T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ESNEK PARÇALI METRİK UZAYLAR ÜZERİNE

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Oğulcan OLGUN

Enstitü Anabilim Dalı	**:**	**MATEMATİK**
Enstitü Bilim Dalı	**:**	**TOPOLOJİ**
Tez Danışmanı	**:**	**Doç. Dr. İsmet ALTINTAŞ**

Ocak 2019

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ESNEK PARÇALI METRİK UZAYLAR ÜZERİNE

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Oğulcan OLGUN

Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK

Bu tez 11.01.2019 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği ile kabul edilmiştir.

Doç. Dr.	Doç. Dr.	Dr. Öğr. Üyesi
Mahpeyker ÖZTÜRK	İsmet ALTINTAŞ	Kemal TAŞKÖPRÜ
Jüri Başkanı	Üye	Üye

BEYAN

Tez içindeki tüm verilerin akademik kurallar çerçevesinde tarafımdan elde edildiğini, görsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçların akademik ve etik kurallara uygun şekilde sunulduğunu, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezde yer alan verilerin bu üniversite veya başka bir üniversitede herhangi bir tez çalışmasında kullanılmadığını beyan ederim.

Oğulcan OLGUN

11.01.2019

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimim boyunca kıymetli bilgilerini ve deneyimlerini benden esirgemeyen, çalışmalarımın her aşamasını sabır ve titizlik ile takip eden, yorum ve önerileri ile yardımcı olan, gerekli tüm kolaylıkları gösterip desteğini esirgemeyen, öğrencisi olduğum için onur duyduğum danışman hocam Doç. Dr. İsmet ALTINTAŞ'a, teşekkür ve saygılarımı sunarım.

Hem ders aşamasında hem de tez aşamasında önerileri ile beni yönlendirip manevi desteklerini benden esirgemeyen değerli hocalarım Prof. Dr. Soley Ersoy'a, Prof. Dr. Ömer Faruk GÖZÜKIZIL'a, Doç. Dr. Mahmut AKYİĞİT'e minnet ve şükranlarımı sunarım.

Hayatımın her evresinde bana destek olup yardımlarını esirgemedikleri için babam Can OLGUN'a, annem Ayla OLGUN'a ve kardeşim İrem OLGUN'a tüm kalbimle teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

A	: Parametreler kümesi
β	: Esnek baz
$\mathfrak{B}$	: Esnek eleman sınıfı
$\left(F^{C}, A\right)$	: F esnek kümesini esnek tümleyeni
$(F^{\mathbb{C}}, A)$	: F esnek kümesinin elemanter esnek tümleyeni
$\mathcal{P}(X)$	: X kümesinin kuvvet kümesi
Φ	: Boş esnek küme
$\mathbb{R}(A)$	: Esnek reel sayıların kümesi
$S_A(X)$	: X üzerindeki tüm esnek kümelerin sınıfı
$SE(\tilde{X})$	: $\tilde{X}$ kümesinin tüm esnek elemanlarının sınıfı
$SS(\mathfrak{B})$	: $\mathfrak{B}$ esnek eleman sınıfının ürettiği esnek küme
τ	: Esnek topoloji
$\tilde{X}$	: Mutlak esnek küme
$\tilde{x}$	: Bir esnek eleman
$\tilde{\subseteq}$	: Esnek alt küme
$\tilde{\supseteq}$	: Esnek üst küme
$\tilde{\cup}$	: Esnek birleşim
$\tilde{\cap}$	: Esnek kesişim
$\tilde{\setminus}$	: Esnek fark
$\Cup$	: Elemanter esnek birleşim
$\Cap$	: Elemanter esnek kesişim
$\setminus$	: Elemanter esnek fark
$\tilde{\in}$	: Esnek eleman sembolü

$\tilde{\notin}$	: Esnek elemanı değil
$SS(B_p(\tilde{x},\tilde{\varepsilon}))$	: $\tilde{x}$ merkezli $\tilde{\varepsilon}$ yarıçaplı esnek p-açık yuvar
$SS(B_p[\tilde{x},\tilde{\varepsilon}])$	: $\tilde{x}$ merkezli $\tilde{\varepsilon}$ yarıçaplı esnek p-kapalı yuvar
$\mathfrak{N}$	: $\tilde{x}$ esnek elemanın bir komşuluğu
$SS(\mathfrak{N})$	: $\tilde{x}$ esnek elemanının esnek komşuluğu
$\tilde{N}(\tilde{x})$	: $\tilde{x}$ esnek elemanının esnek komşuluklar ailesi

ÖZET

Anahtar Kelimeler: Esnek küme, esnek eleman, elemanter esnek işlemler, esnek parçalı metrik, esnek parçalı metrik uzayların topolojisi, yakınsama, tamlık.

Bu tezin amacı, esnek kümeler üzerine esnek eleman temelinde esnek parçalı metrik yapısı kurmak ve esnek metrik uzayların bazı topolojik ve tamlık özelliklerini incelemektir. Bu amaç doğrultusunda aşağıdaki çalışmalar yapıldı.

1. Esnek parçalı metrik uzay, esnek eleman üzerinden tanımlandı ve örnekler verildi.

2. Esnek parçalı metrik uzay ile esnek metrik uzay ve klasik parçalı metrik uzay arasındaki ilişkiler ispatlandı.

3. Esnek parçalı metrik uzayda esnek yuvar, esnek komşuluk ve esnek açık küme tanımları verildi ve bir çok özellikleri ispatlandı. Esnek açık kümelerin elemanter esnek birleşimlerinin bir esnek küme olduğu gösterildi. Bazı şartlar altında ((*EP5*) şartı) altında esnek açık iki kümenin elemanter esnek kesişiminin de esnek açık olduğu gösterildi. Böylece (*EP5*) şartını sağlayan her esnek parçalı metrik uzayın elemanter işlemler altında bir esnek topolojik uzay olduğu ispatlandı.

4. Esnek topolojik parçalı metrik uzayında esnek kapalı kümeler, esnek iç kümeler ve esnek kapanış kümeleri tanımlandı ve temel özellikleri ispatlandı.

5. Esnek parçalı metrik uzaylar arasında sürekli fonksiyon, homeomorfizm ve izometri tanımları yapıldı ve temel özellikleri ispatlandı.

6. Esnek parçalı metrik uzayda yakınsak diziler ve Cauchy dizileri incelendi ve esnek metrik uzayın tamlığı üzerine çalışıldı.

ON SOFT PARTIAL METRIC SPACES

SUMMARY

Keywords: Soft set, soft element, elementary operations, soft partial metric, topologi of soft partial metric sapaces, converges, completeness.

The aim of this thesis is to construct a soft partial metric structure on the soft sets by using soft elements and to examine some topological and completeness properties of the soft partial metric spaces. For this purpose, the following studies has been performed.

1. The soft partial metric space has been defined by the soft element and some examples have been given.

2. The relationships between the soft partial metric space and the soft metric space and the classic partial metric space have been proved.

