T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KISMİ TÜREVLİ DENKLEMLERİN YAPISAL KARARLILIK ANALİZİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Saadet CİCİKÇİOL

Enstitü Anabilim Dalı	**:**	**MATEMATİK**
Enstitü Bilim Dalı	**:**	**UYGULAMALI MATEMATİK**
Tez Danışmanı	**:**	**Prof. Dr. Şevket Gür**

Temmuz 2018

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KISMİ TÜREVLİ DENKLEMLERİN YAPISAL KARARLILIK ANALİZİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Saadet CİCİKÇİOL

Enstitü Anabilim Dalı	:	MATEMATİK
Enstitü Bilim Dalı	:	UYGULAMALI MATEMATİK

Bu tez 09/07/2018 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği ile kabul edilmiştir.

Dr. Öğr. Üyesi	Doç. Dr.	Prof. Dr.
Yasemin BAŞCI	Metin YAMAN	Şevket GÜR
Jüri Başkanı	Üye	Üye

BEYAN

Tez içindeki tüm verilerin akademik kurallar çerçevesinde tarafımdan elde edildiğini, görsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçların akademik ve etik kurallara uygun şekilde sunulduğunu, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezde yer alan verilerin bu üniversite veya başka bir üniversitede herhangi bir tez çalışmasında kullanılmadığını beyan ederim.

Saadet CİCİKÇİOL

09.07.2018

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimim boyunca değerli bilgi ve deneyimlerinden yararlandığım, her konuda bilgi ve desteğini almaktan çekinmediğim, araştırmanın planlanmasından yazılmasına kadar tüm aşamalarında yardımlarını esirgemeyen değerli danışman hocam Prof. Dr. Şevket GÜR'e , bu günlere gelmemde büyük pay sahibi olan, her türlü desteği veren değerli aileme ve yüksek lisans sürecimin başından sonuna kadar hep benimle olan her türlü desteğini esirgemeyen, varlığı bana her zaman güven veren sevgili eşim Samet CİCİKÇİOL'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

$\nabla^2 = \Delta$	: Laplace operatörü
∇	:Gradiant operatör
Ω	: R^n ‘de düzgün sınıra sahip sınırlı bölge
$u(x,t)$	: Bilinmeyen fonksiyon
$H^1(\Omega), H_0^1(\Omega)$	: Sobolev uzayı
(u,v)	: $\int_\Omega uvdx$
$\|.\|$	: $\|.\|_2$

ÖZET

Anahtar kelimeler: Yapısal Kararlılık, BBMB Denklemi, OBBMB Denklemi

Bu tezde, kısmi türevli diferansiyel denklemlerin çözümlerinin katsayılara sürekli bağımlılığı incelenmiştir. Giriş bölümünde kısmi türevli diferansiyel denklemlerde yapısal kararlılık ile ilgili bilgiler verilmiştir. Ayrıca incelediğimiz problem tanıtılmış ve benzer tipteki problemler üzerine diğer yazarların yapmış oldukları çalışmalardan bahsedilmiştir. İkinci bölümde bu tezde kullanılan temel tanım ve kavramlara yer verilmiştir. Üçüncü bölümde, lineer olmayan dalga denkleminin yapısal kararlılığını inceleyen "Structural Stability for a Class of Nonlinear Wave Equations" adlı makale detaylı bir şekilde ele alınmıştır. Dördüncü bölümde, Marine Riser denkleminin yapısal kararlılığı ve azalma kestirimlerini inceleyen "Structural Stability and Decay Estimate for Marine Riser Equations" makale ayrıntılı olarak irdelenmiştir. Beşinci bölümde ise özgün bir çalışma olarak Oskolkov-Benjamin-Bona-Mahony-Burgers denkleminin çözümlerinin katsayılara sürekli bağımlılığı ayrıntılı olarak incelenmiştir.

STRUCTURAL STABILITY ANALYSIS OF PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

SUMMARY

Keywords: Structural Stability, BBMB Equation, OBBMB Equation

In this thesis, the continuous dependence of the coefficients on partial differential equation solutions are examined. In introductory chapter, information on structural stability is given in partial differential equations. In addition to the problem we studied are introduced and some studies done on the type of similar problems are mentioned. In the second chapter, general and specific informations which were used in this study are given. In the third chapter, the article entitled "Structural Stability for a Class of Nonlinear Wave Equations" is investigated. In the forth chapter, the article entitled "Structural Stability and Decay Estimate for Marine Riser Equations" is examined. In the fifth chapter, as an original study the continuous dependence of the solutions of the Oskolkov-Benjamin-Bona-Mahony-Burgers equation on the coefficients are examined in detail.

BÖLÜM 1. GİRİŞ

Yapısal kararlılık, modelin kendi kararlılığının incelenmesidir. Kararlılığın klasik tanımı, başlangıç verilerindeki değişikler üzerine çözümün sürekli bağımlılığını içerir. Hirsch ve Smale [1] yapısal kararlılık fikrini tanıtan öncülerdendir. Kitaplarında, diferansiyel denklemlerin çözümlerini değiştiren etkinin ne olduğu sorusunu sorup bunun yapısal kararlılık sorunu olduğunu dile getirmişlerdir.

Ancak zaman geçtikçe modelde, sınır değerlerinde ve hatta kısmi türevli diferansiyel denklemlerde, katsayılardaki değişikliklerin sürekli bağımlılığının fark edilmesiyle bu durumun daha önemli olduğu anlaşılmıştır. Kararlılık ya da sürekli bağımlılığın bu yönü yapısal kararlılık olarak adlandırılır [2].

Denklemlerin çözümlerinin katsayılara sürekli bağımlılığı bir tür kararlı yapı olduğundan katsayılardaki küçük değişikliklerin çözümlere etkisini yansıtır. Benzer birçok sonucu Ames ve Straughan [3] incelemiştir. Darcy ve Brinkman sistemlerinde temsil edilen akışkanın geçirgen ortamdaki akışının yapısal kararlılığını Ames ve Payne [4] , Payne ve Straughan [5-8] incelemiştir. Literatürdeki sürekli bağımlılık için [9-13] çalışmaları incelenebilir.

Kısmi türevli diferansiyel denklemler birçok Matematik, Fizik ve mühendislik problemlerinde karşımıza çıkmaktadır. Doğanın temel kanunlarının matematiksel olarak ifade edilebilmesi için lineer olmayan modellere ihtiyaç duyulur. Bu yüzden de bu modeller lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemlere dayanmaktadır. Lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemler, bilimin çeşitli alanlarındaki birçok dinamik sistemde özellikle de akışkanlar mekaniği, katı hal fiziği, plazma fiziği ve lineer olmayan optikleri tanımlamak için yaygın olarak kullanılmaktadır.

1830'lu yıllardan itibaren birçok fizikçi ve matematikçi lineer olmayan dalga kuramı ile ilgilenmiştir. Korteweg-de Vries denklemi (KdV) ilk defa 1895'te [14] küçük genlikli ve uzun dalga boylu su dalgalarının tek yönlü yayılım modeli olarak karşımıza çıkmıştır ve tekil dalgaların çözümlerini temsil etmektedir.

Düzenli uzun dalga denklemi ilk olarak Peregrine [15] tarafından 1966 yılında, KdV denklemine bir alternatif olarak önerilmiştir. Daha sonra bu denklem Benjamin, Bona ve Mahony [16] tarafından çalışılmış ve geliştirilerek BBM denklemi olarak adlandırılmıştır. BBM denklemi,

$$u_t + u_x + uu_x - u_{xxt} = 0\,, \qquad t > 0, \qquad x \in R$$

şeklinde tanımlanmıştır.

Dalganın bozulmasına yol açan mekanizmaları hesaba katmak amacıyla u_{xx} dağıtıcı terimini içeren

$$u_t + u_x + uu_x - \nu u_{xx} - u_{xxt} = 0 \quad , \qquad \nu \in R^+$$

modeli Amick, Bona ve Schonbek [17] tarafından çalışılmıştır. Eklenen bir Burgers tipi dağıtıcı terimi ile düzenli uzun dalga denklemi daha çok Benjamin-Bona-Mahony-Burgers (BBMB) denklemi olarak adlandırılır [18].

Zamana göre birinci mertebeden türevli denklemlere psedoparabolik denklem denir [19]. Küçük genlikli uzun dalgaların yayılımı, termodinamik, ikinci mertebeden akışkanlarda kesme, kil konsolidasyonu gibi matematik ve fiziğin pek çok alanında kullanılır. Bunlar hakkındaki ayrıntılı bilgiler için [20-23] çalışmaları incelenebilir.

Psedoparabolik tip denklemlerin önemli bir özel durumu da genelleştirilmiş BBMB,

$$u_t - u_{xxt} - \alpha u_{xx} + \gamma u_x + g(u)_x = 0\,, \qquad t \geq 0, \qquad x \in R$$

denklemidir. Burada β bir reel sayı ve α pozitif sabittir. $g(u)$ ise C^2 de düzgün lineer olmayan fonksiyondur. Genelleştirilmiş BBMB denkleminde $g(u)_x = \theta uu_x$ alınırsa,

$$u_t - u_{xxt} - \alpha u_{xx} + \gamma u_x + \theta uu_x = 0$$

Oskolkov-Benjamin-Bona-Mahony-Burgers (OBBMB) denklemi elde edilir. OBBMB denklemi lineer olmayan, tek boyutlu ve psedoparabolik denklemdir. Ox ekseni boyunca yayılan lineer olmayan dalga yüzeylerini tanımlar [24-25].

Literatürde OBBMB denkleminin çoklu soliton çözümlerini türetmek için ters saçılma metodu kullanılmıştır [26-31]. Psedoparabolik dalga denklemlerinin çözümlerinin elektrik potansiyelleri, dış elektrik alanları olması durumunda OBBMB dalga denklemine rastlanır [19].

Bu tez çalışması üç ana bölümden oluşmaktadır.
Birinci bölümde, 2009 yılında Ülkü Dinlemez'in hazırladığı "Structural Stability for a Class of Nonlinear Wave Equations" [32] isimli makale ayrıntılı olarak ele alınmıştır. Bu makalede lineer olmayan bir dalga denkleminin yapısal kararlılığı incelenmiştir.

İkinci bölümde, 2011 yılında A.O. Çelebi, Ş. Gür ve V. K. Kalantarov 'un birlikte hazırladıkları "Structural Stability and Decay Estimate for Marine Riser Equations" [33] isimli makale ayrıntılı olarak irdelenmiştir. Bu makalede Marine Riser denklemleri için yapısal kararlılık ve azalma kestirimleri incelenmiştir.

Üçüncü bölümde ise OBBMB denkleminin yapısal kararlılığı incelenmiştir.

BÖLÜM 2. TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR

Bu bölümde, sonraki bölümlerde kullanılacak olan bazı tanımlara ve eşitsizliklere yer verilmiştir.

Tanım (Banach Uzayı)

Bir $(X, \|.\|)$ normlu uzaydaki her Cauchy dizisi , X içinde bir limite yakınsıyorsa bu $(X, \|.\|)$ normlu uzayına tam normlu uzay veya Banach uzayı adı verilir. Ya da başka bir deyişle bir normlu vektör uzayı, normdan indirgenen metrik ile tam ise bir Banach uzayı olarak adlandırılır [36].

Tanım (İç Çarpım Uzayı ve Hilbert Uzayı)

İç çarpım uzayı, üzerinde bir iç çarpım tanımlanmış vektör uzayıdır. Bir Hilbert uzayı ise, üzerindeki iç çarpımla tanımlanmış metriğe göre tam olan bir iç çarpım uzayıdır [37].

Teorem (İç Çarpım Formülü)

$L^2(\Omega)$ Hilbert uzayıdır ve bu uzay üzerindeki iç çarpım, $f, g \in L^2(\Omega)$ olmak üzere

$$(f, g)_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} f(x)g(x)dx$$

biçiminde tanımlanır [37].

Tanım ($L^p(\Omega)$ Uzayı)

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ bir bölge ve $p > 0$ bir reel sayı olmak üzere, Ω üzerinde

$$\int_\Omega |u(x)|^p dx < \infty$$

koşulunu sağlayan u ölçülebilir fonksiyonlarından oluşan uzaya $L^p(\Omega)$ uzayı adı verilir. $L^p(\Omega)$ bir normlu lineer uzaydır ve bu uzay üzerindeki norm

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

biçiminde tanımlanır. $p \in [1, \infty]$ için $L^p(\Omega)$ Banach uzayıdır [37].

Teorem (Kısmi İntegrasyon Formülü)

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ açık, sınırlı bir küme ve $\partial\Omega$ sınırı C^1 sınıfından olmak üzere $u, v \in C^1(\overline{\Omega})$ olsun. O zaman, $i = 1, \ldots, n$ için

$$\int_\Omega u_{x_i} v \, dx = -\int_\Omega u v_{x_i} dx + \int_\Omega u v \eta^i ds$$

eşitliği sağlanır. Burada η^i, $\partial\Omega$ sınırının dış yönlü normal vektörünün i. bileşenidir [38].

Teorem (Hölder Eşitsizliği)

$1 \leq p, q < \infty$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. Eğer $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 'de açık bir bölge, $u \in L^p(\Omega)$, $v \in L^q(\Omega)$ ise

$$\int_\Omega |u(x)v(x)| dx \leq \left(\int_\Omega |u(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_\Omega |v(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}} = \|u(x)\|_p \|v(x)\|_q$$

eşitsizliği sağlanır [38].

Lemma (Cauchy – Schwarz Eşitsizliği)

X bir iç çarpım uzayı ve $x, y \in X$ olsun. Bu durumda aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$|\langle x, y\rangle|^2 \leq \langle x, x\rangle\, \langle y, y\rangle.$$

X bir iç çarpım uzayı olmak üzere, $\|x\| = \langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}}$ ile tanımlı olan $\|.\| : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu X üzerinde bir norm belirttiğinden Cauchy-Schwarz eşitsizliği

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|$$

olarak da yazılabilir [35].

Teorem (Young Eşitsizliği)

a ve b negatif olmayan reel sayılar, $1 \leq p, q < \infty$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olmak üzere,

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

eşitsizliği sağlanır [38].

Teorem (ε-Young Eşitsizliği)

Young eşitsizliğinde $a = (\varepsilon p)^{\frac{1}{p}} X$ ve $b = \frac{Y}{(\varepsilon p)^{\frac{1}{p}}}$ alınırsa,

$$XY \leq \varepsilon X^p + c(\varepsilon) Y^q$$

eşitsizliği elde edilir. Burada $c(\varepsilon) = (\varepsilon p)^{-\frac{q}{p}} q^{-1}$ dir [34].

Lemma (Gronwall Eşitsizliği)

$\eta(t)$, $[0, T]$ aralığında sürekli, negatif olmayan bir fonksiyon, $\Phi(t)$ ve $\Psi(t)$, $[0, T]$ aralığında integrallenebilen, negatif olmayan fonksiyonlar olmak üzere

$$\eta'(t) \leq \Phi(t)\eta(t) + \Psi(t)$$

eşitsizliği geçerli ise her $0 \leq t \leq T$ için

$$\eta(t) \leq exp\left(\int_0^t \Phi(s)ds\right)\left[\eta(0) + \int_0^t \Psi(s)ds\right]$$

olur [38].

Tanım (Sürekli Gömülme)

X ve Y normlu lineer uzaylar olsun. Bu durumda,

(i) $X \subset Y$

(ii) Her $f \in X$ için $\|f\|_Y \leq C\ \|f\|_X$ olacak şekilde $C > 0$ vardır.

koşulları sağlanıyorsa X uzayı Y uzayına sürekli gömülür denir ve $X \rightarrow Y$ ile gösterilir [37].

Tanım (Sobolev Uzayı)

Ω, R^n de bir bölge, m negatif olmayan herhangi bir tamsayı ve $1 \leq p \leq \infty$ olmak üzere

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega): D^\alpha u \in L^p(\Omega), 0 \leq |\alpha| \leq m\ \}$$

şeklinde tanımlanan uzaya Sobolev Uzayı denir [34].

Teorem (Poincare Eşitsizliği)

$u \in W_0^{1,2}\ (a,b)$ için aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\|u\|_2 \leq c\|u'\|_2$$

Burada $c = \frac{b-a}{\sqrt{2}}$ dır [34].

BÖLÜM 3. LİNEER OLMAYAN DALGA DENKLEMLERİNİN BİR SINIFININ YAPISAL KARARLILIĞI

Bu bölümde Ülkü Dinlemez tarafından yazılan "Structural stability for a class of nonlinear wave equations" [32] isimli çalışma ele alınmış ve detaylı bir şekilde incelenmiştir.

3.1. Giriş ve Problemin İfadesi

$$u_t - u_{txx} + \alpha u u_x = \beta u_x u_{xx} + u u_{xxx} \quad u \in C_0^{4,1}(R \times R^+), \;\; 0 < t < T \,, \tag{3.1}$$

$$u(x,0) = u_0(x)\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,, \tag{3.2}$$

problemini ele alalım. Burada, $\alpha\,,\beta > 1$ olan sabitler ve $x \in R, t \in R^+$ olan değişkenlerdir. $C_0^{4,1}(RxR^+)$, x e göre dördüncü ve t ye göre birinci dereceden türevli kompakt destekli fonksiyonlar uzayıdır.

Teorem 3.1.

$u \in C_0^{4,1}(RxR^+)$ olmak üzere u fonksiyonunun kendisi ve türevleri bir D sabiti ile sınırlıdır. Buna bağlı olarak aşağıdaki eşitsizlikler sağlanır:

$$\begin{cases} |u| \le D, \\ |u_x| \le D, \\ |u_{xx}| \le D, \\ |u_{xxx}| \le D, \\ |u_{xxxx}| \le D. \end{cases} \tag{3.3}$$

Burada, D pozitif sabiti (3.1) in başlangıç verilerine ve parametrelerine bağlıdır.

İspat 3.1. (3.1) denklemi $L^2(\Omega)$ da u ile çarpılırsa,

$$\int_\Omega u u_t dx - \int_\Omega u u_{txx} dx + \alpha \int_\Omega u u u_x dx = \beta \int_\Omega u u_x u_{xx} dx + \int_\Omega u u u_{xxx} dx \tag{3.4}$$

elde edilir.

(3.4) teki her bir integral ayrı ayrı hesaplanırsa,

$$\int_\Omega u u_t dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u\|^2$$

$$-\int_\Omega u u_{txx} dx = -\left[u u_{tx}|_{\partial\Omega} - \int_\Omega u_x u_{tx} dx \right] = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_x\|^2$$

$$\alpha \int_\Omega u u_x u dx = \alpha \int_\Omega u^2 u_x dx = \alpha \int_\Omega \frac{1}{3}\frac{d}{dx} u^3 dx = 0$$

$$\beta \int_\Omega u u_x u_{xx} dx = \beta \int_\Omega \frac{1}{2} u_{xx} \frac{d}{dx} u^2 dx = \frac{\beta}{2}\left[u^2 u_{xx}|_{\partial\Omega} - \int_\Omega u^2 u_{xxx} dx \right]$$

$$= -\frac{\beta}{2}\int_\Omega u^2 u_{xxx} dx$$

eşitlikleri elde edilir.

