T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GENELLEŞTİRİLMİŞ FİBONACCİ SAYILARI İLE İLİŞKİLİ 3×3 BOYUTLU ÖZEL MATRİSLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Hilal ÇAKMAK

Enstitü Anabilim Dalı	**:**	**MATEMATİK**
Enstitü Bilim Dalı	**:**	**UYGULAMALI MATEMATİK**
Tez Danışmanı	**:**	**Prof. Dr. Halim ÖZDEMİR**

Haziran 2019

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GENELLEŞTİRİLMİŞ FİBONACCİ SAYILARI İLE İLİŞKİLİ 3×3 BOYUTLU ÖZEL MATRİSLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Hilal ÇAKMAK

Enstitü Anabilim Dalı	:	**MATEMATİK**
Enstitü Bilim Dalı	:	**UYGULAMALI MATEMATİK**

Bu tez 24.06.2019 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği ile kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Refik Keskin	**Prof. Dr. Halim Özdemir**	**Dr. Öğr. Üyesi Sibel Kılıçarslan Cansu**
Jüri Başkanı	**Üye**	**Üye**

BEYAN

Tez içindeki tüm verilerin akademik kurallar çerçevesinde tarafımdan elde edildiğini, görsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçların akademik ve etik kurallara uygun şekilde sunulduğunu, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezde yer alan verilerin bu üniversite veya başka bir üniversitede herhangi bir tez çalışmasında kullanılmadığını beyan ederim.

Hilal Ç.

Hilal ÇAKMAK

24/06/2019

ÖNSÖZ

Lisansüstü öğrenimim süresince bilgi ve tecrübelerinden faydalandığım tez danışmanım Sayın Prof. Dr. Halim ÖZDEMİR'e en içten saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Yüksek lisans tez çalışması boyunca yardımlarını esirgemeyen Arş. Gör. Dr. Tuğba PETİK'e teşekkür ederim.

Özellikle, eğitimim ve öğrenimim süresince maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen aileme sonsuz sevgi ve minnettarlığımı belirtmek isterim.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

$\det A$	: A matrisinin determinantı
$[AB]$	: AB doğru parçası
$\lvert AB \rvert$	: AB doğru parçasının uzunluğu
$adj(A)$	: A matrisinin adjoint matrisi
A^T	: A matrisinin transpozu
A^{-1}	: A matrisinin tersi
F_n	: $n.$ Fibonacci sayısı
I	: Birim matris
$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{N}^+$	: Pozitif doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}^n$	: n boyutlu reel vektörler kümesi
$\mathbb{Z}$	: Tam sayılar kümesi
$\blacksquare$	: İspat sonu

ÖZET

Anahtar Kelimeler: Fibonacci sayıları, Genelleştirilmiş Fibonacci sayıları, Özdeğer, Özvektör, Matris denklemleri.

Bu çalışmada genelleştirilmiş Fibonacci sayıları ile ilişkili olan 3×3 boyutlu bazı matrisler incelenmiştir.

Birinci bölümde, çalışmanın içeriği ve kapsamı hakkında kısaca bazı bilgilere değinilmektedir. Daha sonra, literatürde mevcut olan konuyla ilgili bazı çalışmalardan bahsedilmektedir.

İkinci bölümde, ilk olarak matris cebiri ile ilgili bazı temel kavram ve özelliklerden bahsedilmekte, daha sonra Fibonacci sayıları ve genelleştirilmiş Fibonacci sayıları ile ilgili temel tanım ve teoremler verilmektedir.

Çalışmanın üçüncü ve dördüncü bölümlerinde, bir matrisin özdeğer ve özvektörlerinin farklı bir irdelenmesi ile genelleştirilmiş Fibonacci sayıları ile ilişkili 3×3 boyutlu özel matrislerin elde edilmesi ile ilgili yöntem geliştirilmiştir.

Son bölüm, çalışma ile ilgili bazı tartışma ve önerilerden oluşmaktadır.

3×3 DİMENSIONAL SPECIAL MATRICES RELATED TO GENERALIZED FIBONACCI NUMBERS

SUMMARY

Keywords: Fibonacci number, Generalized Fibonacci number, Eigenvalue, Eigenvector, Matrix equation.

In this study, some 3×3 dimensional matrices related to generalized Fibonacci numbers are examined.

In the first chapter, it's briefly referred to some information about the content and extend of the study. Then, some studies existed in the literature related to the subject considered are mentioned.

In the second chapter, first, some basic concepts and properties associated with matrix algebra, are mentioned and then basic definitions and theorems related with Fibonacci numbers and generalized Fibonacci numbers are given.

In the third and fourth chapters, through a different analysis of eigen values and eigen vectors of a matrix, a method to obtain 3×3 dimensional special matrices related to generalized Fibonacci numbers is developed in the third and fourth chapters.

Last chapter involves some discussions and suggestions about the study.

BÖLÜM 1. GİRİŞ

1.1. Çalışmanın İçeriği ve Önemi

Fibonacci sayıları yaygın kullanım alanlarına sahiptir ve matematiğin önemli konularından birisidir. Bu alanda yapılmış birçok çalışma mevcuttur. Bunun yanında matematiksel bir dizi olarak Fibonacci dizisinin terimleri ile ilişkili olarak birçok özellik mevcuttur. Günümüzde bu alandaki çalışmalara devam edilmektedir ve yeni özellikler ortaya konulmaktadır.

Bu çalışmada, öncelikle Fibonacci sayıları ile ilgili temel özellikler verilecektir. Daha sonra Fibonacci sayılarının matris temsillerinden bahsedilecektir.

Elemanları p, q ve 1 sayılarından oluşan genelleştirilmiş Fibonacci Q matrisinin kuvvetleri ve Fibonacci sayıları arasında bir ilişkiden hareketle, kuvvetleri genelleştirilmiş Fibonacci sayıları ile ilişkili olan 3×3 boyutlu matrisler türetilecektir.

1.2. Fibonacci Sayılarının Tarihçesi

1170 yılında İtalya'nın Pisa kentinde dünyaya gelen Leonardo Fibonacci, Avrupa'nın en önemli matematikçileri arasında yer almaktadır. Tüccar bir babanın oğlu olan Fibonacci'nin çocukluğu, babasının işi dolayısıyla Cezayir'de geçmiştir.

Fibonacci, babasının da tavsiyesi üzerine burada Arap bir matematikçiden ders alarak matematikle tanışma imkanı yakalamıştır. Bu tanışma sırasında matematiğe olan ilgisini fark eden Fibonacci, bu alandaki çalışmalarına devam ederek daha sonra Lİber Abaci'de hocasından "Dokuz Hint Rakamının Sanatını" öğrenir. Böylece ilk matematik bilgilerini müslüman hocalardan alan Fibonacci, öğrendiklerini " Liber

Abaci" adlı kitabında toplamıştır.

Fibonacci, kitabında Arap sayı sisteminden (ondalık sayı sistemi), aritmetik işlemlerden ve cebir konularından bahsetmektedir. Fibonacci, Abaküs kitabı ya da hesaplama kitabı anlamına gelen "Liber Abaci" kitabını yayınladığında Arap sayılarını Avrupa'da birkaç aydın dışında bilen yok gibiydi. Ünlü matematikçi Fibanocci, kitabında bu rakamları şöyle anlatır: " Dokuz Hint Rakamı 9,8,7,6,5,4,3,2 ve 1'dir. Bu dokuz rakama "0" ın da ilave edilmesiyle herhangi bir sayı yazılabilir." Ayrıca bu kitapta Fibonacci'nin ünlü bir matematikçi olmasını sağlayan bir "Tavşan Problemi" yer almaktadır. Fibonacci kapalı bir yerde bulunan tavşanların artışını her ay takip etmiş ve sonuçlarını bir bir not etmiştir .Ünlü matematikçi Leonardo "Her tavşan çifti ayda bir kez, bir çift tavşan yavrularsa ve bu yavrular da ikinci aydan itibaren yavrulamaya başlarsa bir yıl sonunda kaç çift tavşan olur?" sorusunu sorar ve gözlemleri sonucunda ulaştığı sonuca göre her aydaki tavşan çift sayısının rastgele olmayıp bir aydaki çift sayısının önceki iki ayın toplamına eşit olduğunu farkına varır. Buna göre tavşan çift sayıları aylara göre bir yıl içinde 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, … olacaktır. Bu problemin sonucunda her sayının kendinden önce gelen sayı ile toplanarak bir sonrakinin elde edildiği meşhur sayı dizisi ortaya çıkmıştır.

Fibonacci'nin bu kitabı Avrupa'da çok hızlı yayılmış ve Avrupa'nın pozitif bilimlerde ilerlemesinde önemli katkıları olmuştur. Bu kitap sayesinde bütün Avrupa Hint- Arap sayı sisteminden haberdar olmuştur. 13. yy. Avrupasında büyük ilgi gören Liber Abaci kitabı, Avrupa'da büyük oranda çoğaltılır ve bu Arap sayıları kilisenin karşı çıkmasına rağmen o dönem İtalyan tüccarları arasında hızla yayılmıştır. Öyle ki kitabın ünü Roma 2. imparatoru 2. Frederic'e kadar gider. Böylece Fibonacci, Bilimi ve bilim adamlarını seven bir imparator olan Frederick'in gözüne girmeyi başarır.

İtalyan matematikçi Fibonacci'nin 1202'de kaleme aldığı hesaplama kitabı anlamına gelen "Liber Abaci" kitabının dışında, "Practica Geometria"(The Practice of Geometry) (1220), "Flos" (The flower) (1225) ve "Liber Quadratorum" (The Book of Square Numbers) (1225) kitapları da matematik ile ilgili kaleme aldığı diğer eserleridir. Bu eserlerin içerisinde hiç şüphesiz en önemli olanı, Fibonacci sayılarıyla Altın Oran'ın anlatıldığı "Liber Abaci" adlı eseridir.

BÖLÜM 2. BAZI TEMEL KAVRAMLAR VE ÖZELLİKLER

Bu bölümde, sonraki bölümlerde kullanılacak olan bazı tanımlar ve teoremler verilmektedir.

2.1. Matematiksel Tümevarım

Bilimsel araştırmalarda tümevarım ve tümdengelim kavramları birbirini tamamlayan kavramlardır. Genelden özele ulaşma tümdengelim ve özelden genele ulaşma tümevarım olarak nitelendirilir. Şimdi tümevarım kavramı üzerinde kısaca durulacaktır.

Tanım 2.1. (Birinci Tümevarım İlkesi) $n \in \mathbb{N}^+$ olmak üzere, $P(n)$ bir önerme olsun ve aşağıdaki iki şart sağlansın:

(i) $P(1)$ doğru olsun.
(ii) Her $k \in \mathbb{N}^+$ için $P(k)$ doğru iken $P(k+1)$ de doğru olsun.

Bu iki şart sağlandığında, $P(n)$ her $n \in \mathbb{N}^+$ için doğrudur [1].

Tanım 2.2. (İkinci Tümevarım İlkesi) $n \in \mathbb{N}^+$ olmak üzere $P(n)$ bir önerme olsun ve aşağıdaki iki şart sağlansın:

(i) $P(1)$ doğrudur.
(ii) Her $k \in \mathbb{N}^+$ için $P(1)$, $P(2)$,..., $P(k)$ doğru iken $P(k+1)$ de doğrudur.

Bu iki şart sağlandığında, $P(n)$ önermesi her $n \in \mathbb{N}^+$ için doğrudur [1].

