T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BAZI MATRİS EŞİTSİZLİKLERİNİN ÇÖZÜMLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Zahra ABDULLAYEVA

Enstitü Anabilim Dalı	**:**	**MATEMATİK**
Bilim Dalı	**:**	**UYGULAMALI MATEMATİK**
Tez Danışmanı	**:**	**Yrd. Doç. Dr. Murat SARDUVAN**

Nisan 2016

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BAZI MATRİS EŞİTSİZLİKLERİNİN ÇÖZÜMLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Zahra ABDULLAYEVA

Enstitü Anabilim Dalı	:	MATEMATİK
Bilim Dalı	:	UYGULAMALI MATEMATİK
Danışman	:	Yrd. Doç. Dr. Murat SARDUVAN

Bu tez 14 / 04 / 2016 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği / oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

Yrd. Doç. Dr. Murat SARDUVAN Jüri Başkanı	Doç. Dr. Hakan YAKUT Üye	Yrd. Doç. Dr. Önder Gökmen YILDIZ Üye

BEYAN

Tez içindeki tüm verilerin akademik kurallar çerçevesinde tarafımdan elde edildiğini, görsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçların akademik ve etik kurallara uygun şekilde sunulduğunu, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezde yer alan verilerin bu üniversite veya başka bir üniversitede herhangi bir tez çalışmasında kullanılmadığını beyan ederim.

Zahra ABDULLAYEVA
14.04.2016

TEŞEKKÜR

Tez çalışmasının seçiminde, yürütülmesinde ve sonuçlandırılmasında destek ve yardımlarını esirgemeyen değerli hocam sayın Yrd. Doç. Dr. Murat SARDUVAN'a teşekkür ederim. Ayrıca yüksek lisansa başladığım andan bu yana zor zamanlarımda desteklerini ve bilgi birikimlerini esirgemeyen bölüm hocalarıma öncelikle Prof. Dr. Halim ÖZDEMİR, Doç. Dr. Şevket GÜR ve Arş. Gör. Tuğba PETİK'e teşekkür etmeği borç bilirim.

Her konuda her zaman sabırla yardımcı olan aileme desteklerinden dolayı sonsuz teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

$\in$	: Elemanıdır
$\subset$	: Altküme
$\forall$	: Her
$\mathbb{R}^n$	: $n \times 1$ boyutlu reel elemanlı vektörlerin kümesi
$\mathbb{R}^{m \times n}$	: $m \times n$ boyutlu reel elemanlı matrislerin kümesi
$S\mathbb{R}^{n \times n}$	: $n \times n$ boyutlu reel elemanlı simetrik matrisler kümesi
$A^{\dagger}$	: A matrisinin Moore-Penrose tersi
A^{-1}	: A matrisinin tersi
I	: Uygun boyutlu birim matris
0	: Elemanları sıfır olan uygun boyutlu vektör veya matris
$iz(A)$	: $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matrisinin izi
$N(A)$	: A matrisinin sıfır uzayı
A^T	: A matrisinin transpozesi
A^*	: A matrisinin eşlenik transpozesi
$\hat{x}, \hat{r}$	: Optimal çözümler
l_1, l_2, l_∞	: 1-Norm, 2-Norm, Sonsuz norm
$\|A\|$	: A matrisinin Frobenius normu
$vec(.)$	: Vec operatörü
$\langle \ \rangle$	: İç çarpım
C^p	: C 'nin polar konisi
A_+	: ij . elemanı $\max\{0, a_{ij}\}$ olan matris
KKT	: Karush-Kunh-Tucker
CG	: Eşlenik Gradyent
LP	: Lineer Programlama

ÖZET

Anahtar kelimeler: Lineer denklemler, Lineer eşitsizlikler, Lineer kısıtlamalar, Eşlenik gradyent metodu, Genelleştirilmiş Newton metodu, Barrier metodu, İteratif metod, Krylov altuzayı

Bu çalışmanın ilk bölümünde, konu ile ilgili literatür bilgisini içeren bir giriş verilmektedir. Çalışma, bu bölüm ile birlikte toplam beş ana bölümden oluşmaktadır.

Bölüm 2'de sonraki bölümler için temel teşkil edecek olan bazı tanım ve teoremler verilmektedir.

Bölüm 3'te sağ yan vektör değişiklikleri ile l_2 normu kullanılarak minimal düzeltme problemi ele alındı.

Bölüm 4'te en küçük kareler yaklaşımı ile $AX \geq B$ matris eşitsizliğinin simetrik çözümlerini hesaplayan bir iteratif metod sunuldu.

Bölüm 5'te lineer kısıtlı $AXB \geq C$ matris eşitsizliğinin çözümü için iteratif bir algoritma sunuldu.

SOLUTIONS TO SOME MATRIX INEQUALITIES

SUMMARY

Keywords: Linear equations, Linear inequalities, Linear constraints, Conjugate gradient method, Generalized Newton method, Barrier method, Iterative method, Krylov subspace

An introduction including some literature information related to the thema of the study has been given in the first chapter. This work is consist of five chapters with this chapter.

In the Chapter 2, some definitions and some theorems that will be fundamental in the sequel chapters are given.

In the Chapter 3, Minimal Correction Problem is considered by minimal changing in the right hand vector using the norm l_2.

In the Chapter 4, it is presented an iterative method to compute the symmetric solutions of the matrix inequality $AX \geq B$ in the least-squares sense.

In the Chapter 5, an iterative algorithm is proposed to solve $AXB \geq C$ matrix inequalities with linear constraints.

BÖLÜM 1. GİRİŞ

Bu çalışmada matris denklem ve eşitsizlikleri ile alakalı literatürde mevcut olan çalışmalarda mevcut bazı problemler ele alınmıştır. Özellikle, [1-3] çalışmalarında yapılanları, gerekli ön bilgilerle takviye ederek okuyucunun daha iyi anlaması hedeflenmiştir. Öncelikle [1] çalışmasında yapılan ve Bölüm 3'te anlatılanlar ile alakalı olarak aşağıdakiler söylenebilir.

1.1 $Ax \leq b$ Matris Eşitsizliği

$A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ bilinen matris, $b \in \mathbb{R}^m$ bilinen vektör ve $x \in \mathbb{R}^n$ bilinmeyenler vektörü olmak üzere,

$$Ax \leq b \tag{1.1}$$

matris eşitsizliği tutarsız olsun. Yani, (1.1) eşitsizliğini mümkün kılacak şekilde $x \in \mathbb{R}^n$ olmasın. Burada A matrisi ve b vektöründe minimum değişiklikler yaparak x vektörünün bulunması problemi ile ilgili literatürde bir çok çalışma mevcuttur. Bu iş için de şimdiye kadar birkaç algoritma geliştirilmiştir [4,5]. Ayrıca, (1.1)'in çözümü için bir formülasyon l_1 normunu kullanarak $Ax \leq b + r$ koşulu altında

$$\min \sum_{i=1}^{m} |r_i|$$

problemini ele alarak elde edilebileceği gibi, l_∞ normunu kullanarak

$$\min \|r\|_\infty$$

problemini ele alarak elde edilebilir. Bu problemler ise birer Lineer Programlama (LP) problemine kolaylıkla dönüştürülebilir. LP problemleri Simpleks veya iç nokta metodlarından biri ile etkin biçimde çözülebilir [6-8]. [1] çalışmasında ise A matrisinde değişiklik yapmaksızın, yalnızca b vektöründe minimum değişiklikler yaparak ve l_2 normu kullanarak x vektörünün bulunması problemi ele alındı. [1]'de bu problemin yeni bir formulasyonu ortaya koyuldu ve orijinal sistemin çözümü ile bu alternatif sistemin çözümü arasındaki ilişki verildi. Ayrıca bu problemi çözmek için yeni bir algoritma dizayn edildi. Yukarıda bahsedilen ve [1]'de yapılan tüm çalışmalar Bölüm 3'te genişletilmiş bir şekilde anlatılmaya çalışılmıştır. Ayrıca [1]'de verilen yeni algoritmanın kullanıldığı iki örnek Bölüm 3'ün sonuna eklenmiştir.

1.2 $AX \geq B$ Matris Eşitsizliği

$A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ bilinen matrisler ve $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$ bilinmeyenler matrisi olmak üzere,

$$AX = B \tag{1.2}$$

matris denklemi ele alınsın. (1.2) denkleminin bazı kısıtlar altında çözümünü bulma problemleri literatürde geniş şekilde çalışılmıştır. Örneğin, simetrik çözümler için [9], simetrik pozitif tanımlı çözümler için [10], merkezi hermityen çözümler için [11], bisimetrik çözümler için [12], skew-simetrik ortoganal çözümler için [13], Hermityen, Hermityen R -simetrik ve Hermityen R -skew-simetrik çözümler için [14], (R,S) -simetrik ve (R,S) -skew-simetrik çözümler için [15], (P,Q) genelleştirilmiş refleksif ve anti-refleksif çözümler için [16] ve genel çözümler için [17-29] çalışmalarına bakılabilir. Ayrıca, modellemede ve parametre kestirimi gibi bir çok uygulamada karşılaşılan

$$AX \geq B \tag{1.3}$$

matris eşitsizliği $Ax \geq b$ (veya $Ax \leq b$ eşitsizlik sistemi de Ketabchi ve Salahi [1]'de, Salahi ve Ketabchi [30]'da incelenmiştir) lineer eşitsizlik sisteminin bir doğal genelleştirmesidir.

Sonuç olarak (1.3) matris eşitsizliğinin çözümünü bulmak bir çok uygulama açısından önemlidir. Bu görevi Peng ve Peng 2013 yılında yapmış olduğu bir çalışmasında üstlenmiş ve (1.3) matris eşitsizliğinin simetrik çözümlerini hesaplamak için de kullanılabilir. Bunlar bu çalışmanın dördüncü bölümünde genişletilerek hatırlatılmaktadır. Ayrıca, önerilen yaklaşımın kullanışlılığını açıklamak için sayısal örnekler yine Bölüm 4'ün sonuna eklenmiştir.

1.3 $AXB \geq C$ Matris Eşitsizliği

$A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times q}$, $C \in \mathbb{R}^{m\times q}$ bilinen matrisler ve $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$ bilinmeyenler matrisi olmak üzere,

$$AXB = C \tag{1.4}$$

matris eşitliği ele alınsın. (1.4)'ün çözümü için çeşitli lineer kısıtlar altında bazı iteratif algoritmalar sunuldu (örneğin, [31,32]). Ayrıca (1.4) için yine lineer kısıtlar altında en yakın matris probleminin açık çözümü [33]'te verilmiştir. Şimdi

$$AXB \geq C \tag{1.5}$$

matris eşitsizliği ele alınsın. Bu matris eşitsizliğini çözmek için [3] çalışmasında bir iterasyon algoritması verilmiştir. Bu, [31]'de verilen algoritmanın bir genelleştirilmesi olarak yeniden düzenlenmiş bir algoritmadır. Bu iterasyon sürecinde LSQR metodu her en küçük kareler alt probleminin bir yaklaşık çözümünü daha az hesaplama eforu ile belirlemek için uygulanmıştır. Bu algoritmanın yakınsaklığı gösterilmiştir. [3] çalışmasında bahsi geçen bu yapılanlar Bölüm 5'te hatırlatılmaktadır.

1.1 Eşlenik Gradyent Metodun Önemi

$Ax = b$ doğrusal denklem sistemi, n çok büyük ise ve A çok seyrek matris ise genellikle (elemanlarının bir çoğu sıfır olan matrise seyrek matris denir) iterasyon yöntemleri ile çözülür. Çünkü direkt metodlar çok fazla bellek, dört işlem ve hesap süresi gerektirirler. Biriken yuvarlama hataları çözümü tehlikeye sokar. İterasyon yöntemlerinde A'nın elemanları değişmez, bu nedenle A'nın sadece sıfırdan farklı elemanları depolanır, sıfır ile dört işlem yapılmaz. Hem bellek hem hesap süresi hem de yuvarlama hataları önemli miktarda azalır. Uygulamada karşılaşılan A matrisi genelde çok seyrektir, sıfırdan farklı eleman oranı yaklaşık %1-5 civarındadır.

n bilinmeyenli $Ax = b$ doğrusal denklem sisteminin çözümü için hangi metod daha uygundur? Bu soru, cevabı oldukça zor bir sorudur! Çünkü çok sayıda etken vardır: Denklem sisteminin büyüklüğü, A'nın yapısı, çözüm süresi, çözümden beklenen hassasiyet, kullanılacak bilgisayarın özellikleri, paket program var mı veya programlanacak mı? Denklem sistemleri çok büyük boyutlu olduğunda direkt metodları kullanmak çözüme ulaşımı güçleştirir. Özellikle katsayılar matrisi de seyrek ise iterasyon metodları kullanmak daha mantıklıdır.

Çok sayıda iterasyon metodu vardır. Bunlardan biride Eşlenik Gradiyent Metodudur. Bu metod katsayılar matrisinin simetrik ve pozitif tanımlı olduğu denklem sistemleri için en uygun iterasyon yöntemidir. Eşlenik Gradiyent (CG) iterasyon metodu 1952 yılında M.R.Hestenes ve E.Stiefel tarafından ortaya atılmıştır [34]. $Ax = b$ denklem sisteminde A simetrik değilse, $A^T Ax = A^T b$ dönüşümü yapılarak CG metodu $A^T Ax = A^T b$ sistemine uygulanabilir. Çünkü $A^T Ax = A^T b$ sisteminde $A^T A$ katsayılar matrisi simetrik ve pozitif tanımlıdır. Bu iterasyon metodu 20.yüzyılın en iyi algoritmalarından biri seçilmiştir.

Neden Optimizasyon?

Belirli sınırlamaları sağlayacak şekilde bilinmeyen parametre değerlerinin bulunmasını içeren herhangi bir problem, optimizasyon problemi olarak tanımlanır.

Matematiksel olarak ifade etmek gerekirse optimizasyon kısaca bir fonksiyonun minimize veya maksimize edilmesi olarak tanımlanabilir [35]. Diğer bir deyişle optimizasyon, en iyi amaç kriterinin en iyi değerini veren kısıtlardaki değişkenlerin değerini bulmaktır [36].

Değişen teknolojilerin, sınırlı kaynakların, artan rekabetin, karmaşık hale gelen sistemlerin doğurduğu problemlerin klasik yöntemlerle (matematiksel veya matematiksel olmayan, analitik veya sayısal) çözümünün güçleşmesi optimizasyon kavramını güçlendiren en önemli sebeptir. Bu yönüyle optimizasyonun kullanılmadığı bir bilim dalı hemen hemen yok gibidir [37]. Özellikle kimyasal işlemlerin süreklilik arz etmesi, planlamacıların, tasarımcıların, mühendislerin, jeologların, ekonomistlerin, iktisatçıların, işletmecilerin, v.b. kendi alanlarındaki problemleri çözmek için yaptıkları çalışmalar, yeni optimizasyon tekniklerini hızla ortaya çıkarmıştır [36].

Optimizasyonda modelleme ve çözümleme iki önemli bileşen olarak nitelendirilmektedir. Modelleme gerçek yaşamda karşılaşılan problemin matematiksel olarak ifade edilmesi, çözümleme ise bu modeli sağlayan en iyi çözümün elde edilmesini kapsamaktadır. Optimizasyon tekniklerinin gelişiminde araştırmacılar öncelikli olarak modellemeyle ilgilenmişlerdir. Bu alandaki ilk çalışma Leontief tarafından Amerika Birleşik Devletleri'nin dış ticaretini ve ekonomik yapısını modellemek amacıyla yaptığı yayındır [38]. Klasik optimizasyon teorisi Cauchy, Lagrange ve Newton tarafından geliştirilmiştir. Kısıtlı problemler için optimizasyon metodunu adıyla anılan Lagrange geliştirmiştir. Kısıtsız optimizasyon problemlerini çözmek için en dik iniş (Steepest Descent) metodunun ilk uygulaması da Cauchy tarafından yapılmıştır. Optimizasyon problemlerinin çözümüne yönelik olarak ilk önemli çalışmalarlar Dantzig tarafından 1949'da yapılmıştır. Simpleks yöntemini geliştiren de kendisidir [39]. 1960'lı yıllarda kısıtsız optimizasyon konusundaki sayısal metodlar sadece İngiltere'de geliştirilmiştir. Optimizasyon konusundaki bu çalışmalar 20.yüzyılın ortalarına kadar çok yavaş ilerlemiştir. 1950'lerden sonra bilgisayarların icadı optimizasyonda çok büyük çalışmaları beraberinde getirerek birçok yeni teori ve metodun ortaya çıkmasını sağlamıştır [40].

