T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KUANTUM ANALİZ VE UYGULAMALARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Zülal MISIR

Enstitü Bilim Dalı	**:**	**MATEMATİK**
Enstitü Anabilim Dalı	**:**	**UYGULAMALI MATEMATİK**
Tez Danışmanı	**:**	**Prof. Dr. Ömer Faruk GÖZÜKIZIL**

Haziran 2019

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KUANTUM ANALİZ VE UYGULAMALARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Zülal MISIR

Enstitü Bilim Dalı : **MATEMATİK**

Enstitü Anabilim Dalı : **UYGULAMALI MATEMATİK**

Bu tez 17.06.2019 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği / ~~oyçokluğu~~ ile kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Ömer Faruk GÖZÜKIZIL Jüri Başkanı	Doç. Dr. Metin YAMAN Üye	Prof. Dr. İsmet YILDIZ Üye

BEYAN

Tez içindeki tüm verilerin akademik kurallar çerçevesinde tarafımdan elde edildiğini, görsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçların akademik ve etik kurallara uygun şekilde sunulduğunu, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezde yer alan verilerin bu üniversite veya başka bir üniversitede herhangi bir tez çalışmasında kullanılmadığını beyan ederim.

Zülal MISIR
10.05.2019

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimim boyunca değerli bilgi ve deneyimlerinden yararlandığım, her konuda bilgi ve desteğini almaktan çekinmediğim, araştırmanın planlanmasından yazılmasına kadar tüm aşamalarında yardımlarını esirgemeyen, teşvik eden, aynı titizlikte beni yönlendiren değerli danışman hocam Prof. Dr. Ömer Faruk GÖZÜKIZIL’a teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca yüksek lisans ders ve tez dönemim boyunca, benim üzerimden desteğini esirgemeyen değerli eşim Muhammed Sabri MISIR’a canı gönülden teşekkür ediyorum.

İÇİNDEKİLER

ÖZET

Anahtar Kelimeler: Kuantum analiz, tam diferansiyel denklem, kuantum tam diferansiyel denklem

Bu çalışmada, öncelikli olarak sonuca ulaşmak için gerekli olan temel kuantum analiz bilgileri verilmiştir. Ardından klasik analizdeki bir diferansiyel denklemin tam olmasını sağlayan koşulların bilindiği düşünülerek, bu koşullar ile kuantum analizdeki bir diferansiyel denklemin tam olmasını sağlayan koşulların aynı olup olmadığı araştırılmıştır. Bu araştırma için tanımlanan kuantum analiz bilgileri kullanılmıştır. Araştırmanın sonucunda, kuantum diferansiyel denklemi tam yapan koşulların, klasik diferansiyel denklemi tam yapan koşullar ile aynı olduğu gösterilmiştir. Bu gösterimin ardından, tezimiz bu konuyu pekiştirecek bir örnek ve çözümü ile sonlandırılmıştır.

QUANTUM CALCULUS AND APPLICATIONS

SUMMARY

Keywords: Quantum calculus, exact differential equation, quantum exact differential equation

In this study, firstly, the basic quantum analysis information required to achieve the result is given. Then, In view of the fact that the conditions that allow a differential equation to be exact in classical analysis are known, it has been investigated whether these conditions and the conditions that enable a differential equation in quantum analysis to be exact are the same. The quantum analysis information described for this research was used. As a result of the research, it has been shown that the conditions that make the quantum differential equation exactly are the same as the conditions that make the classical differential equation exactly. Following this demonstration, our thesis was ended with an example and solution that will reinforce the subject.

BÖLÜM 1. GİRİŞ

Kuantum analiz, en az dört yüz yıllık tarihi olan, soyut ve uygulamalı matematiğin birçok alanı ile ilişkili geniş bir konudur. Kuantum analiz ‘in temeli Euler’e kadar dayanmaktadır. Kuantum analiz matematiğin yavaş gelişmiş fakat güzel ve heyecanlı bir bölümüdür [1]. Bazen limitsiz analiz adı verilen kuantum analiz, limit kavramı olmadan geleneksel sonsuz küçük hesaplara eşdeğerdir. Quantum analiz, q, kuantum kelimesini temsil etmek üzere, ‘q-analiz’ şeklinde ifade edilir [2].

Tezimizin ikinci bölümünde, q-analizin temeli olan, tek değişkenli fonksiyon için q-diferansiyel ve q-türev tanımları verilmiştir [3]. Bu tanımlamalardan yola çıkarak iki değişkenli fonksiyon için q-türev tanımları elde edilmiştir.

Tezimizin üçüncü bölümünde, diğer bölümde anlatılan q-Taylor formülünü tanımlayabilmek için gerekli olan, genelleştirilmiş Taylor formülü anlatılmıştır [4]. Diğer bölümde q-Taylor formülünü açıklamak için diğer gerekli tanımlamalar yapıldıktan sonra, beşinci bölümde q-Taylor formülü verilmiştir [4].