2.2. Matris Cebiri ile İlgili Bazı Kavram ve Özellikler

Tanım 2.3. $\mathbb{R}^n$ üzerinde tanımlı bir vektör, i=1, 2, …, n için $v_i \in \mathbb{R}$ olmak üzere $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ şeklindedir [2].

Tanım 2.4. $\mathbb{R}^n$ üzerinde tanımlı $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ ve $w = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$ birer vektör ve k bir skaler olmak üzere;

$$v + w = (v_1 + w_1, v_2 + w_2, \ldots, v_n + w_n)$$

$$kv = (kv_1, kv_2, \ldots, kv_n)$$

şeklinde tanımlanır [2].

Üzerinde çalışılan cismin bir elemanına bir *skaler* denir. Bu çalışma boyunca üzerinde çalışılan cisim $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesidir.

Tanım 2.5. k_i 'ler skalerler, v_i 'ler vektörler ve $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$ olmak üzere; $k_1v_1 + k_2v_2 + \ldots + k_nv_n$ ifadesine, v_i vektörlerinin bir lineer bileşimi denir [2] .

Tanım 2.6. k_i 'ler skalerler, v_i 'ler vektörler ve $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$ olmak üzere,

$$k_1v_1 + k_2v_2 + \ldots + k_nv_n = 0$$

eşitliği ancak $k_1 = k_2 = \ldots = k_n = 0$ olması ile gerçekleşiyorsa, v_i vektörlerine lineer bağımsızdır denir. Aksi halde bu vektörlere lineer bağımlıdır denir [2].

Tanım 2.7. Skalerlerin dikdörtgensel bir düzenlemesine bir *matris* denir. Bir matrisin genel biçimi, genel olarak,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

şeklinde gösterilir. Her bir yatay ve dikey sıradaki skalerlerin oluşturduğu biçimde sırasıyla bir satır ve bir sütun denir. m satır ve n sütundan oluşan bir A matrisine, $m \times n$ boyutludur denir. A matrisi kısaca $A = \left(a_{ij}\right)$ şeklinde gösterilir. Burada a_{ij} elemanı A matrisinin $i.$ satır ve $j.$ sütun konumundaki elemanıdır [3].

Matrisler genellikle skalerlerin bulunduğu cisim ile anılır. Örneğin matrisin elemanları reel ise reel matris, kompleks ise kompleks matris gibi. Bu çalışma boyunca matris denildiğinde reel matris anlaşılacaktır.

Tanım 2.8. A ve B aynı boyutlu iki matris olsun. A ve B matrislerinin toplamı $A+B$ ile gösterilir. İki matris toplanırken $ij.$ elemanları karşılıklı olarak toplanır. $A = \left(a_{ij}\right)$ ve $B = \left(b_{ij}\right)$ olmak üzere, $A+B = \left(a_{ij} + b_{ij}\right)$ şeklindedir [3].

Tanım 2.9. Bir A matrisinin bir k skaleri ile çarpımı kA şeklinde gösterilir. Matris bir skalerle çarpılırken tüm elemanları bu skalerle çarpılır. $A = \left(a_{ij}\right)$ olmak üzere, $kA = \left(ka_{ij}\right)$ şeklindedir [3].

Tanım 2.10. A matrisi $m \times n$ boyutlu ve B matrisi $n \times p$ boyutlu matrisler olsun. A ve B matrislerinin çarpılmasıyla oluşan AB matrisi $m \times p$ boyutludur. AB matrisinin $i.$ satır $j.$ sütunundaki elemanı

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \ldots + a_{in} b_{nj}$$

şeklindedir [3].

Tanım 2.11. A matrisi $n\times n$ boyutlu ise A matrisine kare matris denir. $a_{11}a_{22}\dots a_{nn}$ elemanlarına matrisin köşegen elemanları denir [3].

Tanım 2.12. A kare matrisinin köşegen elemanları dışındaki tüm elemanları 0 ise A matrisine köşegen matris denir. Genel bir köşegen matris

$$\begin{pmatrix} x_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & x_n \end{pmatrix}$$

şeklindedir [3].

Tanım 2.13. Köşegen elemanlarının hepsi 1 olan $n\times n$ boyutlu köşegen matrise birim matris denir ve bu matris I ile gösterilir [3].

Bir kare matrisin $0.$ kuvveti uygun boyutlu birim matris olarak tanımlanır. Yani A bir $n\times n$ matris ise $A^0=I_n$ 'dir. A'nın $k.$ pozitif kuvveti ise $A^k=A\dots A$ şeklinde tanımlanır [4].

Teorem 2.14. $W=\begin{pmatrix} x_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & x_n \end{pmatrix}$ köşegen matris ise, $W^k=\begin{pmatrix} x_1^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x_2^k & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & x_n^k \end{pmatrix}$ dir ve W^k da köşegen matristir [2].

Tanım 2.15. Bir A kare matrisi için $AB=BA=I$ olacak şekilde bir B matrisi varsa B matrisine A matrisinin tersi denir ve $B=A^{-1}$ ile gösterilir. A matrisinin tersi varsa A matrisine tersinirdir denir [3].

Teorem 2.16. $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ matrisinin determinantı $\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ şeklindedir [2].

Teorem 2.17. A, $n \times n$ boyutlu kare matris olsun. A matrisinin determinantı $i = 1, 2, \ldots, n$ için,

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in}$$

ve $j = 1, 2, \ldots, n$ için,

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij} = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj}$$

dır. İlk yazılışa determinantın i. satıra göre açılımı ve ikinci yazılışa determinantın j. sütuna göre açılımı denir [3].

Teorem 2.18. $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ matrisinin determinantı

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

şeklindedir [2].

Teorem 2.19. A ve B aynı boyutlu kare matrisler olsun. Bu durumda $\det(AB) = \det(A)\det(B)$’dır [2].

Teorem 2.20. A, $n\times n$ boyutlu kare matris olsun. Her pozitif k sayısı için $\det\left(A^k\right)=\det\left(A\right)^k$ 'dir [3].

Tanım 2.21. A, $n\times n$ boyutlu kare matris olsun. A matrisinin i. satır ve j. sütununun silinmesiyle elde edilen alt matris M_{ij} olsun. $\det M_{ij}$ determinantına, a_{ij} elemanının minörü denir. $A_{ij}=\left(-1\right)^{i+j}\det M_{ij}$ ifadesine ise a_{ij} elemanının kofaktörü denir [2].

Teorem 2.22. $W=\begin{pmatrix} x_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & x_n \end{pmatrix}$ ise $\det W = x_1x_2\dots x_n$ 'dir [3].

Teorem 2.23. A, kare matrisinin tersinin mevcut olması için gerek ve yeter koşul $\det A\neq 0$ olmasıdır [3].

Teorem 2.24. A tersinir bir matris olsun. Bu durumda, $\det A^{-1}=\dfrac{1}{\det A}$ 'dır [2].

Tanım 2.25. A, $n\times n$ boyutlu kare matris olsun. A matrisinin, a_{ij} elemanının yerine, A_{ij} kofaktörü yazılarak elde edilen matrisin transpozuna, A matrisinin adjoint matrisi denir ve bu $adj\left(A\right)$ ile gösterilir [2].

Teorem 2.26. A, $n\times n$ boyutlu tersinir kare matris olsun. $A^{-1}=\dfrac{1}{\det A}adj\left(A\right)$ 'dır [3].

Tanım 2.27. $x_1,x_2,\dots,x_n$ bilinmeyenler olmak üzere, $a_1x_1+a_2x_2+\dots+a_nx_n=b$ şeklindeki denkleme n bilinmeyenli lineer denklem denir. Burada, b ve hepsi birden sıfır olmayan $a_1,a_2,\dots,a_n$ katsayıları sabitlerdir [2].

Tanım 2.28. $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$ bilinmeyenler olmak üzere;

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}$$

şeklindeki sonlu tane lineer denklemden oluşan sisteme, n bilinmeyenli ve m denklemli bir lineer denklem sistemi denir. $n = m$ ise bu sisteme kare lineer sistem denir [2].

Lineer denklem sistemi,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

şeklinde gösterilebilir. Bu sistem $AX = B$ şeklinde yazılabilir. Burada, $A = \left(a_{ij}\right)$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ ve $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ matrislerine sırasıyla katsayılar, bilinmeyenler ve sabitler matrisi denir. X ve B 'nin her ikisinin de sütun vektörü olması durumunda, bunların yerine genellikle sırasıyla **x** ve **b** yazılır ve sistem $Ax = b$ ile gösterilir [2].

Tanım 2.29. A bir $n \times n$ matris olsun. Eğer $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ olacak şekilde sıfırdan farklı bir $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ vektörü varsa, λ skalerine A'nın bir özdeğeri denir. **x** vektörüne de λ özdeğerine ilişkin (karşılık gelen) bir özvektör denir [2].

Tanım 2.30. A bir kare matris olmak üzere $P(\lambda)=\det(A-\lambda I)$ polinomuna, A matrisinin karakteristik polinomu ve $\det(A-\lambda I)=0$ denklemine de A matrisinin karakteristik denklemi denir [2].

Teorem 2.31. A matrisi bir kare matris olsun. λ ’nın A matrisinin bir özdeğeri olması için gerek ve yeter koşul $\det(A-\lambda I)=0$ olmasıdır [2].

Teorem 2.32. (Cayley Hamilton Teoremi) Her matris kendi karakteristik denklemini sağlar [2].

Teorem 2.33. Bir köşegen matrisin özdeğerleri, onun köşegen elemanlarıdır [2].

Teorem 2.34. A matrisi $n\times n$ boyutlu bir kare matris ve A matrisinin özdeğerleri $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_n$ ise

$$\det A=\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n$$

dir [3].

Teorem 2.35. A , $n\times n$ boyutlu matrisinin tersinin olması için gerek ve yeter koşul A matrisinin özdeğerlerinin tümünün sıfırdan farklı olmasıdır [3].

Tanım 2.36. $A_1,\ A_2$ aynı boyutlu kare matrisleri için $A_2=S^{-1}A_1S$ eşitliğini sağlayan bir S tersinir matrisi varsa, A_2 matrisi A_1 matrisine benzerdir denir [4].

Tanım 2.37. Bir A kare matrisi, bir köşegen D matrisine benzer ise bu A matrisine köşegenleştirilebilirdir denir [2].

Teorem 2.38. A kare matrisinin tüm özdeğerleri farklı ise A matrisi köşegenleştirilebilirdir [2].

Teorem 2.39. A kare matrisi köşegenleştirilebilir olsun. A matrisinin köşegenleştirilmesi ile oluşan köşegen matris D olmak üzere her $k \in \mathbb{N}$ için $A^k = PD^kP^{-1}$ eşitliği sağlanır [2].

2.3. Fibonacci Sayıları ve Genelleştirilmiş Fibonacci Sayıları

Tanım 2.40. $F_0 = 0,\ F_1 = 1$ ve $n \geq 2$ için $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ şeklinde tanımlanan diziye Fibonacci dizisi denir. F_n ’ye de $n.$ Fibonacci sayısı denir [5].

Fibonacci sayıları;

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, …

şeklindedir. Fibonacci dizisinde, her terimin kendisinden önceki iki terimin toplamı olduğu bağıntısından yola çıkılarak negatif indisli Fibonacci sayıları da türetilebilir:

$$
\begin{aligned}
&F_{-1} = F_1 - F_0 = 1 - 0 = 1 \\
&F_{-2} = F_0 - F_{-1} = 0 - 1 = -1 \\
&F_{-3} = F_{-1} - F_{-2} = 1 - (-1) = 2 \\
&F_{-4} = F_{-2} - F_{-3} = -1 - 2 = -3 \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Genelleştirilmiş Fibonacci dizisi, en genel biçimiyle Gupta, Panwar ve Sikhwal tarafından, a, b, p ve q reel sayılar ve $F_0 = A,\ F_1 = b$ olmak üzere,

$$F_k = pF_{k-1} + qF_{k-2},\ k \geq 2$$

tekrarlama bağıntısıyla tanımlanmıştır [6], [7].