3. The definitions of the soft ball, soft neighborhood and soft open set in the soft partial metric space have been given and the many properties of their have been proved. It was shown that the elementary union of the soft open sets is a soft open set and under some conditions ((*EP5*) contition), the elemantary intersection of two soft open sets is a soft open set. It has thus been proved that every soft partial metric space satisfying the condition (*EP5*) is a soft topological space under elementary operations.

4. The soft closed sets, soft internal sets and soft closure sets in the soft topological partial metric space have been defined and their basic properties have been proved.

5. The definitions of continuous function, homeomorphism and isometry between the soft partial metric spaces have been given and their basic properties have been proved.

6. The convergent and Cauchy sequences of soft elements in soft partial metric space have been examined and the completeness of soft metric space has been studied.

BÖLÜM 1. GİRİŞ

Mühendislik, ekonomi, ve çevre bilimleri gibi alanlarda doğruluk değeri göreceli olan kavramlar ile sık sık karşılaşılır. Bunun sonucunda ortaya çıkan belirsizliği barındıran bir problemin, matematiksel olarak ele alınıp çözülmesi için Aristo mantığı ve Georg Cantor'un klasik kümeler teorisi yetersiz kalmaktadır. Bu tür problemlerin çözülebilmesi için olasılık teorisi, aralık matematiği teorisi, yaklaşımlı kümeler teorisi, bulanık kümeler teorisi, sezgisel bulanık kümeler teorisi ve esnek kümeler teorisi gibi birçok teori geliştirilmiştir. Bunlardan en önemlisi L. A. Zadeh'in geliştirdiği ve belirsizlik kavramıyla büyük ölçüde başa çıkabilen bulanık kümeler teorisi birçok alanda kullanılmıştır [1]. Fakat üyelik fonksiyonlarından yararlanılan bu teoride her bir durum için üyelik fonksiyonunun inşa edilmesi kolay değildir. D. Molodtsov, bu zorlukları ortadan kaldırmak için 1999 ve 2004 yılında esnek kümeler teorisini geliştirmiş, bir esnek küme, tanım kümesi bir parametre kümesi, görüntü kümesi bir evrensel küme olan bir dönüşüm olarak tanımlayarak esnek kümeler teorisini oyun teorisi, olasılık teorisi, optimizasyon teorisi, yöneylem analizi gibi alanlara başarılı bir şekilde uygulamıştır [2,3]. Ayrıca D. Molodtsov ve arkadaşları esnek sayı, esnek türev ve esnek integral gibi kavramları tanımlayarak esnek küme teorisinin temelini oluşturmaya çalışmışlardır [4]. P. K. Maji ve arkadaşları esnek küme teorisini karar verme problemlerinde kullanmış, esnek kümelerin bazı işlemlerini tanımlayıp onların özelliklerini incelemiş ve bulanık esnek küme kavramını tanıtmışlardır [5-8]. Bunların dışında birçok araştırmacı esnek kümeleri ve esnek küme işlemlerini farklı şekillerde yorumlayarak bu konular ile ilgili çeşitli araştırmalar yapmışlardır [9-13].

Son yıllarda yapılan çalışmalarda esnek kümeler üzerine birçok matematiksel yapı kurulmuştur. Bu bağlamda esnek kümeler teorisinde grup, halka, ideal vb. cebirsel yapılar ile ilgili çok sayıda çalışma yapılmış ve bu çalışmaların neticesinde esnek kümeler ile ilgili yeni uygulamalar elde edilmiştir [14-21].

İlk kez 2011 yılında M. Shabir ve M. Naz esnek kümeler üzerine topolojik yapılar kurmuşlardır [22]. W. K. Min bu esnek topolojik uzaylarda esnek ayırma aksiyomları ile ilgili çalışmalar sunmuştur [23]. 2012 yılında H. Hazra ve arkadaşları Shabir ve Naz'ın tanımladığı esnek topolojiden farklı olarak bir topoloji tanımlamışlardır [24]. Bu süreçte A. Aygünoğlu, B. P. Varol ve H. Aygün esnek kümeler ve bulanık esnek kümelerin üzerine topolojik yapılar kurup birçok topolojik kavramı incelemişlerdir [25-28]. İ. Zorlutuna ve arkadaşları esnek topolojik uzaylarda esnek nokta kavramını kullanarak esnek iç nokta, esnek komşuluk, esnek süreklilik ve esnek kompaktlık gibi kavramları tanıtmışlardır [29]. Bunlardan ayrı olarak birçok yazar esnek nokta kavramını kullanıp esnek topolojik uzaylar ile ilgili çok sayıda yeni çalışma yapmışlardır [30-34].

2012 yılında S. Das ve S. K. Samanta, esnek reel küme, esnek reel sayı ve bunların özelliklerini [35], 2013 yılında esnek kompleks küme, esnek kompleks sayı ve bunlar ile ilgili özellikleri [36] inceledikten sonra aynı yıl esnek eleman ile esnek kümeler üzerinde elemanter esnek küme işlemlerini tanımlayarak bu işlemlere göre esnek kümeler üzerine esnek metrik yapıları kurmuşlardır [37]. 2017 yılında K. Taşköprü doktora tezinde esnek kümeler üzerinde elemanter işlemlerle esnek elamenter topolojik yapı kurmuş, diğer esnek topolojik uzaylarla ilişkisini incelemiş ve bu topolojik uzayda birçok kavramı çalışmıştır [38-39].

Öte yandan, son zamanlarda ilgi çekici bir başka alan olan parçalı metrik uzaylar konusu ilk kez 1992 ve 1994 yıllarında, S.G. Matthews tarafından metrik uzayların bir genellemesi olarak ortaya atılmıştır [40-43]. 1995 yılında S.J. O'Neill parçalı metrik uzayların tamlık ve topolojik özelliklerini incelemiştir [44]. Bunların dışında birçok yazar parçalı metrik uzaylarda özellikle sabit nokta teoremleri üzerine çalışmalar yapmıştır. Bu konuda en güncel çalışmalar için [45-49] kaynaklarına bakılabilir.

Bu tezin amacı esnek kümeler üzerine esnek eleman yardımı ile esnek parçalı metrik yapısı kurmak ve bazı tamlık ve topolojik özelliklerini incelemektir. Bu amaç doğrultusunda aşağıdaki çalışmalar yapılmıştır.

İkinci bölümde, sonraki bölümlerde kullanılacak esnek küme ve temel özellikler, esnek eleman, esnek kümeler üzerinde elemanter işlemler, esnek metrik uzaylar elemanter esnek topolojik uzaylar ve esnek fonksiyon kavramı ile ilgili bazı temel özellikler verilmiştir. Aynı bölümde parçalı metrik kavramı ile temel özellikleri kısaca anlatılmış ve bir kaç önemli örnek verilmiştir.