Ardından, tezimiz asıl konusu olan kuantum diferansiyel denklemi tam yapma koşulu için kullanacağımız, Jackson integrali tanımlamak için gerekli olan bilgiler; Gauss’un binom formülü altıncı bölümde, q-antitürev yedinci bölümde ve Jackson integral sekizinci bölümde tanımlanmıştır [4].

Son olarak, dokuzuncu bölümde tezimizin özgün konusu olan, kuantum tam diferansiyel ve uygulaması anlatılarak, tezimiz sonlandırılmıştır.

BÖLÜM 2. q-TÜREV VE q-DİFERANSİYEL

2.1. Tanım (q-diferansiyel ve h-diferansiyel)

Keyfi bir $f(x)$ fonksiyonunun q-diferansiyeli $0 < q < 1$

$$d_q f(x) = f(qx) - f(x) \tag{2.1}$$

Keyfi bir f(x) fonksiyonunun h-diferansiyeli

$$d_h f(x) = f(x+h) - f(x) \tag{2.2}$$

şeklinde tanımlanır. Burada;

$$d_q x = (q-1)x \tag{2.3}$$

$$d_h x = h \tag{2.4}$$

olarak alınacaktır [3].

Quantum diferansiyelinin normal diferansiyelden ilginç farkı, iki fonksiyonun çarpım türevinde simetri olmayışıdır. Bunu gösterecek olursak;

$f(x)$ ve $g(x)$ keyfi fonksiyonlar olmak üzere, $f(x)g(x)$ çarpımının q-diferansiyelini (1.1) tanımından yararlanarak aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$d_q\big(f(x)g(x)\big) = f(qx)g(qx) - f(x)g(x) \tag{2.5}$$

yazdığımız bu ifadeden $f(qx)g(x)$ çıkarılıp toplanırsa;

$$d_q\big(f(x)g(x)\big) = f(qx)g(qx) - f(qx)g(x) + f(qx)g(x) - f(x)g(x)$$

$$d_q\big(f(x)g(x)\big) = f(qx)\big(g(qx) - g(x)\big) + g(x)(f(qx) - f(x))$$

$$d_q\big(f(x)g(x)\big) = f(qx)d_q g(x) + g(x)d_q f(x) \tag{2.6}$$

olarak elde edilip, normal çarpım türevinden farklı olduğu görülür.

Benzer şekilde, (2.2) tanımından faydalanarak, h-diferansiyel için de gösterelim;

$$d_h\big(f(x)g(x)\big) = f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x) \tag{2.7}$$

yazdığımız bu ifadeden $f(x+h)g(x)$ çıkarılıp toplanırsa;

$$d_h\big(f(x)g(x)\big) = f(x+h)g(x+h) - f(x+h)g(x) + f(x+h)g(x) - f(x)g(x)$$

$$d_h\big(f(x)g(x)\big) = f(x+h)d_h g(x) + g(x)d_h f(x) \tag{2.8}$$

olarak elde edilir.

2.2. Tanım (Kuantum diferansiyel ile uyumlu olan kuantum türev)

$$D_q f(x) = \frac{d_q f(x)}{d_q x} = \frac{f(qx)-f(x)}{(q-1)x} \tag{2.9}$$

$$D_h f(x) = \frac{d_h f(x)}{d_h x} = \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \tag{2.10}$$

(2.9) eşitliği $f(x)$ fonksiyonunun q-türevi, (2.10) eşitliği ise $f(x)$ fonksiyonunun h-türevi olarak adlandırılır [3].

Eğer $f(x)$ türevlenebiliyorsa, aşağıdaki eşitliğin sağlanabileceğini not edelim:

$$\lim_{q\to 1} D_q\, f(x) = \lim_{h\to 0} D_h\, f(x) = \frac{df(x)}{dx} \tag{2.11}$$

$df(x)$ diferansiyel kavramı ayrıntılı açıklama gerektirdiği için, bölünemeyecek kadar küçük iki şeyin oranı olan, Leibniz notasyonu olarak bilinen $\frac{df(x)}{dx}$ ifadesi oldukça karmaşıktır.

Fakat, tam tersi olarak, q-diferansiyel ve h-diferansiyel kavramları açıktır. Aynı şekilde q-türev ve h-türev ifadeleri yalın, anlaşılır oranlardır.