Öte yandan, yukarıdaki a ve b ’yi diğer söylemle F_0 ve F_1 başlangıç değerleri keyfi fakat sabit seçilerek genelleştirilmiş Fibonacci sayı dizisi tanımlanmıştır [8].

Bu tezde, genelleştirilmiş Fibonacci sayı dizisi denildiğinde, Gupta, Panwar ve Sikhwal tarafından tanımlanan dizide $F_0 = 0$ ve $F_1 = 1$ olarak alındığında yani [9]'da alındığı gibi genelleştirilmiş Fibonacci sayı dizisi anlaşılacaktır. Genelleştirilmiş Fibonacci sayı dizisini bu şekilde tanımlayan çalışmalar da vardır [8].

Böylece aşağıdaki tanımı verebiliriz:

Tanım 2.41. p ve q sıfırdan farklı reel sayılar olmak üzere $G_0 = 0,\ G_1 = 1$ ve $n \geq 1$ için,

$$G_{n+1} = pG_n + qG_{n-1}$$

şeklinde tanımlanan diziye genelleştirilmiş Fibonacci sayı dizisi denir ve $\{G_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ile gösterilir [8], [10].

Bundan sonra çalışma boyunca,

$$Q_g := \begin{pmatrix} p & q \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

olsun. Bu matrisin karakteristik denklemi

$$x^2 - px - q = 0 \tag{2.1}$$

olur. Bu denklemin kökleri $\alpha_{p,q}$ ve $\beta_{p,q}$ olarak gösterilirse,

$$\alpha_{p,q} = \frac{p + \sqrt{p^2 + 4q}}{2},\ \beta_{p,q} = \frac{p - \sqrt{p^2 + 4q}}{2}$$

olur. Burada $\alpha_{p,q} - \beta_{p,q} \neq 0$ veya denk olarak $p^2 + 4q \neq 0$ olmalıdır. Buradan itibaren bu özelliğin sağlandığı kabul edilecektir. $\alpha_{p,q}$ ve $\beta_{p,q}$ sayıları arasında aşağıdaki ilişkiler vardır:

$$\alpha_{p,q}^2 = p\alpha_{p,q} + q \tag{2.2}$$

$$\beta_{p,q}^2 = p\beta_{p,q} + q \tag{2.3}$$

$$\alpha_{p,q} + \beta_{p,q} = p \tag{2.4}$$

$$\alpha_{p,q} + \beta_{p,q} = p \tag{2.5}$$

$$\alpha_{p,q} - \beta_{p,q} = \sqrt{p^2 + 4q} \tag{2.6}$$

Buradan itibaren $\alpha_{p,q}$ ve $\beta_{p,q}$ yerine kısaca sırasıyla α ve β sembolleri kullanılacaktır.

2.4. Genelleştirilmiş Fibonacci Sayıları ile İlgili Bazı Özellikler

Teorem 2.42. (Binet Formülü) Her $n \geq 1$ için $G_n = \dfrac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$ 'dir [11].

Teorem 2.42'de verilen formüle genelleştirilmiş Fibonacci sayıları için Binet formülü denilmektedir.

Yardımcı Teorem 2.43. $n \geq 0$ için $\alpha^n = \alpha G_n + qG_{n-1}$'dir [11].

İspat. n üzerinden birinci tümevarım ilkesi uygulanırsa;

$n=0$ için $\alpha^0=\alpha G_0+qG_{-1}=q$ şeklindedir ve eşitlik doğrudur.

$n=1$ için $\alpha^1=\alpha G_1+qG_0=\alpha$ şeklindedir ve eşitlik doğrudur.

$n=k$ için eşitliğin doğruluğunu kabul edelim, $n=k+1$ için eşitliğin doğruluğunu gösterelim. (2.2) eşitliği kullanılarak,

$$
\begin{aligned}
\alpha^{k+1} &= \alpha^k\alpha=(\alpha G_k+qG_{k-1})\alpha=\alpha^2G_k+\alpha qG_{k-1}\\
&=(p\alpha+q)G_k+\alpha qG_{k-1}=p\alpha G_k+q\alpha G_{k-1}+qG_k=\alpha(pG_k+qG_{k-1})+qG_k\\
&=\alpha G_{k+1}+qG_k
\end{aligned}
$$

bulunur ve $n=k+1$ için eşitliğin doğruluğu görülür. Böylece ispat tamamlanır. ■

Yardımcı Teorem 2.44. $n\geq 0$ için $\beta^n=\beta G_n+qG_{n-1}$'dir [11].

İspat. n üzerinden birinci tümevarım ilkesi uygulanırsa;

$n=0$ için $\beta^0=\beta G_0+qG_{-1}=q$ şeklindedir ve eşitlik doğrudur.

$n=1$ için $\beta^1=\beta G_1+qG_0=\beta$ şeklindedir ve eşitlik doğrudur.

$n=k$ için eşitliğin doğruluğunu kabul edelim $n=k+1$ için eşitliğin doğruluğunu gösterelim. (2.3) eşitliği kullanılarak

$$
\begin{aligned}
\beta^{k+1} &= \beta^k\beta=(\beta G_k+qG_{k-1})\beta=\beta^2G_k+\beta qG_{k-1}\\
&=(p\beta+q)G_k+\beta qG_{k-1}=p\beta G_k+q\beta G_{k-1}+qG_k=\beta(pG_k+qG_{k-1})+qG_k\\
&=\beta G_{k+1}+qG_k
\end{aligned}
$$

bulunur ve $n=k+1$ için eşitliğin doğruluğu görülür. Böylece ispat tamamlanır. ■

2.5. Fibonacci Sayılarının Matrislerle İlişkisi

Bu bölümde Fibonacci sayılarının matrislerle olan ilişkisi incelenecektir.

2.5.1. Fibonacci Q Matrisi

Fibonacci sayıları ve matris ilişkisi denilince ilk akla gelen, Fibonacci Q matrisi

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

dir. Gerçekten de bu matrisin kuvvetleri alındığı zaman örneğin,

$$Q^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Q^3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Q^4 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

elde edilir. Q matrisinin, Q^2, Q^3 ve Q^4 matrislerinin elemanlarının Fibonacci sayılarından ibaret olduğu görülmektedir. Bu durumun genel ifadesi aşağıdaki teoremde verilmektedir.

Teorem 2.45. $n \geq 1$ için $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ olmak üzere $Q^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}$ ’dir [12].

İspat. İspatı birinci tümevarım ilkesini kullanarak yapalım.

$$Q^1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_2 & F_1 \\ F_1 & F_0 \end{pmatrix}$$

olduğundan iddia $n=1$ için doğrudur. Şimdi $n=k$ için iddianın doğruluğunu kabul edelim ve $n=k+1$ için de doğru olduğunu görelim.

$$Q^{k+1}=Q^kQ=\begin{pmatrix} F_{k+1} & F_k \\ F_k & F_{k-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} F_{k+1}+F_k & F_{k+1} \\ F_k+F_{k-1} & F_k \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} F_{k+2} & F_{k+1} \\ F_{k+1} & F_k \end{pmatrix}$$

elde edilir. Böylece iddia $n=k+1$ için de doğrudur. İspat tamamlanır. ■

Teorem 2.46. $n\geq 1$ için $\det\left(Q^n\right)=(-1)^n$ 'dir [12].

İspat. $\det Q=-1$ olduğu açıktır. Buradan,

$$\det\left(Q^n\right)=\det\left(Q\right)^n=(-1)^n$$

elde edilir. ■

Teorem 2.46, Fibonacci sayıları için Cassini formülünün kolay bir ispatına olanak sağlar.

Teorem 2.47. (Cassini Formülü) $n\geq 1$ için $F_{n+1}F_{n-1}-F_n^2=(-1)^n$ 'dir [13].

İspat. Q matrisinin tanımı dikkate alındığında, $\det Q^n=F_{n+1}F_{n-1}-F_n^2$ şeklindedir. Teorem 2.46'dan, $\det Q^n=(-1)^n$ eşitliği vardır. Böylece $F_{n+1}F_{n-1}-F_n^2=(-1)^n$ elde edilir. ■

BÖLÜM 3. GENELLEŞTİRİLMİŞ FİBONACCİ SAYILARI İLE İLİŞKİLİ 3×3 BOYUTLU TERSİNİR OLMAYAN MATRİSLER

3.1. Giriş

Bu bölümde, elemanları $p,\ q$ ve 1 sayılarından oluşan ve genelleştirilmiş Fibonacci Q matrisi olarak adlandırılan $Q=\begin{pmatrix} p & q \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ matrisinin kuvvetleri ve Fibonacci sayıları arasında bir ilişkiden hareketle, kuvvetleri genelleştirilmiş Fibonacci sayıları ile ilişkili olan 3×3 boyutlu matrisler türetilmiştir.

Şimdi, önce bazı hazırlık bilgileri, daha sonra ise esas sonuçlar verilecektir.

3.2. Ön Bilgiler

p ve q sıfırdan farklı reel sayılar olmak üzere $G_0=0,\ \mathrm{G}_1=1$ ve $n\geq1$ için,

$$G_{n+1}=pG_n+qG_{n-1} \tag{3.1}$$

şeklinde tanımlanan diziye genelleştirilmiş Fibonacci dizisi denir ve $\{G_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ile gösterilir. Burada $p=q=1$ alınırsa, Fibonacci sayı dizisi elde edilir.

(3.1) eşitliğinde n yerine $-n$ yazmak suretiyle negatif indisli genelleştirilmiş Fibonacci sayıları tanımlanır ve $G_{-n}=-\dfrac{G_n}{(-q)^n}$ bağıntısı vardır [8], [10].

Şimdi $\begin{pmatrix} p & q \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ matrisini ele alalım ve bu matrisin kuvvetlerini inceleyelim:

Teorem 3.1. p ve q sıfırdan farklı reel sayılar olmak üzere X bir kare matris olsun. Eğer $X^2 = pX + qI$ ise her $n \in \mathbb{Z}$ için,

$$X^n = G_n X + qG_{n-1} I$$

dir [11].

İspat: $G_{-1} = \frac{1}{q}$ olduğundan $n = 0$ için iddia doğrudur.

$n \geq 1$ için ispatı tümevarım ilkesiyle yapacağız.

$G_0 = 0$ ve $G_1 = 1$ olduğundan $n = 1$ için iddianın doğruluğu açıktır.

$G_1 = 1$ ve $G_2 = p$ olup $X^2 = pX + qI$ olduğundan, $n = 2$ için iddia doğrudur.

İddianın bir $n \in \mathbb{N}$ için doğru olduğunu kabul edelim. Yani $X^n = G_n X + qG_{n-1} I$ olduğunu kabul edelim. Bu eşitliğin her iki tarafı X ile sağdan çarpılırsa

$$\begin{aligned} X^{n+1} &= G_n X^2 + qG_{n-1} X \\ &= G_n \left(pX + qI \right) + qG_{n-1} X \\ &= \left(pG_n + qG_{n-1} \right) X + qG_n I \\ &= G_{n+1} X + qG_n I \end{aligned}$$

olur. Yani $n+1 \in \mathbb{N}$ için de iddianın doğru olduğu görülür. Son olarak n yerine $n \geq 1$ olmak üzere $-n$ alınarak her $n \in \mathbb{Z}$ için iddianın doğruluğu gösterilmiş olur.■

Teorem 3.1 kullanılarak aşağıdaki sonuç elde edilir.