Tezin esas bölümü olan üçüncü bölümde, esnek kümeler üzerine esnek eleman kullanılarak esnek parçalı metrik yapısı kurulmuş ve bazı temel özellikleri ispatlanarak örnekleri verilmiştir. Esnek parçalı metrik uzay, esnek metrik uzay ile karşılaştırılmış ve her esnek metrik uzayın esnek parçalı metrik uzay olduğu görülmüştür. Esnek parçalı metrik uzayla klasik parçalı metrik uzaylar arasında ilişkiler kurulmuştur. Bu bölümde aynı zamanda esnek parçalı metrik uzaylarda esnek açık yuvar, esnek kapalı yuvar, esnek açık küme kavramları tanımlanmış ve bazı önemli özellikleri ispatlanmıştır. Genel olarak esnek metrik uzayın bir elemanter esnek topolojik uzay olmadığı halde tezde verilen (EP5) aksiyomunu sağlayan her esnek parçalı metrik uzayın bir esnek elamenter topolojik uzay olduğu ispatlanmıştır. Bundan sonar esnek elemanter topolojik parçalı metrik uzayda esnek kapalı küme, esnek iç, esnek kapanış tanımları yapılarak bazı özellikleri ispatlanmıştır. Bu bölümde aynı zamanda esnek parçalı metrik uzayda terimleri esnek elemanlar olan dizilerin yakınsaklık, Cauchy dizileri ve bazı özellikleri ile esnek tam parçalı metrik uzaylarda tam kümeler ve kapalı kümelerin bazı temel özellikleri .ispatlanmıştır.

Tezin son bölümü olan tartışmalar ve öneriler bölümünde, bu tezde elde edilen sonuçlar ve tez kapsamındaki çalışmaların devamı niteliğinde olan çalışmalar için bazı öneriler verilmiştir.

BÖLÜM 2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde bazı temel kavramlar verilmektedir. Bu kavramlar, bir sonraki bölümde tanım ve yapıların kurulmasında, teoremlerin ispatlanmasında önbilgi ve yöntem olarak kulanılacaktır.

2.1. Esnek Kümeler

Tanım 2.1.1. [2] $X \neq \varnothing$ evrensel bir küme, $A \neq \varnothing$ parametrelerin bir kümesi ve $\mathcal{P}(X)$, X kümesinin kuvvet kümesi olmak üzere $F : A \to \mathcal{P}(X)$ dönüşümüne X üzerinde bir esnek küme denir ve (F, A) ikilisi ile gösterilir.

Başka bir değişle ile X kümesinin alt kümelerinin parametrelendirilmiş bir sınıfına X üzerinde bir esnek küme denir. Her $\lambda \in A$ için $F(\lambda)$ kümesi, (F, A) esnek kümesinin λ-yaklaşımlı elemanlarının bir kümesi olarak düşünülebilir. Böylece X kümesi üzerinde bir (F, A) esnek kümesi $(F, A) = \{(\lambda, F(\lambda)) : \lambda \in A \text{ ve } F(\lambda) \subset X\}$ biçiminde yazılabilir.

X evrensel kümesi üzerinde A parametre kümesi ile parametrelendirilmiş bütün esnek kümelerin sınıfı $S_A(X)$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.2. [5,10,12] (F, A) ve (G, B), X üzerinde iki esnek küme olsun.

Her $\lambda \in A$ için $F(\lambda) = \varnothing$ ise (F, A) kümesine boş esnek küme denir ve Φ ile gösterilir.

Her $\lambda \in A$ için $F(\lambda)=X$ ise (F,A) kümesine mutlak esnek küme denir ve $\tilde{X}$ ile gösterilir.

$A \subset B$ ve her $\lambda \in A$ için $F(\lambda) \subset G(\lambda)$ ise (F,A) kümesine (G,B) esnek kümesinin esnek alt kümesi denir ve $(F,A)\tilde{\subset}(G,B)$ ile gösterilir. (G,B) kümesine de (F,A) esnek kümesinin esnek üst kümesi denir ve $(G,B)\tilde{\supset}(F,A)$ ile gösterilir. (F,A) kümesi, (G,B) kümesinin esnek alt kümesi ve (G,B) kümesi de (F,A) kümesinin esnek alt kümesi ise (F,A) ve (G,B) kümelerine X üzerinde eşit esnek kümeler denir.

$C = A \cap B$ ve her $\lambda \in C$ için $H(\lambda)=F(\lambda)\cap G(\lambda)$ olmak üzere (H,C) esnek kümesine (F,A) ve (G,B) esnek kümelerinin esnek kesişimi denir ve $(H,C)=(F,A)\tilde{\cap}(G,B)$ ile gösterilir.

$C = A \cup B$ ve her $\lambda \in C$ için

$$H(\lambda)=\begin{cases} F(\lambda) & , \ \lambda \in A-B \\ G(\lambda) & , \ \lambda \in B-A \\ F(\lambda)\cup G(\lambda) & , \ \lambda \in A\cap B \end{cases}$$

olmak üzere (H,C) esnek kümesine (F,A) ve (G,B) esnek kümelerinin esnek birleşimi denir ve $(H,C)=(F,A)\tilde{\cup}(G,B)$ ile gösterilir.

$C = A \setminus B$ ve her $\lambda \in C$ için $H(\lambda)=F(\lambda)\setminus G(\lambda)$ olmak üzere (H,C) esnek kümesine (F,A) ve (G,B) esnek kümelerinin esnek farkı denir ve $(H,C)=(F,A)\tilde{\setminus}(G,B)$ ile gösterilir.

$F^C : A \to \mathcal{P}(X)$ dönüşümü her $\lambda \in A$ için $F^C(\lambda) = X - F(\lambda)$ olmak üzere X üzerindeki (F^C, A) esnek kümesine (F, A) esnek kümesinin esnek tümleyeni denir ve $(F^C, A) = (F, A)^C$ ile gösterilir.

Önerme 2.1.3. [10,12] (F, A), (G, A) ve (H, A), X üzerinde esnek kümeler olmak üzere aşağıdaki eşitlikler sağlanır.

1. $((F,A)\tilde{\cup}(G,A))^C = (F,A)^C \tilde{\cap} (G,A)^C$,
2. $((F,A)\tilde{\cap}(G,A))^C = (F,A)^C \tilde{\cup} (G,A)^C$,
3. $((F,A)\tilde{\cap}(G,A))\tilde{\cup}(H,A) = ((F,A)\tilde{\cup}(H,A))\tilde{\cap}((G,A)\tilde{\cup}(H,A))$,
4. $((F,A)\tilde{\cup}(G,A))\tilde{\cap}(H,A) = ((F,A)\tilde{\cap}(H,A))\tilde{\cup}((G,A)\tilde{\cap}(H,A))$.

2.2. Esnek Elemanlar

Tanım 2.2.1. [35] $X \neq \varnothing$ bir küme ve $A \neq \varnothing$ bir parametreler kümesi olmak üzere $\varepsilon : A \to X$ fonksiyonuna X kümesi üzerinde bir esnek eleman denir.

ε, X üzerinde bir esnek eleman ve bir $(F, A) \in S_A(X)$ verildiğinde her $\lambda \in A$ için $\varepsilon(\lambda) \in (F)(\lambda)$ ise ε esnek elemanı (F, A) esnek kümesine aittir denir ve $\varepsilon \tilde{\in} (F, A)$ ile gösterilir.

Her $\lambda \in A$ için $(F)(\lambda) \subset X$ tek elemanlı bir küme ise (F, A) kümesine tek elemanlı esnek küme denir. Ohalde her tek elemanlı esnek küme, bir esnek eleman olarak alınabilir.