Sıradan türevde olduğu gibi, bir fonksiyonun q ve h türevini alma eylemi de lineer bir işlemdir. Diğer bir deyişle D_q ve D_h herhangi a ve b sabitleri için aşağıdaki özelliklere sahiptir:

$$D_q\big(af(x) + bg(x)\big) = aD_q f(x) + bD_q g(x) \tag{2.12}$$

$$D_h(af(x) + bg(x)) = aD_h\, f(x) + bD_h\, g(x) \tag{2.13}$$

2.3.Tanım (İki değişkenli fonksiyon için kuantum türev)

$$D_{q_x}f(x,y) = \frac{d_q f(x,y)}{d_q x} = \frac{f(qx,y) - f(x,y)}{(q-1)x} \tag{2.14}$$

$$D_{q_y}f(x,y) = \frac{d_q f(x,y)}{d_q y} = \frac{f(x,qy) - f(x,y)}{(q-1)y} \tag{2.15}$$

2.4. Örnek: $f(x) = x^n$ fonksiyonunun q türevini, n'nin pozitif tamsayı olduğu durumda;

$$D_q x^n = \frac{(qx)^n - x^n}{(q-1)x} = \frac{q^n - 1}{q-1} x^{n-1} \tag{2.16}$$

eşitliği yardımıyla hesaplayınız. $\frac{q^n-1}{q-1}$ kesri tezimizde ve soru çözümünde lazım olacağı için aşağıdaki eşitliği verelim.

n'nin herhangi pozitif tamsayı olduğu durumda;

$$[n] = \frac{q^n - 1}{q-1} = q^{n-1} + \cdots + 1 \tag{2.17}$$

şeklinde tanımlanır. Ve (2.17) eşitliği n'nin q-benzeri olarak adlandırılır. Böylece, (2.16) eşitliği;

$$D_q x^n = [n]x^{n-1} \tag{2.18}$$

şeklini alır ve bu eşitlik x^n'nin sıradan türevine benzer.

$q \to 1$ iken; $[n] = q^{n-1} + q^{n-2} + \cdots + 1 \to 1 + \cdots 1 = n$ olduğu görülür.

Ve zamanla; n tamsayısının sıradan analizde oynadığı rolün aynısını, $[n]$'nin q-analiz'de oynadığını göreceğiz [4].

BÖLÜM 3. POLİNOMLAR İÇİN GENELLEŞTİRİLMİŞ TAYLOR FORMÜLÜ

Sıradan analizde, tüm mertebeden türevlere sahip olan bir $f(x)$ fonksiyonu, eğer $x = \alpha$ civarında kuvvet serisi olarak ifade edilebiliyorsa; bu fonksiyon $x = \alpha$ noktasında analitiktir yani türevlenebilirdir.

Taylor teoremi; kuvvet serisini aşağıdaki şekilde tanımlar:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f^n(\alpha) \frac{(x-\alpha)^n}{n!} \tag{3.1}$$

Bir analitik fonksiyonun Taylor açılımı; bu fonksiyonun tanımını, daha geniş ve daha ilginç çalışma alanlarına genişletmesine izin verir. Tezimizde Taylor formülünün q-benzerini formüle edeceğiz. Fakat bundan önce daha genel durumları göz önünde bulundurmamız gerekir [4].

3.1. Teorem: α bir sayı, D polinom uzayında bir lineer operatör ve $\{P_0(x), P_1(x), P_2(x), \ldots\}$ aşağıdaki üç durumu sağlayacak bir polinom dizisi olsun;

(a) $P_0(\alpha) = 1$ ve $P_n(\alpha) = 0$ herhangi $n \geq 1$ için.

(b) P_n'in derecesi; $degP_n = n$.

(c) $DP_n(x) = P_{n-1}(x);\ n \geq 1$ ve $D(1) = 0$.

Böylece; N. Dereceden herhangi $f(x)$ polinomu aşağıdaki genelleştirilmiş Taylor formülüne sahiptir:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (D^n f)(\alpha) P_n\,(x) \tag{3.2}$$

BÖLÜM 4. İKİLİ TERİMLERİN q-TÜREVLERİ (n'NİN BİR TAMSAYI OLDUĞU DURUMDA)

2.bölümde belirtildiği gibi , D_q polinom uzayı üzerinde lineer operatördür. Teorem 3.1'i; $D \equiv D_q$ üzerine uygulamaya çalışacağız. Bunun için; aşağıda tanımlanan $n!$'in q-benzerine ihtiyaç duyarız:

$$[n!] = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ [n] \times [n-1] \times \ldots \times [1] & n = 1,2,\ldots \end{cases} \tag{4.1}$$

$D \equiv D_q$ denkliğine göre, Teorem 3.1'in üç durumunu sağlayan $\{P_0(x), P_1(x), P_2(x), \ldots\}$ şeklinde polinom dizisi oluşturalım.

Eğer $\alpha = 0$ olursa;

$$P_n(x) = \frac{x^n}{[n]!} \tag{4.2}$$

şeklinde seçebiliriz.

(a) $P_0(0) = 1, P_n(0) = 0$; $n \geq 1$ için, (b) $degP_n = n$, ve (c) kullanılarak; $n \geq 1$ için (2.14) eşitliği aşağıdaki hali alır:

$$D_q P_n(x) = \frac{D_q x^n}{[n]!} = \frac{[n]x^{n-1}}{[n]!} = \frac{x^{n-1}}{[n-1]!} = P_{n-1}(x) \tag{4.3}$$

Eğer $\alpha \neq 0$ olursa;

$P_n(x)$ basitçe $(x-\alpha)^n/[n]!$ olarak yazılamaz. Örneğin; $D_q(x-\alpha)^2/[2]!\,(x-\alpha)$.