Genel Bir Lineer Programlama Modelinin Matematiksel İfadesi

Bir sistemin birden fazla mümkün çözümleri olabilir. Bunlardan bazıları diğerlerinden daha iyi olabilir. Bu nedenle, bu alternatif tasarımları karşılaştıracak bir kriter olmalıdır. Bu tür kriterlere amaç fonksiyonu denir ve isteklere bağlı olarak ya minimize edilir veya maksimum değeri aranır. Dolayısıyla optimize edilecek büyüklük (maksimum veya minimum) amaç fonksiyon olarak adlandırılır [41]. Örneğin

$$\begin{aligned} &\max z = f(x, y) \\ &\mathrm{g}(x, y) = 0 \\ &\mathrm{h}(x, y) \leq 0 \\ &x \in \mathbb{R}^n \\ &\mathrm{y} \in \{0, 1, \ldots, m\} \end{aligned} \tag{1.6}$$

Bu optimizasyon probleminde sistemin amaç fonksiyonu $z = f(x, y)$ ile ifade edilmiş ve karar değişkenleri x ve y 'nin bu ölçütü ençoklayacak değerlerinin bulunması hedeflenmektedir. Sistemin özellikleri ise $\mathrm{g}(x, y)$ eşitliği ve $\mathrm{h}(x, y)$ eşitsizlikleri belirlemektedir. Ayrıca, karar değişkenleri iki türlü ifade edilmiştir: n boyutlu uzayda herhangi bir reel değeri alabilen sürekli değişkenler (x) ve herhangi bir tamsayı değeri alabilen tamsayılı değişkenler (y). Eğer (1.6) optimizasyon problemleminde $f(x)$, $g(x)$ ve $h(x)$ fonksiyonları lineer ise o problem bir lineer programlama problemi olarak adlandırılır.

Lineer Programlama (LP) bir optimizasyon tekniğidir. LP iyi tanımlanmış doğrusal eşitliklerin veya eşitsizliklerin kısıtlayıcı koşulları altında lineer bir amaç fonksiyonunu en iyi (optimum) kılan değişken değerlerinin belirlenmesinde kullanılan matematiksel programlama tekniğidir [42].

LP problemleri, Grafik ve Simpleks yöntemlerden biri ile çözümlenebilir. Karar değişkenlerinin iki yada üç olduğu durumlarda LP problemi grafiksel yöntem ile çözülebilir [43]. Karar değişkeni sayısı üçten fazla ise bu yöntem kullanılamamaktadır. Bu nedenle uygulamada pek fazla yer verilmemektedir. Simpleks yöntem ise üçten fazla sayıda kısıt olması durumunda kullanılabilmektedir. Bu yöntemle birlikte LP problemleri hemen hemen her sektörde kullanılmaya başlanmıştır.

BÖLÜM 2. ÖN BİLGİLER

Bu bölümde, sonraki bölümlerde kullanılacak olan bazı temel kavramlar, notasyonlar ve ispatsız olarak bazı teoremler $\mathbb{R}$ cismi üzerinde verilmektedir.

2.1. Vektör Uzayları Ve İç Çarpım Uzayları

Tanım 2.1.1. Eğer $\mathbb{R}$ 'deki her c ve d skalerlerinin ve V 'deki her u , v ve w elemanlarının seçimi için aşağıdaki özellikler sağlanıyorsa, V kümesi skaler ile çarpım ve toplama işlemleriyle birlikte reel sayılar üzerinde vektör uzayıdır denir. Burada V 'nin elemanlarına da vektörler denir [44]:

a) $u+v \in V$.

b) $cu \in V$.

c) $u+v=v+u$.

d) $(u+v)+w=u+(v+w)$.

e) Her $u \in V$ için $u+0=u$ olacak şekilde V 'de 0 ile gösterilen bir eleman vardır.

f) Her $u \in V$ için $u+(-u)=0$ olacak şekilde V 'de $-u$ ile gösterilen bir eleman vardır.

g) $(cd)u=c(du)$.

h) $(c+d)u=cu+du$.

i) $c(u+v)=cu+cv$.

j) $1 \times u = u$.

Tanım 2.1.2. $S \subset \mathbb{R}^m$ boştan farklı bir küme olsun. Eğer $v_1, v_2 \in S$ ve $c \in \mathbb{R}$ için aşağıdaki iki koşul sağlanıyorsa S 'ye $\mathbb{R}^m$ 'nin alt vektör uzayı denir [44]:

i. $v_1 + v_2 \in S$ ’dir.

ii. $cv \in S$ ’dir.

Tanım 2.1.3. $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ olsun. A matrisinin sıfır uzayı $\left\{ y : Ay = 0, y \in \mathbb{R}^m \right\}$ şeklinde tanımlanır ve bu küme $N\left(A\right)$ ile gösterilir [45].

Tanım 2.1.4. V reel sayılar cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. Ayrıca $\left\langle \cdot \right\rangle$ sembolüyle $x, y \in V$ vektörlerine, bir $\left\langle x, y \right\rangle$ reel sayısını karşılık getiren fonksiyon tanımlansın. Bu fonksiyon; $\forall\, x, y, z \in V$ vektörü ve $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ skaleri için,

i. $\left\langle x, x \right\rangle \geq 0$ dır. Ayrıca, $\left\langle x, x \right\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$,

ii. $\left\langle x, y \right\rangle = \left\langle y, x \right\rangle$,

iii. $\left\langle x, y + z \right\rangle = \left\langle x, y \right\rangle + \left\langle x, z \right\rangle$,

iv. $\left\langle \alpha x, y \right\rangle = \alpha \left\langle x, y \right\rangle$,

koşullarını sağlarsa V üzerinde bir iç çarpım adını alır. Bu durumda üzerinde iç çarpım tanımlanan V uzayına da bir iç çarpım uzayı adı verilir [45].

2.2. Bazı Topolojik Kavramlar

Tanım 2.2.1 $\left(s_n\right)$ dizisi verilmiş olsun. Eğer, $\forall\, n \in N$ için $s_n < s_{n+1}$ oluyorsa diziye monoton artan, $s_n > s_{n+1}$ oluyorsa diziye monoton azalan dizi denir [46].

Tanım 2.2.2. $A \subset \mathbb{R}$ ve $p \in \mathbb{R}$ olsun. $\forall \delta > 0$ sayısı için $0 < \left| x - p \right| < \delta$ koşulunu gerçekleyen en az bir $x \in A$ noktası varsa, p noktasına A kümesinin bir yığılma noktası denir [46].

Tanım 2.2.3. Her n doğal sayısı için $s_n \le M$ olacak şekilde bir M reel sayısı varsa (s_n) dizisine üstten sınırlı, M sayısına da bu dizinin bir üst sınırı adı verilir. Her n doğal sayısı için $s_n \ge m$ olacak şekilde bir m reel sayısı varsa (s_n) dizisine alttan sınırlı, m sayısına da bu dizinin bir alt sınırı adı verilir [46].

Tanım 2.2.4. (s_n) bir reel sayı dizisi ve $s \in \mathbb{R}$ olsun. $\forall\, \varepsilon > 0$ ve $\forall\, n > n_0$ için $|s_n - s| < \varepsilon$ olacak şekilde ε'a bağlı bir n_0 sayısı bulunabiliyorsa (s_n) dizisi s'ye yakınsaktır denir ve

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s \text{ veya } (s_n) \to s$$

şeklinde gösterilir [46].

Tanım 2.2.5. $C \subset \mathbb{R}^n$ olsun. $\forall \lambda > 0$ ve $\forall x \in C$ için $\lambda x \in C$ ise C kümesine koni denir [47].

Tanım 2.2.6. V vektör uzayının bir C alt kümesi için $\forall u, v \in C$ vektör çiftinin arasındaki doğru parçası C kümesinin içinde kalıyorsa, yani

$$\{\alpha u + (1-\alpha) v : 0 \le \alpha \le 1\} \subset C$$

ise C'ye konveks bir küme denir [48].

Not 2.2.7. Bir C kümesi Tanım 2.2.5 ve Tanım 2.2.6'daki koşulları sağlıyorsa konveks koni diye adlandırılır.

Tanım 2.2.8. $C \subset \mathbb{R}^n$ boş olmayan bir konveks koni olsun. C'nin polar konisi

$$C^p = \{ s \in \mathbb{R}^n \,|\, \langle s, x \rangle \le 0,\ \forall\, x \in C \}$$

biçiminde tanımlanır [47].

2.3. Matrislerle İlgili Önbilgiler

Tanım 2.3.1. $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ matrisi olsun. Bu durumda

i) $A^{\dagger} A A^{\dagger} = A^{\dagger}$,

ii) $A A^{\dagger} A = A$,

ii) $\left(A A^{\dagger}\right) = \left(A A^{\dagger}\right)^{T}$,

iv) $\left(A^{\dagger} A\right) = \left(A^{\dagger} A\right)^{T}$

şartlarını sağlayan $A^{\dagger} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ matrisine A matrisinin Moore-Penrose tersi denir [45].

Teorem 2.3.2. Herhangi bir A matrisinin Moore-Penrose tersi $A^{\dagger}$ olmak üzere,

1) $\left(A^{\dagger}\right)^{\dagger} = A$,

2) $\left(A^{T}\right)^{\dagger} = \left(A^{\dagger}\right)^{T}$,

3) $\left(A^{T} A\right)^{\dagger} = A^{\dagger} \left(A^{T}\right)^{\dagger}$, $\left(A A^{T}\right)^{\dagger} = \left(A^{T}\right)^{\dagger} A^{\dagger}$,

4) $\left(A A^{\dagger}\right)^{\dagger} = A A^{\dagger}$, $\left(A^{\dagger} A\right)^{\dagger} = A^{\dagger} A$,

5) Eğer $A = 0_{m \times n}$ ise $A^{\dagger} = 0_{n \times m}$,

6) Tekil olmayan A matrisi için $A^{\dagger} = A^{-1}$

dır [49].

Tanım 2.3.3. Bir $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matrisinin köşegen elemanlarının toplamına o matrisin izi denir ve $iz(A)$ ile gösterilir. Yani, $iz(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ olur. Bir matrisin izinin bazı temel özellikleri aşağıdaki gibi sıralanabilir [50]:

a) $iz(A+B) = iz(A) + iz(B)$,

b) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ için $iz(\lambda A) = \lambda iz(A)$,

c) $iz(A^T) = iz(A)$,

d) $iz(AB) = iz(BA)$.

Tanım 2.3.4. $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ matrisinin Frobenius normu

$$\|A\| = \sqrt{\sum_{i,j} |a_{ij}|^2} = \sqrt{iz(A^T A)}$$

olarak tanımlanır [51].

Tanım 2.3.5. $x \in \mathbb{R}^n$'nin; 1 normu, 2 normu (veya Öklid Normu), p normu ($p \geq 1$) ve sonsuz normu sırasıyla

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|,$$

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

$$\|x\|_\infty = \lim_{p\to\infty} \|x\|_p = \lim_{p\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|_p \right)^{\frac{1}{p}} = \max_i |x_i|$$

olarak tanımlanır [52].

Tanım 2.3.6. Eğer A matrisinin her bir elemanı negatif değilse A 'ya negatif olmayan matris denir ve bu durum $A \geq 0$ ile belirtilir. Benzer şekilde A 'nın her bir elemanı pozitif ise A matrisine pozitif matris denir ve bu durum $A > 0$ ile gösterilir. Sırasıyla $A \geq B$ ve $A > B$ ifadeleri $A - B \geq 0$ ve $A - B > 0$ anlamında kullanılır [53].

Tanım 2.3.7. A simetrik bir matris olsun. $\forall x \neq 0$ vektörü için $x^T A x > 0$ oluyorsa, A matrisine pozitif tanımlı matris denir [53].

Tanım 2.3.8. Bir A matrisi için $AA^T = A^T A = I$ oluyorsa A matrisine ortoganaldir denir. Ortoganal A matrisi kare, tersinir ve $A^{-1} = A^T$ olan matristir [54].

Tanım 2.3.9. A matrisi bir kare matris olmak üzere, A matrisinin elemanları arasında her $i \neq j$ için $a_{ij} = a_{ji}$ eşitliği yazılabiliyorsa, A matrisine simetrik matris denir. Benzer şekilde $a_{ij} = -a_{ji}$ eşitliği yazılabiliyorsa A matrisine skew-simetrik matris denir [54].

Tanım 2.3.10. Bir kare matris hem simetrik hem ortoganal ise ona simetrik ortoganal matris, benzer şekilde hem skew-simetrik hem ortoganal ise skew-simetrik ortoganal matris denir [55].

Tanım 2.3.11. Bir $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matrisinin elemanları olan $a_{i,j}$ 'ler $1 \leq i, j \leq n$ için $a_{i,j} = a_{j,i}$ ve $a_{i,j} = a_{n-j+1,n-i+1}$ koşullarını sağlıyorsa A 'ya bir bisimetrik matris denir [56].

Tanım 2.3.12. $R \in \mathbb{R}^{m\times m}$ ve $S \in \mathbb{R}^{n\times n}$ aşikar olmayan involutif matrisler yani $R = R^{-1} \neq \pm I$ ve $S = S^{-1} \neq \pm I$ olsun. Eğer $RAS = A$ veya $RAS = -A$ ise $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ matrisi sırasıyla (R,S)-simetrik veya (R,S)-skew simetrik olarak adlandırılır [57].

Tanım 2.3.13. $M = [m_{jk}]$ matrisi $p\times q$ boyutlu kompleks matris olsun. Eğer $m_{jk} = \overline{m}_{p+1-j,q+1-k}$ ise, bu durumda M matrisine merkezi hermityen matris denir [58].

Tanım 2.3.14. Eğer $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ matrisi eşlenik transpozesine eşitse ($A = A^*$ ise), A matrisine Hermityen matris denir [59].

Tanım 2.3.15. $R \in \mathbb{C}^{n\times n}$ aşikar olmayan üniter involutif matris, yani $R = R^* = R^{-1} \neq I_n$ olsun. Eğer $X^* = X$, $RXR = X$ oluyorsa, $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$ matrisine bir Hermityen R-simetrik matris denir [60]. Benzer şekilde $X = X^*$ ve $RXR = -X$ koşulları sağlanırsa X Hermityen R-skew-simetrik matris denir [61].

Tanım 2.3.16. P , $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matrisleri aşikar olmayan genelleştirilmiş refleksif matris yani $P^T = P = P^{-1} \neq I$, $Q^T = Q = Q^{-1} \neq I$ olsun. Bu durumda, sırasıyla, $A = PAQ$ veya $A = -PAQ$ oluyorsa $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matrisine bir (P,Q)-genelleştirilmiş refleksif matris veya (P,Q)-genelleştirilmiş anti-refleksif matris denir [62].

Tanım 2.3.17. $f(x)$ fonksiyonun ikinci mertebeden kısmi türevlerini içeren aşağıdaki matris Hessian matrisi olarak adlandırılır

$$H=\begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n} \end{bmatrix}.$$

Hessian matrisi simetrik bir matristir [53].

Notasyon 2.3.18. Bu çalışma boyunca herhangi bir matrisin sağ alt köşesine “$+$” simgesi konulduğunda anlaşılacak olan yeni matris; orjinal matrisin elemanlarının pozitif olanların aynı hali ile bırakıldığı, negatif olanların ise 0 ile değiştirildiği matristir. Yani $A=\left(a_{ij}\right)$ matrisi için $A_+=\left(\tilde{a}_{ij}\right)$ ise $\tilde{a}_{ij}=\max\left(a_{ij},0\right)$’dir.

Tanım 2.3.19. U ve V kümeleri $\mathbb{R}$ üzerinde iki vektör uzayı ve T ise U uzayındaki her bir vektörü, V uzayının bir vektörüne taşıyan bir dönüşüm olsun. Bu durumda; bütün $x,y\in U$ vektörleri için,

$$T\left(x+y\right)=T\left(x\right)+T\left(y\right)$$

eşitliği sağlanıyorsa T dönüşümü toplamsaldır ve $\forall x\in U$ vektörü ve $\forall\alpha\in\mathbb{R}$ skaleri için,

$$T\left(\alpha x\right)=\alpha T\left(x\right)$$

olması halinde de T dönüşümü homojendir denir. $T:U\to V$ dönüşümü toplamsal ve homojen ise bir lineer dönüşüm olarak adlandırılır [63].