Her $\lambda \in A$ için $(F)(\lambda) \neq \emptyset$ ile X üzerinde tanımlı tüm esnek kümeler ile Φ boş esnek kümenin oluşturduğu sınıf $S(\tilde{X})$ ile ve $(F,A) \in S(\tilde{X})$ esnek kümesinin tüm esnek elemanlarının sınıfı da $SE(F,A)$ ile gösterilir.

Bu tezde kolaylık açısından esnek elemanlar için $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}, \ldots$ gösterimi kullanılmaktadır.

Önerme 2.2.2. [37] Bir $(F,A) \in S(\tilde{X})$ esnek kümenin esnek elemanlarının bir sınıfı, (F,A) esnek kümesini bir esnek alt kümesini üretir. β, $\tilde{X}$ mutlak esnek kümesinin esnek elemanlarının bir sınıfı ise β sınıfının ürettiği esnek küme $SS(\beta)$ ile gösterilir.

Önerme 2.2.3 [37] Herhangi bir $(F,A) \in S(\tilde{X})$ esnek kümesi için $SS(SE(F,A)) = (F,A)$ olur. Fakat $\tilde{X}$ mutlak esnek kümenin esnek elemanlarının bir β sınıfı için $SE(SS(\beta)) \supseteq \beta$ olur.

Uyarı 2.2.4. [37] $\beta_1, \beta_2 \subset SE(\tilde{X})$ olmak üzere $\beta_1 \subset \beta_2$ olsun. Her $\lambda \in A$ için $\beta_1(\lambda) = \beta_2(\lambda)$ ise $SS(\beta_1) = SS(\beta_2)$ olur.

Örnek 2.2.5. [38] $A = \{\lambda, \mu\}$ parametreler kümesi ve $X = \{a,b,c\}$ evrensel kümesi verilsin. Bu durumda

$$\begin{aligned}
&\tilde{x}_1 = \{(\lambda,a),(\mu,a)\}, \quad \tilde{x}_4 = \{(\lambda,a),(\mu,b)\}, \quad \tilde{x}_7 = \{(\lambda,b),(\mu,c)\},\\
&\tilde{x}_2 = \{(\lambda,b),(\mu,b)\}, \quad \tilde{x}_5 = \{(\lambda,a),(\mu,c)\}, \quad \tilde{x}_8 = \{(\lambda,c),(\mu,a)\},\\
&\tilde{x}_3 = \{(\lambda,c),(\mu,c)\}, \quad \tilde{x}_6 = \{(\lambda,b),(\mu,a)\}, \quad \tilde{x}_9 = \{(\lambda,c),(\mu,b)\}
\end{aligned}$$

olmak üzere $SE\left(\tilde{X}\right)=\{\tilde{x}_1,\tilde{x}_2,...,\tilde{x}_9\}$ olur. $\beta_1=\{\tilde{x}_1,\tilde{x}_2\}$, $\beta_2=\{\tilde{x}_1,\tilde{x}_2,\tilde{x}_4,\tilde{x}_5\}$ ve $\beta_3=\{\tilde{x}_1,\tilde{x}_2,\tilde{x}_4,\tilde{x}_6\}$ eleman sınıfları ele alınırsa

$$(F,A)=SS(\beta_1)=SS(\beta_3)=\{(\lambda,\{a,b\}),(\mu,\{a,b\})\},$$

$$(G,A)=SS(\beta_2)=\{(\lambda,\{a,b\}),(\mu,\{a,b,c\})\}$$

elde edilir. Buradan $SE(F,A)=\{\tilde{x}_1,\tilde{x}_2,\tilde{x}_4,\tilde{x}_6\}$ ve $SE(G,A)=\{\tilde{x}_1,\tilde{x}_2,\tilde{x}_4,\tilde{x}_5,\tilde{x}_6,\tilde{x}_7\}$ olup $\beta_1\subset SE(F,A)$, $\beta_2\subset SE(G,A)$ ve $\beta_3=SE(F,A)$ bulunur.

Önerme 2.2.6. [37] Herhangi $(F,A),(G,A)\in S\left(\tilde{X}\right)$ esnek kümeleri için (F,A) kümesinin her esnek elemanı (G,A) kümesinin de bir esnek elemanı ise $(F,A)\tilde{\subset}(G,A)$ olur.

Uyarı 2.2.7. [37] $(F,A),(G,A)\in S\left(\tilde{X}\right)$ iki esnek küme olsun. Bu durumda $\tilde{x}\tilde{\in}(F,A)\tilde{\cup}(G,A)$ ise $\tilde{x}\tilde{\in}(F,A)$ veya $\tilde{x}\tilde{\in}(G,A)$ olması gerekmez. Ayrıca (F,A), (G,A) esnek kümelerinin esnek kesişiminin veya esnek tümleyeninin $S\left(\tilde{X}\right)$ sınıfına ait olması gerekmez.

Örnek 2.2.8. [38] Örnek 2.2.5. üzerinden $(H,A)=\{(\lambda,\{a,c\}),(\mu,\{c\})\}\in S\left(\tilde{X}\right)$ ve $(K,A)=\{(\lambda,\{a,b,c\}),(\mu,\{b,c\})\}\in S\left(\tilde{X}\right)$ esnek kümeleri verilsin. Buradan

$$(K^C,A)=\{(\lambda,\varnothing),(\mu,\{a\})\}\notin S\left(\tilde{X}\right)$$

$$(F,A)\tilde{\cup}(H,A)=\{(\lambda,\{a,b,c\}),(\mu,\{a,b,c\})\}$$

olur. Ancak $\tilde{x}_7 \tilde{\in} (F, A) \tilde{\cup} (H, A)$ olmasına rağmen $\tilde{x}_7 \tilde{\notin} (F, A)$ ve $\tilde{x}_7 \tilde{\notin} (H, A)$ olur. Aynı zamanda $(F, A) \tilde{\cap} (H, A) = \{(\lambda, \{a\}), (\mu, \varnothing)\} \notin S(\tilde{X})$ elde edilir.