Öncelikle ilk birkaç $P_n(x)$'i bulalım ve genel formüle ulaşmayı deneyelim. Biz; $P_0(x) = 1$ olduğu bilgisine sahibiz.

$D_q P_1(x) = 1$ ve $P_1(\alpha) = 0$ olması için; $P_1(x) = x - \alpha$ olmalıdır.

$D_q P_2(x) = x - \alpha$ ve $P_2(\alpha) = 0$ olması için;

$P_2(x) = \frac{x^2}{[2]} - \alpha x - \frac{\alpha^2}{[2]} + \alpha^2 = \frac{(x-\alpha)(x-q\alpha)}{[2]}$ olmalıdır.

Benzer şekilde;

$P_3(x) = \frac{(x-\alpha)(x-q\alpha)(x-q^2\alpha)}{[2][3]}$ ve aynı işlemler tekrarlanarak;

$$P_n(x) = \frac{(x-\alpha)(x-q\alpha)\ldots(x-q^{n-1}\alpha)}{[n]!} \tag{4.4}$$

$\alpha = 0$ olduğu zaman, (4.3) ile uyuşan bu genel formül elde edilir. Teorem 3.1 için (c) durumunun geçerliliğini doğrulamadan önce, bazı notasyonları tanımlayalım [4].

4.1. Tanım: $(x-\alpha)^n$'nin q-benzeri polinomdur;

$$(x-\alpha)_q^n = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ (x-\alpha)(x-q\alpha)\ldots(x-q^{n-1}\alpha) & n \geq 1 \end{cases} \tag{4.5}$$

4.2. Önerme: $n \geq 1$ için;

$$D_q(x-\alpha)_q^n = [n](x-\alpha)_q^{n-1} \quad \text{dir.} \tag{4.6}$$

Böylece; (c) durumu olan $D_qP_n = P_{n-1}$ eşitliği yukarıdaki önermenin hemen ardından gelen sonuçtur.

4.2. Tanım: Herhangi α sayısı için aşağıdaki eşitlik sağlanır;

$$[\alpha] = \frac{1-q^{\alpha}}{1-q} \tag{4.7}$$

4.2. Önerme: Herhangi n tamsayısı için aşağıdaki eşitlik sağlanır;

$$D_q(x-\alpha)_q^n = [n](x-\alpha)_q^{n-1} \tag{4.8}$$

BÖLÜM 5. POLİNOMLAR İÇİN q-TAYLOR FORMULÜ

Önceki bölümde $P_n(x) = (x-\alpha)_q^n/[n]!$ polinomunun D_q lineer operatörüne göre, teorem 3.1'in üç durumunu sağladığını gösterdik. Şimdi, Taylor formülünün kuantum versiyonunu elde edeceğiz [4].

5.1. Teorem: N. dereceden herhangi $f(x)$ polinomu ve herhangi c sayısı için, aşağıdaki q-Taylor ifadesi yazılır.

$$f(x) = \sum_{j=0}^{N} (D_q^j f)(c) \frac{(x-c)_q^j}{[j]!} \tag{5.1}$$

5.2. Örnek: n'nin pozitif tamsayı olduğu durumda, $f(x) = x^n$ ve $c = 1$ olsun. $j \leq n$ için;

$$\left(D_q^j f\right)(x) = [n]x^{n-1} = [n][n-1]x^{n-2} = \cdots = [n][n-1] \ldots [n-j+1]x^{n-j} \tag{5.2}$$

Ve böylece,

$$\left(D_q^j f\right)(1) = [n][n-1] \ldots [n-j+1] \tag{5.3}$$

şeklinde olur.

q-binom katsayısı olarak adlandırılan ve;

$$\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} = \frac{[n][n-1]\ldots[n-j+1]}{[j]!} = \frac{[n]!}{[j]![n-j]!} \tag{5.4}$$

şeklinde yazılan bu eşitliğin olduğu yerde; $x = 1$noktasında, x^n için q-Taylor formülü aşağıdaki gibidir:

$$x^n = \sum_{j=0}^{n} \frac{[n][n-1]\ldots[n-j+1]}{[j]!} (x-j)_q^j = \sum_{j=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} (x-j)_q^j \tag{5.5}$$

BÖLÜM 6. GAUSS’UN BİNOM FORMULÜ VE DEĞİŞMELİ OLMAYAN BİNOM FORMULÜ

Bu bölümde q-binom katsayılarını da içeren iki binom formülünü tanımlayacağız. Önceki bölümde verdiğimiz bir örneğe benzer bir örnekle başlayalım.

