T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SUMUDU DÖNÜŞÜMÜ ve DİFERANSİYEL DENKLEMLERE UYGULAMASI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Neriman Berra ÇAKMAK

Enstitü Anabilim Dalı	**:**	**MATEMATİK**
Enstitü Bilim Dalı	**:**	**UYGULAMALI MATEMATİK**
Tez Danışmanı	**:**	**Doç. Dr. Metin YAMAN**

Mayıs 2019

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SUMUDU DÖNÜŞÜMÜ ve DİFERANSİYEL DENKLEMLERE UYGULAMASI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Neriman Berra ÇAKMAK

Enstitü Anabilim Dalı	**:**	**MATEMATİK**
Enstitü Bilim Dalı	**:**	**UYGULAMALI MATEMATİK**

Bu tez 31/ 05 /2019 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Oybirliği / Oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

Prof. Dr.	**Doç. Dr.**	**Dr. Öğrt. Üyesi**
Şevket GÜR	**Metin YAMAN**	**Engin CAN**
Jüri Başkanı	**Üye**	**Üye**

Ş. G.

BEYAN

Tez içindeki tüm verilerin akademik kurallar çerçevesinde tarafımdan elde edildiğini, görsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçların akademik ve etik kurallara uygun şekilde sunulduğunu, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezde yer alan verilerin bu üniversite veya başka bir üniversitede herhangi bir tez çalışmasında kullanılmadığını beyan ederim.

Neriman Berra ÇAKMAK

06.05.2019

TEŞEKKÜR

Bu çalışmamın hazırlanması sürecinde bana yardımcı olan, bilgi ve tecrübelerinden her zaman yararlandığım saygı değer hocam Doç. Dr. Metin YAMAN'a sonsuz teşekkürlerimi ve saygılarımı sunarım.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

$F(s)$	:	Bir fonksiyonun Laplace dönüşümü
$L\left[f(t)\right]$	:	$f(t)$ fonksiyonunun Laplace dönüşümü
$L^{-1}\left[f(s)\right]$	:	$f(s)$ fonksiyonunun Ters Laplace dönüşümü
$G(u)$	:	Sumudu Dönüşümü
$S[f(t);u]$	:	$f(t)$ fonksiyonunun sumudu dönüşümü
$S^{-1}\left[Y(u)\right]$	:	Ters Sumudu dönüşümü
$f*g$	:	f ve g fonksiyonlarının konvolüsyonu
$\Gamma(n)$	:	Gama Fonksiyonu
$F_1(s)$	:	$f(t)$ fonksiyonunun birinci türevinin Laplace dönüşümü
$G_1(u)$	:	$f(t)$ fonksiyonunun birinci türevinin Sumudu dönüşümü
$G^{(k)}(u)$	:	$G(u)$ nun u ya göre k. türevi

TABLOLAR LİSTESİ

ÖZET

Anahtar kelimeler: Diferansiyel Denklemler, İntegral Dönüşüm, Laplace Dönüşümü, Sumudu Dönüşümü,

Bu çalışma beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş bölümü olup Sumudu Dönüşümü ile ilgili yapılan çalışmalar hakkında bilgi verilmiştir. İkinci bölümde çalışmamıza yardımcı olacak temel tanım ve teoremler verildi. Üçüncü bölümde Sumudu dönüşümünün tanımı, dönüşümün varlığı, dönüşümün özellikleri ve Ters Sumudu dönüşümü verildi. Dördüncü bölümde Sumudu dönüşümü sabit katsayılı lineer diferansiyel denklemlere ve değişken katsayılı lineer diferansiyel denklemlere uygulandı. Beşinci bölümde ise genel bir değerlendirme ve sonuç verildi.

SUMUDU TRANSFORM AND ITS APPLICATION TO DIFFERENTIAL EQUATIONS

SUMMARY

Keywords: Differential Equations, Integral Transforms, Laplace Transform,Sumudu Transform

This study is made up of the five chapters. In chapter one, It has been given information about the studies of Sumudu Transform. In chapter two, it has been given fundamental definitions and theorems which will help to us. In chapter three, Sumudu Transform method that is technique which will be applied has been given. In chapter four, the method has been applied to ordinary differential equations with boundary value problems. In chapter five, it has been given a conclusion under the terms of the obtained results in this study.

BÖLÜM 1. GİRİŞ

Diferansiyel denklemleri ve integral denklemleri çözmek için çeşitli integral dönüşümleri vardır. Watugala yeni bir integral dönüşüm tanımladı [1]. Daha sonrasında Sumudu Dönüşümü olarak isimlendirilen bu dönüşüm diferansiyel denklemlerin çözümünde ve kontrol mühendisliği problemlerinin çözümü için kullanıldı.

Basit formülasyonu sayesinde ve faydalı özellikleriyle Sumudu dönüşümü ümit vericidir. Mühendislik matematiği ve uygulamalı bilimlerdeki karışık problemlerin çözümünde bu sayede yardımcı olacağı ortaya çıkmıştır. Bu dönüşüm kısmi diferansiyel denklemlerin ve integral denklemlerin uygulanması ve tasavvur edilmesinde birçok ilginç özelliğe sahiptir.

Watugala'nın çalışmaları, Sumudu dönüşümünün adi diferansiyel denklemlerin çözümünde etkili bir şekilde kullanılabileceğini gösterdi. Bazı özellikler Weerakoon ([2],[3]) tarafından ortaya konulmuş olmakla birlikte, diğer temel özellikler Asiru [6] çalışmalarında oluşturuldu. Weerakoon Kompleks Ters Sumudu dönüşüm formülüne yer verdi [3]. Watugala ise daha sonra Sumudu dönüşümünü iki değişkenli fonksiyonlar için uyguladı [4].

Sonraları Kılıçman ve Eltayeb Sumudu dönüşümüne daha da geniş yer veren özellikler üzerine çalışmalar ortaya koydu ([7],[18]). Yakın zamanda ise bu dönüşüm diferansiyel denklem sistemlerini çözmek için kullanıldı [8].

Sumudu dönüşümünün ilginç bir özelliği; fonksiyonun kendisi ile taylor açılımı – katsayılardaki faktöriyel çarpanlar hariç - aynıdır.

Böylece;

$$f(t)=\sum_{-\infty}^{\infty} a_n t^n$$

olduğundan

$$F(u)=\sum_{-\infty}^{\infty} n!\,a_n u^n$$

şeklindedir.

Fonksiyon ve Sumudu dönüşümü arasındaki benzerlik göze çarpmaktadır [20]. Benzer şekilde bu dönüşüm kombinasyonu $C(m,n)$, permütasyona $P(m,n)$ çevirmekte ki bu da Discrete sistemlerde kullanışlıdır.

Sumudu dönüşümü;

$A=\left\{ f(t):\exists M,\tau_{1,}\tau_2>0,\left|f(t)\right|<Me^{\frac{|t|}{\tau_j}},t\in(-1)^j\times[0,\infty)\right\}$ fonksiyonlar kümesi üzerinde

$$F(u)=S\left[f(t);u\right]=\frac{1}{u}\int_0^{\infty} e^{\frac{-t}{u}} f(t)dt$$

şeklinde tanımlanmıştır.

BÖLÜM 2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Tanım 2.1. Bir $y = f(x)$ fonksiyonunun, x serbest değişkeni, y bağımlı değişkeni ve bunun sonlu herhangi bir mertebeye kadar olan türevleri arasında kurulmuş bir bağıntıya diferansiyel denklem denir.

Bu tanıma göre bir diferansiyel denklemin genel ifadesi,

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3} \ldots, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0 \tag{2.1}$$

veya tamamen benzer şekilde,

$$F\left(x, y, y', y'', y''' \ldots, y^{(n)}\right) = 0 \tag{2.2}$$

şeklindedir [9].

Tanım 2.2. Bir diferansiyel denklemde bilinmeyen fonksiyon y ve bağımsız değişken x olmak üzere,

$$b_n(x)\frac{d^ny}{dx^n} + b_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + b_2(x)\frac{d^2y}{dx^2} + b_1(x)\frac{dy}{dx} + b_0(x)y = g(x) \tag{2.3}$$

veya;

$$\sum_{j=1}^{n} b_j(x)y^{(n)} + b_0(x)y = g(x) \tag{2.4}$$

biçiminde yazılabiliyorsa bu diferansiyel denkleme lineer diferansiyel denklem denir. Burada $b_j(x)$, $(j = 0, 1, 2, \ldots, n)$ ve $g(x)$ bilinen ve yalnız x değişkenine bağlı fonksiyonlardır [11].

Laplace dönüşümü bir integral dönüşümü olup, fizik, mekanik, mühendislik, tıp ve bazı diğer bilim dallarında kullanılan önemli bir dönüşümdür. Bu dönüşüm, diferansiyel denklemlerin çözümünde büyük kolaylıklar sağladığı gibi, fiziğin matematiksel denklemlerinin çözümünde de yararlanılabilen bir dönüşümdür. Bu dönüşümle çözümü elde edilen denklemlerin başlangıç şartlarını da ihtiva ettiği görülür.

Tanım 2.3. $F(t),\ t \geq 0$'ın pozitif değerleri için tanımlı t reel değişkeninin bir fonksiyonu olsun. ($t<0$ için $F(t)=0$ kabul edilebilir); $s>0$ reel veya kompleks bir parametre olmak üzere, t reel değişkeninin bir fonksiyonu e^{-st} ise,

$$\int_0^\infty e^{-st}F(t)\,dt \tag{2.5}$$

(2.5) integrali var olacak şekilde s parametresi için bir değer bulmak mümkün oluyorsa bu integrale $F(t)$ fonksiyonunun Laplace dönüşümü denir. Bu dönüşüm $L\{F(t)\}$ veya $f(s)$ ifadeleri ile gösterilir. Bu dönüşümü

$$f(s)=L\{F(t)\}=\int_0^\infty e^{-st}F(t)\,dt,$$

şeklinde de yazabiliriz [11].

Tanım 2.4. $n>0$ ise gama fonksiyonu,

$$\Gamma(n)=\int_0^\infty u^{n-1}e^{-u}\,du \tag{2.6}$$

eşitliği ile tanımlanır [12].

Tanım 2.5. $m>0$ ve $n>0$ ise Beta fonksiyonu

$$B(m,n)=\int_0^1 u^{m-1}(1-u)^{n-1}\,du \tag{2.7}$$

eşitliği ile tanımlanır [12].

Tanım 2.6. Bir f fonksiyonuna $t > T$ için $|f(t)| \leq Me^{ct}$ olacak biçimde $c, M > 0$ ve $T > 0$ sabitleri mevcut olduğunda c üstel mertebelidir denir [13].

Tanım 2.7. Bir $w = f(z)$ kompleks fonksiyonu z_0 noktası ve bunun bir komşuluğundaki her noktada türevli ise f ye z_0 da analitik fonksiyon denir [13].

Tanım 2.8. Bir f fonksiyonu bir D bölgesinin her noktasında analitik ise f ye D bölgesinde analitiktir denir. D de analitik olan f fonksiyonuna holomorfik ya da regüler fonksiyon denir [13].

Tanım 2.9. Bir f fonksiyonu bir D bölgesinde, belki D deki kutuplar dışında, her yerde analitik ise f meromorfiktir [13].

Tanım 2.10. Bir f fonksiyonun bir D bölgesindeki aykırılıkları sadece kutup noktaları ise f fonksiyonu D de bir meromorf fonksiyondur [14].

Tanım 2.11. Bir f kompleks fonksiyonu bir $z = z_0$ noktasında analitik değilse bu noktaya fonksiyonun tekilliği ya da tekil noktası denir [13].

Teorem 2.1. (Laurent Teoremi)

f, $r < |z - z_0| < R$ ile tanımlı D halka bölgesinin içinde analitik olsun. Bu durumda f, $r < |z - z_0| < R$ için geçerli

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \tag{2.8}$$

seri gösterilişe sahiptir. a_k katsayıları ise

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(s)}{(s - z_0)^{k+1}} ds \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{2.9}$$

ile verilmektedir. Burada C tamamen D içinde yer alan ve z_0 a iç nokta olarak sahip basit kapalı bir eğridir [13].

Teorem 2.2. $z = z_0$, f kompleks fonksiyonunun bir ayrık tekil noktası olsun ve

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \left(z - z_0\right)^k = \sum_{k=1}^{\infty} a_{-k} \left(z - z_0\right)^{-k} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k \left(z - z_0\right)^k \tag{2.10}$$

$0 < |z - z_0| < R$ delinmiş açık daire için geçerli f nin Laurent seri gösterilişi olsun. (2.10) serisinin $z - z_0$ ın negatif kuvvetlerinden oluşan kısmı yani,

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{-k} \left(z - z_0\right)^{-k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{-k}}{\left(z - z_0\right)^k} \tag{2.11}$$

serinin esas kısmıdır. Esas kısımdaki terim sayısına göre $z = z_0$ ayrık tekil noktasına farklı isimler verilir [13].

Tanım 2.12. (2.10) serisinin esas kısmı olan $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{-k}}{\left(z - z_0\right)^k}$ sıfır ise, yani a_{-k} katsayıları sıfır ise $z = z_0$ noktasına kaldırılabilir tekil nokta denir [13].

Tanım 2.13. (2.10) serisinin esas kısmı olan $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{-k}}{\left(z - z_0\right)^k}$ sıfırdan farklı sonlu sayıda terimler içeriyorsa bu durumda $z = z_0$ noktasına bir kutup denir [13].

Tanım 2.14. (2.10) serisinin esas kısmı olan $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{-k}}{\left(z - z_0\right)^k}$ sıfırdan farklı olup son katsayı $n \geq 1$ olmak üzere a_{-n} ise $z = z_0$ noktasına $n.$ mertebeden kutup denir [13].

Tanım 2.15. (2.10) serisinin esas kısmı olan $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{-k}}{\left(z - z_0\right)^k}$ sıfırdan farklı olup a_{-1} katsayılı tek bir terim içeriyor ise $z = z_0$ noktası 1. mertebeden kutup olarak isimlendirilir ve 1. mertebeden kutba çoğunlukla basit kutup denir [13].

Tanım 2.16. (2.10) serisinin esas kısmı olan $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{-k}}{\left(z-z_0\right)^k}$ sıfırdan farklı sonsuz sayıda terimler içeriyorsa $z=z_0$ noktasına esaslı tekil nokta denir [13].

Teorem 2.3. (n. Mertebeden Kutup)
Delinmiş bir $0<\left|z-z_0\right|<R$ diskinde analitik bir f fonksiyonu $z=z_0$ noktasında n. mertebeden bir kutba sahip olması için gerek ve yeter koşul, f nin

$$f\left(z\right)=\frac{\phi\left(z\right)}{\left(z-z_0\right)^n} \tag{2.12}$$

olarak yazılabilmesidir, burada ϕ , $z=z_0$ da analitiktir ve $\phi\left(z_0\right)\neq 0$ dır [13].

Teorem 2.4. g ve h fonksiyonları $z=z_0$ da analitik ve h, $z=z_0$ da $n.$ mertebeden bir sıfıra sahip ve $g\left(z_0\right)\neq 0$ ise bu durumda $f\left(z\right)=g\left(z\right)/h\left(z\right)$ fonksiyonu $z=z_0$ da $n.$ mertebeden bir kutba sahiptir [13].

Tanım 2.17. Bir f kompleks fonksiyonu bir z_0 noktasında ayrık tekilliğe sahipse bu durumda f z_0 dolayındaki her z için yakınsak olan

$$f(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\left(z-z_0\right)^k=\ldots+\frac{a_{-2}}{\left(z-z_0\right)^2}+\frac{a_{-1}}{z-z_0}+a_0+a_1\left(z-z_0\right)+\ldots \tag{2.13}$$

Laurent seri gösterilişine sahiptir. f kompleks fonksiyonunun Laurent seri gösterilişinde $\frac{1}{z-z_0}$ ın a_{-1} katsayısına f fonksiyonunun z_0 ayrık tekil noktasındaki rezidüsü denir. f nin z_0 daki rezidüsü $a_{-1}=\operatorname{Re}s\left(f\left(z\right),z_0\right)$ şeklinde gösterilir [13].

Teorem 2.5. (Basit Kutupta Rezidü)
f , $z=z_0$ da bir basit kutba sahipse bu durumda

$$\operatorname{Re}s\left(f\left(z\right),z_0\right)=\lim_{z\to z_0}\left(z-z_0\right)f\left(z\right) \tag{2.14}$$

şeklindedir [13].

Teorem 2.6. (n. Mertebeden Bir Kutupta Rezidü)

f , $z = z_0$ da n. mertebeden bir kutba sahipse bu durumda

$$\operatorname{Res}\left(f(z), z_0\right) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left[\left(z - z_0\right)^n f(z)\right] \tag{2.15}$$

şeklindedir [13].

Teorem 2.7. (Cauchy Rezidü Teoremi)

D basit bağlantılı bir bölge ve C , tamamen D içinde yer alan basit kapalı bir çevre olsun. f , C üzerinde ve içinde , C içinde sonlu sayıda $z_1, z_2, ..., z_n$ ayrık noktalar dışında, analitik bir fonksiyon ise bu durumda

$$\oint_C f(z).dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}\left(f(z), z_k\right) \tag{2.16}$$

olmaktadır [13].

