T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

LİNEER OLMAYAN DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMÜNE FARKLI BİR YAKLAŞIM

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tuba GÜLECAN

Enstitü Anabilim Dalı	**:**	**MATEMATİK**
Enstitü Bilim Dalı	**:**	**UYGULAMALI MATEMATİK**
Tez Danışmanı	**:**	**Prof. Dr. Ö. Faruk GÖZÜKIZIL**

Haziran 2019

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

LİNEER OLMAYAN DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMÜNE FARKLI BİR YAKLAŞIM

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tuba GÜLECAN

Enstitü Anabilim Dalı	:	MATEMATİK
Enstitü Bilim Dalı	:	UYGULAMALI MATEMATİK

Bu tez 17.06.2019 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği / oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

Prof. Dr. İsmet YILDIZ Jüri Başkanı	Prof. Dr. Ömer Faruk GÖZÜKIZIL Üye	Doç. Dr. Metin YAMAN Üye

BEYAN

Tez içindeki tüm verilerin akademik kurallar çerçevesinde tarafımdan elde edildiğini, görsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçların akademik ve etik kurallara uygun şekilde sunulduğunu, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezde yer alan verilerin bu üniversite veya başka bir üniversitede herhangi bir tez çalışmasında kullanılmadığını beyan ederim.

Tuba GÜLECAN

17.06.2019

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimim boyunca değerli bilgi ve deneyimlerinden yararlandığım,tez çalışmamın planlanmasında, araştırılmasında, yürütülmesinde ve oluşumunda hiçbir zaman ilgi ve desteğini esirgemeyen, beni yönlendiren, teşvik eden, her konuda bilgi ve desteğini almaktan çekinmediğim değerli danışman hocam Prof. Dr. Ömer Faruk GÖZÜKIZIL'a en içten saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

ŞEKİLLER LİSTESİ

TABLOLAR LİSTESİ

ÖZET

Anahtar kelimeler: Modifiye Edilmiş Ishikawa Yöntemi, Riccati Denklemi

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş kısmıdır. İkinci bölümde Riccati diferansiyel denkleminin tanım ve özellikleri verildikten sonra lineer ya da lineer olmayan diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümlerinin bulunmasında kullanılan nümerik yöntemlerden kısaca bahsedilmiştir. Üçüncü bölümde ise Sabit Nokta Teorisi çalışmalarında elde edilen iterasyonlardan biri olan Modifiye edilmiş Ishikawa İterasyonu tanıtılmıştır.

Dördüncü bölüm esas uygulamaların yapıldığı bölümdür. Riccati ve Bernoulli tipindeki iki diferansiyel denkleme diğer bölümlerde kısaca tanımlanan nümerik yöntemler ile Modifiye edilmiş Ishikawa iterasyonu uygulanarak sonuçları tablo ve grafiklerle ilişkilendirilmiştir.

Son bölüm olan beşinci bölümde ise yapılan çalışmalardan elde edilen verilerin değerlendirmesi yapılmıştır ve elde edilen veriler doğrultusunda bundan sonra yapılabilecek araştırmalar için öneride bulunulmuştur.

A DIFFERENT APPROACH TO THE SOLUTION OF NONLINEAR PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

SUMMARY

Keywords: The New Modified Ishikawa Iteration Method, Riccati Equation

This thesis consists of five chapters. First chapter is opening chapter. In the second chapter, after giving definition and features of Riccati differential equation, numerical methods used for finding out linear or nonlinear differential equations are mentioned. In the third chapter, the new Ishikawa iteration method which is one of the iterations acquired from studies of Fixed Point Theory is introduced.

Fourth chapter is where main practises are made. By applying the new modified Ishikawa iteration and numerical methods mentioned briefly in previous chapters to Riccati and Bernoulli type two differential equations, results are linked to chart and graphics.

Fifth chapter, which is the last chapter, datas obtained from studies are evaluated and in line with obtained data, suggestions are made for the next studies.

BÖLÜM 1. GİRİŞ

Bazı diferansiyel denklemlerin hatta birinci mertebeden bir takım diferansiyel denklemlerin bile çözümleri bilinen fonksiyonlar cinsinden ifade edilemeyebilir. Çözümü olan bazı denklemlerde de çözüm karışık olduğundan bu çözüm gerekli hesaplamalar için kullanışsız olabilir. Bu denklemlere örnek olan ve lineer olmayan bir diferansiyel denklem tipi de Riccati diferansiyel denklemidir. Uygulamasını yapacağımız bir diğer lineer olmayan diferansiyel denklem tipi de Bernoulli diferansiyel denklemdir. Riccati denkleminde denklemin bilinen bir özel çözümü kullanılarak uygun bir değişken değiştirme uygulanması sonucu denklemi lineer hale getirerek genel çözüm elde etme kullanılan yöntemlerden biridir. Lineer olmayan bu tipteki denklemlerin genel çözümlerinin elde edilemediği ya da elde edilmesinin zor olduğu durumlarda denklemlere nümerik yaklaşım yöntemleri uygulanarak yaklaşık sonuçlar elde edilebilir.

Lineer olmayan denklemlerin çözümlerine yönelik yaklaşık sonuçlar elde etme çalışmalarından biri de iterasyon yöntemidir. Geometri, Topoloji ve Analiz anabilim dallarında çalışmaları yapılan Sabit Nokta Teorisi alanında yapılan çalışmalar sonucunda elde edilen bazı iterasyon yöntemleri adi ve kısmi diferansiyel denklemlerin çözümlerine ilişkin yaklaşık değerler bulmada kullanılmıştır [1].

Bu çalışmanın amacı lineer olmayan Riccati ve Bernoulli tipi denklemlerine; çalışmanın 2. bölümünde değindiğimiz nümerik yaklaşım yöntemleri ile 3. bölümünde değindiğimiz Sabit Nokta Teorisi alanının bir çalışması olan modifiye edilmiş Ishikawa Yöntemi'ni uyguladıktan sonra bu iterasyon yönteminin nümerik yaklaşım yöntemlerine göre daha iyi sonuç verip vermediğini incelemektir. İterasyon yönteminin daha iyi sonuç verdiği gözlemlenir ise Riccati ve Bernoulli tipindeki lineer olmayan diferansiyel denklemlerin çözümünde nümerik çözüm yöntemlerine alternatif olarak farklı bir yaklaşım kullanılabileceği gösterilmiş olacaktır.

BÖLÜM 2. TEMEL BİLGİLER

Bu bölümde Riccati Diferansiyel Denklemi ile Euler Yöntemi, Runge-Kutta Yöntemi ve Picard Ardışık Yaklaşımlar Yöntemi hakkında temel bilgiler verilecektir.

2.1. Riccati Diferansiyel Denklemi

Riccati (Count Jacopo Francesco Riccati, 1676-1754, Italyan)'nin ele aldığı ve 1724 yılında Acta Eruditorum'da yayımlanan denklem *a*, *b*, *n* sabitler olmak üzere

$$y' + ax^2 = bx^n \tag{2.1}$$

şeklinde idi. Bu denklem Riccati'nin orijinal denklemi olarak bilinmektedir ve *n*'nin belli değerleri için (2.1) denkleminin çözümü Riccati tarafından verilmiştir [2, 3].

Günümüzdeki Riccati denklemi denildiğinde ise öncelikle

$$y' = a(x) + b(x)y + c(x)y^2 + \ldots + \tag{2.2}$$

sonsuz serisini alalım. (2.2) tipindeki denklemlere lineer olmayan denklemler denir. Eşitliğin sağ tarafından ilk iki terim alınırsa lineer bir diferansiyel olur. İlk üç terim alınırsa Riccati diferansiyel denklemi elde edilir. (2.2) denkleminde $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$ integrallenebilir fonksiyonlar ve $b(x) \neq 0, c(x) \neq 0$ olmak üzere

$$y' = a(x) + b(x)y + c(x)y^2 \tag{2.3}$$

tipindeki denkleme Riccati diferansiyel denklemi denir.

$a(x) = 0$ ise (2.3) denklemi Bernoulli diferansiyel denklemine dönüşür. (2.3) denklemi ilk defa 1763 yılında D'Alembert (Jean Le Rond d'Alembert, 1717-1783, Fransız) tarafından incelenmiştir [3, 4].

Riccati denklemi, incelenmesi bitmiş bir denklem değildir. Üzerine kitaplar yazılmış, yoğun çalışmalar yapılmıştır. Genel halde (2.3) denkleminin tam çözümü elementer fonksiyonlar yardımıyla ifade edilemez. Bununla birlikte (2.3)'nin genel çözümü bir özel çözümünün bilinmesi durumunda, denklemin birinci basamaktan bir lineer denkleme indirgenmesiyle elde edilebilir ve (2.3) denkleminin çözümüne ilişkin birden fazla özellik söz konusudur [3].

Biz çalışmamızda (2.3) denklemini sağlayan bir özel çözümü bilindiği takdirde uygun bir değişken değişimi ile denklemi lineer olarak yazdıktan sonra genel çözümünü elde etme durumunu kullanacağız. (2.3) denkleminin bir özel çözümü $y = y_1$ olsun. O zaman y_1, (2.3) denkleminde yerine yazıldığında denklemi sağlar.

$$y = y_1 + \frac{1}{v} \tag{2.4}$$

değişken değişimi yapalım. (2.4) eşitliği ve bu eşitlikten elde edilen

$$y' = y_1' - \frac{1}{v^2} v' \tag{2.5}$$

türevi (2.3) denkleminde yerine yazılıp gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$v' + (2cy_1 + b)v = -c \tag{2.6}$$

lineer diferansiyel denklemi elde edilir. Bu denklem Riccati denkleminin yukarıda da belirtildiği gibi özel bir çözümünün bilinmesi takdirde genel çözümünü bulmak için kullanılan uygun bir değişken değiştirme metodu ile bulunmuştur.