6.1. Örnek: n negatif olmayan bir sayı ve α bir sayı olsun. Taylor formülünü kullanarak $x = 0$ noktasında, $f(x) = (x + \alpha)_q^n$ ‘yi genişletelim. (5.2)’de olduğu gibi, $j \leq n$ için;

$$\left(D_q^j f\right)(x) = [n][n-1] \dots [n-j+1](x+\alpha)_q^{n-j} \tag{6.1}$$

formülüne sahibiz.

$$(x+\alpha)_q^m = (x+\alpha)(x+q\alpha) \dots (x+q^{m-1}\alpha) \tag{6.2}$$

olduğunu hatırlatalım. Buradan yola çıkarak; $x = 0$ noktasında eşitliğin sağ tarafı;

$$(\alpha)(q\alpha) \dots (q^{m-1}\alpha) = q^{m(m-1)/2}\alpha^m \tag{6.3}$$

şeklindedir.

Bu eşitliği, $j \leq n$ için (6.1)'e uygularsak;

$$\left(D_q^j f\right)(0) = [n][n-1] \ldots [n-j+1] q^{(n-j)(n-j-1)/2}\ \alpha^{n-j} \tag{6.4}$$

elde edilir. Ve buradan; $(x+\alpha)_q^n$'nin q-Taylor formülü:

$$(x+\alpha)_q^n = \sum_{j=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} q^{(n-j)(n-j-1)/2}\ \alpha^{n-j} x^j \tag{6.5}$$

elde edilir.

j yerine $n-j$ yazılırsa, bir ifade geliştirebiliriz. (5.4) ile verilen q-binom katsayısı tanımından, klasik binom katsayısına benzer olan aşağıdaki formüle sahip oluruz.

$$\begin{bmatrix} n \\ n-j \end{bmatrix} = \frac{[n]!}{[j]![n-j]!} = \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} \tag{6.6}$$

Ve buradan, (6.5) aşağıdaki ifadeye eşit olur:

$$(x+\alpha)_q^n = \sum_{j=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} q^{j(j-1)/2}\ \alpha^j x^{n-j} \tag{6.7}$$

(6.7) ile gösterilen formül, Gauss'un binom formülü olarak adlandırılmaktadır [4].

Şimdi bu konuyla ilgili başka bir konuya değinelim. Bizim de bildiğimiz gibi reel sayıların çarpımı değişmelidir. Yani; $xy = yx$. Ancak bununla birlikte daha fazla genel çarpım göz önünde bulundurulduğu zaman, matris çarpımı veya bileşim operatörleri gibi, değişmeli özellik artık doğru olmayabilir. Aşağıdaki örneği inceleyelim.

6.2. Örnek: $\hat{x}$ ve $\widehat{M}_q$ polinom uzayı üzerinde lineer operatörler olsunlar. Bu operatörlerin $f(x)$ fonksiyonu üzerine işlemleri:

$$\hat{x}[f(x)] = xf(x) \tag{6.8}$$

$$\widehat{M}_q[f(x)] = f(qx) \tag{6.9}$$

şeklindedir. Öyleyse, herhangi $f(x)$ için;

$$\widehat{M}_q\hat{x}[f(x)] = \widehat{M}_q[xf(x)] = qxf(qx) = q\hat{x}\widehat{M}_q[f(x)] \tag{6.10}$$

ifadesine sahibiz. Buradan;

$$\widehat{M}_q\hat{x} = q\hat{x}\widehat{M}_q \tag{6.11}$$

elde edilir.

Aşağıda yazacağımız (6.1) teoremi, (6.11)'de olduğu gibi özel bir değişme bağıntısını sağlayan, iki değişken içeren, değişmeli olmayan bir binom formülünü ifade eder.

6.1. Teorem: q'nun, $x$ve y ile değişmeli bir sayı olduğu durumda, eğer $yx = qxy$ ise;

$$(x+y)^n = \sum_{j=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} x^j y^{n-j} \tag{6.12}$$

eşitliği sağlanır.

BÖLÜM 7. KUANTUM ANTİTÜREV

7.1. Tanım: Eğer, $D_q F(x) = f(x)$ ise, $F(x)$ fonksiyonu $f(x)$ fonksiyonunun q-antitürevidir.Aşağıdaki şekilde yazılır:

$$\int f(x) d_q x \tag{7.1}$$

Klasik analizde olduğu gibi bir antitürev tek değildir. Sıradan analizdeki bir fonksiyonun türevi sade ve sadece sabitleri yok ettiği için, fonksiyonun sabit eklenmemiş hali tektir.

