T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KISMİ TÜREVLİ DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNİN SÜREKLİ BAĞIMLILIĞI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Merve ÇELEBİ

Enstitü Anabilim Dalı	**:**	**MATEMATİK**
Enstitü Bilim Dalı	**:**	**UYGULAMALI MATEMATİK**
Tez Danışmanı	**:**	**Prof. Dr. Şevket GÜR**

Mayıs 2019

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KISMİ TÜREVLİ DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNİN SÜREKLİ BAĞIMLILIĞI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Merve ÇELEBİ

Enstitü Anabilim Dalı	:	**MATEMATİK**
Enstitü Bilim Dalı	:	**UYGULAMALI MATEMATİK**

Bu tez 31/05/2019 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği ile kabul edilmiştir.

Prof. Dr. **Şevket GÜR** **Jüri Başkanı**	**Doç. Dr.** **Metin YAMAN** **Üye**	**Dr. Öğretim Üyesi** **Engin CAN** **Üye**

BEYAN

Tez içindeki tüm verilerin akademik kurallar çerçevesinde tarafımdan elde edildiğini, görsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçların akademik ve etik kurallara uygun şekilde sunulduğunu, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezde yer alan verilerin bu üniversite veya başka bir üniversitede herhangi bir tez çalışmasında kullanılmadığını beyan ederim.

Merve ÇELEBİ

31.05.2019

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimim süresince kıymetli bilgi ve deneyimlerinden yararlandığım, her konuda bilgi ve desteğini almaktan çekinmediğim, tezin planlanmasından yazılmasına kadar tüm süreçlerinde yardımlarını esirgemeyen, teşvik eden, aynı titizlikte beni yönlendiren Sakarya Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Anabilim Dalı öğretim üyesi değerli Danışman Hocam Prof. Dr. Şevket GÜR'e, bugünlere gelmemde emeği olan değerli aileme ve yüksek lisans eğitimim boyunca bana her türlü desteği veren ve hissettiren sevgili eşim Öğr.Gör.Samet ÇELEBİ'ye sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

$u(x,t)$	: Bilinmeyen fonksiyon
∇	: Gradiant operatörü
$\nabla^2 = \Delta$	: Laplace operatörü
Ω	: R^n'de düzgün sınıra sahip sınırlı bölge
$H^1(\Omega), H_0^1(\Omega)$	: Sobolev uzayları
(u,v)	: $\int_\Omega uvdx$
$\|.\|$	: $\|.\|_2$
$\|u\|_{L^p(\Omega)}$	: $\|.\|_p$

ÖZET

Anahtar kelimeler: Sürekli Bağımlılık, Suspension Bridge Denklemi

Bu tezde, kısmi türevli diferansiyel denklemlerin çözümlerinin katsayılara sürekli bağımlılığı ele alınmıştır. 6 bölümden oluşan bu çalışmanın birinci bölümünde kısmi türevli diferansiyel denklemler ile ilgili yapılan geçmiş çalışmalar hakkında bilgi verilmiştir. İkinci bölümde bu tezde kullanılan temel tanım ve kavramlara yer verilmiştir. Üçüncü bölümde, A.O. Celebi, V.K. Kalantarov, D. Uğurlu tarafından yazılan "On continuous dependence on coefficients of the Brinkman–Forchheimer eqations" adlı makale incelenmiştir. Dördüncü bölümde, G.N. Aliyeva ve V.K. Kalantarov tarafından yazılan "Structural stability for Fitzhugh-Nagumo equations" adlı makale incelenmiştir. Beşinci bölümde ise daha önce çalışılmamış olan asma köprü denkleminin çözümlerinin katsayılarına sürekli bağımlılığı ayrıntılı olarak incelenmiştir.

CONTINUOUS DEPENDENCE OF SOLUTIONS OF PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

SUMMARY

Keywords: Continuous Dependence, Suspension Bridge Equation

In this paper, the continuous dependence of the solutions of partial differential equations to the coefficients is discussed. In the first part of this study consisting of 6 chapters, information about previous studies on partial differential equations is given. In the second chapter, the basic definitions and concepts used in this thesis are given. In the third chapter, the article "On continuous dependence on coefficients of the Brinkman Forchheimer equations", written by A.O. Celebi, V.K. Kalantarov, D. Ugurlu, was examined. In the fourth chapter, the article "Structural stability for Fitzhugh-Nagumo equations" written by G.N. Aliyeva and V.K. Kalantarov was examined. In the fifth part, continuous dependence on the coefficients of the solutions of the Suspension bridge equation, which has not been studied before, has been examined in detail.

BÖLÜM 1. GİRİŞ

Kısmi türevli denklemler uygulamalı matematik alanında geniş bir kullanım alanına sahiptir. Mühendislik, fizik, kimya, biyoloji gibi birçok alanda problem kısmi diferansiyel denklemlerle ifade edilmektedir [1]. Son yıllarda, mühendislerin performans ve verimlilik konularıyla daha fazla ilgilenmeye başlaması matematiksel optimizasyon yordamlarının mühendislik tasarım tekniklerine dahil edilmesine yol açmıştır. Örneğin, uzay aracında ısıya duyarlı bileşenlerin kullanılması, enerjiyi verimli kullanan ve ancak uygulanabilir çalışma sıcaklıklarını koruyan sistemler tasarlama sorununu gündeme getirmektedir. Bu tasarım problemleri, durum kısıtlamaları olan optimal kontrol problemleri ile modellenebilir [2]. İkinci mertebeden kısmi diferansiyel denklemler teorisi, akışkanlar mekaniği, gözenekli ortamlarda akış, katılarda ısı iletimi, gözenekli ortamlarda yayılan kimyasalların yayılışı, tellerde ve zarlarda dalga yayılımı ve katıların mekaniğindeki sorunların araştırılmasında kapsamlı uygulamalar bulmuştur. Özellikle katıların mekaniğindeki çalışmalar ile ilgili olarak yüksek mertebeden kısmi diferansiyel denklemler geliştirilmiştir [3]. Parabolik tipte kısmi diferansiyel denklemlerin belirli bir sınıfı tarafından tanımlanan Cauchy probleminin açık çözümlerini elde etmek için yeni bir algoritma önerilmektedir. Algoritma, kısmi diferansiyel denklemleri sıradan bir matris diferansiyel denklemine dönüştürmek için problemin cebirsel yapısını kullanır ve daha sonra lie cebirsel tekniklerle çözülür[4]. Eliptik kısmi diferansiyel denklem problemlerinin çözümü için örtüşmeyen bir alan ayrışma metodu irdelenmiştir [5].

Kısmi diferansiyel denklem problemlerinin çözümünün denklemlerdeki katsayılar üzerine sürekli bağımlılığı sorunu, son yıllarda çeşitli problemler için yoğun olarak çalışılmıştır. Buna bazen yapısal kararlılık sorunu denir. Yapısal kararlılıkta vurgu, kısmi diferansiyel denklemlerin katsayılarındaki değişikliklerin, yapısal parametrelerdeki değişikliklerle fiziksel olarak yansıtılabileceği anlamına gelir. Öte yandan, sürekli bağımlılık sonuçları, hem sayısal hesaplamada hem de verilerin fiziksel ölçümünde ortaya çıkan kaçınılmaz hata nedeniyle önemlidir. Bu hataların çözümlere etkisinin büyüklüğünü bilmek önemlidir. [6]. Sürekli bağımlılıkla ilgili birçok sonucu Ames ve Straughan [7] ele almıştır. Başlangıç-zaman geometrisine sürekli bağımlılık çalışması, Knops & Payne (1969) tarafından başlatıldı. Başlangıç-zaman geometrisine ek olarak doğrusal elastodinamikte yanlış ortaya çıkan problemler için sürekli bağımlılığın çeşitli yönlerini araştırdı ve geliştirdi. Özellikle kısmi diferansiyel denklemler için yanlış zamanlama problemlerinde başlangıç-zaman geometrisi problemlerinin ne kadar önemli olduğunu vurguladı [7].

Biz bu tezde sürekli bağımlılığı asma köprü denkleminde uygulayacağız. Asma köprü denklemi olarak,

$$\begin{array}{lll} u_{tt} + \Delta^2 u + ku^+ + \delta u_t + f(u) = h(x) & & \\ u(x,0) = u_0(x), \quad & u_t(x,0) = u_1(x) & x \in \Omega, \\ u = 0, & \Delta u = 0 & x \in \partial\Omega, \mathrm{t} > 0 \end{array}$$

lineer olmayan başlangıç ve sınır-değer problemini ele alacağız. Burada $u(x,t)$ yol düzleminin düşey düzlemdeki sapmasını temsil eden bilinmeyen fonksiyonu, $k > 0$ bağlantının yaylanma sabitini ve $\delta > 0$ sabiti ifade eder. $u^+ = max\{u, 0\}$ u' nun pozitif kısmını temsil eder. Ω, $\mathbb{R}^n$'de sınırlı bir bölgedir.

Literatürde araştırma yapıldığında, 1968 yılından itibaren Suspension Bridge denklemiyle ilgili çeşitli çalışmalar yapılmıştır. Suspension Bridge sapma denklemlerinin sayısal çözümleri üzerine Dickey, R. W. [8], Suspension Bridge denklemlerinin periyodik çözümleri üzerine Choi, Q-Heung (KR-INHA); Jung, Tacksun (KR-INHA) [9], Humphreys, Lisa Doolittle [10], An, Yukun; Zhong, Chenkui [11], Wang, Shanshan; An, Yukun [12] tarafından kapsamlı çalışma yapılmıştır.

Bu tez çalışması üç ana bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, 2005 yılında A.O. Celebi, V.K. Kalantarov, D. Uğurlu' nun birlikte hazırladıkları "On continuous dependence on coefficients of the Brinkman–Forchheimer eqations" [13] isimli makale detaylı olarak incelenmiştir. Bu makalede Brinkman Forchheimer denklemlerinin çözümlerinin Brinkman ve Forchheimer katsayılarına sürekli bağımlılığı incelenmiştir.

İkinci bölümde, G.N. Aliyeva ve V.K. Kalantarov' un birlikte hazırladıkları "Structural stability for Fitzhugh-Nagumo equations" [14] isimli makale ayrıntılı olarak incelenmiştir. Bu makalede çok boyutlu Fitzhugh-Nagumo denklemleri için başlangıçta sınır değer probleminin güçlü çözümlerinin difüzyon katsayısı üzerine sürekli bağımlılığı belirlenmiştir.

Üçüncü bölümde ise asma köprü denkleminin çözümlerinin katsayılara sürekli bağımlılığı incelenmiştir.

BÖLÜM 2. TANIM VE KAVRAMLAR

2.1. Temel Tanımlar

2.1.1. Tanım(L^p Uzayı):

$X = [a, b] \subset \mathbb{R}$ sınırlı kapalı aralığı üzerinde

$$L^p(X) = \left\{ f: f \text{ ölçülebilir } ve \left(\int_X |f|^p \, d\mu \right)^{1/p} < \infty \right\}, 1 \leq p < \infty$$

şeklinde tanımlanan uzaya $L^p(X)$ uzayı denir. Bu uzay üzerindeki norm

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p \, d\mu \right)^{1/p}$$

şeklinde tanımlanır [15].

2.1.2. Tanım (Banach Uzayı):

$(X, \|.\|)$ bir normlu uzay olsun. X'deki her Cauchy dizisi yakınsak ise bu uzaya normlu tam uzay veya Banach uzayı adı verilir [16].

2.1.3. Tanım (İç Çarpım Uzayı):

X bir kompleks veya reel vektör uzay ve $\langle .,. \rangle$, X üzerinde bir iç çarpım ise $(X, \langle .,. \rangle)$ ikilisine bir iç çarpım uzayı adı verilir [15].

2.1.4. Tanım (Hilbert Uzayı):

Bir iç çarpım uzayı, iç çarpımın indirgendiği normdan indirgenen metriğe göre tam ise bu uzaya bir Hilbert uzayı denir. $L^2(\Omega)$ uzayı,

$$\langle u, v\rangle = \int_{\Omega} u\, v\, dx$$

iç çarpımı ile Hilbert uzayıdır [15,17].

2.1.5. Green Özdeşliği

$$\int_{\Omega} v\Delta u dx = \int_{\partial\Omega} v\frac{\partial u}{\partial n} ds - \int_{\Omega} \nabla v \nabla u dx$$

dır. Burada n dışa doğru yönlendirilmiş birim vektör ve $\frac{\partial u}{\partial n} = n.\nabla u$ dır [17].

2.2. Kullanılan Eşitsizlikler

2.2.1. Cauchy – Schwarz Eşitsizliği

$(X, \langle .,. \rangle)$ bir iç çarpım uzayı ise her $x, y \in X$ için

$$|\langle x, y\rangle|^2 \leq \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle$$

eşitsizliği sağlanır. Bu eşitsizlik normlu iç çarpım uzayında

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|$$

şeklinde yazılır [18].

2.2.2. Young Eşitsizliği

$a, b \geq 0$ ve $p > 1$ için $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. Bu durumda

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

dır. Burada $a = (\varepsilon p)^{\frac{1}{p}} X$ ve $b = \frac{Y}{(\varepsilon p)^{\frac{1}{p}}}$ alınırsa,

$$XY \leq \varepsilon X^p + C(\varepsilon) Y^q$$

ε-Young eşitsizliği elde edilir. Burada $C(\varepsilon) = (\varepsilon p)^{-\frac{q}{p}} q^{-1}$ dır [17].

2.2.3. Hölder Eşitsizliği

$p > 1, q > 1$ ve ${}^{1}/_{p} + {}^{1}/_{q} = 1$ olacak şekilde seçilsin. $f(x) \in L^p$ ve $g(x) \in L^q$ olduğunu kabul edelim. Bu halde, $fg \in L$ şeklindedir ve

$$\left| \int_a^b f(x) g(x) dx \right| \leq \left[\int_a^b |f(x)|^p dx \right]^{1/p} \left[\int_a^b |g(x)|^q dx \right]^{1/q}$$

eşitsizliği sağlanır [19].

2.2.4. Sobolev – Poincare Eşitsizliği

$2 \leq q < \infty \ (n = 1,2)$ ve $2 \leq q < \frac{2n}{n-2} \ (n \geq 3)$ olsun. Bu durumda $u \in H_0^1(\Omega)$ ve $c = c(\Omega, p)$ olmak üzere aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir [17].

$$\|u\|_q \leq c \|\nabla u\|_2$$

2.2.5. İnterpolasyon Eşitsizliği

$1 \leq p < q < r$ ve $0 < \theta < 1$ için $\frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{r} = \frac{1}{q}$ olsun. Eğer $u \in L^p(\Omega) \cap L^r(\Omega)$ ise $u \in L^q(\Omega)$ ve

$$\|u\|_q \leq \|u\|_p^{\theta} \|u\|_r^{1-\theta}$$

dır [17].

2.2.6. Aritmetik - Geometrik Ortalama Eşitsizliği

$x, y \in \mathbb{R}^n$ ve $(x-y)^2 \geq 0$ olmak üzere,

$$xy \leq \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}$$

eşitsizliği sağlanır.

2.2.7. Gronwall Eşitsizliği

$u(t), [0, T]$ aralığında negatif olmayan mutlak sürekli bir fonksiyon, $\phi(t)$ ve $\psi(t)$ negatif olmayan $[0, T]$ üzerinde toplanabilir fonksiyonlar olmak üzere,

$$u'(t) \leq \phi(t)u(t) + \psi(t)$$

eşitsizliği sağlansın. Bu durumda $0 \leq t \leq T$ için

$$u(t) \leq e^{\int_0^t \phi(\tau)d\tau} \left(u(0) + \int_0^t \psi(\tau)d\tau \right)$$

yazılabilir [17].

BÖLÜM 3. BRİNKMAN–FORCHEİMER DENKLEMLERİNİN KATSAYILARINA SÜREKLİ BAĞIMLILIĞI

Bu bölümde A.O. Celebi, V.K. Kalantarov, D. Uğurlu tarafından 2005 yılında yazılan “On continuous dependence on coefficients of the Brinkman–Forchheimer equations” [17] adlı çalışma ele alınarak detaylı bir şekilde incelenmiştir.

3.1. Giriş ve Problemin İfadesi

Bu çalışmada, Brinkman–Forchheimer denklemleri için

$$u_t = \gamma \Delta u - au - b_1 |u|^\alpha u - \nabla p, \qquad \nabla . u = 0, x \in \Omega, t > 0, \tag{3.1}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \qquad x \in \Omega, \tag{3.2}$$

$$u = 0, \qquad x \in \partial\Omega, \mathrm{t} > 0 \tag{3.3}$$

başlangıç-sınır değer problemi incelenmiştir. Burada $u = (u_1, u_2, u_3)$ akış hız vektörü, $\gamma > 0$ Brinkman katsayısı, $a > 0$ Darcy katsayısı, $b > 0$ Forchheimer katsayısı, p basınç, $\alpha \in [1,2]$ verilen bir sayı, Ω; $\partial\Omega$ sınırı C^2 sınıfından olan $\mathbb{R}^3$’ün sınırlı bir bölgesidir.

$(3.1) - (3.3)$ probleminin çözümlerinin L^2 normunda b ve γ katsayılarına sürekli bağımlılığı ele alınmıştır. Aşağıda $\widetilde{H}_0^1(\Omega, \mathbb{R}^3) = \{u \in H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^3) : \nabla . u = 0\}$ ve $L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$ deki $H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$ nin kapanışı olan $\tilde{L}^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$ fonksiyon uzayları kullanılacaktır.