2.2. Euler Yöntemi

Bu yöntem başlangıç değer problemleri için kullanılan en basit metottur.

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0 \tag{2.7}$$

başlangıç değer problemini ele alalım. (2.6) probleminin x_0 noktasını içine alan $[x_0, x_n]$ aralığında bir tek $y = y(x)$ çözümüne sahip olduğunu varsayalım. Bu yöntemde ulaşmak istediğimiz, belirlediğimiz aralıkta bulunan x_0, x_1, x_n noktalarında $y(x)$ 'in sahip olduğu $y(x_0)$, $y(x_1)$, $y(x_n)$ değerleri için yaklaşık değerler bulmaktır. Hesaplamada kolaylık sağlanması için aralıktaki ardışık noktalar eşit uzaklıkta seçilir. Ardışık iki nokta arasındaki uzaklığı h olarak belirlersek noktalar,

$$x_1 = x_0 + h,\ x_2 = x_1 + h, \dots, x_n = x_{n-1} + h \tag{2.8}$$

şeklinde seçilmiş olur. (2.6) denkleminde (x_0, y_0) noktası $y = y(x)$ çözüm eğrisi üzerindedir ve bu çözüm eğrisinin bu noktadaki eğimi

$$y'(x_0) = f(x_0, y_0) \tag{2.9}$$

olur. Buradan yola çıkarak h değeri de yeteri kadar küçük alındığında, $[x_0, x_0 + h]$ aralığında çözüm eğrisine, (x_0, y_0) noktasından geçen ve eğimi $f(x_0, y_0)$ olan bir doğru parçası(teğet) ile yaklaşılabileceği görülür. Bu doğrunun(teğetin) denklemi

$$y - y_0 = f(x_0, y_0)(x - x_0) \tag{2.10}$$

şeklinde yazılır ve $x = x_1 = x_0 + h$ noktasında $y_1 = y(x_1)$ değeri için

$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0) \tag{2.11}$$

yaklaşık değeri elde edilir. Bu elde edilen yaklaşık değerden yola çıkılarak, çözüm eğrisinin (x_1, y_1) noktasındaki eğiminin $f(x_1, y_1)$ olduğu varsayılırsa, (x_1, y_1)

noktasından geçen ve eğimi $f(x_1, y_1)$ olan doğrunun denklemi için

$$y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1) \tag{2.12}$$

yaklaşık değer elde edilir. Bu şekilde devam edildiğinde *n*. adımda

$$y_n = y_{n-1} + hf(x_{n-1}, y_{n-1}) \tag{2.13}$$

yaklaşık değeri bulunur. Elde edilen (2.13) denklemi Euler Yöntemi'nin n. adımdaki yaklaşımını verir [5].

2.3. Runge-Kutta Yöntemi

Sayısal analizde Runge-Kutta yöntemleri, adi diferansiyel denklemlerin çözüm yaklaşımları için kapalı ve açık yinelemeli yöntemler ailesinin önemli bir tipidir. Bu yöntem 1900'lü yıllarda C. Runge ve M.W. Kutta adlı matematikçiler tarafından geliştirilmiştir. Runge-Kutta yöntemi Euler yönteminden daha iyi sonuç veren bir nümerik çözüm yöntemidir. Runge-Kutta yöntemi başlığı altında çözüm aşamasında nümerik çözüm bulunurken kullanılan adım sayılarından dolayı 2., 3. ve 4. dereceden olmak üzere üç farklı yaklaşım yöntemi bulunmaktadır. Bizim bu çalışmada kullandığımız ve aşağıda adımlarını verdiğimiz yöntem 4. dereceden Runge-Kutta yöntemi ve klasik Runge-Kutta yöntemi olarak da adlandırılan dört adımlı yöntemdir.

(2.7) başlangıç değer problemini tekrar ele alalım. Bu problemin verilen bir $\Delta x = h$ uzunluğundaki eşit adımlı $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_n$ noktalarındaki $y_1,\ y_2,\ y_3, \ldots,\ y_n$ sayısal yaklaşımları Runge-Kutta yöntemi kullanılarak aşağıdaki denklemlerle elde edilmiştir. Burada her bir *x* adımı bir önceki adıma *h* uzunluğu eklenerek $x_2 = x_1 + h$ şeklinde elde edilir. Ayrıca herhangi bir y_n sayısal yaklaşımının değeri hesaplanırken x_{n-1} kullanılır.

$$y_{n+1} = y_n + K_0 \tag{2.14}$$

$$K_0 = \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \qquad (2.15)$$

(2.14)'teki denklem Runge-Kutta yönteminin denklemidir. Denklemdeki k_1, k_2, k_3, k_4 değerleri

$$k_1 = hf(x_n, y_n) \qquad (2.16)$$

$$k_2 = hf(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}) \qquad (2.17)$$

$$k_3 = hf(x_n + \frac{h}{2},\ y_n + \frac{k_2}{2}) \qquad (2.18)$$

$$k_4 = hf(x_n + h, y_n + k_3) \qquad (2.19)$$

şeklinde hesaplanır. Bu değerler h uzunluktaki $[x_n,\ x_{n+1}]$ bir alt aralığında $f(x, y(x))$ nin dört yaklaşık değeri olarak hesaplanmıştır. Bu yaklaşık değerlerin ağırlıklı ortalaması (2.15)'deki gibi hesaplandıktan sonra y_{n+1} (2.14)'teki gibi hesaplandı [5, 6].

2.4. Picard İterasyon Yöntemi

Picard yöntemini uygulamak için yine (2.7) başlangıç değer problemini ele alalım. Bu denklem

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \Rightarrow dy = f(x, y)dx \qquad (2.20)$$

şeklinde yazıldıktan sonra eşitliğin her iki tarafını $[x_0, x]$ aralığında integre edildiğinde;

$$\int_{x_0}^{x} dy = \int_{x_0}^{x} f(x, y)dx \qquad (2.21)$$

$$y(x) - y(x_0) = \int_{x_0}^{x} f(x, y)dx \qquad (2.22)$$

$$y(x) = y(x_0) + \int_{x_0}^{x} f(x,y)dx \qquad (2.23)$$

elde edilir. İlk yaklaşımı elde etmek için (2.23)'de sağ taraftaki integralde *y* yerine y_0 başlangıç değeri yazılırsa

$$y_1(x) = y(x_0) + \int_{x_0}^{x} f(x,y_0)dx \qquad (2.24)$$

elde edilir. Benzer şekilde (2.23)'de sağ tarafta *y* yerine y_1 yazılırsa

$$y_2(x) = y(x_0) + \int_{x_0}^{x} f(x,y_1)dx \qquad (2.25)$$

ikinci yaklaşım elde edilir. Bu şekilde devam edildiğinde

$$y_n(x) = y(x_0) + \int_{x_0}^{x} f(x,y_{n-1})dx \qquad (2.26)$$

n. adımdaki Picard iterasyon yöntemi elde edilir [7].

BÖLÜM 3. MODİFİYE EDİLMİŞ ISHIKAWA İTERASYON YÖNTEMİ VE BAZI YARDIMCI İTERASYONLAR

3.1. Tanım (Lipschitzian Dönüşüm)

(X, d) bir metrik uzay ve $T : X \to X$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq \lambda\, d(x, y) \tag{3.1}$$

olacak şekilde bir $\lambda > 0$ sayısı mevcut ise T ye bir Lipschitzian (veya λ -Lipschitzian) dönüşümü denir.

3.2. Teorem (Banach Daralma Prensibi)

(X, d) tam metrik uzay, $T: X \to X$ bir daralma dönüşümü olsun. Bu durumda T, $u \in X$ olmak üzere bir tek u sabit noktasına sahiptir, ayrıca her $x \in X$ için

$$\lim_{n\to\infty} T^n(x) = u \tag{3.2}$$

Olur. Ayrıca her $x, y \in X$ $için$

$$d(T(x), T(y)) \leq \alpha d(x, y) \tag{3.3}$$

$0 \leq \alpha < 1$ için (3.3) daralma dönüşümü sağlandığından

$$d(T^n(x), u) \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha} d(x, T(x)) \tag{3.4}$$

eşitsizliği elde edilir.

3.2. İspat

T daralma dönüşümü olduğundan her $x, y \in X$ için (3.3) eşitsizliği sağlanır.