Quantum analizdeki durum daha güç algılanır. Sade ve sadece $\varphi(qx) = \varphi(x)$ ise $D_q\varphi(x) = 0$ olur. Bu durum φ'nin bir sabit içermesini gerekli kılmaz. Bu gibi bir φ fonksiyonuna ekleme yapılması, bu fonksiyonun q-türevini değiştirmez. Ancak bununla birlikte, biz φ'nin formal güç serisi olmasına ihtiyaç duyarsak; $\varphi(qx) = \varphi(x)$ durumu her bir n için, $q^n c_n = c_n$ eşitliğini işaret eder. (c_n burada x^n'nin katsayısıdır.) Bu durum sadece, $n \geq 1$ için $c_n = 0$ olduğu zaman mümkündür, yani φ sabittir. Bu yüzden, eğer;

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n x^n \tag{7.2}$$

şeklinde tanımlanan ifade bir formal kuvvet serisi ise, $f(x)$ bir sabit terime kadar;

$$\int f(x) d_q\, x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_n x^{n+1}}{[n+1]} + C \tag{7.3}$$

şeklinde olan tek bir q-antitüreve sahiptir [4].

BÖLÜM 8. JACKSON İNTEGRAL

8.1. Tanım

$f(x)$ keyfi bir fonksiyon olsun. Onun q-antitürevi olan $F(x)$'i bulmak için (6.9) ile tanımladığımız $\widehat{M}_q$ operatörünü kullanacağız. Öyleyse, q-türevin tanımından;

$$\frac{1}{(q-1)x}\left(\widehat{M}_q - 1\right)F(x) = \frac{F(qx)-F(x)}{(q-1)x} = f(x) \tag{8.1}$$

eşitliğine sahibiz.

Geometrik serinin aşağıdaki gibi olduğunu hatırlatalım:

$$s = 1 + r + r^2 + r^3 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} r^k = \frac{1}{1-r} \qquad (0 < r < 1) \tag{8.2}$$

Sıranın önemi olduğunu not edelim, çünkü operatörler değişmez. Ve şimdi, q-antitürevi geometrik seri ifadesini kullanarak aşağıdaki gibi formüle edip yazabiliriz.

$$F(x) = \frac{1}{1-\widehat{M}_q}\left((1-q)xf(x)\right) = (1-q)\sum_{j=0}^{\infty} \widehat{M}_q^{\ j}\left(xf(x)\right) \tag{8.3}$$

Ve böylece;

$$\int f(x)\, d_q x = (1-q)x \sum_{j=0}^{\infty} q^j f(q^j x) \tag{8.4}$$

elde edilir.

Bu seri $f(x)$'in Jackson integrali olarak adlandırılmaktadır [4].

8.2. Tanım (Belirli q-integral)

$0 < \alpha < b$ olduğunu farzedelim. Belirli q-integral aşağıdaki eşitlikler gibi tanımlanmaktadır [4].

$$\int_0^b f(x)d_q\, x = (1-q)b\sum_{j=0}^{\infty} q^j\, f(q^j b) \tag{8.5}$$

$$\int_\alpha^b f(x)d_q\, x = \int_0^b f(x)d_q\, x - \int_0^\alpha f(x)d_q\, x \tag{8.6}$$

BÖLÜM 9. İKİ DEĞİŞKENLİ FONKSİYON İÇİN q-TAM DİFERANSİYEL DENKLEM

9.1. Tanım (q-tam diferansiyel denklem)

$$P(x,y)d_qx + Q(x,y)d_qy = 0 \tag{9.1}$$

q-diferansiyel denklemi bir $f(x,y) = c$ fonksiyonunun q-tam diferansiyelini ifade ediyorsa bu denkleme q-tam diferansiyel denklem denir. O halde f fonksiyonunun q-tam diferansiyeli:

$$d_qf(x,y) = P(x,y)d_qx + Q(x,y)d_qy \tag{9.2}$$

$$d_qf(x,y) = \frac{d_qf}{d_qx}d_qx + \frac{d_qf}{d_qy}d_qy \tag{9.3}$$

olmalıdır. Buradan;

$$P(x,y) = \frac{d_qf}{d_qx} \tag{9.4}$$

$$Q(x,y) = \frac{d_qf}{d_qy} \tag{9.5}$$

şartları ortaya çıkar. Bu şartlardan da;

$$P_{q_y}(x,y) = \frac{{d_q}^2 f}{d_q x d_q y} \tag{9.6}$$

$$Q_{q_x}(x,y) = \frac{{d_q}^2 f}{d_q y d_q x} \tag{9.7}$$

olur. q-tam diferansiyel olması için;

$$\frac{{d_q}^2 f}{d_q x d_q y} = \frac{{d_q}^2 f}{d_q y d_q x} \tag{9.8}$$

yani;

$$P_{q_y}(x,y) = Q_{q_x}(x,y) \tag{9.9}$$

eşitliğinin sağlanması gerekir.