3.2. Forchheimer Katsayısına Sürekli Bağımlılık

Bu bölümde $(3.1) - (3.3)$ probleminin H^1 normunda b Forchheimer katsayısına sürekli bağımlılığı ispatlanmıştır.

Teorem 3.2.1. Farzedelim ki $1 \leq \alpha \leq 2$ olsun. O halde herhangi bir $u_0 \in \widetilde{H}_0^1(\Omega)$ için, $(3.1) - (3.3)$ probleminin tek bir $u \in C([0,T]; \widetilde{H}_0^1(\Omega))$ çözümü vardır. Ayrıca, herhangi bir $T > 0$ için

$$\sup_{o \leq t \leq T} \|\nabla u(t)\| \leq D \;\; ve \;\; \int_0^T \|u_t(t)\|^2 dt \leq D \tag{3.4}$$

eşitsizlikleri sağlanır, burada D (3.1)' in başlangıç verilerine ve parametrelerine bağlı olan pozitif bir sabittir.

İspat. (3.1) denklemi $L^2(\Omega)$'da $(u_t + u)$ ile çarpılırsa,

$$\begin{aligned} \int_\Omega u_t\,(u_t+u)dx &= \int_\Omega \gamma\Delta u\,(u_t+u)dx - \int_\Omega au\,(u_t+u)dx \\ &\quad - \int_\Omega b|u|^\alpha u\,(u_t+u)dx - \int_\Omega \nabla p\,(u_t+u)dx \end{aligned} \tag{3.4}$$

elde edilir. (3.4)'teki her bir ifade ayrı ayrı hesaplanırsa,

$$\begin{aligned} \int_\Omega u_t\,(u_t+u)\,dx &= \int_\Omega u_t\,u_t\,\,dx + \int_\Omega u_t\,u\,dx = \int_\Omega (u_t)^2\,dx + \int_\Omega \frac{du}{dt}u\,dx \\ &= \int_\Omega (u_t)^2\,dx + \int_\Omega \frac{1}{2}\frac{d}{dt}u^2\,dx = \|u_t\|^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u\|^2 \end{aligned}$$

$$\int_\Omega \gamma\, \Delta u\ (u_t + u)\, dx = \gamma\left[\int_\Omega \Delta u\ u_t\, dx + \int_\Omega \Delta u\ u\, dx\right]$$

$$= \gamma\left[\left(\underbrace{\Delta u\,.\,u_t|_{\partial\Omega}}_{0} - \int_\Omega \nabla u\ \nabla u_t\, dx\right) + \left(\underbrace{u.\nabla u|_{\partial\Omega}}_{0} - \int_\Omega \nabla u\ \nabla u\, dx\right)\right]$$

$$= \gamma\left[-\int_\Omega \nabla u\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\nabla u\, dx - \int_\Omega \nabla u\ \nabla u\, dx\right]$$

$$= \gamma\left[-\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\int_\Omega (\nabla u)^2\, dx - \int_\Omega (\nabla u)^2\, dx\right]$$

$$= -\frac{\gamma}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u\|^2 - \gamma\|\nabla u\|^2$$

$$\int_\Omega a\, u\ (u_t + u)\, dx = a\left(\int_\Omega u\ u_t\, dx + \int_\Omega u\ u\, dx\right)$$

$$= a\left(\int_\Omega u\ \frac{d}{dt}u\, dx + \int_\Omega u^{\,2}\, dx\right)$$

$$= a\left(\int_\Omega \frac{1}{2}\frac{d}{dt}u^2\, dx + \int_\Omega u^{\,2}\, dx\right)$$

$$= \frac{a}{2}\frac{d}{dt}\|u\|^2 + a\|u\|^2$$

$$\int_\Omega b|u|^\alpha u\, (u_t + u)\, dx = b\left(\int_\Omega |u|^\alpha u\, u_t\, dx + \int_\Omega |u|^\alpha u\, u\, dx\right)$$

$$= b\left(\int_\Omega |u|^\alpha u\frac{d}{dt}u\, dx + \int_\Omega |u|^\alpha u\, u\, dx\right)$$

$$= b\left(\int_\Omega \frac{1}{\alpha+2}\frac{d}{dt}|u|^{\alpha+2}dx + \int_\Omega |u|^{\alpha+2}\, dx\right)$$

$$= \frac{b}{\alpha+2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |u|^{\alpha+2}dx + b\int_\Omega |u|^{\alpha+2}\, dx$$

$$\int_{\Omega} \nabla p \ (u_t + u)\, dx = \int_{\Omega} \nabla p \ u_t\, dx + \int_{\Omega} \nabla p \ u\, dx$$

$$= \left(u_t . p|_{\partial\Omega} - \int_{\Omega} \nabla u_t \, p \, dx \right) + \left(u . p|_{\partial\Omega} - \int_{\Omega} \nabla u \, p\, dx \right)$$

$$= 0$$

eşitlikleri elde edilir. Elde edilen bu eşitlikler (3.4)'te yerine yazılırsa,

$$\|u_t(t)\|^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2 = -\frac{\gamma}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u(t)\|^2 - \frac{a}{2}\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2 - \gamma\|\nabla u(t)\|^2$$
$$-a\|u(t)\|^2 - \frac{b}{\alpha+2}\frac{d}{dt}|u(t)|^{\alpha+2}dx - b\int_{\Omega} |u(x,t)|^{\alpha+2}\, dx$$

$$2\|u_t(t)\|^2 + \frac{d}{dt}\left[\gamma\|\nabla u(t)\|^2 + (a+1)\|u(t)\|^2 + \frac{2b}{\alpha+2}\frac{d}{dt}\int_{\Omega} |u(x,t)|^{\alpha+2} dx \right]$$
$$+ 2a\|u(t)\|^2 + 2\gamma\|\nabla u(t)\|^2 + 2b\int_{\Omega} |u(x,t)|^{\alpha+2}\, dx = 0. \qquad (3.5)$$

elde edilir. Bu eşitsizlikten yola çıkarak,

$$\Phi(t) = \gamma\|\nabla u(t)\|^2 + (a+1)\|u(t)\|^2 + \frac{2b}{\alpha+2}\frac{d}{dt}\int_{\Omega} |u(x,t)|^{\alpha+2} dx$$

fonksiyonunun $\frac{d}{dt}\Phi(t) + \frac{2\alpha}{\alpha+1}\Phi(t) \le 0$ eşitsizliğini sağladığı görülür. Bu eşitsizliğin çözümü yapılırsa,

$$e^{\frac{2\alpha}{\alpha+1}t}\frac{d}{dt}\Phi(t) + e^{\frac{2\alpha}{\alpha+1}t}\frac{2\alpha}{\alpha+1}\Phi(t) \le 0. e^{\frac{2\alpha}{\alpha+1}t}$$

$$\int_0^t \frac{d}{d\tau}\left[e^{\frac{2\alpha}{\alpha+1}\tau}\Phi(\tau) \right] d\tau \le 0$$

$$e^{\frac{2\alpha}{\alpha+1}t}\Phi(t) - \Phi(0) \le 0$$

$$\Phi(t) \le e^{-\frac{2\alpha}{\alpha+1}t}\Phi(0)$$

$$\gamma\|\nabla u(t)\|^2+(a+1)\|u(t)\|^2+\frac{2b}{\alpha+2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |u(x,t)|^{\alpha+2}dx\le D_1e^{-\frac{2\alpha}{\alpha+1}t} \tag{3.6}$$

elde edilir, burada

$$D_1=\gamma\|\nabla u_0\|^2+(a+1)\|u_0\|^2+\frac{2b}{\alpha+2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |u_0(x)|^{\alpha+2}dx$$

şeklindedir. (3.6) eşitsizliğinden

$$\underbrace{\gamma\|\nabla u(t)\|^2+(a+1)\|u(t)\|^2+\frac{2b}{\alpha+2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |u(x,t)|^{\alpha+2}dx}_{\Phi\,(t)}\le D_1e^{-\frac{2\alpha}{\alpha+1}t}$$

$\Phi\ (t)$'nin sınırlılığı ve dolayısıyla her bir teriminin sınırlılığı, buradan da

$$\sup_{0\le t\le T}\|\nabla u(t)\|\le D$$

elde edilir. Bu (3.4)'teki birinci kestirimdir.

(3.5) eşitliğinin 0'dan T'ye integrali alınırsa ve $\Phi(t)$'nin sınırlılığı kullanılırsa,

$$2\int_0^T\|u_t\|^2\,dt+\underbrace{\int_0^T\frac{d}{dt}\Phi(\mathrm{t})\mathrm{dt}}_{sınırlı}+2\gamma\underbrace{\int_0^T\|\nabla u(t)\|^2dt}_{sınırlı}+2a\underbrace{\int_0^T\|u(t)\|^2dt}_{sınırlı}$$
$$+2b\underbrace{\int_0^T\left(\int_\Omega|u|^{\alpha+2}\,dx\right)dt}_{sınırlı}=0$$

elde edilir. Buradan

$$\int_0^T \|u_t(t)\|^2\,dt \le D$$

eşitsizliğinin sağlandığı görülür. Bu (3.4)'teki ikinci kestirimdir.

Şimdi,

$$\begin{aligned}
&u_t = \gamma\Delta u - au - b_1|u|^\alpha u - \nabla p, \quad \nabla.u = 0, && x \in \Omega, && t > 0\\
&u(x,0) = u_0(x), && x \in \Omega &&\\
&u = 0, && x \in \partial\Omega, && \mathrm{t} > 0,
\end{aligned}$$

probleminin çözümü (u,p) ve

$$\begin{aligned}
&v_t = \gamma\Delta v - av - b_2|v|^\alpha v - \nabla q, \quad \nabla.v = 0, && x \in \Omega, && t > 0\\
&v(x,0) = u_0(x), && x \in \Omega &&\\
&v = 0, && x \in \partial\Omega, && \mathrm{t} > 0
\end{aligned}$$

probleminin çözümü (v,q) olsun. $w = u - v$ ve $\pi = p - q$ alalım. O halde ,

$$w_t = \gamma\Delta w - aw - b_1|u|^\alpha u + b_2|v|^\alpha v - \nabla\pi, \;\; \nabla.w = 0, \;\; x \in \Omega, \;\; t > 0 \tag{3.7}$$

$$w(x,0) = 0, \qquad x \in \Omega \tag{3.8}$$

$$w = 0, \qquad x \in \partial\Omega, \;\; \mathrm{t} > 0 \tag{3.9}$$

probleminin çözümü (w,π) olur.

Teorem 3.2.1. $(3.7) - (3.9)$ probleminin çözümü w olsun. O zaman w,

$$\|\nabla w(t)\|^2 + \|w(t)\|^2 \le K(b_1 - b_2)^2, \;\; \forall t > 0 \tag{3.10}$$

eşitsizliğini sağlar, burada K, (3.1)'in parametrelerine bağlı pozitif bir sabittir.

İspat. (3.7) denklemine $b_2|u|^\alpha u$ ifadesi eklenip çıkarılırsa,

$$w_t = \gamma \Delta w - aw - b_1 |u|^\alpha u + b_2 |v|^\alpha v + b_2 |u|^\alpha u - b_2 |u|^\alpha u - \nabla \pi$$

$$w_t = \gamma \Delta w - aw - \hat{b} |u|^\alpha u - b_2 (|u|^\alpha u - |v|^\alpha v) - \nabla \pi \qquad (3.11)$$

elde edilir. Burada $\hat{b} = b_1 - b_2$ dır. (3.11) denklemi $L^2(\Omega)$'de w ile çarpılırsa,

$$\int_\Omega w_t w \, dx = \gamma \int_\Omega \Delta w \, w \, dx - a \int_\Omega w \, w \, dx - \int_\Omega \hat{b} |u|^\alpha u \, w \, dx$$
$$- \int_\Omega b_2 (|u|^\alpha u - |v|^\alpha v) \, w \, dx - \int_\Omega \nabla \pi \; w \, dx \qquad (3.12)$$

elde edilir. (3.12)'deki ifadeler ayrı ayrı hesaplanırsa,

$$\int_\Omega w_t w \, dx = \int_\Omega \frac{d}{dt} w \, w \, dx = \int_\Omega \frac{1}{2} \frac{d}{dt} w^2 \, dx = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|w\|^2$$

$$\gamma \int_\Omega \Delta w \, w \, dx = \gamma \left(\underbrace{\nabla . w \, w|_{\partial\Omega}}_{0} - \int_\Omega \nabla w \, \nabla w \, dx \right) = -\gamma \|\nabla w\|^2$$

$$a \int_\Omega w \, w \, dx = a \int_\Omega (w)^2 \, dx = a \|w\|^2$$

$$\int_\Omega \hat{b} |u|^\alpha u \, w \, dx = \hat{b} \int_\Omega |u|^\alpha u \, w \, dx = \hat{b} \langle |u|^\alpha u, w \rangle$$

$$\int_\Omega b_2 (|u|^\alpha u - |v|^\alpha v) \, w \, dx = b_2 \int_\Omega (|u|^\alpha u - |v|^\alpha v) \, w \, dx = b_2 \langle |u|^\alpha u - |v|^\alpha v, w \rangle$$

$$\int_\Omega \nabla \pi \; w \, dx = \pi . w|_{\partial\Omega} - \int_\Omega \pi \; \nabla w \, dx = 0$$

elde edilir. Elde edilen ifadeler (3.12)'de yerine yazılırsa,

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|w(t)\|^2 + \gamma \|\nabla w(t)\|^2 + a \|w(t)\|^2 = -\hat{b} \langle |u(t)|^\alpha u(t), w(t) \rangle$$
$$- b_2 \langle |u(t)|^\alpha u(t) - |v(t)|^\alpha v(t), w(t) \rangle \qquad (3.13)$$

bulunur. $T \colon R^3 \to R^3$ tanımlanan $T(u) = |u|^\alpha u$ operatörü monotondur ve

$$\langle |u(t)|^{\alpha}u(t) - |v(t)|^{\alpha}v(t), w(t)\rangle \geq 0 \tag{3.14}$$

eşitsizliği sağlanır. Böylece (3.13)' ten

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w(t)\|^2 + \gamma\|\nabla w(t)\|^2 + a\|w(t)\|^2 \leq \left|\hat{b}\langle |u(t)|^{\alpha}u(t), w(t)\rangle\right| \tag{3.15}$$

eşitsizliği elde edilir. (3.15) eşitsizliğinin sağ tarafındaki ifadeye Hölder, Sobolev ve aritmetik-geometrik ortalama eşitsizlikleri uygulanılırsa,

$$\begin{aligned}
\left|\hat{b}\langle |u(t)|^{\alpha}u(t), w(t)\rangle\right| &\leq \left|\hat{b}\right| |\langle |u(t)|^{\alpha}u(t), w(t)\rangle| \\
&\leq \left|\hat{b}\right| |u(t)|^{\alpha}|u(t)||w(t)| \\
&\leq \left|\hat{b}\right| \left[\int (|u(t)|^{\alpha})^p dx\right]^{1/p} \left[\int |u(t)|^q dx\right]^{1/q} \left[\int |w(t)|^z dx\right]^{1/z} \\
&\leq \left|\hat{b}\right| \|u(t)\|_p^{\alpha}\|u(t)\|_q\|w(t)\|_z \\
&= \left|\hat{b}\right| \|u(t)\|_{3\alpha}^{\alpha}\|u(t)\|_6\|w(t)\|_6 \\
&\leq \left|\hat{b}\right| {d_0}^{\alpha}\|\nabla u(t)\|^{\alpha} d_0\|\nabla u(t)\| d_0\|\nabla w(t)\| \\
&= \left|\hat{b}\right| {d_0}^{\alpha+2}\|\nabla u(t)\|^{\alpha+1}\|\nabla w(t)\| \\
&= \left|\hat{b}\right| {d_0}^{\alpha+2}\|\nabla u(t)\|^{\alpha+1}\|\nabla w(t)\| \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\sqrt{\gamma} \\
&\leq \frac{\hat{b}^2 {d_0}^{2\alpha+4}}{2\gamma}\|\nabla u(t)\|^{2\alpha+2} + \frac{\gamma}{2}\|\nabla w(t)\|^2
\end{aligned} \tag{3.16}$$

eşitsizliği elde edilir, burada d_0, $\forall v \in H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$ için geçerli

$$\|v\|_p \leq d_0\|\nabla v\|, \qquad 1 < p \leq 6 \tag{3.17}$$

Sobolev eşitsizliğindeki bir sabittir. (3.15)'te (3.4) ve (3.16) kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\|w(t)\|^2 + \gamma\|\nabla w(t)\|^2 + 2a\|w(t)\|^2 &\leq \frac{\hat{b}^2 {d_0}^{2\alpha+4}}{2\gamma}\underbrace{\|\nabla u(t)\|}_{\leq D}{}^{2\alpha+2} \\
&\leq \hat{b}^2 \underbrace{{d_0}^{2\alpha+4}D^{2\alpha+2}\gamma^{-1}}_{K_0} \leq K_0\hat{b}^2
\end{aligned} \tag{3.18}$$

elde edilir, burada $K_0 = D^{2\alpha+2} d_0^{2\alpha+4} \gamma^{-1}$ dır.