Elde edilen ifadeler (3.4) te yerlerine yazılırsa

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\{\|u\|^2 + \|u_x\|^2\} = -\frac{\beta}{2}\int_\Omega u^2 u_{xxx} dx + \int_\Omega u^2 u_{xxx} dx \tag{3.5}$$

olur.

(3.1) denklemi $L^2(\Omega)$ da u_{xx} ile çarpılırsa,

$$\int_\Omega u_{xx} u_t dx - \int_\Omega u_{xx} u_{txx} dx + \alpha \int_\Omega u u_x u_{xx} dx = \beta \int_\Omega u_x u_{xx} u_{xx} dx$$

$$+ \int_\Omega u u_{xx} u_{xxx} dx \tag{3.6}$$

elde edilir.

(3.6) daki her bir integral ayrı ayrı hesaplanırsa,

$$\int_{\Omega} u_t u_{xx} dx = \left[u_t u_x |_{\partial\Omega} - \int_{\Omega} u_x u_{tx} dx \right] = -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_x\|^2$$

$$-\int_{\Omega} u_{txx} u_{xx} dx = -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_{xx}\|^2$$

$$\alpha \int_{\Omega} u u_x u_{xx} dx = \alpha \int_{\Omega} \frac{1}{2} u_{xx} \frac{d}{dx} u^2 dx = \frac{\alpha}{2}\left[u^2 u_{xx} |_{\partial\Omega} - \int_{\Omega} u^2 u_{xxx} dx \right]$$

$$= -\frac{\alpha}{2}\int_{\Omega} u^2 u_{xxx} dx$$

$$\int_{\Omega} u u_{xx} u_{xxx} dx = \int_{\Omega} \frac{1}{2} u \frac{d}{dx} u_{xx}^2 dx = \frac{1}{2}\left[u u_{xx}^2 |_{\partial\Omega} - \int_{\Omega} u_{xx}^2 u_x dx \right] = \frac{-1}{2}\int_{\Omega} u_{xx}^2 u_x dx$$

eşitlikleri elde edilir.

Elde edilen ifadeler (3.6) da yerlerine yazılırsa

$$-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\{\|u_x\|^2 + \|u_{xx}\|^2\} = \frac{\alpha}{2}\int_{\Omega} u^2 u_{xxx} dx + \beta \int_{\Omega} u_x (u_{xx})^2 dx$$

$$-\frac{1}{2}\int_{\Omega} u_x (u_{xx})^2 dx \qquad (3.7)$$

olur.

(3.1) denkleminin x e göre türevini alırsak,

$$u_{tx} - u_{txxx} + \alpha(u_x^2 + u u_{xx}) = \beta(u_{xx}^2 + u_{xxx} u_x) + (u_x u_{xxx} + u_{xxxx} u) \qquad (3.8)$$

elde edilir.

(3.8) eşitliği $L^2(\Omega)$ da u_{xxx} ile çarpılırsa,

$$\int_\Omega u_{tx}u_{xxx}dx-\int_\Omega u_{txxx}u_{xxx}dx+\alpha\int_\Omega (u_x^2+uu_{xx})u_{xxx}dx=$$

$$\beta\int_\Omega (u_{xx}^2+u_{xxx}u_x)u_{xxx}dx+\int_\Omega (u_xu_{xxx}+u_{xxxx}u)u_{xxx}dx \tag{3.9}$$

elde edilir.

(3.9) daki her bir integral ayrı ayrı hesaplanırsa,

$$\int_\Omega u_{tx}u_{xxx}dx=\left[u_{tx}u_{xx}|_{\partial\Omega}-\int_\Omega u_{xx}u_{txx}dx\right]=-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_{xx}\|^2$$

$$-\int_\Omega u_{txxx}u_{xxx}dx=-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_{xxx}\|^2$$

$$\alpha\int_\Omega u_x^2u_{xxx}dx=\alpha\int_\Omega u_x(u_xu_{xxx})dx\ =\alpha\int_\Omega u_x\left[\frac{d}{dx}(u_xu_{xx})-u_{xx}^2\right]dx$$

$$=-\alpha\int_\Omega u_xu_{xx}^2dx+\alpha\int_\Omega u_x\frac{d}{dx}(u_xu_{xx})dx$$

$$=-\alpha\int_\Omega u_xu_{xx}^2dx+\alpha\left[u_xu_xu_{xx}|_{\partial\Omega}-\int_\Omega u_xu_{xx}u_{xx}dx\right]\ =-2\alpha\int_\Omega u_xu_{xx}^2dx$$

$$\alpha\int_\Omega uu_{xx}u_{xxx}dx=\alpha\int_\Omega \frac{1}{2}u\frac{d}{dx}u_{xx}^2dx=\frac{\alpha}{2}\left[uu_{xx}^2|_{\partial\Omega}-\int_\Omega u_{xx}^2u_xdx\right]$$

$$=-\frac{\alpha}{2}\int_\Omega u_xu_{xx}^2dx$$

$$\beta\int_\Omega u_{xx}^2u_{xxx}dx=\frac{\beta}{3}\int_\Omega \frac{d}{dx}u_{xx}^3dx=0$$

$$\int_\Omega uu_{xxx}u_{xxxx}dx=\int_\Omega \frac{1}{2}u\frac{d}{dx}u_{xxx}^2dx=\frac{1}{2}\left[uu_{xxx}^2|_{\partial\Omega}-\int_\Omega u_{xxx}^2u_xdx\right]$$

$$= -\frac{1}{2}\int_{\Omega} u_{xxx}^2 u_x dx$$

eşitlikleri elde edilir.

Elde edilen ifadeler (3.9) da yerlerine yazılırsa,

$$-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\{\|u_{xx}\|^2 + \|u_{xxx}\|^2\} = \frac{\alpha}{2}\int_{\Omega} u_x u_{xx}^2 dx + 2\alpha\int_{\Omega} u_x u_{xx}^2 dx + \beta\int_{\Omega} u_x u_{xxx}^2 dx$$

$$-\frac{1}{2}\int_{\Omega} u_x u_{xxx}^2 dx + \int_{\Omega} u_x u_{xxx}^2 dx \qquad (3.10)$$

olur.

(3.5), (3.7) ve (3.10) taraf tarafa toplanırsa,

$$\frac{d}{dt}\{\|u\|^2 + 2\|u_x\|^2 + 2\|u_{xx}\|^2 + \|u_{xxx}\|^2\} = (2-\beta-\alpha)\int_{\Omega} u^2 u_{xxx} dx$$

$$+(1-2\beta-5\alpha)\int_{\Omega} u_x u_{xx}^2 dx - (2\beta+1)\int_{\Omega} u_x u_{xxx}^2 dx \qquad (3.11)$$

elde edilir.

(3.11) in sağ tarafındaki terimlere Cauchy ve Hölder eşitsizliklerini uygulayalım. Buna göre ilk terimden:

$$(2-\beta-\alpha)\int_{\Omega} u^2 u_{xxx} dx \geq (2-\beta-\alpha)\int_{\Omega} maxu|u||u_{xxx}|dx$$

$$\geq (2-\beta-\alpha)\left[\frac{maxu^2\|u\|^2}{2} + \frac{\|u_{xxx}\|^2}{2}\right] \geq (1-\frac{\beta}{2}-\frac{\alpha}{2})(maxu^2\|u\|^2 + \|u_{xxx}\|^2)$$

eşitsizliği elde edilir. İkinci terimden:

$$(1-2\beta-5\alpha)\int_{\Omega} u_x u_{xx}^2 dx \geq (1-2\beta-5\alpha)\int_{\Omega} maxu_{xx}|u_{xx}||u_x|dx$$

$$\geq (1-2\beta-5\alpha)\left[\frac{maxu_{xx}^2\|u_{xx}\|^2}{2}+\frac{\|u_x\|^2}{2}\right]$$

$$\geq \left(\frac{1}{2}-\beta-\frac{5}{2}\alpha\right)(maxu_{xx}^2\|u_{xx}\|^2+\|u_x\|^2)$$

eşitsizliği elde edilir. Üçüncü terimden:

$$-(2\beta+1)\int_{\Omega} u_x u_{xxx}^2 dx \geq (-2\beta-1)\int_{\Omega} maxu_{xxx}|u_{xxx}||u_x|dx$$

$$\geq (-2\beta-1)\left[\frac{maxu_{xxx}^2\|u_{xxx}\|^2}{2}+\frac{\|u_x\|^2}{2}\right]$$

$$\geq \left(-\beta-\frac{1}{2}\right)(maxu_{xxx}^2\|u_{xxx}\|^2+\|u_x\|^2)$$

eşitsizliği elde edilir.

Elde edilen eşitsizlikler (3.11) ifadesinde yerlerine yazıldığında,

$$\frac{d}{dt}\{\|u\|^2+2\|u_x\|^2+2\|u_{xx}\|^2+\|u_{xxx}\|^2\} \geq \left(1-\frac{\beta}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)maxu^2\|u\|^2$$
$$+2\left(-\frac{5}{4}\alpha-\beta\right)\|u_x\|^2 \; +2\left(\frac{1}{4}-\frac{\beta}{2}-\frac{5}{4}\alpha\right)maxu_{xx}^2\|u_{xx}\|^2$$
$$+\left[1-\frac{\beta}{2}-\frac{\alpha}{2}-\left(\beta+\frac{1}{2}\right)maxu_{xxx}^2\right]\|u_{xxx}\|^2 \qquad (3.12)$$

olur.

Buradan,

$\mu = \max\{\left(1-\frac{\beta}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)maxu^2, \left(-\frac{5}{4}\alpha-\beta\right), \left(\frac{1}{4}-\frac{\beta}{2}-\frac{5}{4}\alpha\right)maxu_{xx}^2, \{1-\frac{\beta}{2}-\frac{\alpha}{2}-\left(\beta+\frac{1}{2}\right)maxu_{xxx}^2\}$

ve $Y(t)=\|u\|^2+2\|u_x\|^2+2\|u_{xx}\|^2+\|u_{xxx}\|^2$ olmak üzere,

$$\frac{dY(t)}{dt}-\mu Y(t) \geq 0 \qquad (3.13)$$

diferansiyel eşitsizliği elde edilir.

(3.13) diferansiyel eşitsizliğini çözmek için her terimini $e^{-\int_0^t \mu dt} = e^{-\mu t}$ ile çarpalım:

$$\frac{dY(t)}{dt}.e^{-\mu t} - \mu\varphi(t)e^{-\mu t} \geq 0$$

$$\frac{d}{dt}(Y(t).e^{-\mu t}) \geq 0$$

$$Y(t).e^{-\mu t} \geq Y(0)$$

$$Y(t) \geq Y(0).e^{\mu t}$$

elde edilir.

Burada $\mu \leq 0$ olacak şekilde $Y(t) = \|u\|^2 + 2\|u_x\|^2 + 2\|u_{xx}\|^2 + \|u_{xxx}\|^2$ yerine yazılırsa:

$$e^{\mu t}\{\|u(x,0)\|^2 + 2\|u_x(x,0)\|^2 + 2\|u_{xx}(x,0)\|^2 + \|u_{xxx}(x,0)\|^2\} \leq \|u(x,t)\|^2$$
$$+2\|u_x(x,t)\|^2 + 2\|u_{xx}(x,t)\|^2 + \|u_{xxx}(x,t)\|^2 \qquad (3.14)$$

elde edilir.

Bu eşitsizlik enerjinin alt sınırını verir.

Şimdi de enerjinin üst sınırını bulmak için,

$$\frac{d}{dt}\{\|u\|^2 + 2\|u_x\|^2 + 2\|u_{xx}\|^2 + \|u_{xxx}\|^2\} = (2-\beta-\alpha)\int_\Omega u^2 u_{xxx}dx$$
$$+(1-2\beta-5\alpha)\int_\Omega u_x u_{xx}^2 dx - (2\beta+1)\int_\Omega u_x u_{xxx}^2 dx \qquad (3.11)$$

ifadesini ele alalım.

(3.11) in sağ tarafındaki tüm terimlere Cauchy ve Hölder eşitsizliklerini uygulayalım. Buna göre ilk terimden:

$$(2-\beta-\alpha)\int_{\Omega} u^2 u_{xxx}dx \leq |2-\beta-\alpha|\int_{\Omega} u^2|u_{xxx}|dx$$

$$\leq 2\left|1-\frac{\beta+\alpha}{2}\right|\int_{\Omega}|u||u||u_{xxx}|dx \leq 2\left|1-\frac{\beta+\alpha}{2}\right| max|u|\int_{\Omega}|u||u_{xxx}|dx$$

$$\leq 2\left|1-\frac{\beta+\alpha}{2}\right| max|u|\left(\frac{\|u\|^2}{2}+\frac{\|u_{xxx}\|^2}{2}\right)$$

$$\leq \left|1-\frac{\beta+\alpha}{2}\right| max|u|\,(\|u\|^2+\|u_{xxx}\|^2)$$

eşitsizliği elde edilir. İkinci terimden:

$$(1-2\beta-5\alpha)\int_{\Omega} u_x u_{xx}^2 dx \leq 2\left|\frac{1}{2}-\beta-\frac{5}{2}\alpha\right|\int_{\Omega}|u_x||u_{xx}||u_{xx}|dx$$

$$\leq 2\left|\frac{1}{2}-\beta-\frac{5}{2}\alpha\right|\; max|u_{xx}|\int_{\Omega}|u_x||u_{xx}|dx$$

$$\leq 2\left|\frac{1}{2}-\beta-\frac{5}{2}\alpha\right|\; max|u_{xx}|\left(\frac{\|u_x\|^2}{2}+\frac{\|u_{xx}\|^2}{2}\right)$$

$$\leq \left|\frac{1}{2}-\beta-\frac{5}{2}\alpha\right|\; max|u_{xx}|(\|u_x\|^2+\|u_{xx}\|^2)$$

eşitsizliği elde edilir. Üçüncü terimden:

$$-(2\beta+1)\int_{\Omega} u_x u_{xxx}^2 dx \leq 2\left|\beta+\frac{1}{2}\right|\int_{\Omega}|u_x||u_{xxx}||u_{xxx}|dx$$

$$\leq 2\left|\beta+\frac{1}{2}\right| max|u_{xxx}|\int_{\Omega}|u_x||u_{xxx}|dx$$

$$\leq 2\left|\beta+\frac{1}{2}\right| max|u_{xxx}|\left(\frac{\|u_x\|^2}{2}+\frac{\|u_{xxx}\|^2}{2}\right)$$

$$\leq \left|\beta+\frac{1}{2}\right|\; max|u_{xxx}|(\|u_x\|^2+\|u_{xxx}\|^2)$$

eşitsizliği elde edilir.

Elde edilen eşitsizlikler (3.11) ifadesinde yerlerine yazılırsa,

$$\frac{d}{dt}\{\|u\|^2 + 2\|u_x\|^2 + 2\|u_{xx}\|^2 + \|u_{xxx}\|^2\} \le \left|1 - \frac{\beta}{2} - \frac{\alpha}{2}\right| max|u|\|u\|^2$$

$$+2\left\{\left|\frac{1-5\alpha-2\beta}{4}\right| max|u_{xx}| + \left|\frac{\beta}{2} + \frac{1}{4}\right| max|u_{xxx}|\right\}\|u_x\|^2$$

$$+2\left|\frac{1}{4} - \frac{\beta}{2} - \frac{5}{4}\alpha\right| max|u_{xx}|\|u_{xx}\|^2$$

$$+\left\{\left|1 - \frac{\beta}{2} - \frac{\alpha}{2}\right| max|u| + \left|\beta + \frac{1}{2}\right| max|u_{xxx}|\right\}\|u_{xxx}\|^2 \qquad (3.15)$$

olur.

Buradan,

$$\rho = \max\{\left|1 - \frac{\beta+\alpha}{2}\right| max|u|, \left|\frac{1-5\alpha-2\beta}{4}\right| max|u_{xx}| + \left(\frac{\beta}{2} + \frac{1}{4}\right) max|u_{xxx}|,$$

$$\left|\frac{1-5\alpha-2\beta}{4}\right| max|u_{xx}|, \left|1 - \frac{\beta+\alpha}{2}\right| max|u| + \left|\beta + \frac{1}{2}\right| max|u_{xxx}|\}$$

ve $Y(t) = \|u\|^2 + 2\|u_x\|^2 + 2\|u_{xx}\|^2 + \|u_{xxx}\|^2$ olmak üzere,

$$\frac{d}{dt}Y(t) - \rho Y(t) \le 0 \qquad (3.16)$$

diferansiyel eşitsizliği elde edilir.

(3.16) diferansiyel eşitsizliği, (3.13) eşitsizliği ile aynı şekilde çözüldüğünde

$$Y(t) \le Y(0).e^{\rho t}$$

elde edilir.

Buradan

$$\|u(x,T)\|^2 + 2\|u_x(x,T)\|^2 + 2\|u_{xx}(x,T)\|^2 + \|u_{xxx}(x,T)\|^2 \le e^{\rho t}\{\|u(x,0)\|^2$$

$$+2\|u_x(x,0)\|^2 + 2\|u_{xx}(x,0)\|^2 + \|u_{xxx}(x,0)\|^2\} \qquad (3.17)$$

olur.

Böylece (3.3) teki eşitsizlikler elde edilir.

3.2. $(3.1)-(3.2)$ Probleminin Yapısal Kararlılığı

(u, α_1, β_1) ve (v, α_2, β_2) sırasıyla aşağıdaki problemlerin çözümleri olsunlar:

$$u_t - u_{txx} + \alpha_1 u u_x = \beta_1 u_x u_{xx} + u u_{xxx}\ , \quad u \in C_0^{4,1}(RxR^+)\ , 0 < t < T\ , \tag{3.18}$$

$$u(x,0) = u_0(x)\ , x \in R\ . \tag{3.19}$$

ve

$$v_t - v_{txx} + \alpha_2 v v_x = \beta_2 v_x v_{xx} + v v_{xxx}\ , \quad v \in C_0^{4,1}(RxR^+)\ , 0 < t < T\ , \tag{3.20}$$

$$v(x,0) = u_0(x)\ , \ x \in R\ . \tag{3.21}$$

Bu problemlerde $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 > 1$ sabitlerdir.

$w = u - v$, $\alpha = \alpha_1 - \alpha_2$, $\beta = \beta_1 - \beta_2$ ve $\alpha_1 > \alpha_2$, $\beta_1 > \beta_2$ olacak şekilde çözümler farkını tanımlayalım.

