T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BENJAMİN-BONA-MAHONY DENKLEMLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Zeynep Sümeyye ÇELİK

Enstitü Anabilim Dalı	**:**	**MATEMATİK**
Enstitü Bilim Dalı	**:**	**UYGULAMALI MATEMATİK**
Tez Danışmanı	**:**	**Prof. Dr. Şevket GÜR**

Temmuz 2018

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BENJAMİN-BONA-MAHONY DENKLEMLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Zeynep Sümeyye ÇELİK

Enstitü Anabilim Dalı	**:**	**MATEMATİK**
Enstitü Bilim Dalı	**:**	**UYGULAMALI MATEMATİK**

Bu tez 09/07/2018 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği ile kabul edilmiştir.

Dr. Öğr. Üyesi	**Doç. Dr.**	**Prof. Dr.**
Yasemin BAŞCI	**Metin YAMAN**	**Şevket GÜR**
Jüri Başkanı	**Üye**	**Üye**

BEYAN

Tez içindeki tüm verilerin akademik kurallar çerçevesinde tarafımdan elde edildiğini, görsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçların akademik ve etik kurallara uygun şekilde sunulduğunu, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezde yer alan verilerin bu üniversite veya başka bir üniversitede herhangi bir tez çalışmasında kullanılmadığını beyan ederim.

Zeynep Sümeyye ÇELİK

09.07.2018

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimim boyunca değerli bilgi ve deneyimlerinden yararlandığım, her konuda bilgi ve desteğini almaktan çekinmediğim, araştırmanın planlanmasından yazılmasına kadar tüm aşamalarında yardımlarını esirgemeyen, teşvik eden, aynı titizlikte beni yönlendiren ve bana her türlü olanağı sağlayan, Sakarya Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Anabilim Dalı öğretim üyesi değerli Danışman Hocam Prof. Dr. Şevket GÜR'e ve bu günlere gelmemde büyük pay sahibi olan, her türlü desteği veren değerli aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

Ω	: R^n ' de düzgün sınıra sahip bölge
$H^1(\Omega), H_0^1(\Omega)$	: Sobolev uzayı
D_+, D_-, D_0	: Diferansiyel Fark Operatörleri
(u,v)	: $\int_\Omega uvdx$
$\|u\|_{L^p(\Omega)}$	: $\|.\|_p$
$\|.\|$	: $\|.\|_2$

ÖZET

Anahtar kelimeler: BBM denklemi, varlık ve teklik, BBMB denklemi, sürekli bağımlılık

Bu tez 6 bölümden oluşmaktadır. Tezin birinci bölümünde, Benjamin-Bona-Mahony denklemleri ile ilgili yapılan geçmiş çalışmalar hakkında bilgi verilmiştir. İkinci bölümde, bu tezde kullanılan temel tanım ve kavramlara yer verilmiştir. Üçüncü bölümde, Bo Lu, Guanxiu Yuan ve Jinku Yang tarafından yazılan "A Class of Exact Solutions of the BBM Equations" isimli makale incelenmiştir. Dördüncü bölümde, L. A. Medeiros ve G. Perla Menzala tarafından yazılan "Existence and Uniqueness for Periodic Solutions of the Benjamin-Bona-Mahony Equation" isimli makale incelenmiştir. Beşinci bölümde ise daha önce çalışılmamış olan Benjamin-Bona-Mahony-Burger denkleminin çözümlerinin katsayılara sürekli bağımlılığı incelenmiştir. Altıncı bölümde ise tez çalışmasından elde edilen sonuçlar belirtilmiştir. Çalışma literatürde bilinen sonuçlar araştırılarak oluşturulmuştur.

BENJAMIN-BONA-MAHONY EQUATIONS

SUMMARY

Keywords: BBM Equation, Existence and Uniqueness Theorem, BBMB Equation, Continuous Dependence

This thesis consists of six chapters. In the first chapter, information about past studies on Benjamin-Bona-Mahony equations is given. In the second chapter, the basic definitions and concepts used in this thesis are given. In the third chapter, the article entitled “A Class of Exact Solutions of the BBM Equations” written by Bo Lu, Guanxiu Yuan and Jinku Yang is investigated. In the fourth chapter, the article entitled “Existence and Uniqueness for Periodic Solutions of the Benjamin-Bona-Mahony Equation’’ written by L. A. Medeiros and G. Perla Menzala is examined. In the fifth chapter, continuous dependence on the coefficients of the Benjamin-Bona-Mahony-Burger equation solutions which has not been studied before is examined. Finally in the sixth of chapter, the results obtained from the thesis are stated. This work is performed by investigating the results known in literature.

BÖLÜM 1. GİRİŞ

Doğanın temel kanunlarının matematiksel olarak ifade edilebilmesi için öne sürülen modeller çoğunlukla lineer değildir. Bu yüzden oluşturulan bu modellerin pek çoğu lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemlere dayanmaktadır.

Son yıllarda akışkanlar mekaniği, katı hal fiziği, plazma fiziği, kimyasal fizik, fiber optik ve jeokimya gibi çeşitli alanlarda birçok fiziksel olayı modellemek için lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemler kullanılmıştır. Bu yüzden bu denklemlerin çözümlerinin bulunması önemlidir [1].

1830'lu yıllardan itibaren birçok matematikçi ve fizikçi lineer olmayan dalga kuramının bir parçası olan sığ su rejimlerindeki tekil dalgaların hareketlerine matematiksel modeller oluşturabilmek için çalışmalar yapmışlardır. Bu çalışmalarda, tekil dalgaların yayılımını belirten ve lineer olmayan denklemlerin başlangıç değer problemleri ele alınmış ve bu problemlerin çözümlerinin varlığı ve tekliği incelenmiştir. 1834 yılında İskoç mühendis John Scott Russell, Edinburgh yakınındaki bir kanalda ilerleyen büyük bir su kitlesi olarak tanımladığı bir tekil dalganın, şeklinde ve yüksekliğinde görülebilir bir değişme olmaksızın 2 km kadar yol aldığını gözlemlemiştir. John Scott Russell, bu gözleminden yola çıkarak tekil dalgalar üzerine yaptığı çalışmalardan elde ettiği tüm sonuçları 10 yıl sonra İngiliz Bilim Gelişme Kurumu'na rapor olarak sunmuştur [2]. Russell raporunda soliton dalgaların en önemli özelliğini "Sığ su rejimlerinde suyun derinliğine oranla daha büyük dalga yüksekliğine sahip su dalgaları oluşmaktadır. Ayrıca bu dalgalar şekil ve hız özelliklerini kaybetmeden uzun mesafeleri katetmektedir." şeklinde ifade etmiştir [2]. Bu çalışmanın ardından birçok fizikçi ve matematikçi sığ su rejimlerinde ortaya çıkan su dalgalarının durumunu anlayabilmek için çeşitli matematiksel modeller öne sürmüşlerdir. John Scott Russell'ın bu gözlemi teorik olarak 1895 yılında Hollandalı iki matematikçi D. J. Korteweg ve G. de Vries tarafından çalışılmıştır. D. J. Korteweg ve G. de Vries bu olayın matematiksel teorisi üzerinde çalışarak suyun sığ bir tabakasının serbest yüzeyinde iki boyutlu, tek yönlü yayılan su dalgalarının hareketini modelleyen ve lineer olmayan bir kısmi türevli diferansiyel denklem elde etmişlerdir. Böylece Korteweg de Vries (KdV) denklemi, sığ bir kanalın yüzeyindeki su dalgalarının tek yönlü yayılımını ifade etmek için matematiksel bir model olarak ortaya çıkmıştır [3].

KdV denklemi,

$$u_t + u_x + uu_x + u_{xxx} = 0, \qquad t > 0, \quad x \in \mathbb{R} \tag{1.1}$$

şeklinde tanımlanmış lineer olmayan kısmi türevli bir diferansiyel denklemdir. Burada $u(x,t)$ fonksiyonu, x konumunda ve t zamanındaki dalganın yüksekliğini ifade etmektedir [3].

KdV denkleminin c sabit hızı ile hareket eden ve dalga formunu koruyan bir özel çözümü

$$u(x,t) = f(X) = f(x - ct - \delta) \tag{1.2}$$

şeklinde bulunmuştur. Burada δ dalganın fazıdır ve keyfi bir sabit sayıdır. (1.2) dönüşümü sonucunda KdV denkleminin özel bir çözümü

$$u(x,t) = \frac{1}{2} c\, sech^2 \left[\frac{\sqrt{c}}{2}(x - ct - \delta)\right] \tag{1.3}$$

şeklinde elde edilmiştir [4].

N. J. Zabusky ve M. D. Kruskal, tekil dalgaların özelliklerini anlayabilmek için KdV denklemi üzerinde kapsamlı çalışmalar yaparak denklemin analitik çözümlerini elde etmişler ve bu çözümlerin davranışları hakkında önemli açıklamalarda bulunmuşlardır.

Bu çalışmalar esnasında çarpıştıktan sonra hızlarını ve şekillerini (dalga formunu) koruyan tekil dalgalar tespit etmişlerdir. Böylece N. J. Zabusky ve M. D. Kruskal, sabit bir hızla hareket ederken etkileşime giren ancak dalga formunu koruyarak kendi kendini güçlendiren tekil dalgalara "soliton", dalga formu $f(X)$ ile gösterilmek üzere (1.1) denkleminin dalga formunu koruyan (1.3) çözümlerine de "soliton çözümler" adını vermişlerdir [4].

Alternatif bir model oluşturmak için 1972'de B. Benjamin, J. L. Bona ve J. J. Mahony tarafından bir çalışma yapılmıştır. Bu çalışma sonucunda KdV denklemi geliştirilerek Benjamin-Bona-Mahony (BBM) ya da bir diğer adıyla düzenli uzun dalga denklemi olarak isimlendirilen yeni bir denklem oluşturulmuştur. Ayrıca bu denklemin çözümünün tekliği ve kararlılığı ispatlanmıştır [5].

BBM denklemi

$$u_t + u_x + uu_x - u_{xxt} = 0, \qquad t > 0, \quad x \in \mathbb{R} \tag{1.4}$$

şeklindedir ve bu denklem de

$$u(x,t) = 3\frac{c^2}{1-c^2}sech^2\left(\frac{1}{2}cx - \frac{ct}{1-c^2} + \delta\right) \tag{1.5}$$

şeklinde bir özel çözüme sahiptir [5].

BBM denklemi ilk olarak 1966 yılında Peregrine'in gel-git dalgaları çalışmasında nümerik olarak çözülmüştür [6].

BBM denklemi sığ su dalgaları için KdV denkleminin düzenlenmiş bir versiyonudur. Sığ su dalgalarına ek olarak, BBM denklemi plazmadaki drift dalgalarının veya dönen akışkanlardaki Rossby dalgalarının çalışmalarına da uygulanabilir. Bazı şartlar altında, bir-boyutlu iletken dalgaların modelini de sağlar [7].

1972’den bu yana çeşitli genelleştirilmiş BBM denklemlerinin periyodik sınır değer problemleri, başlangıç değer problemleri ve başlangıç sınır değer problemleri üzerine çalışılmıştır. Diğer yandan ise pek çok araştırmacı çeşitli genelleştirilmiş BBM denklemlerinin başlangıç değer problemlerinin çözümlerinin uzun süreli davranışları üzerine çalışmıştır [8].

Pseudoparabolik denklemler matematiğin ve fiziğin pek çok alanında ortaya çıkmaktadır. Çatlak kayalarda sıvı akışı, ikinci dereceden akışkan denklemlerinde kesme, termodinamik ve küçük genlikli uzun dalgaların yayılımı gibi pek çok alanda kullanılmaktadır. Pseudoparabolik denklemlerin önemli bir özel durumu ise bu tezde çalışılacak olan Benjamin-Bona-Mahony-Burgers (BBMB) denklemidir.

BBMB Denklemi

$$u_t - u_{xxt} - \alpha u_{xx} + \gamma u_x + f(u) = 0 \tag{1.6}$$

şeklindedir. Burada $u(x,t)$ yatay yönde sıvı akış hızını, α pozitif bir sabiti, γ herhangi bir sabiti $f(u)$ ise C^2 de lineer olmayan bir fonksiyonu belirtir [9].

Literatür incelemesi yapıldığında, 1995 den bu yana BBMB denklemleri ile ilgili pek çok çalışma yapılmıştır. Özellikle 2010’larda BBMB denklemlerinin tam çözümleri üzerine Ö. F. Gözükızıl ve Ş. Akçağıl [9], V. Kumar, R.K. Gupta, R. Jiwari [1], M. S. Bruzón ve M.L. Gandarias [10]; BBMB denklemlerinin korunum yasaları üzerine M.S. Bruzón, T. M. Garrido ve R. de la Rosa [11], M. S. Bruzón ve M.L. Gandarias [12], B. Muatjetjeja ve C. M. Khalique [13] tarafından kapsamlı çalışmalar yapılmıştır.

