineer model altında $X\beta$ parametrik fonksiyonlar vektörü ile $X_1\beta_1$ ve $X_2\beta_2$ alt parametre vektörlerinin BLUE'ları ile ilgili sonuçlar IPM yöntemi kullanılarak elde edilmiş ve BLUE'lar ile ilgili bazı sonuçlar verilmiştir.

BÖLÜM 2. GENEL BİLGİLER

Bu bölümde, çalışmanın diğer bölümlerinde kullanılacak bazı tanımlar ve ispatsız olarak bazı teoremler verilecektir.

2.1. Bir Matrisin Sütun Uzayı ve Rankı

Tanım 2.1.1. $c_1x_1+\ldots+c_nx_n=0$ olacak şekilde tümü birden sıfır olmayan $c_1,c_2,\ldots,$ c_n skalerleri varsa, $x_1,x_2,\ldots,x_n\in\mathbb{R}^{nx1}$ vektörlerinin kümesine lineer bağımlıdır, aksi takdirde lineer bağımsızdır denir [14].

Tanım 2.1.2. $A\in\mathbb{R}^{mxn}$, $a_1,a_2,...,a_n$ sütunlarına sahip olan bir matris olsun. $x'=\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right)$ vektörü için $Ax=x_1a_1+x_2a_2+\ldots+x_na_n$ ifadesi A matrisinin sütunlarının bir lineer kombinasyonunu gösterir. A matrisinin sütunlarının lineer kombinasyonu olarak ifade edilebilen tüm vektörlerin kümesine A matrisinin sütun uzayı denir ve $\mathcal{C}(A)=\left\{y\in\mathbb{R}^{mx1}:y=Ax,x\in\mathbb{R}^{nx1}\right\}$ şeklinde ifade edilir. $\mathcal{C}(A)$, A matrisinin sütunları tarafından üretilir [15,16].

Tanım 2.1.3. A matrisinin $a_1,a_2,...,a_n$ satırları tarafından üretilen $\mathbb{R}^{nx1}$'in alt uzayına A matrisinin satır uzayı denir. A matrisinin satır uzayı $\mathcal{C}(A')$ olarak gösterilir [16].

Teorem 2.1.5. B matrisi, $A\in\mathbb{R}^{mxn}$ matrisinin satır indirgenmiş eşalon biçimi olsun. A matrisinin satır uzayı ile B matrisinin satır uzayı aynıdır [15].

Tanım 2.1.6. A matrisinin sütun uzayının boyutuna A matrisinin sütun rankı, satır uzayının boyutuna ise A matrisinin satır rankı denir. Bir A matrisinin satır indirgenmiş eşalon biçimindeki sıfırdan farklı satırlarının sayısına A matrisinin rankı denir ve $r(A)$ ile gösterilir [15].

Teorem 2.1.7. Bir $A \in \mathbb{R}^{mxn}$ matrisinin satır rankı, sütun rankı ve rankı eşittir [15].

Teorem 2.1.8. Uygun boyutlu A ve B matrisleri için

(i) $\mathcal{C}(A:B) = \mathcal{C}(A) + \mathcal{C}(B)$,

(ii) $\mathcal{C}(AB) \subseteq \mathcal{C}(A)$,

(iii) $\mathcal{C}(AA') = \mathcal{C}(A)$,

(iv) $\mathcal{C}(A) \subseteq \mathcal{C}(B) \Leftrightarrow$ Uygun boyutlu herhangi bir C matrisi için A matrisi BC biçimindedir,

(v) $boy(\mathcal{C}(A)) = r(A)$,

(vi) $A \in \mathbb{R}^{mxn}$ için $r(A) \leq \min\{m, n\}$,

(vii) $r(A) = r(A') = r(AA') = r(A'A)$

dir [14,16,17].

2.2. Kuadratik Formlar, Pozitif Kararlı ve Nonnegatif Kararlı Matrisler

Tanım 2.2.1. $y = (y_i) \in \mathbb{R}^{nx1}$ vektörü ve simetrik bir $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{nxn}$ matrisi için,

$$Q(y) = y'Ay = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} y_i y_j a_{ij}$$

ifadesi, $y_1,...,y_n$ elemanlarının bir kuadratik formudur. Burada A matrisine bu kuadratik formun matrisi denir. Böyle bir A matrisi için aşağıdakiler söylenebilir.

(i) Eğer $\forall\, y \neq 0$ için $y'Ay > 0$ ise A pozitif kararlıdır.

(ii) Eğer $\forall\, y \neq 0$ için $y'Ay < 0$ ise A negatif kararlıdır.

(iii) Eğer $\forall\, y$ için $y'Ay \geq 0$ ise A nonnegatif kararlıdır [16,17].

Teorem 2.2.2. $A \in \mathbb{R}^{nxn}$ matrisi r ranklı nonnegatif kararlı bir matristir ancak ve ancak $A = RR'$ olacak şekilde r ranklı $R \in \mathbb{R}^{nxn}$ matrisi vardır [18].

Tanım 2.2.3. Eğer A ve B nonnegatif tanımlı matrisleri için $B - A$ nonnegatif tanımlı ise Löwner sıralamasına göre A, B den küçüktür denir. $A \leq_L B$ veya $B \geq_L A$ ile gösterilir. Eğer $B - A$ pozitif tanımlı ise, bu durumda A matrisine kesinlikle B matrisinden küçüktür denir. $A <_L B$ veya $B >_L A$ ile gösterilir [16].

2.3. Parçalanmış Matrisler

Tanım 2.3.1. Bir kümenin parçalanmasına benzer olarak bir matrisin parçalanması, orjinal matrisin her bir elemanının, parçalanışın yalnız ve yalnız bir alt matrisine düşecek şekilde karşılıklı ayrık alt matrislere ayrılmış halidir. Örneğin, $A \in \mathbb{R}^{mxn}$ matrisi için

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

ifadesi, A matrisinin bir parçalanışıdır. Burada $m_1+m_2=m$ ve $n_1+n_2=n$ olmak üzere $A_{11}\in\mathbb{R}^{m_1xn_1}$, $A_{12}\in\mathbb{R}^{m_1xn_2}$, $A_{21}\in\mathbb{R}^{m_2xn_1}$ ve $A_{22}\in\mathbb{R}^{m_2xn_2}$ dir. Yukarıda verilen matrisin transpozu

$$A'=\begin{pmatrix} A'_{11} & A'_{21} \\ A'_{12} & A'_{22} \end{pmatrix}$$

şeklindedir.

2.4. Bir Matrisin Genelleştirilmiş Tersi

Tanım 2.4.1. $A\in\mathbb{R}^{mxn}$ matrisinin genelleştirilmiş tersi $AGA=A$ denklemini sağlayan G matrisi olarak tanımlanır ve $G=A^-$ olarak gösterilir [19].

Teorem 2.4.2. Eğer A mxn boyutlu matris ise, A^- nxm boyutlu matristir [19].

Teorem 2.4.3. Her matris en az bir genelleştirilmiş terse sahiptir. Her simetrik matrisin ise en az bir simetrik genelleştirilmiş tersi vardır. Genel olarak A^- tek değildir. A^- matrisinin tek olması için gerek ve yeter koşul A matrisinin tersinir matris olmasıdır. Bu durumda $A^-=A^{-1}$ dir [19].

Teorem 2.4.4. $A\in\mathbb{R}^{mxn}$ matrisinin herhangi A^- genelleştirilmiş tersi için

$$r(A)=r\left(A^-A\right)=r\left(AA^-\right)\leq r\left(A^-\right)$$

dir [19].

Teorem 2.4.5. A, B ve C uygun boyutlu matrisler olsun. $BA^{-}C$ matrisinin A matrisinin genelleştirilmiş tersinin seçimine göre değişmez olmasının gerek ve yeter şartı $\mathcal{C}(B') \subseteq \mathcal{C}(A')$ ve $\mathcal{C}(C) \subseteq \mathcal{C}(A)$ olmasıdır [14,18].

Teorem 2.4.6. A ve B uygun boyutlu matrisler olsun. Bu durumda

(i) $AA^{-}B = B \Leftrightarrow \mathcal{C}(B) \subset \mathcal{C}(A)$,

(ii) $BA^{-}A = B \Leftrightarrow \mathcal{C}(B') \subset \mathcal{C}(A')$

dir [19].

Tanım 2.4.7. Eğer $P^2 = P$ olacak şekilde bir P matrisi varsa, P matrisine idempotent matris denir [16].

Teorem 2.4.8. $A \in \mathbb{R}^{mxn}$ matrisinin herhangi bir A^{-} genelleştirilmiş tersi için, $A^{-}A$ ve AA^{-} matrisleri idempotenttir [19].

Teorem 2.4.9. A matrisi simetrik ve idempotent ise $\mathrm{I} - A$ matrisi de simetrik ve idempotenttir [19].

Teorem 2.4.10. $(A')^{-} = (A^{-})'$ dir [19].

Teorem 2.4.11. $A_{12} = A'_{21}$ ve A_{11} ile A_{22} kare matrisler olmak üzere $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$ reel simetrik matrisi için

(i) A matrisi pozitif kararlıdır ancak ve ancak A_{11} ve $A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$ pozitif kararlıdır.

(ii) A matrisi pozitif kararlıdır ancak ve ancak A_{22} ve $A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}$ pozitif kararlıdır.

(iii) Eğer A matrisi nonnegatif kararlı ise, $\mathcal{C}(A_{12}) \subseteq \mathcal{C}(A_{11})$ ve $\mathcal{C}(A_{21}) \subseteq \mathcal{C}(A_{22})$ dır [19].

Teorem 2.4.12. $A_{11} \in \mathbb{R}^{mxm}$ nonnegatif kararlı matris ve $A_{12} \in \mathbb{R}^{mxn}$ olmak üzere $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{12}' & 0 \end{pmatrix}$ matrisi için A nonsingüler matristir ancak ve ancak $r(A_{12}) = n$ ve $A_{11} + A_{12}A_{12}'$ pozitif kararlıdır [19].

Teorem 2.4.13. Eğer $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{12}' & 0 \end{pmatrix}$ nonsingüler ve $A_{21} = A_{12}'$ ise,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} B_{11}^{-1} - B_{11}^{-1}A_{12}B_{22}^{-1}A_{21}B_{11}^{-1} & B_{11}^{-1}A_{12}B_{22}^{-1} \\ B_{22}^{-1}A_{21}B_{11}^{-1} & \mathrm{I}_n - B_{22}^{-1} \end{pmatrix}$$

dir. Burada $B_{11} = A_{11} + A_{12}A_{21}$ ve $B_{21} = A_{21}B_{11}^{-1}A_{12}$ dir [19].

Teorem 2.4.14. $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$ parçalanmış matrisi için, eğer $\mathcal{C}(A_{12}) \subseteq \mathcal{C}(A_{11})$ ve $\mathcal{C}(A_{21}') \subseteq \mathcal{C}(A_{11}')$ ise,

$$A^{-} = \begin{pmatrix} A_{11}^{-} + A_{11}^{-}A_{12}T^{-}A_{21}A_{11}^{-} & -A_{11}^{-}A_{12}T^{-} \\ -T^{-}A_{21}A_{11}^{-} & T^{-} \end{pmatrix}$$

dir. Burada A_{11}^{-}, A_{11} in genelleştirilmiş tersi ve $T = A_{22} - A_{21}A_{11}^{-}A_{12}$ dir [19].

2.5. Lineer Denklem Sistemleri, Parçalanmış Matrislerin Tutarlılığı

$A \in \mathbb{R}^{mxn}$, $B \in \mathbb{R}^{kxt}$ ve $C \in \mathbb{R}^{mxt}$ bilinen matrisler olmak üzere,

$$AXB = C \tag{2.1}$$

matris denklem sistemi ele alınsın. Bu durumda aşağıdakiler verilebilir.

Tanım 2.5.1. (2.1) matris denklem sistemini sağlayan en az bir $X \in \mathbb{R}^{nxk}$ matrisi varsa, sistem tutarlıdır denir. Aksi takdirde sistem tutarsızdır [17].