(w, α, β), (3.22) - (3.23) başlangıç değer problemini sağlar:

$$w_t - w_{txx} + \alpha u u_x + \alpha_2 (w u_x + v w_x) - \beta u_x u_{xx} - \beta_2 (w_x u_{xx} + v_x w_{xx})$$

$$-(w u_{xxx} + v w_{xxx}) = 0\ , \tag{3.22}$$

$$w(x,0) = 0\ . \tag{3.23}$$

Teorem 3.2. w , $(3.22) - (3.23)$ probleminin çözümü olsun.

K_1, K_2 ve γ pozitif sabitler ve T sabiti için,

$$\|w\|^2 + 2\|w_x\|^2 + 2\|w_{xx}\|^2 + \|w_{xxx}\|^2 \le (\alpha K_1 + \beta K_2)\left(\frac{e^{\gamma T} - 1}{\gamma}\right) \tag{3.24}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat 3.2. (3.22) denklemi $L^2(\Omega)$ da w ile çarpılırsa,

$$\int_\Omega w_t w dx - \int_\Omega w_{txx} w dx + \alpha \int_\Omega u u_x w dx + \alpha_2 \int_\Omega (w u_x + v w_x) w dx$$

$$-\beta \int_\Omega u_x u_{xx} w dx - \beta_2 \int_\Omega (w_x u_{xx} + v_x w_{xx}) w dx$$

$$-\int_\Omega (w u_{xxx} + v w_{xxx}) w dx = 0 \qquad (3.25)$$

elde edilir.

(3.25) teki ilk iki integral hesaplanırsa,

$$\int_\Omega w w_t dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w\|^2 \quad ,$$

$$-\int_\Omega w w_{txx} dx = -\left[w w_{tx}|_{\partial\Omega} - \int w_x w_{tx} dx \right] = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w_x\|^2$$

ifadeleri elde edilir.

Elde edilen ifadeler (3.25) te yerine yazıldığında,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}[\ \|w\|^2 + \|w_x\|^2] = -\alpha \int_\Omega u u_x w dx - \alpha_2 \int_\Omega (w u_x + v w_x) w dx$$

$$+\beta \int_\Omega u_x u_{xx} w dx + \beta_2 \int_\Omega (w_x u_{xx} + v_x w_{xx}) w dx + \int_\Omega (w u_{xxx} + v w_{xxx}) w dx \qquad (3.26)$$

olur.

(3.26) nın sağ tarafındaki ilk terime (3.3) eşitsizliği uygulanırsa:

$$-\alpha \int_\Omega u u_x w dx \le |\alpha| \left| \int_\Omega u u_x w dx \right| \le \alpha \int_\Omega |u||u_x||w| dx \le \alpha \int_\Omega D|u_x||w| dx \qquad (3.27)$$

elde edilir.

(3.27) ye Cauchy ve Hölder eşitsizlikleri uygulanırsa:

$$\alpha \int_{\Omega} D|u_x||w|dx \leq \alpha D\left(\int_{\Omega} |u_x|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{\Omega} |w|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \leq \alpha D\left[\frac{\|u_x\|^2}{2}+\frac{\|w\|^2}{2}\right]$$

$$\leq \alpha \frac{D}{2}[\|u_x\|^2+\|w\|^2] \leq \alpha C[\|u_x\|^2+\|w\|^2] \qquad (3.28)$$

olur.

(3.26) nın sağ tarafındaki ikinci terime (3.3) eşitsizliği uygulanırsa:

$$-\alpha_2 \int_{\Omega} (wu_x+vw_x)wdx \leq |\alpha_2|\left|\int_{\Omega} (wu_x+vw_x)wdx\right|$$

$$\leq \alpha_2\left[\int_{\Omega} |w||u_x||w|dx+\int_{\Omega} |v||w_x||w|dx\right]$$

$$\leq \alpha_2\left[D\int_{\Omega} |w|^2 dx+D\int_{\Omega} |w_x||w|dx\right] \qquad (3.29)$$

elde edilir.

(3.29) da Cauchy ve Hölder eşitsizlikleri uygulanırsa:

$$\alpha_2\left[D\int_{\Omega} |w|^2 dx+D\int_{\Omega} |w_x||w|dx\right] \leq \alpha_2 D\left[\|w\|^2+\left(\int_{\Omega} |w_x|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{\Omega} |w|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}\right]$$

$$\leq \alpha_2 D\left[\|w\|^2+\frac{\|w_x\|^2}{2}+\frac{\|w\|^2}{2}\right] \leq \alpha_2 D\left[\frac{3}{2}\|w\|^2+\frac{1}{2}\|w_x\|^2\right]$$

$$\leq \alpha_2 C[\|w\|^2+\|w_x\|^2] \qquad (3.30)$$

olur.

(3.26) nın sağ tarafındaki üçüncü terime (3.3) eşitsizliği uygulanırsa:

$$\beta \int_{\Omega} u_x u_{xx} wdx \leq |\beta|\left|\int_{\Omega} u_x u_{xx} wdx\right| \leq \beta \int_{\Omega} |u_x||u_{xx}||w|dx$$

$$\leq \beta \int_{\Omega} D|u_{xx}||w|dx \tag{3.31}$$

elde edilir.

(3.31) e Cauchy ve Hölder eşitsizlikleri uygulanırsa:

$$\beta \int_{\Omega} D|u_{xx}||w|dx \ \leq \beta D \left(\int_{\Omega} |u_{xx}|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} |w|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq \beta D \left[\frac{\|u_{xx}\|^2}{2} + \frac{\|w\|^2}{2} \right]$$

$$\leq \beta C[\|u_{xx}\|^2 + \|w\|^2] \tag{3.32}$$

olur.

(3.26) nın sağ tarafındaki dördüncü terime (3.3) eşitsizliği uygulanırsa:

$$\beta_2 \int_{\Omega} (w_x u_{xx} + v_x w_{xx}) w dx \leq |\beta_2| \left| \int_{\Omega} (w_x u_{xx} + v_x w_{xx}) w dx \right|$$

$$\leq \beta_2 \left[\int_{\Omega} |w_x||u_{xx}||w|dx + \int_{\Omega} |v_x||w_{xx}||w|dx \right]$$

$$\leq \ \beta_2 D \left[\int_{\Omega} |w_x||w|dx + \int_{\Omega} |w_{xx}||w|dx \right] \tag{3.33}$$

elde edilir.

(3.33) e Cauchy ve Hölder eşitsizlikleri uygulanırsa:

$$\leq \beta_2 D \left[\left(\int_{\Omega} |w_x|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} |w|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_{\Omega} |w_{xx}|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} |w|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \right]$$

$$\leq \beta_2 D \left[\frac{\|w_x\|^2}{2} + \frac{\|w\|^2}{2} + \frac{\|w_{xx}\|^2}{2} + \frac{\|w\|^2}{2} \right] \leq \beta_2 D \left[\frac{1}{2} \|w_{xx}\|^2 + \frac{1}{2} \|w_x\|^2 + \|w\|^2 \right]$$

$$\leq \beta_2 D \left[\frac{1}{2} \|w_{xx}\|^2 + \frac{1}{2} \|w_x\|^2 + \|w\|^2 \right]$$

$$\leq \beta_2 C[\|w\|^2 + \|w_x\|^2 + \|w_{xx}\|^2] \tag{3.34}$$

olur.

(3.26) nın sağ tarafındaki son terime (3.3) eşitsizliği uygulanırsa:

$$\int_\Omega (wu_{xxx} + vw_{xxx})wdx \leq \left|\int_\Omega (wu_{xxx} + vw_{xxx})wdx\right|$$

$$\leq \left[\int_\Omega |w||u_{xxx}||w|dx + \int_\Omega |v||w_{xxx}||w|dx\right]$$

$$\leq D\left[\int_\Omega |w|^2 dx + \int_\Omega |w_{xxx}||w|dx\right] \tag{3.35}$$

elde edilir.

(3.35) e Cauchy ve Hölder eşitsizlikleri uygulanırsa:

$$\leq D\left[\|w\|^2 + \left(\int_\Omega |w_{xxx}|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\Omega |w|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}\right] \leq D\left[\|w\|^2 + \frac{\|w_{xxx}\|^2}{2} + \frac{\|w\|^2}{2}\right]$$

$$\leq D\left[\frac{3}{2}\|w\|^2 + \frac{1}{2}\|w_{xxx}\|^2\right] \leq C[\|w\|^2 + \|w_{xxx}\|^2] \tag{3.36}$$

olur.

(3.28), (3.30), (3.32), (3.34), (3.36) eşitsizlikleri (3.26)da yerlerine yazılırsa:

$$\frac{d}{dt}\{\|w\|^2 + \|w_x\|^2\} \leq C\{\alpha\|u_x\|^2 + \beta\|u_{xx}\|^2\} + C\{\alpha + \alpha_2 + \beta + \beta_2 + 1\}\|w\|^2$$
$$+C\{(\alpha_2 + \beta_2)\|w_x\|^2 + \beta_2\|w_{xx}\|^2 + \|w_{xxx}\|^2\} \tag{3.37}$$

elde edilir.

Benzer şekilde (3.22), $L^2(\Omega)$ da w_{xx} ile çarpılırsa,

$$\int_\Omega w_t w_{xx} dx - \int_\Omega w_{txx} w_{xx} dx + \alpha \int_\Omega u u_x w_{xx} dx + \alpha_2 \int_\Omega (w u_x + v w_x) w_{xx} dx$$

$$-\beta \int_\Omega u_x u_{xx} w_{xx} dx - \beta_2 \int_\Omega (w_x u_{xx} + v_x w_{xx}) w_{xx} dx$$

$$-\int_\Omega (w u_{xxx} + v w_{xxx}) w_{xx} dx = 0 \qquad (3.38)$$

elde edilir.

(3.38) teki ilk iki integral hesaplanırsa,

$$\int_\Omega w_t w_{xx} dx = w_t w_x|_{\partial\Omega} - \int_\Omega w_x w_{tx} dx = -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w_x\|^2 ,$$

$$-\int_\Omega w_{txx} w_{xx} dx = -\frac{1}{2}\,\frac{d}{dt}\|w_{xx}\|^2$$

ifadeleri elde edilir.

Elde edilen ifadeler (3.38) de yerlerine yazıldığında,

$$-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}[\ \|w_x\|^2 + \|w_{xx}\|^2] = -\alpha \int_\Omega u u_x w_{xx} dx - \alpha_2 \int_\Omega (w u_x + v w_x) w_{xx} dx$$

$$+\beta \int_\Omega u_x u_{xx} w_{xx} dx + \beta_2 \int_\Omega (w_x u_{xx} + v_x w_{xx}) w_{xx} dx$$

$$+\int_\Omega (w u_{xxx} + v w_{xxx}) w_{xx} dx \qquad (3.39)$$

olur.

(3.39) un sağ tarafındaki ilk terime (3.3) eşitsizliği uygulanırsa,

$$\alpha \int_\Omega u u_x w_{xx} dx \le |\alpha| \left| \int_\Omega u u_x w_{xx} dx \right| \le \alpha \int_\Omega |u||u_x||w_{xx}| dx$$

$$\leq \alpha \int_{\Omega} D|u_x||w_{xx}|dx \tag{3.40}$$

elde edilir.

(3.40) a Cauchy ve Hölder eşitsizlikleri uygulanırsa:

$$\alpha \int_{\Omega} D|u_x||w_{xx}|dx \leq \alpha D \left(\int_{\Omega} |u_x|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} |w|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq \alpha D \left[\frac{\|u_x\|^2}{2} + \frac{\|w_{xx}\|^2}{2} \right]$$

$$\leq \alpha \frac{D}{2} [\|u_x\|^2 + \|w_{xx}\|^2] \leq \alpha D [\|u_x\|^2 + \|w_{xx}\|^2] \tag{3.41}$$

olur.

(3.39) un sağ tarafındaki ikinci terime (3.3) eşitsizliği uygulanırsa:

$$-\alpha_2 \int_{\Omega} (wu_x + vw_x) w_{xx} dx \leq |\alpha_2| \left| \int_{\Omega} (wu_x + vw_x) w_{xx} dx \right|$$

$$\leq \alpha_2 \left[\int_{\Omega} |w||u_x||w_{xx}|dx + \int_{\Omega} |v||w_x||w_{xx}|dx \right]$$

$$\leq \alpha_2 D \left[\int_{\Omega} |w||w_{xx}|dx + \int_{\Omega} |w_x||w_{xx}|dx \right] \tag{3.42}$$

elde edilir.

(3.42) ye Cauchy ve Hölder eşitsizlikleri uygulanırsa:

$$\leq \alpha_2 D \left[\left(\int_{\Omega} |w|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} |w_{xx}|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_{\Omega} |w_x|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} |w_{xx}|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \right]$$

$$\leq \alpha_2 D \left[\frac{\|w\|^2}{2} + \frac{\|w_{xx}\|^2}{2} + \frac{\|w_x\|^2}{2} + \frac{\|w_{xx}\|^2}{2} \right]$$

$$\leq \alpha_2 D \left[\frac{1}{2} \|w\|^2 + \frac{1}{2} \|w_x\|^2 + \|w_{xx}\|^2 \right]$$

$$\leq \alpha_2 C[\|w\|^2 + \|w_x\|^2 + \|w_{xx}\|^2] \tag{3.43}$$

elde edilir.

(3.39) un sağ tarafındaki üçüncü terime (3.3) eşitsizliği uygulanırsa:

$$\beta \int_\Omega u_x u_{xx} w_{xx} dx \leq |\beta| \left| \int_\Omega u_x u_{xx} w_{xx} dx \right| \leq \beta \int_\Omega |u_x||u_{xx}||w_{xx}| dx$$

$$\leq \beta \int_\Omega D|u_{xx}||w_{xx}| dx \tag{3.44}$$

olur.

(3.44) e Cauchy ve Hölder eşitsizlikleri uygulanırsa:

$$\beta \int_\Omega D|u_{xx}||w_{xx}| dx \leq \beta D \left(\int_\Omega |u_{xx}|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |w_{xx}|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \beta D \left[\frac{\|u_{xx}\|^2}{2} + \frac{\|w_{xx}\|^2}{2} \right] \leq \beta D[\|u_{xx}\|^2 + \|w_{xx}\|^2] \tag{3.45}$$

elde edilir.

(3.39) un sağ tarafındaki dördüncü terime (3.3) eşitsizliği uygulanırsa:

$$\beta_2 \int_\Omega (w_x u_{xx} + v_x w_{xx}) w_{xx} dx \leq |\beta_2| \left| \int_\Omega (w_x u_{xx} + v_x w_{xx}) w_{xx} dx \right|$$

$$\leq \beta_2 \left[\int_\Omega |w_x||u_{xx}||w_{xx}| dx + \int_\Omega |v_x||w_{xx}||w_{xx}| dx \right]$$

$$\leq \beta_2 D \left[\int_\Omega |w_x||w_{xx}| dx + \int_\Omega \|w_{xx}\|^2 dx \right] \tag{3.46}$$

olur.

(3.46) ya Cauchy ve Hölder eşitsizlikleri uygulanırsa:

$$\leq \beta_2 D\left[\left(\int_\Omega |w_x|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\Omega |w_{xx}|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} + \|w_{xx}\|^2\right]$$

$$\leq \beta_2 D\left[\frac{\|w_x\|^2}{2}+\frac{\|w_{xx}\|^2}{2}+\|w_{xx}\|^2\right]$$

$$\leq \beta_2 D\left[\frac{3}{2}\|w_{xx}\|^2+\frac{1}{2}\|w_x\|^2\right] \leq \beta_2 C[\|w_x\|^2+\|w_{xx}\|^2] \tag{3.47}$$

elde edilir.

(3.39) un sağ tarafındaki son terime (3.3) eşitsizliği uygulanırsa:

$$\int_\Omega (wu_{xxx}+vw_{xxx})w_{xx}dx \leq \left|\int_\Omega (wu_{xxx}+vw_{xxx})w_{xx}dx\right|$$

$$\leq \left[\int_\Omega |w||u_{xxx}||w_{xx}|dx + \int_\Omega |v||w_{xxx}||w_{xx}|dx\right]$$

$$\leq D\left[\int_\Omega |w||w_{xx}|dx + D\int_\Omega |w_{xxx}||w_{xx}|dx\right] \tag{3.48}$$

olur.

(3.48) e Cauchy ve Hölder eşitsizlikleri uygulanırsa:

$$\leq D\left[\left(\int_\Omega |w|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\Omega |w_{xx}|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_\Omega |w_{xxx}|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\Omega |w_{xx}|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}\right]$$

$$\leq D\left[\frac{1}{2}\|w\|^2+\frac{1}{2}\|w_{xx}\|^2+\frac{\|w_{xxx}\|^2}{2}+\frac{\|w_{xx}\|^2}{2}\right]$$

$$\leq D\left[\frac{1}{2}\|w\|^2+\|w_{xx}\|^2+\frac{1}{2}\|w_{xxx}\|^2\right]$$

$$\leq C[\|w\|^2+\|w_{xx}\|^2+\|w_{xxx}\|^2] \tag{3.49}$$

elde edilir.

(3.41), (3.43), (3.45), (3.47), (3.49) eşitlikleri (3.39) da yerlerine yazılırsa,

$$\frac{d}{dt}\{\|w_x\|^2+\|w_{xx}\|^2\}\le D\{\alpha\|u_x\|^2+\beta\|u_{xx}\|^2\}+C\{(\alpha_2+1)\|w\|^2$$

$$+(\alpha_2+\beta_2)\|w_x\|^2\}+\{C(\alpha_2+\beta_2+1)+D(\alpha+\beta)\}\|w_{xx}\|^2+C\|w_{xxx}\|^2 \qquad (3.50)$$

olur.

(3.22) nin x e göre türevi alalım:

$$w_{tx}-w_{txxx}+\alpha(u_x^2+uu_{xx})+\alpha_2(w_xu_x+wu_{xx}+v_xw_x+vw_{xx})$$

$$-\beta(u_xu_{xxx}+u_{xx}^2)-\beta_2(w_{xx}u_{xx}+w_xu_{xxx}+v_{xx}w_{xx}+v_xw_{xxx})$$

$$-(w_xu_{xxx}+wu_{xxxx}+v_xw_{xxx}+vw_{xxxx})=0 \qquad (3.51)$$

elde edilir.

(3.51), $L^2(\Omega)$ da w_{xxx} ile çarpılırsa,

$$\int_\Omega w_{tx}w_{xxx}dx-\int_\Omega w_{txxx}w_{xxx}dx+\alpha\int_\Omega(u_x^2+uu_{xx})w_{xxx}dx$$

$$+\alpha_2\int_\Omega(w_xu_x+wu_{xx}+v_xw_x+vw_{xx})w_{xxx}dx-\beta\int_\Omega(u_xu_{xxx}+u_{xx}^2)w_{xxx}dx$$

$$-\beta_2\int_\Omega(w_{xx}u_{xx}+w_xu_{xxx}+v_{xx}w_{xx}+v_xw_{xxx})w_{xxx}dx$$

$$-\int_\Omega(w_xu_{xxx}+wu_{xxxx}+v_xw_{xxx}+vw_{xxxx})w_{xxx}=0 \qquad (3.52)$$

elde edilir.