Teorem 2.8. Γ üzerinde ($s = \mathrm{Re}^{i\theta}$ dır)

$$\left|f(s)\right| < \frac{M}{R^k} \tag{2.17}$$

olacak biçimde $M > 0$, $k > 0$ sabitlerini bulabilirsek Γ boyunca hesaplanan $e^{st} f(s)$ nin integrali $R \to \infty$ için sıfıra yaklaşır.

$$\lim_{R \to \infty} \int_\Gamma e^{st} f(s) ds = 0 .$$

$f(s) = \dfrac{P(s)}{Q(s)}$ ve $P(s)$ ile $Q(s)$, $P(s)$ nin derecesi $Q(s)$ nin derecesinden küçük olan polinomlar ise teoremdeki koşul daima gerçeklenir [12].

BÖLÜM 3. SUMUDU DÖNÜŞÜMÜ VE TERS SUMUDU DÖNÜŞÜMÜ

3.1. Sumudu Dönüşümünün Tanımı

Tanım 3.1 $A=\left\{ f(t):\exists M,\tau_{1,}\tau_2>0,\left|f(t)\right|<Me^{\frac{|t|}{\tau_j}},t\in(-1)^j\times[0,\infty) \right\}$ fonksiyonlar

kümesi üzerinde

$$G(u)=S\left[f(t);u\right]=\int_0^\infty e^{-t}f(ut)\,dt \tag{3.1}$$

dönüşümüne Sumudu dönüşümü denir [16].

3.2. Bazı Temel Fonksiyonların Sumudu Dönüşümleri

Öncelikle (3.1) de $w=ut\left(t=w/u\right)$ dönüşümü yapılırsa $dt=\frac{dw}{u}$ olacağından sağ taraf,

$$G(u)=\frac{1}{u}\int_0^\infty e^{\frac{-w}{u}}f(w)\,dw \tag{3.2}$$

haline dönüşür. Dolayısıyla $f(t)$ fonksiyonunun Sumudu dönüşümü,

$$G(u)=S\left[f(t);u\right]=\frac{1}{u}\int_0^\infty e^{\frac{-t}{u}}f(t)\,dt \tag{3.3}$$

şeklinde de ifade edilebilir. Bu kullanım fonksiyonların Sumudu dönüşümünü bulmada kolaylık sağlar.

Örnek 3.2.1. $f(t)=1$ fonksiyonunun Sumudu dönüşümü

$$S[1]=\frac{1}{u}\int_0^{\infty} e^{-\frac{t}{u}}dt=\lim_{A\to\infty}\frac{1}{u}\int_0^{A} e^{-\frac{t}{u}}dt=\lim_{A\to\infty}\frac{1}{u}\frac{1}{-\frac{1}{u}}e^{-\frac{t}{u}}\Big|_0^A=\lim_{A\to\infty}\left(1-e^{-\frac{A}{u}}\right)=1$$

olacağından $S[1]=1$ bulunur.

Örnek 3.2.2. $f(t)=t$ fonksiyonunun Sumudu dönüşümü

$$S[t]=\frac{1}{u}\int_0^{\infty} e^{-\frac{t}{u}}tdt=\lim_{A\to\infty}\frac{1}{u}\int_0^{A} e^{-\frac{t}{u}}tdt=\lim_{A\to\infty}\frac{1}{u}\left[-ute^{-\frac{t}{u}}\Big|_0^A+\int_0^A ue^{-\frac{t}{u}}dt\right]=\frac{1}{u}\left[0+u^2\right]=u$$

olacağından $S[t]=u$ şeklindedir.

Örnek 3.2.3. a bir reel sabit olmak üzere $f(t)=e^{at}$ fonksiyonunun Sumudu dönüşümü,

$$S\left[e^{at}\right]=\frac{1}{u}\int_0^{\infty} e^{-\frac{t}{u}}e^{at}dt=\lim_{A\to\infty}\frac{1}{u}\int_0^{A} e^{t\left(a-\frac{1}{u}\right)}dt=\lim_{A\to\infty}\left[\frac{1}{u}\frac{e^{t\left(a-\frac{1}{u}\right)}}{\frac{au-1}{u}}\right]_0^A$$

olur. Burada $a-\frac{1}{u}<0$ için yakınsaklık sağlanır. Bu durumda

$$S\left[e^{at}\right]=\lim_{A\to\infty}\left[\frac{1}{u}\frac{e^{t\left(a-\frac{1}{u}\right)}}{\frac{au-1}{u}}\right]_0^A=\lim_{A\to\infty}\left[\frac{e^{t\left(a-\frac{1}{u}\right)}}{au-1}\right]_0^A=0-\frac{1}{au-1}=\frac{1}{1-au}$$

olmaktadır.

Örnek 3.2.4. $f(t)=\cos(at)$ fonksiyonunun Sumudu dönüşümü

$$S\left[f(t)\right]=\frac{1}{u}\int_0^{\infty} e^{\frac{-t}{u}}\cos(at)dt=\frac{1}{u}\lim_{A\to\infty}\left[\cos(at).(-u).e^{\frac{-t}{u}}\Big|_0^A-\int_0^A(-u).e^{\frac{-t}{u}}(-a)\sin(at)dt\right]$$

$$=\frac{1}{u}\lim_{A\to\infty}\left[\cos(aA).(-u).e^{\frac{-A}{u}}+u-au\int_0^A e^{\frac{-t}{u}}\sin(at)dt\right]$$

$$=\frac{1}{u}\lim_{A\to\infty}\left[\cos(aA).(-u).e^{\frac{-A}{u}}+u-au\left(\sin(at)(-u)e^{\frac{-t}{u}}\Big|_0^A-\int_0^A(-u)e^{\frac{-t}{u}}a\cos(at)dt\right)\right]$$

$$=\frac{1}{u}\lim_{A\to\infty}\left[\cos(aA).(-u).e^{\frac{-A}{u}}+u-au\left(\sin(aA)(-u)e^{\frac{-A}{u}}+au\int_0^A e^{\frac{-t}{u}}\cos(at)dt\right)\right]$$

$$=\frac{1}{u}\lim_{A\to\infty}\left[u-a^2u^2\int_0^A e^{\frac{-t}{u}}\cos(at)dt\right]$$

$$=1-a^2u^2S\left[\cos\left(at\right)\right]$$

$$S\left[\cos\left(at\right)\right]=1-a^2u^2S\left[\cos\left(at\right)\right]$$

$$S\left[\cos\left(at\right)\right]=\frac{1}{1+a^2u^2}$$

şeklindedir.

Örnek 3.2.5. $f\left(t\right)=\sin\left(at\right)$ fonksiyonunun Sumudu dönüşümü

$$S\left[f\left(t\right)\right]=\frac{1}{u}\int_0^\infty e^{\frac{-t}{u}}\sin(at)dt=\frac{1}{u}\lim_{A\to\infty}\left[\sin(at).(-u).e^{\frac{-t}{u}}\Big|_0^A-\int_0^A(-u).e^{\frac{-t}{u}}a\cos(at)dt\right]$$

$$=\frac{1}{u}\lim_{A\to\infty}\left[\sin(aA).(-u).e^{\frac{-A}{u}}+au\int_0^A e^{\frac{-t}{u}}\cos(at)dt\right]$$

$$=\frac{1}{u}\lim_{A\to\infty}\left[\sin(aA).(-u).e^{\frac{-A}{u}}+au\left(\cos(at)(-u)e^{\frac{-t}{u}}\Big|_0^A-\int_0^A(-u)e^{\frac{-t}{u}}\left(-a\right)\sin(at)dt\right)\right]$$

$$=\frac{1}{u}\lim_{A\to\infty}\left[\sin(aA).(-u).e^{\frac{-A}{u}}+au\left(\cos(aA)(-u)e^{\frac{-A}{u}}+u-au\int_0^A e^{\frac{-t}{u}}\sin(at)dt\right)\right]$$

$$=\frac{1}{u}\lim_{A\to\infty}\left[au^2-a^2u^2\int_0^A e^{\frac{-t}{u}}\sin(at)dt\right]$$

$$S\left[\sin(at)\right]=au-a^2u^2S\left[\sin(at)\right]$$

$$S\left[\sin(at)\right]=\frac{au}{1+a^2u^2}$$

şeklindedir.

Örnek 3.2.6. $\sinh(at)$ fonksiyonunun Sumudu dönüşümü

$$\sinh(at)=\frac{e^{at}-e^{-at}}{2} \quad \text{ve} \quad S\left[\sinh(at)\right]=\frac{1}{u}\int_0^\infty e^{\frac{-t}{u}}\frac{e^{at}-e^{-at}}{2}dt \quad \text{olur.}$$

$$S\left[\sinh(at)\right]=\frac{1}{2u}\left[\int_0^\infty e^{t\left(\frac{au-1}{u}\right)}dt-\int_0^\infty e^{-t\left(\frac{au+1}{u}\right)}dt\right]=\frac{1}{2u}\left[\lim_{A\to\infty}\frac{e^{t\left(\frac{au-1}{u}\right)}}{\left(\frac{au-1}{u}\right)}\Big|_0^A-\lim_{A\to\infty}\frac{e^{-t\left(\frac{au+1}{u}\right)}}{-\left(\frac{au+1}{u}\right)}\Big|_0^A\right]$$

$-1<au<1$ olmak üzere;

$$S\left[\sinh(at)\right]=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-au}-\frac{1}{1+au}\right]=\frac{au}{1-a^2u^2}$$

$$S\left[\frac{1}{a}\sinh(at)\right]=\frac{u}{1-a^2u^2}$$

şeklindedir.

Örnek 3.2.7. $\cosh(at)$ fonksiyonunun Sumudu dönüşümü

$$\cosh(at)=\frac{e^{at}+e^{-at}}{2} \quad \text{ve} \quad S\left[\cosh(at)\right]=\frac{1}{u}\int_0^\infty e^{\frac{-t}{u}}\frac{e^{at}+e^{-at}}{2}dt \quad \text{olur.}$$

$$S\left[\cosh(at)\right]=\frac{1}{2u}\left[\int_0^\infty e^{t\left(\frac{au-1}{u}\right)}dt+\int_0^\infty e^{-t\left(\frac{au+1}{u}\right)}dt\right]=\frac{1}{2u}\left[\lim_{A\to\infty}\frac{e^{t\left(\frac{au-1}{u}\right)}}{\left(\frac{au-1}{u}\right)}\Big|_0^A+\lim_{A\to\infty}\frac{e^{-t\left(\frac{au+1}{u}\right)}}{-\left(\frac{au+1}{u}\right)}\Big|_0^A\right]$$

$-1 < au < 1$ olmak üzere;

$$S\left[\cosh(at)\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-au} + \frac{1}{1+au}\right] = \frac{1}{1-a^2u^2}$$

eşitliği gerçeklenir.

3.3. Sumudu Dönüşümünün Varlığı

Teorem 3.3. $f(t)$ fonksiyonu $[0,\infty)$ aralığında parçalı sürekli ve $t > t_0$ için $\alpha - üstel$ mertebeden bir fonksiyon olsun. $\frac{1}{u} > \alpha$ olmak üzere $S\left[f(t)\right]$ mevcuttur.

İspat: $\frac{1}{u}\int_0^\infty e^{-\frac{t}{u}} f(t)\,dt$ integralinin $\frac{1}{u} > \alpha$ için yakınsak olduğu gösterilmelidir. Bunun için integral,

$$\frac{1}{u}\int_0^\infty e^{-\frac{t}{u}} f(t)\,dt = \frac{1}{u}\int_0^{t_0} e^{-\frac{t}{u}} f(t)\,dt + \frac{1}{u}\int_{t_0}^\infty e^{-\frac{t}{u}} f(t)\,dt$$

şeklinde parçalanır. $e^{-\frac{t}{u}} f(t)$ ifadesi $[0,t_0]$aralığında parçalı sürekli olduğundan sağ taraftaki birinci integral mevcut yani yakınsaktır. Buna göre ikinci integralin yakınsak olduğu gösterilmelidir. Has olmayan integraller için karşılaştırma kuralı kullanılır.

$f(t)$ fonksiyonu $\alpha - üstel$ mertebeden olduğu için $t \geq t_0$ için $\left|f(t)\right| \leq Me^{\alpha t}$ ve tüm $t \geq t_0$ değerleri için,

$$\left|e^{-\frac{t}{u}} f(t)\right| = e^{-\frac{t}{u}}\left|f(t)\right| \leq Me^{-\frac{t}{u}} e^{\alpha t}$$

yazılabilir. $\frac{1}{u} > \alpha$ için,

$$\int_{t_0}^{\infty} Me^{t\left(\alpha-\frac{1}{u}\right)}dt = \int_{t_0}^{\infty} Me^{-\left(\frac{1}{u}-\alpha\right)t}dt = M\int_{t_0}^{\infty} e^{-\left(\frac{1}{u}-\alpha\right)t}dt = M\,\frac{e^{-\left(\frac{1}{u}-\alpha\right)t_0}}{\frac{1}{u}-\alpha} < \infty$$

olur böylece $t \geq t_0$ için $\left|e^{-\frac{t}{u}}f(t)\right| \leq Me^{-\frac{t}{u}}e^{\alpha t} = Me^{-\left(\frac{1}{u}-\alpha\right)t}$ olduğundan ve daha büyük bir fonksiyonun has olmayan integrali $\frac{1}{u} > \alpha$ için yakınsak olduğundan karşılaştırma kuralı gereğince,

$\int_{t_0}^{\infty} e^{-\frac{t}{u}}f(t)\,dt$ integrali $\frac{1}{u} > \alpha$ için yakınsaktır. Böylece her iki integral mevcut olduğundan $S\left[f(t)\right]$ mevcuttur.

3.4. Sumudu Dönüşümünün Özellikleri

Teorem 3.4.1. $f(t) \in A$ fonksiyonunun Laplace dönüşümü $F(s)$, Sumudu dönüşümü $G(u)$ olmak üzere,

$$G(u) = \frac{F\left(\frac{1}{u}\right)}{u} \tag{3.4}$$

olacak şekilde bir bağıntı vardır [15].

İspat: $f(t)$ fonksiyonunun Laplace dönüşümü

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\,dt \tag{3.5}$$

olup (3.5) de $s = \frac{1}{u}$ alınırsa sağ taraftaki integral kısmın $F\left(\frac{1}{u}\right)$ olduğu açıktır .

$$G(u)=\frac{1}{u}\int_{0}^{\infty}e^{\frac{-t}{u}}f(t)dt=\frac{1}{u}F\left(\frac{1}{u}\right)$$

$$G(u)=\frac{F\left(\frac{1}{u}\right)}{u}$$

eşitliği gerçeklenir.

Sonuç 3.4.1. $G(1)=F(1)$.

$u=s=1$ alınırsa ve sırasıyla (3.3) ve (2.5) de yerine yazılırsa

$$G(1)=S[1]=\frac{1}{1}\int_{0}^{\infty}e^{\frac{-t}{1}}.1.dt=\lim_{A\to\infty}\int_{0}^{A}e^{-t}dt=\lim_{A\to\infty}-e^{-t}\Big|_{0}^{A}=\lim_{A\to\infty}-e^{-A}-(-1)=1$$

$$F(1)=L\{1\}=\int_{0}^{\infty}e^{-1.t}.1.dt=\lim_{A\to\infty}\int_{0}^{A}e^{-t}dt=\lim_{A\to\infty}-e^{-t}\Big|_{0}^{A}=\lim_{A\to\infty}-e^{-A}-(-1)=1$$

olduğundan, eşitliğe ulaşılır [15].

Sonuç 3.4.2. $x>0$ ve $u=1$ olmak üzere t^{x-1} fonksiyonunun Sumudu dönüşümü

$$G(u)=S\left[t^{x-1}\right]=\Gamma(x)u^{x-1} \tag{3.6}$$

şeklindedir.

İspat: $x>0$ için $\Gamma(x)=\int_{0}^{\infty}t^{x-1}e^{-t}dt$

dir ve bu ifadenin $s=1$ için t^{x-1} fonksiyonunun Laplace dönüşümü olduğu görülür.

$$L\left\{t^{x-1}\right\}=\Gamma(x) \tag{3.7}$$

dir ve $u = s = 1$ için Sumudu ve Laplace dönüşümlerinin eşitliği sağlanmalıdır. Dolayısıyla integralin her iki tarafı $u = 1$ olmak üzere u^{x-1} ile çarpılırsa;

$$\Gamma(x)u^{x-1} = \int_0^\infty u^{x-1}t^{x-1}e^{-t}dt = \int_0^\infty (ut)^{x-1} e^{-t}dt$$

olur . Sağ tarafın t^{x-1} fonksiyonunun Sumudu dönüşümü olduğu görülür [15].

Sonuç 3.4.3. $f(t)$ fonksiyonunun Sumudu dönüşümü ve Laplace dönüşümü sırasıyla $G(u)$ ve $F(s)$ olmak üzere,

$$F(s) = \frac{G(1/s)}{s} \tag{3.8}$$

dir.