Her $x \in X$ ve $n \epsilon \{0, 1, 2, ...\}$ için $\{T^n(x)\}$'in bir Cauchy dizisi olduğunu gösterelim. T, (3.3) daralma dönüşümünü sağladığından $\{T^n(x)\}$

$$d(T^n(x), T^{n+1}(x)) \leq \alpha d(T^{n-1}(x), T^n(x) \leq \cdots \leq \alpha^n d(x, T(x)) \qquad (3.5)$$

eşitsizliğini sağlar. $m > n \;\; ve \;\; m, n \epsilon N$ için

$$d\big(T^n(x), T^m(x)\big) \leq d\big(T^n(x), T^{n+1}(x)\big) + \cdots + d(T^{m-1}(x), T^m(x)) \quad \text{(3.5)'ten}$$

$$\leq \alpha^n d\big(x, T(x)\big) + \cdots + \alpha^{m-1} d(x, T(x)) \text{ elde edilir.}$$

$$\leq \alpha^n d\big(x, T(x)\big)[1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots] \quad 0 \leq \alpha < 1 \text{ için}$$

$$\leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha} d(x, T(x)) \text{ olur ve}$$

$$d\big(T^n(x), T^m(x)\big) \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha} d(x, T(x)) \qquad (3.6)$$

elde edilir. Böylece $\{T^n(x)\}$ bir Cauchy dizisidir ve aynı zamanda X tam metrik olduğundan $u \in X$ mevcuttur ve (3.2) eşitliği sağlanır. Ayrıca T sürekli olduğundan

$$u = \lim_{n\to\infty} T^{n+1}(x) = \lim_{n\to\infty} T(T^n(x)) = T(u) \qquad (3.7)$$

elde edilir. (3.7) eşitliğinden u noktası T 'nin bir sabit noktası olduğu görülür. (3.6)'da $m \longrightarrow \infty$ için,

$d(T^n(x), u) \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha} d(x, T(x))$, (3.4) eşitsizliği elde edilmiş olur.

Şimdi de sabit noktanın tekliğini gösterelim. $x, y \in X$ ve $x \neq y$ için $T(x) = x$ ve $T(y) = y$ olduğunu farz edelim. (3.3) daralma dönüşümünden

$$d(x,y) = d(Tx,Ty) \leq \alpha d(x,y) \tag{3.8}$$

$$(1-\alpha)d(x,y) \leq 0 \tag{3.9}$$

olur. $(1-\alpha) > 0$ olduğundan $d(x,y) = 0$ olmalıdır. Böylece x=y elde edilir ve sabit noktanın tekliği sağlanır [3].

3.3. Mann İterasyonu

Mann iterasyonu, 1953 yılında Mann tarafından kurulmuş ve Banach daralma ilkesini sağlamayan dönüşümlerin sabit noktalarını elde etmek için kullanılmıştır. X bir normlu uzay, $A \subseteq X$ boş olmayan konveks bir alt küme,
$T: A \to A$'ya bir dönüşüm ve $x_0 \in A$ keyfi bir nokta olmak üzere Mann iterasyonu

$$x_{n+1} = (1-\alpha_n)x_n + \alpha_n T x_n\,, \quad n = 0,1,2, \ldots \tag{3.10}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\{\alpha_n\}$, (0,1) aralığında

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0,\ \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty \tag{3.11}$$

şartlarını sağlayan bir dizidir [8].

3.4. Ishikawa İterasyonu

Bu iterasyon; S. Ishikawa tarafından 1974 yılında kurulmuş, Lipschitzian ve pseudocontractive dönüşümler için Mann iterasyonunun yetersizliği durumunda yeni bir iterasyon metodu olarak oluşturulmuştur. Bu iterasyon ilk olarak bir Hilbert uzayının konveks ve kompakt alt kümesi üzerinde tanımlı Lipschitzian ve pseudocontractive bir dönüşümün sabit noktaya güçlü yakınsadığını göstermek amacıyla kullanılmıştır.

X bir normlu uzay, $A \subseteq X$ boş olmayan konveks bir alt küme, $T: A \rightarrow A$'ya bir dönüşüm ve $x_0 \in A$ keyfi bir nokta olmak üzere Ishikawa iterasyonu

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1-\alpha_n)x_n + \alpha_n T y_n , \\ y_{n+1} = (1-\beta_n)x_n + \beta_n T x_n , \end{cases} \qquad n=0,1,2,... \tag{3.12}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\{\alpha_n\}$ ve $\{\beta_n\}$, (0,1) aralığında

$$\begin{cases} \lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0 \\ \lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = 0 \\ \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty \end{cases} \tag{3.13}$$

şartlarını sağlayan dizilerdir [9].

(3.12) eşitliği ile verilen iterasyonda $\beta_n = 0$ alınırsa bu iterasyon Mann iterasyonuna indirgenir. Buna rağmen Mann ve Ishikawa iterasyonları için yakınsama sonuçları arasında genel bir bağ yoktur [8].

3.5. Picard İterasyon Metodu

(X,d) bir metrik uzay, $K \subseteq X$ kapalı bir alt küme ve $T{:}K \rightarrow K$ bir dönüşüm olsun. $x_0 \in X$ ve $\{x_n\}_{n=0}^{\infty} \in X$ için

$$x_n = Tx_{n-1} = T^n x_0 , \quad n = 1,2,... \tag{3.14}$$

sağlanıyorsa bu eşitliğe Picard iterasyonu denir.

Picard iterasyonu bazen ardışık yaklaşıklar dizisi olarak da adlandırılır. Yaklaşık iki bin yıldan fazla tarihe sahip olan Picard iterasyon metodu ilk olarak İtalyan matematikçi Picard tarafından adi diferansiyel denklemler için Cauchy probleminin tahmini çözümünü bulmak için kullanılmıştır. Özellikle, nümerik analizde, yinelemeli fonksiyonların sabit noktalarının hesaplanmasına yönelik kullanılan bir yöntemdir [10].

3.6. Modifiye Edilmiş Ishikawa İterasyonu

$0 < \gamma, \lambda < 1$, $y_0 \epsilon X$ ve T, Picard iterasyonundaki gibi tanımlanan bir daralma dönüşümü ise ve ayrıca $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi aşağıdaki şartları sağlıyorsa

$$y_{n+1} = \lambda y_{n-1} + (1-\lambda) T y_{n-1} \,, \tag{3.15}$$

$$y_n = (1-\gamma) y_{n-2} + \gamma T y_{n-2} \qquad n=2,4, \tag{3.16}$$

$$y_{n+1} = y_0 + \int_{x_0}^{x} F(t, y_n(t)) dt, \qquad n=0 \tag{3.17}$$

$$T y_{n-1} = y_n \tag{3.18}$$

$$T(x) = \int_{x_0}^{x} F(t, y_n(t)) dt \qquad (3,19)$$

şeklinde yukarıda belirtilen iterasyon, modifiye edilmiş Ishikawa iterasyonu olarak ifade edilir [11].

BÖLÜM 4. MODİFİYE EDİLMİŞ ISHIKAWA YÖNTEMİ VE DİĞER NÜMERİK YÖNTEMLERİN RICCATI VE BERNOULLI DENKLEMLERİNE UYGULANMASI

Bu bölümde belirlenmiş birer Riccati ve Bernoulli denklemlerinin Euler, Runge-Kutta ve Picard Ardışık Yaklaşımlar Yöntemleri ile yukarıda tanımını verdiğimiz Modifiye edilmiş Ishikawa İterasyon yöntemini kullanarak, belirlenmiş birer lineer olmayan Riccati ve Bernoulli denklemlerinin tüm yöntemlerdeki nümerik çözümlerini elde ettikten sonra bu çözümleri belirlenen noktalardaki gerçek çözümün değerleri ile karşılaştırarak modifiye edilmiş Ishikawa yönteminin diğer yöntemlere göre Riccati denklemindeki kullanılabilirliğini ifade edeceğiz.

4.1. Örnek

$$y' = \frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^3} - \frac{1}{x} \quad , \tag{4.1}$$

Riccati tipi denklemini ele alalım. (4.1) denkleminin bir özel çözümü

$$y_{ö}(x) = x \tag{4.2}$$

olur. (4.1) denklemi için

$$y = x + \frac{1}{v} \tag{4.3}$$

değişken değişimi yapalım. (4.3) eşitliği ve bu eşitliğin türevi olan

$$y' = 1 - \frac{1}{v^2} v' \tag{4.4}$$

eşitliği (4.1) denkleminde yerine yazıldığında

$$v' + \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right) v = -\frac{1}{x^3} \tag{4.5}$$

lineer denklemi elde edilir. (4.5) lineer denkleminin çözümü yapıldığında

$$\frac{1}{y-x} = \frac{Ce^{2/x}}{x} - \frac{1}{x} \tag{4.6}$$

elde edilir. Burada *C* integral sabitidir. (4.6) eşitliğinde gerekli düzenlemeler yapılıp (*B=2C)* alınırsa

$$y_g(x) = \frac{Bxe^{2/x}+x}{Be^{2/x}-1} \tag{4.7}$$

(4.1) denkleminin genel çözümü elde edilmiş olur.

$y(1) = 0$ başlangıç koşulu olarak seçilip (4.1)'de yerine yazılırsa $B = -e^{-2}$ elde edilir ve genel çözüm

$$y_g(x) = \frac{-xe^{(2/x)-2}+x}{-e^{(2/x)-2}-1} \tag{4.8}$$

elde edilir.