Tanım 2.3.20. $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$, $V\in\mathbb{R}^{n\times s}$ ve m sabit bir tamsayı olsun. Krylov matris altuzayı $V, AV,\ldots,A^{m-1}V$ matrislerinden oluşan $K_m\left(A,V\right)=span\left\{V,AV,\ldots,A^{m-1}V\right\}$

biçimindeki altuzaydır. $Z \in K_m(A,V)$ ifadesinin $Z = \sum_{i=0}^{m-1} \alpha_i A^i V$, $\alpha_i \in \mathbb{R}$ anlamına geldiğine dikkat edilir [64].

2.4. Konveks Problemler İçin Karush Kunch Tuckher Teoremi

Teorem 2.4.1. $g_i(x) \le 0$ **,** $i = 1,2,...,m,$ koşulu altında $\min f(x)$ konveks bir problem olsun. $\hat{y} \in \mathbb{R}^m$ olmak üzere,

a) $\nabla f(\hat{x}) + \sum_{i=1}^{m} \hat{y} \nabla g_i(\hat{x}) = 0^T$,

b) $g(\hat{x}) \le 0$,

c) $\hat{y} \ge 0$,

d) $\hat{y}^T g(\hat{x}) = 0$

olacak şekilde $\hat{x}$ optimal çözümdür [65].

Bu teoremdeki koşullar kısalık olması açısından çalışma boyunca KKT koşulları olarak ifade edilecektir.

BÖLÜM 3. LİNEER EŞİTSİZLİKLERİN TUTARSIZLIĞININ DÜZELTİLMESİ VE ÇÖZÜMÜ

3.1. Giriş

Bu bölümde tutarsız olan

$$Ax \le b \tag{3.1}$$

lineer eşitsizlikler kümesi ele alındı. Burada $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ve $b \in \mathbb{R}^{m}$ 'dir. (3.1) tutarsız olduğu için onu mümkün kılacak şekilde $x \in \mathbb{R}^{n}$ yoktur. (3.1) sistemindeki tutarsızlık, uygulamada çeşitli sebeplerden kaynaklanabilir. Bu sebepler; kısıtların tanımlandığı farklı gruplar arasındaki etkileşim eksikliği, yanlış veya eksik tahminler, verilerdeki hata, aşırı iyimser amaçlar, v.b. olabilir [4,5]. (3.1) sisteminden bir tutarlı sistem oluşturmak için çok basit bir yaklaşım, yalnızca kaynaklar vektörü de denilen sağ yan vektöründe l_1 normunu kullanarak değişiklikler yapmaktır. Yani, $Ax \le b + r$ koşulu altında

$$\min\left(\sum_{i=1}^{m} |r_i|\right) \tag{3.2}$$

problemini ele almaktır. Bu problem bir LP problemine kolaylıkla dönüştürülebilir [6-8]. Ayrıca, amaç fonksiyonunda sonsuz normun da ele alınabileceğini vurgulamak gerekir. Bu durumda problem $Ax \le b + r$ koşulu altında

$$\min\|r\|_{\infty} \tag{3.3}$$

bulma problemine dönüşür. (3.3) hala bir LP problemine denktir. Sonraki kısımda, l_2 normu kullanılarak minimal düzeltme tartışılacaktır. Problemin bir denk formülasyonu verilecek ve yeni formülasyonu çözmek için etkin bir algoritma dizayn edilecektir.

3.2. b Vektöründe l_2 Normu Kullanılarak Minimal Düzeltmeler

Sağ yan vektörünü değiştirmek sureti ile l_2 norm kullanarak minimal düzeltme, $Ax \le b + r$ koşulu altında

$$\min_{x,r} \frac{1}{2}\|r\|^2 \tag{3.4}$$

ile olur. Aşağıdaki teoremde optimal x ve r değerlerinin nasıl hesaplanacağı gösterilmektedir.

Teorem 3.2.1. $\hat{x}$ ve $\hat{r}$ (3.4)'ün optimal çözümleri olsun. Bu durumda, $\hat{r} = \left(A\hat{x} - b\right)_+$'dır. Burada $\hat{x}$

$$\min_{x} \frac{1}{2}\left\|\left(Ax - b\right)_+\right\|^2 \tag{3.5}$$

probleminin bir optimal çözümüdür.

İspat. (3.4) ifadesi $Ax \le b + r$ koşulu altında

$$\min_{x}\left(\min_{r} \frac{1}{2}\|r\|^2\right) \tag{3.6}$$

biçiminde yazılabilir. Şimdi verilmiş $x \in \mathbb{R}^n$ için, iç minimizasyon problemi yani, $Ax \le b + r$ koşulu altında

$$\min_r \frac{1}{2}\|r\|^2 \tag{3.7}$$

problemi ele alınsın. (3.7) probleminin bir konveks minimizasyon problemi olduğu açıktır, bu yüzden KKT koşulları optimallik için gerekli ve yeterli koşullardır ve onlar

$$\begin{aligned}
&r-\lambda=0,\\
&Ax\le b+r,\\
&\lambda^T\left(Ax-b-r\right)=0,\\
&\lambda\ge 0
\end{aligned}$$

ile verilir. Burada λ vektörü Lagrange çarpanlarını gösterir. Birinci denklemden $r=\lambda$ elde edilir. Şimdi eğer en az bir i için $\lambda_i\ne 0$ ise üçüncü denklemden $\left(Ax-b\right)_i=r_i=\lambda_i$ olur. Bununla birlikte, $\lambda_i=0$ olduğunda birinci denklemden $r_i=0$ elde edilir. Tüm bunların hepsi $r=\left(Ax-b\right)_+$ ifadesini sağlar. Bu nedenle (3.4) problemi

$$\min_x \frac{1}{2}\left\|\left(Ax-b\right)_+\right\|^2$$

olarak yazılabilir. Bu ise ispatı bitirir. ■

(3.5) probleminin $A^Tu=0$, $u\ge 0$ koşulları altında

$$\max\left(-b^Tu-\frac{1}{2}\|u\|^2\right) \tag{3.8}$$

optimizasyon probleminin duali olduğunu vurgulamak gerekir. Aşağıdaki sonuçta (3.5)'in bir optimal çözümü kullanılarak (3.8)'in bir optimal çözümü verilmiştir.

Sonuç 3.2.2. $\hat{x}$, (3.5) probleminin bir optimal çözümü olsun. Bu durumda, $\hat{u}=\left(A\hat{x}-b\right)_+$ ifadesi (3.8)'in bir optimal çözümüdür.

İspat. $\hat{x}$, (3.5)'in bir optimal çözümü olsun. $\hat{u} = \left(A\hat{x} - b\right)_+$ için $A^T\hat{u} = 0$ ve $u \geq 0$ olduğu açıktır. Burada $A^T\hat{u} = 0$ ifadesi (3.5)'in optimallik koşuludur. Ayrıca, $A^T\left(A\hat{x} - b\right)_+ = 0$ olduğundan,

$$\left\|\left(A\hat{x} - b\right)_+\right\|^2 = \left(A\hat{x} - b\right)_+^{\ T}\left(A\hat{x} - b\right)_+ = \left(A\hat{x} - b\right)^T\left(A\hat{x} - b\right)_+ = -b^T\left(A\hat{x} - b\right)_+$$

bulunur. Bu ise (3.5) ve (3.8)'in amaç değerlerinin eşit, yani

$$\left\|\left(A\hat{x} - b\right)_+\right\|^2 = -b^T\left(A\hat{x} - b\right)_+$$

veya

$$\frac{1}{2}\left\|\left(A\hat{x} - b\right)_+\right\| = -b^T\left(A\hat{x} - b\right)_+ - \frac{1}{2}\left\|\left(A\hat{x} - b\right)_+\right\|^2$$

olduğunu gösterir. ■

Sonraki kısımda (3.5)'in bir optimal çözümünü kullanarak $A^T u = 0$, $b^T u = -\rho$, $u \geq 0$ koşulları altında

$$\min \frac{1}{2}\|u\|^2 \tag{3.9}$$

için bir optimal çözüm oluşturulabileceği gösterilmektedir. Burada ρ bir kesin pozitif keyfi parametredir.

Uyarı 3.2.3. (3.9)'un kısıtlarının her birinin, $u = Ax - b$ olarak alındığında, (3.1)'in alternatif sistemi olduğuna dikkat etmek gerekir.

Sonuç 3.2.4. $\hat{x}$, (3.5) probleminin bir optimal çözümü olsun. Bu durumda, $A^T u = 0$, $b^T u = -\rho$, $u \geq 0$ koşullarını sağlayan u'yu bulma probleminin bir normal çözümü

$$\hat{u} = -\frac{\rho\left(A\hat{x}-b\right)_+}{\left\|\left(A\hat{x}-b\right)_+\right\|^2}.$$

Yani $\hat{u}$, (3.9)'un bir çözümüdür.

İspat. (3.9)'un Lagrange duali,

$$\max_{\lambda,\mu}\left(-\frac{1}{2}\left\|\left(A\lambda-b\mu\right)_+\right\|^2+\mu\rho\right) \tag{3.10}$$

dur. Burada $u = \left(A\lambda - b\mu\right)_+$'dır. Optimal çözümün yerine yazılması durumunda (3.9) ve (3.10)'un amaç değerleri eşit olmalıdır. Dolayısıyla

$$\frac{1}{2}\left\|\left(A\hat{\lambda}-b\hat{\mu}\right)_+\right\|^2 = -\frac{1}{2}\left(A\hat{\lambda}-b\hat{\mu}\right)_+ + \hat{\mu}\rho$$

yani

$$\left\|\left(A\hat{\lambda}-b\hat{\mu}\right)_+\right\|^2 = \rho\hat{\mu}$$

eşitliği sağlamalıdır. Buradan, $\mu > 0$ olduğunda

$$\hat{\mu}\left\|\left(A\left(\frac{\hat{\lambda}}{\hat{\mu}}\right)-b\right)_+\right\| = \rho$$

sonucu çıkarılabilir. Ayrıca, $x = \dfrac{\hat{\lambda}}{\hat{\mu}}$ olarak tanımlanırsa,

$$\hat{\mu} = \frac{\rho}{\left\| \left(Ax - b \right)_+ \right\|}$$

elde edilir. $\hat{x}$, (3.5)'in optimal çözümü ve ayrıca $\hat{\mu} = \frac{\rho}{\left\| \left(A\hat{x} - b \right)_+ \right\|}$ olsun. Bu $\hat{\lambda} = \hat{\mu}\hat{x}$ olduğunu gösterir. Değişkenlerin bu seçimi için, iki amaç değer eşittir. Böylece, iki probleminde optimal çözümleri elde edilmiş olur. ■

(3.5)'i çözmek için, Eşlenik Gradyent (CG) algoritması ve sonraki kısımda tartışılan genelleştirilmiş Newton algoritması kullanılmaktadır. (3.5)'in amaç fonksiyonunun bir konveks fonksiyon olduğu açıktır. Fakat o sadece birinci türeve sahiptir, ikinci türeve sahip değildir [66]. Bununla birlikte, genelleştirilmiş Hessian bu fonksiyon için

$$\nabla f\left(x\right) = A^T \left(Ax - b\right)_+$$

ve

$$\nabla^2 f\left(x\right) = A^T DA$$

biçiminde tanımlanır. Burada D bir $n \times n$ köşegen matris olup; $\left(Ax - b\right)_i > 0$ olduğunda, $D\left(i,i\right) = 1$, $\left(Ax - b\right)_i < 0$ olduğunda $D\left(i,i\right) = 0$ ve $\left(Ax - b\right)_i = 0$ olduğunda $D\left(i,i\right) \in \left[0,1\right]$'dir.

Sonuç olarak genelleştirilmiş Hessian'ın bir küme olduğu açıktır. Ancak basitlik için bu bölümde, $\left(Ax - b\right)_i = 0$ olduğu durumda $D\left(i,i\right) = 0$ olarak alındı. Şimdi genelleştirilmiş Newton algoritması, aşağıda olduğu gibi özetlenebilir.

Algoritma 3.2.5. (Genelleştirilmiş Newton Algoritması)

• Girdiler: Bir $\varepsilon > 0$ doğruluk parametresi, Hessian matrisinin tersinirliğini garanti edecek bir düzeltme parametresi ($\delta = 10^{-4}$) ve bir $x_0 \in \mathbb{R}^n$ başlangıç noktası.

I $i = 0$;

II $\|\nabla f(x_i)\|_\infty \geq \varepsilon$ olduğu sürece aşağıdakileri yap.

IIa $x_{i+1} = x_i - (\nabla^2 f(x_i) + \delta I)^{-1} \nabla f(x_i)$.

IIb $i = i + 1$.

Uyarı 3.2.6. Algoritma 3.2.5'in yapısında Wolf veya Armijo gibi "arama teknikleri" kullanılabileceğini vurgulamak gerekir. Dahası, Armijo arama tekniği ile genelleştirilmiş Newton algoritmasının sonlu genel yakınsaklığı [66]'da ispatlanmaktadır.

3.3. Negatif Olmama Kısıtlamalı Lineer Eşitsizlikler

Bu kısımda (3.1) lineer eşitsizlikler kümesi üzerine negatif olmama kısıtlaması ile birlikte, yani $x \geq 0$ kısıtı altında

$$Ax \leq b \tag{3.11}$$

eşitsizliğinin çözümünü bulma problemi ele alındı. (3.11)'in yalnızca (3.1)'in bir özel durumu olduğu, dolayısıyla ele almaya değer olmadığı düşünülebilir. Fakat onun özel yapısından dolayı, yine de bu tip tutarsız lineer eşitsizlikler kümesinin düzeltilmesini yapmak kayda değerdir. Burada yalnızca $Ax \leq b$ eşitsizliğine sağ yan düzeltmesi yapılan durum ele alınmakta, $x \geq 0$ üzerinde herhangi bir düzeltme yapılmamaktadır. Yani, $Ax \leq b + r$ ve $x \geq 0$ koşulları altında

$$\min \frac{1}{2}\|r\|^2 \tag{3.12}$$

problemi ele alınmaktadır. Aşağıdaki teoremde, x ve r değerlerinin optimum çözümü verecek şekilde nasıl hesaplanabileceği gösterilmektedir.

Teorem 3.3.1. $\hat{x}$ ve $\hat{r}$ (3.12)'nin optimal çözümleri olsun. O zaman $\hat{r} = \left(A\hat{x} - b\right)_+$ 'dır. Burada $\hat{x}$

$$\min_{x \geq 0} \frac{1}{2} \left\| (Ax - b)_+ \right\|^2 \tag{3.13}$$

probleminin bir optimal çözümüdür.

İspat. Teorem 3.2.1'in ispatına benzerdir. ■

(3.13) ve (3.5) arasındaki farkın yalnızca, negatif olmama kısıtlaması olduğu ve bu fark dolayısıyla problemin bir kısıtlı optimizasyon problemine dönüştüğü açıktır. Burada (3.13)'ü çözmek için, amaç fonksiyonlarına $x \geq 0$ değerini vererek logaritmik bariyer [67] yaklaşımı kullanılmaktadır. Böylece,

$$\min_{x} \left(\frac{1}{2} \left\| \left(Ax - b \right)_+ \right\|^2 - \mu \sum_{i=1}^{n} \log\left(x_i \right) \right) \tag{3.14}$$

elde edilir. Burada μ bariyer parametresidir. Sonra x kesin pozitif vektörü ve $\mu_0 = 1$ değeri ile başlanarak genelleştirilmiş Newton metodu uygulanmaktadır. Logoritmik terim, x değerinin bileşenlerinin negatif bulunmasına izin vermeyecek ve μ 'nün değeri, genelleştirilmiş Newton algoritmasının iterasyonları süresince sıfıra yaklaşacaktır (örneğin, $\mu_{k+1} = 0.8\mu_k$ gibi). (3.13)'ü çözmek için bir diğer yaklaşım, penaltı fonksiyon metodudur. Şöyle ki,

$$\min_{x} \left(\frac{1}{2} \left\| \left(Ax - b \right)_+ \right\|^2 + \frac{1}{2} M \left\| (-x)_+ \right\|^2 \right). \tag{3.15}$$

Burada M çok büyük (örneğin 10^{10} gibi) bir sayıdır. Bu, $\left\|(-x)_+\right\|^2$ ifadesinin büyük olmasına izin vermez. x vektörünün optimal çözümünde, sıfıra yuvarlanabilecek çok küçük negatif değerlerin var olabileceğini vurgulamak gerekir.

Bu bölüm konu ile alakalı iki örnek verilecek kapatılacaktır.