İspat: Teorem 3.4.1 de $u = \frac{1}{s}$ alınarak bu eşitliğe ulaşılır. Dolayısıyla bu iki sonuç sayesinde iki dönüşümden birisi bilindiği takdirde diğer dönüşüme ulaşılabilir [15].

Örnek 3.4.1. $\cos wt$ fonksiyonunun Laplace dönüşümü $F(s) = \frac{s}{s^2 + w^2}$ dir. $\frac{1}{u} = s$ alınırsa,

$$G(u) = S[\cos wt] = \frac{F\left(\frac{1}{u}\right)}{u} = \frac{1}{1 + w^2u^2}$$

elde edilir.

Teorem 3.4.2. Sumudu dönüşümü lineerdir. C_1, C_2 keyfi sabitler ve f_1, f_2 de Sumudu dönüşümü mevcut iki fonksiyon ise

$$S[C_1 f_1(t) + C_2 f_2(t)] = C_1 S[f_1(t)] + C_2\,\mathrm{S}[f_2(\mathrm{t})] \tag{3.9}$$

şeklindedir.

İspat: İntegral özelliklerinden,

$$S[C_1 f_1(t)+C_2 f_2(t)]=\frac{1}{u}\int_0^\infty e^{\frac{-t}{u}}\left(C_1 f_1(t)+C_2 f_2(t)\right)\mathrm{dt}$$

$$=\frac{1}{u}\int_0^\infty e^{\frac{-t}{u}} C_1 f_1(t)\,\mathrm{dt}+\frac{1}{u}\int_0^\infty e^{\frac{-t}{u}} C_2 f_2(t)\,\mathrm{dt}$$

$$=C_1\frac{1}{u}\int_0^\infty e^{\frac{-t}{u}} f_1(t)\,\mathrm{dt}+C_2\frac{1}{u}\int_0^\infty e^{\frac{-t}{u}} f_2(t)\,\mathrm{dt}$$

$$=C_1 S\left[f_1(t)\right]+C_2 S\left[f_2(t)\right]$$

şeklinde Sumudu dönüşümünün lineer olduğu ispatlanmış olur.

Teorem 3.4.3. $f(t)$ fonksiyonunun Sumudu dönüşümü $G(u)$ olmak üzere

$$S\left[e^{at}f(t)\right]=\frac{1}{1-au}G\left(\frac{u}{1-au}\right) \qquad (3.10)$$

geçerlidir.

İspat: $S\left[e^{at}f(t)\right]=\frac{1}{u}\int_0^\infty e^{-\frac{t}{u}}e^{at}f(t)\,dt=\frac{1}{u}\int_0^\infty e^{-t\left(\frac{1}{u}-a\right)}f(t)\,dt$

$t\left(\frac{1-au}{u}\right)=w$ dönüşümü yapılırsa $t=\frac{uw}{1-au}$ ve $dt\left(\frac{1-au}{u}\right)=dw$, $dt=\left(\frac{u}{1-au}\right)dw$

olacaktır.

$$S\left[e^{at}f(t)\right]=\frac{1}{u}\int_0^\infty e^{-w}f\left(\frac{uw}{1-au}\right)\left(\frac{u}{1-au}\right)dw=\frac{1}{1-au}\int_0^\infty e^{-w}f\left(\frac{uw}{1-au}\right)dw$$

$$=\frac{1}{1-au}G\left(\frac{u}{1-au}\right)$$

şeklindedir [15].

Örnek 3.4.2. $f(t)=\cos t$ olmak üzere $\mathrm{S}[\mathrm{e}^{-3t}\cos t]$ değerini bulalım.

$$\mathrm{S}[\mathrm{e}^{-3t}\cos t]=\frac{1}{u}\int_0^\infty e^{\frac{-t}{u}}e^{-3t}\cos t dt=\frac{1}{u}\int_0^\infty e^{\left(\frac{-1}{u}-3\right)t}\cos t dt$$

$$=\frac{1}{u}\lim_{A\to\infty}\left\{\cos t.\frac{1}{\left(\frac{-1}{u}-3\right)}e^{\left(\frac{-1}{u}-3\right)t}\Big|_0^A-\int_0^A\frac{1}{\left(\frac{-1}{u}-3\right)}e^{\left(\frac{-1}{u}-3\right)t}.(-\sin t)dt\right\}$$

$$=\frac{1}{u}\lim_{A\to\infty}\left\{\frac{1}{\left(\frac{1}{u}+3\right)}-\frac{1}{\left(\frac{1}{u}+3\right)}\left\{\sin t.\frac{1}{\left(\frac{-1}{u}-3\right)}e^{\left(\frac{-1}{u}-3\right)t}\Big|_0^A-\int_0^A\frac{1}{\left(\frac{-1}{u}-3\right)}e^{\left(\frac{-1}{u}-3\right)t}.\mathrm{cost}\,dt\right\}\right\}$$

$$\frac{1}{u}\int_0^\infty e^{\left(\frac{-1}{u}-3\right)t}\cos t dt=\frac{1}{u}\left\{\frac{1}{\left(\frac{1}{u}+3\right)}-\frac{1}{\left(\frac{1}{u}+3\right)^2}\int_0^\infty e^{\left(\frac{-1}{u}-3\right)t}.\mathrm{cost}\,dt\right\}$$

$$\left(1+\frac{1}{\left(\frac{1}{u}+3\right)^2}\right)\frac{1}{u}\int_0^\infty e^{\left(\frac{-1}{u}-3\right)t}\cos t dt=\frac{1}{1+3u}$$

düzenlenirse,

$$\frac{1}{u}\int_0^\infty e^{\left(\frac{-1}{u}-3\right)t}\cos t dt=\frac{1+3u}{(1+3u)^2+u^2}$$

ifadesine ulaşılır. Ya da, özellik uygulandığında da,

$$S[f(t)]=S[\cos t]=\mathrm{G(u)}=\frac{1}{1+u^2}$$

olmak üzere**,**

$$\mathrm{S}[\mathrm{e}^{-3t}\mathrm{cost}]=\frac{1}{1+3u}G\left(\frac{u}{1+3u}\right)$$

olacağından,

$$S[e^{-3t}\cos t]=\frac{1}{1+3u}\frac{1}{1+\left(\frac{u}{1+3u}\right)^2}=\frac{1+3u}{(1+3u)^2+u^2}$$

eşitliğine ulaşılır.

Teorem 3.4.4. $f(t)$ fonksiyonunun Sumudu dönüşümü ve Laplace dönüşümü sırasıyla $G(u)$ ve $F(s)$ olmak üzere,

$$h(t)=\begin{cases}0, 0<t<a\\ f(t-a), t>a\end{cases}$$

fonksiyonunun Sumudu dönüşümü $S\left[h(t)\right]=e^{-\frac{a}{u}}G(u)$ dur.

İspat: $S\left[h(t)\right]=\frac{1}{u}\int_0^a e^{-\frac{t}{u}}.0.dt+\frac{1}{u}\int_a^\infty e^{-\frac{t}{u}}f(t-a)dt$

dir. Burada $t-a=w$ dönüşümü yapılırsa, $dt=dw$ olur.

$$S\left[h(t)\right]=\frac{1}{u}\int_a^\infty e^{-\frac{t}{u}}f(t-a)dt=\frac{1}{u}\int_a^\infty e^{-\frac{(w+a)}{u}}f(w)dw=e^{-\frac{a}{u}}\frac{1}{u}\int_a^\infty e^{-\frac{w}{u}}f(w)dw$$

$a=0$ kabul ettiğimizde $\frac{1}{u}\int_0^\infty e^{-\frac{w}{u}}f(w)dw=G(u)$

olacağından,

$$S\left[h(t)\right]=e^{-\frac{a}{u}}G(u)$$

gerçeklenir.

Ayrıca $L\{h(t)\}=e^{-as}F(s)$

olduğundan Teorem 3.4.1 gereğince,

$$S\left[h(t)\right]=e^{-\frac{a}{u}}\frac{F\left(\frac{1}{u}\right)}{u}=e^{-\frac{a}{u}}G(u)$$

eşitliği gerçeklenir.

Teorem 3.4.5. $f(t)$ fonksiyonunun Laplace dönüşümü ve Sumudu dönüşümü sırasıyla $F(s)$ ve $G(u)$ olmak üzere,

$$S\left[f(at)\right]=G(au) \tag{3.11}$$

şeklindedir.

İspat: $S\left[f(at)\right]=\int_0^\infty f(uat)e^{-t}dt$ integralinde $ua=w$ dönüşümü yapılırsa;

$$S\left[f(at)\right]=\int_0^\infty f(wt)e^{-t}dt=G(w)=G(au)$$

eşitliğine ulaşılır [15].

Ayrıca Sumudu dönüşümünün Laplace dönüşümü ile olan ilişkisinden yararlanılırsa Teorem 3.4.1 gereğince,

$$L\{f(at)\}=\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$$

olduğu için,

$$S\left[f(at)\right]=\frac{1}{a}\frac{F(1/au)}{u}=\frac{F(1/au)}{au}$$

olur ve $au=w$ dönüşümü yapılırsa,

$$S\left[f(at)\right]=\frac{F(1/w)}{w}=G(w)=G(au)$$

eşitliği gerçeklenir.

Teorem 3.4.6. $f(t)$ fonksiyonu $[0,\infty)$ aralığında sürekli, üstel mertebeden ve $f'(t)$ $[0,\infty)$ aralığında parçalı sürekli olsun. $\frac{1}{u} > \alpha$ için

$$S[f'(t)] = \frac{S[f(t)] - f(0)}{u} \tag{3.12}$$

şeklindedir.

İspat: $S[f'(t)] = \frac{1}{u}\int_0^\infty e^{\frac{-t}{u}} f'(t)\,dt = \lim_{R\to\infty}\frac{1}{u}\int_0^R e^{\frac{-t}{u}} f'(t)\,dt$

yazılabilir. $f'(t)$ fonksiyonu her sonlu $0 \le t \le R$ kapalı aralığında en çok sonlu sayıda süreksizlik noktalarına sahiptir. Bu noktalar $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n < R$ olsun. Bu takdirde,

$$\int_0^R \frac{1}{u} e^{\frac{-t}{u}} f'(t)\,dt = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_{0+\varepsilon}^{t_1-\varepsilon} \frac{1}{u} e^{\frac{-t}{u}} f'(t)\,dt + \int_{t_1+\varepsilon}^{t_2-\varepsilon} \frac{1}{u} e^{\frac{-t}{u}} f'(t)\,dt + \dots + \int_{t_n+\varepsilon}^{R-\varepsilon} \frac{1}{u} e^{\frac{-t}{u}} f'(t)\,dt\right]$$

yazılabilir. Sağ taraftaki integrallerin her birinde integrand süreklidir. Bundan dolayı her birine kısmi integrasyon yöntemi uygulanabilir ve eşitliğin sağ tarafı

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{u}\left[e^{\frac{-t}{u}} f(t)\Big|_{0+\varepsilon}^{t_1-\varepsilon} + \frac{1}{u}\int_{0+\varepsilon}^{t_1-\varepsilon} e^{\frac{-t}{u}} f(t)\,dt + \dots + e^{\frac{-t}{u}} f(t)\Big|_{t_n+\varepsilon}^{R-\varepsilon} + \frac{1}{u}\int_{t_n+\varepsilon}^{R-\varepsilon} e^{\frac{-t}{u}} f(t)\,dt\right]$$

halini alır ve bu ifadede gerekli sadeleştirmeler yapılırsa aşağıdaki ifadeye dönüşür.

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{u}\left[-f(0) + \frac{1}{u}\left\{\int_{0+\varepsilon}^{t_1-\varepsilon} e^{\frac{-t}{u}} f(t)\,dt + \int_{t_1+\varepsilon}^{t_2-\varepsilon} e^{\frac{-t}{u}} f(t)\,dt + \dots + \int_{t_n+\varepsilon}^{R-\varepsilon} e^{\frac{-t}{u}} f(t)\,dt\right\} + e^{\frac{-R}{u}} f(R)\right]$$

bu ifadede gerekli düzenleme yapılarak eşitlik yeniden yazıldığında,

$$\int_0^R \frac{1}{u} e^{\frac{-t}{u}} f'(t)\,dt = \frac{1}{u}\left[-f(0) + \frac{1}{u}\int_0^R e^{\frac{-t}{u}} f(t)\,dt + e^{\frac{-R}{u}} f(R) \right]$$

halini alır. f fonksiyonu $\alpha - \ddot{u}stel$ mertebeden olduğundan $\frac{1}{u} > \alpha$ için,

$\lim\limits_{R\to\infty} e^{\frac{-R}{u}} f(R) = 0$ ve $\lim\limits_{R\to\infty} \frac{1}{u}\int_0^R e^{\frac{-t}{u}} f(t)\,dt = S[f(t)]$ olacaktır. Böylece,

$$S[f'(t)] = \frac{S[f(t)] - f(0)}{u}$$

eşitliğine ulaşılır. Daha yüksek mertebeden türevlere devam edilirse,

$$S[f''(t)] = S[(f'(t))'] = \frac{S[f'(t)] - f'(0)}{u} = \frac{S[f(t)]}{u^2} - \frac{f(0)}{u^2} - \frac{f'(0)}{u}$$

$$S[f'''(t)] = S[(f''(t))'] = \frac{S[f''(t)] - f''(0)}{u} = \frac{S[f(t)]}{u^3} - \frac{f(0)}{u^3} - \frac{f'(0)}{u^2} - \frac{f''(0)}{u}$$

olacaktır. Bunu genelleştirirsek,

$$S\left[f^{(n)}(t)\right] = \frac{S[f(t)]}{u^n} - \frac{f(0)}{u^n} - \frac{f'(0)}{u^{n-1}} - \ldots - \frac{f^{(n-1)}(0)}{u}$$

sonucuna ulaşılır. Sumudu dönüşümü ile Laplace dönüşümü arasındaki bağıntı yardımı ile de türev fonksiyonunun Sumudu dönüşümü hesaplanabilir.

Teorem 3.4.7. $F(s)$ ve $G(u)$ sırasıyla $f(t)$ fonksiyonunun Laplace ve Sumudu dönüşümleri olmak üzere $F_1(s)$ ve $G_1(u)$ $f(t)$ fonksiyonunun birinci türevinin sırasıyla Laplace ve Sumudu dönüşümleri olsun. Buna göre,

$$G_1(u) = \frac{G(u) - f(0)}{u}$$

şeklindedir.

İspat: $f(t)$ fonksiyonunun türevinin Laplace dönüşümü

$$F_1(s) = sF(s) - f(0)$$

$$G_1(u) = \frac{F_1(1/u)}{u} = \frac{F(1/u)/u - f(0)}{u}$$

$$G_1(u) = \frac{G(u) - f(0)}{u}$$

olacaktır [15].

Örnek 3.4.3. $\sin t$ fonksiyonunun türevi $\cos t$ dir dolayısıyla,

$S[\sin t] = \dfrac{u}{1+u^2}$ ve $S[\cos t] = \dfrac{1}{1+u^2}$ olacaktır.

Teorem 3.4.8. $f(t)$ fonksiyonunun $n.$ türevi $f^{(n)}(t)$ olsun. $G_n(u)$, $n \geq 1$ için $f^{(n)}(t)$ nin Sumudu dönüşümü olmak üzere,

$$G_n(u) = \frac{G(u)}{u^n} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{u^{n-k}} \tag{3.13}$$

geçerlidir [15].

İspat: Tümevarım yöntemi kullanılır. $n = 1$ için $G_1(u) = S[f'(t)] = \dfrac{G(u)}{u} - \dfrac{f(0)}{u}$ olacaktır. n için doğruluğunu kabul ederek $n+1$ için ispatlamaya çalışırsak,

$$G_{n+1}(u) = S\left[\left(f^{(n)}(t)\right)'\right] = \frac{S\left[f^{(n)}(t)\right] - f^{(n)}(0)}{u}$$

$$S\left[f^{(n)}(t)\right] = G_n(u)$$

olup yerine yazdığımızda,

$$G_{n+1}(u)=\frac{G_n(u)-f^{(n)}(0)}{u}=\frac{G(u)}{u^{n+1}}-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{u^{n+1-k}}$$

olur ve dolayısıyla ispat tamamlanır.

Ayrıca aşağıdaki teorem yardımıyla da Sumudu dönüşümü ve Laplace dönüşümü arasındaki ilişkiden yüksek mertebeden fonksiyon türevlerinin Sumudu dönüşümüne ulaşılabilir.

Teorem 3.4.9. $n \geq 1$ olmak üzere $f(t)$ fonksiyonunun n. türevi $f^{(n)}(t)$ olsun. $G_n(u)$ ve $F_n(s)$ $f^{(n)}(t)$ fonksiyonunun sırasıyla Sumudu ve Laplace dönüşümleri olmak üzere ;

$$G_n(u)=\frac{G(u)}{u^n}-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(0)}{u^{n-k}}$$

geçerlidir [15].