(4.1) denklemi için ilk olarak modifiye edilmiş Ishikawa yöntemini uygulandı. (4.1) denkleminde (3.17) eşitliğindeki $F\big(t, y_n(t)\big)$ fonksiyonu $y_0 = y(1)$, $x_0 = 1$ başlangıç koşulu ile

$$F\big(t, y_n(t)\big) = \frac{y_n}{t} + \frac{y_n^2}{t^3} - \frac{1}{t}, \tag{4.9}$$

olarak belirlenmiştir. Öncelikle (4.1) denklemi için modifiye edilmiş Ishikawa yöntemindeki (3.19) eşitliği uygulandığında

$$T(x) = -\int_x^1 F(t, y_n\,(t))dt \tag{4.10}$$

$$T(y) = -\int_{y}^{1} F(t, y_n(t))dt \tag{4.11}$$

dönüşümleri elde edilir. İterasyon uygulanırken $x_0 = 1$'den 0'a yaklaşılarak işlemler gerçekleştirilecektir. Bunun için integral sınırları yukarıdaki gibi alınmıştır. İterasyon için ön koşullar incelendiğinde

$$|T(x) - T(y)| = | \int_{y}^{1}(\frac{t}{t} + \frac{t^2}{t^3} - \frac{1}{t})dt - (- \int_{y}^{1}(\frac{t}{t} + \frac{t^2}{t^3} - \frac{1}{t})dt | = |-1 + x + 1 - y|$$

$|T(x) - T(y)| = |x - y|$ olur. $\alpha \geq 1$ seçilirse

$$|T(x) - T(y)| \leq \alpha|x - y| \tag{4.12}$$

şeklinde *T*'nin Tanım (3.1)' i sağladığı görülür.

(4.1) denkleminde Ishikawa iterasyonunun ilk adımından

$$y_1 = y_0 + \int_{x_0}^{x}(\frac{y_0}{t} + \frac{y_0^2}{t^3} - \frac{1}{t})dt \tag{4.13}$$

elde edilir. Başlangıç koşulları (4.13)'de yazılıp gerekli işlemler yapıldığında (4.1) denklemi için iterasyonun birinci adımı

$$y_1 = -lnx \tag{4.14}$$

olarak elde edilir. Ishikawa iterasyonunun ilk adımı bulunduktan sonra λ ve γ değerlerine iterasyonda verilen değer aralığı içerisinde atanılan bazı değerler için iterasyonun diğer adımları aşağıda bulunmuştur.

$\lambda = 0{,}5$ ve $\gamma = 0{,}5$ değerleri için

$y_1 = -\ln x$

$y_2 = -0{,}5 \ln x$

$y_3 = -0{,}75 \ln x$

$y_4 = -0{,}625 \ln x$

$y_5 = -0{,}6875 \ln x$

$y_6 = -0{,}65625 \ln x$

$y_7 = -0{,}671875 \ln x$

$y_8 = -0{,}6640625 \ln x$

$y_9 = -0{,}66796875 \ln x$

$y_{10} = -0{,}666015625 \ln x$

$y_{11} = -0{,}666992187 \ln x$

$\lambda = 0{,}5$ ve $\gamma = 0{,}25$ için

$y_1 = -\ln x$

$y_2 = -0{,}25 \ln x$

$y_3 = -0{,}625 \ln x$

$y_4 = -0{,}34375 \ln x$

$y_5 = -0{,}484375 \ln x$

$y_6 = -0{,}37890625 \ln x$

$y_7 = -0{,}431640625 \ln x$

$y_8 = -0{,}392089844 \ln x$

$y_9 = -0{,}411865234 \ln x$

$y_{10} = -0{,}397033691 \ln x$

$y_{11} = -0{,}404449463 \ln x$

$\lambda = 0{,}25$ ve $\gamma = 0{,}5$ için

$y_1 = -\ln x$

$y_2 = -0{,}5 \ln x$

$y_3 = -0{,}625 \ln x$

$y_4 = -0{,}5625 \ln x$

$y_5 = -0{,}578125 \ln x$

$y_6 = -0{,}5703125 \ln x$

$y_7 = -0{,}572265625 \ln x$

$y_8 = -0{,}571289063 \ln x$

$y_9 = -0{,}571533203 \ln x$

$y_{10} = -0{,}571411133 \ln x$

$y_{11} = -0{,}57144165 \ln x$

$\lambda = 0{,}25$ ve $\gamma = 0{,}25$ için

$y_1 = -\ln x$

$y_2 = -0{,}25 \ln x$

$y_3 = -0{,}4375 \ln x$

$y_4 = -0{,}296875 \ln x$

$y_5 = -0{,}33203125 \ln x$

$y_6 = -0{,}305664063 \ln x$

$y_7 = -0{,}312255859 \ln x$

$y_8 = -0{,}307312012 \ln x$

$y_9 = -0{,}308547974 \ln x$

$y_{10} = -0{,}307621002 \ln x$

$y_{11} = -0{,}307852745 \ln x$

$\lambda = 0{,}75$ ve $\gamma = 0{,}25$ için

$y_1 = -\ln x$

$y_2 = -0{,}25 \ln x$

$y_3 = -0{,}8125 \ln x$

$y_4 = -0{,}390625 \ln x$

$y_5 = -0{,}70703125 \ln x$

$y_6 = -0{,}469726563 \ln x$

$y_7 = -0{,}647705078 \ln x$

$y_8 = -0{,}514221191 \ln x$

$y_9 = -0{,}614334106 \ln x$

$y_{10} = -0{,}53924942 \ln x$

$y_{11} = -0{,}595562935 \ln x$

$\lambda = 0{,}25$ ve $\gamma = 0{,}75$ için

$y_1 = -\ln x$

$y_2 = -0{,}75 \ln x$

$y_3 = -0{,}8125 \ln x$

$y_4 = -0{,}796875 \ln x$

$y_5 = -0{,}80078125 \ln x$

$y_6 = -0{,}799804688 \ln x$

$y_7 = -0{,}800048828 \ln x$

$y_8 = -0{,}799987793 \ln x$

$y_9 = -0{,}800003052 \ln x$

$y_{10} = -0{,}799999237 \ln x$

$y_{11} = -0{,}800000191 \ln x$

$\lambda = 0{,}75$ ve $\gamma = 0{,}75$ için

$y_1 = -\ln x$

$y_2 = -0{,}75 \ln x$

$y_3 = -0{,}9375 \ln x$

$y_4 = -0{,}890625 \ln x$

$y_5 = -0{,}92578125 \ln x$

$y_6 = -0{,}916992187 \ln x$

$y_7 = -0{,}923583984 \ln x$

$y_8 = -0{,}921936035 \ln x$

$y_9 = -0{,}923171996 \ln x$

$y_{10} = -0{,}922863006 \ln x$

$y_{11} = -0{,}923094749 \ln x$

(4.1) denklemine Picard iterasyonunun uygulanışı aşağıdaki gibidir. (2.26) eşitliğinde verilen Picard iterasyonu uygularken yine $y_0 = 0$ ve $x < x_0 = 1$ olduğundan integralin işareti değiştirilip gerekli işlemler uygulandığında iterasyonun ilk iki adımı

$$y_1 = -\ln x \tag{4.15}$$

$$y_2 = -\frac{(2x^2+2)ln^2x+(4x^2+2)lnx-x^2+1}{4x^2} \tag{4.16}$$

şeklinde elde edilir. Bu adımların başlangıç koşuluna yakın olarak belirlenmiş bazı noktalardaki değerleri aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Tablo 4.1. Örnek 4.1.'deki Riccati Denklemi'ne uygulanan Picard İterasyon Yöntemi'nin belirlenen noktalardaki ilk iki adımının değerleri

x=0,8	x=0,6	x=0,4	x=0,2
y_1 =0,2231435	y_1 =0,5108256	y_1 =0,9162907	y_1 =1,6094379
y_2 =0,193045	y_2=0,282969	y_2 =-0,576309	y_2 =-17,946

(4.1) denklemi için Euler yönteminin uygulama adımları aşağıdaki gibi hesaplanmıştır.

(2.13) eşitliğindeki $y_n = y_{n-1} + hf(x_{n-1}, y_{n-1})$ Euler yöntemini (4.1) denklemine uygularken $h = 0{,}2$ alındğında x_n adımları $x_0 = 1$'den başlayıp 0'a doğru geriye gidilerek elde edileceğinden $h = -0{,}2$ olarak değiştirilmiş ve $x_n = x_{n-1} - 0{,}2$ olarak adımlar elde edilmiştir. Tüm veriler yerleştirilip yöntem uygulandığında ilk dört adımdaki sonuçlar aşağıdaki gibi hesaplanmıştır.

$y_1 = y_0 - 0{,}2F(x_0; y_0)$ ve $F(1; 0) = -1$
$y_1 = y(x_1) = y(0{,}8) = 0{,}2$

$y_2 = y_1 - 0{,}2F(x_1; y_1)$ ve $F(0{,}8; 0{,}2) = -0{,}92187$
$y_2 = y(x_2) = y(0{,}6) = 0{,}384375$

$y_3 = y_2 - 0{,}2F(x_2; y_2)$ ve $F(0{,}6; 0{,}384375) = -0{,}34204$
$y_3 = y(x_3) = y(0{,}4) = 0{,}452783$

$y_4 = y_3 - 0{,}2F(x_3; y_3)$ ve $F(0{,}4; 0{,}384375) = 1{,}835276$
$y_4 = y(x_4) = y(0{,}2) = 0{,}08572$

Tablo 4.2. Örnek 4.1.'deki Riccati Denklemi'ne uygulanan Euler Yöntemi'nin belirlenen noktalardaki yaklaşık değerleri

$y_1 = y(x_1) = y(0{,}8)$	0,2
$y_2 = y(x_2) = y(0{,}6)$	0,384375
$y_3 = y(x_3) = y(0{,}4)$	0,452783
$y_4 = y(x_4) = y(0{,}2)$	0,08572

(4.1) denklemine uyguladığımız son nümerik yöntem Runge-Kutta yönteminin uygulanışı aşağıda verilmiştir. Bu yöntemde de kullanılacak olan h değeri h=-0,2 alınmıştır. $y_0 = y(1) = 0$ ve $x_0 = 1$ olmak üzere

$y_1 = y(x_1)$ 1. adımı için $x_1 = x_0 + h = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$ için
$k_1 = hf(x_0; y_0) = -0{,}2f(1; 0) = 0{,}2$
$k_2 = -0{,}2f(0{,}9\,; 0{,}1) = 0{,}19725$

$k_3 = -0.2f(0,9\,;0,09862) = 0,19763$

$k_4 = -0,2f(0,8\,;0,19763) = 0,18533$

$K_0 = \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$ =0,19584

$y_1 = y(x_1) = \mathrm{y}(0,8) = y_0 + K_0$ = 0,19584 olur.