2.3. Elemanter Esnek İşlemler

Tanım 2.3.1. [37] $(F, A), (G, A) \in S(\tilde{X})$ iki esnek küme olsun.

$$\beta = \left\{ \tilde{x} \tilde{\in} \tilde{X} : \tilde{x} \tilde{\in} (F, A) \text{ veya } \tilde{x} \tilde{\in} (G, A) \right\}$$

esnek elemanların bir sınıfı olmak üzere $(F, A) \Cup (G, A) = SS(\beta)$ esnek kümesine (F, A) ile (G, A) esnek kümelerinin elemanter birleşimi denir. Yani,

$$(F, A) \Cup (G, A) = SS\big(SE(F, A) \cup SE(G, A)\big)$$

biçiminde tanımlanır.

$$\beta = \left\{ \tilde{x} \tilde{\in} \tilde{X} : \tilde{x} \tilde{\in} (F, A) \text{ ve } \tilde{x} \tilde{\in} (G, A) \right\}$$

olmak üzere $(F, A) \Cap (G, A) = SS(\beta)$ esnek kümesine (F, A) ile (G, A) esnek kümelerinin elemanter kesişimi denir. Yani,

$$(F, A) \Cap (G, A) = SS\big(SE(F, A) \cap SE(G, A)\big)$$

biçiminde tanımlanır.

$$\beta = \left\{ \tilde{x} \tilde{\in} \tilde{X} : \tilde{x} \tilde{\in} (F^C, A) \right\}$$

olmak üzere $(F^{\mathbb{C}}, A) = SS(\beta)$ esnek kümesine (F, A) esnek kümesinin elemanter tümleyeni denir. Diğer bir ifadeyle $(F^{\mathbb{C}}, A) = SS\left(SE\left(F^{C}, A\right)\right)$ biçiminde tanımlanır.

$$\beta = \left\{ \tilde{x} \tilde{\in} \tilde{X} : \tilde{x} \tilde{\in} (F, A) \tilde{\setminus} (G, A) \right\}$$

olmak üzere $(F, A) \setminus (G, A) = SS(\beta)$ esnek kümesine (F, A) ve (G, A) esnek kümelerinin *elemanter farkı* denir. Diğer bir deyişle

$$(F, A) \setminus (G, A) = SS\left(SE\left((F, A) \tilde{\setminus} (G, A)\right)\right)$$

olarak tanımlanır.

Önerme 2.3.2. [37] $(F, A), (G, A) \in S\left(\tilde{X}\right)$ iki esnek küme olsun. Aşağıdaki eşitlikler sağlanır.

1. $(F, A) \Cup (G, A) = (F, A) \tilde{\cup} (G, A)$,
2. $(F, A) \Cap (F^{\mathbb{C}}, A) = \Phi$,
3. Her $i \in I$ için $(F_i, A) = SS(\beta_i)$ ise $\bigcup\!\!\!\bigcup_{i \in I} (F_i, A) = SS\left(\bigcup_{i \in I} \beta_i\right)$.

Önerme 2.3.3. [38,39] $(F, A), (G, A) \in S\left(\tilde{X}\right)$ iki esnek küme olsun. Bu durumda aşağıdakiler sağlanır.

1. $(F, A) \Cap (G, A) \tilde{\subseteq} (F, A) \tilde{\cap} (G, A)$,
2. $(F^{\mathbb{C}}, A) \tilde{\subseteq} (F^{C}, A)$,
3. $(F, A) \setminus (G, A) \tilde{\subseteq} (F, A) \tilde{\setminus} (G, A)$,
4. $(F, A) \Cup (F^{\mathbb{C}}, A) \tilde{\subseteq} \tilde{X}$,

5. Her $i \in I$ için $(F_i, A) = SS(\beta_i)$ ise $\Cap_{i \in I} (F_i, A) \tilde{\supseteq} SS\left(\bigcap_{i \in I} \beta_i \right)$.

Uyarı 2.3.4. [38] $(F,A),(G,A) \in S(\tilde{X})$ iki esnek küme olsun. $(F,A) \Cap (G,A) = \Phi$ olması $(F,A) \tilde{\subseteq} (G^{\mathbb{C}}, A)$ ve $(G,A) \tilde{\subseteq} (F^{\mathbb{C}}, A)$ olmasını gerektirmez. Örneğin; $X = \{a,b,c,d\}$ ve $A = \{\lambda, \mu\}$ olmak üzere

$$(F,A) = \{(\lambda,\{a,b\}),(\mu,\{a,c\})\},$$
$$(G,A) = \{(\lambda,\{c,d\}),(\mu,\{b,c\})\},$$
$$(H,A) = \{(\lambda,\{c,d\}),(\mu,\{a,b,d\})\}$$

esnek kümelerini ve elemanter tümleyenlerini gözönüne alalım. $(F,A) \Cap (G,A) = \Phi$ ve $(F,A) \Cap (H,A) = \Phi$ olmasına rağmen $(F,A) \tilde{\not\subseteq} (G^{\mathbb{C}}, A)$ veya $(G,A) \tilde{\not\subseteq} (F^{\mathbb{C}}, A)$ ve $(F,A) \tilde{\not\subseteq} (H^{\mathbb{C}}, A)$ veya $(H,A) \tilde{\not\subseteq} (F^{\mathbb{C}}, A)$ elde edilir. Ancak $(H^{\mathbb{C}}, A) \tilde{\subseteq} (F,A)$ ve $(F^{\mathbb{C}}, A) \tilde{\subseteq} (H,A)$ olur. Aynı zamanda $(G,A) \Cap (H,A) \neq \Phi$ olmasına rağmen $(G^{\mathbb{C}}, A) \Cap (H^{\mathbb{C}}, A) = \Phi$ olur.

Önerme 2.3.5. [38,39] Herhangi $(F,A),(G,A) \in S(\tilde{X})$ esnek kümeleri için $(F,A) \Cap (G,A) = \Phi$ ve $(F,A) \tilde{\cap} (G,A) \in S(\tilde{X})$ ise $(F,A) \tilde{\subseteq} (G^{\mathbb{C}}, A)$ ve $(G,A) \tilde{\subseteq} (F^{\mathbb{C}}, A)$ olur.

Lemma 2.3.6. [37,39] Herhangi $(F,A),(G,A) \in S(\tilde{X})$ esnek kümeleri için aşağıdakiler sağlanır.

1. $SE((F,A) \Cap (G,A)) = SE(F,A) \cap SE(G,A)$.
2. $SE((F,A) \Cup (G,A)) \supseteq SE(F,A) \cup SE(G,A)$.

Önerme 2.3.7. [37,39] $(F,A),(G,A),(H,A)\in S(\tilde{X})$ iki esnek kümeler olsun. Bu durumda aşağıdakiler sağlanır.

1. $\big((F,A)\Cap(G,A)\big)\Cup(H,A)\,\tilde{\subseteq}\big((F,A)\Cup H,A)\big)\Cap\big((G,A)\Cup(H,A)\big)$.
2. $\big((F,A)\Cup(G,A)\big)\Cap(H,A)\,\tilde{\supseteq}\big((F,A)\Cap(H,A)\big)\Cup\big((G,A)\Cap(H,A)\big)$

Hangi şartlarda elemanter birleşim ve elemanter kesişim işlemlerinin $S(\tilde{X})$ üzerinde dağılma özelliğine sahip olacağı aşağıdaki önermede verilmiştir.

Önerme 2.3.8. [39] $(F,A),(G,A),(H,A)\in S(\tilde{X})$ esnek kümeleri verilsin.

1. Eğer $(F,A)\tilde{\cap}(G,A)\in S(\tilde{X})$ ise

$$\big((F,A)\Cap(G,A)\big)\Cup(H,A)=\big((F,A)\Cup H,A)\big)\Cap\big((G,A)\Cup(H,A)\big),$$

2. Eğer $(F,A)\tilde{\cap}(H,A)\in S(\tilde{X})$ ve $(G,A)\tilde{\cap}(H,A)\in S(\tilde{X})$ ise

$$\big((F,A)\Cup(G,A)\big)\Cap(H,A)=\big((F,A)\Cap(H,A)\big)\Cup\big((G,A)\Cap(H,A)\big)$$

olur.