İspat: $f^{(n)}(t)$ fonksiyonunun Laplace dönüşümü tanımından;

$$F_n(s)=s^nF(s)-\sum_{k=0}^{n-1}s^{n-(k+1)}f^{(k)}(0)$$

$$F_n\left(\frac{1}{u}\right)=\frac{F(1/u)}{u^n}-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(0)}{u^{n-(k+1)}}$$

$G_k(u)=F_k(1/u)/u$ olmak üzere $0 \leq k \leq n$ için,

$$G_n(u)=\frac{G(u)}{u^n}-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(0)}{u^{n-k}}=\frac{1}{u^n}\left[G(u)-\sum_{k=0}^{n-1}u^kf^{(k)}(0)\right]$$

elde edilir [15].

Örnek 3.4.4. Verilmiş bir $f(t)$ fonksiyonunun ikinci türevinin sumudu dönüşümü

$$G_2(u) = S\left[f''(t)\right] = \frac{G(u)}{u^2} - \frac{f(0)}{u^2} - \frac{f'(0)}{u}$$

olacaktır ve bunu $\sin t$ fonksiyonu için uygularsak,

$$S\left[f''(t)\right] = S\left[-\sin t\right] = -G(u)$$

olması gerekecektir.

$$G_2(u) = \frac{G(u)}{u^2} - \frac{f(0)}{u^2} - \frac{f'(0)}{u} = \frac{G(u)}{u^2} - \frac{1}{u}$$

$$-G(u) = \frac{G(u)}{u^2} - \frac{1}{u}$$

eşitliğine ulaşırız ki burada gerekli sadeleştirmeler ile

$$G(u) = \frac{u}{1+u^2}$$

olacaktır.

Teorem 3.4.10. $S[f(t)] = G(u)$ olmak üzere,

$$S[tf(t)] = u^2 \frac{d}{du} G(u) + uG(u) \tag{3.14}$$

geçerlidir [17].

İspat:

$$\frac{dG(u)}{du} = G'(u) = \frac{d}{du}\int_0^\infty \frac{1}{u} e^{\frac{-t}{u}} f(t)dt = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial u}\frac{1}{u} e^{\frac{-t}{u}} f(t)dt = \int_0^\infty \frac{1}{u^3} e^{\frac{-t}{u}} (tf(t))dt - \int_0^\infty \frac{1}{u^2} e^{\frac{-t}{u}} f(t)dt$$

$$\frac{dG(u)}{du} = \frac{1}{u^2} S[tf(t)] - \frac{1}{u} S[f(t)]$$

elde edilir ve bu eşitlik düzenlenirse,

$$S[tf(t)] = u^2 \frac{d}{du} G(u) + uG(u)$$

eşitliği gerçeklenir.

Teorem 3.4.11. $S[f(t)] = G(u)$ olmak üzere,

$$S[t^2 f(t)] = u^4 \frac{d^2}{du^2} G(u) + 4u^3 \frac{d}{du} G(u) + 2u^2 G(u) \tag{3.15}$$

geçerlidir [17].

İspat: $\frac{d^2}{du^2} G(u) = G''(u) = \frac{d}{du^2} \int_0^\infty \frac{1}{u} e^{\frac{-t}{u}} f(t)dt = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial u^2} \frac{1}{u} e^{\frac{-t}{u}} f(t)dt = \frac{d}{du} G'(u)$

$$= \frac{d}{du} [\int_0^\infty \frac{1}{u^3} e^{\frac{-t}{u}} (tf(t))dt - \int_0^\infty \frac{1}{u^2} e^{\frac{-t}{u}} f(t)dt] = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial u} \frac{1}{u^3} e^{\frac{-t}{u}} (tf(t))dt - \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial u} \frac{1}{u^2} e^{\frac{-t}{u}} f(t)dt$$

$$= \int_0^\infty \frac{-3}{u^4} e^{\frac{-t}{u}} (tf(t))dt + \int_0^\infty \frac{t}{u^5} e^{\frac{-t}{u}} (tf(t))dt + \int_0^\infty \frac{2}{u^3} e^{\frac{-t}{u}} f(t)dt - \int_0^\infty \frac{1}{u^4} e^{\frac{-t}{u}} tf(t)dt$$

$$= \frac{2}{u^2} S[f(t)] - \frac{4}{u^3} S[tf(t)] + \frac{1}{u^4} S[t^2 f(t)]$$

$S[tf(t)]$ yerine Teorem 3.4.10 daki eşiti yazılırsa,

$$\frac{d^2}{du^2} G(u) = \frac{2}{u^2} S[f(t)] - \frac{4}{u^3} (u^2 \frac{d}{du} G(u) + uG(u)) + \frac{1}{u^4} S[t^2 f(t)]$$

eşitliğine ulaşılır. Böylece,

$$\frac{d^2}{du^2} G(u) = \frac{2}{u^2} G(u) - \frac{4}{u} \frac{d}{du} G(u) - \frac{4}{u^2} G(u) + \frac{1}{u^4} S[t^2 f(t)]$$

elde edilir ve $S[t^2 f(t)]$ yalnız bırakılırsa,

$$S[t^2 f(t)] = u^4 \frac{d^2}{du^2} G(u) + 4u^3 \frac{d}{du} G(u) + 2u^2 G(u)$$

gerçeklenir.

Teorem 3.4.12. $f(t)$ fonksiyonunun Sumudu dönüşümü $G(u)$ olsun. $G^{(k)}(u)$, $G(u)$ nun u ya göre k. türevi olmak üzere, $t^n f(t)$ fonksiyonunun Sumudu dönüşümü

$$S\left[t^n f(t)\right] = u^n \sum_{k=0}^{n} a_k^n u^k G^{(k)}(u) \tag{3.16}$$

$a_0^n = n!, a_n^n = 1, a_1^n = n!n, a_{n-1}^n = n^2$ ve $k = 2,3,...,n-2$

$a_k^n = a_{k-1}^{n-1} + (n+k)a_k^{n-1}$

şeklindedir [16].

İspat: $f(t)$ fonksiyonunun Sumudu dönüşümü $G(u)$ olduğuna göre $a_0^0 = 1$. Ayrıca, Teorem 3.4.10 gereğince $tf(t)$ fonksiyonunun Sumudu dönüşümü $uG(u) + u^2 G'(u)$ olduğundan $a_0^1 = 1, a_1^1 = 1$ dir. $W(u) = S\left[t^n f(t)\right]$ şeklinde belirlenirse Teorem 3.4.10 ve katsayılar vasıtasıyla;

$$S\left[t^{n+1} f(t)\right] = S\left[t\left[t^n f(t)\right]\right] = uW(u) + u^2 \frac{dW(u)}{du}$$

$$= uW(u) + u^2 W'(u) = u^{n+1} \sum_{k=0}^{n} a_k^n u^k G^{(k)}(u) + u^2 \frac{d}{du} \sum_{k=0}^{n} a_k^n u^{n+k} G^{(k)}(u)$$

$$= u^{n+1} \sum_{k=0}^{n} a_k^n u^k G^{(k)}(u) + u^2 \sum_{k=0}^{n} a_k^n \left[(n+k)u^{n+k-1} G^{(k)}(u) + u^{n+k} G^{(k+1)}(u)\right]$$

$$= u^{n+1} \sum_{k=0}^{n} a_k^n u^k G^{(k)}(u) + u^{n+1} \sum_{k=0}^{n} a_k^n \left[(n+k)u^k G^{(k)}(u) + u^{k+1} G^{(k+1)}(u)\right]$$

$$= u^{n+1} \sum_{k=0}^{n} (n+k+1) a_k^n u^k G^{(k)}(u) + u^{n+1} \sum_{k=0}^{n} a_k^n u^{k+1} G^{(k+1)}(u)$$

$k < 0$ ya da $k > n$ için $a_k^n = 0$ olup son eşitliği yeniden düzenlersek;

$$S\left[t^{n+1} f(t)\right] = u^{n+1} \sum_{k=0}^{n+1} (n+k+1) a_k^n u^k G^{(k)}(u) + u^{n+1} \sum_{k=0}^{n+1} a_{k-1}^n u^k G^{(k)}(u)$$

$$= u^{n+1} \sum_{k=0}^{n+1} \left[(n+k+1) a_k^n + a_{k-1}^n\right] u^k G^{(k)}(u) = u^{n+1} \sum_{k=0}^{n+1} a_k^{n+1} u^k G^{(k)}(u)$$

şeklinde ispat tamamlanmış olur [16].

Teorem 3.4.12 de yer alan a_k^n katsayılarını belirlemek için e^t fonksiyonunun Sumudu dönüşümü alınırsa,

$S\left[e^t\right]=G(u)=\dfrac{1}{1-u}$ ve Sumudu dönüşümünün türevleri u $(-1,1)$ aralığında olmak üzere,

$G^{(k)}(u)=\dfrac{k!}{(1-u)^{1+k}}$ olur ve $n\geq 0$ için katsayılar ile birlikte

$$S\left[t^n e^t\right]=u^n\sum_{k=0}^{n}k!a_k^n\frac{u^k}{(1-u)^{1+k}} \tag{3.17}$$

haline dönüşür. Aşağıdaki teorem vasıtasıyla ulaşacağımız sonuca dayanarak katsayılar hesaplanabilir.

Teorem 3.4.13. $f(t)$ fonksiyonunun Sumudu dönüşümü $G(u)$ ve u $(-1,1)$ aralığında olmak üzere,

$$S\left[e^t f(t)\right]=\frac{G(u/(1-u))}{1-u} \tag{3.18}$$

gerçeklenir [17].

İspat: $S\left[e^t f(t)\right]=\int_0^\infty f(ut)e^{ut}e^{-t}dt=\int_0^\infty f(ut)e^{-(1-u)t}dt$

olur ve $w=(1-u)t$ değişken dönüşümü yapılırsa $dw=(1-u)dt$ olur. Böylece,

$$S\left[e^t f(t)\right]=\frac{1}{1-u}\int_0^\infty f\left(u\frac{w}{1-u}\right)e^{-w}dw=\frac{G(u/(1-u))}{1-u}$$

gerçeklenir [17].

Sonuç 3.4.4. $n\geq 0$ için Teorem 3.4.12 deki a_k^n katsayıları $\sum_0^n k!a_k^n=n!2^n$ eşitliğini sağlar.

$n\geq 0$ ve u $(-1,1)$ aralığında olmak üzere,

$S\left[t^n\right]=G(u)=n!u^n$

olduğundan

$$S\left[t^n e^t\right] = n!u^n\left(1-u\right)^{-(1+n)} \tag{3.19}$$

eşitliği sağlanır.

(3.17) ve (3.19) ifadelerinin eşit olması gerektiğinden,

$$S\left[t^n e^t\right] = u^n \sum_{k=0}^{n} k!a_k^n \frac{u^k}{\left(1-u\right)^{1+k}} = n!u^n\left(1-u\right)^{-(1+n)}$$

eşitliği elde edilir.

$a_n^n = 1$ olduğundan eşitlik aşağıdaki şekilde düzenlenebilir.

$$n!u^n\left(1-u\right)^{-(1+n)} = u^n \sum_{k=0}^{n} k!a_k^n \frac{u^k}{\left(1-u\right)^{1+k}}$$

$$n!\left(1-u\right)^{-(1+n)} = \sum_{k=0}^{n} k!a_k^n \frac{u^k}{\left(1-u\right)^k\left(1-u\right)}$$

$$n!\left(1-u\right)^{-n} = \sum_{k=0}^{n} k!a_k^n \left(\frac{u}{1-u}\right)^k = \sum_{k=0}^{n-1} k!a_k^n \left(\frac{u}{1-u}\right)^k + n!\left(\frac{u}{1-u}\right)^n$$

$$n!\left(\frac{1-u^n}{\left(1-u\right)^n}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} k!a_k^n \left(\frac{u}{1-u}\right)^k$$

$u = \dfrac{1}{2}$ alınırsa, $n \geq 0$ için a_k^n katsayıları,

$$\sum_{0}^{n} k!a_k^n = n!2^n \tag{3.20}$$

eşitliğini sağlar.

Sonuç 3.4.5. Teorem 3.4.12 deki $n \geq k \geq 0$ olmak üzere a_k^n katsayıları

$$a_k^n = C_k^n P_{n-k}^n \tag{3.21}$$

eşitliğini sağlar [17].

İspat: $\sum_{k=0}^{n} k!a_k^n = n!2^n = n!\sum_{k=0}^{n} C_k^n = \sum_{k=0}^{n} n!C_k^n$

$$\sum_{k=0}^{n} k!a_k^n = \sum_{k=0}^{n} n!C_k^n$$

$$a_k^n = \frac{n!C_k^n}{k!} = C_k^n P_{n-k}^n$$

gerçeklenir [17].

Teorem 3.4.14. $f(t)$ fonksiyonunun Sumudu dönüşümü $G(u)$ olsun. $f^{(n)}(t)$ $f(t)$ nin t ye göre n. türevi; $G^{(n)}(u)$, $G(u)$ nun u ya göre $n.$ türevi olmak üzere $t^n f^{(n)}(t)$ fonksiyonunun Sumudu dönüşümü,

$$S\left[t^n f^{(n)}(t)\right] = u^n G^{(n)}(u) \tag{3.22}$$

şeklindedir [16].

İspat: $f(t)$ fonksiyonunun Sumudu dönüşümü $G(u)$ olmak üzere,

$$G(u) = \int_0^\infty f(ut)e^{-t}dt. \quad n = 1,2,3,... \text{ için}$$

$$G^{(n)}(u) = \int_0^\infty \frac{d^n}{du^n} f(ut)e^{-t}dt = \int_0^\infty t^n f^{(n)}(ut)e^{-t}dt$$

$$= \frac{1}{u^n}\int_0^\infty (ut)^n f^{(n)}(ut)e^{-t}dt = \frac{1}{u^n} S\left[t^n f^{(n)}(t)\right]$$

$$S\left[t^n f^{(n)}(t)\right] = u^n G^{(n)}(u)$$

elde edilir.

Teorem 3.4.15. $f(t) \in A$ olmak üzere $\lim_{t\to 0} f(t)$ veya $\lim_{t\to\infty} f(t)$ limitinin var olduğu kabul edilirse,

$$\lim_{u\to 0} G(u) = \lim_{t\to 0} f(t) \tag{3.23}$$

$$\lim_{u\to\infty} G(u) = \lim_{t\to\infty} f(t) \tag{3.24}$$

olacaktır.

İspat: $\lim_{u\to 0} G(u) = \lim_{u\to 0}\int_0^\infty f(ut)e^{-t}dt = \int_0^\infty \left[\lim_{u\to 0} f(ut)\right]e^{-t}dt = \int_0^\infty \left[\lim_{w\to 0} f(w)\right]e^{-t}dt$

$$= \lim_{w \to 0} f(w) \int_0^\infty e^{-t} dt = \lim_{w \to 0} f(w) .$$

$$\lim_{u \to \infty} G(u) = \lim_{u \to \infty} \int_0^\infty f(ut) e^{-t} dt = \int_0^\infty \left[\lim_{u \to \infty} f(ut) \right] e^{-t} dt = \int_0^\infty \left[\lim_{w \to \infty} f(w) \right] e^{-t} dt$$

$$= \lim_{w \to \infty} f(w) \int_0^\infty e^{-t} dt = \lim_{w \to \infty} f(w)$$

gerçeklenir [15].

Benzer şekilde;

$$\lim_{u \to -\infty} G(u) = \lim_{t \to -\infty} f(t)$$

dir.

Bunlar başlangıç değer ve ortalama değer teoremleri olarak bilinir. Alternatif olarak Sumudu dönüşümü ile Laplace dönüşümü arasındaki ilişkiden de aşağıdaki şekilde elde edilebilir.

$$\lim_{u \to 0} G(u) = \lim_{u \to 0} \frac{F\left(\frac{1}{u}\right)}{u} = \lim_{s \to \infty} sF(s)$$

$$\lim_{s \to \infty} sF(s) = \lim_{s \to \infty} s \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt = \int_0^\infty \lim_{s \to \infty} s.e^{-st} f(t) dt$$

$st = w$ dönüşümü yapılırsa $t = \frac{w}{s}$, $s \to \infty$ iken $t \to 0$ dir.

$sdt = dw$ ve integralin sınırları yeniden belirlenirse,

$$\int_0^\infty \lim_{s \to \infty} s.e^{-st} f(t) dt = \int_0^\infty \lim_{t \to 0} s.e^{-w} f(t) \frac{dw}{s} = \int_0^\infty \left[\lim_{t \to 0} f(t) \right] e^{-w} dw$$

$$= \lim_{t \to 0} f(t) \int_0^\infty e^{-w} dw = \lim_{t \to 0} f(t)$$

$$\lim_{u \to 0} G(u) = \lim_{t \to 0} f(t)$$

eşitliği gerçeklenmiş olur.

$$\lim_{u\to\infty} G(u) = \lim_{u\to\infty} \frac{F\left(\frac{1}{u}\right)}{u} = \lim_{s\to 0} sF(s)$$

$$\lim_{s\to 0} sF(s) = \lim_{s\to 0} s\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt = \int_0^\infty \lim_{s\to 0} s.e^{-st} f(t)dt$$

$st = w$ dönüşümü yapılırsa $t = \frac{w}{s}$ $s \to 0$ iken $w \to 0$ ve $dt = \frac{dw}{s}$ olmak üzere integralimizin sınırlarını da $t \to \infty$ iken $w \to \infty$ şeklinde belirleriz.

$$\int_0^\infty \lim_{s\to 0} s.e^{-st} f(t)dt = \int_0^\infty \lim_{t\to\infty} s.e^{-w} f(t)\frac{dw}{s} = \int_0^\infty \left[\lim_{t\to\infty} f(t)\right] e^{-w} dw$$

$$= \lim_{t\to\infty} f(t)\int_0^\infty e^{-w} dw = \lim_{t\to\infty} f(t) .$$

Teorem 3.4.16. $f(t) \in A$, T periyotlu bir fonksiyon olsun. $f(t)$ fonksiyonunun Sumudu dönüşümü;

$$S\left[f(t)\right] = \frac{\int_0^{\frac{T}{u}} e^{-t} f(ut)dt}{1 - e^{-\frac{T}{u}}} \qquad (3.25)$$

şeklindedir [15].