Teorem 3.2. $a,\ b,\ c \in \mathbb{R}$ olmak üzere $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & p-a \end{pmatrix}$, $\det X = -q \neq 0$ ise her $n \in \mathbb{Z}$ için,

$$X^n = \begin{pmatrix} aG_n + qG_{n-1} & bG_n \\ cG_n & G_{n+1} - aG_n \end{pmatrix}$$

dir [11].

İspat. X matrisinin $X^2 = pX + qI$ şartını sağladığı açıktır:

$$X^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & p-a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & p-a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+bc & bp \\ cp & bc+\left(p-a\right)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q+ap & bp \\ cp & p^2-ap+q \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ap+q & bp \\ cp & p\left(p-a\right)+q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} pa & pb \\ pc & p\left(p-a\right) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix}$$

$$= p\begin{pmatrix} a & b \\ c & p-a \end{pmatrix} + q\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= pX + qI$$

dır. Şimdi Teorem 3.1’ den,

$$X^n = G_n\begin{pmatrix} a & b \\ c & p-a \end{pmatrix} + qG_{n-1}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aG_n + qG_{n-1} & bG_n \\ cG_n & pG_n + qG_{n-1} - aG_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} aG_n + qG_{n-1} & bG_n \\ cG_n & G_{n+1} - aG_n \end{pmatrix}$$

eşitliği elde edilir.

Teorem 3.3. $X=\begin{pmatrix} p & q \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ise her $n\in\mathbb{Z}$ için $X^n=\begin{pmatrix} G_{n+1} & qG_n \\ G_n & qG_{n-1} \end{pmatrix}$'dir [11].

İspat. $\det X=-q$ olduğundan Teorem 3.2'den $X^n=\begin{pmatrix} aG_n+qG_{n-1} & bG_n \\ cG_n & G_{n+1}-aG_n \end{pmatrix}$'dir.

Burada $a=p,\ b=q,\ c=1$'dir. Bu değerleri yerine yazarsak

$$X^n=\begin{pmatrix} pG_n+qG_{n-1} & qG_n \\ G_n & G_{n+1}-pG_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} G_{n+1} & qG_n \\ G_n & qG_{n-1} \end{pmatrix}$$

olarak bulunur.

3.3. Yöntem ve Sonuçlar

[14]'de Fibonacci sayıları ile ilişkili olan, 2×2 boyutlu özel matrisler elde etme yöntemlerinden bahsedilmektedir. Bu kısımda genelleştirilmiş Fibonacci sayıları ile ilişkili 3×3 boyutlu benzer özellikteki matrislerin türetilmesi için bazı yaklaşımlar verilecek ve bu yaklaşıma dayanarak özel matrisler elde edilebilecektir.

Yöntem [14]'deki çalışmanın yöntemine benzerdir.

Q_g matrisinin özdeğerlerinin α ve β olduğu gösterilebilir. Şimdi, özdeğerleri $\lambda_1=\alpha=\dfrac{p+\sqrt{p^2+4q}}{2}$, $\lambda_2=\beta=\dfrac{p-\sqrt{p^2+4q}}{2}$ ve $\lambda_3=0$ olan 3×3 boyutlu bazı matrisleri araştıralım.

Diyelim ki,

$$A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & l \end{pmatrix}$$

matrisi, $p^2+4q\neq 0$ olmak üzere özdeğerleri α , β ve 0 olacak şekilde bir matris olsun. Ayrıca, bu özdeğerlere karşılık gelen öz vektörler de sırasıyla **x, y, z** olsun.

$$\mathbf{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},\ \mathbf{y}=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix},\ \mathbf{z}=\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$$

Burada özdeğer özvektör ikililerini, genelliğini bozmaksızın,

$$\left(\alpha,\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right),\ \left(\beta,\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}\right),\ \left(0,\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}\right)$$

ile gösterelim.

Özdeğer ve özvektör tanımından $A\mathbf{x}=\alpha\,\mathbf{x}$, $A\mathbf{y}=\beta\,\mathbf{y}$, $A\mathbf{z}=0$ doğrusal denklem sistemleri elde edilir. Bu denklem sistemlerinin açık biçimleri sırasıyla,

$$\begin{aligned} ax_1+bx_2+cx_3&=\alpha x_1 \\ dx_1+ex_2+fx_3&=\alpha x_2\ , \\ gx_1+hx_2+lx_3&=\alpha x_3 \end{aligned} \tag{3.2}$$

$$\begin{aligned} ay_1+by_2+cy_3&=\beta y_1 \\ dy_1+ey_2+fy_3&=\beta y_2 \\ gy_1+hy_2+ly_3&=\beta y_3 \end{aligned} \tag{3.3}$$

ve

$$\begin{aligned} az_1 + bz_2 + cz_3 &= 0 \\ dz_1 + ez_2 + fz_3 &= 0 \\ gz_1 + hz_2 + lz_3 &= 0 \end{aligned} \tag{3.4}$$

şeklindedir.

A matrisinin özdeğerleri farklı ve reel olduğundan köşegenleştirilebilirdir. Bu durumda genelliği bozmaksızın,

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.5}$$

ve S tersinir bir matris olmak üzere

$$A = S\Lambda S^{-1}$$

şeklinde yazılabilir. Buradan her $n \in \mathbb{N}$ için

$$A^n = S\Lambda^n S^{-1}$$

olur. Dolayısıyla (3.5) ve Yardımcı Teorem 2.43-2.44 dikkate alınarak,

$$A^n = S\begin{pmatrix} \alpha^n & 0 & 0 \\ 0 & \beta^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} S^{-1} = S\begin{pmatrix} G_n\alpha + qG_{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & G_n\beta + qG_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} S^{-1}$$

elde edilir. Bu eşitlikten yararlanarak,

$$A^n = S\left(G_n \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + qG_{n-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) S^{-1}$$

$$= S\left(G_n \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + qG_{n-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - qG_{n-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) S^{-1}$$

$$= S\left(G_n \Lambda + qG_{n-1} I_3 - qG_{n-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) S^{-1}$$

$$= G_n \left(S \Lambda S^{-1} \right) + qG_{n-1} \left(S I_3 S^{-1} \right) - qG_{n-1} \left(S \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} S^{-1} \right)$$

elde edilir. Böylece,

$$A^n = G_n A + qG_{n-1} I_3 - qG_{n-1} \left(S \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} S^{-1} \right) \tag{3.6}$$

olur. (3.6) eşitliğinden görüldüğü üzere, A matrisinin kuvvetleri genelleştirilmiş Fibonacci sayıları ile ilişkilidir.

Şimdi,

$$D = S \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} S^{-1} \tag{3.7}$$

olsun. S matrisinin sütunlarının, A matrisinin sırasıyla $\alpha,\ \beta$ ve 0 özdeğerlerine ilişkin özvektörleri olduğunu biliyoruz.

Şimdi, önce bu gerçeğe dayalı olarak S matrisi ile ilgili seçimleri ortaya koyacağız. Böylece, bu seçimlere bağlı olarak özel 3×3 boyutlu A matrisleri türetilebilecektir.

Buradan genelliği bozmaksızın,

$$S = (\,\mathbf{x}\,\mathbf{y}\,\mathbf{z}\,) = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix}$$

olmak üzere,

$$D = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} S^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & z_1 \\ 0 & 0 & z_2 \\ 0 & 0 & z_3 \end{pmatrix} S^{-1} \tag{3.8}$$

elde edilir.

$$S^{-1} = \frac{1}{\det S}\begin{pmatrix} y_2z_3 - z_2y_3 & z_1y_3 - y_1z_3 & y_1z_2 - z_1y_2 \\ z_2x_3 - x_2z_3 & x_1z_3 - z_1x_3 & z_1x_2 - x_1z_2 \\ x_2y_3 - y_2x_3 & y_1z_3 - z_1y_3 & x_1y_2 - y_1x_2 \end{pmatrix} \tag{3.9}$$

olduğundan,

$$D = \frac{1}{\det S}\begin{pmatrix} z_1\left(x_2y_3 - y_2x_3\right) & z_1\left(x_3y_1 - x_1y_3\right) & z_1\left(x_1y_2 - y_1x_2\right) \\ z_2\left(x_2y_3 - y_2x_3\right) & z_2\left(x_3y_1 - x_1y_3\right) & z_2\left(x_1y_2 - y_1x_2\right) \\ z_3\left(x_2y_3 - y_2x_3\right) & z_3\left(x_3y_1 - x_1y_3\right) & z_3\left(x_1y_2 - y_1x_2\right) \end{pmatrix} \tag{3.10}$$

elde edilir. Diğer yandan, S matrisinin determinantının bir ifadesi

$$\det S = z_1\left(x_2y_3 - y_2x_3\right) + z_2\left(x_3y_1 - x_1y_3\right) + z_3\left(x_1y_2 - y_1x_2\right) \tag{3.11}$$

şeklindedir.

Amacımız kuvvetleri genelleştirilmiş Fibonacci sayıları ile ilişkili olan bazı A matrisleri türetmektir. Bunun için (3.2), (3.3) ve (3.4) denklem sistemlerini sağlayan uygun **x**, **y** ve **z** vektörleri bulmalıyız. Bunun için de bazı özel koşullarla inceleme yaparak ilerlenebilir. Yani, buraya kadar yapılan tartışmalar bize bir yöntem sunmaktadır.

Bundan sonra bazı özel seçimler ile ilerleyerek bazı sonuçlar ortaya koyacağız.

x, **y** ve **z** vektörleri (3.2), (3.3) ve (3.4) denklemlerini sağlayacak vektörler, yani sırasıyla α, β ve 0 özdeğerine ilişkin özvektörler olsun. (3.11) determinantında bulunan, $\left(x_2y_3 - y_2x_3\right)$, $\left(x_3y_1 - y_3x_1\right)$, $\left(x_1y_2 - y_1x_2\right)$ ifadelerini birbirlerinin aynısı ya da ters işaretlisi olacak şekilde seçilerek ve (3.10)'daki D matrisinin elemanları tam sayı yapılmaya çalışılarak ilerlenebilir. Eğer, D matrisi (3.6)'da yerine yazılırsa,

$$A^n = G_nA + qG_{n-1}\left(I_3 - D\right)$$

elde edilir.

Şimdi özvektörlerin bazı özel seçimlerini alarak ilerleyelim.

$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ -1 \end{pmatrix} \pm$, $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \\ -1 \end{pmatrix}$ seçimi**:**

$\mathbf{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\-1\end{pmatrix}$ ve $\mathbf{y}=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\beta\\\alpha\\-1\end{pmatrix}$ vektörlerinin A matrisinin özvektörleri olabilmesi için (3.2) ve (3.3) denklemlerini sağlaması gerekmektedir.