Örnek 3.3.2.

$$A=\begin{pmatrix} -6.8489 & 0 & 19.4404 & 0 & -24.3215 & 0 & -49.0241 & 0 \\ 0 & 3.2283 & 0 & -22.0608 & 44.6230 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 40.6443 & 0 & 0 & -10.7315 & -47.5145 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 17.1437 & 33.7171 & 47.1410 & 0 \\ 0 & -40.6443 & 0 & 0 & 10.7315 & 47.5145 & 0 & 0 \\ 0 & -3.2283 & 0 & 22.0608 & -44.6230 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -17.1437 & -33.7171 & -47.1410 & 0 \\ 6.8489 & 0 & -19.4404 & 0 & 24.3215 & 0 & 49.0241 & 0 \end{pmatrix}$$

$$b=\begin{pmatrix} 0.3540 \\ 0.8706 \\ -0.4716 \\ 0.6003 \\ -1.2545 \\ -1.7741 \\ -3.1529 \\ -8.9397 \end{pmatrix}$$

olsun. Bu durumda (3.4) probleminin çözümü genelleştirilmiş Newton algoritması kullanılarak

$$x=\begin{pmatrix} 0 \\ -2.6863 \\ 0.6022 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -14.7142 \end{pmatrix}$$

biçiminde elde edilir.

Örnek 3.3.3.

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -28.2208 & 0 & 0 & 0 \\ 35.8554 & 36.1008 & 0 & -21.6061 & 0 & 0 \\ 0 & 11.5393 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 28.2208 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -11.5393 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -35.8554 & -36.1008 & 0 & 21.6061 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$b=\begin{pmatrix} 0.2038 \\ 1.4996 \\ 0.2325 \\ -6.7010 \\ -2.3843 \\ -3.9383 \end{pmatrix}$$

olsun. Bu durumda (3.4) probleminin çözümü genelleştirilmiş Newton algoritması kullanılarak

$$x = \begin{pmatrix} 0.1999 \\ 1.2037 \\ 0 \\ 0 \\ -15.2403 \\ 0 \end{pmatrix}$$

biçiminde elde edilir.

BÖLÜM 4. EN KÜÇÜK KARELER İLE AX $\geq$ B MATRİS EŞİTSİZLİĞİNİN SİMETRİK ÇÖZÜMLERİ

4.1. Giriş

Bu bölümde $X \in S\mathbb{R}^{n\times n}$ bilinmeyenler matrisi ve $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ bilinen matrisler olmak üzere,

$$AX \geq B \tag{4.1}$$

matris eşitsizliği ele alınmıştır. Gerçek yaşamdan alınan veriler için (4.1) matris eşitsizliğini sağlayacak şekilde $X \in S\mathbb{R}^{n\times n}$ genellikle yoktur, yani $\left\{X \in S\mathbb{R}^{n\times n} \middle| AX \geq B\right\}$ kümesi boş kümedir. Dolayısıyla, (4.1) matris eşitsizliğini sağlayacak şekilde simetrik X matrisi olmayabilir. Bu durumda yeniden düzenlenmiş

$$AX + Y \geq B \tag{4.2}$$

matris eşitsizliğini çözülebilir kılacak bir negatif olmayan Y düzeltme matrisi bulmak istenir. Aslında, bu özelliğe sahip sonsuz sayıda negatif olmayan Y düzeltme matrisi vardır. Bu durumda en küçük negatif olmayan Y düzeltme matrisi aranır. Daha açıkcası, bu bölümdeki amaç $AX + Y \geq B$ matris eşitsizliğinin en küçük düzeltme problemini araştırmak yani, $AX + Y \geq B$, $Y \geq 0$, $X \in S\mathbb{R}^{n\times n}$ koşulları altında

$$P(X,Y) = \frac{1}{2}\|Y\|^2 \tag{4.3}$$

ifadesini minimumlaştırmaktır.

Sonraki kısımda (4.3) en küçük düzeltme probleminin çözümlerinin temel özellikleri çalışılmaktadır. X^* ve Y^* matrislerinin (4.3) en küçük düzeltme probleminin çözümü olduğu kabul edilerek Y^* ve $AX^* - Z^*$ matrisleri, sırasıyla, iki özel matris altuzayı üzerinde B 'nin izdüşümleri olacak şekilde bir Z^* negatif olmayan matrisinin var olduğu gösterilmektedir. Daha sonraki kısımda ise (4.3) en küçük düzeltme problemini çözmek için bir iteratif metod sunulmaktadır. Bu bölüm bu algoritmanın etkinliğini göstermek için verilen iki sayısal örnek ile sonlandırılacaktır.

4.2. En Küçük Düzeltme Probleminin Özellikleri

X ve Y 'nin (4.3) en küçük kareler probleminin çözümü olduğu kabul edilsin. Bu durumda

$$Y = \left(B - AX\right)_+ \tag{4.6}$$

olacağı açıktır. Diğer taraftan, X ve Y matris ikilisinin (4.2) matris eşitsizliğini sağlaması için gerekli ve yeterli koşul

$$AX + Y - Z = B$$

olacak şekilde negatif olmayan Z matrisinin var olmasıdır. Sonuç olarak (4.3) en küçük düzeltme problemi $AX + Y - Z = B$, $Y \geq 0$, $Z \geq 0$, $X \in S\mathbb{R}^{n\times n}$ koşulları altında

$$\min P\left(X, Y, Z\right) = \frac{1}{2}\left\|Y\right\|^2 \tag{4.7}$$

problemine denktir. Ayrıca (4.7) optimizasyon probleminden Y 'yi elimine ederek, $X \in S\mathbb{R}^{n\times n}$, $Z \geq 0$ kısıtları altında

$$\min F\left(X,Z\right)=\frac{1}{2}\left\|AX-Z-B\right\|^{2} \tag{4.8}$$

problemi elde edilir. X ve Z (4.8) optimizasyon probleminin çözümü olsun, bu durumda

$$Z=\left(AX-B\right)_{+} \tag{4.9}$$

olup X ile birlikte $Y=\left(B-AX\right)_{+}$ matrisi (4.3) en küçük düzeltme probleminin çözümüdür. Böylece, $AX \geq B$ matris eşitsizliğinin simetrik çözümünü en küçük kareler anlamında hesaplamak için önce (4.3) optimizasyon problemi çözülür. Bir sonraki kısımda sunulan iterasyon metodu yukarıdaki denk formların avantajını taşır.

Lemma 4.2.1. A ve B $m\times n$ boyutlu matrisler olsun. Bu durumda

$$\left\langle A,B\right\rangle=\left\langle B^{T},A^{T}\right\rangle$$

olur.

İspat. İç çarpımın tanımından

$$\left\langle A,B\right\rangle=iz\left(B^{T}A\right)$$

yazılır.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$B^T = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{1n} & \cdots & b_{nm} \end{pmatrix}$$

olduğu düşünülürse

$$B^T A = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{m} b_{i1}a_{i1} & \cdots & \cdots \\ \vdots & \sum_{i=1}^{m} b_{i2}a_{i2} & \vdots \\ \vdots & \cdots & \sum_{i=1}^{m} b_{in}a_{in} \end{pmatrix}$$

yani

$$iz\left(B^T A\right) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} b_{ij}a_{ij} \tag{4.10}$$

olur. Benzer şekilde $\left\langle B^T, A^T \right\rangle = iz\left(AB^T\right)$ olacağından

$$AB^T = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{m} a_{1j}b_{1j} & \cdots & \cdots \\ \vdots & \sum_{j=1}^{m} a_{2j}b_{2j} & \vdots \\ \vdots & \cdots & \sum_{j=1}^{m} a_{nj}b_{nj} \end{pmatrix},$$

yani

$$iz\left(AB^T\right) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ij} \tag{4.11}$$

bulunur. (4.10) ve (4.11)'in eşitliğinden ispat tamamlanır. ■

$\mathbb{R}^{m\times n}$ 'de iki altuzay

$$M = \left\{ U \in \mathbb{R}^{m\times n} \,\middle|\, U = AX - Z\,, X = X^T\,, Z \geq 0 \right\} \tag{4.12}$$

$$N = \left\{ Y \in \mathbb{R}^{m\times n} \,\middle|\, A^T Y + Y^T A = 0, Y \geq 0 \right\} \tag{4.13}$$

şeklinde tanımlansın. Bu bölümün kalan kısmında M ve N sembolleri (4.12) ve (4.13)'te tanımlanan kümeler olarak ele alınacaktır. Şimdi aşağıdaki sonuç verilebilir.

Teorem 4.2.2. N matris altuzayı M matris altuzayının polar konisidir.

İspat. Tanım 2.2.8'den ve M altuzayının karakteristik yapısından M 'nin polar konisinin

$$M^p = \left\{ Y \in \mathbb{R}^{m\times n} \,\middle|\, \langle U, Y \rangle \leq 0, \forall U \in M, Y \geq 0 \right\}$$

biçiminde olduğu görülür. Dolayısıyla ispat için $N = M^p$ olduğunu göstermek yeterlidir. İlk olarak $N \subset M^p$ olduğu gösterilsin. Bunun için $U = AX - Z \in M$ ve $Y \in N$ kabul edilsin. Bu durumda (4.12), (4.13), Tanım 2.1.4 ve Lemma 4.2.1 gözönünde bulundurularak

$$
\begin{aligned}
2\langle Y, AX - Z\rangle &= \langle AX - Z, Y\rangle + \langle AX - Z, Y\rangle \\
&= \langle AX - Z, Y\rangle + \left\langle Y^T, (AX - Z)^T\right\rangle \\
&= \langle AX - Z, Y\rangle + \left\langle Y^T, XA^T - Z^T\right\rangle \\
&= \langle AX - Z, Y\rangle + \left\langle XA^T - Z^T, Y^T\right\rangle \\
&= \langle AX, Y\rangle + \langle -Z, Y\rangle + \left\langle XA^T, Y^T\right\rangle + \left\langle -Z^T, Y^T\right\rangle \\
&= \langle AX, Y\rangle - \langle Z, Y\rangle + \left\langle XA^T, Y^T\right\rangle - \left\langle Z^T, Y^T\right\rangle \\
&= \langle AX, Y\rangle - \langle Z, Y\rangle + \left\langle A^T, \left(X^T Y^T\right)\right\rangle - \langle Y, Z\rangle \\
&= \langle AX, Y\rangle - \langle Z, Y\rangle + \left\langle A^T, (YX)^T\right\rangle - \langle Z, Y\rangle \\
&= \left\langle X, A^T Y\right\rangle + \left\langle A^T, (YX)^T\right\rangle - 2\langle Z, Y\rangle \\
&= \left\langle X, A^T Y\right\rangle + \langle YX, A\rangle - 2\langle Z, Y\rangle \\
&= \left\langle X, A^T Y\right\rangle + \left\langle X, Y^T A\right\rangle - 2\langle Z, Y\rangle \\
&= \left\langle X, A^T Y + Y^T A\right\rangle - 2\langle Z, Y\rangle \\
&= -2\langle Z, Y\rangle \leq 0
\end{aligned}
$$

elde edilir. Dolayısıyla, $Y \in M^p$ ’dir. Yani $N \subset M^p$ bulunur.

Şimdi $\mathrm{M}^p \subset \mathrm{N}$ olduğunu göstermek için tersine olarak $\widetilde{Y} \in \mathrm{M}^p$ olup, $\widetilde{Y} \notin N$ olduğu yani $A^T \widetilde{Y} + \widetilde{Y}^T A \neq 0$ olacak şekilde bir $\widetilde{Y} \in \mathrm{M}^p$ matrisinin var olduğu kabul edilsin. Bu durumda herhangi $\widetilde{Z} \geq 0$ matrisi için $\alpha\left\langle A^T \widetilde{Y} + \widetilde{Y}^T A, A^T \widetilde{Y} + \widetilde{Y}^T A\right\rangle > 2\left\langle \widetilde{Y}, \widetilde{Z}\right\rangle$ olacak şekilde bir α pozitif reel sayısı bulunabilir. $\widetilde{U} = A\left[\alpha\left(A^T \widetilde{Y} + \widetilde{Y}^T A\right)\right] - \widetilde{Z}$ alınırsa $\widetilde{U} \in M$ olur. Fakat bu durumda

$$
\begin{aligned}
2\left\langle \widetilde{U},\widetilde{Y}\right\rangle &= 2\left\langle A\left[\alpha\left(A^T\widetilde{Y}+\widetilde{Y}^T A\right)\right]-\widetilde{Z},\widetilde{Y}\right\rangle \\
&= 2\left\langle A\left[\alpha\left(A^T\widetilde{Y}+\widetilde{Y}^T A\right)\right],\widetilde{Y}\right\rangle - 2\left\langle \widetilde{Z},\widetilde{Y}\right\rangle \\
&= 2\alpha\left\langle A\left(A^T\widetilde{Y}+\widetilde{Y}^T A\right),\widetilde{Y}\right\rangle - 2\left\langle \widetilde{Z},\widetilde{Y}\right\rangle \\
&= 2\alpha\left\langle A^T\widetilde{Y}+\widetilde{Y}^T A, A^T\widetilde{Y}\right\rangle - 2\left\langle \widetilde{Z},\widetilde{Y}\right\rangle \\
&= \alpha\left\langle A^T\widetilde{Y}+\widetilde{Y}^T A, A^T\widetilde{Y}\right\rangle + \alpha\left\langle A^T\widetilde{Y}+\widetilde{Y}^T A, A^T\widetilde{Y}\right\rangle - 2\left\langle \widetilde{Z},\widetilde{Y}\right\rangle \\
&= \alpha\left\langle A^T\widetilde{Y}+\widetilde{Y}^T A, A^T\widetilde{Y}\right\rangle + \alpha\left\langle \widetilde{Y}^T A, \widetilde{Y}^T A + A^T\widetilde{Y}\right\rangle - 2\left\langle \widetilde{Z},\widetilde{Y}\right\rangle \\
&= \alpha\left\langle A^T\widetilde{Y}+\widetilde{Y}^T A, A^T\widetilde{Y}+\widetilde{Y}^T A\right\rangle - 2\left\langle \widetilde{Z},\widetilde{Y}\right\rangle \\
&> 0
\end{aligned}
$$

elde edilir. Bu ise $\widetilde{Y} \in M^p$ varsayımı ile çelişir. Dolayısıyla $\widetilde{Y} \in M^p$ ise $Y \in N$ bulunur $\left(M^p \subset N\right)$. Böylece ispat tamamlanır. ■

Teorem 4.2.2 ve [68, 69]'daki sonuçlara göre aşağıdaki teorem yazılabilir.

Teorem 4.2.3. $U^* \in M$, $Y^* \in N$ olmak üzere, herhangi $B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ matrisinin $\left\langle U^*, Y^*\right\rangle = 0$ koşulunu sağlayan

$$
B = U^* + Y^* \tag{4.14}
$$

biçiminde bir tek polar ayrışımı vardır.

Teorem 4.2.3'ten, U^* matrisinin M altuzayında ve Y^* matrisinin N altuzayında B'nin izdüşümleri olduğu görülür.

Teorem 4.2.4. X^*, Y^* ve Z^* üçlüsünün (4.7) optimizasyon probleminin çözümü olduğu kabul edilsin. $U^* \in \mathbb{R}^{m\times n}$ matrisi

$U^{*}=B-Y^{*}=AX^{*}-Z^{*}$

eşitliği ile tanımlansın. Bu durumda U^{*} ve Y^{*} Teorem 4.2.3'ün koşullarını sağlar.