BÖLÜM 2. TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR

2.1. Temel Tanımlar

Tanım ($L^p(\Omega)$ Uzayı)

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ bir bölge ve $p > 0$ bir reel sayı olmak üzere, Ω üzerinde

$$\int_\Omega |u(x)|^p \, dx < \infty$$

koşulunu sağlayan u ölçülebilir fonksiyonlarından oluşan uzaya $L^p(\Omega)$ uzayı adı verilir. $1 \le p < \infty$ için $L^p(\Omega)$ bir normlu lineer uzaydır ve bu uzay üzerindeki norm

$$\|u\|_p = \left(\int_\Omega |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \|u\|_p^p = \int_\Omega |u(x)|^p dx$$

biçiminde tanımlanır [16].

Tanım (Banach Uzayı)

Bir $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzaydaki her Cauchy dizisi, X içinde bir limite yakınsıyorsa bu $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzayına tam normlu uzay veya Banach uzayı adı verilir. Ya da başka bir deyişle bir normlu vektör uzayı, normdan indirgenen metrik ile tam ise bir Banach uzayı olarak adlandırılır [17].

Tanım (İç Çarpım Uzayı ve Hilbert Uzayı)

İç çarpım uzayı, üzerinde bir iç çarpım tanımlanmış vektör uzayıdır. Bir Hilbert uzayı ise, üzerindeki iç çarpımla tanımlanmış metriğe göre tam olan bir iç çarpım uzayıdır.

$L^2(\Omega)$ Hilbert uzayıdır ve üzerindeki iç çarpım

$$(u, v) = \int_{\Omega} u(x)\overline{v(x)}dx, \quad \forall u, v \in L_2(\Omega)$$

biçiminde tanımlanır. Burada $\bar{v}$, v nin kompleks eşleniğidir [16].

Tanım (Lipschitz Süreklilik)

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ de bir $f(x)$ fonksiyonu tanımlanmış olsun. Eğer $x, y \in \Omega$ için,

$$|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde bir $k > 0$ sabiti varsa $f(x)$ fonksiyonuna Ω da Lipschitz süreklidir denir [18].

2.2. İlgili Teoremler

Teorem (Arzelá-Ascoli)

$\Omega, \mathbb{R}^n$ de sınırlı bir bölge olsun. $K \subset C(\overline{\Omega})$, $C(\overline{\Omega})$ de prekompakttır ve aşağıdaki iki koşul sağlanır.

(i) $\forall \phi \in K$ ve $x \in \Omega$ için $|\phi(x)| \leq M$ olacak şekilde bir M sabiti vardır.

(ii) $\forall \varepsilon > 0$, $\phi \in K$, x,y $\in \Omega$ için $|x - y| < \delta$ iken $|\phi(x) - \phi(y)| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ vardır [19].

2.3. Kullanılan Eşitsizlikler

Cauchy-Schwarz Eşitsizliği

X bir iç çarpım uzayı ve $x, y \in X$ olsun. Bu durumda

$$|(x,y)|^2 \leq (x,x)(y,y)$$

eşitsizliği sağlanır. X bir iç çarpım uzayı olmak üzere

$$\|x\| = (x,x)^{\frac{1}{2}}$$

ile tanımlı olan $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu X üzerinde bir norm belirttiğinden Cauchy-Schwarz eşitsizliği

$$|(x,y)| \leq \|x\|.\|y\|$$

olarakta yazılabilir [20].

Aritmetik-Geometrik Ortalama Eşitsizliği

$x, y \in \mathbb{R}^n$olmak üzere $0 \leq (x-y)^2$ ile

$$xy \leq \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}$$

eşitsizliği yazılabilir.

Gronwall Eşitsizliği

$u(t)$, $[0,T]$ aralığında negatif olmayan mutlak sürekli bir fonksiyon, $\phi(t)$ ve $\psi(t)$ negatif olmayan $[0,T]$ üzerinde toplanabilir fonksiyonlar olmak üzere,

$$u'(t) \leq \phi(t)u(t) + \psi(t)$$

eşitsizliği sağlansın. Bu durumda $0 \leq t \leq T$ için

$$u(t) \leq C\, e^{\int_0^t \phi(\tau)d\tau}\left(u(0) + \int_0^t \psi(\tau)d\tau\right)$$

yazılabilir [18].

BÖLÜM 3. BENJAMİN-BONA-MAHONY DENKLEMLERİNİN TAM ÇÖZÜMLERİNİN BİR SINIFI

Bu bölümde Bo Lu, Guanxiu Yuan ve Jinku Yang tarafından yazılan "A class of exact solutions of the BBM equations" isimli çalışma ele alınmış ve detaylı bir şekilde incelenmiştir [14].

3.1. BBM Denkleminin Çözümü

$$u_t + u_x + uu_x - \beta u_{xxt} = 0 \tag{3.1}$$

denklemini ele alalım.

a ve b sabitler, ξ_0 keyfi bir sabit olmak üzere $\xi = ax + bt + \xi_0$ dönüşümünü (3.1) denklemine uygulayalım. Böylece

$$u_t = \frac{du}{d\xi}\frac{\partial \xi}{\partial t} = b\frac{du}{d\xi}$$

$$u_x = \frac{du}{d\xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} = a\frac{du}{d\xi}$$

türevleri yardımıyla, $u' = \frac{du}{d\xi}$ olmak üzere

$$(a+b)u' + auu' - \beta a^2 b u''' = 0 \tag{3.2}$$

denklemi elde edilir.

(3.2) denklemi $(0, \xi)$ de integre edilirse,

$$(a+b)u+\frac{au^2}{2}-\beta a^2 b u''=0 \tag{3.3}$$

elde edilir.

Şimdi $u=a_0+a_1\varphi+\cdots+a_n\varphi^n$ olarak alalım. Burada $\varphi(\xi)$,

$$\begin{cases} \varphi_\xi^2=c_0+\lambda\varphi^2+\frac{1}{2}\mu\varphi^4 \\ \varphi_{\xi\xi}=\lambda\varphi+\mu\varphi^3 \end{cases} \tag{3.4}$$

şeklinde bir-boyutlu kübik lineer olmayan Klein-Gordon denklemini ifade eder.

(3.3) denkleminin en yüksek mertebeden lineer olmayan terimi u^2, en yüksek dereceden türevli terimi u'' ile dengelenirse,

$2n=n+2$ den $n=2$ olarak bulunur.

Böylece

$$u=a_0+a_1\varphi+a_2\varphi^2 \tag{3.5}$$

eşitliği yazılabilir.

(3.5) in 1. ve 2. mertebeden türevleri alınırsa,

$$u'=a_1\varphi'+2a_2\varphi\varphi'$$

$$u''=a_1\varphi''+2a_2(\varphi')^2+2a_2\varphi\varphi'' \tag{3.6}$$

eşitliklerine ulaşılır.

(3.4) teki $(\varphi')^2$ ve φ''değerleri (3.6) da yerlerine yazılırsa,

$$u'' = a_1\lambda\varphi + 4a_2\lambda\varphi^2 + a_1\mu\varphi^3 + 3a_2\mu\varphi^4 + 2a_2c_0 \tag{3.7}$$

elde edilir.

(3.5) ve (3.7), (3.3) de yerlerine yazılırsa,

$$(a+b)(a_0 + a_1\varphi + a_2\varphi^2) + \frac{a(a_0 + a_1\varphi + a_2\varphi^2)^2}{2}$$
$$-\beta a^2 b(a_1\lambda\varphi + 4a_2\lambda\varphi^2 + a_1\mu\varphi^3 + 3a_2\mu\varphi^4 + 2a_2c_0) = 0 \tag{3.8}$$

eşitliği bulunur.

(3.8), $\varphi(\xi)$ nin kuvvetlerine göre düzenlenirse,

$$(a+b)a_0 + \frac{a{a_0}^2}{2} - 2a^2b\beta a_2c_0 + \big((a+b)a_1 + aa_0a_1 - a^2b\beta a_1\lambda\big)\varphi$$
$$+\left((a+b)a_2 + \frac{a{a_1}^2}{2} + aa_0a_2 - 4a^2b\beta a_2\lambda\right)\varphi^2 + (aa_1a_2 - a^2b\beta a_1\mu)\varphi^3$$
$$+\left(\frac{a{a_2}^2}{2} - 3a^2b\beta a_2\mu\right)\varphi^4 = 0 \tag{3.9}$$

elde edilir.

(3.9) daki bütün katsayılar sıfıra eşitlenirse,

$$\begin{cases} (a+b)a_0 + \dfrac{aa_0^2}{2} - 2a^2b\beta a_2c_0 = 0 \\ (a+b)a_1 + aa_0a_1 - a^2b\beta a_1\lambda = 0 \\ (a+b)a_2 + \dfrac{aa_1^2}{2} + aa_0a_2 - 4a^2b\beta a_2\lambda = 0 \\ aa_1a_2 - a^2b\beta a_1\mu = 0 \\ \dfrac{aa_2^2}{2} - 3a^2b\beta a_2\mu = 0 \end{cases} \tag{3.10}$$

sistemi bulunur.

(3.10) sistemi çözülecek olursa,

$$a_0 = \frac{-(a+b) \pm \sqrt{(a+b)^2 + 24a^4b^2\beta^2\mu c_0}}{a}$$

$$a_1 = 0$$

$$a_2 = 6ab\beta\mu$$

değerlerine ulaşılır.

Böylece BBM denkleminin tam çözümlerinin bir formu

u=$a_0 + 6ab\beta\mu\varphi^2(\xi)$

şeklinde yazılabilir. Burada $\xi = ax + bt + \xi_0$, a ve b sabitler, ξ_0 keyfi bir sabit olup $\varphi(\xi)$, (3.4) denklemini belirtir.

BÖLÜM 4. BENJAMİN-BONA-MAHONY DENKLEMLERİNİN PERİYODİK ÇÖZÜMLERİ İÇİN VARLIK VE TEKLİK İNCELEMESİ

Bu bölümde L. A. Medeiros ve G. Perla Menzala tarafından yazılan "Existence and uniqueness for periodic solutions of the Benjamin-Bona-Mahony equation" isimli çalışma ele alınmış ve detaylı bir şekilde incelenmiştir [15].

4.1. Giriş

$-\infty < x < \infty$ ve $t \geq 0$ olmak üzere

$$u_t + uu_x - u_{xxt} = 0, \tag{4.1}$$
$$u(x,0) = u_0(x), \quad -\infty < x < \infty, \tag{4.2}$$
$$u(x+1,t) = u(x,t), \quad \forall x,t, \tag{4.3}$$

problemini ele alalım.

Teorem 4.1. $u_0(x)$ fonksiyonu,

a) $u_0\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olmak üzere üç kez türevlenebilir,
b) $\forall x \in \mathbb{R}$ için $u_0(x+1) = u_0(x)$ periyodik fonksiyon
c) $0 \leq x \leq 1$ üzerinde $\frac{d^3 u_0}{dx^3}$ Riemann-kare integrallenebilir,

şartlarını sağlasın. Bu durumda

(i) u, t ye göre bütün türevlere sahip ve x e göre iki kez sürekli türevlenebilirdir,
(ii) $u_t + uu_x - u_{xxt} = 0$, $\mathbb{R} \times [0,+\infty)$ üzerinde noktasaldır,
(iii) $\forall x \in \mathbb{R}$ için $u(x,0) = u_0(x)$,
(iv) $\forall x,t$ için $u(x+1,t) = u(x,t)$,

şartlarını sağlayan ancak ve ancak bir $u : \mathbb{R}\, x\, [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu vardır.

4.2. Sonlu-Farklar Yöntemi

Bu bölümde sadece konum değişkeni olan x üzerinde ayrıklaştırma yapılarak, (4.1)-(4.3) ile ilgili ayrık bir problem çözülmüştür.

$n \in \mathbb{N}^{+}$ olmak üzere $N = 2n + 1$ olarak alalım ve $[0,1]$ aralığını her biri $h = \frac{1}{N}$ uzunluğunda olan N eşit parçaya ayıralım. $\forall r = 1,2, \ldots, N$ için $[0,1]$ in rh noktasını x ile gösterelim.