İlk olarak (3.2) ve (3.3) sistemlerindeki ilk denklemlerin sağlanması için

$$\begin{aligned}&a\left(\frac{p+\sqrt{p^2+4q}}{2}\right)+b\left(\frac{p-\sqrt{p^2+4q}}{2}\right)-c=\alpha^2\\&a\left(\frac{p-\sqrt{p^2+4q}}{2}\right)+b\left(\frac{p+\sqrt{p^2+4q}}{2}\right)-c=\beta^2\end{aligned}\tag{3.12}$$

olmalıdır. (3.12)'deki denklemler taraf tarafa sırasıyla toplanarak ve çıkarılarak

$$\begin{aligned}&ap+bp-2c=\alpha^2+\beta^2=p^2+2q\\&a\left(\sqrt{p^2+4q}\right)-b\left(\sqrt{p^2+4q}\right)=\alpha^2-\beta^2=p\sqrt{p^2+4q},\ a-b=p\end{aligned}\tag{3.13}$$

denk denklem sistemi elde edilir. Sonra (3.2) ve (3.3) sistemlerindeki ikinci denklemlerin sağlanması için,

$$\begin{aligned}&d\left(\frac{p+\sqrt{p^2+4q}}{2}\right)+e\left(\frac{p-\sqrt{p^2+4q}}{2}\right)-f=-q\\&d\left(\frac{p-\sqrt{p^2+4q}}{2}\right)+e\left(\frac{p+\sqrt{p^2+4q}}{2}\right)-f=-q\end{aligned}\tag{3.14}$$

olmalıdır. (3.14)'deki denklemlerin taraf tarafa toplanması ve çıkarılmasıyla

$$\begin{aligned}&dp+ep-2f=-2q\\&d\sqrt{p^2+4q}-e\sqrt{p^2+4q}=0,\ (d-e=0)\end{aligned}\tag{3.15}$$

denk denklemler sistemi elde edilir. Son olarak (3.2) ve (3.3) denklem sistemindeki üçüncü denklemlerin sağlanması için,

$$\begin{aligned} g\left(\frac{p+\sqrt{p^2+4q}}{2}\right)+h\left(\frac{p-\sqrt{p^2+4q}}{2}\right)-l&=\left(\frac{-p-\sqrt{p^2+4q}}{2}\right)\\ g\left(\frac{p-\sqrt{p^2+4q}}{2}\right)+h\left(\frac{p+\sqrt{p^2+4q}}{2}\right)-l&=\left(\frac{-p+\sqrt{p^2+4q}}{2}\right) \end{aligned} \tag{3.16}$$

olmalıdır. Buradan, (3.16)'daki denklemler taraf tarafa sırasıyla toplanarak ve çıkarılarak,

$$\begin{aligned} &gp+hp-2l=-p\\ &g\sqrt{p^2+4q}-h\sqrt{p^2+4q}=-\sqrt{p^2+4q},\ (g-h=-1) \end{aligned} \tag{3.17}$$

denklemler sistemi elde edilir. Sonuç olarak (3.2) ve (3.3) sistemlerinin sağlanması için (3.13), (3.15) ve (3.17)'deki denklem sistemlerinin sağlanması gereklidir.

(3.13), (3.15) ve (3.17)'deki denklem sistemlerinden

$$\begin{aligned} &pa+pb-2c=p^2+2q,\ a-b=p\\ &pd+pe-2f=-2q,\ d-e=0\\ &pg+ph-2l=-p,\ g-h=-1 \end{aligned} \tag{3.18}$$

elde edilir.

Seçilen **x** ve **y** vektörleri için $(x_2y_3-y_2x_3)=\sqrt{p^2+4q}$, $(x_3y_1-x_1y_3)=\sqrt{p^2+4q}$ ve $(x_1y_2-y_1x_2)=\sqrt{p^2+4q}$ olur.

Artık yukarıdakilere ek olarak, **z** vektörünün değişik seçimleri ile birlikte bahsi geçen tüm sistemleri sağlayacak şekilde farklı A matrisleri bulabiliriz. Bu durumda **z** vektörünün bazı özel seçimleri ile ilerleyerek, A matrisi olarak adlandırdığımız türden bazı özel matrisler bulmaya çalışalım:

Seçim I . $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ keyfi olmak üzere $z_1 = k,\ z_2 = -k,\ z_3 = k$ olsun. Bu durumda D matrisi

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & k \\ 0 & 0 & -k \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix} S^{-1}$$

şeklinde olur. Ayrıca bu seçimlere dayalı olarak (3.11) eşitliğinden

$$\det S = k(\alpha - \beta)(\alpha + \beta)$$

ve buradan (3.10) eşitliğinden,

$$D = \frac{1}{k(\alpha - \beta)(\alpha + \beta)} \begin{pmatrix} k\sqrt{p^2 + 4q} & k\sqrt{p^2 + 4q} & kp\sqrt{p^2 + 4q} \\ -k\sqrt{p^2 + 4q} & -k\sqrt{p^2 + 4q} & -kp\sqrt{p^2 + 4q} \\ k\sqrt{p^2 + 4q} & k\sqrt{p^2 + 4q} & kp\sqrt{p^2 + 4q} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{kp\sqrt{p^2 + 4q}} \begin{pmatrix} k\sqrt{p^2 + 4q} & k\sqrt{p^2 + 4q} & kp\sqrt{p^2 + 4q} \\ -k\sqrt{p^2 + 4q} & -k\sqrt{p^2 + 4q} & -kp\sqrt{p^2 + 4q} \\ k\sqrt{p^2 + 4q} & k\sqrt{p^2 + 4q} & kp\sqrt{p^2 + 4q} \end{pmatrix},$$

yani,

$$D=\frac{1}{p}\begin{pmatrix}1 & 1 & p\\ -1 & -1 & -p\\ 1 & 1 & p\end{pmatrix}$$

olduğu görülür. $z_1=k,\ z_2=-k,\ z_3=k$ şeklinde seçildiği için (3.4) denklemi,

$$\begin{aligned}a-b+c&=0\\ d-e+f&=0\\ g-h+l&=0\end{aligned}\tag{3.19}$$

denklem sistemine dönüşür. (3.18) ve (3.19)'daki denklem sistemlerinden,

$$A=\frac{1}{p}\begin{pmatrix}p(p-1)+q & q-p & -p^2\\ -q & -q & 0\\ 1-p & 1 & p\end{pmatrix}\tag{3.20}$$

elde edilir.

A matrisi için (3.20)'deki eşitliği $A^n=G_nA+qG_{n-1}(I_3-D)$ eşitliğinde yazarsak,

$$A^n=\frac{G_n}{p}\begin{pmatrix}p(p-1)+q & q-p & -p\\ -q & -q & 0\\ 1-p & 1 & p\end{pmatrix}+q\frac{G_{n-1}}{p}\begin{pmatrix}p-1 & -1 & p\\ 1 & p+1 & p\\ -1 & -1 & 0\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{p}\begin{pmatrix}G_{n+2}-G_{n+1} & -(G_{n+1}-qG_n) & -pG_{n+1}\\ -q(G_n-G_{n-1}) & q(G_{n-1}-qG_{n-2}) & pqG_{n-1}\\ -(G_{n+1}-G_n) & G_n-qG_n-1 & pG_n\end{pmatrix}$$

eşitliği elde edilir.

Böylece her $n\geq 1$ için aşağıdaki teoremi ispatlamış olduk.

Teorem 3.1. $p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ olmak üzere her $n \geq 1$ için

$$A = \frac{1}{p}\begin{pmatrix} p(p-1)+q & q-p & -p^2 \\ -q & -q & 0 \\ 1-p & 1 & p \end{pmatrix}$$

ise

$$A^n = \frac{1}{p}\begin{pmatrix} G_{n+2}-G_{n+1} & -(G_{n+1}-qG_n) & -pG_{n+1} \\ -q(G_n-G_{n-1}) & q(G_{n-1}-qG_{n-2}) & pqG_{n-1} \\ -(G_{n+1}-G_n) & G_n-qG_n-1 & pG_n \end{pmatrix} \tag{3.21}$$

dir.

Seçim II. $k \in \mathbb{Z}$ ve $k \neq 0$ keyfi olmak üzere $z_1 = k,\ z_2 = k,\ z_3 = -k$ olsun. Ayrıca $p \notin \{0, 2\}$ olsun.

Seçim I öncesindeki tartışmalara benzer şekilde ilerlenerek (3.10) ile verilen D matrisi bu durumda

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & k \\ 0 & 0 & k \\ 0 & 0 & -k \end{pmatrix} S^{-1}$$

olarak elde edilir. Ayrıca bu seçimlere dayalı olarak (3.11) eşitliğinden

$$\det S = k(\alpha - \beta)(\alpha + \beta)$$

ve buradan (3.10) eşitliğinden,

$$D=\frac{1}{k(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)}\begin{pmatrix} k\sqrt{p^2+4q} & k\sqrt{p^2+4q} & kp\sqrt{p^2+4q} \\ k\sqrt{p^2+4q} & k\sqrt{p^2+4q} & kp\sqrt{p^2+4q} \\ -k\sqrt{p^2+4q} & -k\sqrt{p^2+4q} & -kp\sqrt{p^2+4q} \end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{kp\sqrt{p^2+4q}}\begin{pmatrix} k\sqrt{p^2+4q} & k\sqrt{p^2+4q} & kp\sqrt{p^2+4q} \\ k\sqrt{p^2+4q} & k\sqrt{p^2+4q} & kp\sqrt{p^2+4q} \\ -k\sqrt{p^2+4q} & -k\sqrt{p^2+4q} & -kp\sqrt{p^2+4q} \end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{p}\begin{pmatrix} 1 & 1 & p \\ 1 & 1 & p \\ -1 & -1 & -p \end{pmatrix}$$

olduğu görülür. $z_1=k,\ z_2=k,\ z_3=-k$ şeklinde seçildiği için (3.4) denklemi,

$$\begin{aligned} a+b-c&=0 \\ d+e-f&=0 \\ g+h-l&=0 \end{aligned} \tag{3.22}$$

halini alır. (3.18) ve (3.22) denklemlerinden;

$$A=\frac{1}{p-2}\begin{pmatrix} p(p-1)+q & p+q & p^2+2q \\ -q & -q & -2q \\ 1-p & -1 & -p \end{pmatrix} \tag{3.23}$$

elde ederiz. A matrisi için (3.23) deki eşitliği $A^n=G_nA+qG_{n-1}(I_3-D)$ eşitliğinde yazılırsa,

$$A^n = \frac{1}{p}\begin{pmatrix} G_{n+2}-G_{n+1} & G_{n+1}+qG_n & G_{n+2}+qG_n \\ -q\left(G_n-G_{n-1}\right) & -q\left(G_{n-1}-qG_{n-2}\right) & -q\left(G_n+qG_{n-2}\right) \\ -\left(G_{n+1}-G_n\right) & -\left(G_n+qG_{n-1}\right) & -\left(G_{n+1}+qG_{n-1}\right) \end{pmatrix} \tag{3.24}$$

elde edilir.

Böylece aşağıdaki teorem ispatlanmış olur.

Teorem 3.2. $p \in \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$ ve her $n \geq 1$ tamsayısı için,

$$A = \frac{1}{p-2}\begin{pmatrix} p(p-1)+q & p+q & p^2+2q \\ -q & -q & -2q \\ 1-p & -1 & -p \end{pmatrix}$$

olmak üzere,

$$A^n = \frac{1}{p}\begin{pmatrix} G_{n+2}-G_{n+1} & G_{n+1}+qG_n & G_{n+2}+qG_n \\ -q\left(G_n-G_{n-1}\right) & -q\left(G_{n-1}-qG_{n-2}\right) & -q\left(G_n+qG_{n-2}\right) \\ -\left(G_{n+1}-G_n\right) & -\left(G_n+qG_{n-1}\right) & -\left(G_{n+1}+qG_{n-1}\right) \end{pmatrix}$$

dir.