İspat. X^{*}, Y^{*} ve Z^{*} üçlüsü (4.7) optimizasyon probleminin çözümü olduğu için

$A^{T}Y^{*}+Y^{*T}A=0$, $AX^{*}+Y^{*}-Z^{*}=B$, $Y^{*}\geq 0$, $Z^{*}\geq 0$ ve $\left\langle Y^{*},Z^{*}\right\rangle =0$

ifadeleri bulunur. Bu koşullar (4.7) optimizasyon probleminin KKT optimallik koşullarıdır. Bundan dolayı $Y^{*}\in N$, $U^{*}=B-Y^{*}=AX^{*}-Z^{*}\in M$ ve ayrıca

$$\begin{aligned}
\left\langle U^{*},Y^{*}\right\rangle &=\left\langle AX^{*}-Z^{*},Y^{*}\right\rangle \\
&=\left\langle AX^{*},Y^{*}\right\rangle -\left\langle Z^{*},Y^{*}\right\rangle \\
&=\frac{1}{2}\left\langle AX^{*},Y^{*}\right\rangle +\frac{1}{2}\left\langle AX^{*},Y^{*}\right\rangle \\
&=\frac{1}{2}\left(\left\langle AX^{*},Y^{*}\right\rangle +\left\langle \left(AX^{*}\right)^{T},\left(Y^{*}\right)^{T}\right\rangle \right) \\
&=\frac{1}{2}\left(\left\langle AX^{*},Y^{*}\right\rangle +\left\langle \left(X^{*}A^{T}\right),Y^{*T}\right\rangle \right) \\
&=\frac{1}{2}\left(\left\langle X^{*},A^{T}Y^{*}\right\rangle +\left\langle X^{*},Y^{*T}A\right\rangle \right) \\
&=\frac{1}{2}\left\langle X^{*},A^{T}Y^{*}+Y^{*T}A\right\rangle =0
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ispatı tamamlar. ■

X^{*} , Y^{*} ve Z^{*} üçlüsünün (4.7) optimizasyon probleminin çözümü olması, durumunda $AX^{*}-Z^{*}$ ve Y^{*} matrislerinin sırasıyla M ve N altuzayları üzerinde B'nin izdüşümleri olduğu Teorem 4.2.4'ten görülür. Bu Teorem 4.2.3 ile birlikte düşünüldüğünde (4.7) optimizasyon probleminin, X^{*}, Y^{*} ve Z^{*} çözümünün var olduğunu ve $AX^{*}-Z^{*}$ ve Y^{*} matrislerinin tek olduğunu görterir.

4.3. Bir İteratif Metod

Bu kısımda ilk olarak (4.7) matris eşitsizliği en küçük düzeltme problemini çözmek için bir iteratif algoritma verilmektedir. Sonra iteratif algoritma ile üretilen $\{X_k\}$, $\{Y_k\}$ ve $\{Z_k\}$ dizilerinin (4.7) matris eşitsizliği en küçük düzeltme probleminin bir $\left(X^*, Y^*, Z^*\right)$ çözümüne yakınsaklığı gösterilmektedir. Ayrıca, iteratif algoritmayı durdurma kriteri ve (4.3) probleminin çözümü verilmektedir.

Algoritma 4.3.1.

Adım 1. $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ve $X_0 \in S\mathbb{R}^{n \times n}$ matrislerini gir ve $Y_0 = \left(B - AX_0\right)_+$, $Z_0 = \left(AX_0 - B\right)_+$ matrislerini hesapla.

Adım 2. $k = 1, 2, ...,$ için yakınsaklık sağlanana kadar aşağıdakileri yap.

(i) $$\min \left\| AW - Y_k \right\| \tag{4.15}$$

en küçük kareler probleminin W_k simetrik çözümü bul.

(ii) $X_{k+1} = X_k + W_k$, $Y_{k+1} = \left(B - AX_{k+1}\right)_+$, $Z_{k+1} = \left(AX_{k+1} - B\right)_+$

çözüm tahminini güncelle.

(iii) Yakınsaklığı test et.

$\left\| Y_i - Y_{i-1} \right\| \le \varepsilon$ yada $\left\| \left(AX_i - Z_i\right) - \left(AX_{i-1} - Z_{i-1}\right) \right\| \le \varepsilon$ koşulları Algoritma 4.3.1'de durdurma kriteri olarak kullanılabilir. Burada $\varepsilon > 0$ küçük bir hata payıdır. (4.15) problemi geleneksel matris en küçük kareler problemidir. Onun çözümleri

[9,70,71]'de sunulan direkt metodlar veya [21,31,32,72]'de sunulan CG tipli iteratif metodlardan herhangi biri ile elde edilebilir.

Lemma 4.3.2. $B \in \left\{ AX \in \mathbb{R}^{m\times n} \middle| X \in S\mathbb{R}^{n\times n} \right\}$, $C \in \left\{ Y \in \mathbb{R}^{m\times n} \middle| A^T Y + Y^T A = 0 \right\}$ olmak üzere, $D = B + C$ olsun. Bu durumda

$$\|C\|^2 = \|D\|^2 - \|B\|^2$$

dır.

İspat. $D = B + C$ olduğundan

$$\|D\|^2 = \|B + C\|^2$$

şeklinde yazılır. Norm tanımı kullanılırsa

$$\begin{aligned} \|D\|^2 &= iz\left((B+C)^T (B+C) \right) \\ &= iz\left(\left(B^T + C^T\right)(B+C) \right) \\ &= iz\left(B^T B + B^T C + C^T B + C^T C \right) \\ &= iz\left(B^T B + C^T C \right) \\ &= iz\left(B^T B \right) + iz\left(C^T C \right) \\ &= \|B\|^2 + \|C\|^2 \end{aligned}$$

olur. Buradan $\|C\|^2 = \|D\|^2 - \|B\|^2$ elde edilir. ■

Algoritma 4.3.1 için aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 4.3.3. Algoritma 4.3.1 ile $\{X_k\}$, $\{Y_k\}$ ve $\{Z_k\}$ dizilerinin oluşturulduğu ve $B = U^* + Y^*$ ifadesinin, (4.12)'deki gibi B'nin yegane polar ayrışımı olduğu kabul edilsin. Bu durumda,

$$\lim_{k\to\infty} Y_k = Y^* \text{ ve } \lim_{k\to\infty}\left(AX_k - Z_k\right) = U^* \tag{4.16}$$

olur.

İspat. W_k matrisi (4.15) en küçük kareler probleminin çözümü olduğu için, $\|AW_k - Y_k\| \le \|Y_k\|$ elde edilir. Diğer taraftan, Algoritma 4.3.1 ve Z_k'nın negatif olmayan matris olması gözönüne alınırsa

$$\begin{aligned}
\|Y_{k+1}\| &= \left\|\left(B - AX_{k+1}\right)_+\right\| \\
&= \left\|\left(B - A\left(X_k + W_k\right)\right)_+\right\| \\
&= \left\|\left(B - AX_k - AW_k\right)_+\right\| \\
&= \left\|\left(B - AX_k + Z_k - Z_k - AW_k\right)_+\right\| \\
&= \left\|\left(Y_k - AW_k - Z_k\right)_+\right\| \\
&\le \left\|\left(Y_k - AW_k\right)_+\right\| \\
&\le \left\|AW_k - Y_k\right\|
\end{aligned} \tag{4.17}$$

yazılabilir. $Y_k \ge 0$ ile birlikte (4.17) eşitsizliğinden $\{\|Y_k\|\}$ dizisinin monoton azalan olduğu ve alttan sınırlı olduğu ve görülür. Sonuç olarak, bu dizi yakınsaktır ve

$$\lim_{k\to\infty}\left(\|Y_k\|^2 - \|Y_{k+1}\|^2\right) = 0 \tag{4.18}$$

dır. Ayrıca, $\{Y_k\}$ dizisi sınırlı olduğu için, en az bir yığılma noktasına sahiptir. Şimdi $\{Y_k\}$ dizisinin herhangi bir yığılma noktasının Y^*'a eşit olduğu gösterilecektir. Sonuç olarak, dizi Y^*'a yakınsar.

$\{Y_k\}$ dizisinin herhangi bir yığılma noktası $\widetilde{Y}$ olsun. O zaman, $\widetilde{Y} \geq 0$ olduğu açıktır. $\widehat{Y}_k \in \left\{ AX \in \mathbb{R}^{m\times n} \middle| X \in S\mathbb{R}^{n\times n} \right\}$ $\widetilde{Y}_k \in \left\{ Y \in \mathbb{R}^{m\times n} \middle| A^T Y + Y^T A = 0 \right\}$ olmak üzere, herhangi $Y_k \geq 0$ matrisinin

$$Y_k = \widehat{Y}_k + \widetilde{Y}_k$$

biçiminde yegane ortoganal ayrışıma sahip olduğu görülür. Ayrıca, W_k (4.15) en küçük kareler probleminin çözümü olduğu için bu matris $AW_k = \widehat{Y}_k$ ifadesini sağlar ve Lemma 4.3.1'den

$$\left\| Y_{k+1} \right\|^2 \leq \left\| AW_k - Y_k \right\|^2 = \left\| \widetilde{Y}_k \right\|^2 = \left\| Y_k \right\|^2 - \left\| \widehat{Y}_k \right\|^2 \tag{4.19}$$

elde edilir. Buradan (4.19) eşitsizliği ile birlikte (4.18)

$$\lim_{k\to\infty} \widehat{Y}_k = 0$$

olmasını sağlar. Sonuç olarak, $\{Y_k\}$ dizisinin herhangi bir yığılma noktası $\{\widetilde{Y}_k\}$ dizisinin bir yığılma noktasıdır. Bu ise $\widetilde{Y} \in N$ olduğunu gösterir.

Bu ispat $U^* = B - \widetilde{Y}$ matrisinin M 'ye ait olduğunu da göstererek bitirilir. Bu amaçla $Z \geq 0$ koşulu ve $X \in S\mathbb{R}^{n\times n}$ kısıtı altında

$$\min \widetilde{F}(X,Y) = \left\| AX - Z - B + \widetilde{Y} \right\|$$

en küçük kareler problemi ele alınır. Bu problem her zaman çözülebilir. Diğer deyişle bu problemi çözen $\widetilde{X} \in S\mathbb{R}^{n\times n}$ matrisi ve negatif olmayan $\widetilde{Z}$ matrisi vardır. Bu durumda

$$AX_k - Z_k - B + Y_k = 0 \tag{4.20}$$

eşitliği $\widetilde{F}\left(\widetilde{X},\widetilde{Z}\right)=0$ eşitliğini sağlar. Böylece, çözüm matrisleri

$$A\widetilde{X} - \widetilde{Z} - B + \widetilde{Y} = 0$$

ifadesini sağlar ve

$$B = \left(A\widetilde{X} - \widetilde{Z}\right) + \widetilde{Y} = \widetilde{U} + \widetilde{Y}$$

ifadesi B 'nin yegane polar ayrışımıdır. Yani, $\widetilde{U} = U^*$ ve $\widetilde{Y} = Y^*$ 'dır. (4.20)'in bir başka sonucu

$$\lim_{k\to\infty}\left(AX_k - Z_k\right) = \lim_{k\to\infty}\left(B - Y_k\right) = B - Y^* = U^*$$

olmasıdır. Bu ispatı bitirir. ■

(4.3) en küçük düzeltme probleminin çözümlerini göstermek için kullanışlı olan aşağıdaki lemma, [70] ve [71] çalışılmalarında bulunabilir.

Lemma 4.3.4. $AX = B$ matris denkleminin $X \in S\mathbb{R}^{n\times n}$ için çözülebilir olmasının gerek ve yeter koşulu $AB^T = BA^T$ ve $AA^\dagger B = B$ olmasıdır. $AX = B$ matris denkleminin $S\mathbb{R}^{n\times n}$ 'de çözülebilir olduğu kabul edilsin, bu durumda onun yegane minimum Frobenius norm çözümü

$$X = A^\dagger B + (I - A^\dagger A)(A^\dagger B)^T$$

olup ve genel çözümler

$$X = A^{\dagger}B + (I - A^{\dagger}A)(A^{\dagger}B)^{T} + (I - A^{\dagger}A)G(I - A^{\dagger}A)$$

olarak ifade edilebilir. Burada I , $n \times n$ boyutlu birim matris ve G , $n \times n$ boyutlu bir keyfi simetrik matristir.

Yukarıdaki sonuçlar düşünüldüğünde aşağıdaki uyarılar verilebilir.

Uyarı 4.3.5. Algoritma 4.3.1 tarafından oluşturulan $\{X_k\}$, $\{Y_k\}$, $\{Z_k\}$ dizilerinin limitlerinin var olmasını Teorem 4.3.3 garanti eder. Bu dizilerin limitleri sırasıyla X^* , Y^* ve Z^* olarak kabul edilsin, bu durumda $\forall G \in S\mathbb{R}^{n \times n}$ için

$$\widehat{X} = A^{\dagger}(B - Y^* + Z^*) + (I - A^{\dagger}A)\left[A^{\dagger}(B - Y^* + Z^*)\right]^{T} + (I - A^{\dagger}A)G(I - A^{\dagger}A)$$

ile birlikte Y^* , (4.3) en küçük düzeltme probleminin çözümüdür. Ayrıca, $A\widehat{X} - Z^*$ ve Y^* sırasıyla M ve N altuzayları üzerine B 'nin izdüşümüdür.

Uyarı 4.3.6. $AX \geq B$ matris eşitsizliğinin çözülebilir olması için gerek ve yeter koşul $Y^* = 0$ olmasıdır. Eğer $AX \geq B$ matris eşitsizliği çözülebilirse, o zaman Lemma 4.3.2'den

$$\widehat{X} = A^{+}(B + Z^*) + (I - A^{+}A)\left[A^{\dagger}(B + Z^*)\right]^{T} + (I - A^{\dagger}A)G(I - A^{\dagger}A)$$

ifadesi $AX \geq B$ matris eşitsizliğinin çözümüdür. Burada G , $n \times n$ boyutlu keyfi simetrik matristir.

Uyarı 4.3.7. Eğer $Y^* = 0$ ve $Z^* = 0$ ise, X^* matrisi $AX = B$ matris denkleminin çözümüdür. Bu durumda $AX = B$ 'nin genel çözümleri ve yegane minimum Frobenius norm çözümü Lemma 4.3.4'deki gibi belirtilebilir.

Bu kısım (4.7) problemin Algoritma 4.3.1 kullanarak çözümünü içeren iki örnek ile sonuçlandırılacaktır.

Örnek 4.3.8.

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & -3 & -4 & -3 & 0 \\ -4 & -4 & -4 & 1 & 0 & 0 & -3 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 0 & 5 & -1 \\ -2 & -2 & 3 & 1 & 1 & 3 & -3 \\ -3 & 4 & -4 & -1 & 3 & 0 & 3 \\ -4 & -1 & 0 & -5 & 2 & -2 & -1 \\ -2 & 3 & -2 & 0 & 4 & -4 & 4 \\ -3 & 1 & 1 & -1 & -4 & 2 & -5 \end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix} 3 & -2 & -4 & -1 & 0 & -3 & 1 \\ 1 & -3 & 3 & -4 & 5 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & -4 & -4 & 3 & -2 \\ 2 & -4 & 2 & 1 & -3 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -3 & 3 & 3 & -3 & 3 \\ -4 & 1 & 0 & 2 & 4 & -2 & -1 \\ 4 & 2 & 2 & -2 & 3 & 3 & -1 \\ -5 & 4 & 5 & 4 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

olarak verilsin. Bu durumda Algoritma 4.3.1 uygulandığında

$$X=\begin{pmatrix} -0.2958 & -0.3331 & -0.1694 & -0.9688 & 0.08573 & -0.3668 & -0.2705 \\ -0.3331 & 0.6066 & 0.3919 & -0.1612 & -0.0626 & 0.5210 & 0.1923 \\ -0.1694 & 0.3919 & 0.1030 & 0.2919 & -0.3940 & -0.3633 & -0.5406 \\ -0.9688 & -.01618 & 0.2919 & -3.2794 & 0.4705 & 0.2366 & -0.1578 \\ 0.0857 & -0.0626 & -0.3940 & -0.4705 & 0.5531 & -0.1159 & -0.2990 \\ -0.3668 & 0.5210 & -0.3633 & 0.2366 & 0.1159 & 0.9498 & 0.2480 \\ 0.2705 & 0.1923 & -0.5406 & -0.1578 & 0.2990 & 0.2480 & -0.4193 \end{pmatrix}$$

elde edilir.

Örnek 4.3.9.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 & 2 & 1 \\ 5 & -3 & -5 & -1 & 5 \\ -5 & 3 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 4 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 & -1 & 4 \\ -1 & 3 & 2 & 0 & 1 \\ 5 & -4 & -4 & 1 & -3 \\ -4 & 0 & -1 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

olarak verilsin. Bu durumda Algoritma 4.3.1 uygulandığında

$$X = \begin{pmatrix} -0.2589 & 0.5711 & 0.2620 & -0.0027 & 0.7520 \\ 0.5711 & -0.1476 & 0.3088 & 0.0208 & 0.3653 \\ 0.2620 & 0.3088 & -0.0594 & 0.1501 & 0.2979 \\ -0.0027 & 0.0208 & 0.1501 & 0.1429 & 0.3102 \\ 0.7520 & 0.3653 & 0.2979 & 0.3102 & 0.1785 \end{pmatrix}$$

elde edilir.