Teorem 2.5.2. (2.1) matris denklem sisteminin tutarlı olmasının gerek ve yeter şartı $\mathcal{C}(C) \subset \mathcal{C}(A)$ ve $\mathcal{C}(C') \subset \mathcal{C}(B')$ olmasıdır [17].

Teorem 2.5.3. (2.1) matris denklem sistem tutarlı ise uygun boyutlu herhangi U ve V matrisleri için

$$X = A^{-}CB^{-} + \left(\mathrm{I} - A^{-}A\right)U + V\left(\mathrm{I} - BB^{-}\right)$$

ile verilen X matrisi, (2.1) matris denkleminin genel çözümüdür [17].

Sonuç 2.5.4. (2.1) matris denklem sistemi tutarlı ise $X = A^{-}CB^{-}$, (2.1) denklem sistemi için bir çözümdür [17].

$AXB = C$ matris denkleminde X matrisi yerine $x \in \mathbb{R}^{nx1}$ vektörü, $B = \mathrm{I}$ ve C matrisi yerine $g \in \mathbb{R}^{mx1}$ vektörü alınırsa, $Ax = g$ lineer denklem sistemi elde edilir. Böylece Teorem 2.5.3'ün daha özel durumu olarak aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 2.5.5. $Ax = g$ lineer denklem sisteminin tutarlı olmasının gerek ve yeter şartı $AA^{-}g = g$ olmasıdır. Eğer sistem tutarlı ise bu durumda herhangi bir $h \in \mathbb{R}^{nx1}$ vektörü için $x = A^{-}g + \left(\mathrm{I} - A^{-}A\right)h$ ile verilen x vektörü $Ax = g$ lineer denklem sisteminin genel çözümüdür [17].

Teorem 2.5.6. Uygun boyutlu A ve B matrisleri için $Y\left(A:B\right) = \left(0:B\right)$ denkleminin $Y \in \mathbb{R}^{nxn}$ için bir çözüme sahip olmasının gerek ve yeter şartı $\mathcal{C}\left(A\right) \cap \mathcal{C}\left(B\right) = \{0\}$ olmasıdır ve eğer $\mathcal{C}\left(A:B\right) = \mathbb{R}^{nx1}$ ise çözüm tektir [20].

Teorem 2.5.7. $A \in \mathbb{R}^{mxn}$, $B \in \mathbb{R}^{mxp}$, $L \in \mathbb{R}^{nxq}$ ve $D \in \mathbb{R}^{qxp}$ bilinen matrisler, X ve Y bilinmeyen matrisler olmak üzere, $\mathcal{C}\left(D\right) \subset \mathcal{C}\left(L'\right)$ ise,

$$\begin{pmatrix} A'A & L \\ L' & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A'B \\ D \end{pmatrix}$$

denklemi tutarlıdır [19].

2.6. İzdüşüm Matrisleri

Tanım 2.6.1. Her $u, v \in S$ ve $a, b \in \mathbb{R}$ için $au + bv \in S$ olacak şekilde sonlu sayıda vektörlerin boş kümeden farklı bir S kümesi bir vektör uzayıdır [16].

Tanım 2.6.2. S_1 ve S_2 vektör uzayları olsun. S_1 vektör uzayındaki her vektör S_2 vektör uzayındaki tüm vektörlere dik ise S_1 ve S_2 vektör uzayları birbirine diktir denir ve $S_1 \perp S_2$ ile gösterilir [16].

Tanım 2.6.3. S_1 ve S_2 vektör uzayları olsun. $u \in S_1$ ve $v \in S_2$ olmak üzere $u+v$ formundaki tüm vektörleri içeren vektör uzayına bu iki vektör uzayının toplamı denir ve bu toplam $S_1 + S_2$ ile gösterilir. Eğer S_1 ve S_2 vektör uzayları birbirine dikse, bu durumda $S_1 + S_2$ ile gösterilen toplam $S_1 \oplus S_2$ şeklinde ifade edilir [16].

Tanım 2.6.4. Eğer $S_1 \oplus S_2 = \mathbb{R}^{nx1}$ ise S_1 ve S_2 alt uzaylarına birbirinin dik tümleyenleri denir ve $S_1 = S_2^{\perp}$ (veya $S_2 = S_1^{\perp}$) şeklinde gösterilir. Bir S vektör uzayı için $\left(S_1^{\perp}\right)^{\perp} = S$ dir [16].

Tanım 2.6.5. S vektör uzayı olmak üzere her $v \in S$ için $Pv = v$ ve $Pv \in S$ ise P matrisine bir izdüşüm matrisi denir. Her izdüşüm matrisi bir idempotent matristir [16].

Tanım 2.6.6. P matrisi, S vektör uzayının bir izdüşüm matrisi olmak üzere $\mathrm{I} - P$ matrisi $S^{\perp}$ vektör uzayının bir izdüşüm matrisi ise, bu durumda P matrisine S vektör uzayının bir dik izdüşüm matrisi denir [16].

Teorem 2.6.7. Herhangi bir A matrisi için AA^{-} matrisi $\mathcal{C}(A)$ için bir izdüşüm matrisidir. $A(A'A)^{-} A'$ matrisi ise $\mathcal{C}(A)$ için bir dik izdüşüm matrisidir [16].

Teorem 2.6.8. $\mathcal{C}(P_A) = \mathcal{C}(A)$ ve $\mathcal{C}(\mathrm{I} - P_A) = \mathcal{C}(A)^{\perp}$ dir [16].

Teorem 2.6.9. A ve B uygun boyutlu matrisler olmak üzere,

(i) $\mathcal{C}(A:B) \subseteq \mathcal{C}(A) \oplus \mathcal{C}((\mathrm{I}-P_A)B)$,

(ii) $P_{(A:B)} = P_A + P_{(\mathrm{I}-P_A)B}$

dir [16].

Teorem 2.6.10. Uygun boyutlu A ve B matrisleri için,

(i) $B'A = 0 \Leftrightarrow \mathcal{C}(B) \subseteq \mathcal{C}(A)^{\perp}$,

(ii) $\mathcal{C}(B) \subseteq \mathcal{C}(A) \Leftrightarrow \mathcal{C}(B)^{\perp} \subseteq \mathcal{C}(A)^{\perp}$

dir [16].

2.7. Bazı İstatistiksel Kavramlar

Rasgele vektör, elemanları rasgele değişkenler olan vektör ve benzer şekilde rasgele matris ise, elemanları rasgele değişkenler olan matristir. Rasgele vektör ve matrislerle ilgili bazı temel kavram ve teoremler aşağıda verilmektedir. Bu tanım ve teoremler ile ilgili detaylı bilgi için örneğin, [18] kaynağına bakılabilir.

Tanım 2.7.1. $Z = (z_{ij})$ mxn boyutlu rasgele bir matris olmak üzere, Z matrisinin beklenen değeri $E(Z) = (E(z_{ij}))$ dir.

Teorem 2.7.2. Z rasgele bir matris, A, B ve C bilinen uygun boyutlu matrisler olmak üzere, $E(AZB+C) = AE(Z)B+C$ dir.

Sonuç 2.7.3. A ve B uygun boyutlu matrisler, x ve y ise uygun boyutlu rasgele vektörler olmak üzere $E(Ax+By) = AE(x)+BE(y)$ dir.

Tanım 2.7.4. x rasgele vektörünün varyansı, $Var(x) = \sigma_x^2 = E(x-\mu)^2$ dir. Burada, $\mu = E(x)$ dir.

Tanım 2.7.5. x ve y rasgele vektörleri arasındaki kovaryans,

$$Cov = (x, y) = \sigma_{xy} = E(x-\mu)(y-v)$$

dir. Burada $\mu = E(x)$, $v = E(y)$ dir.

Teorem 2.7.6. $A \in \mathbb{R}^{kxm}$ ve $B \in \mathbb{R}^{pxn}$ bilinen matrisler, $x \in \mathbb{R}^{mx1}$ ve $y \in \mathbb{R}^{nx1}$ rasgele vektörler olsun. Bu durumda $Cov(Ax, By) = ACov(x, y)B'$ dir.

BÖLÜM 3. PARÇALANMIŞ MATRİSLERİN GENELLEŞTİRİLMİŞ TERSLERİ

3.1. Giriş

Bu bölümde $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ biçimindeki parçalanmış matrislerde özel olarak $B = C'$ ve $D = 0$ olması durumunda elde edilen parçalanmış simetrik matrislerin genelleştirilmiş tersleri ile ilgili bazı sonuçlar elde edilecektir. Önce $2x2$ boyutlu sonra $3x3$ boyutlu parçalanmış matrisler ele alınacaktır. Aşağıda sonraki kısımlarda ele alınacak teoremlerin ispatı için ihtiyaç duyulacak bir teorem aşağıda verilmiştir.

Teorem 3.1.1. $A \in \mathbb{C}^{mxn}$, $G \in \mathbb{C}^{nxm}$ olsun. $\{A^-\}$, A matrisinin tüm genelleştirilmiş terslerinin kümesini göstermek üzere, $G \in \{A^-\}$ olmasının gerek ve yeter koşulu $Ax = b$ denklem sistemi tutarlı olacak şekildeki tüm $b \in \mathbb{R}^{mx1}$ vektörleri için $x = Gb$ vektörünün bir çözüm olmasıdır [21].

3.2. 2x2 Blok Matrisin Genelleştirilmiş Tersi

Teorem 3.2.1. $V \in \mathbb{R}^{nxn}$ nonnegatif kararlı matris, $X \in \mathbb{R}^{nxp}$ ve C_1, C_2, C_3, C_4 matrisleri uygun boyutlu matrisler olmak üzere,

$$\begin{pmatrix} V & X \\ X' & 0 \end{pmatrix}^{-} = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & -C_4 \end{pmatrix} \tag{3.1}$$

olsun. Bu durumda aşağıdakiler sağlanır.

(i) $\begin{pmatrix} V & X \\ X' & 0 \end{pmatrix}^{-} = \begin{pmatrix} C_1' & C_3' \\ C_2' & -C_4' \end{pmatrix}$ genelleştirilmiş tersin başka bir seçimidir.

(ii) $XC_3X = X = XC_2'X$.

(iii) $VC_2X' = XC_2'V = XC_4X' = XC_4'X' = VC_3'X' = XC_3V$.

(iv) $X'C_1X = 0, \quad VC_1X = 0, \quad X'C_1V = 0$.

(v) $VC_1VC_1V = VC_1V = VC_1'VC_1V = VC_1'V$ ve $VC_1V + XC_3V = V$.

İspat: $\begin{pmatrix} V & X \\ X' & 0 \end{pmatrix}^{-} = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & -C_4 \end{pmatrix}$ olmak üzere her iki tarafın transpozu alınırsa, Teorem 2.4.10'dan ve V matrisinin simetrik olmasından

$$\begin{pmatrix} V & X \\ X' & 0 \end{pmatrix}^{-} = \begin{pmatrix} C_1' & C_3' \\ C_2' & -C_4' \end{pmatrix}$$

yani (i) elde edilir.

Teoremin kalan kısmının ispatı Teorem 3.1.1'den yararlanılarak yapılacaktır.