Önerme 2.3.9. [39] $(F,A),(G,A)\in S(\tilde{X})$ esnek kümeleri verilsin.

1. $(F^C,A)\Cap(G^C,A)\neq\Phi$ ise $\big((F,A)\Cup(G,A)\big)^C=(F^C,A)\Cap(G^C,A)$,
2. $\big((F,A)\Cap(G,A)\big)^C\neq\Phi$ ise $\big((F,A)\Cap(G,A)\big)^C=(F^C,A)\Cup(G^C,A)$.

Önerme 2.3.10. [39] $(F,A),(G,A)\in S(\tilde{X})$ esnek kümeleri verilsin.

1. $(F^{C},A)\Cap(G^{C},A)\neq\Phi$, $(F^{\mathbb{C}},A)\neq\Phi$ ve $(G^{\mathbb{C}},A)\neq\Phi$ ise

$$\left((F,A)\Cup(G,A)\right)^{\mathbb{C}}=(F^{\mathbb{C}},A)\Cap(G^{\mathbb{C}},A),$$

2. $(F,A)\Cap(G,A)\neq\Phi$, $(F^{\mathbb{C}},A)\neq\Phi$ ve $(G^{\mathbb{C}},A)\neq\Phi$ ise

$$\left((F,A)\Cap(G,A)\right)^{\mathbb{C}}=(F^{\mathbb{C}},A)\Cup(G^{\mathbb{C}},A).$$

Uyarı 2.3.11. [29] Yukarıdaki önermede görüldüğü gibi elemanter işlemler De Morgan kurallarını genelde sağlamazlar. Eğer her $(F,A),(G,A)\in S\left(\tilde{X}\right)$ için $(F,A)\tilde{\cap}(G,A)\in S\left(\tilde{X}\right)$, $(F^{C},A),(G^{C},A)\in S\left(\tilde{X}\right)$ ve $(F^{C},A)\tilde{\cap}(G^{C},A)\in S\left(\tilde{X}\right)$ olusa elemanter işlemler için De Morgan kuralları sağlanır.

Tanım 2.3.12. [38,39] $\tau\subset S\left(\tilde{X}\right)$ esnek kümelerin bir sınıfı olsun. Aşağıdaki şartlar sağlanırsa τ sınıfına $\tilde{X}$ üzerinde elemanter işlemlere göre bir esnek topoloji ve $\left(\tilde{X},\tau,A\right)$ üçlüsüne elemanter esnek topoloji denir.

1. $\Phi,\tilde{X}\cup\tau$,
2. $\{(U_i,A)\}_{i\in I}\in\tau$ için $\bigcup\limits_{i\in I}(U_i,A)\in\tau$,
3. $\{(U_i,A)\}_{i=1}^{n}\in\tau$ için $\bigcap\limits_{i\in I}^{n}(U_i,A)\in\tau$.

Tanım 2.3.13. [38] $\mathcal{B}\subset S\left(\tilde{X}\right)$ esnek kümelerin bir sınıfı olsun. Eğer $\mathcal{B}$ sınıfı aşağıdaki şartları sağlarsa bu sınıfa $\tilde{X}$ üzerindeki bir elemanter esnek topoloji için esnek baz denir.

B1. Her $\tilde{x}\tilde{\in}\tilde{X}$ için $\tilde{x}\tilde{\in}B$ olacak şekilde en az bir $B\in\mathcal{B}$ esnek kümesi vardır.

B2. $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ için $\tilde{x} \tilde{\in} \tilde{X}$ ve $\tilde{x} \tilde{\in} B_1 \Cap B_2$ ise $\tilde{x} \tilde{\in} B_3 \tilde{\subset} B_1 \Cap B_2$ olacak şekilde $B_3 \in \mathcal{B}$ esnek kümesi vardır.

2.4. Esnek Reel Sayılar

Tanım 2.4.1. [35,37] $B(\mathbb{R})$, $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesinin boştan farklı tüm sınırlı alt kümelerinin sınıfı olmak üzere $F: A \to B(\mathbb{R})$ dönüşümü ile birlikte (F, A) esnek kümesine esnek reel küme denir. Eğer (F, A) esnek reel kümesi tek elemanlı esnek küme ise (F, A) kümesine karşılık gelen esnek eleman ile ilişkilendirilen bu esnek kümeye esnek reel sayı denir. Tüm esnek reel kümelerin sınıfı $\mathrm{R}(A)$, tüm esnek reel sayıların sınıfı $\mathbb{R}(A)$ ve negatif olmayan esnek reel sayıların sınıfı $\mathbb{R}(A)^*$ ile gösterilir. $\mathbb{R}(A) = SE(\tilde{\mathbb{R}})$ olduğu açıktır.

Bu tezde esnek reel sayılar için $\tilde{r}, \tilde{s}, \tilde{t}, \ldots$ gösterimi ve özel olarak her $\lambda \in A$ için $\tilde{r}(\lambda) = r$ ise $\bar{r}$ gösterimi kullanılmıştır.

$\tilde{r}, \tilde{s} \in \mathbb{R}(A)$ esnek reel sayıları verildiğinde bu esnek reel sayıların sıralaması, her $\lambda \in A$ için $\tilde{r}(\lambda) \leq \tilde{s}(\lambda)$ ise $\tilde{r} \tilde{\leq} \tilde{s}$, $\tilde{r}(\lambda) \geq \tilde{s}(\lambda)$ ise $\tilde{r} \tilde{\geq} \tilde{s}$, $\tilde{r}(\lambda) < \tilde{s}(\lambda)$ ise $\tilde{r} \tilde{<} \tilde{s}$, $\tilde{r}(\lambda) > \tilde{s}(\lambda)$ ise $\tilde{r} \tilde{>} \tilde{s}$ şeklindedir.

Tanım 2.4.3. [35] $(F, A), (G, A) \in R(A)$ esnek reel kümeleri verilsin.

Her $\lambda \in A$ için (F, A) ve (F, A) esnek reel kümelerinin toplamı

$$((F, A) + (G, A))(\lambda) = \{a + b : a \in (F, A)(\lambda),\ b \in (G, A)(\lambda)\},$$

Her $\lambda \in A$ için (F,A) ve (G,A) esnek reel kümelerinin farkı

$$\big((F,A)-(G,A)\big)(\lambda)=\{a-b : a\in(F,A)(\lambda),\ b\in(G,A)(\lambda)\}$$

(F,A) ve (G,A) esnek reel kümelerinin çarpımı her $\lambda \in A$ için

$$\big((F,A).(G,A)\big)(\lambda)=\{a.b : a\in(F,A)(\lambda),\ b\in(G,A)(\lambda)\},$$

(F,A) ve (G,A) esnek reel kümelerinin bölümü her $\lambda \in A$ için

$$\big((F,A)/(G,A)\big)(\lambda)=\{a/b : a\in(F,A)(\lambda),\ b\in(G,A)(\lambda)\setminus\{0\}\}$$

biçiminde tanımlıdır.