$y_2 = y(x_2)$ 2. adımı için $x_2 = x_1 + h$ = 0,8 – 0,2 = 0,6 olmak üzere

$k_1 = hf(x_1, y_1) = -0,2f(0,8; 0,19584) = 0,18605$

$k_2 = -0,2f(0,7\,;0,2888) = 0,15456$

$k_3 = -0,2f(0,7; 0,27312) = 0,16418$

$k_4 = -0,2f(0,6; 0,36002) = 0,09331$

$K_0 = \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = 0,15280$

$y_2 = y(x_2) = \mathrm{y}(0,6) = y_1 + K_0$ =0,34864 olur.

$y_3 = y(x_3)$ 1. adımı için $x_3 = x_2 + h$ = 1 – 0,2 = 0,4 için

$k_1 = hf(x_2, y_2) = -0,2f(0,6; 0,34864) = 0,10457$

$k_2 = -0,2f(0,5\,;0,40092) = -0,01754$

$k_3 = -0,2f(0,5\,;0,33986) = 0,07924$

$k_4 = -0,2f(0,4\,;0,42788) = -0,28585$

$K_0 = \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$ = -0,00964

$y_3 = y(x_3) = \mathrm{y}(0,4) = y_2 + K_0$ =0,33899 olur.

Bölüm 1. ve Bölüm 2.'de bahsedilen nümerik yöntemler ve iterasyon yöntemleri (4.1) Riccati denklemine uygunlandı.

$y_0 = y(1) = 0$, $x_0 = 1$ başlangıç koşulu için (4.1) denkleminin bir genel çözümünü $y_g(x) = \frac{-xe^{(2/x)-2}+x}{-e^{(2/x)-2}-1}$ (4.8) eşitliğinde elde etmiştik. x=0,8 x=0,6 x=0,4 noktalarında denklemin genel çözümünün değerleri aşağıda verilmiştir.

$y_g(0,8)$ =0,195934

$y_g(0,6)$ = 0,349669

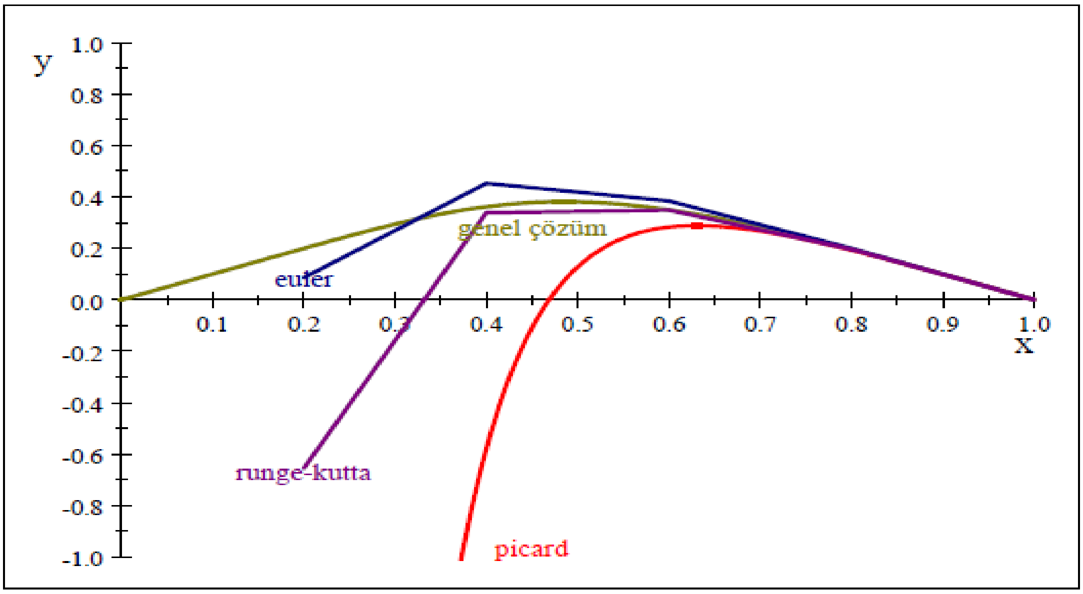
$y_g(0,4)$ =0,362059

(4.1) denklemine uygulanan tüm yöntemlerin denklemin genel çözümüyle karşılaştırılmasından elde edilen mutlak hatalar aşağıdaki tabloda verilmiştir.

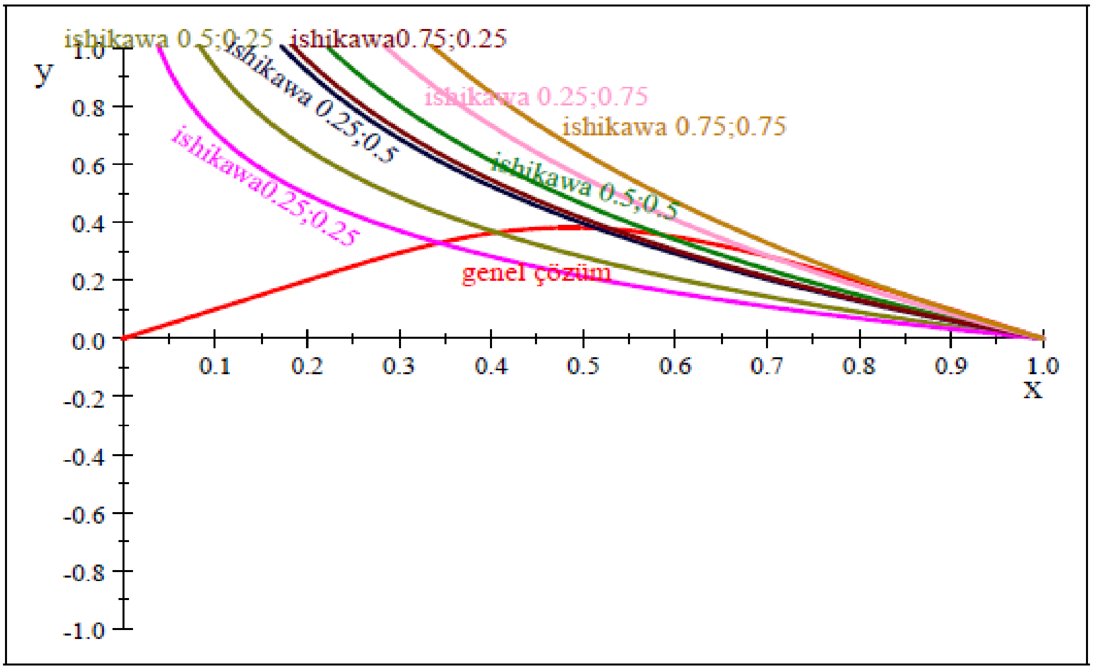
Tablo 4.3. Örnek 4.1.'deki Riccati Denklemi'ne uygulanan tüm yöntemlerin denklemin genel çözümüyle karşılaştırılmasından elde edilen mutlak hatalar

	x=0,8	x=0,6	x=0,4
$\lambda = 0,5$ $\gamma = 0,5$	0,04709	0,008952	0,11265
$\lambda = 0,5$ $\gamma = 0.25$	0,10568	0,143065	0,06932
$\lambda = 0,25$ $\gamma = 0,5$	0,06842	0,057761	0,04642
$\lambda = 0,25$ $\gamma = 0,25$	0,12723	0,192409	0,13628
$\lambda = 0,75$ $\gamma = 0,25$	0,06303	0,045440	0,06314
$\lambda = 0,25$ $\gamma = 0,75$	0,01762	0,058991	0,17372
$\lambda = 0,75$ $\gamma = 0,75$	0,01004	0,121871	0,25905
picard(y_2)	0,002889	0,0667	0,93836
euler	0,004066 y_1	0,034706 y_2	0,09072 y_3
runge-kutta	0,000094	0,001029	0,02306

Yukarıdaki tabloda gerçek çözüm ile uyguladığımız yöntemlerden elde ettiğimiz sonuçlar arasındaki ilişkiyi gösterildi.



Şekil 4.1. Picard, Euler, Runge-Kutta yöntemleri ile Örnek 4.1.'deki Riccati Denklemi'nin genel çözümünün grafik üzerinde karşılaştırılması



Şekil 4.2. Örnek 4.1.'deki Riccati Denklemi'nin genel çözümü ve Modifiye Edilmiş Ishikawa Yöntemi'nin grafik üzerinde karşılaştırılması

Örnek 4.1.'deki Riccati denkleminin genel çözümü ile bu denkleme uygulanan sayısal yöntemlerin sonuçları Şekil 4.1. ve Şekil 4.2. ile yukarıdaki gibi gösterilmiştir.