Herhangi bir $d \in \mathbb{R}^{nx1}$ için

$$\begin{pmatrix} V & X \\ X' & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ X' \end{pmatrix} d$$

yani

$$\begin{aligned} Va + Xb &= 0 \\ X'a &= X'd \end{aligned} \tag{3.2}$$

lineer denklem sistemi ele alınsın. Bu denklem sistemi Teorem 2.5.7'ye göre tutarlıdır. Böylece Sonuç 2.5.4'ten bu denklem sisteminin bir çözümü

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V & X \\ X' & 0 \end{pmatrix}^{-} \begin{pmatrix} 0 \\ X' \end{pmatrix} d$$

yani (3.1)'den

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & -C_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ X' \end{pmatrix} d \qquad (3.3)$$

olarak yazılır. Böylece (3.3)'ten

$$a = C_2 X' d \qquad (3.4a)$$

$$b = -C_4 X' d \qquad (3.4b)$$

bulunur. (3.2) denklem sisteminin herhangi bir d vektörü için sağlandığı kabul edildiğinden, (3.4a) ve (3.4b)'de bulunan çözümler (3.2) denklem sisteminde yerine yazılırsa,

$$VC_2 X' = XC_4 X' \qquad (3.5a)$$

$$XC_2' X = X \qquad (3.5b)$$

elde edilir. (i)' ye göre C_2 ve C_4 sırasıyla C_3' ve C_4' ile yer değiştirebileceğinden (3.5a) ve (3.5b)'de verilen eşitlikler

$$VC_3' X' = XC_4' X' \qquad (3.6a)$$

$$XC_3 X = X \qquad (3.6b)$$

olarak yazılabilir. Böylece (3.5b) ve (3.6b)'den (ii) ispatlanmış olur.

(3.6a) soldan XC_3 ile çarpılırsa ve (3.6b) eşitliği kullanılırsa

$$XC_3VC_3'X' = XC_3XC_4'X' = XC_4'X'$$

elde edilir. Burada $XC_4'X'$ matrisinin simetrik olduğu görülür. Yani $XC_4'X' = XC_4X'$ bulunur. Dolayısıyla (3.5a) ve (3.6a) sırasıyla $VC_2X' = XC_2'V = XC_4X' = XC_4'X'$ ve $VC_3'X' = XC_3V = XC_4'X' = XC_4X'$ olarak yazılabildiğinden (iii) elde edilir.

Herhangi bir $d \in \mathbb{R}^{px1}$ için

$$\begin{pmatrix} V & X \\ X' & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ 0 \end{pmatrix} d$$

yani

$$\begin{aligned} Va + Xb &= Xd \\ X'a &= 0 \end{aligned} \qquad (3.7)$$

lineer denklem sistemi ele alınsın. Bu denklem sistemi Teorem 2.5.7'ye göre tutarlıdır. Böylece Sonuç 2.5.4'ten bu denklem sisteminin bir çözümü

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V & X \\ X' & 0 \end{pmatrix}^{-} \begin{pmatrix} X \\ 0 \end{pmatrix} d$$

yani (3.1)'den

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & -C_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ 0 \end{pmatrix} d \tag{3.8}$$

olarak yazılır. Böylece (3.8)'den

$$a = C_1 X d \tag{3.9a}$$

$$b = C_3 X d \tag{3.9b}$$

bulunur. (3.7) denklem sisteminin herhangi bir d vektörü için sağlandığı kabul edildiğinden, (3.9a) ve (3.9b)'de bulunan çözümler (3.7) denklem sisteminde yerine yazılırsa

$$VC_1X + XC_3X = X \tag{3.10a}$$

$$X'C_1X = 0 \tag{3.10b}$$

elde edilir. (3.10a)'da, (3.6a) eşitliği kullanılırsa,

$$VC_1X = 0 \tag{3.11}$$

bulunur. (i)'ye göre C_1 ve C_1' yer değiştirebildiğinden, (3.11)

$$X'C_1V = 0 \tag{3.12}$$

olarak yazılabilir. Böylece (iv) ispat edilir.

Herhangi bir $d \in \mathbb{R}^{nx1}$ için

$$\begin{pmatrix} V & X \\ X' & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V \\ 0 \end{pmatrix} d$$

yani

$$\begin{aligned} Va + Xb &= Vd \\ X'a &= 0 \end{aligned} \tag{3.13}$$

lineer denklem sistemi ele alınsın. Bu denklem sisteminin bir çözümü

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V & X \\ X' & 0 \end{pmatrix}^{-} \begin{pmatrix} V \\ 0 \end{pmatrix} d$$

yani (3.1)'den

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & -C_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} V \\ 0 \end{pmatrix} d \tag{3.14}$$

olarak yazılır. Böylece (3.14)'ten

$$a = C_1 V d \tag{3.15a}$$

$$b = C_3 V d \tag{3.15b}$$

bulunur. (3.13) denklem sisteminin herhangi bir d vektörü için sağlandığı kabul edildiğinden, (3.15a) ve (3.15b)'de bulunan çözümler (3.13) denklem sisteminde yerine yazılırsa

$$VC_1V + XC_3V = V \tag{3.16a}$$

$$X'C_1V = 0 \tag{3.16b}$$

elde edilir. (3.16a) soldan VC_1 ile çarpılırsa ve (3.16b) kullanılırsa,

$$VC_1VC_1V + VC_1XC_3V = VC_1V$$

ve dolayısıyla

$$VC_1VC_1V = VC_1V \tag{3.17}$$

bulunur. (i)'ye göre C_1 ve C_1' yer değiştirebildiğinden

$$VC_1'VC_1'V = VC_1'V \tag{3.18}$$

olarak yazılabilir. Böylece VC_1V matrisinin simetrik olduğu görülür. Yani $VC_1V = VC_1'V$ dir. Buradan (3.16a), (3.17) ve (3.18)'den (v) ispatlanmış olur. □

3.3. 3x3 Blok Matrisin Genelleştirilmiş Tersi

Teorem 3.3.1. $V \in \mathbb{R}^{nxn}$ nonnegatif kararlı matris, $X_1 \in \mathbb{R}^{nxp_1}$, $X_2 \in \mathbb{R}^{nxp_2}$ ve D_0, D_1, D_2, E_1, E_2, F_1, F_2, F_3, F_4 matrisleri ise uygun boyutlu matrisler olmak üzere,

$$\begin{pmatrix} V & X_1 & X_2 \\ X_1' & 0 & 0 \\ X_2' & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-} = \begin{pmatrix} D_0 & D_1 & D_2 \\ E_1 & -F_1 & -F_2 \\ E_2 & -F_3 & -F_4 \end{pmatrix} \tag{3.19}$$

olsun. Bu durumda aşağıdakiler sağlanır.

(i) $\begin{pmatrix} V & X_1 & X_2 \\ X_1' & 0 & 0 \\ X_2' & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-} = \begin{pmatrix} D_0' & E_1' & E_2' \\ D_1' & -F_1' & -F_3' \\ D_2' & -F_2' & -F_4' \end{pmatrix}$ genelleştirilmiş tersin başka bir seçimidir.

(ii) $X_1 D_1' X_1 + X_1 D_2' X_2 = X_1 = X_1 E_1 X_1 + X_1 E_2 X_2$.

(iii) $X_2 D_1' X_1 + X_2 D_2' X_2 = X_2 = X_2 E_1 X_1 + X_2 E_2 X_2$.

(iv) $VD_0 X_1 = 0,\ X_1' D_0 X_1 = 0,\ X_2' D_0 X_1 = 0,\ VD_0' X_1 = 0,\ X_1' D_0' X_1 = 0,\ X_2' D_0' X_1 = 0.$

(v) $VD_0 X_2 = 0, X_1' D_0 X_2 = 0, X_2' D_0 X_2 = 0, VD_0' X_2 = 0, X_1' D_0' X_2 = 0, X_2' D_0' X_2 = 0.$

(vi) $VD_0 V + X_1 E_1 V + X_2 E_2 V = V = VD_0' V + X_1 D_1' V + X_2 D_2' V$.

İspat: $\begin{pmatrix} V & X_1 & X_2 \\ X_1' & 0 & 0 \\ X_2' & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-} = \begin{pmatrix} D_0 & D_1 & D_2 \\ E_1 & -F_1 & -F_2 \\ E_2 & -F_3 & -F_4 \end{pmatrix}$ olmak üzere her iki tarafın transpozu alınırsa, Teorem 2.4.10'dan ve V matrisinin simetrik olmasından

$$\begin{pmatrix} V & X_1 & X_2 \\ X_1' & 0 & 0 \\ X_2' & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-} = \begin{pmatrix} D_0' & E_1' & E_2' \\ D_1' & -F_1' & -F_3' \\ D_2' & -F_2' & -F_4' \end{pmatrix}$$

yani (i) elde edilir.

Teoremin kalan kısmının ispatı, Teorem 3.2.1'e benzer olarak Teorem 3.1.1 kullanılarak yapılacaktır.

Herhangi bir $d \in \mathbb{R}^{nx1}$ için

$$\begin{pmatrix} V & X_1 & X_2 \\ X_1' & 0 & 0 \\ X_2' & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ X_1' \\ X_2' \end{pmatrix} d$$

yani

$$
\begin{aligned}
&Va + X_1 b + X_2 c = 0 \\
&X_1' a = X_1' d \qquad\qquad (3.20) \\
&X_2' a = X_2' d
\end{aligned}
$$

lineer denklem sistemi ele alınsın. Bu denklem sistemi Teorem 2.5.7'ye göre tutarlıdır. Böylece Sonuç 2.5.4'ten bu denklem sisteminin bir çözümü

$$
\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V & X_1 & X_2 \\ X_1' & 0 & 0 \\ X_2' & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-} \begin{pmatrix} 0 \\ X_1' \\ X_2' \end{pmatrix} d
$$

yani (3.19)'dan

$$
\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_0 & D_1 & D_2 \\ E_1 & -F_1 & -F_2 \\ E_2 & -F_3 & -F_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ X_1' \\ X_2' \end{pmatrix} d \qquad (3.21)
$$

olarak yazılabilir. Böylece (3.21)'den

$$a = D_1 X_1' d + D_2 X_2' d \qquad (3.22a)$$

$$b = -F_1 X_1' d - F_2 X_2' d \qquad (3.22b)$$

$$c = -F_3 X_1' d - F_4 X_2' d \qquad (3.22c)$$

bulunur. (3.20) lineer denkleminin herhangi bir d vektörü için sağlandığı kabul edildiğinden, (3.22a-c)'de bulunan çözümler (3.20) denklem sisteminde yerine yazılırsa

$$VD_1 X_1' + VD_2 X_2' - X_1 F_1 X_1' - X_1 F_2 X_2' - X_2 F_3 X_1' - X_2 F_4 X_2' = 0 \qquad (3.23a)$$

$$X_1' D_1 X_1' + X_1' D_2 X_2' = X_1' \text{ yani } X_1 D_1' X_1 + X_1 D_2' X_2 = X_1 \qquad (3.23b)$$

$$X_2'D_1X_1' + X_2'D_2X_2' = X_2' \text{ yani } X_1D_1'X_2 + X_2D_2'X_2 = X_2 \tag{3.23c}$$

elde edilir. (i)'ye göre D_1 ve D_2 sırasıyla E_1' ve E_2' ile yer değiştirebildiğinden (3.23b) ve (3.23c)

$$X_1'E_1'X_1' + X_1'E_2'X_2' = X_1' \text{ yani } X_1E_1X_1 + X_1E_2X_2 = X_1 \tag{3.24a}$$

$$X_2'E_1'X_1' + X_2'E_2'X_2' = X_2' \text{ yani } X_2E_1X_1 + X_2E_2X_2 = X_2 \tag{3.24b}$$

olarak yazılabilir. Böylece (3.23a) ve (3.23b)'den (ii), (3.23c) ve (3.24b)'den (iii) elde edilir.