İspat: $f(t)$ fonksiyonu periyodik bir fonksiyon olduğu için;

$$f(t+T) = f(t), \qquad T > 0.$$

$$S\left[f(t)\right] = \frac{1}{u}\int_0^\infty e^{-\frac{t}{u}} f(t)dt = \frac{1}{u}\left[\int_0^T e^{-\frac{t}{u}} f(t)dt + \int_T^{2T} e^{-\frac{t}{u}} f(t)dt + \ldots + \int_{nT}^{(n+1)T} e^{-\frac{t}{u}} f(t)dt + \ldots\right]$$

$t = w + nT$ $n = 1, 2, \ldots$ dönüşümü yapılırsa;

$n = 1$ için , $t = w + T$, $dt = dw$

$$\int_0^T e^{-\frac{t}{u}} f(t)dt = \int_0^T e^{-\frac{(w+T)}{u}} f(w+T)dw$$

$n = 2$ için, $t = w + 2T$, $dt = dw$

$$\int_{2T}^{3T} e^{-\frac{t}{u}} f(t)dt = \int_0^T e^{-\frac{(w+2T)}{u}} f(w+2T)dw$$

şeklinde devam edilip yerine yazılırsa,

$$S\left[f(t)\right]=\frac{1}{u}\left[\int_0^T e^{-\frac{t}{u}}f(t)dt+\int_0^T e^{-\frac{(w+T)}{u}}f(w+T)dw+...+\int_0^T e^{-\frac{(w+nT)}{u}}f(w+nT)dw+...\right]$$

$f\left(w+T\right)=f\left(w\right), f\left(w+2T\right)=f\left(w+T+T\right)=f\left(w+T\right)=f\left(w\right)$ vb. olacaktır.

$$S\left[f(t)\right]=\frac{1}{u}\left[\int_0^T e^{-\frac{t}{u}}f(t)dt+e^{-\frac{T}{u}}\int_0^T e^{-\frac{w}{u}}f(w)dw+e^{-\frac{2T}{u}}\int_0^T e^{-\frac{w}{u}}f(w)dw+...+e^{-\frac{nT}{u}}\int_0^T e^{-\frac{w}{u}}f(w)dw+...\right]$$

$$S\left[f(t)\right]=\frac{1}{u}\left(1+e^{-\frac{T}{u}}+e^{-\frac{2T}{u}}+...\right)\int_0^T e^{-\frac{w}{u}}f\left(w\right)dw$$

elde edilir.

$\left(1+e^{-\frac{T}{u}}+e^{-\frac{2T}{u}}+...\right)$ geometrik serisi yakınsak olup, serinin toplamı;

$$\left(1+e^{-\frac{T}{u}}+\left(e^{-\frac{T}{u}}\right)^2+...+\left(e^{-\frac{T}{u}}\right)^n+...\right)=\frac{1}{1-e^{-\frac{T}{u}}}$$

olacaktır.

$\int_0^T e^{-\frac{w}{u}}f\left(w\right)dw$ integralinde $w=ut$ dönüşümü yapılırsa $dw=udt$

$$\int_0^T e^{-\frac{w}{u}}f\left(w\right)dw=\int_0^{\frac{T}{u}} e^{-t}f\left(ut\right)udt$$

elde edilir ve bu ifade yerine yazılırsa,

$$S\left[f(t)\right]=\frac{1}{u}\frac{1}{1-e^{-\frac{T}{u}}}\int_0^{\frac{T}{u}} e^{-t}f\left(ut\right)udt=\frac{\int_0^{\frac{T}{u}} e^{-t}f\left(ut\right)udt}{1-e^{-\frac{T}{u}}}$$

elde edilir.

Teorem 3.4.17. $f(t)$ ve $g(t)$ fonksiyonlarının Laplace dönüşümleri $\mathrm{F(s)}$ ve $\mathrm{G(s)}$, Sumudu dönüşümleri $\mathrm{M(u)}$ ve $\mathrm{N(u)}$ olmak üzere,

$$(f*g)(t)=\int_0^{\infty} f(t)g(t-\tau)d\tau$$

$$S[(f*g)(t)]=uM(u)N(u) \tag{3.26}$$

gerçeklenir [15].

İspat: $(f*g)$ için Laplace dönüşümü,

$$\mathrm{L}((f*g))=\mathrm{F(s)}\,\mathrm{G(s)}$$

$$S[(f*g)(t)]=\frac{1}{u}\mathrm{L}((f*g))$$

ve $\mathrm{M(u)}=\dfrac{\mathrm{F(1/u)}}{u}$, $\mathrm{N(u)}=\dfrac{\mathrm{G(1/u)}}{u}$ olduğundan

$(f*g)$ için Sumudu dönüşümü,

$$S[(f*g)(t)]=\frac{\mathrm{F(1/u)}\times\mathrm{G(1/u)}}{u}$$

$$=u\frac{\mathrm{F(1/u)}}{u}\frac{\mathrm{G(1/u)}}{u}$$

$$S[(f*g)(t)]=uM(u)N(u)$$

olacaktır [15].

3.5. Kompleks Ters Sumudu Dönüşümü

Teorem 3.5. $G(u)$ $f(t)$ fonksiyonunun Sumudu Dönüşümü olmak üzere;

(i) $G(1/s)/s$, $\mathrm{Re}(s)<\gamma$ olacak şekilde tekil noktalara (singüleriti) sahip bir meromorfik fonksiyon,

(ii) M ve k sayıları pozitif sabitler ve R yarıçaplı bir Γ çevresi için

$$\left|\frac{G(1/s)}{s}\right| < MR^{-k}$$

olmak üzere $f(t)$ fonksiyonu

$$S^{-1}\left[G(u)\right] = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{st}G\left(\frac{1}{s}\right)\frac{ds}{s} = \sum residues\left[e^{st}\frac{G(1/s)}{s}\right] \tag{3.27}$$

şeklinde verilir [16].

İspat: $F(s) = L\left[f(t)\right]$ ve $G(u) = S\left[f(t)\right]$ sırasıyla $f(t)$ fonksiyonunun Laplace ve Sumudu Dönüşümleri olsun. $t > 0$ olmak üzere Laplace Dönüşümü için Kompleks Ters Dönüşüm Formülü vasıtasıyla $f(t)$ şu şekilde verilir;

$$f(t) = L^{-1}\left[F(s)\right] = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{st}F(s)\,ds\,. \tag{3.28}$$

$s = x + iy$ kompleks bir değer olmak üzere integrasyon kompleks düzlemde $s = \gamma$ doğrusu boyunca hesaplanır. $s = \gamma$ doğrusu tekil noktaların (kutup, dallanma ve esas tekil noktalar) tamamının sağında yer alacak biçimde bir γ reel sayısı seçilir. (Bu teoremdeki birinci durumdur) .

(3.14) integrali çevre integrali yardımıyla hesaplanır. BC Bromwich çevresi $s = \gamma$ doğrusunun $[AB] = [\gamma - iT, \gamma + iT]$ parçası ile merkezi orijinde bulunup yarıçapı R olan çemberin $[AB]$ ile birleşen yayından ibarettir. Bu yayı Γ ile gösterirsek $T = \sqrt{R^2 - \gamma^2}$ olduğundan,

$BC = [AB] \cup \Gamma$ dır.

Sabit bir γ reel sayısı için $s = \gamma$ doğrusunun , $F(s)$ fonksiyonunun sadece kutup noktalarından ibaret olan tekil noktalarının tamamının sağında kaldığını düşünelim. Böylece

$$\lim_{R\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} e^{st}F(s)\,ds = 0$$

elde edilir. Sonuç olarak

$$f(t)=L^{-1}\left[F(s)\right]=\lim_{R\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}e^{st}F(s)\,ds=\lim_{R\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\oint_{BC}e^{st}F(s)\,ds$$

Rezidü teoremi vasıtasıyla da,

$$f(t)=L^{-1}\left[F(s)\right]=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}e^{st}F(s)\,ds=\sum residues\left[e^{st}F(s)\right]$$

elde edilir ve son olarak Laplace ve Sumudu Dönüşümleri arasındaki

$$F(s)=\frac{G(1/s)}{s}$$

bağıntıdan yararlanarak ispat tamamlanmış olur [16].

3.6. Sumudu Dönüşümü Verilen Bazı Fonksiyonların Kompleks Ters Sumudu Formülü ile Bulunması

Kompleks Ters Sumudu formülü,

$$S^{-1}[G(u)]=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}e^{st}G\left(\frac{1}{s}\right)\frac{ds}{s}=\sum residues\left[\frac{e^{st}G(1/s)}{s}\right]$$

şeklindedir. Burada rezidüler hesaplanarak dönüşümü verilen fonksiyon bulunabilir.

Örnek 3.6.1. Sumudu dönüşümü $G(u)=1$ olan fonksiyon;

$$S^{-1}[G(\text{u})]=\sum residues\left[\frac{e^{st}G(1/s)}{s}\right]$$

$s=0$ için $res(f,0)=\lim_{s\to 0}\frac{(s-0)e^{st}}{s}=e^{0}=1$ ve $f(t)=1$ dir.

Örnek 3.6.2. $S[f(t)]=G(u)=u$ olan fonksiyon;

$$S^{-1}[G(\text{u})]=f(t)=\sum residues\left[\frac{e^{st}G(1/s)}{s}\right]$$

$$G\left(\frac{1}{s}\right)=\frac{1}{s},\ S^{-1}[G(\text{u})]=\sum residues\left[\frac{e^{st}}{s.s}\right]$$

$s=0$ çift katlı olduğundan,

$$res(f,0)=\frac{1}{(2-1)!}\lim_{s\to 0}\frac{d}{ds}\left\{(s-0)^2.e^{st}\frac{1}{s^2}\right\}$$

$$=\lim_{s\to 0}\frac{d}{ds}\left\{e^{st}\right\}=\lim_{s\to 0}t.e^{st}=t$$

$f(t)=t$ bulunur.

Örnek 3.6.3. Sumudu dönüşümü $S[f(t)]=G(u)=\dfrac{1}{1+u^2}$ olan fonksiyon için ;

$G\left(\dfrac{1}{s}\right)=\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{s^2}}=\dfrac{s^2}{1+s^2}$ olduğundan,

$$S^{-1}[G(\mathrm{u})]=\sum residues\left[\frac{e^{st}G(1/s)}{s}\right]=\sum residues\left[e^{st}\frac{s^2}{\left(s^2+1\right).s}\right] \text{ ve}$$

$f(s)=\dfrac{e^{st}.s}{\left(s^2+1\right)}$ olacak şekilde $s=i$ ve $s=-i$ için rezidüler;

$$res(f(s),\mathrm{i})=\lim_{s\to i}\left[(s-i)\frac{e^{st}.s}{(s-i).(s+i)}\right]=\lim_{s\to i}\frac{e^{st}.s}{(s+i)}=\frac{e^{ti}.i}{2i}=\frac{e^{ti}}{2}$$

$$res(f(s),-\mathrm{i})=\lim_{s\to -i}\left[(s+i)\frac{e^{st}.s}{(s-i).(s+i)}\right]=\lim_{s\to -i}\frac{e^{st}.s}{(s-i)}=\frac{e^{-ti}.(-i)}{-2i}=\frac{e^{-ti}}{2}$$

$$S^{-1}[G(\mathrm{u})]=f(t)=\sum residues\left[e^{st}\frac{s^2}{\left(s^2+1\right)s}\right]=\frac{e^{ti}}{2}+\frac{e^{-ti}}{2}$$

elde edilir ve $\dfrac{e^{ti}}{2}+\dfrac{e^{-ti}}{2}=\cos t$ olduğundan;

$S^{-1}[G(\mathrm{u})]=f(t)=\cos t$ olacaktır.

Örnek 3.6.4. Sumudu dönüşümü $S[f(t)]=G(u)=\dfrac{u}{1+u^2}$ olmak üzere $f(t)$ fonksiyonunu, Ters Sumudu formülünü kullanarak bulmak istersek öncelikle,

$$G\left(\frac{1}{s}\right)=\frac{\frac{1}{s}}{1+\frac{1}{s^2}}=\frac{s}{1+s^2}$$

elde edilir.

$$S^{-1}[G(\mathrm{u})]=\sum residues\left[\frac{e^{st}G(1/s)}{s}\right],$$

$$=\sum residues\left[e^{st}\frac{s}{\left(1+s^2\right)}.\frac{1}{s}\right]=\sum residues\left[\frac{e^{st}}{\left(1+s^2\right)}\right]$$

olup, $s^2+1=(s+i).(s-i)$

ifadesinden $s=i\,, s=-i$ değerleri için rezidüler hesaplanır ve rezidüler toplamı bize $f(t)$ fonksiyonunu verecektir.

$$res(f(s),\mathrm{i})=\lim_{s\to i}\left[(s-i)\frac{e^{st}}{(s-i).(s+i)}\right]=\lim_{s\to i}\frac{e^{st}}{(s+i)}=\frac{e^{ti}}{2i}$$

$$res(f(s),-\mathrm{i})=\lim_{s\to -i}\left[(s+i)\frac{e^{st}}{(s-i).(s+i)}\right]=\lim_{s\to -i}\frac{e^{st}}{(s-i)}=\frac{e^{-ti}}{-2i}=-\frac{e^{-ti}}{2i}$$

$$S^{-1}[G(\mathrm{u})]=\sum residues\left[\frac{e^{st}}{\left(1+s^2\right)}\right]=\frac{e^{ti}}{2i}-\frac{e^{-ti}}{2i}=\frac{1}{2i}\left(e^{ti}-e^{-ti}\right)$$

elde edilir.

$$\frac{1}{2i}\left(e^{ti}-e^{-ti}\right)=\sin t$$

olduğundan

$$S^{-1}[G(\mathrm{u})] = f(t) = \mathrm{sint}$$

fonksiyonuna ulaşılır.

Örnek 3.6.5. Sumudu dönüşümü $S[f(t)] = G(u) = \dfrac{1}{1-au}$ olan fonksiyonu bulmak için Ters Sumudu formülü uygulanmalıdır. Bunun için öncelikle,

$$G\left(\frac{1}{s}\right) = \frac{1}{1-\frac{a}{s}} = \frac{s}{s-a}$$

elde edilir.

$$S^{-1}[G(\mathrm{u})] = \sum residues\left[e^{st}\frac{s}{(s-a).s}\right] = \sum residues\left[\frac{e^{st}}{(s-a)}\right]$$

olup, $s = a$ için rezidü hesaplanırsa;

$$res(f(s),\mathrm{a}) = \lim_{s\to a}\left[(s-a)\frac{e^{st}}{(s-a)}\right] = \lim_{s\to a} e^{st} = e^{at}$$

sonucu elde edilir ve,

$$S^{-1}[G(\mathrm{u})] = f(t) = e^{at}$$

gerçeklenir.

BÖLÜM 4. SUMUDU DÖNÜŞÜMÜNÜN DİFERANSİYEL DENKLEMLERE UYGULAMASI

4.1. Sumudu Dönüşümünün Sabit Katsayılı Adi Diferansiyel Denklemlere ve Başlangıç Değer Problemlerine Uygulaması

Bu bölümde Sumudu Dönüşümünü sabit katsayılı adi diferansiyel denklemlere ve başlangıç değer problemlerine uygulayacağız. Dönüşüm bu diferansiyel denklemlerin çözümünde etkili bir şekilde kullanılabilmektedir.

Örnek 4.1.1. $\dfrac{d^2y}{dt^2}+16y=5\sin t$, $y(0)=\dfrac{dy(0)}{dt}=0$ başlangıç değer probleminin sumudu dönüşümü ile çözümü şu şekildedir:

$$\frac{1}{u^2}\left[G(u)-y(0)-uy'(0)\right]+16G(u)=\frac{5u}{1+u^2}$$

$$\frac{1}{u^2}G(u)+16G(u)=\frac{5u}{1+u^2}$$

$$G(u)\left[\frac{1}{u^2}+16\right]=\frac{5u}{1+u^2}$$

$$G(u)=\frac{5u}{1+u^2}.\frac{u^2}{1+16u^2}=\frac{Au+B}{1+u^2}+\frac{Cu+D}{1+16u^2}$$

Basit kesirlere ayırma yöntemi ile $A=\dfrac{1}{3},B=0,C=\dfrac{-1}{3},D=0$ değerlerine ulaşırız.

$$G(u)=\frac{u}{3(1+u^2)}-\frac{4u}{3.4(1+16u^2)}$$

$G(u)=S[y(t)]=\frac{u}{3.(1+u^2)}-\frac{4u}{3.4.(1+16u^2)}$ denklemine ters sumudu dönüşümü uygulanırsa,

$$y(t)=\frac{1}{3}\sin t-\frac{1}{12}\sin 4\mathrm{t}$$

bulunur.