(3.11) denklemi $L^2(\Omega)$'de w_t ile çarpılırsa,

$$\int_\Omega w_t \ w_t \, dx = \int_\Omega \gamma \, \Delta w \ w_t \, dx - \int_\Omega a \ w \, w_t \, dx - \int_\Omega b_2(|u|^\alpha u - |v|^\alpha v) \, w_t \, dx$$
$$- \int_\Omega \hat{b} |u|^\alpha u \, w_t \, dx \int_{-\Omega} \nabla \pi \ w_t \, dx \tag{3.19}$$

elde edilir. (3.19)'daki ifadeler ayrı ayrı hesaplanırsa,

$$\int_\Omega w_t \ w_t \, dx = \int_\Omega {w_t}^2 \ dx = \|w_t\|^2$$

$$\int_\Omega \gamma \, \Delta w \ w_t \, dx = \gamma \left(\underbrace{w_t . \nabla w|_{\partial\Omega}}_{0} - \int_\Omega \nabla w \ \nabla w_t \, dx \right)$$

$$= -\gamma \int_\Omega \nabla w \ \nabla \frac{dw}{dt} \, dx$$

$$= -\gamma \int_\Omega \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \, (\nabla w)^2 \, dx$$

$$= \frac{-\gamma}{2} \frac{d}{dt} \, \|\nabla w\|^2$$

$$\int_\Omega a \ w \, w_t \, dx = a \int_\Omega w \ \frac{dw}{dt} \, dx = a \int_\Omega \frac{1}{2} \ \frac{d}{dt} \ w^2 \, dx = \frac{a}{2} \ \frac{d}{dt} \ \|w\|^2$$

$$\int_\Omega b_2(|u|^\alpha u - |v|^\alpha v) \, w_t \, dx = b_2 \int_\Omega (|u|^\alpha u - |v|^\alpha v) \, w_t \, dx = b_2 \langle |u|^\alpha u - |v|^\alpha v, w_t \rangle$$

$$\int_\Omega \hat{b} |u|^\alpha u \, w_t \, dx = \hat{b} \int_\Omega |u|^\alpha u \, w_t \, dx = \hat{b} \langle |u|^\alpha u, w_t \rangle$$

$$\int_\Omega \nabla \pi \ w_t \, dx = \pi \, w_t|_{\partial\Omega} - \int_\Omega \pi \ \nabla w_t \, dx = 0$$

elde edilir. Elde edilen bu ifadeler (3.19)'da yerine yazılırsa,

$$\|w_t(t)\|^2 = \frac{-\gamma}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla w(t)\|^2 - \frac{a}{2}\frac{d}{dt}\|w(t)\|^2$$
$$- b_2\langle |u(t)|^\alpha u(t) - |v(t)|^\alpha v(t), w_t(t)\rangle - \hat{b}\langle |u(t)|^\alpha u(t), w_t(t)\rangle$$

$$\|w_t(t)\|^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}[\gamma\|\nabla w(t)\|^2 + a\|w(t)\|^2]$$
$$= -b_2\langle |u(t)|^\alpha u(t) - |v(t)|^\alpha v(t), w_t(t)\rangle - \hat{b}\langle |u(t)|^\alpha u(t), w_t(t)\rangle$$

$$\|w_t(t)\|^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}[\gamma\|\nabla w(t)\|^2 + a\|w(t)\|^2]$$
$$\leq |b_2\langle |u(t)|^\alpha u(t) - |v(t)|^\alpha v(t), w_t(t)\rangle| + \left|\hat{b}\langle |u(t)|^\alpha u(t), w_t(t)\rangle\right| \tag{3.20}$$

elde edilir. (3.20)'nin sağ tarafındaki ilk terime Ortalama Değer teoremi ve Hölder eşitsizliği uygulanırsa,

$$|\langle |u(t)|^\alpha u(t) - |v(t)|^\alpha v(t), w_t(t)\rangle| \leq \int_\Omega (|u(t)|^{\alpha+1} + |v(t)|^{\alpha+1})\ |w_t(t)|\, dx$$

$$\leq 3(\alpha+1)\int_\Omega (|u(t)|^\alpha + |v(t)|^\alpha)\, |w(t)|\, |w_t(t)|\, dx$$

$$\leq 3(\alpha+1)\left(\int_\Omega (|u(t)|^\alpha + |v(t)|^\alpha)^p\, dx\right)^{1/p}\left(\int_\Omega |w(t)|^q\, dx\right)^{1/q}\left(\int_\Omega |w_t(t)|^z\, dx\right)^{1/z}$$

$$\leq 3(\alpha+1)\left[\|u(t)\|_p^\alpha + \|v(t)\|_p^\alpha\right]\|w(t)\|_q\|w_t(t)\|_z$$

$$\leq 3(\alpha+1)[\|u(t)\|_{3\alpha}^\alpha + \|v(t)\|_{3\alpha}^\alpha]\,\|w(t)\|_6\|w_t(t)\| \tag{3.21}$$

bulunur. $1 \leq \alpha \leq 2$ olmak üzere Sobolev eşitsizliği kullanılırsa

$$\leq 3(\alpha+1)[{d_0}^\alpha\|\nabla u(t)\|^\alpha + {d_0}^\alpha\|\nabla v(t)\|^\alpha]\, d_0\|\nabla w(t)\|\|w_t(t)\|$$
$$\leq 3(\alpha+1){d_0}^{\alpha+1}\left(\underbrace{\|\nabla u(t)\|^\alpha}_{\leq D^\alpha} + \underbrace{\|\nabla v(t)\|^\alpha}_{\leq D^\alpha}\right)\|\nabla w(t)\|\|w_t(t)\|$$

$$\leq 6(\alpha+1){d_0}^{\alpha+1}D^{\alpha}\|\nabla w(t)\|\|w_t(t)\|$$
$$= 6(\alpha+1){d_0}^{\alpha+1}D^{\alpha}\|\nabla w(t)\|\|w_t(t)\|\sqrt{b_2}\frac{1}{\sqrt{b_2}}$$
$$\leq 18(\alpha+1)^2{d_0}^{2\alpha+2}D^{2\alpha}b_2\|\nabla w(t)\|^2 + \frac{1}{2b_2}\|w_t(t)\|^2 \tag{3.22}$$

bulunur. Benzer şekilde (3.20)'nin sağ tarafındaki ikinci terime aynı eşitsizlikler uygulanırsa,

$$
\begin{aligned}
|\langle |u(t)|^{\alpha}u(t), w_t(t)\rangle| &\leq \int_{\Omega} |u(t)|^{\alpha+1}|w_t(t)|\ dx \\
&\leq \left[\int_{\Omega} (|u(t)|^{\alpha+1})^p\ dx\right]^{1/p}\left[\int_{\Omega} |w_t(t)|^q dx\right]^{1/q} \\
&\leq \|u(t)\|_p^{\alpha+1}\|w_t(t)\|_q \\
&\leq \|u(t)\|^{\alpha+1}\|w_t(t)\| \\
&\leq {d_0}^{\alpha+1}\|\nabla u(t)\|^{\alpha+1}\|w_t(t)\| \\
&\leq \sqrt{\hat{b}}\ {d_0}^{\alpha+1}\ \underbrace{\|\nabla u(t)\|^{\alpha+1}}_{\hat{D}}\frac{1}{\sqrt{\hat{b}}}\|w_t(t)\| \\
&\leq \frac{1}{2}\ \hat{b}\ {d_0}^{2\alpha+2}D^{2\alpha+2} + \frac{1}{2\hat{b}}\ \|w_t(t)\|^2 \\
&\leq 2^{-1}\ \hat{b}\ {d_0}^{2\alpha+2}D^{2\alpha+2} + \left(2\hat{b}\right)^{-1}\ \|w_t(t)\|^2
\end{aligned} \tag{3.23}
$$

eşitsizliği bulunur. Daha sonra (3.20)'de (3.22) ve (3.23) yerine yazılırsa

$$
\begin{aligned}
&\|w_t(t)\|^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\ [\gamma\|\nabla w(t)\|^2 + a\|w(t)\|^2] \\
&\qquad \leq \hat{b}\left(2^{-1}\ \hat{b}\ {d_0}^{2\alpha+2}D^{2\alpha+2} + \left(2\hat{b}\right)^{-1}\ \|w_t(t)\|^2\right) \\
&\qquad + b_2\left(18(\alpha+1)^2{d_0}^{2\alpha+2}D^{2\alpha}b_2\|\nabla w(t)\|^2 + \frac{1}{2b_2}\|w_t(t)\|^2\right) \\
&\qquad \leq \frac{\hat{b}^2}{2}\ (d_0D)^{2\alpha+2} + \frac{1}{2}\ \|w_t(t)\|^2 \\
&\qquad +\ 18{b_2}^2(\alpha+1)^2{d_0}^{2\alpha+2}D^{2\alpha}\|\nabla w(t)\|^2 + \frac{1}{2}\ \|w_t(t)\|^2
\end{aligned}
$$

$$2\|w_t(t)\|^2 + \frac{d}{dt}\,[\gamma\|\nabla w(t)\|^2 + a\|w(t)\|^2]$$
$$\leq \hat{b}^2\,(d_0 D)^{2\alpha+2} + \|w_t(t)\|^2 + 36{b_2}^2(\alpha+1)^2{d_0}^{2\alpha+2}D^{2\alpha}\|\nabla w(t)\|^2 + \|w_t(t)\|^2$$

$$\frac{d}{dt}\,[\gamma\|\nabla w(t)\|^2 + a\|w(t)\|^2]$$
$$\leq \hat{b}^2\,\underbrace{(d_0 D)^{2\alpha+2}}_{K_1} + \underbrace{36{b_2}^2(\alpha+1)^2{d_0}^{2\alpha+2}D^{2\alpha}}_{K_2}\|\nabla w(t)\|^2$$
$$\leq K_1\hat{b}^2 + K_2\|\nabla w(t)\|^2 \tag{3.24}$$

eşitsizliği elde edilir, burada $K_1 = (d_0 D)^{2\alpha+2}$ ve $K_2 = 36{b_2}^2(\alpha+1)^2{d_0}^{2\alpha+2}D^{2\alpha}$ dir. Buradan (3.24) ifadesi $\frac{\gamma}{2K_2}$ ile çarpılıp (3.18)'e eklenirse:

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\gamma^2}{2K_2}\|\nabla w(t)\|^2 + \frac{a\gamma}{2K_2}\|w(t)\|^2\right] \leq \frac{K_1\hat{b}^2\gamma}{2K_2} + \frac{\gamma}{2}\|\nabla w(t)\|^2$$
$$\frac{d}{dt}\|w(t)\|^2 + \gamma\|\nabla w(t)\|^2 + 2a\|w(t)\|^2 \leq K_0\hat{b}^2$$
$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\gamma^2}{2K_2}\|\nabla w(t)\|^2 + \frac{a\gamma + 2K_2}{2K_2}\|w(t)\|^2\right] + \frac{\gamma}{2}\|\nabla w(t)\|^2 + 2a\|w(t)\|^2$$
$$\leq \left(K_0 + \frac{K_1\gamma}{2K_2}\right)\hat{b}^2 \tag{3.25}$$

eşitsizliği bulunur. (3.25) eşitsizliği

$$Y'(t) + \beta Y(t) \leq K_3\hat{b}^2 \tag{3.26}$$

eşitsizliğini ifade eder, burada

$K_3 = K_1 + 2K_2K_0\gamma^{-1}$,

$\beta = K_2\min(\gamma^{-1}, 4a(a\gamma + 2K_2)^{-1})$

$Y(t) = \gamma^2\|\nabla w(t)\|^2 + (a\gamma + 2K_2)\|w(t)\|^2$

şeklindedir. (3.26) eşitsizliğinin çözümü yapılırsa

$$Y'(t) + \beta Y(t) \leq K_3 \hat{b}^2$$

$$e^{\beta t} Y'(t) + e^{\beta t} \beta Y(t) \leq K_3 \hat{b}^2 e^{\beta t}$$

$$\left[e^{\beta t} Y(t)\right]' \leq K_3 \hat{b}^2 e^{\beta t}$$

$$\int_0^t \frac{d}{d\tau}\left[e^{\beta\tau} Y(\tau)\right] d\tau \leq K_3 \hat{b}^2 \int_0^T e^{\beta\tau}\, d\tau$$

$$e^{\beta t} Y(t) - Y(0) \leq K_3 \hat{b}^2 \left(e^{\beta t} - 1\right)$$

$$e^{\beta t} Y(t) \leq K_3 \hat{b}^2 \left(e^{\beta t} - 1\right)$$

$$Y(t) \leq K_3 \beta^{-1} \left(1 - e^{-\beta t}\right) \hat{b}^2$$

elde edilir. Buradan $t > 0$, $\hat{b} \to 0$ iken $\|\nabla w(t)\| \to 0$ olduğu görülür.

3.3. Brinkman Katsayısına Süreklilik Bağımlılık

Bu bölümde $(3.1) - (3.3)$ probleminin çözümünün $H^1(\Omega)$ normunda γ Brinkman katsayısına sürekli bağımlılığını gösterelim.

$$u_t = \gamma_1 \Delta u - au - b|u|^\alpha u - \nabla p, \quad \nabla . u = 0, \qquad x \in \Omega, \qquad t > 0 \tag{3.27}$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \qquad x \in \Omega \tag{3.28}$$

$$u = 0, \qquad x \in \partial\Omega, \qquad t > 0 \tag{3.29}$$

probleminin çözümünü (u, p) ve

$$v_t = \gamma_2 \Delta v - av - b|v|^\alpha v - \nabla q, \quad \nabla . v = 0, \qquad x \in \Omega, \qquad t > 0 \tag{3.30}$$

$$v(x, 0) = u_0(x), \qquad x \in \Omega \tag{3.31}$$

$$v = 0, \qquad x \in \partial\Omega, \qquad t > 0 \tag{3.32}$$

probleminin çözümünü (v, q) olarak alalım. $w = u - v$, $\pi = p - q$ ve $\hat{\gamma} = \gamma_1 - \gamma_2$ olsun. O halde (w, π)

$$w_t = \gamma_1 \Delta w + \hat{\gamma}\Delta v - aw - b(|u|^\alpha u - |v|^\alpha v) - \nabla\pi, \nabla . w = 0, x \in \Omega, t > 0 \quad (3.33)$$

$$w(x, 0) = 0, \qquad x \in \Omega \quad (3.34)$$

$$w = 0, \qquad x \in \partial\Omega, \mathrm{t} > 0 \quad (3.35)$$

probleminin çözümü olarak tanımlanır.

Teorem 3.3.1. $(3.33) - (3.35)$ probleminin çözümü (w, π) ise o zaman aşağıdaki kestirim bulunur:

$$\|\nabla w(t)\|^2 + \|w(t)\|^2 \leq L(\gamma_1 - \gamma_2)^2 \quad (3.36)$$

burada L , (3.1)'deki parametrelere bağlı pozitif bir katsayıdır.