Herhangi bir $d \in \mathbb{R}^{p_1 x 1}$ için

$$\begin{pmatrix} V & X_1 & X_2 \\ X_1' & 0 & 0 \\ X_2' & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} d$$

yani

$$\begin{aligned} &Va + X_1b + X_2c = X_1d \\ &X_1'a = 0 \\ &X_2'a = 0 \end{aligned} \tag{3.25}$$

lineer denklem sistemi ele alınsın. Bu denklem sistemi Teorem 2.5.7'ye göre tutarlıdır. Böylece Sonuç 2.5.4'ten bu denklem sisteminin bir çözümü

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V & X_1 & X_2 \\ X_1' & 0 & 0 \\ X_2' & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-} \begin{pmatrix} X_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} d$$

yani (3.19)'dan

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_0 & D_1 & D_2 \\ E_1 & -F_1 & -F_2 \\ E_2 & -F_3 & -F_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} d \tag{3.26}$$

olarak yazılır. Böylece (3.26)'dan

$$a = D_0 X_1 d \tag{3.27a}$$

$$b = E_1 X_1 d \tag{3.27b}$$

$$c = E_2 X_1 d \tag{3.27c}$$

bulunur. (3.25) lineer denkleminin herhangi bir d vektörü için sağlandığı kabul edildiğinden, (3.27a-c)'de bulunan çözümler (3.25) denklem sisteminde yerine yazılırsa

$$VD_0 X_1 + X_1 E_1 X_1 + X_2 E_2 X_1 = X_1 \tag{3.28a}$$

$$X_1' D_0 X_1 = 0 \tag{3.28b}$$

$$X_2' D_0 X_1 = 0 \tag{3.28c}$$

elde edilir. (3.24)'te bulunan eşitlik (3.28)'de yerine yazılırsa,

$$VD_0 X_1 = 0 \tag{3.29}$$

bulunur. (i)'ye göre D_0, E_1 ve E_2 sırasıyla D_0', D_1' ve D_2' ile yer değiştirebildiğinden (3.28b), (3.28c) ve (3.29) sırasıyla

$$X_1' D_0' X_1 = 0 \tag{3.30a}$$

$$X_2' D_0' X_1 = 0 \tag{3.30b}$$

$$VD_0'X_1 = 0 \tag{3.30c}$$

olarak yazılabilir. Böylece (3.28b)-(3.30a)'da bulunan eşitliklerle (iv) elde edilir.

Herhangi bir $d \in \mathbb{R}^{p_2 x 1}$ için

$$\begin{pmatrix} V & X_1 & X_2 \\ X_1' & 0 & 0 \\ X_2' & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} d$$

yani

$$\begin{aligned} &Va + X_1 b + X_2 c = X_2 d \\ &X_1' a = 0 \\ &X_2' a = 0 \end{aligned} \tag{3.31}$$

lineer denklem sistemi ele alınsın. Bu denklem sistemi Teorem 2.5.7'ye göre tutarlıdır. Böylece Sonuç 2.5.4'ten bu denklem sisteminin bir çözümü

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V & X_1 & X_2 \\ X_1' & 0 & 0 \\ X_2' & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-} \begin{pmatrix} X_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} d$$

yani (3.19)'dan

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_0 & D_1 & D_2 \\ E_1 & -F_1 & -F_2 \\ E_2 & -F_3 & -F_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} d \tag{3.32}$$

olarak yazılabilir. Böylece (3.32)'den

$$a = D_0 X_2 d \qquad (3.33a)$$

$$b = E_1 X_2 d \qquad (3.33b)$$

$$c = E_2 X_2 d \qquad (3.33c)$$

bulunur. (3.31) lineer denkleminin herhangi bir d vektörü için sağlandığı kabul edildiğinden, (3.33a-c)'de bulunan çözümler (3.31) denklem sisteminde yerine yazılırsa

$$VD_0 X_2 + X_1 E_1 X_2 + X_2 E_2 X_2 = X_2 \qquad (3.34a)$$

$$X_1' D_0 X_2 = 0 \qquad (3.34b)$$

$$X_2' D_0 X_2 = 0 \qquad (3.34c)$$

elde edilir. (3.24b)'de bulunan eşitlik (3.34a)'da yerine yazılırsa,

$$VD_0 X_2 = 0 \qquad (3.35)$$

bulunur (i)'ye göre D_0, E_1 ve E_2 sırasıyla D_0', D_1' ve D_2' ile yer değiştirebildiğinden (3.34b), (3.34c) ve (3.35) sırasıyla

$$X_1' D_0' X_2 = 0 \qquad (3.36a)$$

$$X_2' D_0' X_2 = 0 \qquad (3.36b)$$

$$VD_0' X_2 = 0 \qquad (3.36c)$$

olarak yazılabilir. Böylece (3.34b)-(3.36c)'de bulunan eşitliklerle (v) elde edilir.

Herhangi bir $d \in \mathbb{R}^{nx1}$ için

$$\begin{pmatrix} V & X_1 & X_2 \\ X_1' & 0 & 0 \\ X_2' & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} d$$

yani

$$\begin{aligned} &Va + X_1 b + X_2 c = Vd \\ &X_1' a = 0 \\ &X_2' a = 0 \end{aligned} \tag{3.37}$$

lineer denklem sistemi ele alınsın. Bu denklem sistemi Teorem 2.5.7'ye göre tutarlıdır. Böylece Sonuç 2.5.4'ten bu denklem sisteminin bir çözümü

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V & X_1 & X_2 \\ X_1' & 0 & 0 \\ X_2' & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-} \begin{pmatrix} V \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} d$$

yani (3.19)'dan

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_0 & D_1 & D_2 \\ E_1 & -F_1 & -F_2 \\ E_2 & -F_3 & -F_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} V \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} d \tag{3.38}$$

olarak yazılır. Böylece (3.38)'den

$$a = D_0 V d \tag{3.39a}$$

$$b = E_1 V d \tag{3.39b}$$

$$c = E_2 V d \tag{3.39c}$$

bulunur. (3.37) lineer denkleminin herhangi bir d vektörü için sağlandığı kabul edildiğinden, (3.39a-c)'de bulunan çözümler (3.37) denklem sisteminde yerine yazılırsa

$$VD_0V + X_1E_1V + X_2E_2V = V \tag{3.40a}$$

$$X_1'D_0V = 0 \tag{3.40b}$$

$$X_2'D_0V = 0 \tag{3.40c}$$

bulunur. (i)'ye göre D_0, E_1 ve E_2 sırasıyla D_0', D_1' ve D_2' ile yer değiştirebildiğinden (3.40),

$$VD_0'V + X_1D_1'V + X_2D_2'V = V \tag{3.41}$$

olarak yazılabilir. Böylece (3.40) ile (3.41)'den (vi) elde edilir. □

Şimdi 4. bölümde ele alınacak parçalanmış bir lineer model altında alt parametrelerin tahmin edilebilir olması ile ilgili olan

$$\mathcal{C}(X_1) \cap \mathcal{C}(X_2) = \{0\} \tag{3.42}$$

ifadesinin sağlandığı kabul edilsin. (3.42) eşitliğinin sağlanmasının gerek ve yeter koşulu

$$r(X_1'Q_2) = r(X_1) = r(X_1') \tag{3.43}$$

olmasıdır [20]. (3.43)'deki eşitlik $\mathcal{C}(X_1') = \mathcal{C}(X_1'Q_2)$ olduğunu gösterir. Böylece

$$\mathcal{C}\begin{pmatrix} X_1' \\ 0 \end{pmatrix} \subset \mathcal{C}\begin{pmatrix} X_1' \\ X_2' \end{pmatrix} \tag{3.44}$$

ve

$$\mathcal{C}\begin{pmatrix} 0 \\ X_2' \end{pmatrix} \subset \mathcal{C}\begin{pmatrix} X_1' \\ X_2' \end{pmatrix} \tag{3.45}$$

olduğu görülür.

Teorem 3.3.1'de özel olarak (3.42) sağlandığında elde edilen eşitlikler aşağıdaki sonuçta verilmiştir.

Sonuç 3.3.2. $V \in \mathbb{R}^{nxn}$ nonnegatif kararlı matris ve $X_1 \in \mathbb{R}^{nxp_1}$, $X_2 \in \mathbb{R}^{nxp_1}$, D_0, D_1, D_2, E_1, E_2, F_1, F_2, F_3, F_4 matrisleri ise uygun boyutlu matrisler olmak üzere, (3.19) sağlansın ve $\mathcal{C}(X_1) \cap \mathcal{C}(X_2) = \{0\}$ olsun. Bu durumda

(i) $VD_1X_1' = X_1F_1X_1' + X_2F_3X_1'$, $VE_1'X_1' = X_1F_1'X_1' + X_2F_2'X_1'$,

(ii) $X_1D_1'X_1 = X_1 = X_1E_1X_1$, $X_1D_1'X_2 = 0 = X_1E_1X_2$,

(iii) $VD_2X_2' = X_1F_2X_2' + X_2F_4X_2'$, $VE_2'X_2' = X_1F_3'X_2' + X_2F_4'X_2'$,

(iv) $X_2D_2'X_2 = X_2 = X_2E_2X_2$ $X_2D_2'X_1 = 0 = X_2E_2X_1$

dir.

İspat: Teorem 3.3.1'in ispatında ele alınan denklem sistemlerine ek olarak (3.44) ve (3.45)'e göre Teorem 2.5.7'deki tutarlılık koşulları sağlandığından aşağıdaki denklem sistemleri göz önünde bulundurularak ispat yapılacaktır.

Herhangi bir $d \in \mathbb{R}^{nx1}$ için

$$\begin{pmatrix} V & X_1 & X_2 \\ X_1' & 0 & 0 \\ X_2' & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ X_1' \\ 0 \end{pmatrix} d$$

yani

$$\begin{aligned} & Va + X_1 b + X_2 c = 0 \\ & X_1' a = X_1' d \\ & X_2' a = 0 \end{aligned} \qquad (3.46)$$

lineer denklem sistemi ele alınsın. Bu denklem sisteminin bir çözümü

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V & X_1 & X_2 \\ X_1' & 0 & 0 \\ X_2' & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-} \begin{pmatrix} 0 \\ X_1' \\ 0 \end{pmatrix} d$$

yani (3.19)'dan

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_0 & D_1 & D_2 \\ E_1 & -F_1 & -F_2 \\ E_2 & -F_3 & -F_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ X_1' \\ 0 \end{pmatrix} d \qquad (3.47)$$

olarak yazılır. Böylece (3.47)'den

$$a = D_1 X_1' d \qquad (3.48a)$$

$$b = -F_1 X_1' d \qquad (3.48b)$$

$$c = -F_3 X_1' d \qquad (3.48c)$$

bulunur. (3.46) lineer denkleminin herhangi bir d vektörü için sağlandığı kabul edildiğinden, (3.48a-c)'de bulunan çözümler (3.46) denklem sisteminde yerine yazılırsa

$$VD_1X_1' - X_1F_1X_1' - X_2F_3X_1' = 0 \text{ yani } VD_1X_1' = X_1F_1X_1' + X_2F_3X_1' \tag{3.49a}$$

$$X_1'D_1X_1' = X_1' \text{ yani } X_1D_1'X_1 = X_1 \tag{3.49b}$$

$$X_2'D_1X_1' = 0 \text{ yani } X_1D_1'X_2 = 0 \tag{3.49c}$$

elde edilir. Teorem 3.3.1 (i)'ye göre D_1, F_1 ve F_3 sırasıyla E_1', F_1' ve F_2' ile yer değiştirebildiğinden (3.49a-c) sırasıyla

$$VE_1'X_1' - X_1F_1'X_1' - X_2F_2'X_1' = 0 \text{ yani } VE_1'X_1' = X_1F_1'X_1' + X_2F_2'X_1' \tag{3.50a}$$

$$X_1'E_1'X_1' = X_1' \text{ yani } X_1E_1X_1 = X_1 \tag{3.50b}$$

$$X_2'E_1'X_1' = 0 \text{ yani } X_2E_1X_1 = 0 \tag{3.50c}$$

olarak yazılabilir. Burada (3.49a) ve (3.50a)'dan (i), (3.49b), (3.49c), (3.50b) ve (3.50c)'den (ii) elde edilecektir.