Elde edilen çözümlerde (4.15)’in çözümü için [2]’de tavsiye edilen yöntemler yerine [33]’deki yöntem kullanılmıştır. Bu yöntem [2]’de tavsiye edilenlerle karşılaştırıldığında çok daha az adımda ve çok daha hassas çözüm vermiştir.

BÖLÜM 5. KISITLAMALI $AXB \geq C$ TUTARLI VEYA TUTARSIZ MATRİS EŞİTSİZLİĞİNİN ÇÖZÜMÜ İÇİN İTERATİF METODLAR

5.1. Giriş

S kümesi, $\mathbb{R}^{n\times n}$ 'nin simetrik, skew-simetrik, (R,S) -simetrik, v.b. matrislerinden oluşan alt matris kümelerinden biri ve $X \in S$ olmak üzere

$$AXB \geq C \tag{5.1}$$

kısıtlı matris eşitsizliğini çözme problemi ele alınsın. Burada $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times q}$, $C \in \mathbb{R}^{m\times q}$ verilen matrislerdir. Tabii ki (5.1) kısıtlı matris eşitsizliği (3.1) lineer eşitsizlik sisteminin bir doğal genelleştirilmesi olarak kabul edilebilir, $Ax \geq b$ eşitsizliği ise bir çok uygulamada görüldüğü gibi [73-76] bu çalışmanın üçüncü bölümünde tartışılmıştır. Ayrıca, (5.1) eşitsizliği (4.1) eşitsizliğinin de genelleştirilmesi olarak düşünülebilir.

Bununla birlikte (5.1) kısıtlı matris eşitsizliği tutarsız olabilir yani,

$$\left\{X \in S \middle| AXB \geq C\right\}$$

kümesi boş küme olabilir. (5.1) kısıtlı matris eşitsizliğinin üstesinden gelmek için iki yol şunlardır: Birincisi matris denklemlerinin geleneksel en küçük kareler problemlerine benzer şekilde

$$\min f(X) = \left\|(C - AXB)_+\right\|, \; X \in S \tag{5.2}$$

kısıtlı en küçük kareler problemini çözmek sureti ile (5.1) tutarsız kısıtlı matris eşitsizliği çözülebilir. $f(X)$ fonksiyonu S üzerinde sürekli olduğu için (5.2) probleminin çözüm kümesi boş değildir. Ayrıca, $f^*(X)=0$ yani $(C-AX^*B)_+=0$ olacak şekilde $X^*\in S$ varsa, bu durumda $(C-AX^*B)=(C-AX^*B)_-\leq 0$ elde edilir. Bunun anlamı (5.1)'in tutarlı oluşudur. Tutarsız kısıtlı (5.1) matris eşitsizliğinin üstesinden gelmenin bir diğer yolu $AXB+Y\geq C$, $Y\geq 0$, $X\in S$ koşulları altında

$$\min P(X,Y)=\|Y\| \tag{5.3}$$

en küçük sapma problemini çözmektir. Aslında bu, $AXB\geq C-Y$ biçiminde düzenlenmiş matris eşitsizliği tutarlı olacak şekilde minimum normlu bir negatif olmayan düzeltme matrisi olan Y 'nin bulunmasıdır. (5.3) en küçük sapma probleminin $AXB+Y\geq C$ koşulu altında

$$\min_{X\in S}\left(\min_{Y\geq 0}\|Y\|\right) \tag{5.4}$$

biçiminde yeniden ifade edilebileceği açıktır. $Y=(C-AXB)_+$ matrisi verilen $X\in S$ matrisi için $AXB+Y\geq C$ koşulu altında

$$\min_{Y\geq 0}\|Y\| \tag{5.5}$$

iç minimizasyon probleminin çözümüdür. Bu durumda (5.4) ifadesi (5.2) biçiminde yeniden yazılabilir. Bu ise (5.2) ve (5.3) problemlerinin denkliğini sağlar.

Peng matris eşitsizliği ile kısıtlanmış bir matris denkleminin çözümünü bulmak için bir metod önerdi ve onun esas katkısı kısıtsız (5.3) en küçük sapma problemini çözmek için bir iteratif metod sunmasıdır [77]. Ayrıntılar için [77]'deki Algoritma 2.1'e bakılabilir. İterasyon aşağıdaki gibi yapılabilir.

Algoritma 5.1.1. (Algoritma EM)

$X_0 \in S$ keyfi başlangıç matrisi verilsin.

$R_0 = C - AX_0B$, $Y_0 = (R_0)_+$, $Z_0 = (-R_0)_+$

olsun. $k = 0,1,2,...,$ için k . iterasyonun temel adımları aşağıdaki gibidir.

Adım 1: $$W_k = \arg\min_{W \in S} \|AWB - Y_k\| \qquad (5.6)$$

en küçük kareler alt problemini çözerek W_k matrisini hesapla.

Adım 2: $X_{k+1} = X_k + W_k$

biçiminde tahmini çözümünü güncelle.

Adım 3: $R_{k+1} = C - AW_{k+1}B$, $Y_{k+1} = (R_{k+1})_+$, $Z_{k+1} = (-R_{k+1})_+$

biçiminde rezidü matrisini ve onun bileşenlerini güncelle.

Adım 4: Yakınsaklığı test et.

Algoritma 5.1.1 çeşitli S lineer kısıtları altında (5.3) en küçük sapma veya (5.2) en küçük kareler problemini çözmek için genelleştirilebilir. Algoritma EM'nin mantığı bir iniş yönü olarak (5.6)'nın çözümünü kullanmak ve bu yön boyunca çözümü güncellemektir. Bu iteratif metodun en çok emek harcanan kısmı (5.6) kısıtlı en küçük kareler alt probleminin çözümünü bulmada ve her iterasyon adımında

(5.6)'nın W_k tam çözümüne bağlı bu iteratif metodun yakınsaklığını kontrol etmededir. Detaylar için [77]'deki Teorem 2.5'e bakılır. Böylece hesaplama iş yükü oldukça ağırdır. Ek olarak [77]'deki kısıtsız en küçük kareler problemini çözmek için Peng Moore-Penrose genelleştirilmiş tersi kullanmıştır. Fakat çeşitli S kısıtlı kümeleri durumunda (5.6) çözüm için Moore-Penrose genelleştirilmiş ters kullanmak uygun değildir.

Bu zorluğun üstesinden gelmek için bu bölümde yeniden düzenlenmiş bir iteratif metod sunuldu. Bu yeni algoritma (5.2) en küçük kareler problemini çözmek için olan Algoritma EM'nin bir genelleştirilmesidir. İki iteratif metod arasındaki esas fark (5.6) en küçük alt problemini çözmede yatar. Bu yeni iteratif metodda her iterasyon adımında (5.6)'nın tam çözümü yerine yalnızca yaklaşık çözümünü hesaplamak gerekir. Burada temel mantık her iterasyonda düşük boyutlu bir özel Krylov altuzay matrisi üzerinde bir kısıtlı en küçük kare alt problemini ele almaktır. Bu Krylov altuzay matrisi S 'de kısıtlıdır. Ayrıca, bu Krylov altuzay matrisi üzerinde kısıtlanmış en küçük kareler alt problemi LSQR metodu ile daha az hesaplama yapılarak çözülebilir.

Kısım 2'de bazı ön bilgiler verilip (5.2) en küçük kareler problemi karakterize edilmeye çalışılmıştır. Kısım 3'te (5.2) en küçük kareler problemini çözmek için yeniden düzenlenmiş bir iterasyon algoritması sunulmakta ve bu algoritmanın yakınsaklık analizi verilmektedir.

5.2. (5.2) Probleminin Karakterizasyonu

Bu kısımda (5.2) en küçük kareler probleminin karakterizasyonunu sunmak için öncelikle bazı gösterimler tanımlanacak ve Hilbert uzayında polar ayrışım teoreminin [68,69] yanında altuzay üzerinde klasik projeksiyon teoremi [78] hatırlatılacaktır.

Lemma 5.2.1. V bir Hilbert uzayı ve M onun bir altuzayı olsun. Bu durumda $m^* \in M$ 'nin M üzerinde $v \in V$ 'nin yegane ortoganal iz düşüm vektörü olmasının gerekli ve yeterli koşulu m^* 'ın $\forall\, m \in M$ için

$$\left\langle v-m^{*},m\right\rangle =0 \tag{5.7}$$

denklemini sağlamasıdır.

Bu bölümde $\mathbb{R}^{n\times n}$ ’nin S üzerine ortogonal iz düşümü P ile gösterilmektedir. Bundan dolayı Lemma 5.2.1’den herhangi $Y\in\mathbb{R}^{n\times n}$ ve $X\in S$ için

$$\left\langle Y,X\right\rangle =\left\langle P\left(Y\right),X\right\rangle \tag{5.8}$$

sağlanır. Ayrıca,

$$\left\|P\left(Y\right)\right\|^{2}=\left\langle Y,P\left(Y\right)\right\rangle \leq\left\|Y\right\|\left\|P\left(Y\right)\right\|$$

olur. Bu ise $\forall Y\in\mathbb{R}^{n\times n}$ için

$$\left\|P\left(Y\right)\right\|\leq\left\|Y\right\| \tag{5.9}$$

ifadesini sağlar.

Lemma 5.2.2. V ve Y Hilbert uzayında kapalı konveks koni U olsun. Onun polar konisi, yani kapalı konveks konisi

$$Y=\left\{y\in V\left|\left\langle u,v\right\rangle \leq0,\quad\forall u\in U\right.\right\}$$

ile tanımlanır. Bu durumda herhangi $v\in V$ vektörü $v=u^{*}+y^{*}$ biçiminde tek bir polar ayrışıma sahiptir. Burada

$$u^{*}\in U,\ y^{*}\in Y,\text{ ve }\left\langle u^{*},y^{*}\right\rangle =0 \tag{5.10}$$

dır.

Lemma 5.2.3. A, $S\times\mathbb{R}^{m\times q}$ ’den $\mathbb{R}^{m\times q}$ ’ye bir lineer dönüşüm olsun, o zaman

$$C=\left\{A\left(X,Z\right)\middle|X\in S,\quad Z\in\mathbb{R}^{m\times q},\quad Z\geq 0\right\}$$

matris kümesi $\mathbb{R}^{m\times q}$ ’de bir kapalı konveks konidir.

İspat. C matris kümesinin direkt olarak tanım düşünüldüğünde bir konveks koni olduğu açıktır. Burada sadece C ’nin kapalılığını göstermeye ihtiyaç duyulur.

İlk olarak A ’nın sıfır uzayının aşikar uzay yani,

$$N\left(A\right)=\left\{\left(X,Y\right)\in S\times\mathbb{R}^{m\times q}\middle|A\left(X,Z\right)=0\right\}=\left\{\left(0,0\right)\right\}$$

olduğu kabul edilsin. Bu, A lineer dönüşümünün bire-bir dönüşüm olmasını sağlar. Eğer C ’nin $\left\{A\left(X_k,Y_k\right)\right\}_{k=1}^{\infty}$ dizisi yakınsak ise bu durumda

$$\lim_{k\to\infty}A\left(X_k,Z_k\right)=A\left(X^*,Z^*\right)$$

olacak şekilde $X^*\in S$ ve $Z^*\in\mathbb{R}^{m\times q}$ vardır. Çünkü A lineer dönüşümünün görüntüsü $\mathbb{R}^{m\times q}$ ’nün kapalı bir altuzaydır. Ayrıca A ’nın bire-bir, sürekli ve sınırlı olması gerçeğinin bir sonucu olarak $k\to\infty$ iken $X_k\to X^*$ ve $Z_k\to Z^*$ olur. Böylece $X^*\in S$ ve $Z^*\geq 0$ için $A\left(X^*,Y^*\right)\in C$ olduğu ve C kümesinin kapalı olduğu gösterildi.

A'nın sıfır uzayı aşikar değilse bu durumda $I_1 = J_1 = \{1,2,...,n\}$, $I_2 = \{1,2,...,m\}$ ve $J_2 = \{1,2,...,q\}$ olmak üzere $A\left(\widetilde{X},\widetilde{Z}\right) = 0$ ve

$$\varepsilon_1 = \left\{(s,t) \in I_1 \times J_1 \quad \middle| \tilde{x}_{st} \neq 0\right\} \neq \varnothing \text{ eğer } \widetilde{X} = \left(\tilde{x}_{st}\right) \neq 0, \tag{5.11}$$

$$\varepsilon_2 = \left\{(i,j) \in I_2 \times J_2 \quad \middle| \tilde{z}_{ij} < 0\right\} \neq \varnothing \text{ eğer } \widetilde{Z} = \left(\widetilde{z_{ij}}\right) \neq 0, \tag{5.12}$$

olacak şekilde $\left(\widetilde{X},\widetilde{Z}\right) \in S \times R^{m\times n}$ sıfırdan farklı matris ikilisi var olmak zorundadır. Genelliği bozmaksızın $\widetilde{X}$ ve $\widetilde{Z}$ matrislerinin her ikisinin de sıfırdan farklı matris olduğu ve (5.11) ile (5.12)'yi sağladıkları kabul edilebilir. Böylece,

$$t_1 = \min_{(s,t)\in\varepsilon_1} \left\{-\frac{x_{st}}{\tilde{x}_{st}}\right\},$$

$$t_2 = \min_{(i,j)\in\varepsilon_2} \left\{-\frac{z_{ij}}{\tilde{z}_{ij}}\right\} \geq 0$$

olmak üzere, C 'nin her $A(X,Z)$ matrisi $A\left(X + t_1\widetilde{X}, Z + t_2\widetilde{Z}\right)$ olarak yeniden yazılabilir. Bu yüzden $X + t_1\widetilde{X} \in S$ ve $Z + t_2\widetilde{Z} \geq 0$ olur. Ayrıca, her matrisin sıfıra eşit en az bir elemanı vardır. Sonuç olarak C matris kümesi

$$C = \bigcup_{(s,t)\in I_1\times J_1,(i,j)\in I_2\times J_2} C_{[s,t;i,j]} = \bigcup_{(s,t)\in I_1\times J_1,(i,j)\in I_2\times J_2} \left\{A(X,Z) \middle| X \in S_{[s,t]}, Z \in \mathbb{R}^{m\times q}_{[i,j]}, Z \geq 0\right\} \tag{5.13}$$

biçimde yeniden yazılabilir. Burada

$$S_{[s,t]} = \left\{X \middle| X \in S, \quad x_{st} = 0\right\} \text{ ve } \mathbb{R}^{m\times q}_{[i,j]} = \left\{Z \middle| Z \in \mathbb{R}^{m\times q}, \quad z_{ij} = 0\right\}$$

dır. $S_{[s,t]} \times \mathbb{R}^{m\times q}_{[i,j]}$ kümesi, $S \times \mathbb{R}^{m\times q}$ kümesinin bir altuzayıdır, dolayısıyla A 'nın $S_{[s,t]} \times \mathbb{R}^{m\times q}_{[i,j]}$ üzerinde de bir lineer dönüşüm olduğu açıktır. Eğer $S_{[s,t]} \times \mathbb{R}^{m\times q}_{[i,j]}$ altuzayı üzerinde A 'nın sıfır uzayı aşikar uzaysa, bu durumda karşılık gelen $C_{[s,t;i,j]}$ matris kümesi ispatın ilk kısmından kapalıdır. Eğer $S_{[s,t]} \times \mathbb{R}^{m\times q}_{[i,j]}$ altuzayı üzerinde A 'nın sıfır uzayı aşikar uzay değilse, C matris kümesi, sonlu tane kapalı kümenin birleşmesi olarak ifade edilene kadar önceki düşünce tekrarlanabilir. Bu C 'nin kapalılığını sağlar. ■

$S \times \mathbb{R}^{m\times q}$ 'den $\mathbb{R}^{m\times q}$ 'ye

$$A(X,Z) = AXB - Z = (A,-I)\begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & Z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B \\ I \end{pmatrix}$$

şeklinde bir A lineer dönüşümü tanımlansın. Bu durumda Lemma 5.2.3'ten

$$U = \left\{ U \in \mathbb{R}^{m\times q} \middle| U = AXB - Z, \quad X \in S, \quad Z \geq 0 \right\} \tag{5.14}$$

matris kümesinin kapalı konveks koni olduğu bilinir. Ayrıca [77]'deki Torem 2.2'nin ispat metodu ve (5.8) eşitliği kullanılarak [77]'deki Torem 2.2'nin bir genellemesi olan aşağıdaki sonuç elde edilir.