(3.52) de ilk iki integral hesaplanırsa,

$$\int_\Omega w_{tx}w_{xxx}dx=w_{tx}w_{xx}|_{\partial\Omega}-\int w_{xx}w_{txx}dx=-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w_{xx}\|^2,$$

$$-\int_{\Omega} w_{txxx} w_{xxx} dx = -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w_{xxx}\|^2$$

ifadeleri elde edilir.

Elde edilen ifadeler (3.52) de yerlerine yazılırsa:

$$-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}[\ \|w_{xx}\|^2 + \|w_{xxx}\|^2] = -\alpha \int_{\Omega} (u_x^2 + uu_{xx}) w_{xxx} dx$$

$$-\alpha_2 \int_{\Omega} (w_x u_x + wu_{xx} + v_x w_x + vw_{xx}) w_{xxx} dx + \beta \int_{\Omega} (u_x u_{xxx} + u_{xx}^2) w_{xxx} dx$$

$$+\beta_2 \int_{\Omega} (w_{xx} u_{xx} + w_x u_{xxx} + v_{xx} w_{xx} + v_x w_{xxx}) w_{xxx} dx$$

$$+\int_{\Omega} (w_x u_{xxx} + wu_{xxxx} + v_x w_{xxx} + vw_{xxxx}) w_{xxx} dx \tag{3.53}$$

olur.

(3.53) ün sağ tarafındaki ilk terime (3.3) eşitsizliği uygulanırsa:

$$-\alpha \int_{\Omega} (u_x^2 + uu_{xx}) w_{xxx} dx \leq |-\alpha| \left| \int_{\Omega} u_x u_x w_{xxx} dx + \int_{\Omega} uu_{xx} w_{xxx} dx \right|$$

$$\leq \alpha \left[\int_{\Omega} |u_x||u_x||w_{xxx}| dx + \int_{\Omega} |u||u_{xx}||w_{xxx}| dx \right]$$

$$\leq \alpha D \left[\int_{\Omega} |u_x||w_{xxx}| dx + \int_{\Omega} |u_{xx}||w_{xxx}| dx \right] \tag{3.54}$$

elde edilir.

(3.54)te Cauchy ve Hölder eşitsizlikleri uygulanırsa:

$$\leq \alpha D\left[\left(\int_{\Omega}|u_x|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{\Omega}|w_{xxx}|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\int_{\Omega}|u_{xx}|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{\Omega}|w_{xxx}|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\right]$$

$$\leq \alpha D\left[\frac{\|u_x\|^2}{2}+\frac{\|w_{xxx}\|^2}{2}+\frac{\|u_{xx}\|^2}{2}+\frac{\|w_{xxx}\|^2}{2}\right]$$

$$\leq \alpha C[\|u_x\|^2+\|u_{xx}\|^2+\|w_{xxx}\|^2] \tag{3.55}$$

olur.

(3.53) ün sağ tarafındaki ikinci terime (3.3) eşitsizliği uygulanırsa:

$$-\alpha_2\int_{\Omega}(w_xu_x+wu_{xx}+v_xw_x+vw_{xx})w_{xxx}dx$$

$$\leq |-\alpha_2|\left|\int_{\Omega}(w_xu_x+wu_{xx}+v_xw_x+vw_{xx})w_{xxx}dx\right|$$

$$\leq \alpha_2\left[\int_{\Omega}|w_x||u_x||w_{xxx}|dx+\int_{\Omega}|w||u_{xx}||w_{xxx}|dx+\int_{\Omega}|v_x||w_x||w_{xxx}|dx\right.$$

$$\left.+\int_{\Omega}|v||w_{xx}||w_{xxx}|dx\right]$$

$$\leq \alpha_2D\left[\int_{\Omega}|w_x||w_{xxx}|dx+\int_{\Omega}|w||w_{xxx}|dx+\int_{\Omega}|w_x||w_{xxx}|dx\right.$$

$$\left.+\int_{\Omega}|w_{xx}||w_{xxx}|dx\right] \tag{3.56}$$

elde edilir.

(3.56) ya Cauchy ve Hölder eşitsizlikleri uygulanırsa:

$$\leq \alpha_2D\left[\left(\int_{\Omega}|w_x|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{\Omega}|w_{xxx}|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\int_{\Omega}|w|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{\Omega}|w_{xxx}|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\right.$$

$$+\left(\int_{\Omega}|w_x|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{\Omega}|w_{xxx}|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\Bigg]$$

$$\leq \alpha_2 D\left[\frac{\|w_x\|^2}{2}+\frac{\|w_{xxx}\|^2}{2}+\frac{\|w\|^2}{2}+\frac{\|w_{xxx}\|^2}{2}+\frac{\|w_x\|^2}{2}+\frac{\|w_{xxx}\|^2}{2}\right]$$

$$\leq \alpha_2 D\left[\frac{1}{2}\|w\|^2+\|w_x\|^2+\frac{3}{2}\|w_{xxx}\|^2\right]$$

$$\leq \alpha_2 C[\|w\|^2+\|w_x\|^2+\|w_{xxx}\|^2] \tag{3.57}$$

olur.

(3.56) da dördüncü terim:

$$\int_{\Omega}|w_{xx}||w_{xxx}|dx=\int_{\Omega}\frac{d}{dx}|w_{xx}|dx=0$$

olmaktadır.

(3.53) ün sağ tarafındaki üçüncü terime (3.3) eşitsizliği uygulanırsa:

$$\beta\int_{\Omega}(u_xu_{xxx}+u_{xx}^2)w_{xxx}dx\leq|\beta|\left|\int_{\Omega}u_xu_{xxx}w_{xxx}dx+\int_{\Omega}u_{xx}u_{xx}w_{xxx}dx\right|$$

$$\leq\beta\left[\int_{\Omega}|u_x||u_{xxx}||w_{xxx}|dx+\int_{\Omega}|u_{xx}||u_{xx}||w_{xxx}|dx\right]$$

$$\leq\beta D\left[\int_{\Omega}|u_{xxx}||w_{xxx}|dx+\int_{\Omega}|u_{xx}||w_{xxx}|dx\right] \tag{3.58}$$

elde edilir.

(3.58) e Cauchy ve Hölder eşitsizlikleri uygulanırsa:

$$\leq\beta D\left[\left(\int_{\Omega}|u_{xxx}|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{\Omega}|w_{xxx}|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\int_{\Omega}|u_{xx}|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{\Omega}|w_{xxx}|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\right]$$

$$\leq \beta D\left[\frac{\|u_{xxx}\|^2}{2}+\frac{\|w_{xxx}\|^2}{2}+\frac{\|u_{xx}\|^2}{2}+\frac{\|w_{xxx}\|^2}{2}\right]$$

$$\leq \beta C[\|u_{xxx}\|^2+\|u_{xxx}\|^2+\|w_{xxx}\|^2] \tag{3.59}$$

olur.

(3.53) ün sağ tarafındaki dördüncü terime (3.3) eşitsizliği uygulanırsa:

$$\beta_2\int_\Omega (w_{xx}u_{xx}+w_xu_{xxx}+v_{xx}w_{xx}+v_xw_{xxx})w_{xxx}dx$$

$$\leq |\beta_2|\left|\int_\Omega (w_{xx}u_{xx}+w_xu_{xxx}+v_{xx}w_{xx}+v_xw_{xxx})w_{xxx}dx\right|$$

$$\leq \beta_2\left[\int_\Omega |w_{xx}||u_{xx}||w_{xxx}|dx\ +\int_\Omega |w_x||u_{xxx}||w_{xxx}|dx+\int_\Omega |v_{xx}||w_{xx}||w_{xxx}|dx\right.$$

$$\left.+\int_\Omega |v_x||w_{xxx}||w_{xxx}|dx\right]$$

$$\leq \beta_2D\left[\int_\Omega |w_{xx}||w_{xxx}|dx+\int_\Omega |w_x||w_{xxx}|dx+\int_\Omega |w_{xx}||w_{xxx}|dx\right.$$

$$\left.+\int_\Omega |w_{xxx}||w_{xxx}|dx\right] \tag{3.60}$$

elde edilir.

(3.60) a Cauchy ve Hölder eşitsizlikleri uygulanırsa:

$$\leq \beta_2D\left[\left(\int_\Omega |w_{xx}|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\Omega |w_{xxx}|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\int_\Omega |w_x|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\Omega |w_{xxx}|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\right.$$

$$\left.+\left(\int_\Omega |w_{xx}|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\Omega |w_{xxx}|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}+\int_\Omega |w_{xxx}|^2dx\right]$$

$$\leq \beta_2 D\left[\frac{\|w_{xx}\|^2}{2}+\frac{\|w_{xxx}\|^2}{2}+\frac{\|w_x\|^2}{2}+\frac{\|w_{xxx}\|^2}{2}+\frac{\|w_{xx}\|^2}{2}+\frac{\|w_{xxx}\|^2}{2}+\|w_{xxx}\|^2\right]$$

$$\leq \beta_2 D\left[\|w_{xx}\|^2+\frac{1}{2}\|w_x\|^2+\frac{5}{2}\|w_{xxx}\|^2\right]$$

$$\leq \beta_2 C[\|w_x\|^2+\|w_{xx}\|^2+\|w_{xxx}\|^2] \tag{3.61}$$

olur.

(3.53) ün sağ tarafındaki son terime (3.3) eşitsizliği uygulanırsa:

$$\int_\Omega (w_x u_{xxx}+w u_{xxxx}+v_x w_{xxx}+v w_{xxxx}) w_{xxx} dx$$

$$\leq \left|\int_\Omega (w_x u_{xxx}+w u_{xxxx}+v_x w_{xxx}+v w_{xxxx}) w_{xxx} dx\right|$$

$$\leq \int_\Omega |w_x||u_{xxx}||w_{xxx}|dx+\int_\Omega |w||u_{xxxx}||w_{xxx}|dx+\int_\Omega |v_x||w_{xxx}||w_{xxx}|dx$$

$$+\int_\Omega |v||w_{xxxx}||w_{xxx}|dx$$

$$\leq D\left[\int_\Omega |w_x||w_{xxx}|dx+\int_\Omega |w||w_{xxx}|dx+\int_\Omega |w_{xxx}||w_{xxx}|dx+\int_\Omega |w_{xxx}||w_{xxxx}|dx\right] \tag{3.62}$$

elde edilir.

(3.62) ye Cauchy ve Hölder eşitsizlikleri uygulanırsa:

$$\leq D\left[\left(\int_\Omega |w_x|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\Omega |w_{xxx}|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\int_\Omega |w|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\Omega |w_{xxx}|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}\right.$$

$$\left.+\int_\Omega |w_{xxx}|^2 dx\right]$$

$$\leq D\left[\frac{\|w_x\|^2}{2}+\frac{\|w_{xxx}\|^2}{2}+\frac{\|w\|^2}{2}+\frac{\|w_{xxx}\|^2}{2}+\|w_{xxx}\|^2\right]$$

$$\leq D\left[\frac{1}{2}\|w\|^2+\frac{1}{2}\|w_x\|^2+2\|w_{xxx}\|^2\right]$$

$$\leq C[\|w\|^2+\|w_x\|^2+\|w_{xxx}\|^2] \tag{3.63}$$

olur.

(3.62) de dördüncü terim:

$$\int_\Omega |w_{xxx}||w_{xxxx}|dx=\int_\Omega \frac{d}{dx}|w_{xxx}|dx=0$$

olmaktadır.

(3.55), (3.57), (3.59), (3.61), (3.63) eşitsizlikleri (3.53) te yerlerine yazılırsa,

$$\frac{d}{dt}\{\|w_{xx}\|^2+\|w_{xxx}\|^2\}\leq C\{\alpha\|u_x\|^2+\alpha\|u_{xx}\|^2+\beta\|u_{xx}\|^2+\beta\|u_{xxx}\|^2\}$$
$$+C\{(\alpha_2+1)\|w\|^2+(\alpha_2+\beta_2+1)\|w_x\|^2+(\alpha_2+\beta_2)\|w_{xx}\|^2\}$$
$$+C(\alpha+\alpha_2+\beta+\beta_2+1)\|w_{xxx}\|^2 \tag{3.64}$$

elde edilir.

(3.37), (3.50), (3.64) eşitsizliklerini bir araya getirirsek,

$$\frac{d}{dt}\{\|w\|^2+2\|w_x\|^2+2\|w_{xx}\|^2+\|w_{xxx}\|^2\}$$

$$\leq \alpha[(2C+D)\|u_x\|^2+C\|u_{xx}\|^2]+\beta[(2C+D)\|u_{xx}\|^2+C\|u_{xxx}\|^2]$$

$$+\gamma\{\|w\|^2+2\|w_x\|^2+2\|w_{xx}\|^2+\|w_{xxx}\|^2\} \tag{3.65}$$

olur.

(3.65)i $K_1=(2C+D)\|u_x\|^2+C\|u_{xx}\|^2$, $K_2=[(2C+D)\|u_{xx}\|^2+C\|u_{xxx}\|^2]$ ve $\gamma=Cmax\{(\alpha+\beta+3\alpha_2+3+\beta_2),(3\alpha_2+1+3\beta_2),(\alpha+\beta+2\alpha_2+3\beta_2+1),$ $(\alpha+\beta+\alpha_2+\beta_2+3)\}$ olacak şekilde düzenlersek,

$$\frac{d}{dt}\{\|w\|^2 + 2\|w_x\|^2 + 2\|w_{xx}\|^2 + \|w_{xxx}\|^2\}$$

$$\leq \alpha K_1 + \beta K_2 + \gamma\{\|w\|^2 + 2\|w_x\|^2 + 2\|w_{xx}\|^2 + \|w_{xxx}\|^2\} \tag{3.66}$$

eşitsizliğine ulaşılır.

(3.66) eşitsizliğinde $\varphi(t) = \|w\|^2 + 2\|w_x\|^2 + 2\|w_{xx}\|^2 + \|w_{xxx}\|^2$ olmak üzere

$$\frac{d}{dt}\varphi(t) - \gamma\varphi(t) \leq \alpha K_1 + \beta K_2 \tag{3.67}$$

diferansiyel eşitsizliği elde edilir.

(3.67) diferansiyel eşitsizliği (3.13) eşitsizliğine benzer şekilde çözüldüğünde

$$\varphi(t) \leq (\alpha K_1 + \beta K_2)\frac{(e^{\gamma t}-1)}{\gamma}$$

elde edilir.

Buradan

$$\|w\|^2 + 2\|w_x\|^2 + 2\|w_{xx}\|^2 + \|w_{xxx}\|^2 \leq (\alpha K_1 + \beta K_2)\frac{(e^{\gamma t}-1)}{\gamma} \tag{3.68}$$

elde edilir.

BÖLÜM 4. MARINE RISER DENKLEMLERİ İÇİN YAPISAL KARARLILIK VE AZALMA KESTİRİMLERİ

Bu bölümde A. O. Çelebi, Ş. Gür, V. K. Kalantarov tarafından yazılan "Structural stability and decay estimate for marine riser equations" [33] isimli çalışma ele alınmış ve detaylı bir şekilde incelenmiştir.

4.1. Giriş ve Problemin İfadesi

$$u_{tt} + k\Delta^2 u + a\Delta u + \vec{g}.\nabla u_t + b|u_t|^p u_t = 0,\ x \in \Omega,\ t > 0, \tag{4.1}$$

$$u(x,0) = u_0(x),\ \ u_t(x,0) = u_1(x), x \in \Omega\,, \tag{4.2}$$

$$u = \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0,\ \ x \in \partial\Omega,\ t > 0. \tag{4.3}$$

şeklinde tanımlanmış başlangıç değer problemini ele alalım.

Burada $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ dir. $N \leq 3$ için $\partial\Omega$ yeterince düzgün sınırlı bir bölgedir. ν , sınırda dış birim normal vektördür. $k > 0\,, p \geq 1\,, b > 0\,, a \in \mathbb{R}$ ve $\vec{g} = (g_1, \dots, g_N\,) \in \mathbb{R}^N$ dir.

4.2. Ön Kestirimler

Teorem 4.2.1.

$u, (4.1) - (4.3)$ probleminin çözümü olsun.

$(u_0, u_1) \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ ve $k - \alpha\lambda_1^{-1} > 0$ olacak şekilde,

$$\|u_t(t)\|^2 \leq D_1\,, \|\Delta u(t)\|^2 \leq D_1\,, \int_0^t \int_\Omega |u_s(x,s)|^{p+2} dxds \leq D_1\ \ , \forall t > 0, \tag{4.4}$$

eşitsizlikleri sağlanır.

D_1 , $(4.1)-(4.3)$ün parametrelerine ve başlangıç verilerine bağlı pozitif sabittir.

İspat 4.2.1. (4.1), $L^2(\Omega)$ da u_t ile çarpılırsa,

$$\int_\Omega u_{tt}u_t dx + k\int_\Omega \Delta^2 u u_t dx + a\int_\Omega \Delta u u_t dx + \int_\Omega \vec{g}.\nabla u_t u_t dx$$

$$+b\int_\Omega |u_t|^p u_t u_t dx = 0 \tag{4.5}$$

elde edilir.

(4.5) teki her bir integral ayrı ayrı hesaplanırsa,

$$\int_\Omega u_{tt}u_t dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_t\|^2 \quad ,$$

$$k\int_\Omega \Delta^2 u u_t dx = k\left[u_t\Delta\nabla u|_{\partial\Omega} - \int_\Omega \Delta\nabla u \nabla u_t dx\right]$$

$$= -k\left[\nabla u_t \Delta u|_{\partial\Omega} - \int_\Omega \Delta u \Delta u_t dx\right] = k\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\Delta u\|^2 \quad ,$$

$$a\int_\Omega \Delta u u_t dx = a\left[u_t\nabla u|_{\partial\Omega} - \int_\Omega \nabla u \nabla u_t\, dx\right] = -a\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u\|^2 \ ,$$

$$\int_\Omega \vec{g}\nabla u_t u_t dx = 0$$

elde edilir.

Elde edilen ifadeler (4.5) te yerlerine yazılırsa,

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\|u_t\|^2 + \frac{k}{2}\|\Delta u\|^2 - \frac{a}{2}\|\Delta u\|^2\right] + b\int_\Omega |u_t|^{p+2}\, dx = 0 \tag{4.6}$$

olur.

Buradan $E_u(t) = \|u_t\|^2 + k\|\Delta u\|^2 - a\|\nabla u\|^2$ olmak üzere,

$$\frac{d}{dt}E_u(t) + 2b\int_\Omega |u_t|^{p+2}dx = 0 \qquad (4.7)$$

elde edilir.

(4.7) de $b\int_\Omega |u_t|^{p+2}\,dx \geq 0$ olduğundan,

$$\frac{d}{dt}E_u(t) \leq 0$$

$$E_u(t) \leq E_u(0) \qquad (4.8)$$

elde edilir.