Herhangi bir $d \in \mathbb{R}^{nx1}$ için

$$\begin{pmatrix} V & X_1 & X_2 \\ X_1' & 0 & 0 \\ X_2' & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ X_2' \end{pmatrix} d$$

yani

$$\begin{aligned} &Va + X_1b + X_2c = 0 \\ &X_1'a = 0 \\ &X_2'a = X_2'd \end{aligned} \tag{3.51}$$

lineer denklem sistemi ele alınsın. Bu denklem sisteminin bir çözümü

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V & X_1 & X_2 \\ X_1' & 0 & 0 \\ X_2' & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ X_2' \end{pmatrix} d$$

yani (3.19)'dan

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_0 & D_1 & D_2 \\ E_1 & -F_1 & -F_2 \\ E_2 & -F_3 & -F_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ X_2' \end{pmatrix} d \tag{3.52}$$

olarak yazılır. Böylece (3.52)'den

$$a = D_2 X_2' d \tag{3.53a}$$

$$b = -F_2 X_2' d \tag{3.53b}$$

$$c = -F_4 X_2' d \tag{3.53c}$$

bulunur. (3.51) lineer denkleminin herhangi bir d vektörü için sağlandığı kabul edildiğinden, (3.53a-c)'de bulunan çözümler (3.51) denklem sisteminde yerine yazılırsa

$$VD_2X_2' - X_1F_2X_2' - X_2F_4X_2' = 0 \text{ yani } VD_2X_2' = X_1F_2X_2' + X_2F_4X_2' \tag{3.54a}$$

$$X_1'D_2X_2' = 0 \text{ yani } X_1D_2'X_2 = 0 \tag{3.54b}$$

$$X_2'D_2X_2' = X_2' \text{ yani } X_2D_2'X_2 = X_2 \tag{3.54c}$$

elde edilir. Teorem 3.3.1 (i)'ye göre D_2, F_2 ve F_4 sırasıyla E_2', F_3' ve F_4' ile yer değiştirebildiğinden

$$VE_2'X_2' - X_1F_3'X_2' - X_2F_4'X_2' = 0 \text{ yani } VE_2'X_2' = X_1F_3'X_2' + X_2F_4'X_2' \tag{3.55a}$$

$$X_1'E_2'X_2' = 0 \text{ yani } X_1E_2X_2 = 0 \tag{3.55b}$$

$$X_2' E_2' X_2' = X_2' \text{ yani } X_2 E_2 X_2 = X_2 \tag{3.55c}$$

olarak yazılabilir. (3.54a) ve (3.55a)’dan (iii), (3.54b), (3.54c), (3.55b) ve (3.55c)’den (iv) elde edilir. □

BÖLÜM 4. LİNEER MODELLERDE TAHMİN

Genel olarak bir lineer model,

$$y = X\beta + \varepsilon \tag{4.1}$$

olarak ifade edilir. Burada $y \in \mathbb{R}^{nx1}$ gözlenebilir rasgele vektörü, $X \in \mathbb{R}^{nxp}$ model matrisini, $\beta \in \mathbb{R}^{px1}$ bilinmeyen parametreler vektörünü, $\varepsilon \in \mathbb{R}^{nx1}$ rasgele hata vektörünü temsil etmektedir. Bu modelde

$$E(\varepsilon) = 0 \;\; ve \;\; Cov(\varepsilon) = V$$

kabul edilmektedir. Burada $V \in \mathbb{R}^{nxn}$ bilinen nonnegatif kararlı varyans-kovaryans (dağılım) matrisidir. (4.1) modeli kısaca

$$\mathcal{M} = \{y, X\beta, V\} \tag{4.2}$$

olarak gösterilecektir.

$X_1 \in \mathbb{R}^{nxp_1}$ ve $X_2 \in \mathbb{R}^{nxp_2}$ ve $p = p_1 + p_2$ olmak üzere, $X = (X_1 : X_2)$ ve bu matrise karşılık gelecek şekilde parametreler vektörü $\beta = (\beta_1' : \beta_2')'$ alındığında $X\beta = X_1\beta_1 + X_2\beta_2$ olarak yazılabilir. Bu durumda (4.2)'de verilen $\mathcal{M}$ modeli bir parçalanmış lineer model olarak

$$\mathcal{M} = \{y, X_1\beta_1 + X_2\beta_2, V\} \tag{4.3}$$

biçiminde ifade edilir.

Çalışmada $P_x = XX^+ = X\left(X'X\right)^- X'$ matrisi $\mathcal{C}\left(X\right)$ üzerine dik izdüşüm matrisi olmak üzere $Q = \mathrm{I} - P_x$ matrisi $\mathcal{C}\left(X\right)^\perp$ üzerine dik izdüşüm matrisini gösterecektir. Özel olarak P_{X_i} yerine P_i ve $\mathrm{I} - P_i$ yerine Q_i gösterimleri kullanılacaktır, $i = 1, 2$.

4.1. Lineer Modellerde Tahmin Edilebilme

Genel olarak bir istatistikten bahsediliyorsa, buna tahmin edici ve eğer istatistik belirlenen bir değeri almışsa buna tahmin denir. θ bir parametre olmak üzere $E\left(T\right) = \theta$ ise, T istatistiğine θ parametresinin yansız tahmin edicisi, $E\left(T\right) \neq \theta$ ise T istatistiğine θ parametresinin yanlı tahmin edicisi denir. Yanlı ve yansız tahmin ediciler arasında seçim söz konusu olduğunda yansız tahmin edicinin seçilmesi doğaldır. Ancak iki yansız tahmin edici arasında seçim söz konusu olduğunda varyansı küçük olan tahmin edici tercih edilir.

$\mathcal{M}$ modelinde β parametre vektörünü tahmin etmenin değişik yöntemleri mevcuttur. Bu yöntemlerden en çok kullanılanlarından biri en küçük kareler tahmini (least square estimation-LSE) yöntemidir. Bu yöntemdeki düşünce, $X\beta$ vektörü için gözlenmiş y değerlerine mümkün olduğunca yakın olacak şekildeki tahminler için β vektörü bulmaktır. LSE metodu $\varepsilon = \left(\varepsilon_i\right)$ olmak üzere, $\sum \varepsilon_i^2$ ifadesinin β parametresine göre minimumlaştırılması işlemlerini içerir. β parametreler vektörünün $\mathcal{M}$ modeli altında alışılmış en küçük kareler tahmin edicisi (OLSE'si), $\left(y - X\beta\right)'\left(y - X\beta\right)$ ifadesinin β vektörüne göre minimumlaştırılmasıyla elde edilen ve normal denklemler olarak bilinen

$$X'X\beta = X'y$$

denklem sisteminin çözümüyle elde edilir.

Lineer modeller altında parametrelerin ve bu parametrelerin lineer fonksiyonlarının tahmin edicilerinin açık ifadelerini bilmek yararlıdır. Ancak çoğu zaman bu ifadeler tek değildir. Bir tahmin edicinin ifadesinin tek olması parametrenin tahmin edilebilir olması ile mümkündür.

4.1.1. $\mathcal{M}$ modeli altında $K\beta$ vektörünün tahmin edilebilmesi

Bir $K\beta$ parametrik fonksiyonlar vektörünün $\mathcal{M}$ modeli altında tahmin edilebilir olması için gerek ve yeter koşul

$$\mathcal{C}(K') \subseteq \mathcal{C}(X')$$

yani $K = FX$ olacak şekilde en az bir F matrisinin mevcut olmasıdır. Buradan açıkça görülmektedir ki $X\beta$, $\mathcal{M}$ modeli altında her zaman tahmin edilebilirdir [22].

4.1.2. $\mathcal{M}$ modeli altında $K_1\beta_1$ vektörünün tahmin edilebilmesi

$\mathcal{M}$ modeli altında $K_1\beta_1$ parametrik fonksiyonlar vektörünün tahmin edilebilir olmasının gerek ve yeter koşulu

$$\mathcal{C}(K_1) \subseteq \mathcal{C}(X_1Q_2)$$

yani $K_1 = FQ_2X_1$ olacak şekilde en az bir F matrisinin mevcut olmasıdır [4].

4.1.3. $\mathcal{M}$ modeli altında $X_1\beta_1$ vektörünün tahmin edilebilmesi

$X_1\beta_1$ vektörünün $\mathcal{M}$ modeli altında tahmin edilebilir olmasının gerek ve yeter koşulu

$$\mathcal{C}(X_1)\cap\mathcal{C}(X_2)=\{0\} \tag{4.4}$$

olmasıdır [20]. (4.4) koşulunun aynı zamanda $X_2\beta_2$ vektörünün tahmin edilebilmesi için gerek ve yeter koşul olduğu açıktır.

4.2. BLUE

Daha önce belirtildiği gibi, eğer her $\beta\in\mathbb{R}^{px1}$ için $E(Gy)=K\beta$ ise, Gy tahmin edicisi $K\beta$ için yansız tahmin edicidir. Eğer bu lineer yansız tahmin edici, diğer tüm yansız tahmin ediciler arasında Löwner sıralamasına göre en küçük kovaryans matrisine sahip ise en iyi lineer yansız tahmin edici (BLUE) olarak tanımlanır ve $Gy=BLUE(K\beta|\mathcal{M})$ ile gösterilir. Yani Gy, beklenen değeri $K\beta$ olacak şekildeki her By vektörü için

$$Cov(Gy)\leq_L Cov(By)$$

koşulunu sağlar [20].

Bu tanımın matrislerle ifadesi, aşağıdaki lemmada verilmektedir.

Lemma 4.2.1. $\mathcal{M}=\{y,X\beta,V\}$ modeli ele alınsın. Gy tahmin edicisi, $\mathcal{M}$ modeli altında $X\beta$ için BLUE’dur ancak ve ancak G matrisi

$$G(X:VQ)=(X:0) \tag{4.5}$$

denklemini sağlar [20]. Burada $Q=\mathrm{I}_n-P_x$ dik izdüşüm matrisidir.

(4.5)'te verilen denklem temel BLUE denklemi olarak bilinir. Bu denklem sistemi tek çözüme sahiptir ancak ve ancak $r(X:V)=n$ dir. Ayrıca Gy vektörünün gözlenmiş değerlerinin tek olmasının gerek ve yeter koşulu $\mathcal{M}$ modelinin tutarlı, yani

$$y\in\mathcal{C}(X:V)=\mathcal{C}(X:VQ) \tag{4.6}$$

olmasıdır [9]. Bu çalışmada $\mathcal{M}$ modeli tutarlı kabul edilmektedir.

(4.5)'te verilen ve temel BLUE denklemi olarak bilinen denklem aşağıdaki lemmada verilen formda da ifade edilebilir.

Lemma 4.2.2. $\mathcal{M}=\{y,X\beta,V\}$ lineer modeli ele alınsın. Gy tahmin edicisi, $\mathcal{M}$ modeli altında $X\beta$ için BLUE olur ancak ve ancak bir $L\in\mathbb{R}^{pxn}$ matrisi vardır öyle ki G matrisi

$$\begin{pmatrix} V & X \\ X' & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} G' \\ L \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ X' \end{pmatrix} \tag{4.7}$$

denklemi için bir çözümdür [7].

İspat: Lemma 4.2.1'e göre $Gy=BLUE(X\beta|\mathcal{M})$ olmasının gerek ve yeter koşulu (4.5) denkleminin sağlanmasıdır. $GVQ=0$ denklemi sağlanır ancak ve ancak

$\mathcal{C}(VG') \subseteq \mathcal{C}(X)$ olarak yazılır. Yani $VG' = -XL$ olacak şekilde bir L matrisi vardır. Bu ifade $GX = X$ ile birleştirilirse (4.7) elde edilir. □

(4.7)'de verilen denklem Pandora's Box denklemi olarak bilinir [7,8]. $\begin{pmatrix} V & X \\ X' & 0 \end{pmatrix}$ parçalanmış matrisinin genelleştirilmiş tersinin herhangi bir seçimine göre, (4.7) denkleminin bir çözümü

$$\begin{pmatrix} G' \\ L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V & X \\ X' & 0 \end{pmatrix}^{-} \begin{pmatrix} 0 \\ X' \end{pmatrix}$$

olarak yazılabilir. Bu yöntemi kullanarak, $X\beta$ için BLUE'yu elde etme işlemi parçalanmış matris tersi (inverse partitioned matrix-IPM) yöntemi olarak bilinir [7,8].