4.2. Örnek

$$y' - y = xy^2 \tag{4.17}$$

$y(0) = 1$ başlangıç değer problemini ele alalım. Örnek 4.1'e ek olarak şimdi de (4.17)'deki bir Bernoulli denkleminin genel çözümü aşağıdaki gibi elde edildikten sonra aynı yöntemler bu denkleme de uygulanmış ve sonuçları incelenmiştir. Öncelikle

$$v = y^{1-2} \quad \Longrightarrow \quad y = \frac{1}{v} \tag{4.18}$$

değişken değişimi uygulandıktan sonra (4.18)'in türevi alınarak

$$v' = -y^{-2}y' \tag{4.19}$$

elde edilir. (4.17) denkleminde (4.18) ve (4.19) eşitlikleri yerine yazıldığında yerine yazılıp denklem düzenlendiğinde

$$v' + v = -x \tag{4.20}$$

lineer denklemi elde edilir. Son elde edilen bu denklemde her iki taraf $e^{\int 1dx}$ integral çarpanı ile çarpıldıktan sonra her iki tarafın integrali alındığında

$$y_g = \frac{e^x}{-xe^x+e^x+c} \tag{4.21}$$

elde edilir. *C* integral sabiti olmak üzere $y(0) = 1$ başlangıç koşulu altında

$$y_g = \frac{1}{-x+1} \tag{4.22}$$

genel denklemi elde edilir.

(4.17) denklemi için ilk olarak modifiye edilmiş Ishikawa yöntemini uygulanmıştır. (4.17) denklemi için $F\big(t, y_n(t)\big) = y_n + xy_n^2$ ve $y_0 = y(0),\ x_0 = 0$ olarak belirlenmiştir. (4.10) denkleminde T dönüşümü

$$T(x) = \int_0^x F(t, y_n(t))dt = \int_0^x (t + tt^2)dt \tag{4.23}$$

$$T(y) = \int_0^y F(t, y_n(t))dt = \int_0^y (t + tt^2)dt \tag{4.24}$$

olarak elde edilmiştir. İterasyonu uygulamadan önce ön koşul incelendiğinde

$$|T(x) - T(y)| = | \int_0^x (t + t^3)dt - \int_0^y (t + t^3)dt | = \left|\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} + \frac{x^4}{4} - \frac{y^4}{4}\right|$$

$$\leq \left|\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2}\right| + \left|\frac{x^4}{4} - \frac{y^4}{4}\right| \leq \left(1 + \left|\frac{x^2+y^2}{2}\right|\right)\left|\frac{x^2-y^2}{2}\right| \leq \left(1 + \left|\frac{x^2+y^2}{2}\right|\right)\left(\frac{x+y}{2}\right).|x - y|$$

olur. x,y<(0,1) için $\left(1 + \left|\frac{x^2+y^2}{2}\right|\right)\left(\frac{x+y}{2}\right)$ <1 olacağından T dönüşümü Teorem 3.2.'yi sağlar. Bundan dolayı T nin bir tek sabit noktası vardır.

Ishikawa iterasyonunun adımları (4.17) denklemine uygulandığında ilk olarak

$$y_1 = 1 + x + \frac{x^2}{2} \tag{4.25}$$

şeklinde iterasyonun 1. adımı elde edilir.

Ishikawa iterasyonunun ilk adımı bulunduktan sonra λ ve γ değerlerine iterasyonda verilen değer aralığı içerisinde verilen bazı değerler için iterasyonun diğer iki adımı aşağıda elde edilmiştir. Bu denklem için Ishikawa yönteminde gerçek sonuca en yakın değer y_3 adımında elde edildiği için tüm λ, γ değerleri için 3. adım olan y_3 adımına kadar değerler hesaplanmıştır. İlk adım λ, γ'nın tüm değerleri için aynı olmakla birlikte farklılıklar 2. ve 3. adımlarda elde edilmiştir.

$\lambda = 0{,}5$ ve $\gamma = 0{,}5$ değerleri için

$$y_1 = 1 + x + \frac{x^2}{2}$$

$$y_2 = 1 + 0{,}5x + 0{,}25x^2$$

$$y_3 = 1 + 0{,}75x + 0{,}375x^2$$

$\lambda = 0{,}5$ ve $\gamma = 0{,}25$ için

$$y_1 = 1 + x + \frac{x^2}{2}$$

$$y_2 = 1 + 0{,}25x + 0{,}125x^2$$

$y_3 = 1 + 0{,}625x + 0{,}3125x^2$

$\lambda = 0{,}25$ ve $\gamma = 0{,}5$ için

$y_1 = 1 + x + \frac{x^2}{2}$

$y_2 = 1 + 0{,}5x + 0{,}125x^2$

$y_3 = 1 + 0{,}625x + 0{,}21875x^2$

$\lambda = 0{,}25$ ve $\gamma = 0{,}25$ için

$y_1 = 1 + x + \frac{x^2}{2}$

$y_2 = 1 + 0{,}25x + 0{,}125x^2$

$y_3 = 1 + 0{,}4375x + 0{,}21875x^2$

$\lambda = 0{,}75$ ve $\gamma = 0{,}25$ için

$y_1 = 1 + x + \frac{x^2}{2}$

$y_2 = 1 + 0{,}25x + 0{,}125x^2$

$y_3 = 1 + 0{,}8125x + 0{,}40625x^2$

$\lambda = 0{,}25$ ve $\gamma = 0{,}75$ için

$y_1 = 1 + x + \frac{x^2}{2}$

$y_2 = 1 + 0{,}75x + 0{,}375x^2$

$y_3 = 1 + 0{,}8125x + 0{,}40625x^2$

$y_4 = 1 + 0{,}7968x + 0{,}4406x^2$

$y_5 = 1 + 0{,}8007x + 0{,}44607x^2$

$\lambda = 0{,}75$ ve $\gamma = 0{,}75$ için

$y_1 = 1 + x + \frac{x^2}{2}$

$y_2 = 1 + 0{,}75x + 0{,}375x^2$

$y_3 = 1 + 0{,}9375x + 0{,}4887x^2$

Tablo 4.4. Örnek 4.2.'deki Bernoulli Denklemi'ne uygulanan Modifiye Edilmiş Ishikawa Yöntemi'nin belirlenen $\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\gamma}$ değerleri için ilk üç adımının sayısal değerleri

	0,2	**0,4**	**0,6**	**0,8**
$\boldsymbol{\lambda = 0,5 \ \ \gamma = 0,5}$	1,22	1,48	1,78	2,12
	1,11	1,24	1,39	1,56
	1,165	1,36	1,585	1,84
$\boldsymbol{\lambda = 0,5 \ \ \gamma = 0,25}$	1,22	1,48	1,78	2,12
	1,055	1,12	1,195	1,28
	1,1375	1,3	1,4875	1,7
$\boldsymbol{\lambda = 0,25 \ \ \gamma = 0,25}$	1,22	1,48	1,78	2,12
	1,055	1,12	1,195	1,28
	1,09625	1,21	1,34125	1,49
$\boldsymbol{\lambda = 0,25 \ \ \gamma = 0,5}$	1,22	1,48	1,78	2,12
	1,105	1,22	1,345	1,48
	1,13375	1,285	1,45375	1,64
$\boldsymbol{\lambda = 0,75 \ \ \gamma = 0,25}$	1,22	1,48	1,78	2,12
	1,055	1,12	1,195	1,28
	1,17875	1,39	1,63375	1,91
$\boldsymbol{\lambda = 0,25 \ \ \gamma = 0,75}$	1,22	1,48	1,78	2,12
	1,165	1,36	1,585	1,84
	1,17875	1,39	1,63375	1,91
	1,176984	1,389216	1,636696	1,919424
	1,177987	1,3916592	1,6410172	1,926061
$\boldsymbol{\lambda = 0,75 \ \gamma = 0,75}$	1,22	1,48	1,78	2,12
	1,165	1,36	1,585	1,84
	1,207048	1,453192	1,738432	2,062768

(4.17) denklemine Picard iterasyonunun uygulanmasıyla elde edilen ilk iki adım aşağıdaki gibidir. $y_0 = 1 \ ve \ x_0 = 0$ başlangıç koşulu için

$$y_1 = 1 + x + \frac{x^2}{2} \tag{4.26}$$

1. adım elde edilir. Bir adım daha uygulanırsa

$$y_2 = 1 + \frac{1}{24}x^6 + \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{5}{6}x^3 + x^2 + x \tag{4.27}$$

2. adım elde edilmiş olur.

Tablo 4.5. Örnek 4.2.'deki Bernoulli Denklemi'ne uygulanan Picard İterasyon Yöntemi'nin ilk iki adımının sayısal sonuçları

x=0,2	x=0,4	x=0,6	x=0,8
y_1 =1,22	y_1 =1,48	y_1 =1,78	y_1 =2,12
y_2 =1,2475	y_2=1,6284	y_2 =2,2223	y_2 =3,1479

Yukarıdaki tabloda Örnek 4.2.'deki Bernoulli denklemine Picard iterasyon yöntemi uygulandıktan sonra ilk iki yaklaşımın başlangıç değerine yakın belirlenen bir kaç noktadaki değeri verilmiştir. İkinci yaklaşımın değerleri gerçek çözümün sonuçlarına daha yakın olduğu için y_2 sonuçları hata değerlendirmesine alınmıştır.