D_{+}, D_{-} ve D_{0} fark operatörleri olmak üzere,

$$hD_{+}u_{N}(x_{r}, t) = u_{N}(x_{r+1}, t) - u_{N}(x_{r}, t),$$

$$hD_{-}u_{N}(x_{r}, t) = u_{N}(x_{r}, t) - u_{N}(x_{r-1}, t),$$

$$2hD_{0}u_{N}(x_{r}, t) = u_{N}(x_{r+1}, t) - u_{N}(x_{r-1}, t),$$

eşitlikleri sağlanır.

(4.1)-(4.3) problemi ayrık bir problem olarak ele alınırsa, $t \geq 0, r = 1,2, \ldots, N$ olmak üzere N ye bağlı $\forall t \in [0, t_{N})$ için

$$(a)\, \frac{\partial}{\partial t} u_{N}(x_{r}, t) + \frac{1}{3}[u_{N}(x_{r}, t) D_{0} u_{N}(x_{r}, t) + D_{0} u_{N}^{2}(x_{r}, t)] - D_{+} D_{-} \frac{\partial}{\partial t} u_{N}(x_{r}, t) = 0$$
$$(b)\, u_{N}(x_{r}, 0) = u_{0}(x_{r})$$
$$(c)\, u_{N}(x_{r+N}, t) = u_{N}(x_{r}, t)$$

sonlu farklar denkleminin bir sistemi elde edilir.

$u_N(x_r, t)$ çözümü $\forall t \in [0, t_N)$ için ızgaranın(grid) (x_r, t) noktasında tanımlanmıştır ve t ye göre bütün terimlerin türevlerine sahiptir.

Özellik 1.

$\forall u, v,\ N$ −periyodik ızgara(grid) fonksiyonları için

(i) $(u, D_+v)_h = -(D_-u, v)_h$
(ii) $(u, D_-v)_h = -(D_+u, v)_h$
(iii) $(u, D_0v)_h = -(D_0u, v)_h$

eşitlikleri yazılabilir.

Lemma 4.2.1. $r = 1, 2, \dots, N$ olmak üzere $[0, t_N)$ aralığı üzerinde $u_N(x_r, t)$, (a)-(c) ayrık probleminin bir çözümü olsun. Bu durumda $\forall N$ ve $\forall t \in [0, t_N)$ için,

$$\|u_N(\,.\,, t)\|_h^2 + \|D_-u_N(\,.\,, t)\|_h^2 < C$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde N den bağımsız bir $C > 0$ sabiti vardır.

İspat 4.2.1. (a) denkleminin $u_N(x_r\,, t)$ ile iç çarpımı alınırsa, $\forall t \in [0, t_N)$ için

$$(u_N, \frac{\partial u_N}{\partial t})_h + \frac{1}{3}[(u_N, u_N D_0 u_N)_h + (u_N, D_0 u_N^2)_h] - \left(u_N, D_+D_-\frac{\partial u_N}{\partial t}\right)_h = 0 \qquad (4.4)$$

elde edilir.

(4.4) denkleminin 1. terimi için ayrık norm, 2. terimi için ayrık iç çarpım, 3. terimi için Özellik 1 (i) ve ayrık norm kullanılırsa, sırasıyla

$$(u_N, \frac{\partial u_N}{\partial t})_h = \|u_N\|_h \left\|\frac{\partial u_N}{\partial t}\right\|_h = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\|u_N\|_h^2 \qquad (4.5)$$

$$(u_N, u_N D_0 u_N)_h + (u_N, D_0 u_N^2)_h = 0 \tag{4.6}$$

$$\begin{aligned} -\left(u_N, D_+ D_- \frac{\partial u_N}{\partial t}\right)_h &= \left(D_- u_N, D_- \frac{\partial u_N}{\partial t}\right)_h \\ &= \|D_- u_N\|_h \left\|D_- \frac{\partial u_N}{\partial t}\right\|_h \\ &= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\|D_- u_N\|_h^2 \end{aligned} \tag{4.7}$$

eşitliklerine ulaşılır.

(4.5), (4.6) ve (4.7) de elde edilen ifadeler (4.4) te yerlerine yazılırsa,

$$\frac{\partial}{\partial t}[\|u_N\|_h^2 + \|D_- u_N\|_h^2] = 0 \tag{4.8}$$

elde edilir.

(4.8), $(0, t < t_N)$ de integre edilirse,

$$\|u_N\|_h^2 + \|D_- u_N\|_h^2|_0^t = 0$$

$$\|u_N(x_r, t)\|_h^2 + \|D_- u_N(x_r, t)\|_h^2 = \|u_N(x_r, 0)\|_h^2 + \|D_- u_N(x_r, 0)\|_h^2 \tag{4.9}$$

eşitliği bulunur.

(4.9) un sağ tarafında (b) eşitliği kullanılırsa,

$$\|u_N(x_r, t)\|_h^2 + \|D_- u_N(x_r, t)\|_h^2 = \|u_0(x_r)\|_h^2 + \|D_- u_0(x_r)\|_h^2 \tag{4.10}$$

eşitliğine ulaşılır.

u_0 Teorem 4.1 şartlarını sağlamak üzere, (4.10) eşitliğinin sağ tarafındaki 1. ve 2. terim için

$\|u_0(x_r)\|_h^2 \leq 2\|u_0\|^2$ ve

$$\|D_- u_0(x_r)\|_h^2 \leq 2\left\|\frac{du_0}{dx}\right\|^2$$

eşitsizlikleri yazılabilir. Elde edilen ifadeler (4.10) da yerlerine yazılırsa,

$$\|u_N(x_r,t)\|_h^2 + \|D_- u_N(x_r,t)\|_h^2 \leq C$$

eşitsizliği ile ispat tamamlanmış olur.

Özellik 2.

$D_+D_- = D_-D_+$ ve $2D_0 = D_+ + D_-$ olduğu için, $\|D_+u_N(.\ ,t)\|_h^2$ ve $\|D_0u_N(.\ ,t)\|_h^2$ terimleri $[0,t_N)$ aralığı üzerinde N den bağımsız bir sabit ile sınırlandırıldığında da Lemma 4.2.1 geçerlidir.

Lemma 4.2.2. $r = 1,2,\dots,N$ olmak üzere $[0,t_N)$ aralığı üzerinde $u_N(x_r,t)$, (a)-(c) ayrık probleminin bir çözümü olsun.

Bu durumda $\forall t \in [0,t_N)$ için,

(i) $\forall r$ için $|u_N(x_r,t)| < C_1$

(ii) $\left\|\frac{\partial u_N}{\partial t}\right\|_h^2 + \left\|D_- \frac{\partial u_N}{\partial t}\right\|_h^2 < C_2$

(iii) $\left\|D_+D_- \frac{\partial u_N}{\partial t}\right\|_h^2 < C_3$

(iv) $\left\|\frac{\partial^2 u_N}{\partial t^2}\right\|_h^2 + \left\|D_-\frac{\partial^2 u_N}{\partial t^2}\right\|_h^2 < C_4$

eşitsizlikleri sağlanacak şekilde N den bağımsız C_1, C_2, C_3, C_4 sabitleri vardır.

İspat 4.2.2.(i) eşitsizliğini ispatlamak için ayrık Sobolev eşitsizliğinden yararlanalım. $\forall\varepsilon > 0$ olmak üzere,

$$\max_{1\leqq r\leqq N}|u_N(x_r,t)| \leq \varepsilon\|D_-u_N\|_h^2 + C(\varepsilon)\|u_N\|_h^2 \tag{4.11}$$

eşitsizliğini sağlayan bir $C = C(\varepsilon) > 0$ vardır.

(4.11) eşitsizliğinin sağ tarafı Lemma 4.2.1. yardımıyla sınırlandırılabilir. Böylece (i) eşitsizliği elde edilir.

(ii) eşitsizliğini ispatlamak için (a) denkleminin $\frac{\partial u_N}{\partial t}$ ile iç çarpımı ele alınırsa,

$$\begin{aligned}&\left(\frac{\partial u_N}{\partial t},\frac{\partial u_N}{\partial t}\right)_h - \left(D_+D_-\frac{\partial u_N}{\partial t},\frac{\partial u_N}{\partial t}\right)_h \\ &+\frac{1}{3}\left[\left(u_N D_0 u_N,\frac{\partial u_N}{\partial t}\right)_h + \left(D_0 u_N^2,\frac{\partial u_N}{\partial t}\right)_h\right] = 0\end{aligned} \tag{4.12}$$

elde edilir.

(4.12) eşitliğinin 1. terimi için ayrık norm, 2. terimi için Özellik 1 (i) ve ayrık norm kullanılırsa ve 3. terimi eşitliğin sağ tarafına atılıp mutlak değeri alınırsa,

$$\begin{aligned}\left\|\frac{\partial u_N}{\partial t}\right\|_h^2 + \left\|D_-\frac{\partial u_N}{\partial t}\right\|_h^2 &= -\frac{1}{3}\left[\left(u_N D_0 u_N,\frac{\partial u_N}{\partial t}\right)_h + \left(D_0 u_N^2,\frac{\partial u_N}{\partial t}\right)_h\right] \\ &\leq \frac{1}{3}\left|\left(u_N D_0 u_N,\frac{\partial u_N}{\partial t}\right)_h\right| + \frac{1}{3}\left|\left(D_0 u_N^2,\frac{\partial u_N}{\partial t}\right)_h\right|\end{aligned} \tag{4.13}$$

eşitsizliğine ulaşılır.

(4.13) eşitsizliğinin sağ tarafının 1. terimi ve 2. terimi için (i), ayrık norm ve aritmetik-geometrik eşitsizliği kullanılırsa, sırasıyla

$$\begin{aligned}\frac{1}{3}\left|\left(u_N D_0 u_N, \frac{\partial u_N}{\partial t}\right)_h\right| &\leq \frac{1}{3} \max_{1\leqq r\leqq N}|u_N(x_r,t)| \left(|D_0 u_N|, \left|\frac{\partial u_N}{\partial t}\right|\right)_h \\ &\leq \frac{1}{3} \max_{1\leqq r\leqq N}|u_N(x_r,t)| \|D_0 u_N\|_h \left\|\frac{\partial u_N}{\partial t}\right\|_h \\ &\leq \frac{C_\varepsilon}{2} + \frac{1}{18}\left\|\frac{\partial u_N}{\partial t}\right\|_h^2 \end{aligned} \tag{4.14}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{3}\left|\left(D_0 u_N^2, \frac{\partial u_N}{\partial t}\right)_h\right| &\leq 2 \max_{1\leqq r\leqq N}|u_N(x_r,t)| \|D_0 u_N\|_h \frac{1}{3}\left\|\frac{\partial u_N}{\partial t}\right\|_h \\ &\leq 2C_\varepsilon + \frac{1}{18}\left\|\frac{\partial u_N}{\partial t}\right\|_h^2 \end{aligned} \tag{4.15}$$

eşitsizlikleri bulunur. Burada C_ε pozitif bir sabittir.

(4.14) ve (4.15) te elde edilen ifadeler (4.13) te yerlerine yazılırsa,

$$\left\|\frac{\partial u_N}{\partial t}\right\|_h^2 + \left\|D_- \frac{\partial u_N}{\partial t}\right\|_h^2 \leq \frac{5}{2}C_\varepsilon + \frac{1}{9}\left\|\frac{\partial u_N}{\partial t}\right\|_h^2 \tag{4.16}$$

elde edilir.

Böylece C_2 pozitif bir sabit olmak üzere,

$$\left\|\frac{\partial u_N}{\partial t}\right\|_h^2 + \left\|D_- \frac{\partial u_N}{\partial t}\right\|_h^2 < C_2$$

eşitsizliği yazılabilir ve (ii) elde edilir.

(iii) ispatlamak için (a) denkleminde ayrık norm kullanılırsa,

$$\left\|D_+D_-\frac{\partial u_N}{\partial t}\right\|_h \leq \left\|\frac{\partial u_N}{\partial t}\right\|_h + \frac{1}{3}\|u_N D_0 u_N + D_0 u_N^2\|_h \tag{4.17}$$

eşitsizliğine ulaşılır.

(4.17) eşitsizliğinin sağ tarafının 1. terimi (ii) de sınırlandırılmıştır.

$\frac{1}{3}(u_N D_0 u_N + D_0 u_N^2) = u_N D_0 u_N$ ve $\|u_N D_0 u_N\|_h \leq \max_{1\leqq r\leqq N}|u_N(x_r,t)|\|D_0 u_N\|_h$

yardımıyla, (4.17) eşitsizliğinin sağ tarafının 2. terimi

$$\frac{1}{3}\|u_N D_0 u_N + D_0 u_N^2\|_h = \|u_N D_0 u_N\|_h < C$$

şeklinde yazılarak sınırlandırılmıştır.