Şimdi q-diferansiyel denklem için bu eşitliğin sağlandığını gösterelim.

$$\frac{d_q f(x,y)}{d_q x} = D_{q_x} f(x,y) = \frac{f(qx,y) - f(x,y)}{(q-1)x} \tag{9.10}$$

$$\frac{{d_q}^2 f(x,y)}{d_q x d_q y} = D_{q_{xy}} f(x,y) = \frac{\frac{f(qx,qy) - f(x,qy)}{(q-1)x} - \left[\frac{f(qx,y) - f(x,y)}{(q-1)x}\right]}{(q-1)y} \tag{9.11}$$

$$\frac{d_q{}^2 f(x,y)}{d_q x d_q y} = \frac{f(qx,qy) - f(x,qy) - f(qx,y) + f(x,y)}{(q-1)^2 xy} \tag{9.12}$$

$$\frac{d_q f(x,y)}{d_q y} = D_{q_y} f(x,y) = \frac{f(x,qy) - f(x,y)}{(q-1)y} \tag{9.13}$$

$$\frac{d_q{}^2 f(x,y)}{d_q y d_q x} = D_{q_{yx}} f(x,y) = \frac{\frac{f(qx,qy) - f(qx,y)}{(q-1)y} - \left[\frac{f(x,qy) - f(x,y)}{(q-1)y}\right]}{(q-1)x} \tag{9.14}$$

$$\frac{d_q{}^2 f(x,y)}{d_q y d_q x} = \frac{f(qx,qy) - f(x,qy) - f(qx,y) + f(x,y)}{(q-1)^2 xy} \tag{9.15}$$

olarak elde edilir. Buradan, (9.12) ve (9.15) eşitliklerinin eşit olduğu görülmektedir. Yani bir q-diferansiyel denklemin tam diferansiyel denklem olabilmesi için (9.8) yani (9.9) eşitliğinin sağlanıyor olması gerekir.

9.2. Örnek

$$[xy(q+1) + 1] d_q x + [x^2] d_q y = 0 \tag{9.16}$$

a) q-diferansiyel denklemi, q-tam diferansiyel denklem midir?
b) Eğer öyleyse genel çözümü elde ediniz. Burada q, $0 < q < 1$ aralığındadır.

9.2.1. Çözüm

Bu denklemde;

$$P(x,y) = xy(q+1) + 1 \tag{9.17}$$

$$Q(x,y) = x^2 \tag{9.18}$$

dir. Bizim denklemimiz için (9.9) eşitliğinin sağlanıp sağlanmadığını kontrol edelim, (2.12)-(2.13) ile gösterdiğimiz iki değişkenli türev bağlantısından faydalanarak;

$$\begin{aligned}
P_{q_y}(x,y) &= \frac{P(x,qy) - P(x,y)}{(q-1)y} \\
&= \frac{xqy(q+1) + 1 - (xy(q+1)+1)}{(q-1)y} \\
&= \frac{q^2xy + xqy + 1 - xqy - xy - 1}{(q-1)y} \\
&= \frac{q^2xy - xy}{(q-1)y} \\
&= \frac{xy[(q-1)(q+1)]}{(q-1)y} \\
&= x(q+1)
\end{aligned} \tag{9.19}$$

şeklinde elde edilir.

$$\begin{aligned}
Q_{q_x}(x,y) &= \frac{Q(qx,y) - Q(x,y)}{(q-1)x} \\
&= \frac{q^2x^2 - x^2}{(q-1)x} \\
&= \frac{x^2[(q-1)(q+1)]}{(q-1)x} \\
&= x(q+1)
\end{aligned} \tag{9.20}$$

olarak elde edilir. Ve buradan;

$$P_{q_y}(x,y) = x(q+1) = x(q+1) = Q_{q_x}(x,y) \quad (9.21)$$

$$P_{q_y}(x,y) = Q_{q_x}(x,y) \quad (9.22)$$

olarak bulunmuş olup, denklemimiz q-tam diferansiyel denklem olma koşulunu sağlamaktadır.

Şimdi denklemimizin genel çözümünü elde edelim.

$$P(x,y) = \frac{d_q f}{d_q x} \quad (9.23)$$

olduğunu belirtmiştik. Buradan yola çıkarak $f(x,y) = c$ türünde, denklemimizin çözümü olan bir fonksiyon bulacağız.

$$d_q f(x,y) = P(x,y) d_q x \quad (9.24)$$

Bu eşitlikte her iki tarafın x'e göre q-integralini alırsak;

$$\int d_q\, f(x,y) = \int P(x,y) d_q x = c \quad (9.25)$$

$$f(x,y) = \int [xy(q+1)+1] d_q x = c \quad (9.26)$$

bu hale geldikten sonra, (8.4) ile belirttiğimiz Jackson integral tanımından; eşitliğin sağ tarafını aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$f(x,y) = (1-q)x\sum_{j=0}^{\infty} q^j \left(q^j xy(q+1)+1\right) = c \tag{9.27}$$

$$f(x,y) = (1-q)x\sum_{j=0}^{\infty} q^j \left(q^{j+1} xy + q^j xy + 1\right) = c \tag{9.28}$$