İspat. (3.33) denklemi $L^2(\Omega)$' de w ile çarpılırsa,

$$\int_\Omega w_t \; w \, dx = \int_\Omega \gamma_1 \, \Delta w \, w dx + \int_\Omega \hat{\gamma} \, \Delta v \; w \, dx - \int_\Omega a \, w \; w \, dx$$
$$- \int_\Omega b(|u|^\alpha u - |v|^\alpha v) \; w \, dx - \int_\Omega \nabla\pi \; w \, dx \quad (3.37)$$

elde edilir. (3.37)'teki her bir ifadeyi ayrı ayrı hesaplanırsa,

$$\int_\Omega w_t \; w \, dx = \int_\Omega \frac{dw}{dt} \; w \, dx = \int_\Omega \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \, (w)^2 \, dx = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \, \|w(t)\|^2$$

$$\int_\Omega \gamma_1\, \Delta w\, w dx = \gamma_1 \int_\Omega \Delta w\ \ w\ dx = \gamma_1 \left(\underbrace{w\, \nabla \mathrm{w}|_{\partial\Omega}}_{0} - \int_\Omega \nabla w\, \nabla w\ dx \right) = -\gamma_1 \|\nabla w(t)\|^2$$

$$\int_\Omega \hat{\gamma}\, \Delta v\ \ w\ dx = \hat{\gamma} \int_\Omega \Delta v\ \ w\ dx = \hat{\gamma} \left(\underbrace{w\, \nabla \mathrm{w}|_{\partial\Omega}}_{0} - \int_\Omega \nabla w\, \nabla v\ dx \right) = -\hat{\gamma}\, \langle \nabla w, \nabla v \rangle$$

$$\int_\Omega a\, w\ \ w\ dx = a \int_\Omega w^2\ \ dx = a\ \|w(t)\|^2$$

$$\int_\Omega b(|u|^\alpha u - |v|^\alpha v)\ \ w\ dx = b\langle |u|^\alpha u - |v|^\alpha v, w \rangle$$

$$\int_\Omega \nabla \pi\ \ w\ dx = \underbrace{w\ \pi|_{\partial\Omega}}_{0} - \underbrace{\int_\Omega \pi\, \nabla w\ \ dx}_{0} = 0$$

elde edilir. Elde edilen bu ifadeler (3.37)'de yerine yazılırsa,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w(t)\|^2 = -\gamma_1 \|\nabla w(t)\|^2 - \hat{\gamma}\, \langle \nabla w, \nabla v \rangle - a\ \|w(t)\|^2 - b\langle |u|^\alpha u - |v|^\alpha v, w \rangle$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w(t)\|^2 + \gamma_1 \|\nabla w(t)\|^2 + a\ \|w(t)\|^2 = -\hat{\gamma}\, \langle \nabla w, \nabla v \rangle - b\langle |u|^\alpha u - |v|^\alpha v, w \rangle$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w(t)\|^2 + \gamma_1 \|\nabla w(t)\|^2 + a\ \|w(t)\|^2 \leq |\hat{\gamma}\, \langle \nabla w, \nabla v \rangle| + |b\langle |u|^\alpha u - |v|^\alpha v, w \rangle| \tag{3.38}$$

elde edilir. (3.38) eşitsizliğinin sağ tarafındaki ilk ifade hesaplanırsa,

$$|\hat{\gamma}\, \langle \nabla w, \nabla v \rangle| \leq \hat{\gamma}\, \|\nabla w\| \|\nabla v\| = \hat{\gamma}\, \frac{1}{\sqrt{\gamma_1}} \|\nabla w\| \sqrt{\gamma_1} \|\nabla v\| \leq \frac{\hat{\gamma}^{\,2}}{2\gamma_1} \|\nabla v\|^2 + \frac{\gamma_1}{2} \|\nabla w\|^2 \tag{3.39}$$

elde edilir. (3.39) ve (3.12) eşitsizlikleri (3.38)'te yerine yazılırsa,

$$\frac{1}{2}\ \frac{d}{dt}\ \|w(t)\|^2 + \gamma_1 \|\nabla w(t)\|^2 + a\ \|w(t)\|^2 \leq \frac{\hat{\gamma}^{\,2}}{2\gamma_1} \|\nabla v\|^2 + \frac{\gamma_1}{2} \|\nabla w\|^2$$

$$\frac{d}{dt}\,\|w(t)\|^2 + 2\gamma_1\|\nabla w(t)\|^2 + 2a\,\|w(t)\|^2 \leq \frac{\hat{\gamma}^2}{\gamma_1}\|\nabla v\|^2 + \gamma_1\|\nabla w\|^2$$

$$\frac{d}{dt}\,\|w(t)\|^2 + \gamma_1\|\nabla w(t)\|^2 + 2a\,\|w(t)\|^2 \leq \hat{\gamma}^2{\gamma_1}^{1-}\|\nabla v\|^2 \tag{3.40}$$

elde edilir. Diğer yandan (3.33) denklemi $L^2(\Omega)$’de w_t ile çarpılırsa,

$$\begin{aligned}\int_\Omega w_t\ w_t\,dx =& \int_\Omega \gamma_1\Delta w\ w_t\,dx + \int_\Omega \hat{\gamma}\Delta v\ w_t\,dx - \int_\Omega aw\ w_t\,dx \\ &- \int_\Omega b(|u|^\alpha u - |v|^\alpha v)\ w_t\,dx - \int_\Omega \nabla\pi\ w_t\,dx\end{aligned} \tag{3.41}$$

elde edilir. (3.41)’deki ifadeler ayrı ayrı hesaplanırsa,

$$\int_\Omega w_t\ w_t\,dx = \|w_t\|^2$$

$$\begin{aligned}\int_\Omega \gamma_1\Delta w\ w_t\,dx &= \gamma_1\int_\Omega \Delta w\ w_t\,dx = \gamma_1\left(\underbrace{w_t\,\nabla w|_{\partial\Omega}}_{0} - \int_\Omega \nabla w\,\nabla w_t\,dx\right) \\ &= -\gamma_1\int_\Omega \nabla w\,\nabla\frac{dw}{dt}dx = -\gamma_1\int_\Omega \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\nabla w)^2dx = \frac{-\gamma_1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla w\|^2\end{aligned}$$

$$\int_\Omega \hat{\gamma}\Delta v\ w_t\,dx = \hat{\gamma}\langle\Delta v, w_t\rangle$$

$$\int_\Omega aw\ w_t\,dx = a\int_\Omega w\ \frac{dw}{dt}dx = a\int_\Omega \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(w)^2dx = \frac{a}{2}\frac{d}{dt}\ \|w(t)\|^2$$

$$\int_\Omega b(|u|^\alpha u - |v|^\alpha v)\ w_t\,dx = b\langle|u|^\alpha u - |v|^\alpha v, w_t\rangle$$

$$\int_\Omega \nabla\pi\ w_t\,dx = \underbrace{w_t\,\pi|_{\partial\Omega}}_{0} - \underbrace{\int_\Omega \pi\,\nabla w_t\,dx}_{0} = 0$$

elde edilir. Elde edilen bu ifadeler (3.41)’de yerine yazılırsa,

$$\|w_t\|^2 = \frac{-\gamma_1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla w\|^2 - \hat{\gamma}\langle \Delta v, w_t\rangle - \frac{a}{2}\frac{d}{dt}\|w(t)\|^2 - b\langle |u|^\alpha u - |v|^\alpha v, w_t\rangle$$

$$\frac{\gamma_1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla w\|^2 + \frac{a}{2}\frac{d}{dt}\|w(t)\|^2 + \|w_t\|^2 = -\hat{\gamma}\langle \Delta v, w_t\rangle - b\langle |u|^\alpha u - |v|^\alpha v, w_t\rangle$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\gamma_1\|\nabla w\|^2 + a\|w(t)\|^2) + \|w_t\|^2 = -\hat{\gamma}\langle \Delta v, w_t\rangle - b\langle |u|^\alpha u - |v|^\alpha v, w_t\rangle$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\gamma_1\|\nabla w\|^2 + a\|w(t)\|^2) + \|w_t\|^2 \leq |\hat{\gamma}\langle \Delta v, w_t\rangle| + |b\langle |u|^\alpha u - |v|^\alpha v, w_t\rangle|. \tag{3.42}$$

eşitsizliği bulunur. (3.42) eşitsizliğinin sağ tarafındaki ikinci terim (3.22)’ye benzer şekilde hesaplanırsa,

$$\begin{aligned}
|b\langle |u|^\alpha u - |v|^\alpha v, w_t\rangle| &\leq b\int_\Omega (|u|^{\alpha+1} - |v|^{\alpha+1})|w_t|\ dx \\
&\leq 3(\alpha+1)b\int_\Omega (|u|^\alpha - |v|^\alpha)|w||w_t| \\
&\leq 3(\alpha+1)b\int_\Omega (|u|^\alpha + |v|^\alpha)|w||w_t|\ dx \\
&\leq 3(\alpha+1)b\left(\int_\Omega (|u|^\alpha + |v|^\alpha)^p\,dx\right)^{1/p}\left(\int_\Omega |w|^q dx\right)^{1/q}\left(\int_\Omega |w_t|^z\,dx\right)^{1/z} \\
&\leq 3(\alpha+1)b\big(\|u\|_p^\alpha + \|v\|_p^\alpha\big)\|w\|_q\|w_t\|_z \\
&\leq 3(\alpha+1)b(\|u\|_{3\alpha}^\alpha + \|v\|_{3\alpha}^\alpha)\|w\|_6\|w_t\| \\
&\leq 3(\alpha+1)b({d_0}^\alpha\|\nabla u\|^\alpha + {d_0}^\alpha\|\nabla v\|^\alpha)d_0\|\nabla w\|\|w_t\| \\
&\leq 6(\alpha+1)b{d_0}^{\alpha+1}D^\alpha\|\nabla w\|\|w_t\| \\
&\leq \frac{1}{2}\|w_t\|^2 + 18\big[(\alpha+1)b{d_0}^{\alpha+1}D^\alpha\big]^2\|\nabla w\|^2
\end{aligned} \tag{3.43}$$

elde edilir. (3.42) eşitsizliğinin sağ tarafındaki ilk terimi için (3.27) ve Cauchy-Schwarz eşitsizliği kullanılırsa,

$$
\begin{aligned}
|\hat{\gamma}\langle\Delta v, w_t\rangle| &= \frac{|\hat{\gamma}|}{\gamma_2}|\langle v_t + av + b|v|^{\alpha}v, w_t\rangle| \\
&\leq \frac{|\hat{\gamma}|}{\gamma_2}\|v_t + av + b|v|^{\alpha}v\|\|w_t\| \\
&\leq \frac{1}{2}\|w_t\|^2 + \frac{\hat{\gamma}^2}{2{\gamma_2}^2}\|v_t + av + b|v|^{\alpha}v\|^2 \\
&\leq \frac{1}{2}\|w_t\|^2 + \frac{\widehat{3\gamma}^2}{2{\gamma_2}^2}[\|v_t\|^2 + a^2\|v\|^2 + b^2\|v\|_{2\alpha+2}^{2\alpha+2}]
\end{aligned}
\tag{3.44}
$$

elde edilir. $2\alpha + 2 \leq 6$ olmak üzere, (3.38)'de (3.4) ve (3.15) kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{2}\|w_t\|^2 + \frac{\widehat{3\gamma}^2}{2{\gamma_2}^2}\|v_t\|^2 + \frac{\widehat{3\gamma}^2}{2{\gamma_2}^2}\left[a^2{d_0}^2\|\nabla v\|^2 + b^2{d_0}^{2\alpha+2}\|\nabla v\|^{2\alpha+2}\right] \\
&\leq \frac{1}{2}\|w_t\|^2 + \frac{\widehat{3\gamma}^2}{2{\gamma_2}^2}\|v_t\|^2 + \frac{\widehat{3\gamma}^2}{2{\gamma_2}^2}[(ad_0D)^2 + b^2(d_0D)^{2\alpha+2}]
\end{aligned}
\tag{3.45}
$$

bulunur. (3.44) ve (3.45) eşitsizlikleri (3.42)'de yerine yazılırsa,

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\gamma_1\|\nabla w\|^2 + a\,\|w(t)\|^2) + \|w_t\|^2 \\
&\qquad \leq \frac{1}{2}\|w_t\|^2 + 18\left[(\alpha+1)b{d_0}^{\alpha+1}D^{\alpha}\right]^2\|\nabla w\|^2 + \frac{1}{2}\|w_t\|^2 \\
&\qquad + \frac{\widehat{3\gamma}^2}{2{\gamma_2}^2}\|v_t\|^2 + \frac{\widehat{3\gamma}^2}{2{\gamma_2}^2}[(ad_0D)^2 + b^2(d_0D)^{2\alpha+2}]
\end{aligned}
$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\gamma_1\|\nabla w\|^2 + a\,\|w(t)\|^2)$$

$$\leq 18\left[(\alpha+1)bd_0{}^{\alpha+1}D^{\alpha}\right]^2\|\nabla w\|^2 + \frac{\widehat{3\gamma}^2}{2\gamma_2{}^2}\|v_t\|^2$$

$$+\frac{3\hat{\gamma}^2}{2\gamma_2{}^2}[(ad_0D)^2 + b^2(d_0D)^{2\alpha+2}]$$

$$\frac{d}{dt}(\gamma_1\|\nabla w\|^2 + a\,\|w(t)\|^2) \leq K_4\hat{\gamma}^2 + \frac{\widehat{3\gamma}^2}{\gamma_2{}^2}\|v_t\|^2 + L_0\|\nabla w\|^2 \tag{3.46}$$

eşitsizliği elde edilir, burada

$K_4 = 3\gamma_2{}^{-2}[(ad_0D)^2 + b^2(d_0D)^{2\alpha+2}]$ ve

$L_0 = 18\left[(\alpha+1)bd_0{}^{\alpha+1}D^{\alpha}\right]^2$

dir. (3.13) eşitsizliği $\eta = 2L_0\gamma_1{}^{-1}$ ile çarpılıp (3.46)'ya eklenirse,

$$\frac{2L_0}{\gamma_1}\frac{d}{dt}\|w(t)\|^2 + 2L_0\|\nabla w\|^2 + \frac{4aL_0}{\gamma_1}\|w(t)\|^2 \leq \frac{2L_0\hat{\gamma}^2}{\gamma_1{}^2}\|\nabla v\|^2$$

$$\frac{d}{dt}\left[\gamma_1\|\nabla w\|^2 + \left(a + \frac{2L_0}{\gamma_1}\right)\|w(t)\|^2\right] + L_0\|\nabla w\|^2 + \frac{4aL_0}{\gamma_1}\|w(t)\|^2$$

$$\leq \hat{\gamma}^2\left[K_4 + \frac{3}{\gamma_2{}^2}\|v_t\|^2 + \frac{2L_0}{\gamma_1{}^2}\|\nabla v\|^2\right] \tag{3.47}$$

elde edilir. $k_0 = min\{L_0\gamma_1{}^{-1}, 2\eta a(a+\eta)^{-1}\}$ olmak üzere,

$$L_0\|\nabla w\|^2 + 2a\eta\|w(t)\|^2 \geq k_0[\gamma_1\|\nabla w\|^2 + (a+\eta)\,\|w(t)\|^2]\,,$$

yazılabileceği görülür. Böylece (3.47)'den

$z(t) = \gamma_1\|\nabla w\|^2 + (a+\eta)\,\|w(t)\|^2$

fonksiyonunun

$$z'(t) + k_0 z(t) \leq \hat{\gamma}^2 \left[K_4 + \frac{3}{{\gamma_2}^2}\|v_t\|^2 + \eta {\gamma_1}^{-1}\|\nabla v\|^2\right] \tag{3.48}$$

eşitsizliğini sağladığı görülür. (3.4) ve (3.6) dikkate alınarak (3.48)'in integralini alalım,

$$e^{k_0 t} z'(t) + e^{k_0 t} k_0 z(t) \leq e^{k_0 t}\hat{\gamma}^2 \left[K_4 + \frac{3}{{\gamma_2}^2}\|v_t\|^2 + \eta {\gamma_1}^{-1}\|\nabla v\|^2\right]$$

$$[e^{k_0 t} z(t)]' \leq e^{k_0 t}\hat{\gamma}^2 \left[K_4 + \frac{3}{{\gamma_2}^2}\|v_t\|^2 + \eta {\gamma_1}^{-1}\|\nabla v\|^2\right]$$

$$\int_0^t \frac{d}{d\tau}[e^{k_0 \tau} z(\tau)]\, d\tau \leq \int_0^t e^{k_0 \tau}\hat{\gamma}^2 \left[\frac{3}{{\gamma_2}^2}\|v_t\|^2 + \eta {\gamma_1}^{-1}\|\nabla v\|^2\right] d\tau + \int_0^t K_4\, e^{k_0 \tau}\hat{\gamma}^2 d\tau$$

$$e^{k_0 t} z(t) \leq {k_0}^{-1}\hat{\gamma}^2 \left[\frac{3}{{\gamma_2}^2} D + \eta {\gamma_1}^{-1} D\right] (e^{k_0 t} - 1) + {k_0}^{-1} K_4 \hat{\gamma}^2 (e^{k_0 t} - 1)$$

$$z(t) \leq {k_0}^{-1}\hat{\gamma}^2 \left[\frac{3}{{\gamma_2}^2} D + \eta {\gamma_1}^{-1} D + K_4\right] (1 - e^{-k_0 t})$$

$$\gamma_1 \|\nabla w\|^2 + (a + \eta)\, \|w(t)\|^2 \leq {k_0}^{-1}\hat{\gamma}^2 \left[\frac{3}{{\gamma_2}^2} D + \eta {\gamma_1}^{-1} D + K_4\right] (1 - e^{-k_0 t})$$

elde edilir.

BÖLÜM 4. FITZHUGH-NAGUMO DENKLEMLERİNİN YAPISAL KARARLILIĞI

Bu bölümde G.N. Aliyeva ve V.K. Kalantarov tarafından yazılan "Structural stability for Fitzhugh-Nagumo equations" [18] çalışması ele alınarak detaylı bir şekilde incelenmiştir.

4.1. Giriş

Fitzhugh-Nagumo denklemi için aşağıdaki başlangıç sınır değer problemini ele alalım:

$$\partial_t u - \Delta u + g|u|^p u + cu^2 + au - v = 0, \qquad x \in G, \qquad t > 0, \tag{4.1}$$

$$\partial_t v - k\Delta v + dv + bu = 0, \qquad x \in G, \qquad t > 0, \tag{4.2}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \qquad v(x,0) = v_0(x), \qquad x \in G, \tag{4.3}$$

$$u(x,t) = 0, \qquad v(x,t) = 0, \qquad x \in \partial G, \qquad t > 0 \tag{4.4}$$

burada $a > 0, b > 0, d > 0, g > 0, p \geq 2$ ve $c \in \mathbb{R}^1$ sayıları, $G \subset \mathbb{R}^N (N \leq 4)$ ∂G ile sınırlandırılmış yeterince düzgün sınırlı bir alanı, u_0, v_0 fonksiyonları ifade eder. Bu çalışmanın amacı, $(4.1) - (4.4)$ probleminin çözümlerinin k difüzyon katsayısı üzerine sürekli bağımlılığını incelemektir.