Böylece (4.17) eşitsizliğinin sağ tarafı, $\forall t \in [0, t_N)$ için N den bağımsız bir sabit ile sınırlandırıldığından (iii) elde edilir.

(iv) ispatlamak için (a) denkleminde $\frac{\partial u_N}{\partial t} = v_N$ olarak yazılırsa,

$$v_N + \frac{1}{3}u_N D_0 u_N + \frac{1}{3}D_0 u_N^2 - D_+D_- v_N = 0 \tag{4.18}$$

elde edilir.

(4.18) de t ye göre türev alınıp, notasyonları sadeleştirmek için $\frac{\partial v_N}{\partial t} = w_N$ olarak yazılırsa,

$$w_N - D_+D_- w_N = -\frac{1}{3}v_N D_0 u_N - \frac{1}{3}u_N D_0 v_N - \frac{2}{3}D_0(u_N v_N) \tag{4.19}$$

eşitliğine ulaşılır.

(4.19) eşitliğinin w_N ile iç çarpımı alınırsa,

$$
\begin{aligned}
&(w_N, w_N)_h - (D_+ D_- w_N, w_N)_h \\
&= -\frac{1}{3}(v_N D_0 u_N, w_N)_h - \frac{1}{3}(u_N D_0 v_N, w_N)_h - \frac{2}{3}(D_0(u_N v_N), w_N)_h
\end{aligned} \tag{4.20}
$$

eşitliği bulunur.

(4.20) eşitliğinin sol tarafının 1. terimi için ayrık norm, 2. terimi için Özellik 1 (i) ve ayrık norm kullanılırsa ve sağ tarafının mutlak değeri alınırsa,

$$
\begin{aligned}
&\|w_N\|_h^2 + \|D_- w_N\|_h^2 \\
&= -\frac{1}{3}(v_N D_0 u_N, w_N)_h - \frac{1}{3}(u_N D_0 v_N, w_N)_h - \frac{2}{3}(D_0(u_N v_N), w_N)_h \\
&\leq \frac{1}{3}|(v_N D_0 u_N, w_N)_h| + \frac{1}{3}|(u_N D_0 v_N, w_N)_h| + \frac{2}{3}|(D_0(u_N v_N), w_N)_h|
\end{aligned} \tag{4.21}
$$

elde edilir.

(4.21) eşitsizliğinin sağ tarafının 1. terimi, 2. terimi ve 3. terimi için ayrık norm ve aritmetik-geometrik eşitsizliği kullanılırsa, sırasıyla

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{3}|(v_N D_0 u_N, w_N)_h| &\leq \|v_N D_0 u_N\|_h \frac{1}{3}\|w_N\|_h \\
&\leq \frac{1}{2}\|v_N D_0 u_N\|_h^2 + \frac{1}{18}\|w_N\|_h^2
\end{aligned} \tag{4.22}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{3}|(u_N D_0 v_N, w_N)_h| &\leq \|u_N D_0 v_N\|_h \frac{1}{3}\|w_N\|_h \\
&\leq \frac{1}{2}\|u_N D_0 v_N\|_h^2 + \frac{1}{18}\|w_N\|_h^2
\end{aligned} \tag{4.23}
$$

$$\frac{2}{3}|(D_0(u_N v_N), w_N)_h| \leq \|D_0(u_N v_N)\|_h \frac{2}{3}\|w_N\|_h$$
$$\leq \frac{1}{2}\|D_0(u_N v_N)\|_h^2 + \frac{2}{9}\|w_N\|_h^2 \tag{4.24}$$

eşitsizliklerine ulaşılır.

Ayrık Sobolev eşitsizliği yardımıyla, (4.22), (4.23) ve (4.24) eşitsizlikleri sınırlandırılırsa ve (4.21) de yerlerine yazılırsa,

$$\|w_N\|_h^2 + \|D_- w_N\|_h^2 \leq C_4 \tag{4.25}$$

elde edilir. Burada C_4 pozitif bir sabittir. (4.25) eşitsizliği ile (iv) ispatlanmış olur.

Lemma 4.2.3. $\forall t \in [0, t_N)$ için,

(i) $\|D_+ D_-^2 u_N\|_h < C_5$

(ii) $\|D_- D_0 u_N\|_h < C_6$

(iii) $\left\|D_+ D_-^2 \frac{\partial u_N}{\partial t}\right\|_h < C_7$

eşitsizlikleri sağlanacak şekilde N den bağımsız $C_5, C_6\ ve\ C_7$ sabitleri vardır.

İspat 4.2.3. (iii) ispatlamak için ilk olarak (a) denklemine D_- uygulanırsa,

$$D_+ D_-^2 \frac{\partial u_N}{\partial t} = D_- \frac{\partial u_N}{\partial t} + \frac{1}{3}[D_-(u_N D_0 u_N) + D_-(D_0 u_N^2)] \tag{4.26}$$

elde edilir.

Daha sonra (4.26) eşitliğinde ayrık norm kullanılırsa,

$$\left\|D_+D_-^2\frac{\partial u_N}{\partial t}\right\|_h \leq \left\|D_-\frac{\partial u_N}{\partial t}\right\|_h + \frac{1}{3}\|D_-(u_N D_0 u_N) + D_-(D_0 u_N^2)\|_h \tag{4.27}$$

eşitsizliğine ulaşılır.

(4.27) eşitsizliğinin sağ tarafının ilk terimi Lemma 4.2.2.(ii) den sınırlıdır.

(4.27) eşitsizliğinin sağ tarafındaki ikinci terim $\frac{1}{3}X$ ile gösterilirse $\|.\|_h$ normunun tanımından,

$$X^2 = \sum_{r=1}^{N}|D_-(u_r D_0 u_r) + D_-(D_0 u_r^2)|^2 h \tag{4.28}$$

olarak yazılabilir. Burada $u_r = u_N(x_r, t)$ dir.

(4.28) in sağ tarafında $D_0 u_r^2 = u_{r+1}D_0 u_r + u_{r-1}D_0 u_r$ eşitliği kullanılırsa, doğrudan hesaplama ile

$$\begin{aligned}|D_-(u_r D_0 u_r) + D_-(D_0 u_r^2)| &= |D_-(u_r D_0 u_r) + D_-(u_{r+1}D_0 u_r) + D_-(u_{r-1}D_0 u_r)| \\ &= |u_{r-1}D_-D_0 u_r + u_r D_-D_0 u_r + D_+u_r D_0 u_r \\ &\quad + D_-u_{r-1}D_0 u_{r-1} + D_-u_r D_0 u_r + u_{r+1}D_-D_0 u_r|\end{aligned} \tag{4.29}$$

elde edilir.

(4.29) da elde edilen veriler (4.28) de yerlerine yazılırsa,

$$X^2 \leq C\left(\max_{1\leq r\leq N}|u_r|\right)^2 \sum_{r=1}^{N}|D_-D_0 u_r|^2 + |D_-u_r|^2|D_0 u_r|^2 + |D_-u_{r-1}|^2|D_0 u_{r-1}|^2 h \tag{4.30}$$

eşitsizliği bulunur.

Lemma 4.2.1., Lemma 4.2.2.(i) ve ayrık Sobolev eşitsizliği yardımıyla, (4.30) dan

$$X^2 \leq C_\varepsilon(\|D_-D_0u_N\|_h^2 + \|D_0u_N\|_h^2) \tag{4.31}$$

eşitsizliğine ulaşılır. Burada $C_\varepsilon > 0$ dür.

(4.27) ve (4.31) den yararlanarak $\left\|D_+D_-^2\frac{\partial u_N}{\partial t}\right\|_h$ terimini sınırlandırmak için, $\|D_-D_0u_N\|_h$ nin sınırlandırılması gerekir.

$\|D_-D_0u_N\|_h$ teriminin sınırlandığını göstermek için, $\|D_+D_-u_N\|_h$ ve $\|D_-^2\, u_N\|_h$ nin sınırlandığını göstermek yeterlidir.

(a) denkleminin $-D_+D_-u_N$ ile iç çarpımı alınırsa,

$$-\left(D_+D_-u_N, \frac{\partial u_N}{\partial t}\right)_h + \left(D_+D_-u_N, D_+D_-\frac{\partial u_N}{\partial t}\right)_h$$
$$+\frac{1}{3}[-(D_+D_-u_N, u_ND_0u_N)_h - (D_+D_-u_N, D_0u_N^2)_h] = 0 \tag{4.32}$$

elde edilir.

(4.32) de Özellik 1 (i) ve ayrık norm kullanılırsa,

$$\|D_-u_N\|_h\left\|D_-\frac{\partial u_N}{\partial t}\right\|_h + \|D_+D_-u_N\|_h\left\|D_+D_-\frac{\partial u_N}{\partial t}\right\|_h - \frac{1}{3}\,\|u_ND_0u_N\|_h\|D_+D_-u_N\|_h$$
$$-\frac{1}{3}\,\|D_0u_N^2\|_h\|D_+D_-u_N\|_h = 0 \tag{4.33}$$

eşitliği bulunur.

(4.33) eşitliğinin son iki terimi eşitliğin sağ tarafına atılırsa,

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\|D_- u_N\|_h^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\|D_+ D_- u_N\|_h^2$$
$$= \frac{1}{3}\ \|u_N D_0 u_N\|_h \|D_+ D_- u_N\|_h + \frac{1}{3}\ \|D_0 u_N^2\|_h \|D_+ D_- u_N\|_h \tag{4.34}$$

elde edilir.

$2D_0 = D_+ + D_-$ olduğundan (4.34) eşitliğinin sağ tarafındaki D_0 terimi D_+ ve D_- olarak yazılır. (4.34) eşitliğinin sağ tarafını sol tarafına benzetmek için D_- kısmı ele alınıp D_+ kısmı sınırlandırılırsa,

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\|D_- u_N\|_h^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\|D_+ D_- u_N\|_h^2 \leq C + \|D_- u_N\|_h^2 + \|D_+ D_- u_N\|_h^2 \tag{4.35}$$

eşitsizliğine ulaşılır.

$\|D_- u_N\|_h^2 + \|D_+ D_- u_N\|_h^2 = E(t)$ olmak üzere, (4.35) eşitsizliği

$$\frac{1}{2}E'(t) \leq C + E(t) \tag{4.36}$$

şeklinde yazılabilir.

(4.36), e^{-2t} ile çarpılır ve $(0, t)$ de integre edilirse,

$$(e^{-2t}E(t))' \leq 2Ce^{-2t} \tag{4.37}$$

$$e^{-2t}E(t) \leq C(1 - e^{-2t})$$

$$E(t) \leq C(e^{2t} - 1) \tag{4.38}$$

elde edilir.

(4.38) ile,

$$E(t) = \|D_- u_N\|_h^2 + \|D_+ D_- u_N\|_h^2 \le C$$

eşitsizliği yazılabilir.

Böylece $\|D_+ D_- u_N\|_h^2$ terimi sınırlandırılmış olur.

(i) ispatlamak için, benzer şekilde (a) denkleminin $D_+^2 D_-^2 u_N$ ile iç çarpımı alınırsa,

$$\left(\frac{\partial u_N}{\partial t}, D_+^2 D_-^2 u_N\right) - \left(D_+ D_- \frac{\partial u_N}{\partial t}, D_+^2 D_-^2 u_N\right)$$
$$+\frac{1}{3}\left[(u_N D_0 u_N, D_+^2 D_-^2 u_N) + (D_0 u_N^2, D_+^2 D_-^2 u_N)\right] = 0 \tag{4.39}$$

elde edilir.

(4.39) denkleminin 1. terimi, 2. terimi, 3. terimi ve 4. terimi için Özellik 1(i) ve ayrık norm kullanılırsa, sırasıyla

$$\left(\frac{\partial u_N}{\partial t}, D_+^2 D_-^2 u_N\right) = \left(D_-^2 \frac{\partial u_N}{\partial t}, D_-^2 u_N\right)$$
$$= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\|D_-^2 u_N\|_h^2 \tag{4.40}$$

$$-\left(D_+ D_- \frac{\partial u_N}{\partial t}, D_+^2 D_-^2 u_N\right) = \left(D_+ D_-^2 \frac{\partial u_N}{\partial t}, D_+ D_-^2 u_N\right)$$
$$= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\|D_+ D_-^2 u_N\|_h^2 \tag{4.41}$$

$$\frac{1}{3}(u_N D_0 u_N, D_+^2 D_-^2 u_N) = -\frac{1}{3}(D_-(u_N D_0 u_N), D_+ D_-^2 u_N)$$
$$= -\frac{1}{3}\|D_-(u_N D_0 u_N)\|_h \|D_+ D_-^2 u_N\|_h \tag{4.42}$$

$$\frac{1}{3}(D_0u_N^2, D_+^2D_-^2u_N) = -\frac{1}{3}(D_-D_0u_N^2, D_+D_-^2u_N)$$
$$= -\frac{1}{3}\|D_-D_0u_N^2\|_h\|D_+D_-^2u_N\|_h \quad (4.43)$$

eşitliklerine ulaşılır.