Örnek 4.1.2. $\frac{d^2y}{dt^2}+2\frac{dy}{dt}+y=te^{-t}$, $y(0)=1$, $\frac{dy(0)}{dt}=2$

başlangıç değer problemini Sumudu Dönüşümünü kullanarak çözelim.

Bu başlangıç değer probleminde Sumudu Dönüşümünü uygulanırsa;

$$\frac{1}{u^2}\left[G(u)-y(0)-uy'(0)\right]+2\left[\frac{G(u)-y(0)}{u}\right]+G(u)=\frac{u}{(1+u)^2}$$

$$\frac{1}{u^2}G(u)-\frac{1}{u^2}-\frac{2}{u}+\frac{2G(u)}{u}-\frac{2}{u}+G(u)=\frac{u}{(1+u)^2}$$

$$G(u)\left[\frac{1}{u^2}+\frac{2}{u}+1\right]-\frac{4}{u}-\frac{1}{u^2}=\frac{u}{(1+u)^2}$$

$$G(u)\left[\frac{(u+1)^2}{u^2}\right]=\frac{u}{(1+u)^2}+\frac{4}{u}+\frac{1}{u^2}$$

$$G(u)=\frac{1}{(u+1)^2}+\frac{4u}{(u+1)^2}+\frac{u^3}{(1+u)^4}$$

elde edilir.

Ters Sumudu dönüşümü alınarak

$$y(t)=e^{-t}+3te^{-t}+\frac{t^3e^{-t}}{3!}$$

çözümü bulunur.

Örnek 4.1.3. $y''' - y'' + y' = e^t * \sin t$, $t > 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 4$, $y''(0) = 1$

başlangıç değer probleminin çözümünü Sumudu Dönüşümü ile bulalım.

$$G_m(u) = \frac{G(u)}{u^m} - \sum_{j=0}^{m-1} \frac{f^{(j)}(0)}{u^{m-j}}$$

eşitliği kullanılarak öncelikle türev fonksiyonlarının Sumudu dönüşümleri bulunur.

$$G_3(u) = \frac{G(u)}{u^3} - \sum_{j=0}^{2} \frac{f^{(j)}(0)}{u^{3-j}}$$

$$G_3(u) = \frac{G(u)}{u^3} - \left[\frac{y(0)}{u^3} + \frac{y'(0)}{u^2} + \frac{y''(0)}{u}\right] = \frac{G(u)}{u^3} - \left[\frac{1}{u^3} + \frac{4}{u^2} + \frac{1}{u}\right]$$

$$G_2(u) = \frac{G(u)}{u^2} - \sum_{j=0}^{1} \frac{f^{(j)}(0)}{u^{2-j}} = \frac{G(u)}{u^2} - \left[\frac{y(0)}{u^2} + \frac{y'(0)}{u}\right] = \frac{G(u)}{u^2} - \left[\frac{1}{u^2} + \frac{4}{u}\right]$$

$$G_1(u) = \frac{G(u)}{u} - \frac{y(0)}{u} = \frac{G(u)}{u} - \frac{1}{u}$$

Sumudu Dönüşümünün konvolüsyon özelliği kullanılırsa:

$$S\left[e^t * \sin t\right] = u.\frac{1}{1-u}.\frac{u}{1+u^2} = \frac{u^2}{(1-u)\left(1+u^2\right)}$$

elde edilir. Şimdi denklemin her tarafına Sumudu Dönüşümü uygulanırsa

$$\frac{G(u)}{u^3} - \left[\frac{1}{u^3} + \frac{4}{u^2} + \frac{1}{u}\right] - \frac{G(u)}{u^2} + \frac{1}{u^2} + \frac{4}{u} + \frac{4G(u)}{u} - \frac{4}{u} - 4G(u) = \frac{u^2}{(1-u)\left(1+u^2\right)}$$

veya

$$G(u)\left[\frac{1-u+4u^2-4u^3}{u^3}\right] = \frac{u^2}{(1-u)\left(1+u^2\right)} + \frac{1+3u+u^2}{u^3}$$

veya

$$G(u) = \frac{u^5}{(1-u)\left(1+u^2\right)\left(1-u+4u^2-4u^3\right)} + \frac{1+3u+u^2}{\left(1-u+4u^2-4u^3\right)}$$

elde edilir.

Burada u değişkeni yerine $\frac{1}{s}$ yazılırsa,

$$G\left(\frac{1}{s}\right)=\frac{\frac{1}{s^5}}{\left(1-\frac{1}{s}\right)\left(1+\frac{1}{s^2}\right)\left(1-\frac{1}{s}+\frac{4}{s^2}-\frac{4}{s^3}\right)}+\frac{1+\frac{3}{s}+\frac{1}{s^2}}{\left(1-\frac{1}{s}+\frac{4}{s^2}-\frac{4}{s^3}\right)}$$

veya

$$G\left(\frac{1}{s}\right)=\frac{s}{(s-1)^2\left(s^2+1\right)\left(s^2+4\right)}+\frac{s\left(s^2+3s+1\right)}{(s-1)\left(s^2+4\right)}$$

elde edilir.

$$P(u)S(y)(u)=S(f)(u)+Mp(u)\varphi(y,n)$$

olduğundan;

$$\left(\frac{1}{u^3}-\frac{1}{u^2}+\frac{4}{u}-4\right)S(y)(u)=uS\left[e^t\right].S\left[\sin t\right]+Mp(u)\varphi(y,n)$$

elde edilir.

$$Mp(u)\varphi(y,n)=\left(\frac{1}{u}\,\frac{1}{u^2}\,\frac{1}{u^3}\right)\begin{pmatrix}4 & -1 & 1\\ -1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\4\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{u}+\frac{3}{u^2}+\frac{1}{u^3}$$

ifadesinin sonucu üstteki eşitlikte yerine yazılırsa ve gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$Y(u)=\frac{u^5}{(1-u)\left(1+u^2\right)\left(1-u+4u^2-4u^3\right)}+\frac{u^2+3u+1}{\left(1-u+4u^2-4u^3\right)}$$

elde edilir ve u kompleks değişkeni yerine $\frac{1}{s}$ yazılırsa,

$$Y\left(\frac{1}{s}\right)=\frac{s}{(s-1)^2\left(s^2+1\right)\left(s^2+4\right)}+\frac{s\left(s^2+3s+1\right)}{(s-1)\left(s^2+4\right)}$$

sonucuna ulaşılır. Ters Sumudu Dönüşümü uygulanırsa;

$$S^{-1}\left[Y(s)\right]=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}e^{st}Y\left(\frac{1}{s}\right)\frac{ds}{s}=\sum residues\left[e^{st}\,\frac{Y(1/s)}{s}\right]$$

$$=\sum residues\left[\frac{e^{st}}{(s-1)^2\left(s^2+1\right)\left(s^2+4\right)}+\frac{e^{st}\left(s^2+3s+1\right)}{(s-1)\left(s^2+4\right)}\right]$$

yazılır.

$s=1$ noktasında dolanım sayısı 2 olmakla birlikte, $s=-i$, $s=+i$, $s=-2i$, $s=+2i$

için rezidüler hesaplanırsa,

$$\lim_{s\to -i}\frac{(s+i)e^{st}s}{(s-1)^2(s^2+1)(s^2+4)s}=\lim_{s\to -i}\frac{e^{st}}{(s-1)^2(s-i)(s^2+4)}=\frac{e^{-ti}}{12}$$

$$\lim_{s\to +i}\frac{(s-i)e^{st}s}{(s-1)^2(s^2+1)(s^2+4)s}=\lim_{s\to -i}\frac{e^{st}}{(s-1)^2(s+i)(s^2+4)}=\frac{e^{ti}}{12}$$

$$\lim_{s\to -2i}\frac{(s-(-2i))e^{st}s}{(s-1)^2(s^2+1)(s^2+4)s}=\lim_{s\to -2i}\frac{e^{st}}{(s-1)^2(s^2+1)(s-2i)}=\frac{(-3-4i)e^{-2ti}}{25.12i}$$

$$\lim_{s\to +2i}\frac{(s-2i)e^{st}s}{(s-1)^2(s^2+1)(s^2+4)s}=\lim_{s\to +2i}\frac{e^{st}}{(s-1)^2(s^2+1)(s+2i)}=\frac{(-3+4i)e^{-2ti}}{25.(-12i)}$$

sonuçlarına ulaşılır.

$$\frac{e^{-ti}}{12}+\frac{e^{ti}}{12}=\frac{1}{6}\left(\frac{e^{-ti}}{2}+\frac{e^{ti}}{2}\right)=\frac{1}{6}\cos t$$

ve

$$\frac{(-3-4i)e^{-2ti}}{25.12i}+\frac{(-3+4i)e^{+2ti}}{25.(-12i)}=\frac{1}{50}\left(\frac{e^{+2ti}-e^{-2ti}}{2i}\right)-\frac{2}{75}\left(\frac{e^{+2ti}+e^{-2ti}}{2}\right)=\frac{1}{50}\sin 2t-\frac{2}{75}\cos 2t$$

olacaktır.

$s=1$ için rezidü hesaplanırsa,

$$\frac{1}{(2-1)!}\lim_{s\to 1}\frac{d}{ds}\left\{\frac{(s-1)^2e^{st}s}{(s-1)^2(s^2+1)(s^2+4)s}\right\}=\lim_{s\to 1}\frac{d}{ds}\left\{\frac{e^{st}}{(s^2+1)(s^2+4)}\right\}$$

olup türev alınarak;

$$\lim_{s\to 1}\frac{te^{st}(s^2+1)(s^2+4)-\left\{\left[2s(s^2+4)+2s(s^2+1)\right]e^{st}\right\}}{\left[(s^2+1)(s^2+4)\right]^2}=\frac{10te^t-14e^t}{100}=\frac{1}{10}te^t-\frac{7}{10}e$$

elde edilir. Toplamın ikinci kısmı için rezidüler hesaplanırsa,

$$s=1 \text{ için } \lim_{s\to 1}\frac{(s-1)e^{st}(s^2+3s+1)}{(s-1)(s^2+4)}=e^t$$

$$s=2i \text{ için } \lim_{s\to 2i}\frac{(s-2i)e^{st}(s^2+3s+1)}{(s-1)(s-2i)(s+2i)}=\frac{3e^{2ti}}{4i}$$

$$s=-2i \text{ için } \lim_{s\to -2i}\frac{(s+2i)e^{st}\left(s^2+3s+1\right)}{(s-1)(s-2i)(s+2i)}=\frac{-3e^{-2ti}}{4i}$$

sonuçlarına ulaşılır.

$$\frac{3e^{2ti}}{4i}+\frac{-3e^{-2ti}}{4i}=\frac{3}{2}\left(\frac{e^{2ti}-e^{-2ti}}{2i}\right)=\frac{3}{2}\sin 2t$$

olmaktadır. Ters Sumudu Dönüşümü alınırsa,

$$S^{-1}\left[Y(s)\right]=\sum residues\left[e^{st}\frac{Y(1/s)}{s}\right]$$

$$=\frac{1}{6}\cos t+\frac{1}{50}\sin 2t-\frac{2}{75}\cos 2t+\frac{1}{10}te^{t}-\frac{7}{50}e^{t}+e^{t}+\frac{3}{2}\sin 2t$$

olup gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$y(t)=\frac{1}{6}\cos t+\frac{1}{10}te^{t}+\frac{43}{50}e^{t}-\frac{2}{75}\cos 2t+\frac{38}{25}\sin 2t$$

şeklinde diferansiyel denklemin çözümü elde edilir.

Örnek 4.1.4. $y'''-3y''+3y'-y=t^2e^t$ diferansiyel denklemine Sumudu dönüşümü uygulayalım.

Diferansiyel denklemin sol tarafının Sumudu dönüşümü,

$$\frac{G(u)}{u^3}-\frac{y(0)}{u^3}-\frac{y'(0)}{u^2}-\frac{y''(0)}{u}-3\left[\frac{G(u)}{u^2}-\frac{y(0)}{u^2}-\frac{y'(0)}{u}\right]+3\left[\frac{G(u)}{u^2}-\frac{y(0)}{u^2}\right]-G(u)$$

şeklinde olup diferansiyel denklemin sağ tarafının Sumudu dönüşümü olan,

$$\frac{2u^2}{(1-u)^3}$$

ifadesine eşit olacaktır. Gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$G(u)\left[\frac{1}{u^3}-\frac{3}{u^2}+\frac{3}{u}-1\right]-\frac{1}{u^3}+\frac{1}{u^2}=\frac{2u^2}{(1-u)^3}$$

$$G\left(u\right)\left[\frac{1-3u+3u^{2}-u^{3}}{u^{3}}\right]=\frac{2u^{2}}{\left(1-u\right)^{3}}+\frac{1}{u^{3}}-\frac{1}{u^{2}}$$

$$G\left(u\right)=\frac{2u^{5}}{\left(1-u\right)^{6}}+\frac{1}{\left(1-u\right)^{3}}-\frac{u}{\left(1-u\right)^{3}}$$

sonucuna ulaşılır ve $u=\frac{1}{s}$ dönüşümü yapılırsa,

$$Y\left(\frac{1}{s}\right)=\frac{\frac{2}{s^{5}}}{\left(1-\frac{1}{s}\right)^{6}}+\frac{1}{\left(1-\frac{1}{s}\right)^{3}}-\frac{\frac{1}{s}}{\left(1-\frac{1}{s}\right)^{3}}$$

$$Y\left(\frac{1}{s}\right)=\frac{2s}{\left(s-1\right)^{6}}+\frac{s^{3}}{\left(s-1\right)^{3}}-\frac{s^{2}}{\left(s-1\right)^{3}}$$

elde edilir.

$s=1$ için rezidüler hesaplanır.

$$\frac{1}{\left(6-1\right)!}\lim_{s\to1}\frac{d}{ds^{5}}\left\{\frac{2se^{st}\left(s-1\right)^{6}}{\left(s-1\right)^{6}s}\right\}=\frac{1}{5!}\lim_{s\to1}\frac{d}{ds^{5}}\left\{e^{st}\right\}$$

$$\frac{1}{120}\lim_{s\to1}2t^{5}e^{st}=\frac{t^{5}e^{t}}{60}$$

$$\frac{1}{\left(3-1\right)!}\lim_{s\to1}\frac{d}{ds^{2}}\left\{\frac{s^{3}e^{st}\left(s-1\right)^{3}}{\left(s-1\right)^{3}s}\right\}=\frac{1}{2!}\lim_{s\to1}\frac{d}{ds^{2}}\left\{s^{2}e^{st}\right\}$$

$$\frac{1}{2}\lim_{s\to1}\left\{2e^{st}+4ste^{st}+s^{2}t^{2}e^{st}\right\}=\frac{1}{2}\left\{2e^{t}+4te^{t}+t^{2}e^{t}\right\}$$

$$-\frac{1}{\left(3-1\right)!}\lim_{s\to1}\frac{d}{ds^{2}}\left\{\frac{s^{2}e^{st}\left(s-1\right)^{3}}{\left(s-1\right)^{3}s}\right\}=-\frac{1}{2!}\lim_{s\to1}\frac{d}{ds^{2}}\left\{se^{st}\right\}$$

$$-\frac{1}{2}\lim_{s\to1}\left\{2te^{st}+st^{2}e^{st}\right\}=-\frac{1}{2}\left\{2te^{t}+t^{2}e^{t}\right\}$$

Ters dönüşüm alınırsa,

$$S^{-1}\left[Y(s)\right]=\sum residues\left[e^{st}\frac{Y\left(\frac{1}{s}\right)}{s}\right]=\frac{t^5e^t}{60}+\frac{1}{2}\left\{2e^t+4te^t+t^2e^t\right\}-\frac{1}{2}\left\{2te^t+t^2e^t\right\}$$

$$y(t)=e^t+te^t+\frac{t^5e^t}{60}=e^t\left(1+t+\frac{t^5}{60}\right)$$

çözümü bulunur.