4.2. Kestirimler

Teorem 4.1. Varsayalım ki $u_0, v_0 \in H_0^1(G)$ olsun. O halde (u,v), $(4.1) - (4.4)$ probleminin güçlü bir çözümü olur. Ayrıca aşağıdaki kestirimler doğrudur.

$$\|\nabla u(t)\|, \qquad \|\nabla v(t)\|, \qquad \int_0^t \|\nabla u(\tau)\|^2 d\tau, \qquad k\int_0^t \|\nabla v(\tau)\| d\tau,$$

$$\int_0^t \|\Delta u(\tau)\|^2 d\tau, \qquad k\int_0^t \|\Delta v(\tau)\|^2 d\tau \le C_1, \qquad \forall t \in \mathbb{R}^+ \tag{4.5}$$

İspat. (4.1) denklemini $L^2(G)$'de bu ile çarpılırsa,

$$\int_G u_t budx - \int_G \Delta ubudx + \int_G g|u|^p ubudx + \int_G cu^2 budx + \int_G aubudx - \int_G vbudx = 0 \tag{4.6}$$

elde edilir. (4.6) denklemindeki her bir ifade ayrı ayrı hesaplanırsa,

$$\int_G u_t\, b\, u\, dx = \int_G \frac{d}{dt}\, u\, b\, u\, dx = b\int_G \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\, u^2\, dx = \frac{b}{2}\frac{d}{dt}\|u\|^2$$

$$\int_G \Delta u\;\, b\, u\, dx = b\int_G \Delta u\, u\, dx = b\left(\underbrace{u.\nabla u|_{\partial G}}_{0} - \int_G \nabla u\, \nabla u\, dx\right) = -b\|\nabla u\|^2$$

$$\int_G g|u|^p u\; bu\, dx = bg\int_G |u|^{p+2}\, dx$$

$$\int_G cu^2\, b\, u\;\, dx = bc\int_G u^3\, dx$$

$$\int_G au\, b\, u\;\, dx = ab\int_G u^2\, dx = ab\|u\|^2$$

$$\int_G v\, b\, u\;\, dx = b\int_G uv\, dx$$

elde edilir. Elde edilen bu eşitlikler (4.6) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\frac{b}{2}\frac{d}{dt}\|u\|^2 + b\|\nabla u\|^2 + bg\int\limits_G |u|^{p+2}\,dx + bc\int\limits_G u^3\,dx + ab\|u\|^2 - b\int\limits_G uv\,dx = 0 \tag{4.7}$$

bulunur. (4.2) denklemi $L^2(G)$'de v ile çarpılırsa,

$$\int\limits_G v_t v dx - \int\limits_G k\Delta v v dx + \int\limits_G dvvdx + \int\limits_G buvdx = 0 \tag{4.8}$$

elde edilir. (4.8) eşitliğindeki her bir ifade ayrı ayrı hesaplanırsa,

$$\int\limits_G v_t\, v\, dx = \int\limits_G \frac{d}{dt}\, v\, v\, dx = \int\limits_G \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\, v^{\,2} dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int\limits_G v^{\,2}\, dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|v\|^2$$

$$\int\limits_G k\Delta v\, v\, dx = \int\limits_G k\Delta v\, v\, dx k\int\limits_G \Delta v\, v\, dx = k\left(\underbrace{v.\nabla v|_{\partial G}}_{0} - \int\limits_G \nabla v\,\nabla v\, dx\right) = -k\|\nabla v\|^2$$

$$\int\limits_G dv\;\; v\;\; dx = d\int\limits_G v^2\, dx = d\|v\|^2$$

$$\int\limits_G bu\, v\, dx = b\int\limits_G uv\, dx$$

elde edilir. Elde edilen bu ifadeler (4.8) eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|v\|^2 + k\|\nabla v\|^2 + d\|v\|^2 + b\int\limits_G uv\, dx = 0 \tag{4.9}$$

bulunur. (4.7) ve (4.9) eşitlikleri toplanırsa,

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{b}{2}\|u\|^2 + \frac{1}{2}\|v\|^2\right] + ab\|u\|^2 + d\|v\|^2 + b\|\nabla u\|^2 + k\|\nabla v\|^2 + bg\int\limits_G |u|^{p+2}\, dx$$

$$= -bc\int\limits_G u^3\, dx \tag{4.10}$$

eşitliği elde edilir. (4.10) eşitliğinin sağ tarafındaki terime $\varepsilon = \frac{g(p+2)}{6c}$ olmak üzere ε-young eşitsizliği uygulanırsa,

$$\left| bc \int_G u^3 dx \right| \leq bc \int_G |u|^3 .1\, dx$$

$$\leq bc \int_G \left(\frac{3\varepsilon}{p+2} . (|u|^3)^{\frac{p+2}{3}} + \frac{p-1}{p+2} . \frac{1}{\varepsilon^{\frac{3}{p-1}}} \right) dx$$

$$= bc \int_G \left(\frac{3\varepsilon}{p+2} . |u|^{p+2} + \frac{p-1}{p+2} . \frac{1}{\varepsilon^{\frac{3}{p-1}}} \right) dx$$

$$\leq bc \int_G \left(\frac{g}{2c} |u|^{p+2} + \frac{p-1}{p+2} . \frac{1}{\left(\frac{g(p+2)}{6c} \right)^{\frac{3}{p-1}}} \right) dx$$

$$\leq \frac{bg}{2} \int_G |u|^{p+2} dx + \int_G \frac{p-1}{p+2} . \frac{1}{\left(\frac{g(p+2)}{6c} \right)^{\frac{3}{p-1}}} dx$$

$$\leq \frac{bg}{2} \int_G |u|^{p+2} dx + \underbrace{\frac{p-1}{p+2} . \frac{1}{\left(\frac{g(p+2)}{6c} \right)^{\frac{3}{p-1}}} . |G|}_{C_0}$$

$$\leq \frac{bg}{2} \int_G |u|^{p+2} dx + C_0 \tag{4.11}$$

eşitsizliği bulunur. (4.10) eşitliğinde (4.11) eşitsizliği kullanılırsa,

$$\frac{d}{dt} [b\|u\|^2 + \|v\|^2] + 2ab\|u\|^2 + 2d\|v\|^2 + 2b\|\nabla u\|^2 + 2k\|\nabla v\|^2$$
$$+ bg \int_G |u|^{p+2}\, dx \leq C_0 \tag{4.12}$$

elde edilir. Burada ve sonrasında C_0 ve C_1sayıları $a, b, c, d, g, |G|$'ye ve başlangıç verilerine bağlı olan sabiti belirtir.

(4.12)’den aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\frac{d}{dt}[b\|u\|^2+\|v\|^2]+2ab\|u\|^2+\ 2d\|v\|^2+\underbrace{2b\|\nabla u\|^2}_{\geq 0}+\underbrace{2k\|\nabla v\|^2}_{\geq 0}$$

$$\underbrace{+\,bg\int_G |u|^{p+2}\,dx}_{\geq 0}\leq C_0$$

$$\frac{d}{dt}[b\|u\|^2+\|v\|^2]+ab\|u\|^2+\ d\|v\|^2\leq C_0$$

$$\frac{d}{dt}[b\|u\|^2+\|v\|^2]+v_1[b\|u\|^2+\|v\|^2]\leq C_0.$$

Burada $v_1=\min\{a,d\}$ şeklindedir. Bu eşitsizliğin $K(t)=b\|u\|^2+\|v\|^2$ olmak üzere çözümü yapılırsa,

$$\frac{d}{dt}K(t)+v_1K(t)\leq C_0$$

$$e^{v_1t}\frac{d}{dt}K(t)+e^{v_1t}V_1K(t)\leq C_0e^{v_1t}$$

$$\int_0^t\frac{d}{d\tau}[e^{v_1\tau}K(\tau)]\,d\tau\leq\int_0^t e^{v_1\tau}\,C_0\,d\tau$$

$$e^{v_1t}K(t)-\underbrace{K(0)}_{0}\leq\frac{C_0}{v_1}(e^{v_1t}-1)$$

$$K(t)\leq\underbrace{\frac{C_0}{v_1}(1-e^{-v_1t})}_{C_1}$$

$$b\|u\|^2+\|v\|^2\leq C_1,\qquad \forall t\in\mathbb{R}^+. \tag{4.13}$$

elde edilir. (4.12) denklemi 0’dan t’ye göre integrali alınıp (4.13) eşitsizliği kullanılırsa,

$$\int_o^t \frac{d}{dt}[b\|u\|^2+\|v\|^2]dt+2ab\int_o^t \|u\|^2 d\tau+\ 2d\int_0^t \|v\|^2 d\tau+2b\int_0^t \|\nabla u\|^2 d\tau$$
$$+2k\int_0^t \|\nabla v\|^2 d\tau+bg\int_o^t\int_G |u|^{p+2}\,dx\,d\tau\le\int_o^t C_0 d\tau$$

$$K(t)-K(0)+2ab\int_o^t \|u\|^2 d\tau+\ 2d\int_0^t \|v\|^2 d\tau+2b\int_0^t \|\nabla u\|^2 d\tau+2k\int_0^t \|\nabla v\|^2 d\tau$$
$$+\,bg\int_o^t\int_G |u|^{p+2}\,dx\,d\tau\le C_0|G|$$

$$\underbrace{K(t)}_{\le C_1}+2ab\int_o^t \underbrace{\|u\|^2}_{\le C_1} d\tau+\ 2d\int_0^t \underbrace{\|v\|^2}_{\le C_1} d\tau+2b\int_0^t \|\nabla u\|^2 d\tau+2k\int_0^t \|\nabla v\|^2 d\tau$$
$$+\,bg\int_o^t\int_G |u|^{p+2}\,dx\,d\tau\le \underbrace{C_0|G|}_{C_1}$$

elde edilir bu da,

$$b\int_0^t \|\nabla u\|^2 d\tau,\qquad k\int_0^t \|\nabla v\|^2 d\tau,\qquad bg\int_o^t\int_G |u|^{p+2}\,dx\,d\tau\le C_1 \tag{4.14}$$

(4.7)’deki kestirimlerin bazılarını verir. Daha sonra (4.1) denklemi $L^2(G)$’de $(-b\Delta u)$ ile çarpılırsa,

$$\int_G \frac{d}{dt}u(-b\Delta u)\,dx-\int \Delta u(-b\Delta u)\,dx+\int g\,|u|^p u(-b\Delta u)\,dx+\int cu^2(-b\Delta u)\,dx$$
$$+\int_G au(-b\Delta u)\,dx-\int_G v(-b\Delta u)dx=0 \tag{4.15}$$

elde edilir. (4.15) eşitliğindeki her bir terim ayrı ayrı hesaplanırsa,

$$\int_G \frac{d}{dt}\, u(-b\Delta u)\, dx = -b\int_G \frac{d}{dt}\, u\,\Delta u\, dx$$

$$= -b\left(\underbrace{\frac{d}{dt}u.\nabla u\Big|_{\partial G}}_{0} - \int_G \frac{d}{dt}\nabla u\,\nabla u\, dx\right)$$

$$= b\int \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\nabla u)^2 dx$$

$$= \frac{b}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u\|^2$$

$$\int \Delta u\,(-b\Delta u)\, dx = -b\int (\Delta u)^2 dx = -b\|\Delta u\|^2$$

$$\int g\,|u|^p u\,(-b\Delta u)\, dx = -bg\int |u|^{p+1}\,\Delta u\, dx$$

$$= -bg\left(\underbrace{|u|^{p+1}.\nabla u|_{\partial G}}_{0} - \int_G (p+1)|u|^p\,\nabla \mathrm{u}\,\nabla u\, dx\right)$$

$$= bg(p+1)\int_G |u|^p\,(\nabla u)^2\, dx$$

$$\int cu^2(-b\Delta u)\, dx = -bc\int u^2\,\Delta u\, dx$$

$$= -bc\left(\underbrace{u^2.\nabla u|_{\partial G}}_{0} - \int_G 2u\nabla u\nabla u dx\right)$$

$$= 2bc\int_G u|\nabla u|^2 dx$$

$$\int_G au\,(-b\Delta u)\, dx = -ab\int_G u\Delta u\, dx = -ab\left(\underbrace{u.\nabla u|_{\partial G}}_{0} - \int_G \nabla u\nabla u dx\right) = ab\|\nabla u\|^2$$

$$\int_G v\,(-b\Delta u) dx = -b\int_G v\Delta u\, dx = -b\left(\underbrace{v.\nabla u|_{\partial G}}_{0} - \int_G \nabla v\nabla u\, dx\right) = b\int_G \nabla v\nabla u\, dx$$

elde edilir. Elde edilen bu eşitlikler (4.15)’te yerine yazılırsa,

$$\frac{b}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u\|^2 + b\|\Delta u\|^2 + bg(p+1)\int_G |u|^p\,(\nabla u)^2\,dx + 2bc\int_G u|\nabla u|^2 dx$$

$$+\,ab\|\nabla u\|^2 - b\int_G \nabla v \nabla u\,dx = 0 \qquad (4.16)$$

eşitliği bulunur. (4.2) denklemi $L^2(G)$'de $-\Delta v$ ile çarpılırsa,

$$\int_G \frac{d}{dt}v(-\Delta v)dx - \int_G k\Delta v(-\Delta v)dx + \int_G dv(-\Delta v)dx + \int_G bu(-\Delta v)dx = 0 \quad (4.17)$$

elde edilir. (4.17) eşitliğindeki her bir terim ayrı ayrı hesaplanırsa,

$$\int_G \frac{d}{dt}v(-\Delta v)\,dx = -\left(\underbrace{\frac{d}{dt}v.\nabla v\Big|_{\partial G}}_{0} - \int_G \frac{d}{dt}\nabla v \nabla v\,dx\right)$$

$$= \int_G \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\nabla v)^2\,dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla v\|^2$$

$$\int_G k\Delta v(-\Delta v)\,dx = -k\int_G \Delta v \Delta v\,dx = -k\|\Delta v\|^2$$

$$\int_G dv\,(-\Delta v)dx = -d\int_G v\Delta v\,dx = -d\left(\underbrace{v.\Delta \mathrm{v}|_{\partial G}}_{0} - \int_G \nabla v \nabla v\,dx\right) = d\|\nabla v\|^2$$

$$\int_G bu\,(-\Delta v)dx = -b\int_G u\Delta v\,dx = -b\left(\underbrace{u.\Delta \mathrm{v}|_{\partial G}}_{0} - \int_G \nabla u \nabla v\,dx\right) = b\int_G \nabla u \nabla v\,dx$$

elde edilir. Elde edilen bu eşitlikler (4.17)'de yerine yazılırsa,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla v\|^2 + k\|\Delta v\|^2 + d\|\nabla v\|^2 + b\int_G \nabla u \nabla v\,dx = 0 \qquad (4.18)$$

eşitliği bulunur. (4.16) ve (4.18) eşitlikleri toplanırsa,

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{b}{2}\|\nabla u\|^2+\frac{1}{2}\|\nabla v\|^2\right]+ab\|\nabla u\|^2+d\|\nabla v\|^2+b\|\Delta v\|^2+k\|\Delta v\|^2$$
$$+bg(p+1)\int_G |u|^p\,(\nabla u)^2\,dx=-2bc\int_G u|\nabla u|^2 dx \qquad (4.19)$$

eşitliği elde edilir. (4.19)'un sağ tarafındaki terime $\varepsilon=\frac{pg(p+1)}{4c}$ olmak üzere young ve interpolasyon eşitsizliği uygulanırsa,

$$\left|2bc\int_G u|\nabla u|^2\,dx\right|\leq 2bc\int_G |u||\nabla u|^2\,dx=2bc\int_G |u||\nabla u|^{\frac{2}{p}}|\nabla u|^{\frac{2p-2}{p}}\,dx$$
$$\leq 2bc\int_G\left(\frac{\varepsilon|u|^p.|\nabla u|^2}{p}+\frac{(p-1)|\nabla u|^2}{p.\varepsilon^{1/p-1}}\right)dx$$
$$\leq 2bc\int_G\left(\frac{g(p+1)|u|^p.|\nabla u|^2}{4c}+\frac{(p-1)|\nabla u|^2}{p.\left(\frac{pg(p+1)}{4c}\right)^{1/p-1}}\right)dx$$
$$=\frac{bg(p+1)}{2}\int_G |u|^p.|\nabla u|^2dx+\frac{2bc(p-1)}{p.\left(\frac{pg(p+1)}{4c}\right)^{1/p-1}}\int_G |\nabla u|^2dx$$
$$=\frac{bg(p+1)}{2}\int_G |u|^p.|\nabla u|^2dx+\frac{2bc(p-1)}{p.\left(\frac{pg(p+1)}{4c}\right)^{1/p-1}}\|\nabla u\|^2$$
$$\leq\frac{bg(p+1)}{2}\int_G |u|^p.|\nabla u|^2dx+\frac{2bc(p-1)}{p.\left(\frac{pg(p+1)}{4c}\right)^{1/p-1}}\|\nabla u\|\|\Delta u\|$$
$$\leq\frac{bg(p+1)}{2}\int_G |u|^p.|\nabla u|^2dx+\frac{2bc(p-1)}{p.\left(\frac{pg(p+1)}{4c}\right)^{1/p-1}}\|u\|\|\Delta u\|$$

$$\leq \frac{bg(p+1)}{2}\int\limits_G |u|^p.|\nabla u|^2 dx + \frac{b}{2}\|\Delta u\|^2 + \underbrace{b\left[\frac{2c(p-1)}{p.\left(\frac{pg(p+1)}{4c}\right)^{1/p-1}}\right]^2}_{C_0}\|u\|^2$$

$$= \frac{bg(p+1)}{2}\int\limits_G |u|^p.|\nabla u|^2 dx + \frac{b}{2}\|\Delta u\|^2 + C_0\|u\|^2 \tag{4.20}$$