$K\beta$, $\mathcal{M}$ modeli altında tahmin edilebilir olmak üzere, $K\beta$ vektörünün temel BLUE denklemi Lemma 4.2.1'e benzer şekilde aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$Ay = BLUE(K\beta | \mathcal{M}) \Leftrightarrow A(X : VQ) = (K : 0) \tag{4.8}$$

Benzer şekilde $K\beta$ için BLUE denklemi Lemma 4.2.2'ye göre

$$\begin{pmatrix} V & X \\ X' & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A' \\ L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ K' \end{pmatrix}$$

olarak yazılabilir.

4.3. $X\beta$ Vektörünün BLUE'sunun IPM Yöntemiyle Bulunması

$C_1 \in \mathbb{R}^{nxn}$ ve $C_2 \in \mathbb{R}^{nxp}$ olmak üzere $\begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & -C_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V & X \\ X' & 0 \end{pmatrix}^{-}$ olsun. Aşağıdaki teoremde $X\beta$ vektörünün BLUE'su IPM yöntemiyle elde edilmektedir.

Teorem 4.3.1. $\mathcal{M} = \{y, X\beta, V\}$ modeli ele alınsın. Bu durumda

$$\begin{pmatrix} V & X \\ X' & 0 \end{pmatrix}^{-} = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & -C_4 \end{pmatrix}$$

olmak üzere,

$$BLUE\left(X\beta \middle| \mathcal{M}\right) = XC_2'y = XC_3y \tag{4.9}$$

dir.

İspat: (4.7) tutarlı denkleminin Teorem 2.5.2'ye göre genel çözümü herhangi bir $U = (U_1 : U_2)$ matrisi için

$$\begin{pmatrix} G' \\ L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & -C_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ X' \end{pmatrix} + \left[\mathrm{I} - \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & -C_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} V & X \\ X' & 0 \end{pmatrix}\right]U$$

olarak yazılır. Buradan

$$G = XC_2' + U_1'\left(\mathrm{I} - VC_1' - XC_2'\right) + U_2'\left(-X'C_1'\right)$$

elde edilir ve

$$Gy = XC_2'y + U_1'\left(\mathrm{I} - VC_1' - XC_2'\right)y + U_2'\left(-X'C_1'\right)y$$

yazılır.

Gy tahmin edicisinin gözlenmiş değerlerinin tek olmasının gerek ve yeter koşulu $\mathcal{M}$ modelinin tutarlı olmasıdır. Çalışmada $\mathcal{M}$ modeli tutarlı kabul edildiğinden yani (4.6) sağlandığından

$$U_1'\left(\mathrm{I} - VC_1' - XC_2'\right)y + U_2'\left(-X'C_1'\right)y = 0 \tag{4.10}$$

bulunur. Çünkü (4.6)'ya göre $y = XL_1 + VQL_2$ olacak şekilde L_1 ve L_2 matrisleri vardır. Bu ifade (4.10)'da yerine koyulursa Teorem 3.2.1'deki (ii)-(iv) şıklarına göre

$$\begin{aligned} U_1'\left(\mathrm{I} - VC_1' - XC_2'\right)y &= U_1'\left(\mathrm{I} - VC_1' - XC_2'\right)\left(XL_1 + VQL_2\right) \\ &= U_1'\left(X - VC_1'X - XC_2'X\right)L_1 + U_1'\left(VQ - VC_1'VQ - XC_2'VQ\right)L_2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} U_2'\left(-X'C_1'\right)y &= U_2'\left(-X'C_1'\right)\left(XL_1 + VQL_2\right) \\ &= U_2'\left(-X'C_1'X\right)L_1 + U_2'\left(-X'C_1'VQ\right)L_2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

bulunur. Böylece $\mathcal{M}$ modeli tutarlı olduğunda

$$Gy = XC_2'y$$

elde edilir. Yani $XC_2'y$ matrisinin $\mathcal{M}$ tutarlı modeli altında $X\beta$ vektörünün BLUE'su için bir gösterim olduğu görülür. $BLUE(X\beta|\mathcal{M}) = XC_2'y$ olarak yazılır. Teorem 3.2.1 (i)'ye göre C_2', C_3 ile yer değiştirebildiğinden

$$BLUE(X\beta|\mathcal{M}) = XC_3y$$

olduğu görülür. Böylece ispat tamamlanır. □

Teorem 4.3.2. $\mathcal{M} = \{y, X\beta, V\}$ modeli ele alınsın. $\mathcal{M}$ modeli altında $X\beta$ vektörünün BLUE' su (4.9)'da verildiği gibi olsun. Bu durumda

$$E\left[BLUE(X\beta|\mathcal{M})\right] = X\beta \text{ ve } Cov\left[BLUE(X\beta|\mathcal{M})\right] = XC_2'V = XC_4X'$$

dir.

İspat : Teorem 3.2.1 (ii)'ye göre

$$E\left[BLUE(X\beta|\mathcal{M})\right] = E(XC_2'y) = XC_2'E(y) = XC_2'X\beta = X\beta$$

olduğu görülür. Teorem 3.2.1 (i)-(iii) şıklarından

$$Cov\left[BLUE(X\beta|\mathcal{M})\right] = Cov(XC_2'y) = XC_2'VC_2X' = XC_2'XC_2'V = XC_2'V = XC_4X'$$

olarak bulunur. □

4.4. Alt Parametrelerin Tahmini

$X_1\beta_1$ vektörünün dolasıyla $X_2\beta_2$ vektörünün $\mathcal{M}$ modeli altında tahmin edilebilir olduğu kabul edilsin. Yani (4.4) sağlansın. (4.8)'de verilen

$$Gy = BLUE\left(K\beta|\mathcal{M}\right) \Leftrightarrow G\left(X : VQ\right) = \left(K : 0\right)$$

ifadesinde sırasıyla $K = \left(X_1 : 0\right)$ ve $K = \left(0 : X_2\right)$ olarak alınsın. Bu durumda $G_i y = BLUE\left(X_i\beta_i|\mathcal{M}\right)$, $i = 1, 2,$ olmasının gerek ve yeter koşulunun

$$\begin{pmatrix} G_1 \\ G_2 \end{pmatrix}\left(X_1 : X_2 : VQ\right) = \begin{pmatrix} X_1 & 0 & 0 \\ 0 & X_2 & 0 \end{pmatrix}$$

olduğu görülür. Bu denklemler Pandora's Box denklemi vasıtasıyla aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$G_1 y = BLUE\left(X_1\beta_1|\mathcal{M}\right) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} V & X_1 & X_2 \\ X_1' & 0 & 0 \\ X_2' & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} G_1' \\ L_1 \\ L_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ X_1' \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (4.11)$$

ve

$$G_2 y = BLUE\left(X_2\beta_2|\mathcal{M}\right) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} V & X_1 & X_2 \\ X_1' & 0 & 0 \\ X_2' & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} G_2' \\ L_3 \\ L_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ X_2' \end{pmatrix} \qquad (4.12)$$

olacak şekilde $L_1 \in \mathbb{R}^{p_1 xn}$, $L_2 \in \mathbb{R}^{p_2 xn}$, $L_3 \in \mathbb{R}^{p_1 xn}$ ve $L_4 \in \mathbb{R}^{p_2 xn}$ matrisleri vardır.

Şimdi $\mathcal{M}$ modeli altında alt parametrelerin BLUE'larının IPM yöntemiyle elde edilmesi ile ilgili aşağıdaki teorem verilecektir.

Teorem 4.4.1. $\mathcal{M}=\{y, X_1\beta_1+X_2\beta_2, V\}$ parçalanmış modeli ele alınsın. $X_1\beta_1$ ve $X_2\beta_2$ vektörlerinin $\mathcal{M}$ modeli altında tahmin edilebilir olduğu kabul edilsin. Yani (4.4) sağlansın.

$$\begin{pmatrix} V & X_1 & X_2 \\ X_1' & 0 & 0 \\ X_2' & 0 & 0 \end{pmatrix}^- = \begin{pmatrix} D_0 & D_1 & D_2 \\ E_1 & -F_1 & -F_2 \\ E_2 & -F_3 & -F_4 \end{pmatrix}$$

olmak üzere,

$$BLUE\left(X_1\beta_1 | \mathcal{M}\right)=X_1D_1'y=X_1E_1y \text{ ve } BLUE\left(X_2\beta_2 | \mathcal{M}\right)=X_2D_2'y=X_2E_2y \quad (4.13)$$

dir.

İspat: (4.11) tutarlı denkleminin Teorem 2.5.2'ye göre genel çözümü herhangi bir $U=\left(U_1 : U_2 : U_3\right)$ matrisi için

$$\begin{pmatrix} G_1' \\ L_1 \\ L_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_0 & D_1 & D_2 \\ E_1 & -F_1 & -F_2 \\ E_2 & -F_3 & -F_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ X_1' \\ 0 \end{pmatrix} + \left[\mathrm{I} - \begin{pmatrix} D_0 & D_1 & D_2 \\ E_1 & -F_1 & -F_2 \\ E_2 & -F_3 & -F_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V & X_1 & X_2 \\ X_1' & 0 & 0 \\ X_2' & 0 & 0 \end{pmatrix} \right] U$$

olarak yazılır. Buradan

$$G_1 = X_1D_1' + U_1'\left(\mathrm{I}-VD_0'-X_1D_1'-X_2D_2'\right)+U_2'\left(-X_1'D_0\right)+U_3'\left(-X_2'D_0'\right)$$

elde edilir ve

$$G_1y = X_1D_1'y + U_1'\left(\mathrm{I} - VD_0' - X_1D_1' - X_2D_2'\right)y + U_2'\left(-X_1'D_0\right) + U_3'\left(-X_2'D_0'\right)y$$

olur.

G_1y tahmin edicisinin gözlenmiş değerlerinin tek olmasının gerek ve yeter koşulu $\mathcal{M}$ modelinin tutarlı olması yani (4.6)'nın sağlanmasıdır. Böylece

$$U_1'\left(\mathrm{I} - VD_0' - X_1D_1' - X_2D_2'\right)y + U_2'\left(-X_1'D_0\right)y + U_3'\left(-X_2'D_0'\right)y = 0 \tag{4.14}$$

olur. Çünkü (4.6)'ya göre $y = X_1L_1 + X_2L_2 + VQL_3$ olacak şekilde L_1, L_2 ,ve L_3 matrisleri vardır. Bu ifade (4.14)'te yerine yazılırsa, Teorem 3.3.1'deki (iv)-(vi) ve Sonuç 3.3.2'deki (ii) ve (iv) şıklarına göre

$$\begin{aligned} U_1'\left(\mathrm{I} - VD_0' - X_1D_1' - X_2D_2'\right)y &= U_1'\left(\mathrm{I} - VD_0' - X_1D_1' - X_2D_2'\right)\left(X_1L_1 + X_2L_2 + VQL_3\right) \\ &= U_1'\left(X_1 - VD_0'X_1 - X_1D_1'X_1 - X_2D_2'X_1\right)L_1 \\ &\quad + U_1'\left(X_2 - VD_0'X_2 - X_1D_1'X_2 - X_2D_2'X_2\right)L_2 \\ &\quad + U_1\left(VQ - VD_0'VQ - X_1D_1'VQ - X_2D_2'VQ\right)L_3 \\ &= 0\,, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_2'\left(-X_1'D_0\right)y &= U_2'\left(-X_1'D_0\right)\left(X_1L_1 + X_2L_2 + VQL_3\right) \\ &= U_2'\left(-X_1'D_0X_1\right)L_1 + U_2'\left(-X_1'D_0X_2\right)L_2 + U_2\left(-X_1'D_0VQ\right)L_3 \\ &= 0 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} U_3'\left(-X_2'D_0\right)y &= U_3'\left(-X_2'D_0\right)\left(X_1L_1 + X_2L_2 + VQL_3\right) \\ &= U_3'\left(-X_2'D_0X_1\right)L_1 + U_3'\left(-X_2'D_0X_2\right)L_2 + U_3\left(-X_2'D_0VQ\right)L_3 \\ &= 0 \end{aligned}$$

bulunur. Böylece $\mathcal{M}$ modeli tutarlı olduğunda

$$G_1y = X_1D_1'y$$

elde edilir. Yani $X_1D_1'y$ matrisinin $\mathcal{M}$ tutarlı modeli altında $X_1\beta_1$ vektörünün BLUE'su için bir gösterim olduğu görülür. $BLUE\left(X_1\beta_1|\mathcal{M}\right) = X_1D_1'y$ olarak yazılır. Teorem 3.3.1 (i)'den D_1' ve E_1 yer değiştirebildiğinden

$$BLUE\left(X_1\beta_1|\mathcal{M}\right) = X_1E_1y$$

olduğu görülür.