(4.40), (4.41), (4.42) ve (4.43) eşitliklerinde elde edilen ifadeler (4.39) da yerlerine yazılırsa,

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}[\|D_-^2u_N\|_h^2 + \|D_+D_-^2u_N\|_h^2] = \frac{1}{3}[\|D_-(u_ND_0u_N) + D_-D_0u_N^2\|_h]\ \|D_+D_-^2u_N\|_h \quad (4.44)$$

eşitliği bulunur.

(4.44) eşitliğinin sağ tarafında aritmetik-geometrik eşitsizliği kullanılırsa,

$$\frac{1}{3}[\|D_-(u_ND_0u_N) + D_-D_0u_N^2\|_h]\ \|D_+D_-^2u_N\|_h$$
$$\leq \frac{1}{6}[C_\varepsilon\|D_-D_0u_N\|_h^2 + \|D_0u_N\|_h^2] + \|D_+D_-^2u_N\|_h^2 \quad (4.45)$$

elde edilir.

$\|D_-D_0u_N\|_h^2$ teriminde ise D_0 terimi D_+ ve D_- olarak yazılırsa ve (4.44) eşitliğinin sol tarafına benzetmek için D_- kısmı ele alınıp D_+ kısmı sınırlandırılırsa, (4.45) eşitsizliğinin sağ tarafı

$$\frac{1}{6}[C_\varepsilon\|D_-D_0u_N\|_h^2 + \|D_0u_N\|_h^2] + \|D_+D_-^2u_N\|_h^2 \leq C + \|D_-^2u_N\|_h^2 + \|D_+D_-^2u_N\|_h^2 \quad (4.46)$$

şeklinde yazılabilir.

(4.46), (4.44) de yerine yazılırsa,

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}[\|D_-^2 u_N\|_h^2 + \|D_+ D_-^2 u_N\|_h^2] \leq C + \|D_-^2 u_N\|_h^2 + \|D_+ D_-^2 u_N\|_h^2 \tag{4.47}$$

elde edilir.

$\|D_-^2 u_N\|_h^2 + \|D_+ D_-^2 u_N\|_h^2 = E_1(t)$ olmak üzere, (4.47)

$$\frac{1}{2}E_1{}'(t) \leq C + E_1(t) \tag{4.48}$$

şeklinde yazılabilir.

(4.48), e^{-2t} ile çarpılır ve $(0,t)$ de integre edilirse,

$$(e^{-2t}E_1(t))' \leq 2Ce^{-2t} \tag{4.49}$$

$$e^{-2t}E_1(t) \leq C(1 - e^{-2t})$$

$$E_1(t) \leq C(e^{2t} - 1) \tag{4.50}$$

eşitsizliğine ulaşılır.

(4.50) eşitsizliği ile,

$E_1(t) = \|D_-^2 u_N\|_h^2 + \|D_+ D_-^2 u_N\|_h^2 \leq C$ olup ispat tamamlanmış olur.

Özellik 3.

(a) denkleminin t ye göre türevi alınırsa, $\forall t \in [0, t_N)$ için $\left\| D_+ D_- \frac{\partial^2 u_N}{\partial t^2} \right\|_h^2$ terimi N den bağımsız bir sabit ile sınırlandırılır.

Lemma 4.2.2. eşitsizlikleri, ayrık Sobolev eşitsizliği ve adi diferansiyel denklemlerin çözümlerinin sürekliliğinin standart teoremi ile, $\forall t \in [0, T)$ için ayrık problemin çözümlerinin varlığı gösterilir [31].

4.3. Düzenli Çözümler

$u_N(x_r, t)$, $r = 1,2, \dots, N$ ayrık problemin çözümünü ele alalım.
$\Phi_N(x, t)$, u_N in ayrık Fourier polinomu olmak üzere

$$\Phi_N(x, t) = \sum_{k=-n}^{n} a_N(k, t) \exp(2k\pi i x)$$

olarak yazılabilir. Burada $a_N(k, t) = (\exp(2k\pi i x_r), u_N(x_r, t))_h$ ve $N = 2n + 1$ olmak üzere $Nh = 1$ dir.

Şimdi $\Omega = [0, 1]x[0, T]$ bölgesinde $u(x, t)$ ye yakınsayan $\{\Phi_N\}$ alt dizisinin varlığını gösterebilmek için, $\{\Phi_N\}$ ailesinin Arzelá-Ascoli Teoreminin şartlarını sağladığını gösterelim.

Lemma 4.3.1. N den bağımsız $\forall t \in [0, T)$ için,

(i) $\left\| \frac{\partial}{\partial x} \Phi_N(., t) \right\| < k_1$

(ii) $\left\| \frac{\partial}{\partial t} \Phi_N(., t) \right\| < k_2$

eşitsizliklerini sağlayacak şekilde $k_1 > 0$ ve $k_2 > 0$ sabitleri vardır.

İspat 4.3.1. $\Phi_N(x, t), u_N$ in ayrık Fourier polinomu olmak üzere

$$D_+ \Phi_N(x, t) = \sum_{k=-n}^{n} a_N(k, t) D_+ \exp(2k\pi i x) \tag{4.51}$$

eşitliği yazılabilir. Burada $hD_+ u_N(x_r,t) = u_N(x_{r+1},t) - u_N(x_r,t)$ olduğundan $hD_+ = \exp(2k\pi ih) - 1$ dir.

Özellik 1 (i) den,

$$\begin{aligned} a_N(k,t)D_+ &= (D_+ \exp(2k\pi ix_r), u_N(x_r,t))_h \\ &= -(\exp(2k\pi ix_r), D_- u_N(x_r,t))_h \end{aligned} \tag{4.52}$$

elde edilir.

Böylece (4.51) de (4.52) ve $\|\exp(2k\pi ix)\|^2 = 1$ (ortonormallik) kullanılırsa, Lemma 4.2.1. yardımıyla

$$\begin{aligned} \|D_+\Phi_N(x,t)\|^2 &= \sum_{k=-n}^{n} |(\exp(2k\pi ix_r), D_- u_N(x_r,t))_h|^2 \\ &\leq \|D_- u_N(\,.\,,t)\|_h^2 < C \end{aligned} \tag{4.53}$$

eşitsizliğine ulaşılır.

τ_1, τ_2 negatif olmayan tam sayılar olmak üzere $\tau_1 + \tau_2 = \tau$ olsun.

Φ_N, u_N in Fourier polinomu olmak üzere

$$\left(\frac{2}{\pi}\right)^{2\tau} \left\|\frac{\partial^\tau}{\partial x^\tau}\Phi_N(.,t)\right\| \leq \left\|D_+^{\tau_1} D_-^{\tau_2}\Phi_N(.,t)\right\|^2 = \left\|D_+^{\tau_1} D_-^{\tau_2}\Phi_N(.,t)\right\|_h^2 \tag{4.54}$$

eşitsizliği yazılabilir [29].

(4.54) eşitsizliğinde $\tau_2 = 0, \tau_1 = \tau = 1$ olarak alınırsa, (4.53) yardımıyla

$$\left(\frac{2}{\pi}\right)^{2} \left\|\frac{\partial\Phi_N(.,t)}{\partial x}\right\| \leq \|D_+\Phi_N(.,t)\|_h^2 < C \tag{4.55}$$

eşitsizliği bulunur. Böylece Lemma 4.3.1.(i) gösterilmiş olur.

Benzer şekilde $\Phi_N(x,t), u_N$ in ayrık Fourier polinomu olmak üzere

$$D_+ \frac{\partial \Phi_N}{\partial t}(x\,,t) = \sum_{k=-n}^{n} b_N(k,t) D_+ \exp(2k\pi i x) \tag{4.56}$$

eşitliği yazılabilir. Burada $b_N(k,t) = (\exp(2k\pi i x_r)\,,(\partial u_N/\partial t)(x_r,t))_h$ dir.

Özellik 1 (i) den,

$$\begin{aligned} b_N(k,t)D_+ &= (D_+ \exp(2k\pi i x_r), (\partial u_N/\partial t)(x_r,t))_h \\ &= -(\exp(2k\pi i x_r), D_-(\partial u_N/\partial t)(x_r,t))_h \end{aligned} \tag{4.57}$$

elde edilir.

Böylece (4.56) da (4.57) eşitliği ve $\|\exp(2k\pi i x)\|^2 = 1$ (ortanormallik) kullanılırsa, Lemma 4.2.2.(ii) yardımıyla

$$\begin{aligned} \left\| D_+ \frac{\partial \Phi_N}{\partial t}(x,t) \right\|^2 &= \sum_{k=-n}^{n} |(\exp(2k\pi i x_r), D_-(\partial u_N/\partial t)(x_r,t))_h|^2 \\ &\leq \|D_-(\partial u_N/\partial t)\,(\,.\;,t)\|_h^2 < C \end{aligned} \tag{4.58}$$

eşitsizliğine ulaşılır.

τ_1, τ_2 negatif olmayan tam sayılar olmak üzere $\tau_1 + \tau_2 = \tau$ olsun.

$$\left(\frac{2}{\pi}\right)^{2\tau} \left\| \frac{\partial^\tau}{\partial x^\tau} \frac{\partial \Phi_N}{\partial t}(.\,,t) \right\| \leq \left\| D_+^{\tau_1} D_-^{\tau_2} \frac{\partial \Phi_N}{\partial t}(.\,,t) \right\|^2 = \left\| D_+^{\tau_1} D_-^{\tau_2} \frac{\partial \Phi_N}{\partial t}(.\,,t) \right\|_h^2 \tag{4.59}$$

eşitsizliğinde $\tau_2 = 0, \tau_1 = \tau = 1$ olarak alınırsa, (4.58) yardımıyla

$$\left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \left\|\frac{\partial^2\Phi_N(.,t)}{\partial x\partial t}\right\| \leq \left\|D_+\frac{\partial\Phi_N}{\partial t}(.,t)\right\|_h^2 < C \tag{4.60}$$

eşitsizliği bulunur [29].

(4.55) eşitsizliğinden $\frac{\partial\Phi_N}{\partial x}$, (4.60) eşitsizliğinden $\frac{\partial^2\Phi_N}{\partial x\partial t}$ sınırlıdır. Dolayısıyla $\frac{\partial\Phi_N}{\partial t}$ de sınırlı olur ve Lemma 4.3.1.(ii) ispatlanır.

L^2 normundaki $\Phi_N, \frac{\partial\Phi_N}{\partial x}, \frac{\partial\Phi_N}{\partial t}$ için düzgün sınırların olması, $\Phi_N(x\,,t)$ nin Arzelá-Ascoli Teoreminin şartlarını sağladığını gösterir [35].

Böylece Ω üzerinde $u(x,t)$ fonksiyonuna düzgün yakınsayan $\{\Phi_N\}$ alt dizisinin varlığı gösterilmiş olur $(\Phi_N(x\,,t) \to u(x,t))$.

Benzer şekilde,

$$\Phi_N(x\,,t) = \Phi_N(x\,,0) + \int_0^t \frac{\partial\Phi_N}{\partial s}(x,s)ds \tag{4.61}$$

eşitliğinde $N \to +\infty$ için limit alınırsa,

$$u(x,t) = u_0(x) + \int_0^t \frac{\partial u}{\partial s}(x,s)ds \tag{4.62}$$

elde edilir.

Böylece Arzelá-Ascoli Teoremi $\frac{\partial\Phi_N}{\partial t} \to \frac{\partial u}{\partial t}$ nin Ω üzerinde düzgün yakınsadığını ayrıca $\frac{\partial^3\Phi_N}{\partial x^2\partial t} \to \frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial t}$ nin de Ω üzerinde düzgün yakınsadığını gösterir.

4.4. BBM Denklemlerinin Periyodik Çözümleri için Teklik İncelemesi

Teorem 4.4.

$u_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olsun. (4.1)-(4.3) probleminin çözümü olan $u(x,t)$,

$$\begin{cases} \|u\|^2 \leq D \\ \|u_x\|^2 \leq D \end{cases} \tag{4.63}$$

eşitsizliklerini sağlar. Burada, D pozitif sabiti (4.1) in başlangıç verilerine ve parametrelerine bağlıdır.