eşitsizliği elde edilir. (4.20) eşitsizliği (4.19)'da kullanılırsa,

$$\frac{d}{dt}[b\|\nabla u\|^2 + \|\nabla v\|^2] + 2ab\|\nabla u\|^2 + 2d\|\nabla v\|^2 + \underbrace{b\|\Delta u\|^2}_{\leq C_1} + \underbrace{2k\|\Delta v\|^2}_{\leq C_1}$$

$$\underbrace{+\, bg(p+1)\int\limits_G |u|^p\,(\nabla u)^2\,dx}_{\leq C_1} \leq \underbrace{C_0\|u\|^2}_{\leq C_1} \tag{4.21}$$

eşitsizliği elde edilir. $V_2 = 2\min\{a, d\}$ olmak üzere,

$$\frac{d}{dt}[b\|\nabla u\|^2 + \|\nabla v\|^2] + V_2[b\|\nabla u\|^2 + \|\nabla v\|^2] \leq C_1$$

eşitsizliği yazılır. $E_2(t) = b\|\nabla u\|^2 + \|\nabla v\|^2$ olmak üzere son eşitsizliğin çözümü yapılırsa,

$$\frac{d}{dt}E_2(t) + V_2E_2(t) \leq C_1$$

$$e^{V_2t}\frac{d}{dt}E_2(t) + e^{V_2t}v_2E_2(t) \leq e^{V_2t}C_1$$

$$[e^{V_2t}E_2(t)]' \leq e^{V_2t}C_1$$

$$\int\limits_0^t \frac{d}{d\tau}[e^{V_2\tau}E_2(\tau)]d\tau \leq \int\limits_0^t e^{V_2\tau}C_1\,d\tau$$

$$e^{V_2t}E_2(t) - \underbrace{E_2(0)}_{0} \leq \frac{C_1}{V_2}e^{V_2\tau}\Big|_0^t = \frac{C_1}{V_2}(e^{V_2t} - 1)$$

$$E_2(t) \leq \frac{C_1}{V_2}(1 - e^{-V_2 t}) \leq C_1$$

$$b\|\nabla u\|^2 + \|\nabla v\|^2 \leq C_1$$

eşitsizliği bulunur. (4.21) eşitsizliğinin 0'dan t'ye integrali alınırsa,

$$\int_0^t \frac{d}{dt}[b\|\nabla u\|^2 + \|\nabla v\|^2]\, dt + 2ab\int_o^t \|\nabla u\|^2\, d\tau + 2d\int_0^t \|\nabla v\|^2\, d\tau + b\int_0^t \|\Delta u\|^2\, d\tau$$

$$+ 2k\int_0^t \|\Delta v\|^2\, d\tau + bg(p+1)\int_0^t \int_G |u|^p\, (\nabla u)^2\, dx\ d\tau \leq C_1 \int_0^t d\tau$$

$$\underbrace{b\|\nabla u\|^2 + \|\nabla v\|^2}_{\leq C_1} + \underbrace{2ab\int_o^t \|\nabla u\|^2\, d\tau}_{\leq C_1} + \underbrace{2d\int_0^t \|\nabla v\|^2\, d\tau}_{\leq C_1} + b\int_0^t \|\Delta u\|^2\, d\tau$$

$$+ 2k\int_0^t \|\Delta v\|^2\, d\tau + \underbrace{bg(p+1)\int_0^t \int_G |u|^p\, (\nabla u)^2\, dx\ d\tau}_{>0} \leq C_1$$

elde edilir. Buradan,

$$\int_0^t \|\Delta u\|^2\, d\tau, \qquad k\int_0^t \|\Delta v\|^2\, d\tau \leq C_1$$

görülür.

4.3. Sürekli Bağımlılık Sonucu

Bu bölümde (4.1) – (4.4) probleminin çözümünün k difüzyon katsayısı üzerine sürekli bağımlılığıyla ilgili aşağıdaki teorem ispatlanmıştır.

Teorem 4.3.1.

$$\partial_t u_i - \Delta u_i + |u_i|^p u_i + c{u_i}^2 + a u_i - v_i = 0\,, \qquad t > 0, \qquad (4.22)$$

$$\partial_t v_i - k_i \Delta v_i + d v_i + b u_i = 0, \qquad x \in G, \qquad t > 0, \qquad (4.23)$$

$$u_i(x,0) = u_0, v_i(x,0) = v_0, \qquad x \in G, \qquad (4.24)$$

$$u_i(x,t) = \; v_i(x,t) = 0, \qquad x \in \partial G, \qquad t > 0 \qquad (4.25)$$

$[u_i, v_i]$, $i = 1{,}2$ için $(4.22) - (4.25)$ probleminin güçlü çözümü olsun. O zaman aşağıdaki önemli kestirimin doğruluğu geçerli olur:

$$\|u_1 - u_2\| \leq k C_1 e^{C_1 t}, \forall t \in \mathbb{R}^+. \qquad (4.26)$$

İspat.

$i = 1$ için $\quad \partial_t u_1 - \Delta u_1 + |u_1|^p u_1 + c{u_1}^2 + a u_1 - v_1 = 0$

$i = 2$ için $\quad \partial_t u_2 - \Delta u_2 + |u_2|^p u_2 + c{u_2}^2 + a u_2 - v_2 = 0$

$w = u_1 - u_2, z = v_1 - v_2$ olmak üzere,

$$\partial_t w - \Delta w + |u_1|^p u_1 - |u_2|^p u_2 + c(u_1 + u_2\,)w + a w - z = 0$$

elde edilir.

$i = 1$ için $\quad \partial_t v_1 - k_1 \Delta v_1 + d v_1 + b u_1 = 0$

$i = 2$ için $\quad \partial_t v_2 - k_2 \Delta v_2 + d v_2 + b u_2 = 0$

$k = k_1 - k_2$ olmak üzere,

$$\partial_t z - k_1 \Delta z + dz + bw = k \Delta v_2$$

elde edilir. Yani

$$\partial_t w - \Delta w + |u_1|^p u_1 - |u_2|^p u_2 + c(u_1 + u_2\,)w + aw - z = 0, x \in G, t > 0, \quad (4.27)$$

$$\partial_t z - k_1 \Delta z + dz + bw = k\Delta v_2, \qquad x \in G, t > 0, \quad (4.28)$$

$$w(x,0) = 0, \qquad z(x,0) = 0, \qquad x \in G, \quad (4.29)$$

$$w(x,t) = 0, \qquad z(x,t) = 0, \qquad x \in \partial G, t > 0, \quad (4.30)$$

$[w,z] = [u_1 - u_2, v_1 - v_2]$ fonksiyon çiftinin $(4.27) - (4.30)$ probleminin bir çözümü olduğunu görmek kolaydır.

(4.27) denklemi $L^2(G)$'de bw ile çarpılırsa,

$$\int_G \partial_t w\, bw\, dx - \int_G \Delta w\ \ bw\, dx + \int_G |u_1|^p u_1\ \ bw\, dx - \int_G |u_2|^p u_2\ \ bw\, dx$$
$$+ \int_G c(u_1 + u_2\,)w\ \ bw\, dx - \int_G z\, bw\, dx = 0 \qquad (4.31)$$

elde edilir. (4.31) eşitliğindeki her bir terim ayrı ayrı hesaplanırsa,

$$\int_G \partial_t w\, bw\, dx = \int_G \frac{d}{dt} w\, bw\, dx = b \int_G \frac{1}{2}\frac{d}{dt} w^2\, dx = \frac{b}{2}\frac{d}{dt}\|w\|^2$$

$$\int_G \Delta w\ \ bw\, dx = b\left(\underbrace{w.\nabla w|_{\partial G}}_{0} - \int_G \nabla w\ \nabla w\, dx\right) = -b\|\nabla w\|^2$$

$$\int_G |u_1|^p u_1\ \ bw\, dx = b\int_G |u_1|^{p+1}\, w\, dx$$

$$\int_G |u_2|^p u_2\ \ bw\, dx = b\int_G |u_2|^{p+1}\, w\, dx$$

$$\int_G c(u_1 + u_2\,)w\ \ bw\, dx = bc\int_G (u_1 + u_2\,)w^2\ \ dx$$

$$\int_G aw\ \ bw\, dx = ab\int_G w^2\, dx = ab\|w\|^2$$

$$\int_G z\, bw\, dx = b\int_G z\, w\, dx$$

elde edilir. Elde edilen bu eşitlikler (4.31)’de yerine yazılırsa,

$$\frac{b}{2}\frac{d}{dt}\|w\|^2 + b\|\nabla w\|^2 + b\int_G |u_1|^{p+1} w\,dx - b\int_G |u_2|^{p+1} w\,dx$$

$$+ bc\int_G (u_1 + u_2)w^2\,dx + ab\|w\|^2 - b\int_G z\,w\,dx = 0, \qquad (4.32)$$

eşitliği bulunur. (4.28) denklemi $L^2(G)$’de z ile çarpılırsa,

$$\int_G \partial_t z\,z\,dx - \int_G k_1\Delta z\,z\,dx + \int_G dz\,z\,dx + \int_G bw\,z\,dx = \int_G k\Delta v_2\,z\,dx \qquad (4.33)$$

elde edilir. (4.33) eşitliğindeki her bir terim ayrı ayrı hesaplanırsa,

$$\int_G \partial_t z\,z\,dx = \int_G \frac{d}{dt}z\,z\,dx = \int_G \frac{1}{2}\frac{d}{dt}z^2\,dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|z\|^2$$

$$\int_G k_1\Delta z\,z\,dx = k_1\int_G \Delta z\,z\,dx = k_1\left(\underbrace{z.\nabla z|_{\partial G}}_{0} - \int_G \nabla z\,\nabla z\,dx\right) = -k_1\|\nabla z\|^2$$

$$\int_G dz\,z\,dx = d\int_G z^2\,dx = d\|z\|^2$$

$$\int_G bw\,z\,dx = b\int_G w\,z\,dx$$

$$\int_G k\Delta v_2\,z\,dx = k\int_G \Delta v_2\,z\,dx$$

elde edilir. Elde edilen bu eşitlikler (4.33)’te yerine yazılırsa,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|z\|^2 + k_1\|\nabla z\|^2 + d\|z\|^2 + b\int_G w\,z\,dx = k\int_G \Delta v_2\,z\,dx \qquad (4.34)$$

eşitliği bulunur. (4.32) ve (4.34) eşitlikleri toplanırsa,

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{b}{2}\|w\|^2+\frac{1}{2}\|z\|^2\right]+d\|z\|^2+\ b\|\nabla w\|^2+k_1\|\nabla z\|^2+b\int\limits_G |w|^{p+2}\ dx+ab\|w\|^2$$

$$=k\langle\Delta v_2,z\rangle-\ bc\int\limits_G (u_1+u_2\,)w^2\,dx \tag{4.35}$$

elde edilir. (4.35) eşitliğinin sağ tarafındaki ilk terim düzenlenirse,

$$|k\langle\Delta v_2,z\rangle|\leq|k|\|\Delta v_2\|\|z\|=|k|\frac{\sqrt{d}}{\sqrt{d}}\|\Delta v_2\|\|z\|\leq\frac{d}{2}\|z\|^2+\frac{k^2}{2d}\|\Delta v_2\|^2 \tag{4.36}$$

eşitsizliği bulunur. (4.35) eşitliğinin sağ tarafındaki ikinci terim için Hölder,Sobolev eşitsizliği ve (4.13) kullanılırsa,

$$\left|\int\limits_G (u_1+u_2\,)w^2\ dx\right|\leq\int\limits_G |u_1+u_2||w|^2\ dx$$

$$\leq\left(\int\limits_G |u_1+u_2|^2\,dx\right)^{1/2}.\left(\int\limits_G |w|^4\ dx\right)^{1/2}$$

$(u_1-u_2\,)^2\geq 0$

${u_1}^2+{u_2}^2-2u_1u_2\geq 0$

${u_1}^2+{u_2}^2\geq 2u_1u_2$

$(u_1+u_2\,)^2={u_1}^2+{u_2}^2+2u_1u_2\leq 2({u_1}^2+{u_2}^2)$

$$\leq\left(\int\limits_G 2|{u_1}^2+{u_2}^2|\,dx\right)^{1/2}.\left(\int\limits_G |w|^4\ dx\right)^{1/2}$$

$$=\sqrt{2}\left(\int\limits_G |{u_1}^2+{u_2}^2|\,dx\right)^{1/2}.\left[\left(\int\limits_G |w|^4\ dx\right)^{1/4}\right]^2$$

$$=\sqrt{2}\left(\left[\int\limits_G |{u_1}^2+{u_2}^2|^{1/2}\,dx\right]^2\right)^{1/2}.\left[\left(\int\limits_G |w|^4\ dx\right)^{1/4}\right]^2$$

$$\leq \sqrt{2}\left\|\sqrt{{u_1}^2+{u_2}^2}\right\| \|w\|_4^2$$

$$\leq \sqrt{2}\sqrt{\underbrace{\|u_1\|^2}_{\leq C_1}+\underbrace{\|u_2\|^2}_{\leq C_1}}.\|w\|_4^2$$

$$= 2C_1\|w\|_4^2$$

$\|u\|_4 \leq c_0\|\nabla u\|$ olduğundan,

$$\leq 2C_1{c_0}^2\|\nabla w\|^2$$

$2C_1{c_0}^2 = C_2$ denirse,

$$\leq C_2\|\nabla w\|^2 \tag{4.37}$$

eşitsizliği elde edilir. (4.36) ve (4.37) eşitsizlikleri (4.35) eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{b}{2}\|w\|^2+\frac{1}{2}\|z\|^2\right]+d\|z\|^2+\ b\|\nabla w\|^2+k_1\|\nabla z\|^2+b\int_G |w|^{p+2}\ dx+ab\|w\|^2$$

$$\leq \frac{d}{2}\|z\|^2+\frac{k^2}{2d}\|\Delta v_2\|^2-C_2\|\nabla w\|^2$$

$$\frac{d}{dt}[b\|w\|^2+\|z\|^2]+d\|z\|^2+\ 2b\|\nabla w\|^2+\underbrace{2k_1\|\nabla z\|^2}_{>0}+\underbrace{2b\int_G |w|^{p+2}\ dx}_{>0}$$

$$\leq \frac{k^2}{d}\|\Delta v_2\|^2-\underbrace{2C_2\|\nabla w\|^2}_{>0}$$

$$\frac{d}{dt}[b\|w\|^2+\|z\|^2]+d\|z\|^2+\ 2b\|\nabla w\|^2\leq \frac{k^2}{d}\|\Delta v_2\|^2$$

$$\frac{d}{dt}[b\|w\|^2+\|z\|^2]\leq \frac{k^2}{d}\|\Delta v_2\|^2-\ 2b\|\nabla w\|^2-d\|z\|^2 \tag{4.38}$$

elde edilir. Buradan $E_3(t) = b\|w\|^2+\|z\|^2$ ve $v_3 = \max\{-2,-d\}$ olmak üzere,

$$\frac{d}{dt}E_3(t)\leq \frac{k^2}{d}\|\Delta v_2\|^2+\ v_3E_3(t)$$

eşitsizliği yazılır. Son eşitsizliğe Gronwall eşitsizliği uygulanırsa,

$$E_3(t) \leq e^{\int_0^t v_3 d\tau}\left(E_3(0) + \int_0^t \frac{k^2}{d}\|\Delta v_2\|^2 d\tau \right) = e^{v_3 t}\left(\underbrace{E_3(0)}_{0} + \frac{k}{d}.\underbrace{k\int_0^t \|\Delta v_2\|^2 d\tau}_{\leq C_1} \right)$$

$$b\|w\|^2 + \|z\|^2 \leq \frac{C_1 k}{d} e^{v_3 t}$$

elde edilir.

BÖLÜM 5. ASMA KÖPRÜ DENKLEMLERİNİN ÇÖZÜMLERİNİN KATSAYILARA SÜREKLİ BAĞIMLILIĞI

Bu bölümde sürekli bağımlılık ile ilgili literatür taraması yapılarak, daha önce çalışılmamış olan asma köprü denkleminin çözümlerinin katsayılara sürekli bağımlılığı incelenmiştir.

5.1. Giriş

Bu çalışmada aşağıdaki asma köprü denklemi için lineer olmayan başlangıç ve sınır değer problemini ele alalım:

$$u_{tt} + \Delta^2 u + ku^+ + \delta u_t + f(u) = h(x) \tag{5.1}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \qquad u_t(x,0) = u_1(x) \qquad x \in \Omega, \tag{5.2}$$

$$u = 0, \qquad \Delta u = 0 \qquad x \in \partial\Omega, \mathrm{t} > 0. \tag{5.3}$$

Burada $u(x,t)$ yol düzleminin düşey düzlemdeki sapmasını temsil eden bilinmeyen fonksiyonu, $k > 0$ bağlantının yaylanma sabitini ve $\delta > 0$ sabiti ifade eder. $u^+ = max\{u, 0\}$ u' nun pozitif kısmıdır. Ω, $\mathbb{R}^n$'de sınırlı bir bölgedir. $h(x) \in L^2(\Omega)$ x'e bağlı bir fonksiyondur. $f(u)$ fonksiyonu $k_1 \geq 0$ olmak üzere,

$$-k_1 \leq F(u) \leq f(u)u, \qquad u \in \mathbb{R} \tag{5.4}$$

koşulunu sağlayan bir fonksiyondur. Burada $F(u) = \int_0^u f(s)ds$ dir.