Benzer şekilde, $\mathcal{M}$ tutarlı modeli altında (4.12) tutarlı denkleminin Teorem 2.5.2'ye göre genel çözümü herhangi bir $U = \left(U_1 : U_2 : U_3\right)$ matrisi için

$$\begin{pmatrix} G_2' \\ L_1 \\ L_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_0 & D_1 & D_2 \\ E_1 & -F_1 & -F_2 \\ E_2 & -F_3 & -F_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ X_2' \end{pmatrix} + \left[\mathrm{I} - \begin{pmatrix} D_0 & D_1 & D_2 \\ E_1 & -F_1 & -F_2 \\ E_2 & -F_3 & -F_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} V & X_1 & X_2 \\ X_1' & 0 & 0 \\ X_2' & 0 & 0 \end{pmatrix}\right]U$$

dir. Teorem 3.3.1 ve Sonuç 3.3.2'den $G_2' = D_2X_2'$ ve dolayısıyla $G_2y = X_2D_2'y$ elde edilir. Ayrıca Teorem 3.3.1 (i)'den $G_2y = X_2E_2y$ olarak da yazılır. Böylece $\mathcal{M}$ tutarlı modeli altında

$$BLUE\left(X_2\beta_2|\mathcal{M}\right)=X_2D_2'y=X_2E_2y$$

olduğu görülür. □

$\mathcal{M}$ modeli altında alt parametrelerin beklenen değerleri ve kovaryansları ile ilgili sonuçlar aşağıda verilmiştir.

Teorem 4.4.2. $\mathcal{M}=\{y,X\beta,V\}$ modeli ele alınsın. $X_1\beta_1$ ve $X_2\beta_2$ vektörlerinin, $\mathcal{M}$ modeli altında tahmin edilebilir olduğu kabul edilsin. $X_1\beta_1$ ve $X_2\beta_2$ vektörlerinin BLUE'ları (4.13)'te verildiği gibi olsun. Bu durumda

(i) $E\left[BLUE\left(X_1\beta_1|\mathcal{M}\right)\right]=X_1\beta_1$ ve $E\left[BLUE\left(X_2\beta_2|\mathcal{M}\right)\right]=X_2\beta_2$,

(ii) $E\left[BLUE\left(X_1\beta_1|\mathcal{M}\right)+BLUE\left(X_2\beta_2|\mathcal{M}\right)\right]=X\beta$,

(iii) $Cov\left[BLUE\left(X_1\beta_1|\mathcal{M}\right)\right]=X_1F_1X_1'$ ve $Cov\left[BLUE\left(X_2\beta_2|\mathcal{M}\right)\right]=X_2F_4X_2'$,

(iv) $Cov\left[BLUE\left(X_1\beta_1|\mathcal{M}\right),BLUE\left(X_2\beta_2|\mathcal{M}\right)\right]=X_1F_2X_2'=X_1F_3'X_2'$,

(v) $Cov\left[BLUE\left(X_1\beta_1|\mathcal{M}\right)+BLUE\left(X_2\beta_2|\mathcal{M}\right)\right]=X_1F_1X_1'+X_2F_4X_2'+X_1F_2X_2'$
$+X_2F_3X_1'$

dir.

İspat: Sonuç 3.3.2 (ii)'ye göre

$$E\left[BLUE\left(X_1\beta_1|\mathcal{M}\right)\right]=E\left(X_1D_1'y\right)=X_1D_1'X\beta=X_1D_1'\left(X_1\beta_1+X_2\beta_2\right)=X_1\beta_1$$

bulunur. Benzer şekilde Sonuç 3.3.2 (iv)'ye göre

$$E\left[BLUE\left(X_2\beta_2|\mathcal{M}\right)\right]=E\left(X_2D_2'y\right)=X_2\beta_2$$

dir. Böylece (i) elde edilir.

Sonuç 2.7.3 ve (i)'den

$$\begin{aligned}E\left[BLUE\left(X_1\beta_1|\mathcal{M}\right)+BLUE\left(X_2\beta_2|\mathcal{M}\right)\right]&=E\left(X_1D_1'y\right)+E\left(X_2D_2'y\right)\\&=X_1\beta_1+X_2\beta_2\\&=X\beta\end{aligned}$$

bulunur yani (ii) elde edilir.

Sonuç 3.2.2'den

$$\begin{aligned}Cov\left[BLUE\left(X_1\beta_1|\mathcal{M}\right)\right]&=Cov\left(X_1D_1'y\right)\\&=X_1D_1'VD_1X_1'\\&=X_1D_1'\left(X_1F_1X_1'+X_2F_3X_1'\right)\\&=X_1F_1X_1'\end{aligned}$$

bulunur. Benzer şekilde

$$\begin{aligned}Cov\left[BLUE\left(X_2\beta_2|\mathcal{M}\right)\right]&=Cov\left(X_2D_2'y\right)\\&=X_2D_2'VD_2X_2'\\&=X_2D_2'\left(X_1F_2X_2'+X_2F_4X_2'\right)\\&=X_2F_4X_2'\end{aligned}$$

dir. Böylece (iii) gösterilmiş olur.

Sonuç 3.3.2 (ii) ve (iii)'den

$$\begin{aligned} Cov\left[BLUE\left(X_1\beta_1 | \mathcal{M}\right), BLUE\left(X_2\beta_2 | \mathcal{M}\right)\right] &= Cov\left(X_1D_1'y, X_2D_2'y\right) \\ &= X_1D_1'VD_2X_2' \\ &= X_1D_1'\left(X_1F_2X_2' + X_2F_4X_1'\right) \\ &= X_1F_2X_2' \end{aligned}$$

elde edilir. Teorem 3.3.1 (i)'ye göre bu ifade $X_1F_3'X_2'$ matrisine eşit olur. Böylece (iv) elde edilir.

(iii), (iv) ve Sonuç 3.3.2 (iv)'den

$$\begin{aligned} Cov\left[BLUE\left(X_1\beta_1 | \mathcal{M}\right) + BLUE\left(X_2\beta_2 | \mathcal{M}\right)\right] &= Cov\left(X_1D_1'y\right) + Cov\left(X_2D_2'y\right) \\ &\quad + Cov\left(X_1D_1'y, X_2D_2'y\right) \\ &\quad + Cov\left(X_2D_2'y, X_1D_1'y\right) \\ &= X_1F_1X_1' + X_2F_4X_2' + X_1F_2X_2' + X_2F_3X_1' \end{aligned}$$

bulunur. Böylece (v) ispatlanmış olur. □

Teorem 4.4.3. $\mathcal{M} = \{y, X_1\beta_1 + X_2\beta_2, V\}$ modeli ele alınsın. $X_1\beta_1$ ve $X_2\beta_2$ tahmin edilebilir olsun. $X_1\beta_1$ ve $X_2\beta_2$ nin $\mathcal{M}$ modeli altında BLUE'larının toplamlarının tüm gösterimlerinin kümesi yani $\left\{BLUE\left(X_1\beta_1 | \mathcal{M}\right) + BLUE\left(X_2\beta_2 | \mathcal{M}\right)\right\}$, $\mathcal{M}$ modeli altında $X\beta$ için daima BLUE' dur.

İspat: (3.19)'da verilen parçalanmış matris ve herhangi bir genelleştirilmiş tersi için

$$BLUE\left(X_1\beta_1 | \mathcal{M}\right) + BLUE\left(X_2\beta_2 | \mathcal{M}\right) = \left(X_1D_1' + X_2D_2'\right)y \tag{4.15}$$

olarak ifade edilebilir. Lemma 4.2.1'e göre $\left(X_1D_1'+X_2D_2'\right)y$ vektörünün $\mathcal{M}$ modeli altında $X\beta$ için BLUE olmasının gerek ve yeter şartı (4.5)'te verilen temel BLUE denklemini sağlamasıdır. Sonuç 3.3.2 (ii) ve (iv) göre

$$\begin{aligned}\left(X_1D_1'+X_2D_2'\right)\left(X_1:X_2\right)&=\left(X_1D_1'X_1+X_2D_2'X_1:X_1D_1'X_2+X_2D_2'X_2\right)\\&=\left(X_1:X_2\right)\end{aligned} \tag{4.16}$$

ve

$$\begin{aligned}\left(X_1D_1'+X_2D_2'\right)VQ&=X_1D_1'VQ+X_2D_2'VQ\\&=\left(X_1F_1'X_1'+X_1F_3'X_2'\right)Q+\left(X_2F_2'X_1'+X_2F_4'X_2'\right)Q\\&=\left(X_1F_1':X_1F_3'\right)\begin{pmatrix}X_1'\\X_2'\end{pmatrix}Q+\left(X_2F_2':X_2F_4'\right)\begin{pmatrix}X_1'\\X_2'\end{pmatrix}Q\\&=0\end{aligned} \tag{4.17}$$

bulunur. Burada Q, $\mathcal{C}\left(X\right)^{\perp}$ üzerine dik izdüşüm matrisi olduğundan $X'Q=0$ olduğu kullanılmıştır. Yani $\left(X_1D_1'+X_2D_2'\right)y$, $\mathcal{M}$ tutarlı modeli altında $X\beta$ vektörünün BLUE'sudur. (3.19)'daki genelleştirilmiş tersin herhangi bir seçimine göre (4.16) ve (4.17) sağlandığından $\left\{BLUE\left(X_1\beta_1|\mathcal{M}\right)+BLUE\left(X_2\beta_2|\mathcal{M}\right)\right\}$ toplamı $\mathcal{M}$ modeli altında $X\beta$ için daima BLUE'dur. □

BÖLÜM 5. UYGULAMA

Bu bölümde, Teorem 4.4.1'de elde edilen sonuçların bir uygulaması verilmiştir. Örnekte kullanılan veriler [23] kaynağından alınmıştır. Hesaplamalarda Matlab Paket Programı kullanılmıştır.

Tablo 5.1. Bitki amonyak oksitlenmesindeki kütle kaybı

Durum	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4
1	80	27	58.9	4.2
2	80	27	58.8	3.7
3	75	25	59.0	3.7
4	62	24	58.7	2.8
5	62	22	58.7	1.8
6	62	23	58.7	1.8
7	62	24	59.3	1.9
8	62	24	59.3	2.0
9	58	23	58.7	1.5
10	58	18	58.0	1.4
11	58	18	58.9	1.4
12	58	17	58.8	1.3
13	58	18	58.2	1.1
14	58	19	58.3	1.2
15	50	18	58.9	0.8
16	50	18	58.6	0.7
17	50	19	57.2	0.8
18	50	19	57.9	0.8
19	50	20	58.0	0.9
20	56	20	58.2	1.5
21	70	20	59.1	1.5

Örnek 5.1. Tablo 5.1'de bir bitkinin amonyak oksitlenmesindeki kütle kaybına ilişkin veriler verilmektedir. Bu veriler için alt parametrelerin BLUE'ları IPM yöntemi kullanılarak hesaplanacaktır.