Lemma 5.2.4. (5.14) matris kümesinin polar konisi

$$Y = \left\{ Y \in \mathbb{R}^{m\times q} \middle| P\left(A^T Y B^T\right) = 0, \quad Y \geq 0 \right\}$$

dır.

Bu kısmın esas sonucu yukarıdaki lemmaya göre aşağıdaki gibi verilebilir.

Teorem 5.2.5. $X^* \in S$ matrisinin (5.2) en küçük kareler probleminin bir çözümü olması için gerekli ve yeterli koşul X^* matrisinin

$$P\left(A^T\left(C - AX^*B\right)_+\right)B^T = 0 \tag{5.16}$$

koşulunu sağlamasıdır.

İspat. $X^* \in S$, (5.2)'nin çözümü olsun. Bu durumda X^*

$$\min_{X \in S} \varphi(X) = \left\| C + \left(AX^*B - C\right)_+ - AXB \right\| \tag{5.17}$$

en küçük kareler probleminin de bir çözümüdür. Aksi takdirde

$$f\left(\widetilde{X}\right) = \left\| C + \left(A\widetilde{X}B - C\right)_+ - A\widetilde{X}B \right\| \leq \varphi\left(\widetilde{X}\right) < \varphi\left(X^*\right) = f\left(X^*\right)$$

olacak şekilde bir $\widetilde{X} \in S$ matrisi mevcut olur. Bu ise varsayım ile çelişir. Sonuç olarak AX^*B matrisi $C + \left(AX^*B - C\right)_+$'nin

$$\mathrm{Range}(A, B) = \left\{ AXB \,\middle|\, X \in S \right\}$$

altuzayı üzerine ortoganal iz düşümüdür. Bu durumda Lemma 5.2.1'den $\forall X \in S$ için

$$\left\langle C + \left(AX^*B - C\right)_+ - AX^*B, AXB \right\rangle = \left\langle \left(C - AX^*B\right)_+, AXB \right\rangle = 0 \tag{5.18}$$

elde edilir. (5.8) ve (5.18)'den

$$\left\langle A^T\left(C - AX^*B\right)_+ B^T, X \right\rangle = \left\langle P\left(A^T\left(C - AX^*B\right)_+ B^T\right), X \right\rangle = 0$$

eşitlikler herhangi bir $X \in S$ matris için sağlanır ve $P\left(A^T\left(C - AX^*B\right)_+ B^T\right) = 0$ olduğu görülür.

Tersine, $X^* \in S$ 'nin (5.16)'yı sağladığını ve $\widetilde{X} \in S$ 'nin (5.2)'nin bir en küçük kareler çözümü olduğu kabul edilsin. Gereklilikten $\widetilde{X}$ 'nın (5.16)'yı da sağladığı ve bu durumda hem $\left(C - AX^*B\right)_+$ 'nin hemde $\left(C - A\widetilde{X}B\right)_+$ 'nin (5.15) polar konisine ait olduğu görülür. Diğer taraftan $C \in \mathbb{R}^{m\times q}$ matrisi

$$C = AX^*B + \left(C - AX^*B\right)_- + \left(C - AX^*B\right)_+ = A\widetilde{X}B + \left(C - A\widetilde{X}B\right)_- + \left(C - A\widetilde{X}B\right)_+$$

şeklinde parçalanabilir. Ayrıca (5.8) ve (5.16)'dan

$$\left\langle AX^*B + \left(C - AX^*B\right)_-, \left(C - AX^*B\right)_+ \right\rangle = 0$$

$$\left\langle A\widetilde{X}B + \left(C - A\widetilde{X}B\right)_-, \left(C - A\widetilde{X}B\right)_+ \right\rangle = 0$$

elde edilir. Sonuç olarak C matrisinin polar ayrışımının tekliği ve önceki eşitliğin X^* 'ın (5.2)'nin en küçük kareler çözümü olduğunu belirtmesi sebebiyle Lemma 5.2.2'den

$$\left(C - AX^*B\right)_+ = \left(C - A\widetilde{X}B\right)_+$$

olduğu görülür. ■

5.3. (5.2)’nin Çözümü İçin İteratif Metod

Öncelikle S ’de içerilen bir özel Krylov matris altuzayı tanımlansın. Bunun için $F\left(X\right)=P\left(A^{T}AXBB^{T}\right)$ ile verilen F , S üzerinde bir lineer operatör olsun. Verilen pozitif s tamsayısı için

$$K_{s}\left(F,V\right)=span\left\{V,F\left(V\right),...,F^{s-1}\left(V\right)\right\}\subseteq S \tag{5.19}$$

ifadesine F lineer operatörü ve $V\in S$ matrisi ile üretilmiş Krylov matris altuzayı denir ve bu altuzayın boyutu s ’yi geçemez. Bundan sonra $F^{k}\left(V\right)$, $F^{k}\left(V\right)=F\left(F^{k-1}\left(V\right)\right)$, $1\leq k\leq s$, biçiminde ardışık olarak tanımlanacak ve $F^{0}\left(V\right)=V$ olarak alınacaktır.

Bu kısımda (5.2)’nin çözümü için yeniden düzenlenmiş bir iteratif yöntem sunup onun yakınsaklık analizi yapılacaktır. İterasyon yöntemi aşağıdaki gibi tanımlanır.

Algoritma 5.3.1. (Algoritma IEM)

s pozitif bir tamsayısı ve $X_{0}\in S$ keyfi bir başlangıç matrisi verilsin.

$R_{0}=C-AX_{0}B,$

$Y_{0}=\left(R_{0}\right)_{+}$

olsun. $k=0,1,2...$, için k . iterasyonun temel adımları aşağıdaki gibidir.

Adım 1: $W_{k}=\arg\min\limits_{W\in K_{s}\left(F,V_{k}\right)}\left\|AWB-Y_{k}\right\|$ (5.20) kısıtlı en küçük kareler alt problemini çözerek W_k 'ı hesapla. Burada $V_k = P\left(A^T Y_k B^T\right)$ ve

$$K_s\left(F, V_k\right) = span\left\{V_k, F\left(V_k\right), ..., F^{s-1}\left(V_k\right)\right\} \tag{5.21}$$

(5.19)'da tanımlanmış Krylov matris altuzayıdır.

Adım 2: Çözüm tahminini

$$X_{k+1} = X_k + W_k \tag{5.22}$$

olarak güncelle.

Adım 3: Rezidü matrisini ve onun billeşenlerini

$$R_{k+1} = C - AX_{k+1}B\,,\; Y_{k+1} = \left(R_{k+1}\right)_+ \tag{5.23}$$

olarak güncelle.

Adım 4: (5.16)'ya göre yakınsaklık testi yap.

Teorem 5.3.2. F lineer operatörünün ayrık özdeğerlerinin sayısı μ olsun. Bu durumda eğer $s \geq \mu$ ise, (5.20)'nin W_k çözümü aynı zamanda (5.6) en küçük kareler alt probleminin de çözümüdür.

İspat. $K_s\left(F, V_k\right)$ Krylov matris altuzayı S 'nin bir altkümesi olduğundan gösterilmesi gereken yalnızca $s \geq \mu$ iken Krylov altuzayında içerilen (5.6)'nın bir en küçük kareler çözümünün var oluşudur.

Lemma 5.2.1 ve (5.8)'den görülür ki, (5.6) en küçük kareler probleminin bir çözümü olması için gerek ve yeterli koşul W_k 'nın

$$F\left(W_k\right)=P\left(A^T Y_k B^T\right)=V_k \tag{5.24}$$

eşitliğini sağlamasıdır. F 'nin bütün ayrık özdeğerleri

$$\lambda_1>\lambda_2>\ldots>\lambda_\mu \geq 0$$

olacak şekilde sıralanmış olsun. F 'in S 'de simetrik operator olduğu açıktır. Çünkü,

$$\langle F(X), Y\rangle=\langle X, F(Y)\rangle$$

eşitliği bütün $X, Y \in S$ için geçerlidir. Bu durumda,

$$p(t)=\left(t-\lambda_1\right)\left(t-\lambda_2\right) \ldots\left(t-\lambda_\mu\right)=t^\mu+a_{\mu-1} t^{\mu-1}+\ldots+a_1 t+a_0$$

F 'nın μ dereceli minimal polinomudur ve

$$p(F)\left(V_k\right)=F^\mu\left(V_k\right)+a_{\mu-1} F^{\mu-1}\left(V_k\right)+\ldots+a_1 F\left(V_k\right)+a_0 V_k=0$$

dır. Eğer F 'nin sıfır uzayı aşikar uzay ise, o zaman $\lambda_\mu>0$ 'dır. Bu ise $a_0 \neq 0$ anlamına gelir.

$$W_k=-\frac{1}{a_0}\left\{F^{\mu-1}\left(V_k\right)+a_{\mu-1} F^{\mu-2}\left(V_k\right)+\ldots+a_1 V_k\right\}$$

olsun. O zaman $s \geq \mu$ olduğu için $W_k \in K_s\left(F, V_k\right)$ ve bu durumda W_k , (5.6)'yı sağlayacağı için (5.24)'ün yegane en küçük kareler çözümüdür.

Eğer F 'nin sıfır uzayı aşikar olmayan uzay ise, $\lambda_\mu = 0$ olur. Bu $a_0 = 0$ ve $a_1 \neq 0$ anlamına gelir.

$$U_k = F^{\mu-1}\left(V_k\right) + a_{\mu-1}F^{\mu-2}\left(V_k\right) + \ldots + a_1 V_k \tag{5.25}$$

olsun. Bu durumda, $F\left(U_k\right) = 0$ ve dolayısıyla $\forall X \in S$ için

$$\left\langle F\left(U_k, X\right)\right\rangle = \left\langle A^T A U_k B B^T, X\right\rangle = \left\langle A U_k B, AXB\right\rangle = 0$$

olduğu görülür. $X = U_k$ alarak, $AU_kB = 0$ elde edilir. Diğer taraftan (5.25) göz önüne alınırsa, $U_k = P\left(A^T E_k B^T\right)$ olacak şekilde $E_k \in S$ matrisi vardır. Dolayısıyla,

$$\left\langle AU_kB, E_k\right\rangle = \left\langle U_k, P\left(A^T E_k B^T\right)\right\rangle = \left\langle U_k, U_k\right\rangle = 0$$

olur, bu ise $U_k = 0$ 'ı sağlar.

$$W_k = -\frac{1}{a_1}\left\{F^{\mu-2}\left(V_k\right) + a_{\mu-1}F^{\mu-3}\left(V_k\right) + \ldots + a_2 V_k\right\}$$

olsun. Bu durumda, $W_k \in K_s\left(F, V_k\right)$ ve ayrıca W_k, (5.24)'ü sağlar. Bu ise W_k 'nın (5.6) en küçük kareler alt probleminin bir çözümü olduğu anlamına gelir.

s pozitif tam sayısı yeterince büyük olduğunda (5.20)'deki W_k 'nın aynı zamanda (5.6)'nın en küçük kareler çözümü olduğunu Teorem 5.3.2 gösterir. Bu durumda, Algoritma IEM Algoritma EM'ye indirgenir. Bununla birlikte, bazı durumlarda (5.6)'nın en az bir çözümü V_k 'ya bağlı olan daha küçük boyutlu (5.21) Krylov matris altuzayına ait olabilir. Aşağıdaki iddiaanın ispatı Teorem 5.3.2'de verilene benzerdir.

Teorem 5.3.3.

$$K_l\left(F,V_k\right)=span\left\{V_k,F\left(V_k\right),\dots,F^{l-1}\left(V_k\right)\right\} \tag{5.26}$$

olmak üzere, l pozitif tam sayısı $\left(l \le s\right)$ için eğer $F^l\left(V_k\right)\in K_l\left(F,V_k\right)$ ise $K_l\left(F,V_k\right)=K_s\left(F,V_k\right)$'dır. Ayrıca (5.26)'da içerilen (5.6)'nın bir en küçük kareler çözümü vardır.

Teorem 5.2.5'e göre Algoritma IEM'nin yakınsaklık özelliği aşağıdaki teoremde verilmektedir.

Teorem 5.3.4. Verilen herhangi s pozitif tam sayısı için Algoritma IEM ile oluşturulmuş $\left\{X_k\right\}$ matris dizisi

$$\lim_{k\to\infty}P\left(A^T\left(C-AX_kB\right)_+B^T\right)=0$$

ifadesini sağlar.

İspat. W_k, (5.20) kısıtlı en küçük kareler alt probleminin bir çözümü olduğu için, AW_kB

$$\left\{AWB \middle| W\in K_s\left(F,V_k\right)\right\}$$

altuzayı üzerinde Y_k 'nın ortoganal iz düşümüdür. Lemma 5.2.1'den $\forall W\in K_s\left(F,V_k\right)$ için

$$\left\langle Y_k-AW_kB,AWB\right\rangle=0, \tag{5.27}$$

olduğu görülür. $W = W_k$ alarak $\left\langle AW_kB - Y_k, AW_kB \right\rangle = 0$ elde edilir. Bu ise,

$$\|AW_kB\|^2 = \left\langle Y_k, AW_kB \right\rangle \tag{5.28}$$

olmasına denktir. (5.23)'deki $\{Y_{k+1}\}$ dizisi için (5.22) ve (5.28)'den

$$\begin{aligned}
\|Y_{k+1}\|^2 &= \left\|\left(C - AX_{k+1}B\right)_+\right\|^2 \\
&= \left\|\left(Y_k - AW_kB - \left(AX_kB - C\right)_+\right)_+\right\|^2 \\
&\le \left\|\left(Y_k - AW_kB\right)_+\right\|^2 \\
&\le \|Y_k - AW_kB\|^2 \\
&= \|Y_k\|^2 - 2\left\langle Y_k, AW_kB \right\rangle + \|AW_kB\|^2 \\
&= \|Y_k\|^2 - \|AW_kB\|^2 \\
&\le \|Y_k\|^2
\end{aligned} \tag{5.29}$$

olduğu görülür. Bu ise $\{\|Y_k\|\}$ dizisinin monoton azalan ve alttan sınırlı olduğunu gösterir. Sonuç olarak,

$$\lim_{k\to\infty}\left(\|Y_k\|^2 + \|Y_{k+1}\|^2\right) = 0 \qquad \text{ve} \qquad \lim_{k\to\infty} AW_kB = 0 \tag{5.30}$$

elde edilir. Ayrıca (5.27)'de $W = W_k$ alarak,

$$\left\langle Y_k - AW_kB, AV_kB \right\rangle = \left\langle A^T\left(Y_k - AW_kB\right)B^T, V_k \right\rangle = \|V_k\|^2 - \left\langle A^T AW_kBB^T, V_k \right\rangle = 0 \tag{5.31}$$

bulunur. Bu ise,

$$\|V_k\|^2 = \left\langle A^T AW_kBB^T, V_k \right\rangle \ge 0 \tag{5.32}$$

eşitsizliğini sağlar. (5.18)'den

$$\|V_k\| = \left\|P\left(A^T Y_k B^T\right)\right\| \leq \left\|A^T Y_k B^T\right\|$$

olduğu görülür ve bu durumda $k \to \infty$ iken,

$$\begin{aligned}\left\langle A^T A W_k B B^T, V_k \right\rangle &\leq \left\|A^T A W_k B B^T\right\| \|V_k\| \\ &\leq \|A\| \|B\| \|A W_k B\| \|V_k\| \\ &\leq \|A\|^2 \|B\|^2 \|A W_k B\| \|Y_k\| \\ &\leq \|A\|^2 \|B\|^2 \|A W_k B\| \|Y_0\| \to 0\end{aligned} \tag{5.33}$$

dır. Böylece (5.32) ve (5.33)'ten

$$\lim_{k\to\infty} V_k = \lim_{k\to\infty} \left\|P\left(A^T Y_k B^T\right)\right\| = \lim_{k\to\infty} P\left(A^T \left(C - A X_k B\right)_+ B^T\right) = 0$$

elde edilir. Bu ise ispatı tamamlar. ■

BÖLÜM 6. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bölüm 1'de çalışmanın içerdiği kavramlar hakkında bilgi verilmektedir. Bölüm 2'de, çalışmada kullanılacak olan temel bazı gösterimler, tanımlar, özellikler ve ispatı olmaksızın bazı teoremler verilmektedir. Bu bölümlerin haricinde bu çalışma üç ana bölümden oluşmaktadır.