İspat 4.4.

(4.1) denklemi $L^2(\Omega)$ de u ile çarpılırsa,

$$\int_0^1 uu_t dx - \int_0^1 uu_{xxt} dx + \int_0^1 uuu_x dx = 0 \tag{4.64}$$

elde edilir.

(4.64) teki her bir integral ayrı ayrı hesaplanırsa,

$$\int_0^1 uu_t dx = \int_0^1 \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t} u^2\, dx = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^1 u^2\, dx = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\|u\|^2 \tag{4.65}$$

$$\int_0^1 uu_{xxt} dx = uu_{xt}|_{\partial\Omega} - \int_0^1 u_x u_{xt} dx = -\int_0^1 \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t} u_x^2\, dx = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^1 u_x^2\, dx$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\|u_x\|^2 \tag{4.66}$$

$$\int_0^1 uu u_x dx = \int_0^1 u^2 u_x dx = \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{\partial}{\partial x} u^3 dx = 0 \qquad (4.67)$$

eşitliklerine ulaşılır.

(4.65)-(4.67) de elde edilen ifadeler (4.64) te yerlerine yazılırsa,

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{2}\|u\|^2 + \frac{1}{2}\|u_x\|^2\right] = 0 \qquad (4.68)$$

elde edilir.

$$\frac{1}{2}\|u\|^2 + \frac{1}{2}\|u_x\|^2 = E_2(t)$$

olmak üzere, (4.68)

$$\frac{\partial}{\partial t}[E_2(t)] = 0 \qquad (4.69)$$

şeklinde yeniden yazılabilir.

(4.69), $(0, t)$ de integre edilirse,

$$E_2(t) = E_2(0)$$

$$\frac{1}{2}\|u\|^2 + \frac{1}{2}\|u_x\|^2 \leq D \qquad (4.70)$$

eşitsizliğine ulaşılır.

Böylece (4.1)-(4.3) probleminin sınır koşullarına bağlı olarak,

$\|u\|^2 \quad \leq D$

$\|u_x\|^2 \leq D$

eşitsizlikleri elde edilerek ispat tamamlanmış olur.

Şimdi u ve v sırasıyla aşağıdaki problemlerin çözümleri olsun.

$$\begin{cases} u_t + uu_x - u_{xxt} = 0, \\ u(x,0) = u_0(x), -\infty < x < \infty, \\ u(x+1,t) = u(x,t), \quad \forall x,t, \end{cases} \tag{4.71}$$

$$\begin{cases} v_t + vv_x - v_{xxt} = 0, \\ v(x,0) = u_0(x), -\infty < x < \infty, \\ v(x+1,t) = v(x,t), \quad \forall x,t. \end{cases} \tag{4.72}$$

(4.71) ve (4.72) problemleri birbirinden çıkarılır ve $u - v = w$ olarak alınırsa,

$$\begin{cases} w_t - w_{xxt} + uu_x - vv_x = 0, \\ w(x,0) = 0, \quad -\infty < x < \infty, \\ w(x+1,t) = w(x,t), \quad \forall x,t, \end{cases} \tag{4.73}$$

elde edilir.

(4.73) problemindeki ilgili denkleme vu_x terimi eklenip çıkarılırsa,

$$w_t - w_{xxt} + uu_x - vu_x + vu_x - vv_x = 0$$

$$w_t - w_{xxt} + (u-v)u_x + v(u_x - v_x) = 0$$

elde edilip, $u - v = w$ olarak alınırsa

$$\begin{cases} w_t - w_{xxt} + wu_x + vw_x = 0 \\ w(x,0) = 0, \quad -\infty < x < \infty \\ w(x+1,t) = w(x,t), \quad \forall x,t \end{cases} \tag{4.74}$$

problemine ulaşılır.

(4.74) teki ilgili denklem L^2 de w ile çarpılırsa,

$$\int_0^1 ww_t dx - \int_0^1 ww_{xxt} dx + \int_0^1 w^2 u_x dx + \int_0^1 vww_x dx = 0 \tag{4.75}$$

bulunur.

(4.75) teki ilk iki integral ayrı ayrı hesaplanırsa,

$$\int_0^1 ww_t dx = \int_0^1 \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t} w^2\, dx = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^1 w^2\, dx = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\|w\|^2 \tag{4.76}$$

$$\int_0^1 ww_{xxt} dx = ww_{xt}|_{\partial\Omega} - \int_0^1 w_x w_{xt} dx = -\int_0^1 \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t} w_x^2 dx = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^1 w_x^2\, dx$$
$$= -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\|w_x\|^2 \tag{4.77}$$

eşitliklerine ulaşılır.

(4.76)-(4.77) eşitliklerinde elde edilen ifadeler (4.75) te yerlerine yazılırsa,

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\|w\|^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\|w_x\|^2 + \int_0^1 w^2 u_x dx + \int_0^1 vww_x dx = 0 \tag{4.78}$$

elde edilir.

(4.78) deki son iki terim eşitliğin sağ tarafına atılır ve mutlak değeri alınırsa,

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\|w\|^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\|w_x\|^2 &= -\int_0^1 (wu_x + vw_x)wdx \\
&\le \left|\int_0^1 (wu_x + vw_x)wdx\right| \\
&\le \left[\int_0^1 |w||u_x||w|dx + \int_0^1 |v||w_x||w|dx\right] \qquad (4.79)
\end{aligned}
$$

eşitsizliği bulunur.

(4.79) eşitsizliğinin sağ tarafındaki terimlere Cauchy-Schwarz ve aritmetik-geometrik eşitsizlikleri uygulanırsa, (4.63) yardımıyla

$$\int_0^1 |w||u_x||w|dx \le \|u_x\|\|w\|^2 \le D\|w\|^2 \qquad (4.80)$$

$$\int_0^1 |v||w_x||w|dx \le \|v\|\|w\|\|w_x\| \le D\frac{\|w_x\|^2}{2} + D\frac{\|w\|^2}{2} \qquad (4.81)$$

eşitsizlikleri elde edilir.

(4.80)-(4.81) de elde edilen ifadeler (4.79) da yerlerine yazılırsa, $C = maks\{3, 1\}$ olmak üzere

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\|w\|^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\|w_x\|^2 &\le D\left[\|w\|^2 + \frac{\|w_x\|^2}{2} + \frac{\|w\|^2}{2}\right] \\
&= D\left[\frac{3}{2}\|w\|^2 + \frac{\|w_x\|^2}{2}\right] \\
&\le C[\|w\|^2 + \|w_x\|^2] \qquad (4.82)
\end{aligned}
$$

eşitsizliğine ulaşılır.

$\|w\|^2 + \|w_x\|^2 = E_3(t)$ olmak üzere, (4.82)

$$\frac{1}{2}E_3{}'(t) \leq CE_3(t)$$

$$E_3{}'(t) - 2CE_3(t) \leq 0 \tag{4.83}$$

şeklinde yazılabilir.

(4.83), e^{-2Ct} ile çarpılır ve $(0, t)$ de integre edilirse,

$$(e^{-2Ct}E_3(t))' \leq 0 \tag{4.84}$$

$$e^{-2Ct}E_3(t) \leq 0 \tag{4.85}$$

elde edilir.

(4.85) eşitsizliğinde $E_3(t)$ negatif olmadığından $E_3(t) = 0$ dır. Böylece $w = 0$ yani $u - v = 0$ dır. $u = v$ olduğundan çözümlerin tekliği gösterilmiş olur.

BÖLÜM 5. BENJAMİN-BONA-MAHONY DENKLEMLERİ

Bu bölümde sürekli bağımlılık ile ilgili literatür taraması yapılarak, daha önce çalışılmamış olan BBMB denkleminin çözümlerinin katsayılara sürekli bağımlılığı incelenmiştir.

5.1. Giriş ve Problemin ifadesi

$$u_t - u_{xxt} - \alpha u_{xx} + \gamma u_x + f(u) = 0, \tag{5.1}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \qquad x \in \Omega, \tag{5.2}$$

$$u(x,t) = 0, \qquad x \in \partial\Omega, \qquad t > 0, \tag{5.3}$$

başlangıç ve sınır değer problemini ele alalım. Burada $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sınırlı bir bölge ve α, γ katsayıları pozitif sabitler olup, $u(x,t)$ yatay yönde sıvı hızını göstermektedir. Ayrıca lineer olmayan $f(u)$ fonksiyonu $F(u) = \int_0^u f(s)ds$ olmak üzere,

$$0 \leq F(u) \leq f(u)u \tag{5.4}$$

eşitsizliğini sağlasın.

5.2. Ön Kestirim

Teorem 5.2.

$u_0 \epsilon H_0^1(\Omega)$ olsun ve (5.4) koşulu sağlansın. Bu durumda (5.1)-(5.3) probleminin çözümü olan $u(x,t)$,

$$\begin{cases} \|u\|^2 \leq D_1 \\ \|u_x\|^2 \leq D_1 \end{cases} \tag{5.5}$$

eşitsizliklerini sağlar. Burada, D_1 pozitif sabiti (5.1) in başlangıç verilerine ve parametrelerine bağlıdır.

İspat 5.2.

(5.1) denklemi $L^2(\Omega)$ de u ile çarpılırsa,

$$\int_\Omega uu_t dx - \int_\Omega uu_{xxt} dx - \int_\Omega \alpha uu_{xx} dx + \int_\Omega \gamma uu_x dx + \int_\Omega uf(u) dx = 0 \tag{5.6}$$

elde edilir.

(5.6) daki her bir integral ayrı ayrı hesaplanırsa,

$$\int_\Omega uu_t dx = \int_\Omega \frac{1}{2}\frac{d}{dt}u^2\, dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega u^2\, dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u\|^2 \tag{5.7}$$

$$\int_\Omega uu_{xxt} dx = uu_{xt}|_{\partial\Omega} - \int_\Omega u_x u_{xt} dx = -\int_\Omega \frac{1}{2}\frac{d}{dt}u_x^2\, dx = -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega u_x^2\, dx$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_x\|^2 \tag{5.8}$$

$$\int_\Omega uu_{xx} dx = uu_x|_{\partial\Omega} - \int_\Omega u_x u_x dx = -\|u_x\|^2 \tag{5.9}$$

$$\int_\Omega uu_x dx = \int_\Omega \frac{1}{2}\frac{d}{dx}u^2\, dx = 0 \tag{5.10}$$

eşitliklerine ulaşılır.

(5.7)-(5.10) da elde edilen ifadeler (5.6) da yerlerine yazılırsa,

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\|u\|^2+\frac{1}{2}\|u_x\|^2\right]+\alpha\|u_x\|^2+\int_{\Omega} uf(u)dx=0 \tag{5.11}$$

elde edilir.

$$\frac{1}{2}\|u\|^2+\frac{1}{2}\|u_x\|^2=E(t)$$

olmak üzere, (5.11)

$$\frac{d}{dt}[E(t)]+\alpha\|u_x\|^2+\int_{\Omega} uf(u)dx=0 \tag{5.12}$$

şeklinde yeniden yazılabilir.

(5.4) yardımıyla, (5.12) den

$$\frac{d}{dt}[E(t)]+\alpha\|u_x\|^2=-\int_{\Omega} uf(u)\leq-\int_{\Omega} F(u)\leq 0 \tag{5.13}$$

eşitsizliği bulunur.

(5.13) eşitsizliğinin sol tarafının ikinci terimi pozitif olduğundan ihmal edilirse ve (5.13), $(0,t)$ de integre edilirse,

$$E(t)\leq E(0)$$

$$\frac{1}{2}\|u\|^2+\frac{1}{2}\|u_x\|^2\leq E(0) \tag{5.14}$$

eşitsizliğine ulaşılır.

Böylece (5.1)-(5.3) probleminin sınır koşullarına bağlı olarak,

$\|u\|^2 \leq D_1$

$\|u_x\|^2 \leq D_1$

eşitsizlikleri elde edilerek ispat tamamlanmış olur.