Şimdi $E_u(t) \geq 0$ olduğunu gösterelim:

$\|\nabla u\|^2 \leq \|u\|.\|\Delta u\|$ olduğundan ve Poincare eşitsizliğinden

$$\|\nabla u\|^2 \leq {\lambda_1}^{-1}\|\Delta u\|^2$$

$$-\|\nabla u\|^2 \geq -{\lambda_1}^{-1}\|\Delta u\|^2 \qquad (4.9)$$

eşitsizliği yazılabilir.

$d_0 = k - \alpha{\lambda_1}^{-1}$ ve $E_u(t) = \|u_t\|^2 + k\|\Delta u\|^2 - a\|\nabla u\|^2$ eşitliklerini ve (4.9) eşitsizliğini kullanarak,

$$E_u(t) = \|u_t\|^2 + k\|\Delta u\|^2 - a\|\nabla u\|^2 \geq \|u_t\|^2 + k\|\Delta u\|^2 - \tfrac{a}{\lambda_1}\|\nabla u\|^2$$

$$E_u(t) \geq \|u_t\|^2 + \left(k - \tfrac{a}{\lambda_1}\right)\|\Delta u\|^2$$

$$E_u(t) \geq \|u_t\|^2 + d_0\|\Delta u\|^2 \ ,\forall t \geq 0 \qquad (4.10)$$

elde edilir.

(4.8) den,

$\|u_t\|^2 + k\|\Delta u\|^2 - a\|\nabla u\|^2 \leq E_u(0)$ eşitsizliğine ulaşılır. Buradan,

$\|u_t(t)\|^2 \leq D_1$ ve $\|\Delta u(t)\|^2 \leq D_1$ olduğu görülür.

Böylece (4.4)ün ilk iki eşitsizliği elde edilir.

(4.7) , $(0,t)$ aralığında integre edilirse,

$$\int_0^t \frac{d}{ds} E_u(s) + 2b \int_0^t \int_\Omega |u_s|^{p+2} dxds = 0$$

$$E_u(t) - E_u(0) + 2b \int_0^t \int_\Omega |u_s|^{p+2} dxds = 0$$

olur.

$E_u(t) \geq 0$ olduğundan,

$$2b \int_0^t \int_\Omega |u_s|^{p+2} dxds < E_u(0)$$

$$\int_0^t \int_\Omega |u_s|^{p+2} dxds < D_1$$

elde edilir.

Böylece (4.4)ün son eşitsizliğine ulaşılır.

Teorem 4.2.2.

$u, (4.1) - (4.3)$ probleminin çözümü olsun.

$u_0 \in H^4(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)$, $u_1 \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ ve $k - \alpha\lambda_1^{-1} > 0$ olacak şekilde,

$$\|u_{tt}(t)\|^2 \leq D_2 \,,\ \|\Delta u_t(t)\|^2 \leq D_2 \,,\ \|\Delta^2 u(t)\|^2 \leq D_2 \,,\ \forall t > 0 \qquad (4.11)$$

eşitsizlikleri sağlanır.

D_2 , $(4.1) - (4.3)$ün parametrelerine ve başlangıç verilerine bağlı pozitif sabittir.

İspat 4.2.2. (4.1) in t ye göre türevini alalım:

$$u_{ttt} + k\Delta^2 u_t + a\Delta u_t + \vec{g}.\nabla u_{tt} + b(p+1)|u_t|^p u_{tt} = 0,\ x \in \Omega,\ t > 0\ . \qquad (4.12)$$

(4.12) , $L^2(\Omega)$ da u_{tt} ile çarpılırsa,

$$\int_\Omega u_{ttt} u_{tt} dx + k \int_\Omega \Delta^2 u_t u_{tt} dx + a \int_\Omega \Delta u_t u_{tt} dx + \int_\Omega \vec{g}.\nabla u_{tt} u_{tt} dx$$

$$+b(p+1) \int_\Omega |u_t|^p u_{tt} u_{tt} dx = 0 \qquad (4.13)$$

elde edilir.

(4.13) teki integraller ayrı ayrı hesaplandığında,

$$\int_\Omega u_{ttt} u_{tt}\, dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_{tt}\|^2\ ,$$

$$k \int_\Omega \Delta^2 u_t u_{tt}\, dx = u_{tt}.\Delta\nabla u_t\ |_{\partial\Omega} - \int_\Omega \Delta\nabla u_t \nabla u_{tt}\, dx$$

$$= -k\left[\nabla u_{tt}\,.\Delta u_t\ |_{\partial\Omega} - \int_\Omega \Delta u_t\,.\Delta u_{tt}\, dx\right]$$

$$= k\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\Delta u_t\|^2 \quad ,$$

$$a \int_\Omega \Delta u_t\,.u_{tt}\, dx = a\left[u_{tt}.\nabla u_t\ |_{\partial\Omega} - \int_\Omega \nabla u_t\,.\nabla u_{tt}\, dx\right] = -a\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u_t\|^2\ ,$$

$$\int_\Omega \vec{g}.\nabla u_{tt}\,.\ u_{tt}\, dx = 0$$

ifadeleri elde edilir.

Elde edilen ifadeler (4.13) te yerlerine yazılırsa,

$$\frac{d}{dt}[\|u_{tt}\|^2 + k\|\Delta u_t\|^2 - a\|\nabla u_t\|^2] + 2(p+1)b \int_\Omega |u_t|^p u_{tt}^2 dx = 0 \qquad (4.14)$$

olur.

(4.14) ten $E_{u_t}(t) = \|u_{tt}\|^2 + k\|\Delta u_t\|^2 - a\|\nabla u_t\|^2$ olmak üzere,

$$\frac{d}{dt}E_{u_t}(t) + 2(p+1)b\int_{\Omega}|u_t|^p u_{tt}^2 dx = 0 \qquad (4.15)$$

yazılabilir.

(4.15) eşitliğinde,

$$2(p+1)b\int_{\Omega}|u_t|^p u_{tt}^2 dx \geq 0$$

$$\frac{d}{dt}E_{u_t}(t) \leq 0$$

$$E_{u_t}(t) \leq E_{u_t}(0) \qquad (4.16)$$

elde edilir.

Şimdi $E_{u_t}(t) \geq 0$ olduğunu gösterelim:

$\|\nabla u\|^2 \leq \|u\|.\|\Delta u\|$ olduğundan ve Poincare eşitsizliğinden,

$$\|\nabla u_t\|^2 \leq {\lambda_1}^{-1}\|\Delta u_t\|^2$$

$$-\|\nabla u_t\|^2 \geq -{\lambda_1}^{-1}\|\Delta u_t\|^2 \qquad (4.17)$$

yazılabilir.

$d_0 = k - \alpha{\lambda_1}^{-1}$ ve $E_{u_t}(t) = \|u_{tt}\|^2 + k\|\Delta u_t\|^2 - a\|\nabla u_t\|^2$ eşitliklerini ve (4.17) eşitsizliğini kullanarak,

$$E_{u_t}(t) = \|u_{tt}\|^2 + k\|\Delta u_t\|^2 - a\|\nabla u_t\|^2 \geq \|u_{tt}\|^2 + k\|\Delta u_t\|^2 - \frac{a}{\lambda_1}\|\nabla u_t\|^2$$

$$E_{u_t}(t) \geq \|u_{tt}\|^2 + \left(k - \frac{a}{\lambda_1}\right)\|\Delta u_t\|^2$$

$$E_{u_t}(t) \geq \|u_{tt}\|^2 + d_0\|\Delta u_t\|^2 \qquad (4.18)$$

elde edilir.

(4.10) dan,

$$\|u_{tt}\|^2 + d_0\|\Delta u_t\|^2 \leq E_{u_t}(t) \leq E_{u_t}(0)$$

$$\|u_{tt}\|^2 + d_0\|\Delta u_t\|^2 \leq K_1 \tag{4.19}$$

yazılabilir. Buradan

$\|u_{tt}(t)\|^2 \leq D_2$ ve $\|\Delta u_t(t)\|^2 \leq D_2$ olduğu görülür.

Böylece (4.11) in ilk iki eşitsizliği elde edilir.

$H^2(\Omega) \hookrightarrow C(\overline{\Omega})$ sürekli gömülmesinden dolayı ve $\nu \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ olmak üzere,

$$\max_{x\epsilon\overline{\Omega}} |\nu(x)| \leq c_0\|\Delta\nu\| \tag{4.20}$$

eşitsizliği elde edilir.

(4.19) kestirimi ve (4.20) eşitsizliğinden,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |u_t|^{2(p+1)} dx &\leq |\Omega| \max_{x\epsilon\overline{\Omega}} |u_t|^{2(p+1)} \\ &\leq |\Omega| {c_0}^{2(p+1)} \|\Delta u_t\|^{2(p+1)} \\ &\leq |\Omega| {c_0}^{2(p+1)} \left(\frac{K_1}{d_0}\right)^{p+1} = D_2 \quad \forall t > 0, \end{aligned} \tag{4.21}$$

elde edilir.

(4.21), (4.19) ve (4.4) ten

$\|\Delta^2 u(t)\|^2 \leq D_2$, $\forall t > 0$ olduğu görülür.

4.3. a Katsayısına Sürekli Bağımlılık

Bu bölümde (4.1)-(4.3) probleminin çözümlerinin a katsayısına sürekli bağımlılığı incelenmiştir.

u ve v sırasıyla aşağıdaki problemlerin zayıf çözümleri olsun:

$$u_{tt} + k\Delta^2 u + a\Delta u + \vec{g}.\nabla u_t + b|u_t|^p u_t = 0,\ x \in \Omega,\ t > 0, \tag{4.22}$$

$$u(x,0) = u_0(x),\ \ u_t(x,0) = u_1(x), x \in \Omega\,, \tag{4.23}$$

$$u = \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0,\ \ x \in \partial\Omega,\ t > 0. \tag{4.24}$$

ve

$$v_{tt} + k\Delta^2 v + (a + \alpha)\Delta v + \vec{g}.\nabla v_t + b|v_t|^p v_t = 0,\ x \in \Omega,\ t > 0, \tag{4.25}$$

$$v(x,0) = u_0(x),\ \ v_t(x,0) = u_1(x), x \in \Omega\,, \tag{4.26}$$

$$v = \frac{\partial v}{\partial \nu} = 0,\ \ x \in \partial\Omega,\ t > 0. \tag{4.27}$$

Bu problemlerin çözümleri farkı olan $w = u - v$, (4.28)-(4.30) problemini sağlar:

$$w_{tt} + k\Delta^2 w + a\Delta w - \alpha\Delta v + \vec{g}.\nabla w_t + b(|u_t|^p u_t - |v_t|^p v_t) = 0,$$

$$x \in \Omega,\ t > 0, \tag{4.28}$$

$$w(x,0) = 0,\ \ w_t(x,0) = 0\,, \tag{4.29}$$

$$w = \frac{\partial w}{\partial \nu} = 0,\ \ x \in \partial\Omega,\ t > 0. \tag{4.30}$$

Teorem 4.3. w , (4.28)-(4.30) probleminin çözümü olsun.

D_1, (4.1)in parametrelerine ve başlangıç verilerine bağlı pozitif sabit olmak üzere,

$$\|w_t(t)\|^2 + d_0\|\Delta w(t)\|^2 \le D_1(1 + e^t)\alpha^2,\ \forall t > 0, \tag{4.31}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat 4.3. (4.28), $L^2(\Omega)$ da w_t ile çarpılırsa,

$$\int_\Omega w_{tt}w_t dx + k\int_\Omega \Delta^2 w w_t dx + a\int_\Omega \Delta w w_t dx - \alpha\int_\Omega \Delta v w_t dx - \int_\Omega \vec{g}.\nabla w_t w_t dx$$

$$+b\int_\Omega (|u_t|^p u_t - |v_t|^p v_t) w_t dx = 0 \tag{4.32}$$

elde edilir.

(4.32) deki her bir integral ayrı ayrı hesaplanırsa,

$$\int_\Omega w_{tt}w_t\, dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w_t\|^2\,,$$

$$k\int_\Omega \Delta^2 w w_t\, dx = k\left[w_t.\Delta\nabla w\,|_{\partial\Omega} - \int_\Omega \Delta\nabla w \nabla w_t\, dx\right]$$

$$= -k\left[\nabla w_t\,.\Delta w\,|_{\partial\Omega} - \int_\Omega \Delta w\,.\Delta w_t\, dx\right] \;= k\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\Delta w\|^2\,,$$

$$a\int_\Omega \Delta w\,.w_t\, dx = a\left[w_t.\nabla w\,|_{\partial\Omega} - \int_\Omega \nabla w\,.\nabla w_t\, dx\right] = -a\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla w\|^2\,,$$

$$\int_\Omega \vec{g}.\nabla w_t\,.\; w_t\, dx = 0$$

ifadeleri elde edilir.

Elde edilen ifadeler (4.32) de yerlerine yazılırsa,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}[\|w_t\|^2 + k\|\Delta w\|^2 - a\|\nabla w\|^2] - \alpha\int_\Omega \Delta v.w_t dx$$

$$+b\int_\Omega (|u_t|^p u_t - |v_t|^p v_t) w_t dx = 0 \tag{4.33}$$

olur.

(4.33) ten $E_w(t) = \|w_t\|^2 + k\|\Delta w\|^2 - a\|\nabla w\|^2$ olmak üzere,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}E_w(t) - \alpha \int_{\Omega} \Delta v. w_t dx + b \int_{\Omega} (|u_t|^p u_t - |v_t|^p v_t) w_t dx = 0 \tag{4.34}$$

yazılabilir.

$$(|u_t|^p u_t - |v_t|^p v_t) w_t \geq 0 \tag{4.35}$$

olduğunu gösterelim. Buradan,

$$|u_t|^p u_t w_t - |v_t|^p v_t w_t$$

$$= \tfrac{1}{2}|u_t|^p u_t w_t + \tfrac{1}{2}|u_t|^p u_t w_t - \tfrac{1}{2}|v_t|^p v_t w_t - \tfrac{1}{2}|v_t|^p v_t w_t$$

$$= \tfrac{1}{2}|u_t|^p w_t(u_t - v_t + v_t) + \tfrac{1}{2}|u_t|^p u_t w_t - \tfrac{1}{2}|v_t|^p w_t(v_t - u_t + u_t) - \tfrac{1}{2}|v_t|^p v_t w_t$$

$$= \tfrac{1}{2}|u_t|^p w_t(u_t - v_t + v_t) + \tfrac{1}{2}|u_t|^p u_t w_t + \tfrac{1}{2}|v_t|^p w_t(u_t - v_t - u_t) - \tfrac{1}{2}|v_t|^p v_t w_t$$

$$= \tfrac{1}{2}|u_t|^p w_t(w_t + v_t) + \tfrac{1}{2}|u_t|^p u_t w_t + \tfrac{1}{2}|v_t|^p w_t(w_t - u_t) - \tfrac{1}{2}|v_t|^p v_t w_t$$

$$= \tfrac{1}{2}|u_t|^p w_t(w_t + v_t + u_t) + \tfrac{1}{2}|v_t|^p w_t(w_t - u_t - v_t)$$

$$= \tfrac{1}{2}|u_t|^p w_t w_t + \tfrac{1}{2}|u_t|^p w_t(v_t + u_t) + \tfrac{1}{2}|v_t|^p w_t w_t - \tfrac{1}{2}|v_t|^p w_t(u_t + v_t)$$

$$= \tfrac{1}{2}w_t w_t(|u_t|^p + |v_t|^p) + \tfrac{1}{2}w_t(u_t + v_t)[|u_t|^p - |v_t|^p]$$

$$= \tfrac{1}{2}w_t^2(|u_t|^p + |v_t|^p) + \tfrac{1}{2}(u_t - v_t)(u_t + v_t)[|u_t|^p - |v_t|^p]$$

elde edilir.

$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$ kullanılarak,

$$= \frac{1}{2}w_t^2(|u_t|^p + |v_t|^p) + \frac{1}{2}(u_t - v_t)^2(u_t + v_t)(|u_t|^{p-1} + \cdots + |v_t|^{p-1})$$

$$(|u_t|^p u_t - |v_t|^p v_t) w_t \geq 0$$

olduğu görülür.

(4.34) ve (4.35) ten

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}E_w(t) - \alpha\int_\Omega \Delta v . w_t dx \leq 0$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}E_w(t) \leq |\alpha|\int_\Omega |\Delta v|.|w_t| dx \tag{4.36}$$

elde edilir.

(4.36) eşitsizliğinin sağ tarafında Cauchy eşitsizliği uygulanırsa,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}E_w(t) \leq |\alpha|\int_\Omega |\Delta v|.|w_t| dx \leq \frac{|\alpha|^2}{2}\|\Delta v\|^2 + \frac{1}{2}\|w_t\|^2 \tag{4.37}$$

elde edilir.

(4.37) eşitsizliğinde (4.4) kestirimini kullanılırsa,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}E_w(t) \leq \frac{|\alpha|^2}{2}D_1 + \frac{1}{2}\|w_t\|^2 \tag{4.38}$$

olur.

(4.10) eşitsizliğinden, $E_w(t) \geq \|w_t\|^2$ olduğu görülmektedir. Buradan,

$$\frac{d}{dt}E_w(t) \leq |\alpha|^2 D_1 + E_w(t)$$

$$\frac{d}{dt}E_w(t) - E_w(t) \leq |\alpha|^2 D_1 \tag{4.39}$$

diferansiyel eşitsizliği elde edilir.

(4.39) eşitsizliğini çözmek için her terim $e^{-\int_0^t dt} = e^{-t}$ ile çarpılırsa,

$$e^{-t}\frac{d}{dt}E_w(t) - E_w(t)e^{-t} \leq |\alpha|^2 D_1 e^{-t}$$

$$(E_w(t).e^{-t})' \leq |\alpha|^2 D_1 e^{-t}$$

$$E_w(t).e^{-t} \leq |\alpha|^2 D_1(1 - e^{-t})$$

$E_w(t) \leq D_1(e^t - 1)\alpha^2$

$$\|w_t(t)\|^2 + k\|\Delta w(t)\|^2 - a\|\nabla w\|^2 \leq D_1(1 + e^t)\alpha^2 \tag{4.40}$$

elde edilir.

(4.40) ve (4.10) dan,

$$\|w_t(t)\|^2 + d_0\|\Delta w(t)\|^2 \leq D_1(1 + e^t)\alpha^2 \tag{4.41}$$

elde edilir.