Örnek 4.1.5. $y'''-y''+4y'-4y=2\cos(2t)-\sin(2t)$, $y(0)=1$, $y'(0)=4$, $y''(0)=1$ diferansiyel denklemine Sumudu dönüşümü uygulanırsa:

$$\left(\frac{1}{u^3}-\frac{1}{u^2}+\frac{4}{u}-4\right)S(y)(u)=2.S\left[\cos(2t)\right]-S\left[\sin(2t)\right]+M_p(u)\varphi(y,3)$$

elde edilir. Burada

$$M_p(u)\varphi(y,3)=\left(\frac{1}{u}\,\frac{1}{u^2}\,\frac{1}{u^3}\right)\begin{pmatrix}4 & -1 & 1\\ -1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\4\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{u}+\frac{3}{u^2}+\frac{1}{u^3}$$

şeklinde hesaplanır. Bu sonuç yukarıdaki eşitlikte yerine yazılırsa,

$$\left(\frac{1}{u^3}-\frac{1}{u^2}+\frac{4}{u}-4\right)S(y)(u)=2.S\left[\cos(2t)\right]-S\left[\sin(2t)\right]+\frac{1}{u}+\frac{3}{u^2}+\frac{1}{u^3}$$

elde edilir.

$$S\left[\cos(2t)\right]=\frac{1}{1+4.u^2}$$

ve

$$S\left[\sin(2t)\right]=\frac{2.u}{1+4.u^2}$$

olduğundan bu sonuçlar yukarıdaki eşitlikte yerlerine yazılırsa;

$$\left(\frac{1-u+4.u^2-4.u^3}{u^3}\right)S(y)(u)=\frac{2}{1+4.u^2}-\frac{2.u}{1+4.u^2}+\frac{1+3.u+u^2}{u^3}$$

$$\frac{(1-u).(1+4.u^2)}{u^3}S(y)(u)=\frac{2.(1-u)}{1+4.u^2}+\frac{1+3.u+u^2}{u^3}$$

elde edilir. Burada gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$Y(u)=\frac{2.(1-u).u^3}{(1+4.u^2)(1-u).(1+4.u^2)}+\frac{(u^2+3.u+1).u^3}{u^3.(1-u).(1+4.u^2)}$$

elde edilir ve $u=\frac{1}{s}$ dönüşümü yapılırsa,

$$Y(\frac{1}{s})=\frac{2.\left(1-\frac{1}{s}\right).\frac{1}{s^3}}{\left(1+4.\frac{1}{s^2}\right)\left(1-\frac{1}{s}\right).\left(1+4.\frac{1}{s^2}\right)}+\frac{\left(\frac{1}{s^2}+\frac{3}{s}+1\right).\frac{1}{s^3}}{\frac{1}{s^3}.\left(1-\frac{1}{s}\right).\left(1+4.\frac{1}{s^2}\right)}$$

veya

$$Y(\frac{1}{s})=\frac{2.s}{(s^2+4)^2}+\frac{s.(s^2+3.s+1)}{(s-1).(s^2+4)}$$

bulunur. Ters Sumudu dönüşümü uygulanırsa,

$$S^{-1}\left[Y(s)\right]=\frac{1}{2.\pi.i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}e^{st}Y\left(\frac{1}{s}\right)\frac{ds}{s}=\sum residues\left[e^{st}\frac{Y\left(\frac{1}{s}\right)}{s}\right]$$

$$=\sum residues\left[e^{st}.\left(\frac{2}{(s^2+4)^2}+\frac{(s^2+3.s+1)}{(s-1).(s^2+4)}\right)\right] \tag{4.1}$$

sonucuna ulaşılır. Yukarıdaki toplamın ilk kısmı için $s=2i$, $s=-2i$, $s=1$ olmak üzere rezidüler hesaplanır.

$s=2i$ için rezidü hesaplanırsa,

$$\frac{1}{(2-1)!}\lim_{s\to 2i}\frac{d}{ds}\left\{\frac{(s-2i)^2.e^{st}.2.s}{(s-2i)^2.(s+2i)^2.s}\right\}=\lim_{s\to 2i}\frac{d}{ds}\left\{\frac{2.e^{st}}{(s+2i)^2}\right\}$$

$$=\lim_{s\to 2i}\frac{2.t.e^{st}.(s+2i)^2-2.(s+2i).2.e^{st}}{(s+2i)^4}$$

$$\lim_{s\to 2i}\frac{d}{ds}\left\{\frac{2.e^{st}}{\left(s+2i\right)^2}\right\}=\frac{2.t.e^{2it}.\left(4i\right)^2-2.4i.2.e^{st}}{\left(4i\right)^4}=\frac{-32.t.e^{2it}-16.i.e^{2it}}{256}$$

bulunur.

$s=-2i$ için rezidü hesaplanırsa,

$$\frac{1}{\left(2-1\right)!}\lim_{s\to -2i}\frac{d}{ds}\left\{\frac{\left(s+2i\right)^2.e^{st}.2.s}{\left(s-2i\right)^2.\left(s+2i\right)^2.s}\right\}=\lim_{s\to -2i}\frac{d}{ds}\left\{\frac{2.e^{st}}{\left(s-2i\right)^2}\right\}$$

$$=\lim_{s\to -2i}\frac{2.t.e^{st}.\left(s-2i\right)^2-2.\left(s-2i\right).2.e^{st}}{\left(s-2i\right)^4}$$

$$\lim_{s\to -2i}\frac{d}{ds}\left\{\frac{2.e^{st}}{\left(s-2i\right)^2}\right\}=\frac{2.t.e^{2it}.\left(-4i\right)^2-4.\left(-4i\right).e^{-st}}{\left(-4i\right)^4}=\frac{-32.t.e^{-2it}+16.i.e^{-2it}}{256}$$

$$\frac{-32.t.e^{2it}-16.i.e^{2it}}{256}+\frac{-32.t.e^{-2it}+16.i.e^{-2it}}{256}=\frac{-2.t}{8}\left(\frac{e^{2it}}{2}+\frac{e^{-2it}}{2}\right)+\frac{e^{2it}}{16.i}-\frac{e^{-2it}}{16.i}$$

$$=\frac{-t}{4}\left(\frac{e^{2it}}{2}+\frac{e^{-2it}}{2}\right)+\frac{1}{8}\left(\frac{e^{2it}}{2i}-\frac{e^{-2it}}{2i}\right)=\frac{-t.\cos\left(2t\right)}{4}+\frac{\sin\left(2t\right)}{8}$$

bulunur.

Şimdi (4.1) ifadesinde toplamın ikinci kısmı için rezidüler hesaplanır.

$s=1$ için rezidü hesaplanırsa,

$$\lim_{s\to 1}\frac{\left(s-1\right).s.e^{st}.\left(s^2+3.s+1\right)}{\left(s-1\right).\left(s^2+4\right).s}=\lim_{s\to 1}\frac{e^{st}.\left(s^2+3.s+1\right)}{\left(s^2+4\right)}=\frac{e^t.5}{5}=e^t$$

bulunur.

$s=2i$ için rezidü hesaplanırsa,

$$\lim_{s\to 2i}\frac{\left(s-2i\right).s.e^{st}.\left(s^2+3s+1\right)}{\left(s-1\right).\left(s-2i\right).\left(s+2i\right).s}=\lim_{s\to 2i}\frac{e^{st}.\left(s^2+3s+1\right)}{\left(s-1\right).\left(s+2i\right)}=\frac{e^{2it}.\left(4i^2+6i+1\right)}{\left(2i-1\right).\left(2i+2i\right)}$$

$$=\frac{3.\left(-1+2i\right).\left(2i+1\right).e^{2it}}{4.\left(4i^2-1\right).i}=\frac{3.\left(-2i-1+4i^2+2i\right).e^{2it}}{4i.\left(-5\right)}=\frac{3.\left(-5\right).e^{2it}}{4i.\left(-5\right)}=\frac{3.e^{2it}}{4i}$$

elde edilir.

$s=-2i$ için rezidü hesaplanırsa,

$$\lim_{s\to -2i}\frac{(s+2i).s.e^{st}.(s^2+3s+1)}{(s-1).(s-2i).(s+2i).s}=\lim_{s\to -2i}\frac{e^{st}.(s^2+3s+1)}{(s-1).(s+2i)}=\frac{e^{-2it}.(4i^2+6i+1)}{(-2i-1).(-2i-2i)}$$

$$=\frac{(-3).(1+2i).(2i-1).e^{-2it}}{4.(4i^2-1).i}=\frac{(-3).(2i-1+4i^2-2i).e^{2it}}{4i.(-5)}=\frac{(-3).(-5).e^{2it}}{4i.(-5)}=\frac{(-3).e^{2it}}{4i}$$

bulunur. Rezidüler toplanırsa,

$$\frac{3.e^{2it}}{4i}+\frac{(-3).e^{2it}}{4i}=\frac{3}{2}\left(\frac{e^{2it}}{2i}-\frac{e^{-2it}}{2i}\right)=\frac{3.\sin(2t)}{2}$$

elde edilir. Diferansiyel denklemin çözümü

$$y(t)=\frac{-t.\cos(2t)}{4}+\frac{\sin(2t)}{8}+\frac{3.\sin(2t)}{2}+e^t=\frac{-t.\cos(2t)}{4}+\frac{13.\sin(2t)}{8}+e^t$$

$$y(t)=\frac{-t.\cos(2t)}{4}+\frac{13.\sin(2t)}{8}+e^t$$

şeklinde bulunur.

Örnek 4.1.6. Kütlesi 2 gr olan P parçacığı X ekseni üzerinde hareket etmekte e O orijinine doğru nümerik değeri $8X$ olan bir kuvvet tarafından çekilmektedir. Başlangıçta $X=10$ da hareketsiz olarak durduğu kabul edilen bir cismin üzerine başka herhangi bir kuvvet etki etmiyorsa herhangi bir t anında cismin bulunduğu yeri bulunuz.

Sağa doğru olan yönü pozitif olarak alırsak, $X>0$ ise kuvvetin yönü sola doğrudur ve $-8X$ ile verilmelidir. $X<0$ ise kuvvetin yönü sağa doğrudur ve $-8X$ ile verilir. Öyleyse her durumda kuvvetin değeri $-8X$ dir. Newton Kanununa göre;

$$(Kütle).(İvme)=Kuvvet$$

Dolayısıyla problemin diferansiyel denklemini oluşturursak,

$$2X''=-8X$$

veya

$$X''+4X=0$$

yazılır.

Her iki tarafın Sumudu Dönüşümünü alırsak elde edeceğimiz denklem aşağıdaki şekilde olacaktır.

$$\frac{G(u)}{u^2}-\frac{y(0)}{u^2}-\frac{y'(0)}{u}+4G(u)=0$$

$$G(u)\left[\frac{1}{u^2}+4\right]=\frac{10}{u^2}$$

veya

$$G(u)=\frac{10}{1+4u^2}$$

elde edilir. $u=\frac{1}{s}$ dönüşümü yapılırsa

$$Y\left(\frac{1}{s}\right)=\frac{10s^2}{4+s^2}$$

ifadesine ulaşılır. Ters Sumudu dönüşümü için $s=2i$ ve $s=-2i$ olmak üzere rezidüler aşağıdaki biçimde hesaplanır.

$$\lim_{s\to 2i} e^{st}\frac{10s^2(s-2i)}{(s-2i)(s+2i)s}=5e^{2it}$$

$$\lim_{s\to -2i} e^{st}\frac{10s^2(s+2i)}{(s-2i)(s+2i)s}=5e^{-2it}.$$

Ters Sumudu dönüşümü alınırsa,

$$S^{-1}\left[Y(s)\right]=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{st}Y\left(\frac{1}{s}\right)\frac{ds}{s}=\sum residues\left[e^{st}\frac{Y(1/s)}{s}\right]$$

$$=5e^{2it}+5e^{-2it}=10\left(\frac{e^{2it}+e^{-2it}}{2}\right)=10\cos 2t$$

$$X(t)=10\cos 2t$$

çözümü elde edilir.

Örnek 4.1.7. 2 henry lik bir indüktör, 16 ohm luk bir rezistans ve 0,02 faradlık bir kondansatör E voltluk bir e.m.k ile seri olarak bağlanmaktadır. $t=0$ anında kondansatörün yükü ve devredeki akım sıfırdır. $E=100\sin 3t$ volt ise $t>0$ anında yükü ve akımı bulun.

t anındaki yük ve akım sırasıyla Q ve I olsun. Kirchhoff kanununa göre

$$2\frac{dI}{dt}+16I+\frac{Q}{0,02}=E$$

denkleminde $I=\dfrac{dQ}{dt}$ olduğundan denklem $2\dfrac{d^2Q}{dt^2}+16\dfrac{dQ}{dt}+\dfrac{Q}{0,02}=E$

$Q(0)=0\,,I(0)=Q'(0)=0$ şeklinde yazılabilir.

$$\frac{d^2Q}{dt^2}+8\frac{dQ}{dt}+25Q=50\sin 3t$$

denklemine Sumudu dönüşümü uygulanırsa

$$\frac{G(u)}{u^2}-\frac{Q(0)}{u^2}-\frac{Q'(0)}{u}+8\left[\frac{G(u)}{u}-\frac{Q(0)}{u}\right]+25G(u)=\frac{150u}{1+9u^2}$$

$$G(u)=\frac{150u^3}{\left(1+9u^2\right)\left(25u^2+8u+1\right)}$$

veya

$$G\left(\frac{1}{s}\right)=\frac{150s}{\left(s^2+9\right)\left(s^2+8s+25\right)}$$

elde edilir.

$s=\pm 3i$ ve $s=-4\pm 3i$ için rezidüler aşağıdaki biçimde hesaplanır.

$$\lim_{s\to -3i}\frac{(s+3i)e^{st}150s}{(s+3i)(s-3i)s\left(s^2+8s+25\right)}=\frac{e^{-3ti}150}{(-6i)(-9-24i+25)}=\frac{25e^{-3ti}}{-52i}-\frac{75e^{-3ti}}{104} \quad (4.2)$$

$$\lim_{s\to 3i}\frac{(s-3i)e^{st}150s}{(s+3i)(s-3i)s\left(s^2+8s+25\right)}=\frac{e^{3ti}150}{6i(-9+24i+25)}=\frac{25e^{3ti}}{52i}-\frac{75e^{3ti}}{104} \quad (4.3)$$

(4.2) ile (4.3) ifadelerinin toplamı,

$$\frac{25e^{3ti}}{-52i}+\frac{25e^{3ti}}{52i}-\frac{75e^{-3ti}}{104}-\frac{75e^{3ti}}{104}=\frac{25}{52}2\sin 3t-\frac{75}{52}\cos 3t=\frac{25}{52}\left[2\sin 3t-3\cos 3t\right]$$

olacaktır.

$$\lim_{s\to -4-3i} \frac{(s+4+3i)e^{st}150s}{(s+4+3i)(s+4-3i)\left[s^2+9\right]s} = \frac{75e^{(-4-3i)t}}{104} - \frac{50e^{(-4-3i)t}}{104i} \tag{4.4}$$

$$\lim_{s\to -4+3i} \frac{(s+4-3i)e^{st}150s}{(s+4+3i)(s+4-3i)\left[s^2+9\right]s} = \frac{75e^{(-4+3i)t}}{104} + \frac{50e^{(-4+3i)t}}{104i} \tag{4.5}$$

(4.4) ile (4.5) ifadelerinin toplamı,

$$\frac{75e^{(-4-3i)t}}{104} - \frac{50e^{(-4-3i)t}}{104i} + \frac{75e^{(-4+3i)t}}{104} + \frac{50e^{(-4+3i)t}}{104i} = \frac{25}{52}e^{-4t}\left[3\cos 3t + 2\sin 3t\right]$$

Dolayısıyla rezidüler birleştirildiğinde

$$Q = \frac{25}{52}\left[2\sin 3t - 3\cos 3t\right] + \frac{25}{52}e^{-4t}\left[3\cos 3t + 2\sin 3t\right]$$

sonucuna ulaşılır.

Burada $I = \dfrac{dQ}{dt} = \dfrac{75}{52}\left[2\cos 3t + 3\sin 3t\right] - \dfrac{25}{52}e^{-4t}\left[17\sin 3t + 6\cos 3t\right]$

elde edilir.

4.2. Sumudu Dönüşümünün Değişken Katsayılı Diferansiyel Denklemlere Uygulaması

Sumudu Dönüşümünü bazı değişken katsayılı diferansiyel denklemlere de uygulayabilmekteyiz. Değişken katsayılı diferansiyel denklemler gerekli dönüşümler yapılarak sabit katsayılı diferansiyel denklem haline getirilip ardından dönüşüm uygunlandığı gibi direkt Sumudu Dönüşümü ile de çözüm elde edilebilmektedir. Fakat Sumudu dönüşümü tüm değişken katsayılı difarensiyel denklemlerin çözümünde kullanabilir şeklinde bir genellemeye ulaşamamaktayız. Şu aşamada Sumudu Dönüşümü ile çözülemeyen bu tür denklemlerden çok sayıda mevcuttur.

Örnek 4.2.1. $x^2y''+4xy'+2y=x^2$ değişken katsayılı diferansiyel denklemini Sumudu dönüşümü ile çözelim.