(4.17) denklemine Euler yöntemi aşağıdaki gibi uygulanmıştır. (4.17) denklemi için $F(x,y) = y + xy^2$ olarak alınmış ve başlangıç koşulu ise $y_0 = 1$ ve $x_0 = 0$'dır. h=0,2 olarak alındığında (2.13)'de verilen Euler yönteminin sonuçları aşağıdaki gibidir.

$x_1 = x_0 + 0{,}2 = 0{,}2$ için

$$y_1 = y_0 + 0{,}2F(x_0, y_0)$$

$$y_1 = y(x_1) = y(0{,}2) = 1{,}2$$

$x_2 = x_1 + 0{,}2 = 0{,}4$ için

$$y_2 = y_1 + 0{,}2F(x_1, y_1)$$

$$y_2 = y(x_2) = y(0{,}4) = 1{,}497$$

$x_3 = x_2 + 0{,}2 = 0{,}6$ için

$y_3 = y_2 + 0{,}2F(x_2, y_2)$

$y_3 = y(x_3) = y(0{,}6) = 1{,}9765$

$x_4 = x_3 + 0{,}2 = 0{,}8$ için

$y_4 = y_3 + 0{,}2F(x_3, y_3)$

$y_4 = y(x_4) = y(0{,}8) = 2{,}8406$

Euler yönteminin belirlenen noktalar için yaklaşık değerlerinin tablosu aşağıdadır.

Tablo 4.6. Örnek 4.2.'deki Bernoulli Denklemi için Euler Yöntemi'nin sayısal sonuçları

$y_1 = y(x_1) = y(0{,}2)$	1,2
$y_2 = y(x_2) = y(0{,}4)$	1,497
$y_3 = y(x_3) = y(0{,}6)$	1,9765
$y_4 = y(x_4) = y(0{,}8)$	2,8406

(4.17) denklemine uyguladığımız son nümerik yöntem Runge-Kutta yönteminin uygulanışı aşağıda verilmiştir. $F(x, y) = y + xy^2$, başlangıç koşulu $y_0 = y(0) = 1$, $x_0 = 0$ ve h=0,2 alındığında

$x_1 = x_0 + h = 0 + 0{,}2 = 0{,}2$ için

$k_1 = f(0; 1) = 0{,}2$

$k_2 = f(0{,}1; 1{,}1) = 0{,}2442$

$k_3 = f(0{,}1; 1{,}1221) = 0{,}2496$

$k_4 = f(0{,}2; 1{,}2496) = 0{,}31238$

$K_0 = \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$ =0,24999

$y_1 = y(x_1) = \mathrm{y}(0{,}2) = y_0 + K_0$ = 1,249997 olur.

$x_2 = x_1 + h = 0{,}2 + 0{,}2 = 0{,}4$ için

$k_1 = f(0{,}2; 1{,}25) = 0{,}3125$

$k_2 = f(0{,}3; 1{,}40625) = 0{,}399902$

$k_3 = f(0{,}3; 1{,}44995) = 0{,}4161313$

$k_4 = f(0{,}4; 1{,}66613) = 0{,}555305$

$K_0 = \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = 0{,}41665$

$y_2 = y(x_2) = \mathrm{y}(0{,}4) = y_1 + K_0$ =1,666642

$x_3 = x_2 + h = 0{,}4 + 0{,}2 = 0{,}6$ için

$k_1 = f(0{,}4; 1{,}6667) = 0{,}55554$

$k_2 = f(0{,}5; 1{,}94448) = 0{,}76700$

$k_3 = f(0{,}5; 2{,}0502) = 0{,}83037$

$k_4 = f(0{,}6; 2{,}49707) = 1.{,}2477$

$K_0 = \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$ = 0,83302

$y_3 = y(x_3) = \mathrm{y}(0{,}6) = y_2 + K_0 = 2{,}4997$

$x_4 = x_3 + h = 0{,}6 + 0{,}2 = 0{,}8$ için

$k_1 = f(0{,}6; 2{,}4997) = 1,2498$

$k_2 = f(0{,}7; 3{,}1246) = 1,9918$

$k_3 = f(0{,}7; 3{,}4956) = 2.,4098$

$k_4 = f(0{,}8; 4{,}9095) = 4,8384$

$K_0 = \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = 2{,}4819$

$y_4 = y(x_4) = \mathrm{y}(0{,}8) = y_3 + K_0 = 4{,}9816$

Bölüm 2. ve Bölüm 3.'te bahsedilen nümerik yöntemler ve iterasyon yöntemleri (4.17)'deki denkleme uygunlandı.
$y_0 = y(0) = 1$, $x_0 = 0$ başlangıç koşulu için (4.17) denkleminin bir genel çözümünü $y_g(x) = \frac{1}{-x+1}$ olarak elde edilmişti. Bu genel çözümün x=0,2; x=0,4; x=0,6; x=0,8 noktalarındaki değerleri aşağıdaki gibidir.

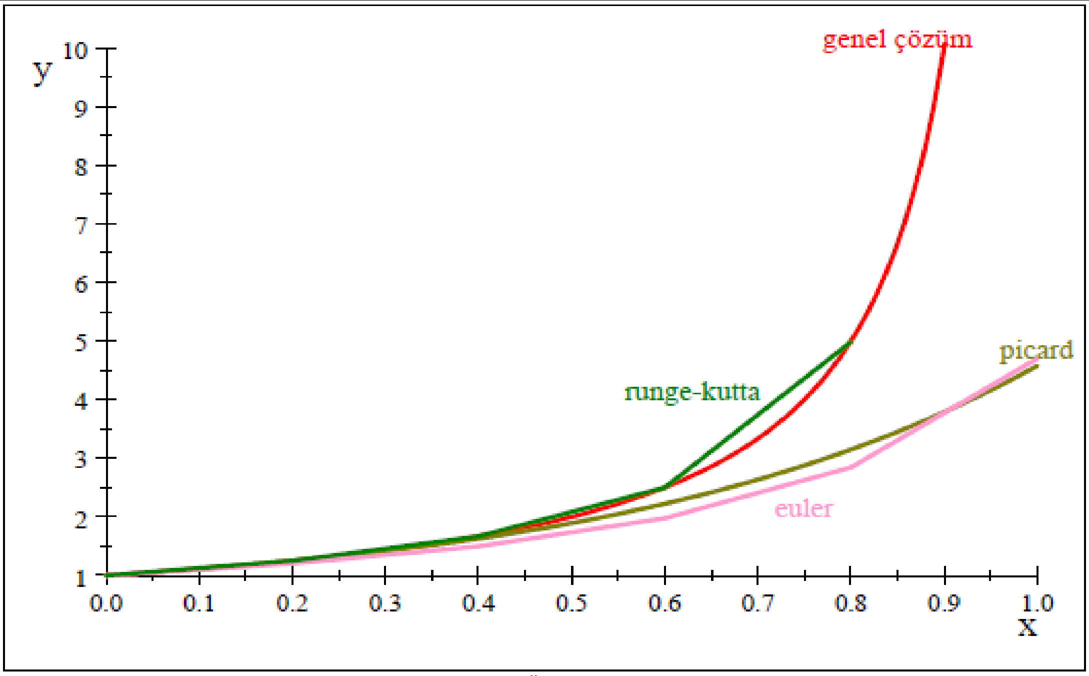
$y_g(0{,}2) = 1{,}25$ $\quad$ $y_g(0{,}4) = 1{,}667$

$y_g(0{,}6) = 2{,}5$ $\quad$ $y_g(0{,}8) = 5{,}0$

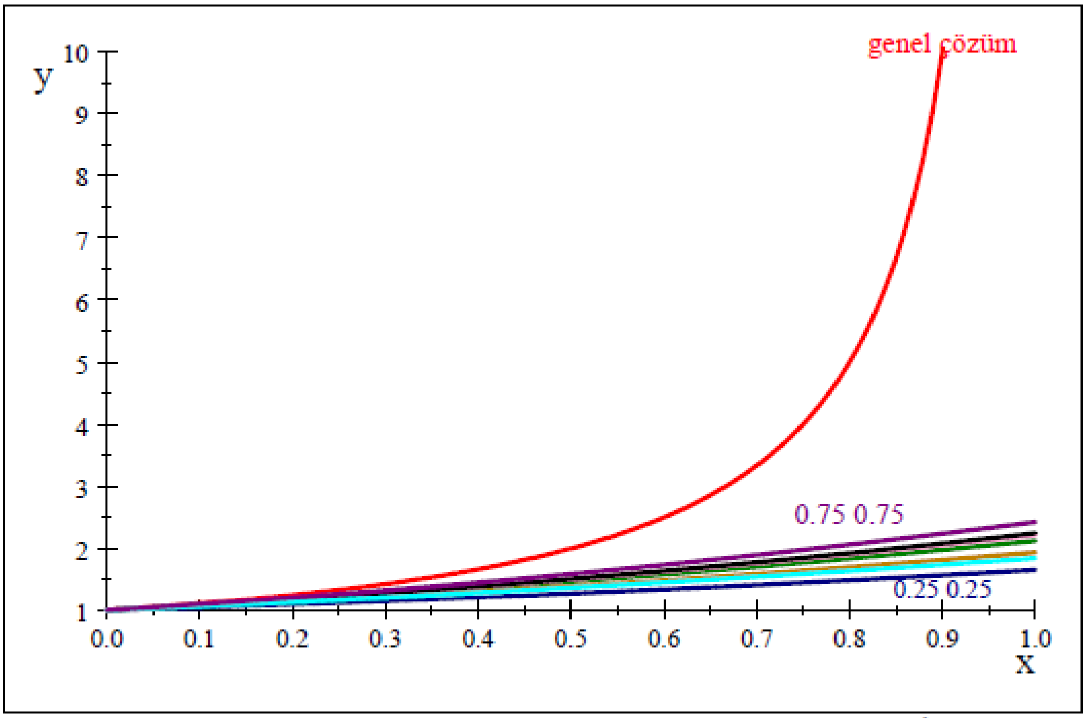
(4.17) denklemine uygulanan sayısal yöntemler ile iterasyon yönteminden elde edilen sonuçların mutlak hataları tabloda verilmiştir.