4.4. *b* Katsayısına Sürekli Bağımlılık

Bu bölümde (4.1)-(4.3) probleminin çözümlerinin b katsayısına sürekli bağımlılığı incelenmiştir.

u ve v sırasıyla aşağıdaki problemlerin zayıf çözümleri olsun:

$$u_{tt} + k\Delta^2 u + a\Delta u + \vec{g}.\nabla u_t + b|u_t|^p u_t = 0,\ x \in \Omega,\ t > 0, \tag{4.42}$$

$$u(x, 0) = u_0(x),\ \ u_t(x, 0) = u_1(x), x \in \Omega\ , \tag{4.43}$$

$$u = \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0,\ \ x \in \partial\Omega,\ t > 0. \tag{4.44}$$

ve

$$v_{tt} + k\Delta^2 v + a\Delta v + \vec{g}.\nabla v_t + (b + \beta)|v_t|^p v_t = 0,\ x \in \Omega,\ t > 0, \tag{4.45}$$

$$v(x, 0) = u_0(x),\ \ v_t(x, 0) = u_1(x), x \in \Omega\ , \tag{4.46}$$

$$v = \frac{\partial v}{\partial \nu} = 0,\ \ x \in \partial\Omega,\ t > 0. \tag{4.47}$$

Bu problemlerin çözümleri farkı olan $w = u - v$, (4.48)-(4.50) problemini sağlar.

$$w_{tt} + k\Delta^2 w + a\Delta w + \vec{g}.\nabla w_t + b(|u_t|^p u_t - |v_t|^p v_t) + \beta|v_t|^p v_t = 0,$$

$$x \in \Omega,\ t > 0, \tag{4.48}$$

$$w(x, 0) = 0,\ \ w_t(x, 0) = 0\ , \tag{4.49}$$

$$w = \frac{\partial w}{\partial \nu} = 0, \;\; x \in \partial\Omega, \;\; t > 0\,. \tag{4.50}$$

Teorem 4.4. Eğer u, v sırasıyla (4.42)- (4.44) ve (4.45)- (4.47) problemlerinin zayıf çözümleri ise, w aşağıdaki eşitsizliği sağlar:

$$\|w_t(t)\|^2 + d_0\|\Delta w(t)\|^2 \le M_1|\beta|^{\frac{p+2}{p+1}}\;. \tag{4.51}$$

Eğer u, v bu problemlerinin kuvvetli çözümleri ise, w aşağıdaki eşitsizliği sağlar:

$$\|w_{tt}(t)\|^2 + d_0\|\Delta w_t(t)\|^2 \le \beta^2 M_2 e^{M_3 t}\;. \tag{4.52}$$

M_1, M_2, M_3 , (4.1)in parametrelerine ve başlangıç verilerine bağlı pozitif sabitlerdir.

İspat 4.4. (4.48), $L^2(\Omega)$ da w_t ile çarpılırsa,

$$\int_\Omega w_{tt}w_t dx + k\int_\Omega \Delta^2 w w_t dx + a\int_\Omega \Delta w w_t dx + \int_\Omega \vec{g}.\nabla w_t w_t dx + \beta\int_\Omega |v_t|^p v_t w_t dx$$

$$+b\int_\Omega (|u_t|^p u_t - |v_t|^p v_t) w_t dx = 0 \tag{4.53}$$

elde edilir.

(4.53) teki her bir integral ayrı ayrı hesaplanırsa,

$$\int_\Omega w_{tt}w_t\, dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w_t\|^2 \;\;,$$

$$k\int_\Omega \Delta^2 w w_t\, dx = k\left[w_t.\Delta\nabla w\,|_{\partial\Omega} - \int_\Omega \Delta\nabla w.\nabla w_t\, dx\right]$$

$$= -k\left[\nabla w_t\,.\Delta w\,|_{\partial\Omega} - \int_\Omega \Delta w\,.\Delta w_t\, dx\right] = k\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\Delta w\|^2 \;\;,$$

$$a\int_\Omega \Delta w\,.w_t\, dx = a\left[w_t.\nabla w\,|_{\partial\Omega} - \int_\Omega \nabla w\,.\nabla w_t\, dx\right] = -a\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla w\|^2 \;\;,$$

$$\int_{\Omega} \vec{g}.\nabla w_t \,.\; w_t \, dx = 0$$

ifadeleri elde edilir.

Elde edilen ifadeler (4.53) te yerlerine yazılırsa,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}[\|w_t\|^2 + k\|\Delta w\|^2 - a\|\nabla w\|^2] + \beta \int_{\Omega} |v_t|^p v_t w_t dx$$

$$+b \int_{\Omega} (|u_t|^p u_t - |v_t|^p v_t) w_t = 0 \qquad (4.54)$$

olur.

(4.54) ten $E_w(t) = \|w_t\|^2 + k\|\Delta w\|^2 - a\|\nabla w\|^2$ olacak şekilde,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}[E_w(t)] + \beta \int_{\Omega} |v_t|^p v_t w_t dx + b \int_{\Omega} (|u_t|^p u_t - |v_t|^p v_t) w_t = 0 \qquad (4.55)$$

elde edilir.

$d_1(p)$, p'ye bağlı bir sabit olmak üzere;

$$b \int_{\Omega} (|u_t|^p u_t - |v_t|^p v_t) w_t dx \geq b d_1(p) \int_{\Omega} |w_t|^{p+2} dx \qquad (4.56)$$

eşitsizliği yazılabilir.

(4.55) ve (4.56) dan,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt} E_w(t) + b d_1(p) \int_{\Omega} |w_t|^{p+2} dx \leq |\beta| \int_{\Omega} |v_t|^{p+1} |w_t| dx \qquad (4.57)$$

elde edilir.

(4.57) eşitsizliğinin sağ tarafında Hölder ve ε-Young eşitsizlikleri uygulanırsa,

$$|\beta|\int_{\Omega}|v_t|^{p+1}|w_t|dx \leq |\beta|\left(\int_{\Omega}|w_t|^{p+2}dx\right)^{\frac{1}{p+2}}\left(\int_{\Omega}|v_t|^{p+2}dx\right)^{\frac{p+1}{p+2}}$$

$$\leq \varepsilon\int_{\Omega}|w_t|^{p+2}dx + c(\varepsilon)|\beta|^{\frac{p+2}{p+1}}\int_{\Omega}|v_t|^{p+2}dx \qquad (4.58)$$

olur.

Burada $c(\varepsilon) = (\varepsilon(p+2))^{\frac{-1}{p+1}}.\left(\frac{p+1}{p+2}\right)$ dir.

(4.57) ve (4.58) eşitsizliklerinden,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}E_w(t) + (bd_1(p)-\varepsilon)\int_{\Omega}|w_t|^{p+2}dx \leq c(\varepsilon)|\beta|^{\frac{p+2}{p+1}}\int_{\Omega}|v_t|^{p+2}dx \qquad (4.59)$$

ve burada ε yeterince küçük seçilirse,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}E_w(t) \leq c(\varepsilon)|\beta|^{\frac{p+2}{p+1}}\int_{\Omega}|v_t|^{p+2}dx \qquad (4.60)$$

elde edilir.

(4.60) denklemi $(0,t)$ de integre edilirse,

$$E_w(t) \leq 2c(\varepsilon)|\beta|^{\frac{p+2}{p+1}}\int_0^t\int_{\Omega}|v_s|^{p+2}dxds \qquad (4.61)$$

olur.

Buradan (4.4), (4.10) ve (4.61) eşitsizliklerinden,

$$\|w_t\|^2 + d_0\|\Delta w\|^2 \leq E_w(t) \leq 2c(\varepsilon)|\beta|^{\frac{p+2}{p+1}}D_2 \qquad (4.62)$$

elde edilir.

Böylece (4.51) eşitsizliği sağlanmıştır.

(4.45) in t ye göre türevini alırsak,

$$v_{ttt} + k\Delta^2 v_t + a\Delta v_t + \vec{g}.\nabla v_{tt} + (b+\beta)(p+1)|v_t|^p v_{tt} = 0 \tag{4.63}$$

elde edilir.

(4.12) den (4.63) ü çıkarırsak,

$$w_{ttt} + k\Delta^2 w_t + a\Delta w_t + \vec{g}.\nabla w_{tt} + b(p+1)|u_t|^p w_{tt} - \beta(p+1)|v_t|^p v_{tt}$$

$$+b(p+1)(|u_t|^p - |v_t|^p)v_{tt} = 0 \tag{4.64}$$

olur.

(4.64) $L^2(\Omega)$ da w_{tt} ile çarpılırsa,

$$\int_\Omega w_{ttt}\, w_{tt} dx + k\int_\Omega \Delta^2 w_t w_{tt} dx + a\int_\Omega \Delta w_t w_{tt} dx + \int_\Omega \vec{g}.\nabla w_{tt} w_{tt} dx$$

$$+b(p+1)\int_\Omega |u_t|^p w_{tt} w_{tt} dx - \beta(p+1)\int_\Omega |v_t|^p v_{tt} w_{tt} dx$$

$$+b(p+1)\int_\Omega (|u_t|^p - |v_t|^p) v_{tt} w_{tt} dx = 0 \tag{4.65}$$

elde edilir.

(4.65) teki her bir integral ayrı ayrı hesaplanırsa,

$$\int_\Omega w_{ttt}\, w_{tt}\, dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w_{tt}\|^2 ,$$

$$k\int_\Omega \Delta^2 w_t w_{tt}\, dx = k\left[w_{tt}.\Delta\ \nabla w_t\ |_{\partial\Omega} - \int_\Omega \Delta\ \nabla w_t \nabla w_{tt}\, dx \right]$$

$$= -k\left[\nabla w_{tt}\, .\Delta w_t\ |_{\partial\Omega} - \int_\Omega \Delta w_t\, .\Delta w_{tt}\, dx \right] = k\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\Delta w_t\|^2 ,$$

$$a\int_\Omega \Delta w_t\, .\, w_{tt}\, dx = a\left[w_{tt}.\nabla w_t\ |_{\partial\Omega} - \int_\Omega \nabla w_t\, .\nabla w_{tt} dx \right] = -a\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla w_t\|^2 ,$$

$$\int_{\Omega} \vec{g}.\nabla w_{tt} \,.\, w_{tt}\, dx = 0$$

ifadeleri elde edilir.

Elde edilenler ifadeler (4.65) te yerlerine yazılırsa,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}[\|w_{tt}\|^2 + k\|\Delta w_t\|^2 - a\|\nabla w_t\|^2] + b(p+1)\int_{\Omega} |u_t|^p w_{tt}^2 dx$$

$$= \beta(p+1)\int_{\Omega} |v_t|^p v_{tt} w_{tt} dx - b(p+1)\int_{\Omega} (|u_t|^p - |v_t|^p) v_{tt} w_{tt} dx \qquad (4.66)$$

olur.

(4.66) nın sağ tarafındaki terimlerden (4.11) ve (4.20) eşitsizlikleri kullanılarak,

$$\beta(p+1)\left|\int_{\Omega} |v_t|^p v_{tt} w_{tt} dx\right| \le \beta(p+1){c_0}^p\|\Delta v_t\|^p\|v_{tt}\|\|w_{tt}\|$$

$$\le \frac{1}{2}\beta^2(p+1)^2{c_0}^{2p}\|\Delta v_t\|^{2p}\|v_{tt}\|^2 + \frac{1}{2}\|w_{tt}\|^2$$

$$\le \frac{1}{2}\beta^2(p+1)^2{c_0}^{2p}{D_2}^{p+1} + \frac{1}{2}\|w_{tt}\|^2 \qquad (4.67)$$

ve

$$\left|\int_{\Omega} (|u_t|^p - |v_t|^p) v_{tt} w_{tt} dx\right| \le p\int_{\Omega} (|u_t|^{p-1} + |v_t|^{p-1})|v_{tt}||w_t||w_{tt}| dx$$

$$\le p2{c_0}^{p-1}D_2^{\frac{p-1}{2}}\int_{\Omega} |v_{tt}||w_t||w_{tt}| dx \le p2{c_0}^{p-1}D_2^{\frac{p-1}{2}}\max_{x\epsilon\bar{\Omega}}|w_t|\,\|v_{tt}\|\|w_{tt}\|$$

$$\le p2{c_0}^{p}D_2^{\frac{p}{2}}\|w_{tt}\|\|\Delta w_t\| \le D_3[\|\Delta w_t\|^2 + \|w_{tt}\|^2] \qquad (4.68)$$

elde edilir.

(4.66), (4.67) ve (4.68) den,

$$\frac{d}{dt}E_{w_t}(t) \le L_0\beta^2 + D_4E_{w_t}(t) \tag{4.69}$$

elde edilir. Burada

$E_{w_t}(t) = \|w_{tt}\|^2 + k\|\Delta w_t\|^2 - a\|\nabla w_t\|^2$, $L_0 = \frac{1}{2}(p+1)^2 c_0^{2p} D_2^{p+1}$ ve

$D_4 = \frac{2D_3+1}{\min(1,d_0)}$ dir.

(4.69) eşitsizliği çözülürse,

$$E_{w_t}(t) \le \frac{1}{D_4}L_0\beta^2 e^{D_4 t} \tag{4.70}$$

elde edilir.

4.5. $\vec{g}$ Katsayısına Sürekli Bağımlılık

Bu bölümde (4.1)-(4.3) probleminin çözümlerinin $\vec{g}$ katsayısına sürekli bağımlılığı incelenmiştir.

u ve v sırasıyla aşağıdaki problemlerin kuvvetli çözümleri olsun:

$$u_{tt} + k\Delta^2 u + a\Delta u + \vec{g}.\nabla u_t + b|u_t|^p u_t = 0,\ x \in \Omega,\ t > 0, \tag{4.71}$$

$$u(x,0) = u_0(x),\ u_t(x,0) = u_1(x),\ x \in \Omega, \tag{4.72}$$

$$u = \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0,\ x \in \partial\Omega,\ t > 0, \tag{4.73}$$

ve

$$v_{tt} + k\Delta^2 v + a\Delta v + (\vec{g} + \vec{\gamma})\nabla v_t + b|v_t|^p v_t = 0,\ x \in \Omega,\ t > 0, \tag{4.74}$$

$$v(x,0) = u_0(x),\ v_t(x,0) = u_1(x),\ x \in \Omega, \tag{4.75}$$

$$v = \frac{\partial v}{\partial \nu} = 0,\ x \in \partial\Omega,\ t > 0. \tag{4.76}$$

Bu problemlerin çözümleri farkı olan $w = u - v$, (4.77)- (4.79) problemini sağlar:

$$w_{tt} + k\Delta^2 w + a\Delta w + \vec{g}.\nabla w_t - \vec{\gamma}\nabla v_t + b(|u_t|^p u_t - |v_t|^p v_t) = 0, \tag{4.77}$$

$$w(x,0) = 0,\ w_t(x,0) = 0, \tag{4.78}$$

$$w = \frac{\partial w}{\partial \nu} = 0, \;\; x \in \partial\Omega, \;\; t > 0\,. \tag{4.79}$$

(4.77), $L^2(\Omega)$ da w_t ile çarpılırsa,

$$\int_\Omega w_{tt} w_t dx + k \int_\Omega \Delta^2 w w_t dx + a \int_\Omega \Delta w w_t dx + \int_\Omega \vec{g}.\nabla w_t w_t dx - \int_\Omega \vec{\gamma} \nabla v_t w_t dx$$

$$+b \int_\Omega (|u_t|^p u_t - |v_t|^p v_t) w_t = 0 \tag{4.80}$$

elde edilir.

(4.80) deki her bir integral ayrı ayrı hesaplanırsa,

$$\int_\Omega w_{tt} w_t \, dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w_t\|^2 \,,$$

$$k \int_\Omega \Delta^2 w w_t \, dx = k \left[w_t \, \Delta \nabla w \,|_{\partial\Omega} - \int_\Omega \Delta \nabla w \nabla w_t \, dx \right]$$

$$= -k \left[\nabla w_t \Delta w \,|_{\partial\Omega} - \int_\Omega \Delta w \Delta w_t \, dx \right] = k \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\Delta w\|^2 \,,$$

$$a \int_\Omega \Delta w w_t \, dx = a \left[w_t \, \nabla w \,|_{\partial\Omega} - \int_\Omega \nabla w \;\; \nabla w_t \, dx \right] = -a \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla w\|^2 \,,$$

$$\int_\Omega \vec{g}.\nabla w_t w_t \, dx = 0$$

ifadeleri elde edilir.

Elde edilenler ifadeler (4.80) de yerlerine yazılırsa,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}[\|w_t\|^2 + k\|\Delta w\|^2 - a\|\nabla w\|^2] - \vec{\gamma} \int_\Omega \Delta v_t . w_t dx$$

$$+b \int_\Omega (|u_t|^p u_t - |v_t|^p v_t) w_t = 0 \tag{4.81}$$

olur.

(4.81) de $E_w(t) = \|w_t\|^2 + k\|\Delta w\|^2 - a\|\nabla w\|^2$ olmak üzere,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}E_w(t) - \vec{\gamma}\int_{\Omega} \Delta v_t . w_t dx + b\int_{\Omega} (|u_t|^p u_t - |v_t|^p v_t) w_t dx = 0 \tag{4.82}$$

yazılabilir.

$(|u_t|^p u_t - |v_t|^p v_t) w_t \geq 0$ olduğundan (4.82) den,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}E_w(t) - \vec{\gamma}\int_{\Omega} \Delta v_t . w_t dx \leq 0$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}E_w(t) \leq |\vec{\gamma}|\|\nabla v_t\|\|w_t\| \tag{4.83}$$

elde edilir.

(4.83) eşitsizliğinin sağ tarafında Cauchy eşitsizliği uygulanırsa,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}E_w(t) \leq |\vec{\gamma}|\|\nabla v_t\|\|w_t\| \leq \frac{|\gamma|^2}{2}\|\nabla v_t\|^2 + \frac{1}{2}\|w_t\|^2 \tag{4.84}$$

elde edilir. $\forall t > 0$ için,

$\|\nabla v_t\|^2 \leq D_2$ olduğundan,

$$\frac{d}{dt}E_w(t) \leq D_2|\gamma|^2 + E_w(t) \tag{4.85}$$

elde edilir.

(4.85) eşitsizliğinin çözümünden,

$$E_w(t) \leq D_2|\gamma|^2 e^t \tag{4.86}$$

ulaşılır. Buradan

$$\|w_t\|^2 + d_0\|\Delta w\|^2 \leq E_w(t) \leq D_2 e^t |\gamma|^2 \tag{4.87}$$

olmaktadır.

BÖLÜM 5. OSKOLKOV-BENJAMİN-BONA-MAHONY-BURGERS DENKLEMİNİN ÇÖZÜMLERİNİN KATSAYILARA SÜREKLİ BAĞIMLILIĞI

Bu bölümde sürekli bağımlılık ile ilgili literatür taraması yapılarak, daha önce çalışılmamış olan OBBMB denkleminin çözümlerinin katsayılara sürekli bağımlılığı incelenmiştir.

5.1. Giriş ve Problemin ifadesi

$$u_t - u_{xxt} - \alpha u_{xx} + \gamma u_x + \theta u u_x = 0\,, \tag{5.1}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \qquad x \in \Omega\,, \tag{5.2}$$

$$u(x,t) = 0, \qquad x \in \partial\Omega\,,\ t > 0\,, \tag{5.3}$$

başlangıç ve sınır değer problemini ele alalım. Burada $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sınırlı bir bölge ve α, γ, θ katsayıları pozitif sabitlerdir.