5.3. α Katsayısına Sürekli Bağımlılık

Bu bölümde (5.1)-(5.3) probleminin çözümlerinin α katsayısına sürekli bağımlılığı incelenmiştir.

u ve v sırasıyla aşağıdaki problemlerin çözümleri olsun.

$$\begin{cases} u_t - u_{xxt} - \alpha_1 u_{xx} + \gamma u_x + f(u) = 0, & x \in \Omega, \quad t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \Omega, \\ u(x,t) = 0, & x \in \partial\Omega, \quad t > 0, \end{cases} \tag{5.15}$$

$$\begin{cases} v_t - v_{xxt} - \alpha_2 v_{xx} + \gamma v_x + f(v) = 0, & x \in \Omega, \quad t > 0, \\ v(x,0) = u_0(x), & x \in \Omega, \\ v(x,t) = 0, & x \in \partial\Omega, \quad t > 0. \end{cases} \tag{5.16}$$

$u - v = w$ olmak üzere, (5.15) ve (5.16) problemleri birbirinden çıkarılırsa,

$$\begin{cases} w_t - w_{xxt} - \alpha_1 u_{xx} + \alpha_2 v_{xx} + \gamma w_x + f(u) - f(v) = 0\,, & x \in \Omega, t > 0, \\ w(x,0) = 0, & x \in \Omega, \\ w(x,t) = 0, & x \in \partial\Omega, \quad t > 0, \end{cases} \tag{5.17}$$

elde edilir.

(5.17) problemindeki ilgili denkleme $\alpha_1 v_{xx}$ terimi eklenip çıkarılırsa,

$$w_t - w_{xxt} - \alpha_1 u_{xx} + \alpha_1 v_{xx} - \alpha_1 v_{xx} + \alpha_2 v_{xx} + \gamma w_x + f(u) - f(v) = 0$$

$$w_t - w_{xxt} - \alpha_1(u_{xx} - v_{xx}) - (\alpha_1 - \alpha_2)v_{xx} + \gamma w_x + f(u) - f(v) = 0 \qquad (5.18)$$

olup, (5.18) denkleminde $\alpha_1 - \alpha_2 = \alpha$ olarak alınırsa,

$$\begin{cases} w_t - w_{xxt} - \alpha_1 w_{xx} - \alpha v_{xx} + \gamma w_x + f(u) - f(v) = 0, & x \in \Omega, t > 0, \\ w(x,0) = 0, & x \in \Omega, \\ w(x,t) = 0, & x \in \partial\Omega, \quad t > 0, \end{cases} \qquad (5.19)$$

problemine ulaşılır.

Teorem 5.3.

f fonksiyonunun,

$$|f(u) - f(v)| \leq K|u - v| \qquad (5.20)$$

şartını sağladığını kabul edelim. Bu durumda (5.19) probleminin çözümü olan $w(x,t)$,

$$\frac{1}{2}\|w\|^2 + \frac{1}{2}\|w_x\|^2 \leq \frac{D_1}{2}|\alpha_1 - \alpha_2|^2 e^{Mt} \qquad (5.21)$$

eşitsizliğini sağlar. Burada D_1 ve M pozitif sabitlerdir.

İspat 5.3.

(5.19) problemindeki ilgili denklem $L^2(\Omega)$ de w ile çarpılırsa,

$$\int_{\Omega} ww_t dx - \int_{\Omega} ww_{xxt} dx - \int_{\Omega} \alpha_1 ww_{xx} dx - \int_{\Omega} \alpha wv_{xx}\, dx + \int_{\Omega} \gamma ww_x dx$$
$$+ \int_{\Omega} w\big(f(u) - f(v)\big) dx = 0 \tag{5.22}$$

eşitliği bulunur.

(5.22) deki her bir integral ayrı ayrı hesaplanırsa,

$$\int_{\Omega} ww_t dx = \int_{\Omega} \frac{1}{2}\frac{d}{dt} w^2\, dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\Omega} w^2\, dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w\|^2 \tag{5.23}$$

$$\int_{\Omega} ww_{xxt} dx = ww_{xt}|_{\partial\Omega} - \int_{\Omega} w_x w_{xt} dx = -\int_{\Omega} \frac{1}{2}\frac{d}{dt} w_x^2\, dx = -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\Omega} w_x^2\, dx$$
$$= -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w_x\|^2 \tag{5.24}$$

$$\int_{\Omega} ww_{xx} dx = ww_x|_{\partial\Omega} - \int_{\Omega} w_x w_x dx = -\,\|w_x\|^2 \tag{5.25}$$

$$\int_{\Omega} wv_{xx} dx = wv_x|_{\partial\Omega} - \int_{\Omega} w_x v_x dx = -\,(w_x, v_x) \tag{5.26}$$

$$\int_{\Omega} ww_x dx = \int_{\Omega} \frac{1}{2}\frac{d}{dx} w^2\, dx = 0 \tag{5.27}$$

eşitliklerine ulaşılır.

(5.23)-(5.27) de elde edilen ifadeler (5.22) de yerlerine yazılırsa,

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\|w\|^2 + \frac{1}{2}\|w_x\|^2\right] + \alpha_1\|w_x\|^2 + \alpha(w_x, v_x) + \int_{\Omega} \big(f(u) - f(v)\big) w dx = 0 \tag{5.28}$$

elde edilir.

$$\frac{1}{2}\|w\|^2 + \frac{1}{2}\|w_x\|^2 = E_1(t)$$

olmak üzere, (5.28) in sol tarafındaki 3. ve 4. terim eşitliğin sağ tarafına atılıp mutlak değeri alınırsa,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}[E_1(t)] + \alpha_1\|w_x\|^2 &= -\alpha(w_x, v_x) - \int_\Omega \big(f(u) - f(v)\big)w dx \\ &\leq |\alpha||(w_x, v_x)| + \int_\Omega |f(u) - f(v)|\,|w| dx \end{aligned} \tag{5.29}$$

eşitsizliği bulunur.

(5.29) un sol tarafındaki 2. terim pozitif olduğundan bu terim ihmal edilebilir. (5.29) un sağ tarafındaki 1. terim için, Cauchy-Schwarz ve aritmetik-geometrik eşitsizlikleri kullanılırsa,

$$|\alpha||(w_x, v_x)| \leq |\alpha|\|w_x\|\|v_x\| \leq \frac{1}{2}\|w_x\|^2 + \frac{|\alpha|^2}{2}\|v_x\|^2 \tag{5.30}$$

elde edilir.

(5.20) yardımıyla, (5.29) un sağ tarafının 2. terimi için

$$\int_\Omega |f(u) - f(v)|\,|w| dx \leq \int_\Omega K|w||w| dx = K\|w\|^2 \tag{5.31}$$

eşitsizliğine ulaşılır.

(5.30) ve (5.31) de elde edilen ifadeler (5.29) da yerlerine yazılırsa,

$$\frac{d}{dt}[E_1(t)] \leq \frac{1}{2}\|w_x\|^2 + \frac{|\alpha|^2}{2}\|v_x\|^2 + K\|w\|^2 \tag{5.32}$$

elde edilir.

(5.32) eşitsizliği $M = maks\{1, 2K\}$ olmak üzere,

$$\frac{d}{dt}E_1(t) \leq ME_1(t) + \frac{|\alpha|^2}{2}\|v_x\|^2 \tag{5.33}$$

şeklinde yazılır ve (5.33), e^{-Mt} ile çarpılırsa,

$$e^{-Mt}\left[\frac{d}{dt}E_1(t) - ME_1(t)\right] \leq \frac{|\alpha|^2}{2}\|v_x\|^2 e^{-Mt} \tag{5.34}$$

eşitsizliği bulunur.

(5.5) yardımıyla, (5.34)

$$e^{-Mt}\left[\frac{d}{dt}E_1(t) - ME_1(t)\right] \leq \frac{|\alpha|^2}{2}D_1\, e^{-Mt} \tag{5.35}$$

şeklinde yeniden yazılabilir.

(5.35), $(0, t)$ de integre edilirse,

$$\int_0^t \frac{d}{ds}(e^{-Ms}E_1(s))ds \leq \frac{|\alpha|^2}{2}D_1 \int_0^t e^{-Ms}ds$$

$$e^{-Mt}E_1(t) \leq \frac{|\alpha|^2}{2}D_1 \frac{(1 - e^{-Mt})}{M}$$

$$E_1(t) \leq \frac{|\alpha|^2}{2} D_1 \frac{(e^{Mt} - 1)}{M}$$

$$E_1(t) \leq \frac{D_1}{2M} |\alpha|^2 e^{Mt} \tag{5.36}$$

eşitsizliğine ulaşılır.

(5.36) eşitsizliğinden görülür ki, α_1 ve α_2 birbirine ne kadar çok yaklaşırsa, u ve v çözümleri birbirine o kadar yaklaşır. $\alpha_1 - \alpha_2 = 0$ olursa $w = u - v = 0$ olur. Böylece u ve v çözümlerinin α katsayısına sürekli bağımlılığı gösterilmiş olur.

5.4. γ Katsayısına Sürekli Bağımlılık

Bu bölümde (5.1)-(5.3) probleminin çözümlerinin γ katsayısına sürekli bağımlılığı incelenmiştir.

u ve v sırasıyla aşağıdaki problemlerin çözümleri olsun.

$$\begin{cases} u_t - u_{xxt} - \alpha u_{xx} + \gamma_1 u_x + f(u) = 0, & x \in \Omega,\ t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \Omega, \\ u(x,t) = 0, & x \in \partial\Omega,\ t > 0, \end{cases} \tag{5.37}$$

$$\begin{cases} v_t - v_{xxt} - \alpha v_{xx} + \gamma_2 v_x + f(v) = 0, & x \in \Omega,\ t > 0, \\ v(x,0) = u_0(x), & x \in \Omega, \\ v(x,t) = 0, & x \in \partial\Omega,\ t > 0. \end{cases} \tag{5.38}$$

$u - v = w$ olmak üzere (5.37) ve (5.38) problemleri birbirinden çıkarılırsa,

$$\begin{cases} w_t - w_{xxt} - \alpha w_{xx} + \gamma_1 u_x - \gamma_2 v_x + f(u) - f(v) = 0, & x \in \Omega,\ t > 0, \\ w(x,0) = 0, & x \in \Omega, \\ w(x,t) = 0, & x \in \partial\Omega,\ t > 0, \end{cases} \tag{5.39}$$

elde edilir.

(5.39) problemindeki ilgili denkleme $\gamma_1 v_x$ terimi eklenip çıkarılırsa,

$$w_t - w_{xxt} - \alpha w_{xx} + \gamma_1 u_x - \gamma_1 v_x + \gamma_1 v_x - \gamma_2 v_x + f(u) - f(v) = 0$$

$$w_t - w_{xxt} - \alpha w_{xx} + \gamma_1 (u_x - v_x) + (\gamma_1 - \gamma_2) v_x + f(u) - f(v) = 0 \tag{5.40}$$

olup, (5.40) denkleminde $\gamma_1 - \gamma_2 = \gamma$ olarak alınırsa,

$$\begin{cases} w_t - w_{xxt} - \alpha w_{xx} + \gamma_1 w_x + \gamma v_x + f(u) - f(v) = 0, x \in \Omega,\ t > 0 \\ w(x,0) = 0, \qquad x \in \Omega \\ w(x,t) = 0, \qquad x \in \partial\Omega,\ t > 0 \end{cases} \tag{5.41}$$

problemine ulaşılır.

Teorem 5.4.

(5.20) yardımıyla, (5.41) probleminin çözümü olan $w(x,t)$

$$\frac{1}{2}\|w\|^2 + \frac{1}{2}\|w_x\|^2 \le \frac{D_1}{2}|\gamma_1 - \gamma_2|^2 e^{Mt} \tag{5.42}$$

eşitsizliğini sağlar. Burada D_1 ve M pozitif sabitlerdir.

İspat 5.4.

(5.41) problemindeki ilgili denklem $L^2(\Omega)$ de w ile çarpılırsa,

$$\int_\Omega w w_t dx - \int_\Omega w w_{xxt} dx - \int_\Omega \alpha w w_{xx} dx + \int_\Omega \gamma_1 w w_x dx$$
$$+ \int_\Omega w(f(u) - f(v))]dx = 0 \tag{5.43}$$

eşitliği bulunur.

(5.43) teki her bir integral ayrı ayrı hesaplanırsa,

$$\int_{\Omega} w w_t dx = \int_{\Omega} \frac{1}{2}\frac{d}{dt} w^2\, dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\Omega} w^2\, dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w\|^2 \tag{5.44}$$

$$\int_{\Omega} w w_{xxt} dx = w w_{xt}|_{\partial\Omega} - \int_{\Omega} w_x w_{xt} dx = -\int_{\Omega} \frac{1}{2}\frac{d}{dt} w_x^2\, dx = -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\Omega} w_x^2\, dx$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w_x\|^2 \tag{5.45}$$

$$\int_{\Omega} w w_{xx} dx = w w_x|_{\partial\Omega} - \int_{\Omega} w_x w_x dx = -\|w_x\|^2 \tag{5.46}$$

$$\int_{\Omega} w w_x dx = \int_{\Omega} \frac{1}{2}\frac{d}{dx} w^2\, dx = 0 \tag{5.47}$$

$$\int_{\Omega} w v_x dx = w v|_{\partial\Omega} - \int_{\Omega} v w_x dx = -(v, w_x) \tag{5.48}$$

eşitliklerine ulaşılır.