Uyarı 2.4.4. [35] $\mathbb{R}(A)$ esnek reel sayılar sınıfı üzerinde toplama, çıkarma, çarpma ve bölme işlemleri $R(A)$ üzerindeki işlemlere benzer şekilde yapılır. Örneğin; $\tilde{r},\tilde{s}\,\tilde{\in}\,\mathbb{R}(A)$ verildiğinde bu iki esnek reel sayının toplamı her $\lambda\in A$ için $(\tilde{r}+\tilde{s})(\lambda)=\{a+b : a=\tilde{r}(\lambda), b=\tilde{s}(\lambda)\}$ olmak üzere $\tilde{r}+\tilde{s}$ biçiminde ve bu iki esnek reel sayının çarpımı her $\lambda\in A$ için $(\tilde{r}.\tilde{s})(\lambda)=\{a.b : a=\tilde{r}(\lambda), b=\tilde{s}(\lambda)\}$ olmak üzere $\tilde{r}.\tilde{s}$ biçimindedir. Bu durumda $\mathbb{R}(A)$, tanımlanan toplama ve çarpma işlemlerine göre bir cisim olur.

2.5. Esnek Fonksiyonlar

Tanım 2.5.1. [38,39] X ve Y boştan farklı herhangi iki küme ve A boştan farklı parametreler kümesi olsun. $f : SE(\tilde{X})\rightarrow SE(\tilde{Y})$ dönüşümüne bir esnek dönüşüm denir.

Örnek 2.5.2. [38] X ve Y boştan farklı herhangi iki küme, A boştan farklı parametreler kümesi ve $\{f_\lambda : \lambda \in A\}$, X 'den Y 'ye kesin dönüşümlerin herhangi bir parametrelendirilmiş ailesi olsun. Bu durumda her $\tilde{x} \tilde{\in} \tilde{X}$ ve her $\lambda \in A$ için $f(\tilde{x})(\lambda) = f_\lambda(\tilde{x}(\lambda))$ şeklinde tanımlanan $f : SE(\tilde{X}) \to SE(\tilde{Y})$ dönüşümü bir esnek dönüşüm olur.

Örnek 2.5.3. [38] X ve Y boştan farklı herhangi iki küme ve A boştan farklı parametreler kümesi olsun. $g : X \to Y$, bir kesin dönüşüm olmak üzere her $\tilde{x} \tilde{\in} \tilde{X}$ ve her $\lambda \in A$ için $f(\tilde{x})(\lambda) = g(\tilde{x}(\lambda))$ şeklinde tanımlanan $f : SE(\tilde{X}) \to SE(\tilde{Y})$ dönüşümü bir esnek dönüşüm olur. Bu şekildeki bir esnek dönüşüme g kesin dönüşümü tarafından üretilen esnek dönüşüm denir. Böylece, X 'den Y 'ye herhangi bir kesin dönüşüm bir esnek dönüşüme genişletilebilir.

Uyarı 2.5.4. [38] Örnek 2.5.3.'ün tersi doğru değildir (Örnek 2.5.5.'e bakınız). Kesin dönüşümlerin herhangi parametrelendirilmiş ailesi bir esnek dönüşüm olmasına rağmen bir esnek dönüşüm kesin dönüşümlerin herhangi parametrelendirilmiş ailesi olmayabilir. Böylece esnek dönüşüm kesin dönüşümlerin herhangi bir parametrelendirilmiş ailesinden daha genel ve daha kapsamlıdır.

Örnek 2.5.5. [38] $X = \{a,b\}$, $Y = \{c,d\}$ ve $A = \{\lambda, \mu\}$ olsun. Bu durumda

$$
\begin{aligned}
\tilde{x}_1 &= \{(\lambda,a),(\mu,a)\}, & \tilde{y}_1 &= \{(\lambda,c),(\mu,c)\},\\
\tilde{x}_2 &= \{(\lambda,a),(\mu,b)\}, & \tilde{y}_2 &= \{(\lambda,c),(\mu,d)\},\\
\tilde{x}_3 &= \{(\lambda,b),(\mu,a)\}, & \tilde{y}_3 &= \{(\lambda,d),(\mu,c)\},\\
\tilde{x}_4 &= \{(\lambda,b),(\mu,b)\}, & \tilde{y}_4 &= \{(\lambda,d),(\mu,d)\}
\end{aligned}
$$

olmak üzere $SE(\tilde{X}) = \{\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3, \tilde{x}_4\}$ ve $SE(\tilde{Y}) = \{\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \tilde{y}_3, \tilde{y}_4\}$ olur.

$f:SE(\tilde{X})\to SE(\tilde{Y})$ esnek dönüşümü $f(\tilde{x}_1)=\tilde{y}_4$, $f(\tilde{x}_2)=\tilde{y}_1$, $f(\tilde{x}_3)=\tilde{y}_2$, $f(\tilde{x}_4)=\tilde{y}_3$ şeklinde tanımlansın. Buradan

$$f(\tilde{x}_1)(\lambda)=\tilde{y}_4(\lambda)\Rightarrow f_\lambda(\tilde{x}_1(\lambda))=f_\lambda(a)=d\,,$$
$$f(\tilde{x}_2)(\lambda)=\tilde{y}_1(\lambda)\Rightarrow f_\lambda(\tilde{x}_2(\lambda))=f_\lambda(a)=c\,,$$
$$f(\tilde{x}_3)(\lambda)=\tilde{y}_2(\lambda)\Rightarrow f_\lambda(\tilde{x}_3(\lambda))=f_\lambda(b)=c,$$
$$f(\tilde{x}_4)(\lambda)=\tilde{y}_3(\lambda)\Rightarrow f_\lambda(\tilde{x}_4(\lambda))=f_\lambda(b)=d$$

olduğundan $f_\lambda:X\to Y$ bir dönüşüm değildir.

Teorem 2.5.6. [39] X ve Y boştan farklı herhangi iki küme ve A boştan farklı parametreler kümesi olsun. $f:SE(\tilde{X})\to SE(\tilde{Y})$ esnek dönüşümü aşağıdaki (f_*) şartını sağlarsa, her $\tilde{x}\tilde{\in}\tilde{X}$ ve her $\xi\in X$ için $\tilde{x}(\lambda)=\xi$ olmak üzere $f_\lambda(\xi)=f(\tilde{x})(\lambda)$ ile tanımlanan $f_\lambda:X\to Y$, her bir $\lambda\in A$ için bir kesin dönüşümdür.

(f_*) $\lambda\in A$ ve $\xi\in X$ için $\{f(\tilde{x})(\lambda):\tilde{x}\tilde{\in}\tilde{X}\ni\tilde{x}(\lambda)=\xi\}$ tek elemanlı bir kümedir.

Tanım 2.5.7. [38] $f:SE(\tilde{X})\to SE(\tilde{Y})$ bir esnek dönüşüm olsun.

1. $(F,A)\in S(\tilde{X})$ esnek kümesinin f altındaki görüntüsü $f(SE(F,A))$ olarak tanımlanır ve (F,A) kümesinin f altındaki esnek görüntü kümesi $SS(f(SE(F,A)))\in S(\tilde{Y})$ esnek kümesidir.