5.2. Ön Kestirimler

Teorem 5.2.1. $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ olsun. (5.1)- (5.3) probleminin çözümü olan u, aşağıdaki eşitsizlikleri sağlar:

$$\|u\|^2 \le D_1, \tag{5.4}$$

$$\|u_x\|^2 \le D_1, \tag{5.5}$$

Burada D_1 pozitif sabiti (5.1) denkleminin başlangıç verilerine ve parametrelerine bağlıdır.

İspat 5.2.1. (5.1), $L^2(\Omega)$ da u ile çarpılırsa,

$$\int_{\Omega} uu_t dx - \int_{\Omega} uu_{xxt} dx - \alpha \int_{\Omega} uu_{xx} dx + \gamma \int_{\Omega} uu_x dx + \theta \int_{\Omega} uuu_x dx = 0 \tag{5.6}$$

elde edilir.

(5.6) daki her bir integral ayrı ayrı hesaplanırsa,

$$\int_{\Omega} uu_t dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u\|^2,$$

$$-\int_{\Omega} uu_{xxt} dx = -\left[uu_{xt}|_{\partial\Omega} - \int_{\Omega} u_x u_{xt} dx\right] = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_x\|^2 ,$$

$$-\alpha \int_{\Omega} uu_{xx} dx = -\alpha\left[uu_x|_{\partial\Omega} - \int_{\Omega} u_x u_x dx\right] = \alpha\|u_x\|^2 ,$$

$$\gamma \int_{\Omega} uu_x dx = \frac{\gamma}{2}\int_{\Omega} \frac{d}{dx}u^2 dx = 0 ,$$

$$\int_{\Omega} uuu_x dx = \int_{\Omega} u^2 u_x dx = \frac{1}{3}\int_{\Omega} \frac{d}{dx}u^3 dx = 0$$

ifadeleri elde edilir.

Elde edilen ifadeler (5.6) da yerlerine yazılırsa,

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\|u\|^2 + \frac{1}{2}\|u_x\|^2\right] + \alpha\|u_x\|^2 = 0 \tag{5.7}$$

eşitliği elde edilir.

$E_1(t) = \frac{1}{2}\|u\|^2 + \frac{1}{2}\|u_x\|^2$ olmak üzere (5.7),

$$\frac{d}{dt}E_1(t) + \alpha\|u_x\|^2 = 0 \tag{5.8}$$

şeklinde yazılabilir.

$\alpha\|u_x\|^2 \geq 0$ olduğundan son eşitlikten,

$$\frac{d}{dt}E_1(t) \leq 0 \tag{5.9}$$

elde edilir.

(5.9) eşitsizliği $(0, t)$ aralığında integre edilirse,

$E_1(t) \leq E_1(0)$

$\frac{1}{2}\|u\|^2 + \frac{1}{2}\|u_x\|^2 \leq E_1(0)$

$\|u\|^2 + \|u_x\|^2 \leq E_1(0)$

olur.

Buradan, $\|u\|^2 \leq D_1$ ve $\|u_x\|^2 \leq D_1$ olup böylece (5.4) ve (5.5) kestirimleri elde edilmiş olur.

5.3. α Katsayısına Sürekli Bağımlılık

Bu bölümde (5.1)-(5.3) probleminin çözümlerinin α katsayısına sürekli bağımlılığı incelenmiştir.

u ve v sırasıyla aşağıdaki problemlerin çözümleri olsun.

$$u_t - u_{xxt} - \alpha_1 u_{xx} + \gamma u_x + \theta u u_x = 0\,, \tag{5.10}$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \qquad x \in \Omega, \tag{5.11}$$

$$u(x, t) = 0, \qquad x \in \partial\Omega,\ t > 0. \tag{5.12}$$

ve

$$v_t - v_{xxt} - \alpha_2 v_{xx} + \gamma v_x + \theta v v_x = 0\,, \tag{5.13}$$

$$v(x, 0) = u_0(x)\,, \qquad x \in \Omega, \tag{5.14}$$

$$v(x, t) = 0, \qquad x \in \partial\Omega,\ t > 0. \tag{5.15}$$

$u - v = w$, $\alpha_1 - \alpha_2 = \alpha$ olmak üzere (5.10)- (5.12) ve (5.13)- (5.15) problemlerinin farkını alalım. Burada $\alpha_1 > \alpha_2$ dir. O zaman

$$w_t - w_{xxt} - \alpha_1 u_{xx} + \alpha_2 v_{xx} + \gamma w_x + \theta(uu_x - vv_x) = 0, \tag{5.16}$$

$$w(x,0) = 0 \ , x \in \Omega, \tag{5.17}$$

$$w(x,t) = 0, \qquad x \in \partial\Omega,\ t > 0. \tag{5.18}$$

olur.

(5.16) ya $\alpha_1 v_{xx}$ terimi eklenip çıkarılırsa,

$$w_t - w_{xxt} + \alpha_1 v_{xx} - \alpha_1 u_{xx} - \alpha_1 v_{xx} + \alpha_2 v_{xx} + \gamma w_x + \theta(uu_x - vv_x) = 0$$

$$w_t - w_{xxt} - \alpha_1 w_{xx} - \alpha v_{xx} + \gamma w_x + \theta(uu_x - vv_x) = 0 \tag{5.19}$$

olur.

(5.19) da $uu_x - vv_x$ ifadesine vu_x terimi eklenip çıkarılırsa,

$$w_t - w_{xxt} - \alpha_1 w_{xx} - \alpha v_{xx} + \gamma w_x + \theta(wu_x + vw_x) = 0, \tag{5.20}$$

$$w(x,0) = 0\,, \qquad x \in \Omega, \tag{5.21}$$

$$w(x,t) = 0, \qquad x \in \partial\Omega,\ t > 0. \tag{5.22}$$

problemi elde edilir.

Teorem 5.3. (5.20)- (5.22) probleminin çözümü olan $w(x,t)$, aşağıdaki eşitsizliği sağlar:

$$E_2(t) \leq \frac{D_1}{2}\frac{e^{M_1 t}}{M_1}|\alpha|^2. \tag{5.23}$$

Burada, D_1 pozitif sabiti (5.1) denkleminin başlangıç verilerine ve parametrelerine bağlıdır.

İspat 5.3. (5.20), $L^2(\Omega)$ da w ile çarpılırsa,

$$\int_\Omega ww_t dx - \int_\Omega ww_{xxt} dx - \alpha_1 \int_\Omega ww_{xx} dx - \alpha \int_\Omega wv_{xx} dx + \gamma \int_\Omega ww_x dx$$

$$+\theta \int_\Omega (wu_x + vw_x) w dx = 0 \tag{5.24}$$

elde edilir.

(5.24) teki her bir integral ayrı ayrı hesaplanırsa,

$$\int_\Omega ww_t dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w\|^2 ,$$

$$-\int_\Omega ww_{xxt} dx = -\left[ww_{xt}|_{\partial\Omega} - \int_\Omega w_x w_{xt} dx \right] = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w_x\|^2,$$

$$-\alpha_1 \int_\Omega w_{xx} w dx = -\alpha_1 \left[ww_x|_{\partial\Omega} - \int_\Omega w_x w_x dx \right] = \alpha_1 \|w_x\|^2,$$

$$-\alpha \int_\Omega wv_{xx} dx = -\alpha \left[wv_x|_{\partial\Omega} - \int_\Omega v_x w_x dx \right] = \alpha \int_\Omega w_x v_x dx ,$$

$$\gamma \int_\Omega ww_x dx = \frac{\gamma}{2} \int_\Omega \frac{d}{dx} w^2 dx = 0$$

ifadeleri elde edilir.

Elde edilen ifadeler (5.24) te yerlerine yazılırsa,

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\|w\|^2 + \frac{1}{2}\|w_x\|^2 \right] + \alpha_1 \|w_x\|^2 + \alpha \int_\Omega w_x v_x dx + \theta \int_\Omega wu_x w dx$$

$$+\theta \int_\Omega vw_x w dx = 0 \tag{5.25}$$

eşitliği elde edilir.

$E_2(t) = \frac{1}{2}\|w\|^2 + \frac{1}{2}\|w_x\|^2$ olmak üzere (5.25),

$$\frac{d}{dt}E_2(t) + \alpha_1\|w_x\|^2 + \alpha\int_\Omega w_x v_x dx + \theta\int_\Omega w u_x w dx + \theta\int_\Omega v w_x w dx = 0 \qquad (5.26)$$

şeklinde yazılabilir.

(5.26) eşitliğinin sol tarafındaki 3. , 4. ve 5. terim eşitliğin sağ tarafına atılıp mutlak değeri alınırsa,

$$\frac{d}{dt}E_2(t) + \alpha_1\|w_x\|^2 \leq |\alpha|\int_\Omega |w_x||v_x| dx + |\theta|\int_\Omega |w||u_x||w| dx$$

$$+|\theta|\int_\Omega |v||w_x||w| dx \qquad (5.27)$$

eşitsizliği elde edilir.

(5.27) eşitsizliğinin sağ tarafındaki tüm terimlerde (5.4)-(5.5) kullanılarak Cauchy-Schwarz ve aritmetik-geometrik eşitsizlikleri uygulanırsa,

$$|\alpha|\int_\Omega |w_x||v_x| dx \leq |\alpha|\|v_x\|\|w_x\| \leq \frac{1}{2}\|w_x\|^2 + \frac{|\alpha|^2}{2}\|v_x\|^2,$$

$$|\theta|\int_\Omega |u_x||w|^2 dx \leq |\theta|\|u_x\|\|w\|^2 \leq |\theta|D_1\|w\|^2,$$

$$|\theta|\int_\Omega |v||w_x||w| dx \leq |\theta|\|v\|\|w\|\|w_x\| \leq |\theta|D_1\frac{\|w_x\|^2}{2} + |\theta|D_1\frac{\|w\|^2}{2},$$

eşitsizlikleri elde edilir.

Elde edilen eşitsizlikler (5.27) de yerlerine yazılırsa ve $\alpha_1\|w_x\|^2 \geq 0$ olduğundan ihmal edilirse,

$$\frac{d}{dt}E_2(t) \leq \frac{|\alpha|^2}{2}\|v_x\|^2 + M_1 E_2(t) \qquad (5.28)$$

olur. Burada,

$M_1 = maks\{\frac{|\theta|D_1+1}{2}, \frac{3|\theta|D_1}{2}\}$ dir.

(5.28) diferansiyel eşitsizliği $e^{-M_1 t}$ ile çarpılırsa,

$$e^{-M_1 t}\left[\frac{d}{dt}E_2(t) - M_1 E_2(t)\right] \leq \frac{|\alpha|^2}{2}\|v_x\|^2 e^{-M_1 t} \tag{5.29}$$

elde edilir.

(5.5) yardımıyla, (5.29) eşitsizliği

$$\frac{d}{dt}E_2(t)e^{-M_1 t} - M_1 E_2(t)e^{-M_1 t} \leq \frac{|\alpha|^2}{2}D_1\, e^{-M_1 t} \tag{5.30}$$

şeklinde yazılabilir.

Burada,

$$\frac{d}{dt}E_2(t)e^{-M_1 t} - M_1 E_2(t)e^{-M_1 t} = \frac{d}{dt}\left(e^{-M_1 t}E_2(t)\right)$$

olduğu görülür.

(5.30), son eşitsizlik kullanılarak $(0, t)$ üzerinde integre edilirse,

$$\int_0^t \frac{d}{ds}\left(e^{-M_1 s}E_2(s)\right)ds \leq \frac{|\alpha|^2}{2}\, D_1 \int_0^t e^{-M_1 s}ds$$

$$e^{-M_1 t}E_2(t) \leq \frac{|\alpha|^2}{2}D_1\frac{(1 - e^{-M_1 t})}{M_1}$$

$$E_2(t) \leq \frac{|\alpha|^2}{2}D_1\frac{(e^{M_1 t} - 1)}{M_1}$$

$$E_2(t) \leq \frac{D_1}{2M_1}|\alpha|^2 e^{M_1 t} \tag{5.31}$$

elde edilir.

(5.31) eşitsizliğinden; α_1 ve α_2 birbirine ne kadar çok yaklaşırsa, u ve v çözümlerinin birbirine o kadar yaklaştığı görülür. $\alpha_1 - \alpha_2 = 0$ olursa $w = u - v = 0$ olur. Böylece u ve v çözümlerinin α katsayısına sürekli bağımlılığı gösterilmiş olur.

5.4. γ Katsayısına Sürekli Bağımlılık

Bu bölümde (5.1)-(5.3) probleminin çözümlerinin γ katsayısına sürekli bağımlılığı incelenmiştir.

u ve v sırasıyla aşağıdaki problemlerin çözümleri olsun:

$$u_t - u_{xxt} - \alpha u_{xx} + \gamma_1 u_x + \theta u u_x = 0\,, \tag{5.32}$$

$$u(x,0) = u_0(x)\,, \tag{5.33}$$

$$u(x,t) = 0, \qquad x \in \partial\Omega,\ t > 0\,. \tag{5.34}$$

ve

$$v_t - v_{xxt} - \alpha v_{xx} + \gamma_2 v_x + \theta v v_x = 0\,, \tag{5.35}$$

$$v(x,0) = u_0(x)\,, \tag{5.36}$$

$$v(x,t) = 0, \qquad x \in \partial\Omega,\ t > 0\,. \tag{5.37}$$

$u - v = w$, $\gamma_1 - \gamma_2 = \gamma$ olacak şekilde (5.32)- (5.34) ve (5.35)- (5.37) problemlerinin farkını tanımlayalım. Burada $\gamma_1 > \gamma_2$ dir. O zaman

$$w_t - w_{xxt} - \alpha w_{xx} + \gamma_1 u_x - \gamma_2 v_x + \theta(u u_x - v v_x) = 0, \tag{5.38}$$

$$w(x,0) = 0\ ,\ x \in \Omega, \tag{5.39}$$

$$w(x,t) = 0, \qquad x \in \partial\Omega,\ t > 0\,. \tag{5.40}$$

olur.

(5.38) e $\gamma_2 u_x$ terimi eklenip çıkarılırsa,

$$w_t - w_{xxt} - \alpha w_{xx} + \gamma_1 u_x - \gamma_2 u_x + \gamma_2 u_x - \gamma_2 v_x + \theta(uu_x - vv_x) = 0$$

$$w_t - w_{xxt} - \alpha w_{xx} + \gamma u_x + \gamma_2 w_x + \theta(uu_x - vv_x) = 0 \qquad (5.41)$$

olur.

(5.41) de $uu_x - vv_x$ ifadesine vu_x terimi eklenip çıkarılırsa,

$$w_t - w_{xxt} - \alpha w_{xx} + \gamma u_x + \gamma_2 w_x + \theta(wu_x + vw_x) = 0, \qquad (5.42)$$

$$w(x,0) = 0 \ , \quad x \in \Omega \,, \qquad (5.43)$$

$$w(x,t) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \ t > 0. \qquad (5.44)$$

problemi elde edilir.

Teorem 5.4. (5.42)- (5.44) probleminin çözümü olan $w(x,t)$, aşağıdaki eşitsizliği sağlar:

$$E_2(t) \leq \frac{D_1}{2}\frac{e^{M_1 t}}{M_1}|\gamma|^2. \qquad (5.45)$$

Burada, D_1 pozitif sabiti (5.1) denkleminin başlangıç verilerine ve parametrelerine bağlıdır.

İspat 5.4. (5.42), $L^2(\Omega)$ da w ile çarpılırsa,

$$\int_\Omega ww_t dx - \int_\Omega ww_{xxt} dx - \alpha \int_\Omega ww_{xx} dx - \gamma \int_\Omega wu_x dx + \gamma_2 \int_\Omega ww_x dx$$

$$+\theta \int_\Omega (wu_x + vw_x) w dx = 0 \qquad (5.46)$$

elde edilir.

(5.46) daki her bir integral ayrı ayrı hesaplanırsa,

$$\int_{\Omega} ww_t dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w\|^2 ,$$

$$-\int_{\Omega} ww_{xxt} dx = -\left[ww_{xt}|_{\partial\Omega} - \int_{\Omega} w_x w_{xt} dx \right] = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w_x\|^2 ,$$

$$-\alpha\int_{\Omega} w_{xx} w dx = -\alpha\left[ww_x|_{\partial\Omega} - \int_{\Omega} w_x w_x dx \right] = \alpha\|w_x\|^2 ,$$

$$\gamma\int_{\Omega} wu_x dx = \gamma\left[wu|_{\partial\Omega} - \int_{\Omega} uw_x dx \right] = -\gamma\int_{\Omega} w_x u dx ,$$

$$\gamma_2\int_{\Omega} ww_x dx = \frac{\gamma_2}{2}\int_{\Omega} \frac{d}{dx} w^2 dx = 0$$

ifadeleri elde edilir.

Elde edilen ifadeler (5.46) da yerlerine yazılırsa,

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\|w\|^2 + \frac{1}{2}\|w_x\|^2 \right] + \alpha\|w_x\|^2 - \gamma\int_{\Omega} w_x u dx + \theta\int_{\Omega} wu_x w dx$$

$$+\theta\int_{\Omega} vw_x w dx = 0 \qquad (5.47)$$

eşitlği elde edilir.

$E_2(t) = \frac{1}{2}\|w\|^2 + \frac{1}{2}\|w_x\|^2$ olmak üzere (5.47),

$$\frac{d}{dt}E_2(t) + \alpha\|w_x\|^2 - \gamma\int_{\Omega} w_x u dx + \theta\int_{\Omega} wu_x w dx + \theta\int_{\Omega} vw_x w dx = 0 \qquad (5.48)$$

şeklinde yazılabilir.

(5.48) eşitliğinin sol tarafındaki 3. , 4. ve 5. terim eşitliğin sağ tarafına atılıp mutlak değeri alınırsa,

$$\frac{d}{dt}E_2(t) + \alpha\|w_x\|^2 \leq |\gamma| \int\limits_{\Omega} |w_x||u|dx + |\theta| \int\limits_{\Omega} |w||u_x||w|dx$$

$$+|\theta| \int\limits_{\Omega} |v||w_x||w|dx \tag{5.49}$$

eşitsizliği elde edilir.

(5.49) eşitsizliğinin sağ tarafındaki tüm terimlerde (5.4)-(5.5) kullanılarak Cauchy-Schwarz ve aritmetik-geometrik eşitsizlikleri uygulanırsa,

$$|\gamma| \int\limits_{\Omega} |w_x||u|dx \leq |\gamma|\|u\|\|w_x\| \leq \frac{1}{2}\|w_x\|^2 + \frac{|\gamma|^2}{2}\|u\|^2,$$

$$|\theta| \int\limits_{\Omega} |u_x||w|^2dx \leq |\theta|\|u_x\|\|w\|^2 \leq |\theta|D_1\|w\|^2 ,$$

$$|\theta| \int\limits_{\Omega} |v||w_x||w|dx \leq |\theta|\|v\|\|w\|\|w_x\| \leq |\theta|D_1\frac{\|w_x\|^2}{2} + |\theta|D_1\frac{\|w\|^2}{2}$$

eşitsizlikleri elde edilir.