$$f(x,y) = (1-q)x\sum_{j=0}^{\infty}\left(q^{2j+1} xy + q^{2j} xy + q^j\right) = c \tag{9.29}$$

$$f(x,y) = (1-q)x\left(\sum_{j=0}^{\infty} q^{2j+1} xy + \sum_{j=0}^{\infty} q^{2j} xy + \sum_{j=0}^{\infty} q^j\right) = c \tag{9.30}$$

$$f(x,y) = (1-q)x\begin{pmatrix} qxy + q^3xy + q^5xy + \cdots + q^{2j+1}xy + \cdots \\ +q^0xy + q^2xy + q^4xy + \cdots + q^{2j}xy + \cdots \\ +q^0 + q^1 + q^2 + \cdots + q^j + \cdots \end{pmatrix} = c \tag{9.31}$$

$$f(x,y) = (1-q)x\begin{pmatrix} xy\{q^0 + q^1 + q^2 + \cdots + q^{2j+1}\} + \\ \{q^0 + q^1 + q^2 + \cdots + q^j\} + \cdots \end{pmatrix} = c \tag{9.32}$$

$0 < q < 1$ olduğu için, (8.2) ile belirttiğimiz geometrik seri açılımından faydalanarak;

$$f(x,y) = (1-q)x\left(xy\frac{1}{1-q} + \frac{1}{1-q}\right) = c \tag{9.33}$$

$$f(x,y) = (1-q)x\left(\frac{xy+1}{1-q}\right) = c \tag{9.34}$$

$$f(x,y) = x(xy+1) = c \tag{9.35}$$

$$f(x,y) = x^2y + x + c(y) = 0 \tag{9.36}$$

elde edilerek ilk aşama tamamlanmış olur. Şimdi;

$$Q(x,y) = \frac{d_q f}{d_q y} \tag{9.37}$$

eşitliğinden faydalanarak ve

$$f(x,y) = x^2y + x + c(y) = 0 \tag{9.38}$$

eşitliğini kullanarak;

$$\frac{x^2qy+x-x^2y-x}{(q-1)y} + \frac{d_q c(y)}{d_q y} = x^2 \tag{9.39}$$

$$\frac{x^2y(q-1)}{(q-1)y} + \frac{d_q c(y)}{d_q y} = x^2 \tag{9.40}$$

$$x^2 + \frac{d_q c(y)}{d_q y} = x^2 \tag{9.41}$$

$$\frac{d_q c(y)}{d_q y} = 0 \tag{9.42}$$

$$d_q c(y) = 0 \tag{9.43}$$

Her iki tarafın y'ye göre q-integralini alırsak;

$$\int d_q c(y) = \int 0 \tag{9.44}$$

olur ve buradan;

$$c(y) = C \tag{9.45}$$

sabit sayı olarak elde edilir. Ve denklemimizin çözüm fonksiyonu:

$$f(x,y) = x^2 y + x + C \tag{9.46}$$

olarak elde edilmiş olur.

BÖLÜM 10. TARTIŞMA VE SONUÇ

Tezimizde kuantum tamlık koşullarını iki değişkenli fonksiyon için inceledik. Ve inceleme sonucunda bir kuantum diferansiyel denkleme, klasik diferansiyel denkleme uygulanan tamlık koşullarını uyguladığımızda, kendi alanında bu koşulları sağladığını görmüş olduk.

Tezimizi genişletmek istersek, iki değişkenli fonksiyon için, tam olmayan bir kuantum diferansiyel denklemi tam yapacak olan integrasyon çarpanının bulunması şeklinde bir konu ile genişletebiliriz.

Ayrıca, iki değişkenli fonksiyon için incelediğimiz tamlık koşullarını, üç değişkenli denkleme de uyarlayarak, daha genel sonuçlara varabiliriz.

KAYNAKLAR

[1] Yardımcı, T. 2005. Q-Analiz. Mimar Sinan Güzel Sanatlar Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Bölümü, Yüksek Lisans Tezi.

[2] https://en.wikipedia.org/wiki/Quantum_calculus. Erişim Tarihi:26.02.2019.

[3] Ciavarella, A. 2016. What Is q-Calculus? Course Hero, 1-6 pages.

[4] Kac, V., Cheung, P. 2002. Quantum Calculus. 1.Baskı, Springer-Verlag, New York.

ÖZGEÇMİŞ

Zülal Mısır, 01.01.1993'de Sakarya'da doğdu. İlk, orta ve lise eğitimini Sakarya'da tamamladı. 2011 yılında Arifiye Anadolu Öğretmen Lisesi'nden mezun oldu. 2011 yılında başladığı Yıldız Teknik Üniversitesi Matematik Mühendisliği Bölümü'nü 2015 yılında bitirdi. 2016 yılında Sakarya Üniversitesi Matematik Bölümü Uygulamalı Matematik Anabilim Dalı'nda yüksek lisans eğitimine başladı. Evli ve bir çocuk annesidir.