Tablo 4.7. Örnek 4.2.'deki Bernoulli Denklemi için uygulanan yöntemlerin denklemin gerçek çözümüne göre belirli noktalardaki mutlak hataları

	x=0,2	x=0,4	x=0,6	x=0,8
$\lambda =$ 0,5 γ =0,5	0,085	0,307	0,915	3,16
$\lambda =$ 0,5 γ =0,25	0,1125	0,367	1,0125	3,3
$\lambda =$ 0,25 γ =0,5	0,11625	0,382	1,04625	3,36
$\lambda =$ 0,25 γ =0,25	0,1537	0,457	0,1587	3,51
$\lambda =$ 0,75 γ =0,25	0,07125	0,277	0,86625	3,09
$\lambda =$ 0,25 γ =0,75	0,072013	0,2753	0,85899	3,0739
$\lambda =$ 0,75 γ =0,75	0,04295	0,2138	0,7615	2,9373
picard(y_2)	0,0025	0,0386	0,2777	1,8521
euler	0,05(y_1)	0,1691 (y_2)	0,5235(y_3)	2,1594 (y_4)
runge-kutta	0,000003	0,000358	0,0003	0,0184



Şekil 4.3. Picard, Euler, Runge-Kutta Yöntemleri ile Örnek 4.2.'deki Bernoulli Denklemi'nin genel çözümünün grafik üzerinde karşılaştırılması



Şekil 4.4. Örnek 4.2.'deki Bernoulli Denklemi'nin genel çözümü ve Modifiye Edilmiş Ishikawa Yöntemi'nin grafik üzerinde karşılaştırılması

BÖLÜM 5. SONUÇ VE DEĞERLENDİRME

Riccati ve Bernoulli denklemleri tarzındaki denklemlerin genel çözümlerini elde etmek bazen çok zor olabilmektedir. Hatta Riccati denkleminin kesin çözümünü bulmanın genel bir yöntemi yoktur. Bilinen özel bir çözümden yola çıkılarak yapılan değişken değiştirme metodu kullanılan yöntemlerden biridir.

Bu tip genel çözümüne ulaşmada zorluk yaşanan denklemlerde denklemin yaklaşık sonuçlarını elde etmek için nümerik yöntemler ve iterasyon yöntemleri kullanılabilir.

Bu çalışmada, bahsettiğimiz lineer olmayan Riccati ve Bernoulli denklem çeşitlerinin çözümlerine farklı yaklaşımlar uygulandı elde edilen sonuçların gerçek çözümle karşılaştırmaları tablo ve grafiklerle yapıldı. Lineer olmayan bu denklemlere modifiye edilmiş İshikawa iterasyonu ile nümerik yöntemler olan Euler, Picard ve Runge-Kutta yöntemleri uygulandı. Modifiye edilmiş Ishikawa yöntemiyle elde edilen sonuçların diğer yöntemlere göre daha iyi sonuçlar verip vermediği incelendi.

Örnek 4.1 de incelenen Riccati tarzı denklem ile Örnek 4.2 'de incelenen Bernoulli tarzı denkleme tüm yöntemler uygulandıktan sonra elde edilen sonuçların karşılaştırması Tablo 4.3., Tablo 4.7. ile Şekil 4.1., Şekil 4.2., Şekil 4.3. ve Şekil 4.4.'te yapılmıştır. Tablo 4.3. ve Tablo 4.7.'de denklemlerin çözümlerinin incelendiği aralıkta belirlenen bazı noktalarda uygulanan yöntemlerin denklemin gerçek çözümüne göre mutlak hataları verilmiştir. Seçilen tüm noktalarda en az hata ile gerçek çözüme yaklaşım Runge -Kutta yöntemiyle sağlanmıştır. Riccati denkleminde gerçek çözüme ikinci en az hata ile yaklaşım çalışılan aralıkta seçilen noktalarda Euler ile Picard yöntemi arasında değişim göstermiştir, Bernoulli denkleminde ikinci en az hata ile yaklaşım ise Picard yöntemiyle sağlanmıştır. İki denklemde de modifiye edilmiş Ishikawa iterasyon yönteminde diğer sayısal yöntemlerden daha yakın sonuçlar elde edilememiştir.

Modifiye edilmiş Ishikawa iterasyon yönteminin adımlarında yer alan $0 < \lambda,\ \gamma < 1$ sabitlerinin bu aralıktaki farklı değerleri için elde edilen yedi farklı yaklaşımın sonuçları kendi içerisinde incelendiğinde bu sabitlerin (0,1) aralığında aldığı değişik değerler sonucu çok fazla değiştirmemiş hepsinin sonuçlarında elde edilen mutlak hata değerlerinin birbirine yakın çıktığı gözlenmiştir. Örnek 4.1.'de Ishikawa iterasyon yöntemi onbirinci adıma kadar ilerletilmiş, Örnek 4.2.'de ise kendisinden sonraki adımlara göre en iyi yaklaşımı veren üçüncü adıma kadar ilerletilmiştir. Fakat iki denklemde de diğer yöntemlerle karşılaştırıldığında modifiye edilmiş Ishikawa iterasyon yönteminde diğer yöntemlere göre daha yakın bir sonuç elde edilememiştir.

Riccati denkleminde başlangıç noktası 1 seçildiğinden her bir yöntem (0,1) aralığında 1'den başlatılıp geriye 0'a doğru uygulanmış, Bernoulli denkleminde ise aynı aralıkta 0'dan 1'e doğru uygulanmıştır. Riccati denkleminde 1'den 0'a doğru yaklaşıldığında tüm yöntemlerde de yaklaşık çözümler *x=0.5 ve x=0.4* noktalarından itibaren gerçek çözümden uzaklaşmıştır. Bernoulli denkleminde 0'dan 1'e doğru yaklaşıldığında da yine yaklaşık olarak aynı noktalardan itibaren tüm yöntemlerde gerçek çözümden uzaklaşıldığı gözlenmiştir.

Bu tezde yapılan çalışmaların sonucunda lineer olmayan diferansiyel denklem tiplerinden olan Riccati ve Bernoulli denklemleri için modifiye edilmiş Ishikawa yönteminin diğer sayısal yöntemlere alternatif olarak kullanılabilecek bir yöntem olmadığı sonucuna varılmıştır.

KAYNAKLAR

[1] Doğan, K., Bazı Geometrik Özellikler ve Sabit Nokta İterasyonları, Yıldız Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Mühendisliği Anabilimdalı, Doktora Tezi, 2016.

[2] Davis, H.T., Introduction to Nonlinear Differential and Integral Equations, Dover Publications, 1-566, 1962.

[3] Yılmaz, Ş., Riccati Diferensiyel Denkelmi, Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, 2007.

[4] Ibragimov, N.H., Elemantary Lie Group Analysis and Ordinary Differential Equations, John Wiley and Sons, 1-366, 1999.

[5] Çağlıyan, M., Çelik, N., Doğan, S., Adi Diferensiyel Denklemler, 1-391, 2013.

[6] https://ipfs.io/QmT5NvUtoM5nWFfrQdVrFtvGfKFmG7AHE8P34isapyhCx X /wiki/Runge-Kutta Y%C3%B6ntemleri.html., Erişim Tarihi: 05.04.2018.

[7] Aksoy, Y., Özkan, M., Diferensiyel Denklemler, Cilt 1, Yıldız Teknik Üniversitesi Yayınları, Ankara, 1-210, 2017.

[8] Berinde, V., İterative Approximation of Fixed Points, Lecture Notes in Mathematics, Springer, 1-315, 2006.

[9] Ishikawa, S., Fixed Points by a new Iteration method. Proc. Am. Math. Soc. 44(1), 147-150, 1974.

[10] Picard, E.(Chartes), Jour. de Math., 145-210, 1890.

[11] Bildik, N., Bakır, Y., Mutlu, A., Fixed Point Theory and Applications, 29, 2013.

ÖZGEÇMİŞ

Tuba GÜLECAN, 22.02.1987 tarihinde Kocaeli'de doğdu. İlköğretimini Kocaeli'nin Körfez ilçesinde Yeniyalı İlköğretim Okulu'nda, ortaöğrenimini Oruç Reis Anadolu Lisesi'nde tamamladı. 2005 yılında Kocaeli Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde başladığı lisans eğitimini 2009 yılında tamamladı. 2012 yılında Sakarya Üniversitesi Matematik anabilim dalı Uygulamalı Matematik bilim dalında yüksek lisans eğitimine başladı. 2015 yılında Van'da matematik öğretmeni olarak göreve başladı. Şu anda Kocaeli'de Ç.İ.B. Ali Nuri Çolakoğlu MTAL'de görevine devam etmektedir.