Veriler için $M = \{y, X_1\beta_1 + X_2\beta_2, V\}$ parçalanmış modeli ele alınsın. Burada $X_1 = (Y_1 : Y_2) \in \mathbb{R}^{21x2}$, $X_2 = (Y_3 : Y_4) \in \mathbb{R}^{21x2}$ ve $V = \mathrm{I} \in \mathbb{R}^{21x21}$ olarak ele alınmaktadır. (3.19)'daki eşitliğe göre, Matlab Programı yardımıyla

$$D_1 = \begin{bmatrix} -0.0031 & -0.0160 \\ 0.0163 & 0.0209 \\ -0.0086 & -0.0333 \\ -0.0293 & -0.0090 \\ 0.0057 & 0.0184 \\ 0.0073 & 0.0408 \\ 0.0028 & 0.0514 \\ -0.0010 & 0.0442 \\ 0.0020 & 0.0561 \\ 0.0005 & -0.0434 \\ -0.0029 & -0.0501 \\ -0.0002 & -0.0646 \\ 0.0112 & -0.0232 \\ 0.0086 & -0.0088 \\ -0.0135 & -0.0194 \\ -0.0086 & -0.0100 \\ -0.0056 & 0.0157 \\ -0.0082 & 0.0105 \\ -0.0108 & 0.0249 \\ -0.0093 & -0.0104 \\ 0.0461 & 0.0048 \end{bmatrix}$$

ve

$$D_2 = \begin{bmatrix} 0.0042 & 0.1869 \\ -0.0208 & -0.0924 \\ 0.0141 & 0.2523 \\ 0.0249 & 0.3115 \\ -0.0089 & -0.0931 \\ -0.0165 & -0.1652 \\ -0.0160 & -0.1531 \\ -0.0111 & -0.0983 \\ -0.0161 & -0.1774 \\ 0.0131 & 0.0941 \\ 0.0177 & 0.1381 \\ 0.0198 & 0.1505 \\ -0.0006 & -0.0608 \\ -0.0027 & -0.0731 \\ 0.0184 & 0.1139 \\ 0.0120 & 0.0443 \\ 0.0021 & -0.0414 \\ 0.0057 & -0.0072 \\ 0.0036 & -0.0195 \\ 0.0114 & 0.0908 \\ -0.0365 & -0.3990 \end{bmatrix}$$

olarak hesaplanır. Böylece Teorem 4.4.1'e göre $BLUE\left(X_1\beta_1 \middle| M\right) = X_1 D_1' y$ ve $BLUE\left(X_2\beta_2 \middle| M\right) = X_2 D_2' y$ hesaplanan verilerin yerine yazılmasıyla elde edilir.

BÖLÜM 6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada $\mathcal{M} = \{y, X\beta, V\}$ genel lineer modeli ve bu modelin parçalanmış formu $\mathcal{M} = \{y, X_1\beta_1 + X_2\beta_2, V\}$ ele alındı. Bu modeller altında $X\beta$ parametreler vektörü ve bu vektörün alt parametreleri olan $X_1\beta_1$ ve $X_2\beta_2$ vektörlerinin BLUE'ları IPM yöntemi kullanılarak elde edildi.

Bölüm 3'te, $V \in \mathbb{R}^{nxn}$ nonnegatif kararlı matris olmak üzere $2x2$ boyutlu blok parçalanmış matrislerin özel olarak $\begin{pmatrix} V & X \\ X' & 0 \end{pmatrix}$ formu ele alındı. Bu simetrik blok parçalanmış matrisin bir genelleştirilmiş tersi $\begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & -C_4 \end{pmatrix}$ olmak üzere C_i, $i = 1, 2, 3, 4$ alt matrisleriyle ilgili bazı sonuçlar verildi. Daha sonra $\begin{pmatrix} V & X_1 & X_2 \\ X_1' & 0 & 0 \\ X_2' & 0 & 0 \end{pmatrix}$ formundaki $3x3$ boyutlu simetrik blok parçalanmış matris ele alındı. Bu matrisin bir genelleştirilmiş tersi $\begin{pmatrix} D_0 & D_1 & D_2 \\ E_1 & -F_1 & -F_2 \\ E_2 & -F_3 & -F_4 \end{pmatrix}$ olmak üzere D_0, D_1, D_2, E_1, E_2, F_1, F_2, F_3, F_4 alt matrisleriyle ilgili bazı sonuçlar elde edildi. Özel olarak $\mathcal{C}(X_1) \cap \mathcal{C}(X_2) = \{0\}$ koşulu altında $3x3$ boyutlu simetrik blok parçalanmış matrisin bir genelleştirilmiş terslerindeki alt matrislerle ilişkili ek sonuçlar verildi.

Bölüm 4'te, $E(\varepsilon)=0$ ve $Cov(\varepsilon)=V$ olmak üzere $\mathcal{M}=\{y, X\beta, V\}$ modeli ve bu modelin parçalanmış formu $\mathcal{M}=\{y, X_1\beta_1+X_2\beta_2, V\}$ modeli ele alındı. Temel BLUE denklemi olarak bilinen $G(X:VQ)=(X:0)$ denkleminin

$$\begin{pmatrix} V & X \\ X' & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} G' \\ L \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ X' \end{pmatrix} \tag{6.1}$$

formda da ifade edilebileceği gösterildi. $\begin{pmatrix} V & X \\ X' & 0 \end{pmatrix}$ matrisinin bir genelleştirilmiş tersi $\begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & -C_4 \end{pmatrix}$ olmak üzere, (6.1) denklemin genel çözümünün

$$\begin{pmatrix} G' \\ L \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & -C_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ X' \end{pmatrix}+\left[\mathrm{I}-\begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & -C_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} V & X \\ X' & 0 \end{pmatrix}\right]U \tag{6.2}$$

olduğu ifade edildi. $X\beta$ vektörünün BLUE'su için kullanılan IPM yöntemi olarak bilinen bu yöntem ayrıntılı olarak tanıtıldı. Böylece $\mathcal{M}$ tutarlı modeli altında $X\beta$ vektörünün BLUE'su IPM yöntemi kullanılarak bulundu ve BLUE ile ilgili bazı özellikler elde edildi. Bu yöntem ve benzer sonuçlar $\begin{pmatrix} V & X_1 & X_2 \\ X_1' & 0 & 0 \\ X_2' & 0 & 0 \end{pmatrix}$ matrisinin bir genelleştirilmiş tersi $\begin{pmatrix} D_0 & D_1 & D_2 \\ E_1 & -F_1 & -F_2 \\ E_2 & -F_3 & -F_4 \end{pmatrix}$ ele alınarak $X_1\beta_1$ ve $X_2\beta_2$ alt parametreleri için elde edildi. Son olarak alt parametrelerin BLUE'larının toplamlarının tüm gösterimlerinin kümesinin yani $\left\{BLUE(X_1\beta_1|\mathcal{M})+BLUE(X_2\beta_2|\mathcal{M})\right\}$ toplamının $\mathcal{M}$ tutarlı modeli altında $X\beta$ için daima BLUE olduğu ispatlandı.

Bölüm 5'te, dördüncü bölümde $X_1\beta_1$ ve $X_2\beta_2$ alt parametrelerinin BLUE'larının IPM yöntemiyle elde edilmesi ile ilgili verilen teorik sonuç için bir uygulama verildi.

Bu çalışmada ele alınan konu *kxk* boyutlu blok parçalanmış matrislere genelleştirilerek $X_1\beta_1,\ldots,X_k\beta_k$ alt parametrelerinin BLUE'ları için ele alınabilir ve genel sonuçlar elde edilebilir. Daha genel durum olarak, $K_1\beta_1,\ldots,K_k\beta_k$ tahmin edilebilir parametrik fonksiyonlar vektörlerinin BLUE'ları için IPM yöntemi kullanılarak benzer sonuçlar elde edilebilir.

KAYNAKLAR

[1] ÖZTÜRK, F., Olasılık ve istatistiğe giriş II., Ankara, 2011.

[2] NURHANEN, M., PUNTANEN, S., Effect of deleting an observation on the equality of the OLSE and BLUE. Linear Algebra and its Applications, 176, 131-136, 1992.

[3] BHIMASANKARAM, P., SAHARAY, R., On a partitioned linear model and some associated reduced models. Linear Algebra and its Applications, 264, 329-339, 1997.

[4] GROSS, J., PUNTANEN, S., Estimation under a general partitioned linear model. Linear Algebra and its Applications, 321, 131-144, 2000.

[5] RAO, C. R. ,Least squares theory using an estimated dispersion matrix and its aplication to measurement of signals. In: Le Cam, L. M., Neyman, J., eds. Proc. Fifth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability: Berkeley, California, 1965/1966. Univ. Of California Press, Berkeley, 355-372, 1967.

[6] ZYSKIND, G., On canonical forms, non-negative covariance matrices and best and simple least squares linear estimators in linear models. The Annals of Mathematical Statistics, 38, 1092-1109, 1967.

[7] RAO, C. R., Unified theory of linear estimation. *Sankhyā, Ser*. A 33: 371-394, 1971. [Corrigendum (1972), 34, 194 and 477.]

[8] RAO, C. R., A note on the IPM method in the unified theory of linear estimation. *Sankhyā, Ser.* A 34: 285-288, 1972.

[9] RAO, C. R., Representations of best linear unbiased estimators in the Gauss-Markoff model with a singular dispersion matrix. Journal of Multivariate Analysis, 3, 276-292, 1973.

[10] HALL, F. J., MEYER, C. D., Generalized inverses of the fundamental bordered matrix used in linear estimation. *Sankhyā, Ser.* A 37: 428-438, 1975. [Corrigendum (1978), 40, 399.]

[11] WERNER, H. J., RAO, C. R., Rao' s IPM method: a geometric approach. New Perspectives in Theoretical and Applied Statistics (M. L. Puri, J. P. Vilaplana & W. Wertz, eds.). Wiley, New York, 367-382, 1987.

[12] BAKSALARY, J. K., PORDZIK, P. R., Inverse-Partitioned-Matrix method for the general Gauss-Markov model with linear restrictions. Journal of Statistical Planning and Inference, 23, 133-143, 1989.

[13] HARVILLE, D. A., Matrix algebra from a statiscians perspective, Springer, 1997.

[14] MAGNUS, J. R., NEUDECKER, H., Matrix differential calculus with applications in statistics and econometrics, John Wiley, G.Britain, 1988.

[15] VENIT, S., BISHOP, W., Elementary linear algebra, PWS publishers, Massachusetts, 1985.

[16] SENGUPTA, D., JAMMALAMADAKA, S. R., Linear models an integrated approach, World Scientific, Singapore, 2003.

[17] GRAYBILL, F. A., Introduction to matrices with applications in statistics, Wadworth Publising Company inc., California, 1969.

[18] SEBER, G. A. F., Linear regression analysis, John Wiley, New York, 1977.

[19] SEBER, G. A. F., A matrix handbook for statisticians, John Wiley & Sons, Inc., New Jersey, 2008.

[20] PUNTANEN, S., STYAN, G.P.H., ISOTALO, J., Matrix tricks for linear statistical models, Our Personal Top Twenty, Springer, Heidelberg, 2011.

[21] BEN-ISRAEL, A., GREVİLLE, T. N. E., Generalized Inverses Theory and Applications, Springer-Verlang, New York, 2002.

[22] ALALOUF, I. S., STYAN, G. P. H., Characterizations of estimability in the general linear model. The Annals of Statistics, 7, 194-200, 1979.

[23] BROWLEE, K. A., Statistical theory and methodology in science and engineering, second edition, Wiley, London, 1965.

ÖZGEÇMİŞ

Melek ERİŞ, 25.05.1992 tarihinde Karabük'te doğdu. İlk ve orta öğrenimini İstanbul Avcılar'da tamamladı. 2005 yılında Fatih'te başladığı lise öğrenimini 2009 yılında tamamladı. Aynı yılın sonunda Sakarya Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'ne girdi ve 2013 yılında mezun oldu. 2013 yılı güz döneminde Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik EABD'de yüksek lisans eğitimine başladı. Halen aynı üniversitede yüksek lisans öğrenimine devam etmektedir.