Seçim III. $k \neq 0$ ve $k \in \mathbb{Z}$ keyfi olmak üzere $z_1 = -k,\ z_2 = k,\ z_3 = k$ olsun. Yine seçim I öncesindeki tartışmalara benzer şekilde ilerlenerek (3.10) da verilen D matrisi, bu durumda

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -k \\ 0 & 0 & k \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix} S^{-1}$$

olarak elde edilir. Ayrıca bu seçimlere dayalı olarak (3.11) eşitliğinden

$$\det S = k(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)$$

ve buradan (3.10) eşitliğinden,

$$D = \frac{1}{p}\begin{pmatrix} -1 & -1 & -p \\ 1 & 1 & p \\ 1 & 1 & p \end{pmatrix}$$

elde edilir. $z_1 = -k,\ z_2 = k,\ z_3 = k$ şeklinde seçildiği için (3.4) denklemi

$$\begin{aligned} -a+b+c &= 0 \\ -d+e+f &= 0 \\ -g+h+l &= 0 \end{aligned} \tag{3.25}$$

denklem sistemine dönüşür. (3.18) ve (3.25)'den

$$A = \frac{1}{p}\begin{pmatrix} p(p+1) & p+q & p^2 \\ -q & -q & 0 \\ -(p+1) & -1 & -p \end{pmatrix} \tag{3.26}$$

elde ederiz. A matrisi için (3.26)'daki eşitliği $A^n = G_n A + qG_{n-1}(I_3 - D)$ eşitliğinde yazılırsa,

$$A^n = \frac{1}{p}\begin{pmatrix} G_{n+2}-G_{n+1} & G_{n+1}+qG_n & pG_{n+1} \\ -q(G_n+G_{n-1}) & -q(G_{n-1}-qG_{n-2}) & -pqG_{n-1} \\ -(G_{n+1}-G_n) & -(G_n+qG_{n-1}) & -pG_n \end{pmatrix} \tag{3.27}$$

elde edilir.

Böylece aşağıdaki teorem ispatlanmış olur.

Teorem 3.3. $p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ve her $n \geq 1$ tamsayısı için

$$A = \frac{1}{p}\begin{pmatrix} p(p+1) & p+q & p^2 \\ -q & -q & 0 \\ -(p+1) & -1 & -p \end{pmatrix}$$

olmak üzere

$$A^n = \frac{1}{p}\begin{pmatrix} G_{n+2} - G_{n+1} & G_{n+1} + qG_n & pG_{n+1} \\ -q(G_n + G_{n-1}) & -q(G_{n-1} - qG_{n-2}) & -pqG_{n-1} \\ -(G_{n+1} - G_n) & -(G_n + qG_{n-1}) & -pG_n \end{pmatrix}$$

dir.

BÖLÜM 4. GENELLEŞTİRİLMİŞ FİBONACCİ SAYILARI İLE İLİŞKİLİ 3×3 BOYUTLU TERSİNİR MATRİSLER

4.1. Giriş

Bu bölümde, elemanları $p,\ q$ ve 1 sayılarından oluşan ve genelleştirilmiş Fibonacci Q matrisi olarak adlandırılan $Q=\begin{pmatrix} p & q \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ matrisinin kuvvetleri ve Fibonacci sayıları arasında bir ilişkiden hareketle, kuvvetleri genelleştirilmiş Fibonacci sayıları ile ilişkili olan 3×3 boyutlu matrisler türetilmiştir. Bu bölümün amacı, Bölüm 3'dekinden farklı olarak 3×3 boyutlu tersinir olan matrisler türetmektir. Özdeğerler sıfırdan farklı seçildiğinden elde edilecek olan matrislerin tersinir olacağı açıktır.

4.2. Ön Bilgiler

Daha önceki bölümlerde de anlatıldığı gibi, p ve q sıfırdan farklı reel sayılar olmak üzere $G_0=0,\ G_1=1$ ve $n\geq 1$ için, $G_{n+1}=pG_n+qG_{n-1}$ bağıntısı ile tanımlanan $\{G_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ reel sayı dizisine, genelleştirilmiş Fibonacci sayı dizisi denir.

$\alpha=\dfrac{p+\sqrt{p^2+4q}}{2}$ ve $\beta=\dfrac{p-\sqrt{p^2+4q}}{2}$ sayılarının genelleştirilmiş Fibonacci sayıları ile ilişkisi, bu sayıların toplamı, farkı, çarpımı ve tamsayı kuvvetleri ile ilgili bağıntılar Bölüm 3'de verildiği gibidir.

Şimdi $\begin{pmatrix} p & q \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ matrisini ele alalım. Bu matrisi Q_g ile gösterelim. Her n tamsayısı için $Q_g^n = \begin{pmatrix} G_{n+1} & qG_n \\ G_n & qG_{n-1} \end{pmatrix}$ olduğunu Teorem 3.3'den bilinmektedir.

4.3. Yöntem ve Sonuçlar

Bu bölümde kuvvetleri genelleştirilmiş Fibonacci sayıları ile ilişkili olan 3×3 boyutlu matrislerin bulunması problemi ele alınmıştır. Problemi çözmek için [14]'deki çalışmanın yöntemine benzer olarak ilerlenecektir.

p ve q sıfırdan farklı reel sayılar olsun. $\alpha = \dfrac{p+\sqrt{p^2+4q}}{2}$ ve $\beta = \dfrac{p-\sqrt{p^2+4q}}{2}$ sayılarının $x^2 - px - q = 0$ denkleminin kökleri olduğunu biliyoruz. Burada $p^2 + 4q > 0$ olduğundan α ve β reel ve birbirinden farklıdır.

Şimdi, özdeğerleri $\lambda_1 = \alpha$ ve $\lambda_2 = \beta$ ve $\lambda_3 = 1$ olan bir 3×3 boyutlu matris

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & l \end{pmatrix} \tag{4.1}$$

olsun.

$p^2 + 4q > 0$ ve $p \mp \sqrt{p^2+4q} \neq 2$ olduğunda λ_1, λ_2 ve λ_3 birbirinden farklıdır. Şimdi λ_1, λ_2, λ_3 özdeğerlerine karşılık gelen özvektörler sırasıyla

$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$ olsun. Buradan $A\mathbf{x} = \lambda_1\mathbf{x}$, $A\mathbf{y} = \lambda_2\mathbf{y}$, $A\mathbf{z} = \lambda_3\mathbf{z}$ özdeğer - özvektör denklem sistemleri elde edilir. Bu denklem sistemlerinin açık biçimi

$$\begin{aligned} ax_1 + bx_2 + cx_3 &= \alpha x_1 \\ dx_1 + ex_2 + fx_3 &= \alpha x_2 \\ gx_1 + hx_2 + lx_3 &= \alpha x_3 \end{aligned} \tag{4.2}$$

$$\begin{aligned} ay_1 + by_2 + cy_3 &= \beta y_1 \\ dy_1 + ey_2 + fy_3 &= \beta y_2 \\ gy_1 + hy_2 + ly_3 &= \beta y_3 \end{aligned} \tag{4.3}$$

ve

$$\begin{aligned} az_1 + bz_2 + cz_3 &= z_1 \\ dz_1 + ez_2 + fz_3 &= z_2 \\ gz_1 + hz_2 + lz_3 &= z_3 \end{aligned} \tag{4.4}$$

denklem sistemleri şeklindedir. A matrisinin özdeğerleri farklı ve reel olduğundan, bu matris köşegenleştirilebilirdir. Bu durumda genelliği bozmadan

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{4.5}$$

ve S bir tersinir bir matris olmak üzere, genelliği bozmaksızın,

$$A = S\Lambda S^{-1} \tag{4.6}$$

şeklinde yazılabilir. Buradan, her $n \in \mathbb{Z}$ için

$$A^n = S\Lambda^n S^{-1} \tag{4.7}$$

olur. (4.5) ve (4.7)'den

$$A^n = S\begin{pmatrix} \alpha^n & 0 & 0 \\ 0 & \beta^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} S^{-1} = S\begin{pmatrix} \alpha G_n + qG_{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & \beta G_n + qG_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} S^{-1}$$

elde edilir. Bu eşitlik yeniden düzenlenirse,

$$A^n = S\left(G_n\Lambda + qG_{n-1}I_3 + (1 - G_n - qG_{n-1})\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) S^{-1}$$

olur. Buradan (4.6) eşitliği de dikkate alınarak,

$$A^n = G_nA + qG_{n-1}I_3 + (1 - G_n - qG_{n-1})\left(S\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} S^{-1} \right) \tag{4.8}$$

elde edilir. Böylece A matrisinin kuvvetinin genelleştirilmiş Fibonacci sayıları ile ilişkili olduğu görülür.

Şimdi,

$$D = S\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} S^{-1} \tag{4.9}$$

olsun. Bu durumda (4.8)'den

$$A^n = G_nA + qG_{n-1}I_3 + \left(1 - G_n - qG_{n-1}\right)D \tag{4.10}$$

olur. S matrisinin sütunlarının, A matrisinin sırasıyla α, β ve 1 özdeğerlerine ilişkin özvektörleri olduğunu biliyoruz.

Şimdi, önce bu gerçeğe dayalı olarak S matrisi ile ilgili seçimleri ortaya koyacağız. Böylece, bu seçimlere bağlı olarak özel 3×3 boyutlu A matrisleri türetilebilecektir.

Buradan genelliği bozmaksızın, D matrisi açık olarak,

$$D=\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}S^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & z_1 \\ 0 & 0 & z_2 \\ 0 & 0 & z_3 \end{pmatrix}S^{-1} \tag{4.11}$$

elde edilir.

$$S^{-1}=\frac{1}{\det S}\begin{pmatrix} y_2z_3-z_2y_3 & z_1y_3-y_1z_3 & y_1z_2-z_1y_2 \\ z_2x_3-x_2z_3 & x_1z_3-z_1x_3 & z_1x_2-x_1z_2 \\ x_2y_3-y_2x_3 & y_1z_3-z_1y_3 & x_1y_2-y_1x_2 \end{pmatrix} \tag{4.12}$$

olduğundan,

$$D=\frac{1}{\det S}\begin{pmatrix} z_1\left(x_2y_3-y_2x_3\right) & z_1\left(x_3y_1-x_1y_3\right) & z_1\left(x_1y_2-y_1x_2\right) \\ z_2\left(x_2y_3-y_2x_3\right) & z_2\left(x_3y_1-x_1y_3\right) & z_2\left(x_1y_2-y_1x_2\right) \\ z_3\left(x_2y_3-y_2x_3\right) & z_3\left(x_3y_1-x_1y_3\right) & z_3\left(x_1y_2-y_1x_2\right) \end{pmatrix} \tag{4.13}$$

olduğu açıktır. S matrisinin determinantının bir ifadesi,

$$\det S=z_1\left(x_2y_3-y_2x_3\right)+z_2\left(x_3y_1-x_1y_3\right)+z_3\left(x_1y_2-y_1x_2\right) \tag{4.14}$$

şeklindedir.

Amacımız, elemanları ve kuvvetleri genelleştirilmiş Fibonacci sayıları ile ilişkili olan 3×3 boyutlu A matrislerini bulmaktır. Bunun için (4.2), (4.4) denklem sistemlerini sağlayan $\mathbf{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$, $\mathbf{y}=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$, $\mathbf{z}=\begin{pmatrix}z_1\\z_2\\z_3\end{pmatrix}$ vektörleri bulunmalıdır. Böyle vektörler bulmak için bazı özel koşullarda inceleme yapılarak ilerlenebilir. Yani üçüncü bölümde olduğu gibi, buraya kadar yapılan tartışmalar bir yöntem sunmaktadır.