5.2. Ön Kestirimler

Teorem: $k > \frac{1}{2}$ olsun ve (5.4) eşitsizliği sağlansın. Bu durumda $(u_0, u_1) \in H_0^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$ için $(5.1) - (5.3)$ probleminin çözümü olan $u(x,t)$,

$$\|u_t\|^2 \leq M, \qquad \|\Delta u\|^2 \leq M, \qquad \|u\|^2 \leq M \tag{5.5}$$

eşitsizliklerini sağlar. Burada M pozitif sabiti, (5.1) denkleminin başlangıç verilerine ve parametrelerine bağlıdır.

İspat: (5.1) denklemi $L^2(\Omega)$'de u_t ile çarpılırsa,

$$\int_\Omega u_t u_{tt} dx + \int_\Omega u_t \Delta^2 u dx + \int_\Omega u_t k u^+ dx + \int_\Omega u_t \delta u_t dx + \int_\Omega u_t [f(u) - h(x)] dx = 0 \tag{5.6}$$

elde edilir. (5.6) eşitliğindeki her bir terim ayrı ayrı hesaplanırsa,

$$\int_\Omega u_t\, u_{tt}\, dx = \int_\Omega u_t\, \frac{d}{dt} u_t\, dx = \int_\Omega \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\, (u_t)^2\, dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_t\|^2$$

$$\int_\Omega u_t\, \Delta^2 u\, dx = \underbrace{u_t\, \nabla(\Delta u)|_{\partial\Omega}}_{0} - \int_\Omega \nabla u_t\, \nabla(\Delta u) dx = -\int_\Omega \nabla u_t\, \nabla(\Delta u) dx$$

$$= -\left(\underbrace{\nabla u_t\, \Delta u|_{\partial\Omega}}_{0} - \int_\Omega \Delta u\, \Delta u_t\, dx\right) = \int_\Omega \Delta u \frac{d}{dt}\, \Delta u\, dx$$

$$= \int_\Omega \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\, (\Delta u)^2\, dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\Delta u\|^2$$

$$\int_\Omega u_t\, k u^+\, dx = k \int_\Omega \frac{d}{dt} u\, u^+\, dx = \frac{k}{2}\frac{d}{dt}\|u\|^2$$

$$\int_\Omega u_t\, \delta u_t\, dx = \delta \int_\Omega (u_t)^2\, dx = \delta\, \|u_t\|^2$$

$$\int_{\Omega} u_t \, [\, f(u) - h(x)] \, dx$$

elde edilir. Elde edilen bu eşitlikler (5.6)' da yerine yazılırsa,

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\|u_t\|^2 + \frac{1}{2}\|\Delta u\|^2 + \frac{k}{2}\|u\|^2\right] + \delta\,\|u_t\|^2 + \int_{\Omega} u_t \, [\, f(u) - h(x)] \, dx = 0 \quad (5.7)$$

eşitliği elde edilir. (5.6) eşitliği $E_3(t) = \frac{1}{2}\|u_t\|^2 + \frac{1}{2}\|\Delta u\|^2 + \frac{k}{2}\|u\|^2$ olmak üzere 0'dan t'ye integre edilirse,

$$\int_0^t \frac{d}{dt} E_3(t)\, dt + \delta \int_0^t \|u_t\|^2 dt \; + \int_0^t \int_{\Omega} u_t \, [\, f(u) - h(x)] \, dx \, dt = 0$$

$$E_3(t) - E_3(0) + \delta \int_0^t \|u_t\|^2 dt \; + \int_0^t \int_{\Omega} u_t \, [\, f(u) - h(x)] \, dx \, dt = 0$$

$$E_3(t) + \delta \int_0^t \|u_t\|^2 dt \; + \int_0^t \int_{\Omega} \frac{d}{dt} u \, [\, f(u) - h(x)] \, dx \, dt = E_3(0)$$

$$E_3(t) + \delta \int_0^t \|u_t\|^2 dt \; + \int_{\Omega} \, [\, f(u)u - h(x)u] \, dx = E_3(0) \quad (5.8)$$

bulunur. (5.8) eşitliğinin sol tarafındaki üçüncü terim (5.4) kullanılarak düzenlenirse,

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \, [\, f(u)u - h(x)u] dx &\geq \int_{\Omega} \, [\, F(u) - h(x)u] dx \\
&= \int_{\Omega} F(u) dx - \int_{\Omega} h(x)u \, dx \\
&\geq -k_1 \int_{\Omega} dx - \int_{\Omega} h(x)u \, dx \qquad (5.9)
\end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca (5.9) eşitsizliğinin sağ tarafındaki ikinci terime $\varepsilon = \frac{1}{2}$, $p = 2$,

$q = 2$ olmak üzere, ε-young eşitsizliği uygulanırsa,

$$h(x)u \leq \frac{\varepsilon u^p}{p} + \frac{[h(x)]^q}{q\varepsilon} \leq \frac{1}{4}u^2 + [h(x)]^2 \tag{5.10}$$

eşitsizliği bulunur. Elde edilen (5.10) eşitsizliği (5.9) eşitsizliğinde yazılırsa,

$$\begin{aligned}\int_\Omega [f(u)u - h(x)u]dx &\geq -k_1 \int_\Omega dx - \frac{1}{4}\int_\Omega u^2\, dx - \int_\Omega [h(x)]^2\, dx \\ &= -k_1|\Omega| - \tfrac{1}{4}\|u\|^2 - \|h(x)\|^2 \end{aligned} \tag{5.11}$$

bulunur. (5.11) eşitsizliği (5.8) eşitsizliğinde yazılırsa,

$$E_3(t) + \delta \int_0^t \|u_t\|^2 dt \; - k_1|\Omega| - \frac{1}{4}\|u\|^2 - \|h(x)\|^2 \leq E_3(0)$$

$$\frac{1}{2}\|u_t\|^2 + \frac{1}{2}\|\Delta u\|^2 + \frac{k}{2}\|u\|^2 + \delta \int_0^t \|u_t\|^2 dt - \frac{1}{4}\|u\|^2 \leq E_3(0) + k_1|\Omega| + \|h(x)\|^2$$

$$\|u_t\|^2 + \|\Delta u\|^2 + k\|u\|^2 + 2\delta \int_0^t \|u_t\|^2 dt - \frac{1}{2}\|u\|^2 \leq 2(E_3(0) + k_1|\Omega| + \|h(x)\|^2)$$

$$\|u_t\|^2 + \|\Delta u\|^2 + \left(k - \frac{1}{2}\right)\|u\|^2 + \underbrace{2\delta \int_0^t \|u_t\|^2 dt}_{\geq 0} \leq \underbrace{2(E_3(0) + k_1|\Omega| + \|h(x)\|^2)}_{M}$$

elde edilir. $M = 2(E_3(0) + k_1|\Omega| + \|h(x)\|^2)$ ve $k - \frac{1}{2} > 0$ olmak üzere,

$\|u_t\|^2 \leq M$, $\|\Delta u\|^2 \leq M$, $\|u\|^2 \leq M$

şeklinde elde edilir.

5.3. δ Katsayısına Sürekli Bağımlılık

Bu bölümde (5.1) $-$ (5.3) probleminin çözümlerinin δ katsayısına sürekli bağımlılığı incelenecektir.

$$u_{tt} + \Delta^2 u + ku^+ + \delta_1 u_t + f(u) = h(x) \tag{5.12}$$
$$u(x,0) = u_0(x), \qquad u_t(x,0) = u_1(x) \qquad x \in \Omega, \tag{5.13}$$
$$u = 0, \qquad \Delta u = 0 \qquad x \in \partial\Omega, \mathrm{t} > 0 \tag{5.14}$$

probleminin çözümü u,

$$v_{tt} + \Delta^2 v + kv^+ + \delta_2 v_t + f(v) = h(x) \tag{5.15}$$
$$v(x,0) = u_0(x), \qquad v_t(x,0) = u_1(x) \qquad x \in \Omega, \tag{5.16}$$
$$v = 0, \qquad \Delta v = 0 \qquad x \in \partial\Omega, \mathrm{t} > 0 \tag{5.17}$$

probleminin çözümü v olsun. $w = u - v$ olmak üzere, (5.12)'den (5.15) çıkarılırsa

$$w_{tt} + \Delta^2 w + kw^+ + \delta_1 u_t - \delta_2 v_t + f(u) - f(v) = 0 \tag{5.18}$$
$$w(x,0) = 0, \qquad w_t(x,0) = 0 \qquad x \in \Omega, \tag{5.19}$$
$$w = 0, \qquad \Delta w = 0 \qquad x \in \partial\Omega, \mathrm{t} > 0 \tag{5.20}$$

bulunur. (5.18) denklemine $\delta_2 u_t$ ifadesi eklenip çıkarılırsa,

$$w_{tt} + \Delta^2 w + kw^+ + \delta_1 u_t - \delta_2 v_t + \delta_2 u_t - \delta_2 u_t + f(u) - f(v) = 0$$

elde edilir. $\hat{\delta} = \delta_1 - \delta_2 > 0$ olmak üzere,

$$w_{tt} + \Delta^2 w + kw^+ + \hat{\delta} u_t + \delta_2 w_t + f(u) - f(v) = 0 \tag{5.21}$$
$$w(x,0) = 0, \qquad w_t(x,0) = 0 \qquad x \in \Omega, \tag{5.22}$$
$$w = 0, \qquad \Delta w = 0 \qquad x \in \partial\Omega, \mathrm{t} > 0 \tag{5.23}$$

problemi elde edilir.

Teorem: f fonksiyonu aşağıdaki şartı sağlasın:

$$|f(u) - f(v)| \leq k_0(1 + |u|^p + |v|^p)|u - v| \quad u, v \in \mathbb{R}\,. \tag{5.24}$$

Bu durumda, $(5.21) - (5.23)$ probleminin çözümü olan $w(x,t)$,

$$\|w_t\|^2 + \|\Delta w\|^2 + \|w\|^2 \leq \frac{M}{2C_1}\hat{\delta}^2(1 - e^{-C_1 t})$$

eşitsizliğini sağlar. Burada M pozitif sayısı, (5.21)'deki başlangıç verilerine ve parametrelere bağlıdır.

İspat: (5.21) denklemi $L^2(\Omega)$'de w_t ile çarpılırsa,

$$\int_\Omega w_t\, w_{tt}\, dx + \int_\Omega w_t \Delta^2 w dx + \int_\Omega w_t k w^+ dx + \int_\Omega w_t \hat{\delta} u_t dx + \int_\Omega w_t \delta_2 w_t dx$$
$$+ \int_\Omega w_t[f(u) - f(v)]dx = 0 \tag{5.25}$$

elde edilir. (5.25) eşitliğindeki her bir terim ayrı ayrı hesaplanırsa,

$$\int_\Omega w_t\, w_{tt}\, dx = \int_\Omega w_t\, \frac{d}{dt} w_t\, dx = \int_\Omega \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(w_t)^2\, dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w_t\|^2$$

$$\int_\Omega w_t\, \Delta^2 w\, dx = \underbrace{w_t.\Delta(\nabla w)|_{\partial\Omega}}_{0} - \int_\Omega \nabla w_t\, \Delta(\nabla w) dx$$
$$= -\int_\Omega \nabla w_t\, \Delta(\nabla w) dx$$
$$= -\left(\underbrace{\nabla w_t.\Delta w|_{\partial\Omega}}_{0} - \int_\Omega \Delta w_t\, \Delta w\, dx\right)$$
$$= \int_\Omega \Delta w_t\, \Delta w\, dx = \int_\Omega \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\Delta w\, \Delta w\, dx = \int_\Omega \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(\Delta w)^2\, dx = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\|\Delta w\|^2$$

$$\int_\Omega w_t\, k w^+\, dx = k \int_\Omega \frac{d}{dt} w\, w\, dx = k \int_\Omega \frac{1}{2}\frac{d}{dt} w^{\,2} dx = \frac{k}{2}\frac{d}{dt}\|w\|^2$$

$$\int_\Omega w_t\, \hat{\delta}\, u_t\, dx = \hat{\delta}\langle w_t, u_t\rangle$$

$$\int_\Omega w_t\, \delta_2 w_t\, dx = \delta_2 \int_\Omega {w_t}^2\, dx = \delta_2\|w_t\|^2$$

$$\int_\Omega w_t\, [f(u) - f(v)]\, dx = \langle w_t, f(u) - f(v)\rangle$$

elde edilir. Elde edilen bu eşitlikler (5.25)'te yerine yazılırsa,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w_t\|^2 + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\|\Delta w\|^2 + \frac{k}{2}\frac{d}{dt}\|w\|^2$$
$$= -\delta_2\|w_t\|^2 - \hat{\delta}\langle w_t, u_t\rangle - \langle w_t, f(u) - f(v)\rangle$$
$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\|w_t\|^2 + \frac{1}{2}\|\Delta w\|^2 + \frac{k}{2}\|w\|^2\right] + \delta_2\|w_t\|^2 = -\hat{\delta}\langle w_t, u_t\rangle - \langle w_t, f(u) - f(v)\rangle$$
$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\|w_t\|^2 + \frac{1}{2}\|\Delta w\|^2 + \frac{k}{2}\|w\|^2\right] + \delta_2\|w_t\|^2 \le \left|\hat{\delta}\langle w_t, u_t\rangle\right| + |\langle w_t, f(u) - f(v)\rangle| \tag{5.26}$$

eşitsizliği elde edilir. (5.26) eşitsizliğinin sol tarafındaki ilk terime Cauchy-Schwarz ve Aritmetik-Geometrik ortalama eşitsizlikleri uygulanır ve düzenlenirse,

$$\left|\hat{\delta}\langle w_t, u_t\rangle\right| \le \int_\Omega \left|\hat{\delta}\right| |w_t|\, |u_t|\, dx \le \hat{\delta}\, \|w_t\|\, \|u_t\| = \left|\hat{\delta}\right| \|w_t\|\, \|u_t\| \sqrt{\hat{\delta}}\,.\frac{1}{\sqrt{\hat{\delta}}}$$
$$\le \left|\hat{\delta}\right| \left(\frac{1}{2\hat{\delta}}\|w_t\|^2 + \frac{\hat{\delta}}{2}\|u_t\|^2\right) \le \frac{1}{2}\|w_t\|^2 + \frac{\hat{\delta}^2}{2}\|u_t\|^2 \tag{5.27}$$

elde edilir. (5.26)'daki ikinci terime (5.24) kullanılıp sırasıyla Hölder, Sobolev-Poincare ve Aritmetik-Geometrik ortalama eşitsizlikleri uygulanırsa,

$$|\langle w_t, f(u) - f(v)\rangle| \le \int_\Omega |w_t|\, |\, f(u) - f(v)|\, dx$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \int_{\Omega} |w_t|\, k_0\, (1 + |u|^p + |v|^p)|u - v|\, dx \\
&= \int_{\Omega} |w_t|\, k_0\, (1 + |u|^p + |v|^p)|w|\, dx \\
&\leq k_0 \left(|\Omega|^{\frac{p}{2(p+1)}} + \|u\|_{2(p+1)}^p + \|v\|_{2(p+1)}^p \right) \|w\|_{2(p+1)} \|w_t\| \\
&\leq k_0 \left(|\Omega|^{2(p+1)} + \underbrace{\|u\|}_{\sqrt{M}}{}^p + \underbrace{\|v\|}_{\sqrt{M}}{}^p \right) \|w\|\, \|w_t\| \\
&\leq \underbrace{k_0 \left(|\Omega|^{2(p+1)} + M^{p/2} + M^{p/2} \right)}_{\boldsymbol{K}} \|w\|\, \|w_t\| \\
&= K \|w\|\, \|w_t\| \\
&\leq \frac{K^2}{2} \|w\|^2 + \frac{1}{2} \|w_t\|^2 \\
&\leq \frac{K^2 {d_0}^2}{2} \|\nabla w\|^2 + \frac{1}{2} \|w_t\|^2 \\
&\leq \frac{K^2 {d_0}^2}{2\lambda} \|\Delta w\|^2 + \frac{1}{2} \|w_t\|^2 \qquad (5.28)
\end{aligned}
$$

eşitsizlikleri elde edilir. (5.27) ve (5.28) eşitsizlikleri (5.26) eşitsizliğinde yerine yazılırsa,

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2} \|w_t\|^2 + \frac{1}{2} \|\Delta w\|^2 + \frac{k}{2} \|w\|^2\right] + \delta_2 \|w_t\|^2 \\
&\qquad \leq \frac{1}{2} \|w_t\|^2 + \frac{\hat{\delta}^2}{2} \|u_t\|^2 + \frac{K^2 {d_0}^2}{2\lambda} \|\Delta w\|^2 + \frac{1}{2} \|w_t\|^2 \\
&\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2} \|w_t\|^2 + \frac{1}{2} \|\Delta w\|^2 + \frac{k}{2} \|w\|^2\right] + \delta_2 \|w_t\|^2 \\
&\qquad \leq \|w_t\|^2 + \frac{\hat{\delta}^2}{2} \|u_t\|^2 + \frac{K^2 {d_0}^2}{2\lambda} \|\Delta w\|^2
\end{aligned}
$$

bulunur. $\|u_t\|^2 \leq M$ kestirimi kullanlırsa,

$$
\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2} \|w_t\|^2 + \frac{1}{2} \|\Delta w\|^2 + \frac{k}{2} \|w\|^2\right] + (\delta_2 - 1) \|w_t\|^2 - \frac{K^2 {d_0}^2}{2\lambda} \|\Delta w\|^2 \leq \frac{M}{2} \hat{\delta}^2
$$

$$\frac{d}{dt}[\|w_t\|^2 + \|\Delta w\|^2 + k\|w\|^2] + 2(\delta_2 - 1)\|w_t\|^2 - \frac{K^2 {d_0}^2}{\lambda}\|\Delta w\|^2 \leq M\hat{\delta}^2$$

eşitsizliği bulunur. Son eşitsizliğin sol tarafından $\|w\|^2 \geq 0$ ifadesi çıkarılırsa,

$$\frac{d}{dt}[\|w_t\|^2 + \|\Delta w\|^2 + k\|w\|^2] + 2(\delta_2 - 1)\|w_t\|^2 - \frac{K^2 {d_0}^2}{\lambda}\|\Delta w\|^2 - \|w\|^2$$
$$\leq M\hat{\delta}^2$$

bulunur. Burada $C_1 = min\left\{2(\delta_2 - 1), -\left(\frac{K^2 {d_0}^2}{\lambda}\right), -\frac{1}{k}\right\}$, $E_1(t) = \|w_t\|^2 + \|\Delta w\|^2 + k\|w\|^2$ olmak üzere,

$$\frac{d}{dt}E_1(t) + C_1 E_1(t) \leq M\hat{\delta}^2 \tag{5.29}$$

eşitsizliği yazılır. (5.29) eşitsizliğinin çözümü yapılırsa,

$$e^{C_1 t}\frac{d}{dt}E_1(t) + C_1 e^{C_1 t}E_1(t) \leq M\hat{\delta}^2 e^{C_1 t}$$
$$\int_0^t \frac{d}{d\tau}[e^{C_1 \tau}E_1(\tau)]\,d\tau \leq M\hat{\delta}^2 \int_0^t e^{C_1 \tau}\,d\tau$$
$$e^{C_1 t}E_1(t) - \underbrace{E_1(0)}_{0} \leq \frac{M}{C_1}\hat{\delta}^2(e^{C_1 t} - 1)$$
$$E_1(t) \leq \frac{M}{C_1}\hat{\delta}^2(1 - e^{-C_1 t})$$

elde edilir. Burada $\hat{\delta} \to 0$ ise $E_1(t) \to 0$ olur.