$x = e^t$ dönüşümü yapılırsa,

$$y' = e^{-t}\frac{dy}{dt} \text{ ve } y'' = e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right) \text{ elde edilir.}$$

$$e^{2t}e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right) + 4e^te^{-t}\frac{dy}{dt} + 2y = e^{2t}$$

olacağından diferansiyel denklem $y'' + 3y' + 2y = e^{2t}$ şeklinde sabit katsayılı diferansiyel denkleme dönüşür. Her iki tarafa Sumudu Dönüşümü uygulanırsa

$$S[y''] + 3S[y'] + 2S[y] = S\left[e^{2t}\right]$$

$$\frac{G(u)}{u^2} - \frac{y(0)}{u^2} - \frac{y'(0)}{u} + 3\frac{G(u)}{u} - 3\frac{y(0)}{u} + 2G(u) = \frac{1}{1-2u}$$

$$G(u)\left[\frac{1}{u^2} + \frac{3}{u} + 2\right] = \frac{1}{1-2u} + \frac{y(0)}{u^2} + 3\frac{y(0)}{u} + \frac{y'(0)}{u}$$

$$G(u) = \frac{u^2}{2u^2 + 3u + 1}\frac{1}{1-2u} + \frac{3y(0)u + y'(0)u + y(0)}{2u^2 + 3u + 1}$$

$$Y\left(\frac{1}{s}\right) = \frac{\frac{1}{s^2}}{\left(\frac{2}{s^2} + \frac{3}{s} + 1\right)\left(1 - \frac{2}{s}\right)} + \frac{\frac{3y(0)}{s} + \frac{y'(0)}{s} + y(0)}{\left(\frac{2}{s^2} + \frac{3}{s} + 1\right)}$$

$$Y\left(\frac{1}{s}\right) = \frac{1}{\left(s^2 + 3s + 2\right)}\frac{s}{s-2} + \frac{\left[y(0)s + y'(0) + 3y(0)\right]}{\left(s^2 + 3s + 2\right)}$$

elde edilir. $s = -2$, $s = -1$ ve $s = 2$ için rezidüler

$$\lim_{s \to -2}\frac{e^{st}s(s+2)}{(s+2)(s+1)s(s-2)} = \frac{e^{-2t}}{4}$$

$$\lim_{s \to -1}\frac{e^{st}s(s+1)}{(s+2)(s+1)s(s-2)} = \frac{e^{-t}}{-3}$$

$$\lim_{s \to 2}\frac{e^{st}s(s-2)}{\left(s^2 + 3s + 2\right)s(s-2)} = \frac{e^{2t}}{12}$$

şeklinde hesaplanır. $x = e^t$ olduğundan

$\frac{e^{-2t}}{4}=\frac{1}{4x^2}, \frac{e^{-t}}{-3}=\frac{-1}{3x}, \frac{e^{2t}}{12}=\frac{x^2}{12}$ eşitlikleri elde edilir.

$$\lim_{s\to -2}\frac{e^{st}s\left[y(0)s+y'(0)+3y(0)\right](s+2)}{(s+2)(s+1)s}=\frac{e^{-2t}\left[-2y(0)+y'(0)+3y(0)\right]}{-1}$$

$$=\frac{\left[y'(0)+y(0)\right]}{-x^2}$$

$$\lim_{s\to -1}\frac{e^{st}s\left[y(0)s+y'(0)+3y(0)\right](s+1)}{(s+2)(s+1)s}=\frac{e^{-t}\left[-y(0)+y'(0)+3y(0)\right]}{1}$$

$$=e^{-t}\left[-y(0)+y'(0)+3y(0)\right]$$

elde edilir. Rezidüler toplandığında denklemin çözümü

$$y(x)=\left[\frac{-1}{3}+2y(0)+y'(0)\right]\frac{1}{x}+\left[\frac{1}{4}-y(0)-y'(0)\right]\frac{1}{x^2}+\frac{x^2}{12}$$

şeklinde yazılır. Burada

$$C_1=\frac{-1}{3}+2y(0)+y'(0)$$

$C_2=\frac{1}{4}-y(0)-y'(0)$ alınırsa

$$y(x)=C_1\frac{1}{x}+C_2\frac{1}{x^2}+\frac{x^2}{12}$$

genel çözümüne ulaşılır.

Örnek 4.2.2. $xy''+(1-x)y'+ny=0, \quad y(0)=0$

diferansiyel denklemini Sumudu dönüşümü ile çözelim.

$S[y']=\frac{G(u)}{u}, S[xy']=uG'(u)$ ve $S[xy'']=G'(u)-\frac{G(u)}{u}$ olmak üzere yukarıdaki denklemin Sumudu dönüşümü

$$S[xy'']+S\left[(1-x)y'\right]+nS[y]=0$$

$$G'(u)-\frac{G(u)}{u}+\frac{G(u)}{u}-uG'(u)+nG(u)=0$$

$$G'(u)-uG'(u)+nG(u)=0$$

$$G'(u)(1-u)+nG(u)=0$$

şeklindedir. Bu denklemin çözümü

$$\frac{G'(u)}{G(u)}=\frac{n}{u-1}$$

veya

$$\ln G(u)=n\ln(u-1)+\ln C$$

$$G(u)=|u-1|^n C$$

$$G(u)=(u-1)^n$$

bulunur.

4.3. Hermite Diferansiyel Denklemine Sumudu Dönüşümünün Uygulaması

Hermite Diferansiyel denklemi diye adlandırılan ,

$$y''-2xy'+2py=0$$

denkleminin katsayıları $(-\infty,\infty)$ aralığında tanımlıdır. $y(0)=c_0$, $y'(0)=c_1$ kabul ederek çözümü,

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$$

kuvvet serisi şeklinde ararsak;

Hermite denkleminin genel çözümü olan

$$y(x)=c_0[1-\frac{2p}{2!}x^2+\frac{2^2 p(p-2)}{4!}x^4+\ldots$$

$$+(-1)^k\frac{2^k p(p-2)\ldots(p-2k+2)}{(2k)!}x^{2k}+\ldots]$$

$$+c_1[x-\frac{2(p-1)}{3!}x^3+\frac{2^2(p-1)(p-3)}{5!}x^5+\ldots$$

$$+(-1)^k\frac{2^k(p-1)(p-3)\ldots(p-2k+1)}{(2k+1)!}x^{2k+1}+\ldots]$$

ifadesine ulaşırız . Genel çözüm

$$y(x)=c_0y_1(x)+c_1y_2(x)$$

şeklinde yazılır. Hermite Diferansiyel denkleminin çözümünü Sumudu dönüşümü ile bulalım.

$y''-2xy'+2ly=0$ şeklindeki 2. mertebeden hermit diferansiyel denklemi için başlangıç koşulları $y(0)=a$, $y'(0)=b$ ve l bir sabit olmak üzere Sumudu dönüşümü uygulandığında

$$S[y'']-2S[xy']+2lS[y]=0$$

veya

$$\frac{G(u)}{u^2}-\frac{a}{u^2}-\frac{b}{u}-2u\frac{dG(u)}{du}2lG(u)=0$$

eşitliğine ulaşılır.

$G(u)=Y(u)$ alınırsa,

$$\frac{Y(u)}{u^2}-\frac{a}{u^2}-\frac{b}{u}-2uY'(u)+2lY(u)=0$$

$$Y(u)\left(\frac{1}{u^2}+2l\right)-2uY'(u)-\frac{a}{u^2}-\frac{b}{u}=0$$

$$Y'(u)-Y(u)\left(\frac{1}{2u^3}+\frac{l}{u}\right)+\frac{a}{2u^3}+\frac{b}{2u^2}=0$$

$$dY-\left[Y(u)\left(\frac{1}{2u^3}+\frac{l}{u}\right)-\frac{a}{2u^3}-\frac{b}{2u^2}\right]du=0$$

lineer denklemi elde edilir. Bu lineer denklemin çözümü

$$e^{\frac{1}{4u^2}-l\ln u}Y'(u)-e^{\frac{1}{4u^2}-l\ln u}Y(u)\left(\frac{1}{2u^3}+\frac{l}{u}\right)+e^{\frac{1}{4u^2}-l\ln u}\left(\frac{a}{2u^3}+\frac{b}{2u^2}\right)=0$$

$$\frac{d}{du}\left(Y(u)e^{\frac{1}{4u^2}-l\ln u}\right)=-e^{\frac{1}{4u^2}-l\ln u}\left(\frac{a}{2u^3}+\frac{b}{2u^2}\right)$$

$$Y(u)e^{\frac{1}{4u^2}-l\ln u}=-\int_0^\infty e^{\frac{1}{4u^2}-l\ln u}\left(\frac{a}{2u^3}+\frac{b}{2u^2}\right)$$

$$Y(u)e^{\frac{1}{4u^2}-l\ln u}=-\int_0^\infty e^{\frac{1}{4u^2}-l\ln u}\frac{b}{2u^2}du=-b\int_0^\infty e^{\frac{1}{4u^2}}\frac{1}{2u^3}du$$

şeklinde olacaktır.

Özel olarak $a=0$ ve $l=1$ seçilirse

$$Y(u)e^{\frac{1}{4u^2}}u^{-l}=be^{\frac{1}{4u^2}}$$

veya

$$Y(u)=bu$$

bulunur. $u=\frac{1}{s}$ dönüşümü yapılırsa

$$Y\left(\frac{1}{s}\right)=\frac{b}{s}$$

yazılır.

Ters Sumudu Dönüşümü uygulanırsa

$y(t)=bt$ çözümü elde edilir.

BÖLÜM 5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Sumudu Dönüşümünü adi diferansiyel denklemlerin ve özellikle başlangıç değer problemlerinin çözümünde etkili şekilde kullanabilmekteyiz. Laplace Dönüşümü ile olan bağlantısı dolayısıyla bu dönüşümle çözülebilen problemlere ek bir çözüm yöntemi olarak uygulanabilir. Değişken katsayılı diferansiyel denklemlerin çözümünde sayıca az olmakla birlikte değişken dönüştürme yapılarak ya da direkt uygulanarak bu dönüşüm kullanılabilir. Değişken katsayılı özel denklemlerden olan Hermite diferansiyel denklemini Sumudu Dönüşümü ile çözerken özel koşullar dikkate alınmıştır ve bu koşullar altında denklemin çözümüne ulaşılmıştır.

Tablo 1.1. Sumudu Dönüşümünün Bazı Temel Özellikleri

Özellik	Özellik Adı
$G(u)=\frac{F(1/u)}{u}$ ve $F(s)=\frac{G(1/s)}{s}$	Sumudu Dönüşümünün Laplace Dönüşümü ile ilişkisi
$S[af(t)+bg(t)]=aS[f(t)]+bS[g(t)]$	Lineerlik Özelliği
$G_1(u)=\mathbb{S}[f^{'}(t)]=\frac{G(u)-f(0)}{u}=\frac{G(u)}{u}-\frac{f(0)}{u}$	
$G_2(u)=\mathbb{S}[f^{''}(t)]=\frac{G(u)}{u^2}-\frac{f(0)}{u^2}-\frac{f'(0)}{u}$	Fonksiyon Türevlerinin Sumudu Dönüşümü
$G_n(u)=\mathbb{S}[f^{(n)}(t)]=\frac{G(u)}{u^n}-\frac{f(0)}{u^n}-\frac{f^{(n-1)}(0)}{u}$	
$S\left[\int_0^t f(\tau)d\tau\right]=uG(u)$	Fonksiyonun İntegralinin Sumudu Dönüşümü
$S[f(at)]=G(au)$	Birinci Dereceden Koruma Teoremi
$S\left[t\frac{df(t)}{dt}\right]=u\frac{dG(u)}{du}$	İkinci Dereceden Koruma Teoremi
$S[e^{at}f(t)]=\frac{1}{1-au}G\left(\frac{u}{1-au}\right)$	Birinci Öteleme Teoremi
$\lim_{u\to 0}G(u)=\lim_{t\to 0}f(t)$	Başlangıç Değer Teoremi
$\lim_{u\to\pm\infty}G(u)=\lim_{t\to\pm\infty}f(t)$	Ortalama Değer Teoremi
$S[f(t)]=\frac{\int_0^{\frac{T}{u}}f(ut)e^{-t}dt}{1-e^{-\frac{T}{u}}}$	T-periyotlu Bir Fonksiyonun Sumudu Dönüşümü

Tablo 1.2. Bazı Temel Fonksiyonların Sumudu Dönüşümleri

	Fonksiyon	Sumudu Dönüşümü
1	1	1
2	t	u
3	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}, n=1,2,...$	u^{n-1}
4	e^{at}	$\frac{1}{1-au}$
5	$\frac{\sin at}{a}$	$\frac{u}{1+a^2u^2}$
6	$\cos at$	$\frac{1}{1+a^2u^2}$
7	$\frac{\sinh at}{a}$	$\frac{u}{1-a^2u^2}$
8	$\cosh at$	$\frac{1}{1-a^2u^2}$
9		$\frac{e^{bt}\, \text{s} \quad \text{i}at}{a}$
$\frac{u}{(1-bu)^2-a^2u^2}$		
10		$e^{bt} \cosh at$
$\frac{1-bu}{(1-bu)^2-a^2u^2}$		

KAYNAKLAR

[1] Watugala, G.K., Sumudu transform: a new integral transform to solve differential equations and control engineering problems . Int. J. Math Educ. Sci. Technol. 24(1):35-43, 1993.

[2] Weerakoon, S., Applications of Sumudu Transform to partial differential equations. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, Vol. 25, No.2 , pp 277-283, 1994.

[3] Weerakoon, S., Complex inversion formula for Sumudu transforms. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology Vol. 29, No.4 , pp 618-621, 1998.

[4] Watugala, G.K., The Sumudu transform for functions of two variables. Mathematical Engineering in Industry , Vol. 8, No. 4, pp. 293-302, 2002.

[5] Asiru, M. A., Sumudu transform and the solution of integral equations of convolution type. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, Vol. 32, No.6 , pp 906-910, 2001.

[6] Asiru, M. A., Further properties of the Sumudu transform and its applications. Int. J. Math Educ. Sci. Technol 33(3) : 441-449, 2002.

[7] Kılıçman, A., Eltayeb, H., On the applications of Laplace and Sumudu transforms. Journal of the Franklin Institute, Volume 347, No.5,pp 848-862, 2010.

[8] Kılıçman, A., Eltayeb, H., Agarwal P.R., On Sumudu transform and system of differential equations. Abstract and Applied Analysis, Vol. 2010, Article ID 598702, 11 pages, 2010.

[9] Aksoy, Y., Diferansiel Denklemler , 1.Cilt. Yıldız Teknik Üniversitesi Basım-Yayın Merkezi, 1-333, 2011.

[10] Halilov, H., Diferansiyel Denklemler ve Lineer Cebrin Elemanları, Literatür yayınları :96 , 1-448, 2003.

[11] Yaşar, İ. B., Diferansiyel Denklemler ve Uygulamaları, Ankara: Siyasal Kitabevi, 1-479, 1997.

[12] Spiegel Murray R., Çevirenler: Cerit, C., Eraslan S., Laplace Dönüşümleri, Eğitim Yayınları, 1-252, 1965.

[13] Zill, D.G., Shanahan, P. D., Çeviri Editörü : Ahmet Dernek, Kompleks Analiz ve Uygulamaları , Nobel Akademik Yayıncılık Eğitim Danışmanlık, 2013.

[14] Başkan, T., Kompleks Fonksiyonlar Teorisi, Dora Basım Yayın Ltd.Şti., 2012.

[15] Belgacem, F.B.M., Karaballi, A.A., and Kalla, S.L., Analytical investigations of the Sumudu transform and applications to integral production equations. Mathematical Problems in Engeineering, no:3, 103-118, 2003.

[16] Belgacem, F.B.M., and Karaballi, A.A., Sumudu transform fundamental properties investications and applications Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis, Article ID 91083 , Pages 1-23, 2006.

[17] Belgacem, F.B.M., Introducing and analysing deeper Sumudu Properties. Nonlinear Studies, vol. 13, No. 1, pp. 23-41, 2006.

[18] Eltayeb, H., Kılıçman, A., A note on the Sumudu transforms and differential equations. Applied Mathematical Sciences, Vol. 4, no. 22, 1089-1098, 2010.

[19] Kılıçman, A., Eltayeb, H., On a new integral transform and differential equations. Mathematical Problems in Engeineering, Volume 2010, Article ID 463579,13 pages doi:10.1155/2010/463579, 2010.

[20] Kılıçman, A., Eltayeb, H., and Atan K.A.M., A note on the comparison between Laplace and Sumudu transforms. Bulletin of the Iranian Mathematical Society , Vol. 37, No. 1(2011), pp 131-141, 2011.

[21] Cerit C., Çözümlü Diferansiyel Denklem Problemleri. İ.T.Ü. Fen Edebiyat Fakültesi, 1-316, 2012.

[22] Türker E.S., Başarır M., Çözümlü Problemlerle Diferansiyel Denklemler, Değişim yayınları, 2003.

[23] Hasanov E., Uzgören G., Büyükaksoy A., Diferansiyel Denklemler Teorisi, Papatya Yayıncılık, 2002.

ÖZGEÇMİŞ

Neriman Berra ÇAKMAK 1980 yılında İstanbul'da doğdu. İlk, orta ve lise eğitimini Kocaeli'de tamamladı. 2007 yılında Sakarya Üniversitesi'nde Matematik Öğretmenliği Bölümünde Tezsiz Yüksek Lisans eğitimini tamamladı.