Bundan sonra bazı özel seçimler ile ilerleyerek bazı sonuçlar ortaya koyacağız.

Şimdi **x**, **y** ve **z** vektörleri, (4.2), (4.4) denklemlerini sağlayan vektörler olsun. Ayrıca (4.14) determinantında bulunan, $(x_2y_3-y_2x_3)$, $(x_3y_1-y_3x_1)$ ve $(x_1y_2-y_1x_2)$ terimlerini, birbirlerinin aynısı ya da ters işaretlisi olacak şekilde seçilerek ve, (4.13) deki D matrisinin elemanları tamsayı yapılmaya çalışılarak ilerlenebilir.

Şimdi özel vektörlerin bazı özel seçimlerini alarak ilerleyelim:

$\mathbf{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\-1\end{pmatrix}$, $\mathbf{y}=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\beta\\\alpha\\-1\end{pmatrix}$ seçimi:

$\mathbf{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\-1\end{pmatrix}$ ve $\mathbf{y}=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\beta\\\alpha\\-1\end{pmatrix}$ vektörlerinin A matrisinin özvektörleri olabilmesi için (4.2) ve (4.4) denklem sistemlerini sağlaması gerekmektedir.

İlk olarak (4.2) ve (4.3) denklem sistemlerinin ilk denklemlerinden sırasıyla,

$$\begin{aligned}
a\left(\frac{p+\sqrt{p^2+4q}}{2}\right)+b\left(\frac{p-\sqrt{p^2+4q}}{2}\right)-c=\alpha^2\\
a\left(\frac{p-\sqrt{p^2+4q}}{2}\right)+b\left(\frac{p+\sqrt{p^2+4q}}{2}\right)-c=\beta^2
\end{aligned} \tag{4.15}$$

eşitlikleri elde edilir. (4.15)'deki denklemler taraf tarafa sırasıyla bir toplanarak ve bir de çıkarılarak

$$
\begin{aligned}
&ap+bp-2c=\alpha^2+\beta^2 = p^2+2q \\
&a\left(\sqrt{p^2+4q}\right)-b\left(\sqrt{p^2+4q}\right)=\alpha^2-\beta^2 = p\sqrt{p^2+4q}
\end{aligned}
\tag{4.16}
$$

denk denklemler sistemi elde edilir. Benzer şekilde (4.2) ve (4.3) denklem sistemlerinin ikinci denklemlerinden,

$$
\begin{aligned}
&d\left(\frac{p+\sqrt{p^2+4q}}{2}\right)+e\left(\frac{p-\sqrt{p^2+4q}}{2}\right)-f=-q \\
&d\left(\frac{p-\sqrt{p^2+4q}}{2}\right)+e\left(\frac{p+\sqrt{p^2+4q}}{2}\right)-f=-q
\end{aligned}
\tag{4.17}
$$

bulunur. (4.16)'daki denklemler taraf tarafa sırasıyla bir toplanarak ve bir de çıkarılarak

$$
\begin{aligned}
&dp+ep-2f=-2q \\
&d\sqrt{p^2+4q}-e\sqrt{p^2+4q}=0
\end{aligned}
\tag{4.18}
$$

denk denklemler sistemi elde edilir. Son olarak (4.2) ve (4.3) denklem sistemlerinin üçüncü denklemlerinden sırasıyla,

$$
\begin{aligned}
&g\left(\frac{p+\sqrt{p^2+4q}}{2}\right)+h\left(\frac{p-\sqrt{p^2+4q}}{2}\right)-l=\left(\frac{-p-\sqrt{p^2+4q}}{2}\right) \\
&g\left(\frac{p-\sqrt{p^2+4q}}{2}\right)+h\left(\frac{p+\sqrt{p^2+4q}}{2}\right)-l=\left(\frac{-p+\sqrt{p^2+4q}}{2}\right)
\end{aligned}
\tag{4.19}
$$

bulunur. Buradan, (4.19)'daki denklemler taraf tarafa sırasıyla bir toplanarak ve bir de çıkarılarak,

$$\begin{aligned} &gp + hp - 2l = -p \\ &g\sqrt{p^2+4q} - h\sqrt{p^2+4q} = -\sqrt{p^2+4q} \end{aligned} \tag{4.20}$$

denk denklemler sistemi elde edilir. (4.2), (4.3) denklem sistemlerinin sağlanması için (4.16), (4.18) ve (4.20) denklem sistemleri sağlanmalıdır.

(4.16), (4.18) ve (4.20) denklem sistemlerinden

$$\begin{aligned} &pa + pb - 2c = p^2 + 2q,\ a - b = p \\ &pd + pe - 2f = -2q,\ d - e = 0 \\ &pg + ph - 2l = -p,\ g - h = -1 \end{aligned} \tag{4.21}$$

elde edilir.

Seçilen $\mathbf{x}$ ve $\mathbf{y}$ vektörleri için,

$$\left(x_2y_3 - y_2x_3\right) = \left(x_3y_1 - x_1y_3\right) = \left(x_1y_2 - y_1x_2\right) = \sqrt{p^2+4q} \tag{4.22}$$

dir.

Şimdi artık $\mathbf{z}$ vektörünün değişik seçimleri ile birlikte bahsi geçen tüm sistemleri sağlayacak şekilde farklı A matrisleri bulabiliriz. Bu durumda, $\mathbf{z}$ vektörünün özel seçimleri ile ilerlenerek A matrisi olarak adlandırdığımız türden bazı özel matrisler ortaya koyabiliriz.

Seçim I . $k \neq 0$ ve $k \in \mathbb{Z}$ keyfi olmak üzere $z_1 = k,\ z_2 = -k,\ z_3 = k$ olsun. Bu durumda (4.11)'den

$$D=\begin{pmatrix}0&0&k\\0&0&-k\\0&0&k\end{pmatrix}S^{-1}$$

olur. Ayrıca bu seçim altında (4.14) ve (4.22) göz önüne alınarak (4.14) eşitliğinden

$$\det S=k\sqrt{p^2+4q}$$

olup, (4.13)'den

$$D=\frac{1}{k\sqrt{p^2+4q}}\begin{pmatrix}k\sqrt{p^2+4q}&k\sqrt{p^2+4q}&k\sqrt{p^2+4q}\\-k\sqrt{p^2+4q}&-k\sqrt{p^2+4q}&-k\sqrt{p^2+4q}\\k\sqrt{p^2+4q}&k\sqrt{p^2+4q}&k\sqrt{p^2+4q}\end{pmatrix}$$

veya

$$D=\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&-1&-1\\1&1&1\end{pmatrix}\tag{4.23}$$

elde edilir. $\boldsymbol{z}=\begin{pmatrix}k\\-k\\k\end{pmatrix}$ seçimi altında (4.4) denklemler sistemi,

$$\begin{aligned}a-b+c&=1\\d-e+f&=-1\\g-h+l&=1\end{aligned}\tag{4.24}$$

denk denklemler sistemine dönüşür. (4.21) ve (4.24) denklem sistemlerinin ortak çözümünden,

$$A=\begin{pmatrix} \dfrac{p^2+p+q+1}{p} & \dfrac{p+q+1}{p} & -p+1 \\ \dfrac{-1-q}{p} & \dfrac{-1-q}{p} & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \tag{4.25}$$

elde edilir.

Öte yandan (4.23)'deki D matrisi ve (4.25)'deki A matrisi (4.10)'da yerine yazılırsa,

$$A^n=G_n\begin{pmatrix} \dfrac{p^2+p+q+1}{p} & p+q+1 & -p+1 \\ \dfrac{-1-q}{p} & \dfrac{-1-q}{p} & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}+qG_{n-1}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}+\left(1-G_n-qG_{n-1}\right)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

veya

$$A^n=\begin{pmatrix} \dfrac{p^2+p+q+1}{p}G_n+\dfrac{\left(1-G_n\right)}{p} & \dfrac{p+q+1}{p}G_n+1-G_n-qG_{n-1} & \left(-p+1\right)G_n+1-G_n-qG_{n-1} \\ \dfrac{-1-q}{p}G_n-1+G_n+qG_{n-1} & \dfrac{-1-q}{p}G_n+2qG_{n-1}+G_n-1 & -G_n-1+G_n+qG_{n-1} \\ -G_n+1-G_n-qG_{n-1} & 1-G_n-qG_{n-1} & 2G_n+1-G_n \end{pmatrix}$$

veya

$$A^n=\begin{pmatrix} \frac{\left(p^2+q+1\right)G_n+p}{p} & \frac{\left(q+1\right)G_n+p-pqG_{n-1}}{p} & -pG_n+1-qG_{n-1} \\ \frac{\left(-1-q+p\right)G_n-p+pqG_{n-1}}{p} & \frac{\left(-1-q+p\right)G_n+2pqG_{n-1}-p}{p} & qG_{n-1}-1 \\ 1-2G_n-pG_{n-1} & 1-G_n-qG_{n-1} & 1+G_n \end{pmatrix}$$

bulunur. Böylece aşağıdaki teoremi ispatlamış oluruz.

Teorem 4.1. $p,q\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, $p^2+4q>0$ ve $p\mp\sqrt{p^2+4q}\neq 2$ olmak üzere

$$A=\begin{pmatrix} \frac{p^2+p+q+1}{p} & \frac{p+q+1}{p} & -p+1 \\ \frac{-1-q}{p} & \frac{-1-q}{p} & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$ ise, her $n\in\mathbb{Z}$ için

$$A^n=\begin{pmatrix} \frac{\left(p^2+q+1\right)G_n+p}{p} & \frac{\left(q+1\right)G_n+p-pqG_{n-1}}{p} & -pG_n+1-qG_{n-1} \\ \frac{\left(-1-q+p\right)G_n-p+pqG_{n-1}}{p} & \frac{\left(-1-q+p\right)G_n+2pqG_{n-1}-p}{p} & qG_{n-1}-1 \\ 1-2G_n-pG_{n-1} & 1-G_n-qG_{n-1} & 1+G_n \end{pmatrix}$$

dir.

Seçim II. $k\neq 0$ ve $k\in\mathbb{Z}$ keyfi olmak üzere $z_1=k,\ z_2=k,\ z_3=-k$ olsun.

Seçim I 'deki tartışmalar göz önüne alınarak (4.11)'deki D matrisinin

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & k \\ 0 & 0 & k \\ 0 & 0 & -k \end{pmatrix} S^{-1}$$

olduğu görülür. Bu durumda,

$\mathbf{x}=\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \\ -1 \end{pmatrix}$ ve $\mathbf{z} = \begin{pmatrix} k \\ k \\ -k \end{pmatrix}$ seçimi için, (4.14) ve (4.22)'den

$$\det S = k\sqrt{p^2+4q}$$

olur. Böylece, (4.13)'den

$$D = \frac{1}{k\sqrt{p^2+4q}} \begin{pmatrix} k\sqrt{p^2+4q} & k\sqrt{p^2+4q} & k\sqrt{p^2+4q} \\ k\sqrt{p^2+4q} & k\sqrt{p^2+4q} & k\sqrt{p^2+4q} \\ -k\sqrt{p^2+4q} & -k\sqrt{p^2+4q} & -k\sqrt{p^2+4q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad (4.26)$$

bulunur.