5.4. *k* Katsayısına Sürekli Bağımlılık

Bu bölümde (5.1) $-$ (5.3) probleminin çözümlerinin k katsayısına sürekli bağımlılığı incelenecektir.

$$u_{tt} + \Delta^2 u + k_1 u^+ + \delta u_t + f(u) = h(x) \tag{5.30}$$
$$u(x,0) = u_0(x), \qquad u_t(x,0) = u_1(x) \qquad x \in \Omega, \tag{5.31}$$
$$u = 0, \qquad \Delta u = 0 \qquad x \in \partial\Omega, \mathrm{t} > 0 \tag{5.32}$$

probleminin çözümü u,

$$v_{tt} + \Delta^2 v + k_2 v^+ + \delta v_t + f(v) = h(x) \tag{5.33}$$
$$v(x,0) = u_0(x), \qquad v_t(x,0) = u_1(x) \qquad x \in \Omega, \tag{5.34}$$
$$v = 0, \qquad \Delta v = 0 \qquad x \in \partial\Omega, \mathrm{t} > 0 \tag{5.35}$$

probleminin çözümü v olsun.$w = \ u - v$ olmak üzere, (5.30)'dan (5.33) çıkarılırsa,

$$w_{tt} + \Delta^2 w + k_1 u^+ - k_2 v^+ + \delta w_t + f(u) - f(v) = 0 \tag{5.36}$$
$$w(x,0) = 0, \qquad w_t(x,0) = 0 \qquad x \in \Omega, \tag{5.37}$$
$$w = 0, \qquad \Delta w = 0 \qquad x \in \partial\Omega, \mathrm{t} > 0 \tag{5.38}$$

bulunur. (5.36) denklemine $k_2 u^+$ ifadesi eklenip çıkarılırsa,

$$w_{tt} + \Delta^2 w + k_1 u^+ - k_2 v^+ + k_2 u^+ - k_2 u^+ + \delta w_t + f(u) - f(v) = 0$$

elde edilir. $\hat{k} = k_1 - k_2 > 0$ olmak üzere,

$$w_{tt} + \Delta^2 w + \hat{k} u^+ + k_2 w^+ + \delta w_t + f(u) - f(v) = 0 \tag{5.39}$$
$$w(x,0) = 0, \qquad w_t(x,0) = 0 \qquad x \in \Omega, \tag{5.40}$$
$$w = 0, \qquad \Delta w = 0 \qquad x \in \partial\Omega, \mathrm{t} > 0 \tag{5.41}$$

problemi bulunur.

Teorem: $\delta - 1 < 0$ koşulu ve $|u^+| \leq |u|$ eşitsizliği sağlansın. (5.24) yardımıyla $(5.39) - (5.41)$ probleminin çözümü olan $w(x,t)$,

$$\|w_t\|^2 + \|\Delta w\|^2 \leq \frac{M}{2}\hat{k}^2(e^{C_2 t} - 1)$$

eşitsizliğini sağlar. Burada M ve C_2, (5.39) başlangıç verilerine ve parametrelerine bağlı pozitif sabitlerdir.

İspat: (5.39) denklemi $L^2(\Omega)$'de w_t ile çarpılırsa,

$$\int_\Omega w_t\, w_{tt}\, dx + \int_\Omega w_t\, \Delta^2 w\, dx + \int_\Omega w_t\, \hat{k}u^+\, dx + \int_\Omega w_t\, k_2 w^+\, dx + \int_\Omega w_t\, \delta w_t\, dx$$
$$+ \int_\Omega w_t \left(f(u) - f(v)\right) dx = 0 \tag{5.42}$$

elde edilir. (5.42) eşitliğindeki her bir terim ayrı ayrı hesaplanırsa,

$$\int_\Omega w_t\, w_{tt}\, dx = \int_\Omega w_t\, \frac{d}{dt} w_t\, dx = \int_\Omega \frac{1}{2}\,\frac{d}{dt} {w_t}^2\, dx = \frac{1}{2}\,\frac{d}{dt}\int_\Omega {w_t}^2\, dx = \frac{1}{2}\,\frac{d}{dt}\|w_t\|^2$$

$$\int_\Omega w_t\, \Delta^2 w\, dx = \underbrace{w_t.\nabla(\Delta w)|_{\partial\Omega}}_{0} - \int_\Omega \nabla w_t\;\; \nabla(\Delta w) dx$$
$$= -\int_\Omega \nabla w_t\;\; \nabla(\Delta w) dx$$
$$= -\left(\underbrace{\nabla w_t.\Delta w|_{\partial\Omega}}_{0} - \int_\Omega \nabla w\; \Delta w_t dx\right)$$
$$= \int_\Omega \nabla w\; \Delta w_t dx = \int_\Omega \nabla w\; \frac{d}{dt}\Delta w\, dx = \int_\Omega \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\Delta w)^2\, dx$$
$$= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega (\Delta w)^2\, dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\Delta w\|^2$$

$$\int_\Omega w_t\, \hat{k}u^+\, dx = \hat{k}\langle w_t, u^+\rangle$$

$$\int_\Omega w_t\, k_2 w^+\, dx = k_2 \int_\Omega \frac{d}{dt} w\, w\, dx = k_2 \int_\Omega \frac{1}{2}\frac{d}{dt} w^2\, dx = \frac{k_2}{2}\frac{d}{dt}\|w\|^2$$

$$\int_{\Omega} w_t\, \delta w_t\, dx = \delta \int_{\Omega} {w_t}^2\, dx = \delta \|w_t\|^2$$

$$\int_{\Omega} w_t\, \big(f(u) - f(v)\big)\, dx = \langle w_t, f(u) - f(v) \rangle$$

elde edilir. Elde edilen bu eşitlikler (5.42)'de yerine yazılırsa,

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\,\|w_t\|^2 + \frac{1}{2}\|\Delta w\|^2 + \frac{k_2}{2}\|w\|^2\right] + \delta\|w_t\|^2 = -\hat{k}\langle w_t, u^+\rangle - \langle w_t, f(u) - f(v)\rangle$$

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\,\|w_t\|^2 + \frac{1}{2}\|\Delta w\|^2 + \frac{k_2}{2}\|w\|^2\right] + \delta\|w_t\|^2 \le \left|\hat{k}\langle w_t, u^+\rangle\right| + |w_t, f(u) - f(v)| \tag{5.43}$$

eşitsizliği bulunur. (5.43) eşitsizliğinin sağ tarafındaki ilk terime sırasıyla Cauchy-Schwarz, Aritmetik-Geometrik ortalama eşitsizlikleri uygulanırsa,

$$\begin{aligned}
\left|\hat{k}\langle w_t, u^+\rangle\right| &\le \left|\int_{\Omega} \hat{k}\, w_t\, u^+\, dx\right| \le \int_{\Omega} \left|\hat{k}\right|\left| w_t\right|\left|u^+\right| dx \le \hat{k}\int_{\Omega} \left| w_t\right|\left|u\right| dx \\
&= \hat{k}\|w_t\|\|u\| \le \hat{k}\left(\|w_t\|\|u\|\sqrt{\hat{k}}\,\frac{1}{\sqrt{\hat{k}}}\right) \\
&\le \left|\hat{k}\right|\left(\frac{\hat{k}}{2}\underbrace{\|u\|^2}_{\le M} + \frac{1}{2\hat{k}}\|w_t\|^2\right) \\
&\le \left|\hat{k}\right|\left(\frac{\hat{k}}{2}M + \frac{1}{2\hat{k}}\|w_t\|^2\right) = \frac{M}{2}\hat{k}^2 + \frac{1}{2}\|w_t\|^2
\end{aligned} \tag{5.44}$$

elde edilir. (5.43) eşitsizliğinin sağ tarafındaki ikinci terim (5.28) eşitsizliğine benzer şekilde yapılırsa,

$$|w_t, f(u) - f(v)| \le \frac{(Kd_0)^2}{2\lambda}\|\Delta w\|^2 + \frac{1}{2}\|w_t\|^2 \tag{5.45}$$

eşitsizliği elde edilir. Burada $K = |\Omega|^{\frac{p}{2(p+1)}} + 2M^{\frac{p}{2}}$ dır. (5.44) ve (5.45) eşitsizlikleri (5.43)'te yerine yazılırsa,

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\|w_t\|^2+\frac{1}{2}\|\Delta w\|^2+\frac{k_2}{2}\|w\|^2\right]+\delta\|w_t\|^2$$
$$\leq\frac{M}{2}\hat{k}^2+\frac{1}{2}\|w_t\|^2+\frac{(k_0Kd_0)^2}{2\lambda}\|\Delta w\|^2+\frac{1}{2}\|w_t\|^2$$
$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\|w_t\|^2+\frac{1}{2}\|\Delta w\|^2+\frac{k_2}{2}\|w\|^2\right]+(\delta-1)\|w_t\|^2-\frac{(k_0Kd_0)^2}{2\lambda}\|\Delta w\|^2\leq\frac{M}{2}\hat{k}^2$$
$$\frac{d}{dt}[\,\|w_t\|^2+\|\Delta w\|^2+k_2\|w\|^2]+2(\delta-1)\|w_t\|^2-\frac{(k_0Kd_0)^2}{\lambda}\|\Delta w\|^2\leq M\hat{k}^2 \tag{5.46}$$

elde edilir. (5.46) eşitsizliğinin sol tarafından $\|w\|^2$ ifadesi çıkarılırsa,

$$\frac{d}{dt}[\,\|w_t\|^2+\|\Delta w\|^2+k_2\|w\|^2]+2(\delta-1)\|w_t\|^2-\frac{(k_0Kd_0)^2}{\lambda}\|\Delta w\|^2-\|w\|^2$$
$$\leq M\hat{k}^2$$

bulunur. Burada

$(\delta-1)<0,$

$C_2=2min\left\{(\delta-1),-\frac{(k_0Kd_0)^2}{2\lambda}\right\},$

$E_2(t)=\;\|w_t\|^2+\|\Delta w\|^2+k_2\|w\|^2$

olmak üzere,

$$\frac{d}{dt}E_2(t)+\;C_2E_2(t)\leq M\hat{k}^2 \tag{5.47}$$

eşitsizliği yazılır. (5.47) eşitsizliğinin çözümü yapılırsa,

$$e^{C_2t}\frac{d}{dt}E_2(t)+\;C_2e^{C_2t}E_2(t)\leq e^{C_2t}M\hat{k}^2$$
$$\int_0^t\frac{d}{d\tau}[e^{C_2\tau}E_2(\tau)]d\tau\leq M\hat{k}^2\int_0^t e^{C_2\tau}\,d\tau$$

$$e^{C_2 t}E_2(t) - \underbrace{E_2(0)}_{0} \leq \frac{M}{C_2}\hat{k}^2(e^{C_2 t} - 1)$$

$$E_2(t) \leq \frac{M}{C_2}\hat{k}^2(1 - e^{-C_2 t}) \leq \frac{M}{C_2}\hat{k}^2$$

bulunur. Bu da $\hat{k} \to 0$ iken $E_2(t) \to 0$ demektir.

BÖLÜM 6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tezde "On continuous dependence on coefficients of the Brinkman–Forchheimer eqations" ve "Structural stability for Fitzhugh-Nagumo equations" adlı makaleler detaylı bir şekilde incelenmiştir. Asma köprü denkleminin çözümlerinin katsayılara sürekli bağımlılığı üzerine tez çalışması yapılmıştır.

Diğer kısmi türevli diferansiyel denklemler için de benzer işlemler yapılabilir.

KAYNAKLAR

[1] Fırat, T., Bazı kısmi türevli denklemlerin sonlu fark yöntemiyle çözümü, Yüksek lisans tezi, 2015.

[2] Kostreva, M.M., Word, A.L., Optimal control of a system governed by an elliptc partial differential equation, Journal of computational and applied mathematics, 114, 173-187, 2000.

[3] Selvadurai, A.P.S., Partial differential equations in mechanics, Department of çivil engineering and applied, 2000.

[4] Casas, F., Solution of linear partial differential equations by Lie algebraic methods, Journal of coputational and applied mathematics, 76, 159-170, 1996.

[5] Rice, J.R., Vavalis, E.A., Yang, D., Analysis of a nonoverlappinng domain decomposition method for eliptic partial differential equations, Journal of computational and applied mathematics, 87, 11-19, 1997.

[6] Liu, Y., Convergence and continuous dependence fort he Brinkman-Forchheimer equations, Computer modelling, 49, 1401-1415, 2009.

[7] Ames, K.A., Straughan, B., Non-standard and improperly posed problems, in: mathematics in Science and engineering series, vol. 194, Academic press, 1997.

[8] Dickey, R. W. An improved method for the numerical solution of the suspension bridge deflection equations. Math. Comp. 22, 298–303, 1968.

[9] Choi, Q-Heung (KR-INHA); Jung, Tacksun (KR-INHA), On periodic solutions of the nonlinear suspension bridge equation with a rotary inertia term. Analysis and geometry, 167–177, 1989.

[10] Humphreys, Lisa Doolittle, Numerical and theoretical results on large-amplitude periodic solutions of a suspension bridge equation, Thesis (Ph.D.)–University of Connecticut., 67 pp,1994.

[11] An, Yukun; Zhong, Chenkui, Periodic solutions of a nonlinear Suspension Bridge equation with damping and nonconstant load, *J. Math. Anal. Appl.* 279 ,no. 2, 569–579, 2003.

[12] Wang, Shanshan; An, Yukun, Multiple periodic solutions to a suspension bridge wave equation with damping, *ISRN Math. Anal.*, Art. ID 154806, 9 pp, 2011.

[13] Çelebi, A.O., Kalantarov, V.K., Uğurlu, D., On continuous dependence on coefficients of the Brinkman-Forchheimer equations, Applied mathematics leeters, 19, 801-807, 2006.

[14] Aliyeva, G.N., Kalantarov, V.K., Structural stability for Fitzhugh-nagumo equations, mathematics.

[15] Soykan, Y., Fonksiyonel analiz, 3. Basım, Nobel akademik yayıncılık, 2016.

[16] Balcı, M., Reel analiz, Palme yayıncılık, 2016.

[17] Pişkin, E., Sobolev uzayları, Seçkin yayıncılık, 2017.

[18] Mustafa, N., Fonksiyonel analiz, 3. Baskı, Seçkin yayıncılık, 2016.

[19] Dönmez, A., Reel analiz, 2. Baskı, Seçkin yayıncılık, 2001.

ÖZGEÇMİŞ

Merve Çelebi, 06.06.1988'de Sakarya'da doğdu. İlk, orta ve lise eğitimini Sakarya'da tamamladı. 2005 yılında Atatürk Lisesi'nden mezun oldu. 2006 yılında başladığı Fırat Üniversitesi Matematik Bölümü'nü 2010 yılında bitirdi. 2013-2015 yılları arasında Erenler Halk Eğitimi Merkezi'nde öğretmen olarak çalışmaya başladı. 2015 yılında Sakarya Üniversitesi Matematik Bölümü'nde yüksek lisans eğitimine başladı. 2015-2016 yılları arasında Arifiye Halk Eğitimi Merkezi'nde öğretmen olarak çalışmaya başladı. 2018 yılından beri Arifiye Halk Eğitimi Merkezi'nde öğretmenlik yapmaktadır.