[1]'de $Ax \leq b$ lineer eşitsizlikler kümesinin yalnızca sağ taraf vektöründe yapılan minimal değişimler ile nasıl çözülebileceği araştırıldı. Bunun için orijinal model yeniden düzenlendi ve alternatif sistem elde edildi. Sonra bu sistemi çözmek için bir genelleştirilmiş Newton algoritması verildi. Bunlar Bölüm 3'te hatırlatılmaktadır. Bölümün sonuna genelleştirilmiş Newton algoritması ile çözülmüş ve rasgele oluşturulmuş iki örnek eklenmiştir.

[2]'de $AX \geq B$ tutarsız matris eşitsizliğinin simetrik çözümlerini bulmak için bir iteratif metod sunuldu. Bu iteratif metod $AX = B$ matris denkleminin ve $AX \geq B$ tutarlı matris eşitliğinin de simetrik çözümlerini bulabilir. Problem (4.3)'ün çözümlerini hesaplamak için bir iteratif metod (Algoritma 4.3.1) sunuldu. İki özel matris uzayı ((4.10) ve (4.11)) ortaya koyuldu ve denklem (4.7)'nin X^*, Y^*, Z^* çözümlerinin (4.10) ve (4.11) matris altuzayları üzerinde B izdüşümü $AX^* - Z^*$ ve Y^* matrisleri olacak şekilde bulundu. Bunlar Bölüm 4'te hatırlatılmaktadır. Bu bölümün son kısmında iteratif metodun etkinliğini göstermek için sayısal örnekler verilmektedir. Bu örnekler verilirken Algoritma 4.3.1'deki (4.15) ifadesinde W_k bulunurken [2]'den farklı olarak Moore-Penrose ters kullanılarak çözüme gidilmiştir. Bunun neticesinde [2]'de elde edilen sonuçlara göre daha hızlı bir şekilde daha iyi sonuçlar elde edilmiştir.

[3]'te $AXB \geq C$ matris eşitsizliğinin bazı kısıtlar altında çözümü için [77]'de verilen algoritmanın iyileştirilmiş hali verilmiştir. Bu yeni algoritmanın yakınsaklık analizi de yapılmıştır. Bunlar Bölüm 5'te hatırlatılmaktadır.

Bundan sonra [2]'de ve [3]'te ele alınan problemler yeniden farklı lineer kısıtlar altında ele alınabilir ve [33], [79] ile [80] çalışmalarında olduğu gibi Moore-Penrose ters kullanarak çözüme gidilebilir.

KAYNAKLAR

[1] Ketabchi, S., Salahi, M. Correcting inconsistency in linear inequalities by minimal change in the right hand side vector. Comput. Sci. J. Moldova. 17(2(50)):179–192, 2009.

[2] Peng, J., Peng, Z. The symmetric solutions of the matrix inequality $AX \geq B$ in least-squares sense. Int. J. Comput. Math. 90(3):554–564, 2013.

[3] Lei, Y., Liao, A.P., Qiao, W.L. Iterative methods for solving consistent or inconsistent matrix inequality $AXB \geq C$ with linear constraints. Appl. Math. Model. 39:4151–4163, 2015.

[4] Amaral, P., Terosset, M.W., Barahona, P. Correcting an inconsistent set linear inequalities by nonlinear programming. Technical Report:1–27, Department of Computational and Applied Mathematics, Rice University, Houston, TX 77005, 2000.

[5] Amaral, P., Barahona, P. A framework for optimal correction of inconsistent linear constraint. Constraints, 10(1):67–86, 2005.

[6] Andersen, E.D., Andersen, K.D. The MOSEK interior point optimizer for linear programming: an implementation of the homogeneous algorithm. In: Frenk, H., Roos, K., Terlaky, T., Zhang, S. editors, High Performance Optimization, Kluwer Academic Publishers 197–232, 2000.

[7] Bazaraa, M.S., Jarvis, J.J., Sherali, H.D. Linear Programming and Network Flows. John Wiely and Sons, 1990.

[8] Cplex: ILOG Optimization. http:// www.ilog.com, Erişim Tarihi: 07.03.2016.

[9] Xie, D.X., Sheng, Y.P., Hu, X.Y. The least-squares solutions of inconsistent matrix equation over symmetric and antipersymmetric matrices. Appl. Math. Lett, 16:589–598, 2003.

[10] Li, F.L., Gong, L.S., Hu, X.Y., Zhang, L. Successive projection iterative method for solving matrix equation $AX = B$. J. Comput., Appl. Math., 234:2405–2410, 2010.

[11] Liu, Z.Y., Tian, Z.L., Tan, Y.X. Computing the least-square solutions for

centrohermitian matrix problems. Appl. Math. Comput., 174:566–577, 2006.

[12] Zhao, L.J., Hu, X.Y., Zhang, L. Least squares solutions to $AX = B$ for bisymmetric matrices under a central principal submatrix constraint and the optimal approximation. Linear Algebra Appl., 428:871–880, 2008.

[13] Meng, C.J., Hu, X.Y., Zhang, L. The skew-symmetric orthogonal solutions of the matrix equation $AX = B$. Linear Algebra Appl., 402:303–318, 2005.

[14] Trench, W.F. Hermitian, hermitian R-symmetric, and hermitian R-skew symmetric Procrustes problems. Linear Algebra Appl., 387:83–98, 2004.

[15] Trench, W.F. Minimization problems for (R,S) symmetric and (R,S) skew symmetric matrices. Linear Algebra Appl., 389:23–31, 2004.

[16] Zhang, J.C., Zhou, S.Z., Hu, X.Y. The (P,Q) generalized reflexive and anti-reflexive solutions of the matrix equation $AX = B$. Appl. Math. Comput., 209:254–258, 2009.

[17] Bellalij, M., Jbilou, K., Sadok, H. New convergence results on the global GMRES method for diagonalizable matrices. J. Comput. Appl. Math., 219:350–358, 2008.

[18] Bouyouli, R., Jbiloub, K., Sadakac, R., Sadok, H. Convergence properties of some block Krylov subspace methods for multiple linear systems. J. Comput. Appl. Math., 196:498–511, 2006.

[19] Bouyouli, R., Jbilou, K., Messaoudi, A., Sadok, H. On block minimal residual methods. Appl. Math. Lett., 20:284–289, 2007.

[20] Gu, C.Q., Qian, H.J. Skew-symmetric methods for nonsymmetric linear systems with multiple right-hand sides. J. Comput Appl. Math., 223:567–577, 2009.

[21] Gu, K.H., Hu, X.Y., Zhang, L. A new iteration method for the matrix equation $AX = B$. Appl. Math. Comput., 187:1434–1441, 2007.

[22] Jbilou, K. Smoothing iterative block methods for linear systems with multiple right-hand sides. J. Comput. Appl. Math., 107:97–109, 1999.

[23] Jbilou, K., Messaoudi, A., Sadok, H. Global FOM and GMRES algorithms for matrix equations. Appl. Numer. Math., 31:49–63, 1999.

[24] Karimi, S., Toutounian, F. The block least squares method for solving nonsymmetric linear systems with multiple right-hand sides. Appl. Math.

Comput., 177:852–862, 2006.

[25] Lin, Y.Q. Implicitly restarted global FOM and GMRES for nonsymmetric matrix equations and Sylvester equations, Appl. Math. Comput., 167:1004–1025, 2005.

[26] Robbe, M., Sadkane, M. Exact and inexact breakdowns in the block GMRES Method. Linear Algebra Appl., 419:265–285, 2006.

[27] Roger, A.H., Vladimir, S., Naomi, M. Solution of linear matrix equations in a congruence class. Electron. J. Linear Algebra, 13:153–156, 2005.

[28] Salkuyeh, D.K. CG-type algorithms to solve symmetric matrix equations. Appl. Math. Comput., 172:985–999, 2006.

[29] Toutounian, F., Karimi, S. Global least squares method (Gl-LSQR) for solving general linear systems with several right-hand sides. Appl. Math. Comput., 178:452–460, 2006.

[30] Salahi, M., Ketabchi, S. Correcting an inconsistent set of linear inequalities by generalized Newton method. Optim. Methods Softw., 25:457–465, 2010.

[31] Peng, Y.Z. An iterative method for the least squares symmetric solution of the linear matrix equation $AXB = C$. Appl. Math. Comput., 170:711–723, 2005.

[32] Lei, Y., Liao, A.P. A minimal residual algorithm for the inconsistent matrix equation $AXB = C$ over symmetric matrices. Appl. Math. Comput., 188:499–513, 2007.

[33] Sarduvan, M., Şimşek, S., Özdemir, H. On the best approximate (P,Q)-ortoganal symmetric and skew-symmetric solution of the matrix equation $AXB = C$. J. Numer. Math., 22(3): 255–269, 2014.

[34] Hestenes, M.R., Stiefel, E. Methods of Conjugate Gradients for solving linear systems. Journal of Research of the National Bureau of Standarde. 49(6), 1952.

[35] Kahaner, D., Moler, C., Nash, S. Numerical Methods and Software, Prentice Hall,Inc.Englewood Cliffs, NJ, 1989.

[36] Himmelblau, D.M., Edgar, T.F. Optimization of Chemical Processes. McGraw-Hill, Inc. NY, 1989.

[37] Kara, İ. Yöneylem Araştırması, Doğrusal Olmayan Modeller, Anadolu Üniversitesi Basımevi, Eskişehir, 1986.

[38] Leontief, W.W. The Use of Indifference Curves in the Analysis of Foreign Trade. The Quarterly Journal of Economics, 47:493–503, 1933.

[39] Dantzig, G.B. Programming in a linear structure. Econometrica, 17:73–74, 1949.

[40] Rao, S.S. Optimization Theory and Applications, Second Edition, Halsted, Inc., New York, 1978.

[41] Rao, S.S. Engineering Optimization: Theory and Practice Third Edition, John Wiley and Sons, New York, 1996.

[42] Öztürk, A. Yöneylem Araştırması, V.Baskı, Ekin Kitabevi Yayınları, Bursa, 1997.

[43] Tütek, H. Gümüşoğlu Ş. Sayısal Yöntemler, Yönetsel Yaklaşım, İstanbul, 1994.

[44] Venit, S., Bishop, W. Elementary Linear Algebra Second Edition, Prindle, Weber and Schmidt, Boston, 1985.

[45] Graybill, F.A. Introoduction to matrices with aplications in statistics, Wadsworth Publishing Company inc California, 1969.

[46] Balcı, M. Matematik Analiz 1, Sürat Üniversite Yayınları, İstanbul, 2012.

[47] Acary, V., Bonnefon, O., Brogliato, B. Nonsmooth Modeling and Simulation for Switched Circuits, Springer Science Business Media B.V. Vilnius, 2011.

[48] Rockafellar R.T. Convex Analysis, Princeton University Press, New Jersey 1996.

[49] Magnus, J.R., Neudecker, H. Matrix Differential Calculus with Applications in Statistics and Econometrics. John Wiley and Sons, New York, 1988.

[50] Horn, R.A., Johonson, C.R. Matrix Analysis, Cambridge University Press, New York, 1985.

[51] Meyer, C.D. Matrix Analysis and Applied Linear Algebra. SIAM., Philadelphia, 2004.

[52] Golub, G.H., Loan, C.F.V. Matrix Computations, Fourth Edition, New York, 2012.

[53] Schott, J.R. Matrix Analysis for Statistics, Wiley and Sons, New York, 2005.

[54] Lipschutz, S., Lipson, M. Schaum's Outline of Linear Algebra, Third Edition, McGraw-Hill, New York, 2000.

[55] Meng, C.J., Hu, X.Y., Zhang, L. The skew-symmetric orthogonal solutions of the matrix equation $AX = B$, Linear Algebra Appl., 402:303–318, 2005.

[56] Zhao, L.J., Hu, X.Y., Zhang, L. Least squares solutions to $AX = B$ for bisymmetric matrices under a central principal submatrix constraint and the optimal approximation. Linear Algebra Appl., 428:871–880, 2008.

[57] Trench, W.F. Minimization problems for (R,S)-symmetric and (R,S)-skew-symmetric matrices. Linear Algebra Appl., 389:23–31, 2004.

[58] Lee, A. Centrohermitian and Skew-Centrohermitian Matrices. Mathematical Institute of the Hungarian Academy of Sciences Budapest, Redtanoda u. 13–15, H-1053, 1978.

[59] Ben–Israel, A., Greville, T.N.E. Generalized Inverses: Theory and Applications. John Wiley and Sons, New York, 1974.

[60] Xiao, Q. The Hermitian R-symmetric solutions of the matrix equation $AXA^{*} = B$. Int. J. Algebra, 6(19):903–911, 2012.

[61] Trench, W.F. Hermitian, hermitian *R*-symmetric, and hermitian *R*-skew-symmetric procrustes problems, Linear Algebra Appl., 387:83–98, 2004.

[62] Chen, H.C. Generalized reflexive matrices: special properties and applications. SIAM J. Matrix Anal. Appl., 19:39–64, 1989.

[63] Kart, C. Matris Metodları ve Lineer Dönüşümler, Ankara Üniversitesi Basımevi, Ankara, 1985.

[64] Heyouni, M., Essai, A. Marix Krylov subspace methods for linear systems with multiple right-hand sides. Numer. Alg., 40:137–156, 2005.

[65] Stephen, B., Lieven, V. Convex Optimization. Cambridge University Press, New York, 2004.

[66] Mangasarian, O. A Newton method for linear programming. J. Optim. Theory Appl., 121(1):1–18, 2004.

[67] Nocedal, J., Wright. S.J. Numerical Optimization. Springer Science, New York, 1999.

[68] Moreau, J.J. Décomposition orthogonale d'un espace hilbertien selon deux cones mutuellement polaires. C.R.Acad. Sci. Paris, 225:238–240, 1962.

[69] Wirezbicki, A.P., Kurcyusz, S. Projection on a cone, penalty functionals and duality theory for problems with inequality constraints in Hilbert space. SIAM J. Control Optim., 15:25–56, 1977.

[70] Xu, S.F. An Introduction to Inverse Algebraic Eigenvalue Problems, Peking University Press, Beijing, 1998.

[71] Zhou, S.Q., Dai, H. Inverse Problem of Algebra Eigenvalue. Henan Science and Technology Press, Henan (in Chinese), 1991.

[72] Liao, A.P., Lei, Y. Optimal approximate solution of the matrix equation $AXB = C$ over symmetric matrices. J. Comput. Math., 25:543–552, 2007.

[73] Herman, G.T. A relaxation method for reconstructing object from noisy X-rays. Math. Program. 8:1–19, 1975.

[74] Herman, G.T. Image Reconstruction from Projections: The Fundamentals of Computerized Tomography. Academic Press, New York, USA, 1982.

[75] Censor, Y., Altschuler, M.D., Powlis, W.D. A computational solution of the inverse problem in radiation-therapy treatment planning, Appl. Math. Comput.25:57–87, 1988.

[76] Censor, Y., Ben-Israel, A., Xiao, Y., Galvin, J.M. On linear infeasibility arising in intensity modulated radiation therapy inverse planning. Linear Algebra Appl., 428:1406–1420, 2008.

[77] Peng, Z.Y., Wang, L., Peng, J.J. The solutions of matrix equation $AX = B$ over a matrix inequality constraint. Siam J. Matrix Anal. Appl., 33(2):554–568, 2012.

[78] Wang, R.C. Functional Analysis and Optimization Theory. Beijing University of Aeronautics and Astronautics Press, in Chinese, 2003.

[79] Şimşek, S., Sarduvan, M., Özdemir, H. Centrohermitian and skew-centrohermitian solutions to the minimum residual and matrix nearness problems of the quaternion matrix equation $\left(AXB, DXE\right) = \left(C, F\right)$. Adv. Appl. Clifford. Algebr. in press.

[80] Şimşek, S., Sarduvan, M., Özdemir, H. On the matrix nearness problem for (skew-) symmetric matrices associated with the matrix equations $\left(A_1XB_1, \ldots, A_kXB_k\right) = \left(C_1, \ldots, C_k\right)$. Miskolc Math. Notes, 17(1):635–645, 2016.

ÖZGEÇMİŞ

Zahra Abdullayeva, 16.01.1992'de Bakü'de doğdu. Nesimi Rzayev adına 169 sayılı orta mektebini 2009 yılında tamamladı. Aynı yıl Azerbaycan Devlet Pedagoji Üniversitesi Eğitim Bölümüne kayıt oldu ve 2013 yılında bu bölümü bitirdi. Yine aynı yıl Sakarya Üniversitesi FBE Matematik EABD Uygulamalı Matematik Bilim Dalına kayıt oldu. Şu an hala burada yüksek lisans eğitimine devam etmektedir.