Elde edilen eşitsizlikler (5.49) da yerlerine yazılırsa ve $\alpha\|w_x\|^2 \geq 0$ olduğundan ihmal edilirse,

$$\frac{d}{dt}E_2(t) \leq \frac{|\gamma|^2}{2}\|u\|^2 + M_1\, E_2(t) \tag{5.50}$$

olur. Burada,

$M_1 = maks\{\frac{|\theta|D_1+1}{2}, \frac{3|\theta|D_1}{2}\}$ dir.

(5.50) diferansiyel eşitsizliği $e^{-M_1 t}$ ile çarpılırsa,

$$e^{-M_1 t}\left[\frac{d}{dt}E_2(t) - M_1 E_2(t)\right] \leq \frac{|\gamma|^2}{2}\|u\|^2 e^{-M_1 t} \tag{5.51}$$

elde edilir.

(5.4) yardımıyla, (5.51) eşitsizliği

$$\frac{d}{dt}E_2(t)e^{-M_1 t} - M_1 E_2(t)e^{-M_1 t} \leq \frac{|\gamma|^2}{2} D_1\, e^{-M_1 t} \tag{5.52}$$

şeklinde yazılabilir.

Burada,

$$\frac{d}{dt}E_2(t)e^{-M_1 t} - M_1 E_2(t)e^{-M_1 t} = \frac{d}{dt}\left(e^{-M_1 t}E_2(t)\right)$$

olduğu görülür.

(5.52), son eşitsizlik kullanılarak $(0, t)$ üzerinde integre edilirse,

$$\int_0^t \frac{d}{ds}\left(e^{-M_1 s}E_2(s)\right)ds \;\leq\; \frac{|\gamma|^2}{2}\, D_1 \int_0^t e^{-M_1 s}ds$$

$$e^{-M_1 t}E_2(t) \leq \frac{|\gamma|^2}{2} D_1 \frac{(1 - e^{-M_1 t})}{M_1}$$

$$E_2(t) \leq \frac{|\gamma|^2}{2} D_1 \frac{(e^{M_1 t} - 1)}{M_1}$$

$$E_2(t) \leq \frac{D_1}{2M_1}|\gamma|^2 e^{M_1 t} \tag{5.53}$$

elde edilir.

(5.53) eşitsizliğinden; γ_1 ve γ_2 birbirine ne kadar çok yaklaşırsa, u ve v çözümlerinin birbirine o kadar yaklaştığı görülür. $\gamma_1 - \gamma_2 = 0$ olursa $w = u - v = 0$ olur. Böylece u ve v çözümlerinin γ katsayısına sürekli bağımlılığı gösterilmiş olur.

5.5. θ Katsayısı için Sürekli Bağımlılık

Bu bölümde (5.1)-(5.3) probleminin çözümlerinin θ katsayısına sürekli bağımlılığı incelenmiştir.

u ve v sırasıyla aşağıdaki problemlerin çözümleri olsun:

$$u_t - u_{xxt} - \alpha u_{xx} + \gamma u_x + \theta_1 u u_x = 0\,, \tag{5.54}$$

$$u(x,0) = u_0(x) \quad , \qquad x \in \Omega\,, \tag{5.55}$$

$$u(x,t) = 0, \qquad x \in \partial\Omega,\ t > 0\,, \tag{5.56}$$

ve

$$v_t - v_{xxt} - \alpha v_{xx} + \gamma v_x + \theta_2 v v_x = 0\,, \tag{5.57}$$

$$v(x,0) = u_0(x) \quad , \quad x \in \Omega\,, \tag{5.58}$$

$$v(x,t) = 0, \qquad x \in \partial\Omega,\ t > 0\,. \tag{5.59}$$

$u - v = w$, $\theta_1 - \theta_2 = \theta$ olacak şekilde (5.54)- (5.56) ve (5.57)- (5.59) problemlerinin farkını tanımlayalım. Burada $\theta_1 > \theta_2$dir. O zaman

$$w_t - w_{xxt} - \alpha w_{xx} + \gamma w_x + \theta_1 u u_x - \theta_2 v v_x = 0 \tag{5.60}$$

$$w(x,0) = 0 \qquad\qquad x \in \Omega \tag{5.61}$$

$$w(x,t) = 0, \qquad x \in \partial\Omega, t > 0 \tag{5.62}$$

olur.

(5.62) de $\theta_2 u u_x$ ve $\theta_2 v u_x$ terimleri eklenip çıkarılırsa,

$$w_t - w_{xxt} - \alpha w_{xx} + \gamma w_x + \theta u u_x + \theta_2 (w u_x + v w_x) = 0\,, \tag{5.63}$$

$$w(x,0) = 0\,, \qquad x \in \Omega\,, \tag{5.64}$$

$$w(x,t) = 0, \qquad x \in \partial\Omega,\ t > 0\,. \tag{5.65}$$

problemi elde edilir.

Teorem 5.5. (5.63)- (5.65) probleminin çözümü olan $w(x,t)$, aşağıdaki eşitsizliği sağlar.

$$E_2(t) \leq \frac{D_1}{2}\frac{e^{M_2 t}}{M_2}|\theta|^2. \tag{5.66}$$

Burada D_1 pozitif sabiti (5.1) denkleminin başlangıç verilerine ve parametrelerine bağlıdır.

İspat 5.5. (5.63), $L^2(\Omega)$ da w ile çarpılırsa,

$$\int_\Omega ww_t dx - \int_\Omega ww_{xxt} dx - \alpha\int_\Omega ww_{xx} dx - \gamma\int_\Omega ww_x dx + \theta\int_\Omega wuu_x dx$$

$$+\theta_2\int_\Omega (wu_x + vw_x)w dx = 0 \tag{5.67}$$

elde edilir.

(5.67) deki her bir integral ayrı ayrı hesaplanırsa,

$$\int_\Omega ww_t dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w\|^2,$$

$$-\int_\Omega ww_{xxt} dx = -\left[ww_{xt}|_{\partial\Omega} - \int_\Omega w_x w_{xt} dx\right] = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w_x\|^2,$$

$$-\alpha\int_\Omega w_{xx} w dx = -\alpha\left[ww_x|_{\partial\Omega} - \int_\Omega w_x w_x dx\right] = \alpha\|w_x\|^2 ,$$

$$-\gamma\int_\Omega ww_x dx = -\frac{\gamma}{2}\int_\Omega \frac{d}{dx}w^2 dx = 0$$

ifadeleri elde edilir.

Elde edilen ifadeler (5.67) de yerlerine yazılırsa,

$$\frac{d}{dt}\left[\ \frac{1}{2}\|w\|^2+\frac{1}{2}\|w_x\|^2\right]+\alpha\|w_x\|^2+\theta\int_{\Omega} uu_xwdx+\theta_2\int_{\Omega} u_xwwdx$$

$$+\theta_2\int_{\Omega} vw_xwdx=0 \tag{5.68}$$

eşitliği elde edilir.

$E_2(t)=\frac{1}{2}\|w\|^2+\frac{1}{2}\|w_x\|^2$ olmak üzere (5.68),

$$\frac{d}{dt}E_2(t)+\alpha\|w_x\|^2+\theta\int_{\Omega} uu_xwdx+\theta_2\int_{\Omega} u_xwwdx+\theta_2\int_{\Omega} vw_xwdx=0 \tag{5.69}$$

şeklinde yazılabilir.

(5.69) eşitliğinin sol tarafındaki 3. , 4. ve 5. terim eşitliğin sağ tarafına atılıp mutlak değeri alınırsa,

$$\frac{d}{dt}E_2(t)+\alpha\|w_x\|^2\le|\theta|\int_{\Omega}|u||u_x||w|dx+|\theta_2|\int_{\Omega}|w||u_x||w|dx$$

$$+|\theta_2|\int_{\Omega}|v||w_x||w|dx \tag{5.70}$$

eşitsizliği elde edilir.

(5.70) eşitsizliğinin sağ tarafındaki tüm terimlerde (5.4)-(5.5) kullanılarak Cauchy-Schwarz ve aritmetik-geometrik eşitsizlikleri uygulanırsa,

$$|\theta|\int_{\Omega}|u||u_x||w|dx\le|\theta|D_1\|u_x\|\|w\|\le\frac{{D_1}^2}{2}\|w\|^2+\frac{|\theta|^2}{2}\|u_x\|^2\,,$$

$$|\theta_2|\int_{\Omega}|u_x||w|^2dx\le|\theta_2|\|u_x\|\|w\|^2\le|\theta_2|D_1\|w\|^2,$$

$$|\theta_2|\int_{\Omega}|v||w_x||w|dx\le|\theta_2|\|v\|\|w_x\|\|w\|\le|\theta_2|D_1\frac{\|w_x\|^2}{2}+|\theta_2|D_1\frac{\|w\|^2}{2}$$

eşitsizlikleri elde edilir.

Elde edilen eşitsizlikler (5.70)de yerlerine yazılırsa ve $\alpha\|w_x\|^2 \geq 0$ olduğundan ihmal edilirse,

$$\frac{d}{dt}E_2(t) \leq |\theta|^2 D_1 \frac{1}{2} + M_2\, E_2(t) \tag{5.71}$$

olur. Burada,

$M_2 = maks\{\frac{|\theta_2|D_1}{2}, \frac{3|\theta_2|D_1 + {D_1}^2}{2}\}$ dir.

(5.71) diferansiyel eşitsizliği $e^{-M_2 t}$ ile çarpılırsa,

$$e^{-M_2 t}\left[\frac{d}{dt}E_2(t) - M_2 E_2(t)\right] \leq \frac{D_1}{2}|\theta|^2 e^{-M_2 t} \tag{5.72}$$

elde edilir.

(5.72) eşitsizliği $(0, t)$ üzerinde integre edilirse,

$$\int_0^t \frac{d}{ds}\left(e^{-M_2 s} E_2(s)\right) ds \leq \frac{|\theta|^2 D_1}{2} \int_0^t e^{-M_2 s} ds$$

$$e^{-M_2 t} E_2(t) \leq \frac{|\theta|^2 D_1}{2} \frac{(1 - e^{-M_2 t})}{M_2}$$

$$E_2(t) \leq \frac{|\theta|^2 D_1}{2} \frac{(e^{M_2 t} - 1)}{M_2}$$

$$E_2(t) \leq \frac{|\theta|^2 D_1}{2M_2} e^{M_2 t} \tag{5.73}$$

elde edilir.

(5.73) eşitsizliğinden; θ_1 ve θ_2 birbirine ne kadar çok yaklaşırsa, u ve v çözümlerinin birbirine o kadar yaklaştığı görülür. $\theta_1 - \theta_2 = 0$ olursa $w = u - v = 0$ olur. Böylece u ve v çözümlerinin θ katsayısına sürekli bağımlılığı gösterilmiş olur.

BÖLÜM 6. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Yapılan bu çalışmada OBBMB denkleminin çözümlerinin katsayılara bağımlılığı çeşitli makaleler ele alınarak incelenmiştir. Her bir bölümde katsayılara sürekli bağımlılık incelenmiş ve son bölümde özgün bir çalışma olarak OBBMB denkleminin çözümlerinin katsayılara sürekli bağımlılığı üzerine tez çalışması yapılmıştır.

Aynı şekilde kısmi türevli denklemlerin yapısal kararlılığını inceleyen benzer çalışmalar yapılabilir.

KAYNAKLAR

[1] Hirsch, M.W., Smale, S., Differential equations, Dynamical Systems and Linear Algebra, Academic Press, San Diego, 1974.

[2] Straughan, B., Stability and Wave Motion in Porous Media, in: Applied Mathematical, Sciences, Springer, 2008.

[3] Ames, K.A., Straughan, B., Non-Standard and Improperly Posed problems, in: Mathematics in Science and Engineering Series, vol. 194, Academic Press, San Diego, 1997.

[4] Ames, K.A., Payne L.E., On stabilizing against modelling errors in a penetrative convection problem for a porous medium, Math. Models. Methods. Appl. Sci. 4: 733-740, 1994.

[5] Payne L.E., Straughan B., Stability in the initial-time geometry problem for the Brinkman and Darcy equations of flow in a porous media, J. Math. Pures Appl. 75: 225-271, 1996.

[6] Payne L.E., Straughan B., Structural stability for the Darcy equations of flow in porous media" , Proc. Roy Soc. London A 454: 1691-1698, 1998.

[7] Payne L.E., Straughan B., Analysis of the boundary condition at the interface between a viscous fluid an porous medium and related modelling questions, J. Math. Pures Appl. 77 : 317-354, 1998.

[8] Payne L.E., Straughan B., Convergence and continuous dependence for the Brinkman-Forchheimer equations, Stud. Appl. Math. 102 : 419-439, 1999.

[9] Çelebi, A.O., Kalantarov, V.K., Uğurlu, D., On continuous dependence on coefficients of the Brinkman-Forchheimer equations, Appl. Math. Lett. 19 (8), 801-807, 2006.

[10] Lin, C., Payne, L.E., Continuous dependence on the Soret coefficient for doubly diffusive convection in Darcy flow, J. Math. Anal. Appl. 342, 311-325, 2008.

[11] Liu, Y., Convergence and continuous dependence for the Brinkman-Forchheimer equations, Math. Comput. Modelling 49 (7-8), 1401-1415, 2009.

[12] Knops, R.J., Quintanilla, R., Continuous dependence on initial geometry in linear elastodynamics on a half-cylinder, Internat. J. Engrg. Sci. 47 (11-12), 1265-1273, 2009.

[13] Franchi, F., Straughan, B., Continuous dependence and decay for the Forchheimer equations, Proceedings of the Royal Society of London, Series A, 459: 3195-3202, 2003.

[14] Korteweg, D.J., Vries, G., On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, Phifos. Mag. 39, 422-443, 1895.

[15] Peregrine, D.H., Calculations of the development of an undular bore, J. Fluid Mech. 25 (2), 321–330, 1966.

[16] Benjamin, T.B., Bona, J.L., Mahony, J.J., Model equations for long waves in nonlinear dispersive systems, Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A, ISSN: 0080-4614, 272 (1220), 47–78, 1972.

[17] Amick, C., Bona, J., Schonbek, M., Decay of solutions of some nonlinear wave equations, J. Differential Equations, ISSN: 0022-0396, 81 (1), 1–49, 1989.

[18] Naumkin, P.I., Large-time asymptotic behaviour of a step for the Benjamin-Bona–Mahony–Burgers equation, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A, ISSN: 1473-7124, 126, 1–18, 1996.

[19] Al’shin, A.B., Korpusov, M.O., Sveshnikov A.G., Blow up in nonlinear sobolev type equations, De Gruyter, Germany, 2011.

[20] Korpusov, M.O., Sveshnikov, A.G., Blow-up solutions of strongly nonlinear equations of pseudoparabolic type, J.Math.Sci. 148 (1), 1-142, 2008.

[21] Dubey, S.A., Numerical solution for nonlocal Sobolev-type differential equations, Electron J. Differ.Eq.Conf. 19, 75-83, 2010.

[22] Kalkina, E.I., Naumkin, P.I., Shishmarey, I.A., The Cauchy Problem for an equation of Sobolev-type with power non-linearity, Izv.Math. 69 (1), 59-111, 2005.

[23] Karch, G., Asymtotic behaviour of solutions to some pseudoparabolic equations, Math.Methods Appl.Sci.20,271-289, 1997.

[24] Oskolkov, A,P., Nonlocal problems for one class of nonlinear operator equations that arise in the theory of Sobolev-type equations. Zap. Nauchn. Semin. POMI 198, 31-48, 1991.

[25] Oskolkov, AP: On stability theory for solutions of semilinear dissipative equations of the Sobolev type. Zap. Nauchn. Semin. POMI 200, 139-148, 1992.

[26] Camassa, R., Holm, D.D., An integrable shallow water equation with peaked solitons, Phys. Rev. Lett. 71(11), 1661-1664, 1993.

[27] Camassa, R., Holm, D.D., Hyman, J., A new integrable shallow water equation, Adv. Appl. Mech. 31, 1-33, 1994.

[28] Parkes, E.J., Vakhnenko, V.O., Explicit solutions of the Camassa-Holm equation, Chaos Solitons Fractals 26(5), 1309-1316, 2005.

[29] Wazwaz, A.M., New solitary wave solutions to the modified forms of Degasperis-Procesi and Camassa-Holm equations. Appl. Math. Comput. 186, 130-141, 2007.

[30] Johnson, R.S., Camassa-Holm, Korteweg-de Vries and related models for water waves, J. Fluid Mech. 455, 63, 2002.

[31] Johnson, R.S., The classical problem of water waves: a reservoir of integrable and nearly-integrable equations. J. Nonlinear Math. Phys. 10(Suppl. 1) 72 (2003), 1993.

[32] Dinlemez, Ü., Structural Stability for a Class of Nonlinear Wave Equation, G. U. Journal of Science, 22(2):83-87, 2009.

[33] Çelebi, A.O., Gür, Ş., Kalantarov, V.K., Structural Stability and Decay Estimate for Marine Riser Equation, Mathematical and Computer Modelling, 54: 3182-3188, 2011.

[34] Pişkin, E., Sobolev Uzayları, 1. Baskı, Seçkin Yayıncılık, pp. 69, 97, 2007.

[35] Soykan, Y., Fonksiyonel Analiz, 1. Baskı, Nobel Yayın Dağıtım, 2008.

[36] Musayev, B., Alp, M., Fonksiyonel Analiz, 1. Baskı, Balcı Yayınları, 2000.

[37] Adams, R. A., Sobolev Spaces, Academic Press, New York, 1975.

[38] Evans, L.C., Partial Diferential Equations, Graduate Studies in Mathematics, vol. 19, AMS, Rhode Island, 1998.

ÖZGEÇMİŞ

Saadet CİCİKÇİOL, 27.07.1989'da İzmir'de doğdu. İlk, orta ve lise eğitimini İzmir'de tamamladı. 2007 yılında Emlakbank Süleyman Demirel Lisesi'nden mezun oldu. 2008 yılında başladığı Dokuz Eylül Üniversitesi Ortaöğretim Matematik Öğretmenliği Bölümü'nü 2013 yılında bitirdi. 2013 yılında Milli Eğitim Bakanlığı'nda öğretmenliğe başladı. 2014 yılında Sakarya Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Uygulamalı Matematik Bölümü'nde yüksek lisans eğitimine başladı. 2013-2015 yılları arasında Sakarya'nın Geyve ilçesinde öğretmenlik yaptı. 2015-2017 yılları arasında Kocaeli'nin Karamürsel ilçesinde öğretmenlik yaptı. 2017 yılından beri Kocaeli'nin Gölcük ilçesinde öğretmenlik yapmaktadır.