(5.44)-(5.48) de elde edilen ifadeler (5.43) te yerlerine yazılırsa,

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\|w\|^2 + \frac{1}{2}\|w_x\|^2\right] + \alpha\|w_x\|^2 - \gamma(v, w_x) + \int_{\Omega}\big(f(u) - f(v)\big) w dx = 0 \tag{5.49}$$

elde edilir.

$$\frac{1}{2}\|w\|^2 + \frac{1}{2}\|w_x\|^2 = E_2(t)$$

olmak üzere, (5.49) un sol tarafındaki 3. ve 4. terim eşitliğin sağ tarafına atılıp mutlak değeri alınırsa,

$$\frac{d}{dt}[E_2(t)] + \alpha\|w_x\|^2 = \gamma(v, w_x) - \int_{\Omega} \big(f(u) - f(v)\big) w dx$$
$$\leq \left| \gamma(v, w_x) - \int_{\Omega} \big(f(u) - f(v)\big) w dx \right|$$
$$\leq |\gamma| |(v, w_x)| + \int_{\Omega} |f(u) - f(v)| \, |w| dx \qquad (5.50)$$

eşitsizliği bulunur.

(5.50) nin sol tarafındaki 2. terim pozitif olduğundan bu terim ihmal edilebilir. (5.50) nin sağ tarafındaki 1. terim için Cauchy-Schwarz ve aritmetik-geometrik eşitsizlikleri kullanılırsa,

$$|\gamma| \, |(v, w_x)| \leq |\gamma| \|v\| \|w_x\| \leq \frac{|\gamma|^2}{2} \|v\|^2 + \frac{1}{2} \|w_x\|^2 \qquad (5.51)$$

elde edilir.

(5.20) yardımıyla, (5.50) nin sağ tarafının 2. terimi için,

$$\int_{\Omega} |f(u) - f(v)| \, |w| dx \leq \int_{\Omega} K|w||w| dx = K\|w\|^2 \qquad (5.52)$$

eşitsizliğine ulaşılır.

(5.51) ve (5.52) de elde edilen ifadeler (5.50) de yerlerine yazılırsa,

$$\frac{d}{dt}[E_2(t)] \leq \frac{|\gamma|^2}{2} \|v\|^2 + \frac{1}{2} \|w_x\|^2 + K\|w\|^2 \qquad (5.53)$$

elde edilir.

(5.53) eşitsizliği $M = maks\{1, 2K\}$ olmak üzere,

$$\frac{d}{dt}E_2(t) \leq ME_2(t) + \frac{|\gamma|^2}{2}\|v\|^2 \tag{5.54}$$

şeklinde yazılır ve (5.54), e^{-Mt} ile çarpılırsa,

$$e^{-Mt}\left[\frac{d}{dt}E_2(t) - ME_2(t)\right] \leq \frac{|\gamma|^2}{2}\|v\|^2 e^{-Mt} \tag{5.55}$$

eşitsizliği bulunur.

(5.5) yardımıyla, (5.55)

$$e^{-Mt}\left[\frac{d}{dt}E_2(t) - ME_2(t)\right] \leq \frac{|\gamma|^2}{2}D_1\, e^{-Mt} \tag{5.56}$$

şeklinde yeniden yazılabilir.

(5.56), $(0, t)$ de integre edilirse,

$$\int_0^t \frac{d}{ds}(e^{-Ms}E_2(s))ds \leq \frac{|\gamma|^2}{2}D_1 \int_0^t e^{-Ms}ds$$

$$e^{-Mt}E_2(t) \leq \frac{|\gamma|^2}{2}D_1 \frac{(1 - e^{-Mt})}{M}$$

$$E_2(t) \leq \frac{|\gamma|^2}{2}D_1 \frac{(e^{Mt} - 1)}{M}$$

$$E_2(t) \leq \frac{D_1}{2M}|\gamma|^2 e^{Mt} \tag{5.57}$$

eşitsizliğine ulaşılır.

(5.57) eşitsizliğinden görülür ki, γ_1 ve γ_2 birbirine ne kadar çok yaklaşırsa, u ve v çözümleri birbirine o kadar yaklaşır. $\gamma_1 - \gamma_2 = 0$ olursa $w = u - v = 0$ olur. Böylece u ve v çözümlerinin γ katsayısına sürekli bağımlılığı gösterilmiş olur.

BÖLÜM 6. TARTIŞMA VE SONUÇ

Yapılan bu çalışmada BBMB denkleminin çözümlerinin katsayılara bağımlılığı çeşitli makaleler ele alınarak incelenmiştir. Her bir bölümde sırasıyla "A Class of Exact Solutions of the BBM Equations" ve "Existence and Uniqueness for Periodic Solutions of the Benjamin-Bona-Mahony Equation'' adlı makaleler detaylı olarak incelenmiş ve daha önce çalışılmamış olan BBMB denkleminin çözümlerinin katsayılara sürekli bağımlılığı incelenmiştir.

Aynı şekilde diğer kısmi türevli diferansiyel denklemler için de benzer işlemler yapılabilir.

KAYNAKLAR

[1] Kumar, V., Gupta, R. K., Jiwari, R., Painlevé Analysis, Lie Symmetries and Exact Solutions for Variable Coefficients Benjamin-Bona-Mahony-Burger (BBMB) Equation, Commun. Theor. Phys. 60, 175–182, 2013.

[2] Russell J. S. Report of the Fourteenth Meeting of The British Association for the Advancement of Science, London: John Murray, 311–390, Plates XLVII–LVII, York, September, 1844.

[3] Korteweg D. J., de Vries G. On the Change of Form of Long Waves Advancing in a Rectangular Canal, and on a New Type of Long Stationary Waves, Philosophical Magazine 39, 240, 422–443, 1895.

[4] Zabusky, N. J., Kruskal, M. D.: Interaction of ”Solitons” in a Collisionless Plasma and the Recurrence of Initial States, Physical Review Letters, 15, 6, 240–243, 1965.

[5] Benjamin B., Bona J. L., Mahony J. J., Model equations for long waves in nonlinear dispersive systems, Philosophical Transactions Society London Series A, 272, 47-78, 1972.

[6] Peregrine, D.H., Calculations of the development of an undular bore, J. Fluid Mech. 25, 321–330, 1966.

[7] Zhang, H., Wei, G.M., Gao, Y.T.: On the general form of the Benjamin-Bona-Mahony equation in fluid mechanics, China, pp. 373, 2001.

[8] Zhang, L., Decay of solution of generalized BBMB equations in n-space dimensions, Nonlinear Analysis Theory. Methods & Applications, Vol. 25. No. 12. pp. 1343-1369, 1995.

[9] Gözükızıl, Ö.F., Akçağıl, Ş.: The tanh-coth method for some nonlinear pseudoparabolic equations with exact solutions. Department of Mathematics, Sakarya University, Sakarya, Turkey, pp. 1, 2013.

[10] Bruzón MS, Gandarias ML. Exact solutions for a generalized Benjamin–Bona–Mahony–Burgers equation. J Nonlinear Syst Appl 2009:151–4.

[11] Bruzón, M.S., Garrido T. M., de la Rosa, R.: Conservation laws and exact solutions of a Generalized Benjamin–Bona–Mahony–Burgers equation, Chaos, Solitons and Fractals 89, 578–583, 2016.

[12] Bruzón, M. S., Gandarias, M.L.: Conservation laws for a family of Benjamin-Bona-Mahony-Burgers equations, NSC 2012-4th IEEE International Conference on Nonlinear Science and Complexity, Hungary, 2012.

[13] Muatjetjeja, B., Khalique, C. M.: Benjamin–Bona–Mahony Equation with Variable Coefficients: Conservation Laws, Symmetry 2014, 6, 1026-1036.

[14] Lu, B., Yuan, G., Yang, J.: A class of exact solutions of the BBM equations. Henan Institute of Science and Technology, Xinxiang, Henan, China,577-580, 2011.

[15] Medeiros, L.A., Perla Menzala, G.: Existence and uniqueness for periodic solutions of the Benjamin-Bona-Mahony equation. SIAM, J. Math. Anal. 8, 792–799, 1977.

[16] Adams R. A., Sobolev Spaces, Academic Press, New York, 1975.

[17] Musayev B., Alp M., Fonksiyonel Analiz, 1. Baskı, Balcı Yayınları, 2000.

[18] Pişkin, E.: Sobolev Uzayları (Eşitsizlikler, L^p Uzayları, Zayıf Türev), Seçkin Yayıncılık, Ankara, pp. 25, 38, 60, 90, 96, 97, 2017.

[19] Adams, R. A.: Sobolev Spaces, Academic Press, New York, pp. 10, 11, 22, 1975.

[20] Soykan, Y.: Fonksiyonel Analiz, 1. Baskı, Nobel Yayın Dağıtım, 2008.

[21] Lu, B., Yuan, G., Yang, J.: A class of exact solutions of the BBM equations. Henan Institute of Science and Technology, Xinxiang, Henan, China,577-580, 2011.

[22] Fan, E.: Extended tanh - function method and its applications to nonlinear equations. Phys. Lett. A 277, 212–218, 2000.

[23] Liu, S.: Jacobi elliptic function expansion method and its application in solving the nonlinear wave equations. Physics Journal 50(11), 2068–2073, 2001.

[24] Wang, M.L.: Solitary wave solution for variant Boussinesq equations. Phys. Lett. A. 199, 169–172, 1995.

[25] Lou, S., Guang, J.: Ni Physics Department, Fudan University Publising, Shanghai, 2002.

[26] Biler, P.: Long time behavior of solutions of the generalized Benjamin-Bona-Mahony equation in two space dimensions. Diff. Integral Egns. 5, 891–901, 1992.

[27] Albert, J.: Dispersion of low energy waves for the generalized Benjamin-Bona-Mahony equation. J. Differential Equations 63, 111–134, 1986.

[28] Zhang, L.H.: Decay of solutions of generalized Benjamin-Bona-Mahony equations. Acta Math. Sinica 10, 428–488, 1994.

[29] Sjöberg, A., On the Korteweg-de Vries equation: Existence and uniqueness, J. Math. Anal. Appl., 29, pp. 569-579, 1970.

[30] Neves, B. P., Sur un problème non linéaire d'évolution, C.R. Acad. Sci. Paris Série A-18, T.281, pp. 231-232, 1975.

[31] Coddington, E. A., Levinson, N., Theory of Ordinary Differential Equations, McGraw-Hill, New York, 1955.

[32] Peregine, D. H., Calculations of the development of an undular bore, J. Fluid Mech., 25, Part 2, pp. 321-330, 1966.

[33] Lions, J. L., Quelques Méthodes de Résolution des Problèmes aux Limites Non Linéaires, Dunod, Gauthier-Villars, Paris, 1969.

[34] Miranda, M.M., Weak solutions of a modified KdV equation. Bol. Soc. Brasil. Mat. to appear.

[35] Godounov, S., Equations de la Physique Mathématique, Editions MIR, Moscow, 1973.

[36] Benjamin, T. B., Lectures on non linear wave motion, Non linear Wave Motion, Lectures on Applied Mathematics, vol. 15, American Mathematical Society, Providence, RI, 1974.

ÖZGEÇMİŞ

Zeynep Sümeyye Çelik, 08.10.1990'da İstanbul'da doğdu. İlk, orta ve lise eğitimini Sakarya'da tamamladı. 2008 yılında Arifiye Anadolu Öğretmen Lisesi'nden mezun oldu. 2008 yılında başladığı Dokuz Eylül Üniversitesi Ortaöğretim Matematik Öğretmenliği'ni 2013 yılında bitirdi. 2013 yılında Sakarya Üniversitesi Matematik Bölümü'nde yüksek lisans eğitimine başladı. Aynı zamanda 2013 yılında Milli Eğitime atanarak Geyve Metem Lisesi'nde kadrolu matematik öğretmeni olarak çalışmaya başladı. 2014 yılında bir yıl süreliğine Milli Eğitim Bakanlığı'ndan izin alarak İsveç'te Umea Üniversitesi'nde öğrenimine devam etti. 2015 yılında görevine geri döndü. Halen Geyve Metem Lisesi'nde matematik öğretmeni olarak görev yapmaktadır.