$z = \begin{pmatrix} k \\ k \\ -k \end{pmatrix}$ seçimi altında, (4.4) denklemler sisteminden,

$$\begin{aligned} a-b+c &= 1 \\ d-e+f &= 1 \\ g-h+l &= -1 \end{aligned} \quad (4.27)$$

denk denklemler sistemine döner. (4.21) ve (4.27) denklem sisteminin ortak çözümünden,

$$A=\begin{pmatrix} \frac{p^2+p+q+1}{p} & \frac{p+q+1}{p} & -p+1 \\ \frac{1-q}{p} & \frac{1-q}{p} & 1 \\ \frac{-p-2}{p} & \frac{-2}{p} & 0 \end{pmatrix} \tag{4.28}$$

bulunur. D matrisi ve (4.28)'deki A matrisi, (4.10)'da yerine yazılırsa,

$$A^n=G_n\begin{pmatrix} \frac{p^2+p+q+1}{p} & \frac{p+q+1}{p} & -p+1 \\ \frac{1-q}{p} & \frac{1-q}{p} & 1 \\ \frac{-p-2}{p} & \frac{-2}{p} & 0 \end{pmatrix}+qG_{n-1}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}+\left(1-G_n-qG_{n-1}\right)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

veya

$$A^n=\begin{pmatrix} \frac{p^2+p+q+1}{p}G_n+1-G_n & \frac{p+q+1}{p}G_n+1-G_n-qG_{n-1} & \left(-p-1\right)G_n+1-G_n-qG_{n-1} \\ \frac{1-q}{p}G_n+1-G_n-qG_{n-1} & \frac{1-q}{p}G_n+1-G_n & G_n+1-G_n-qG_{n-1} \\ \frac{-p-2}{p}G_n-1+G_n+qG_{n-1} & \frac{-2}{p}G_n-1+G_n+qG_{n-1} & 2qG_{n-1}+G_n-1 \end{pmatrix}$$

veya,

$$A^n=\begin{pmatrix} \frac{\left(p^2+q+1\right)G_n+p}{p} & \frac{\left(q+1\right)G_n+p-pqG_{n-1}}{p} & -pG_n+1-qG_{n-1} \\ \frac{\left(1-q-p\right)G_n+p-pqG_{n-1}}{p} & \frac{\left(1-q-p\right)G_n+p}{p} & 1-qG_{n-1} \\ \frac{-2G_n-p+pqG_{n-1}}{p} & \frac{\left(-2+p\right)G_n-p+pqG_{n-1}}{p} & 2qG_{n-1}+G_n-1 \end{pmatrix}$$

bulunur.

Böylece aşağıdaki teoremi ispatlamış oluruz.

Teorem 4.2. $p,q\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, $p^2+4q>0$ ve $p\mp\sqrt{p^2+4q}\neq 2$ olmak üzere

$$A=\begin{pmatrix} \frac{p^2+p+q+1}{p} & \frac{p+q+1}{p} & -p+1 \\ \frac{1-q}{p} & \frac{1-q}{p} & 1 \\ \frac{-p-2}{p} & \frac{-2}{p} & 0 \end{pmatrix}$$ ise, her $n\in\mathbb{Z}$ için

$$A^n=\begin{pmatrix} \frac{(p^2+q+1)G_n+p}{p} & \frac{(q+1)G_n+p-pqG_{n-1}}{p} & -pG_n+1-qG_{n-1} \\ \frac{(1-q-p)G_n+p-pqG_{n-1}}{p} & \frac{(1-q-p)G_n+p}{p} & 1-qG_{n-1} \\ \frac{-2G_n-p+pqG_{n-1}}{p} & \frac{(-2+p)G_n-p+pqG_{n-1}}{p} & 2qG_{n-1}+G_n-1 \end{pmatrix}$$

dir.

Seçim III. $k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$ keyfi olmak üzere $z_1=-k,\ z_2=k$ ve $z_3=k$ olsun. Bu durumda önceki tartışmalar ışığında, (4.11)'deki D matrisi, $D=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -k \\ 0 & 0 & k \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}S^{-1}$ dir ve $\det S=k\sqrt{p^2+4q}$ olur.

Böylece (4.13)'den

$$D=\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{4.29}$$

bulunur. $z = \begin{pmatrix} -k \\ k \\ k \end{pmatrix}$ seçimine göre (4.4) denklem sisteminden

$$\begin{aligned} a-b+c &= 1 \\ d-e+f &= 1 \\ g-h+l &= 1 \end{aligned} \tag{4.30}$$

denk denklem sistemi elde edilir. (4.21) ve (4.30) denklem sistemlerinin ortak çözümünden

$$A = \begin{pmatrix} \frac{p^2+p+q-1}{p} & \frac{p+q-1}{p} & -p-1 \\ \frac{1-q}{p} & \frac{1-q}{p} & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \tag{4.31}$$

bulunur. (4.29)'daki D matrisi ve (4.31)'deki A matrisi (4.10)'da yerine yazılırsa,

$$A^n = \begin{pmatrix} \frac{(p^2+2p+q-1)G_n - 2pqG_{n-1} - p}{p} & \frac{(2p+q-1)G_n + pqG_{n-1} - p}{p} & -pG_n + qG_{n-1} - 1 \\ \frac{(1-q-p)G_n - pqG_{n-1} + p}{p} & \frac{(1-q-p)G_n + p}{p} & 1 - qG_{n-1} \\ 1 - 2G_n - qG_{n-1} & 1 - G_n - qG_{n-1} & 1 + G_n \end{pmatrix}$$

olarak bulunur.

Böylece aşağıdaki teorem ispatlanmış oldu.

Teorem 4.3. $p,q\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, $p^2+4q>0$ ve $p\mp\sqrt{p^2+4q}\neq 2$ olmak üzere

$$A=\begin{pmatrix} \dfrac{p^2+p+q-1}{p} & \dfrac{p+q-1}{p} & -p-1 \\ \dfrac{1-q}{p} & \dfrac{1-q}{p} & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$ ise, her $n\in\mathbb{Z}$ için

$$A^n=\frac{1}{p}\begin{pmatrix} (p^2+2p+q-1)G_n-2pqG_{n-1}-p & (2p+q-1)G_n+pqG_{n-1}-p & -p^2G_n+pqG_{n-1}-p \\ (1-q-p)G_n-pqG_{n-1}+p & (1-q-p)G_n+p & p-pqG_{n-1} \\ p-2pG_n-pqG_{n-1} & p-pG_n-pqG_{n-1} & p+pG_n \end{pmatrix}$$

dir.

BÖLÜM 5. TARTIŞMA VE ÖNERİLER

Fibonacci sayıları ve genelleştirilmiş Fibonacci sayıları ile ilgili çeşitli alanlarda gösterilmiş birçok özellik vardır.

Bu çalışmanın ikinci bölümünde, Fibonacci ve genelleştirilmiş Fibonacci sayılarının temel özellikleri ve bu sayılarla elde edilen matrislerin ilişkisi incelenmiştir.

Çalışmanın üçüncü bölümünde Fibonacci sayıları ile ilişkili olan 3×3 boyutundaki bazı özel matrislerden hareketle Q_g matrisi tanımlanmıştır. Q_g matrisinin özdeğerlerinin $\alpha = \dfrac{p+\sqrt{p^2+4q}}{2}$, $\beta = \dfrac{p-\sqrt{p^2+4q}}{2}$ olduğundan yola çıkılarak özdeğerleri $\alpha,\ \beta,\ 0$ ve $\alpha,\ \beta,\ 1$ olan 3×3 boyutlu matrislerin kuvvetlerinin, genelleştirilmiş Fibonacci sayıları ile ilişkileri ayrı ayrı incelenmiştir. Bu şekildeki matrislerin elde edilebilmesi için önce belirli şartların sağlanması gerekmektedir. Bu durumda öncelikle matrisin köşegenleştirilme özellikleri kullanılarak, matris kuvvetleri elde edilmeye çalışılmıştır. Elde edilen bu özdeşlikler kullanılarak matrisin sırasıyla $\alpha,\ \beta,\ 0$ veya $\alpha,\ \beta,\ 1$ özdeğerlerine karşılık gelecek olan özvektörler bulunmuştur. Bu özvektörler yardımıyla farklı matrisler elde edilmiştir. Elde ettiğimiz bu matrislerin genelleştirilmiş Fibonacci sayıları ile ilgili özelliklerinin nasıl elde edileceği gösterilmiştir.

Bu çalışmada ele alınan problemler, herşeyden önce genelleştirilmiş Fibonacci sayılarının en genel tanımını, yani [8], [11]'deki tanımlar dikkate alınır.

Bu yöntemle elde edilen 3×3 boyutundaki matrisler 4×4 ya da daha büyük boyutlu matrislere dönüştürülebilir. Benzer düşünce ile, genelleştirilmiş Fibonacci sayıları ile ilişkili olan 4×4 veya daha yüksek boyutlu matrisler türetilebilir. Yöntemin aynı olmasından başka, sadece işlemlerde bir kalabalık olacaktır. Ele alınan problemin ne gibi fiziksel olaylara karşılık gelebileceği de ayrıca araştırmaya değerdir.

KAYNAKLAR

[1] Brannan, D. A., A First Course in Mathematical Analysis, Cambridge University Press, 2006.

[2] Anton, H., Elementary Linear Algebra, John Willey and Sons, 2010.

[3] Harville, D. A., Matrix Algebra From a Statistician's Perspective, New York: Springer-Verlag, 1997.

[4] Meyer, C. D., Matrix Analysis and Applied Linear Algebra, SIAM, Philadelphia, PA: SIAM, 2000.

[5] Grimaldi, R., Fibonacci and Catalan Numbers, John Wiley and Sons, 2012.

[6] Panwar, Y. K., Singh, B. ve Gupta, V. K., Generalized Fibonacci Sequences and Its Properties, Palestine Polytechnic University , 3(1): 141-147, 2014 .

[7] Gupta, V. K., Panwar, Y. K. ve Sikhwal, O., Generalized Fibonacci Sequences , International Scientific Press, 2(2): 15-124,2012 .

[8] Kalman, D., Mena, R., The Fibonacci numbers-exposed., Math Mag, 167 (81):76, 2003.

[9] Larcombe, P. J., Horadam sequences: a survey update and extension, Bull. I.C.A., 80, 99-118, 2017.

[10] Ribenboim, P., My numbers, My Friends, Springer-Verlag New York , 2000.

[11] Keskin, R., Şiar, Z., Some new identities concerning generalized Fibonacci and Lucas numbers, Hacet. J. Stat, 42(3): 211-222, 2013.

[12] Hoggatt, V. E., Fibonacci and Lucas Numbers, Houghton Mifflin Company, 1969.

[13] Koshy, T., Fibonacci and Lucas Numbers with Applications, Wiley Interscience, 2001.

[14] Karakaya, S., Özdemir, H., Petik, T., 3x3 Dimensional Special Matrices Associated with Fibonacci and Lucas numbers, Sakarya University Journal of Science , 22(6):1917-1922, 2018.

[15] Demirtürk, B., Fibonacci and Lucas Sums with Matrix Method, International Mathematical Forum, Sakarya, 2010.

ÖZGEÇMİŞ

Hilal ÇAKMAK, 16.11.1992 tarihinde Sivas'da doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini 2010 yılında Sivas'da tamamladı. 2011 yılında Sivas Cumhuriyet Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde lisans öğrenimine başladı. 2016 yılında lisans öğrenimini tamamladı. Aynı yıl Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı, Uygulamalı Matematik Bilim Dalı'nda yüksek lisans programına başladı. 2018-2019 bahar döneminde Milli Eğitim Bakanlığı'nda sözleşmeli matematik öğretmeni olarak işe başlamış olup, halen bu görevine devam etmektedir.