2. $(F',A) \in S(\tilde{Y})$ esnek kümesinin f altındaki ters görüntüsü $f^{-1}(SE(F',A))$ olarak tanımlanır ve (F',A) kümesinin f altındaki esnek ters görüntü kümesi $SS(f^{-1}(SE(F',A))) \in S(\tilde{X})$ esnek kümesidir.

Uyarı 2.5.8. [38] $f : SE(\tilde{X}) \to SE(\tilde{Y})$ bir esnek dönüşüm ve $(F,A) \in S(\tilde{X})$ olmak üzere Önerme 2.2.3 den $f(SE(F,A)) \subset SE(SS(f(SE(F,A))))$ olur.

Uyarı 2.5.9. [38] $(F,A) \in S(\tilde{X})$ ve $\mathfrak{B} \subset SE(\tilde{X})$ için $SS(\mathfrak{B}) = (F,A)$ ve $f : SE(\tilde{X}) \to SE(\tilde{Y})$ bir esnek dönüşüm olsun. Bu durumda $\mathfrak{B} \subseteq SE(F,A)$ olduğundan $f(\mathfrak{B}) \subseteq f(SE(F,A))$ olur. Buradan da $SS(f(\mathfrak{B})) \tilde{\subseteq} SS(f(SE(F,A)))$ olur. Fakat, f esnek dönüşümü (f_*) şartını sağlarsa her $\lambda \in A$ için $f(\mathfrak{B})(\lambda) = f(SE(F,A))(\lambda)$ olacağından Uyarı 2.2.4. gereği $SS(f(\mathfrak{B})) = SS(f(SE(F,A)))$ olur.

Tanım 2.5.10. [39] Teorem 2.5.6 nın şartlarını sağlayan bir esnek dönüşüme esnek fonksiyon adı verilir.

Önerme 2.5.12. [38] Herhangi $(F,A),(G,A) \in S(\tilde{X})$ esnek kümeler ve $f : SE(\tilde{X}) \to SE(\tilde{Y})$ esnek dönüşümü verilsin. Bu durumda aşağıdaki özellikler sağlanır.

1. $(F,A) \tilde{\subseteq} (G,A)$ ise $SS(f(SE(F,A))) \tilde{\subset} SS(f(SE(G,A)))$,
2. $SS(f(SE((F,A) \Cup (G,A)))) \tilde{\supset} SS(f(SE(F,A))) \Cup SS(f(SE(G,A)))$,
3. $SS(f(SE((F,A) \Cap (G,A)))) \tilde{\subset} SS(f(SE(F,A))) \Cap SS(f(SE(G,A)))$,

4. $(F,A) \tilde{\subseteq} (G,A)$ ise $SS\left(f^{-1}\left(SE\left(F,A\right)\right)\right) \tilde{\subset} SS\left(f^{-1}\left(SE\left(G,A\right)\right)\right)$,

5. $SS\left(f^{-1}\left(SE\left((F,A) \Cup (G,A)\right)\right)\right) \tilde{\supset} SS\left(f^{-1}\left(SE\left(F,A\right)\right)\right) \Cup SS\left(f^{-1}\left(SE\left(G,A\right)\right)\right)$

6. $SS\left(f^{-1}\left(SE\left((F,A) \Cap (G,A)\right)\right)\right) \tilde{\subset} SS\left(f^{-1}\left(SE\left(F,A\right)\right)\right) \Cap SS\left(f^{-1}\left(SE\left(G,A\right)\right)\right)$.

Uyarı 2.5.13. [38] $f : SE\left(\tilde{X}\right) \rightarrow SE\left(\tilde{Y}\right)$ esnek fonksiyon ise Uyarı 2.5.9.'dan yukarıdaki önermede 2. 5. ve 6. özelliklerden eşitlik durumu sağlanır.

2.6. Esnek Metrik Uzaylar

Tanım 2.6.1. [37] $X \neq \emptyset$ bir evrensel küme ve $A \neq \emptyset$ bir parametreler kümesi olmak üzere ve $d : SE\left(\tilde{X}\right) \times SE\left(\tilde{X}\right) \rightarrow \mathbb{R}\left(A\right)^{*}$ esnek dönüşümü aşağıdaki şartları sağlarsa d dönüşümüne $\tilde{X}$ üzerinde esnek metrik denir.

EM1. Her $\tilde{x}, \tilde{y} \tilde{\in} \tilde{X}$ için $d\left(\tilde{x}, \tilde{y}\right) \tilde{\geq} \overline{0}$,

EM2. Her $\tilde{x}, \tilde{y} \tilde{\in} \tilde{X}$ için $d\left(\tilde{x}, \tilde{y}\right) = \overline{0} \Leftrightarrow \tilde{x} = \tilde{y}$,

EM3. Her $\tilde{x}, \tilde{y} \tilde{\in} \tilde{X}$ için $d\left(\tilde{x}, \tilde{y}\right) = d\left(\tilde{y}, \tilde{x}\right)$,

EM4. Her $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z} \tilde{\in} \tilde{X}$ için $d\left(\tilde{x}, \tilde{y}\right) \tilde{\leq} d\left(\tilde{x}, \tilde{z}\right) \tilde{+} d\left(\tilde{z}, \tilde{y}\right)$.

$\tilde{X}$ mutlak esnek kümesine üzerindeki d esnek metriği ile birlikte esnek metrik uzay denir ve $\left(\tilde{X}, d, A\right)$ veya $\left(\tilde{X}, d\right)$ ile gösterilir. (*EM1*)-(*EM4*) aksiyomlarına da esnek metrik aksiyomları denir.

Önerme 2.6.2. [37] $\left\{d_{\lambda} : \lambda \in A\right\}$, bir X kesin kümesi üzerindeki kesin metriklerin herhangi parametrelendirilmiş edilmiş ailesi olsun. Bu durumda her $\tilde{x}, \tilde{y} \tilde{\in} \tilde{X}$ ve her $\lambda \in A$ için $d\left(\tilde{x}, \tilde{y}\right)\left(\lambda\right) = d_{\lambda}\left(\tilde{x}\left(\lambda\right), \tilde{y}\left(\lambda\right)\right)$ şeklinde tanımlanan d dönüşümü $\tilde{X}$ üzerinde bir esnek metrik olur.

Önerme 2.6.3. [37] ρ, bir X kesin kümesi üzerindeki herhangi kesin metrik olmak üzere, her $\tilde{x},\tilde{y}\tilde{\in}\tilde{X}$ ve her $\lambda\in A$ için $d(\tilde{x},\tilde{y})(\lambda)=\rho(\tilde{x}(\lambda),\tilde{y}(\lambda))$ şeklinde tanımlanan $d:SE(\tilde{X})\times SE(\tilde{X})\to\mathbb{R}(A)^{*}$ dönüşümü bir esnek metrik olur. Bu şekildeki bir esnek metriğe ρ kesin metriği tarafından üretilen esnek metrik denir. Böylece X üzerindeki herhangi metrik bir esnek metriğe genişletilebilir.

Uyarı 2.6.4. [37] Kesin metriklerin herhangi parametrelendirilmiş ailesi bir esnek metrik olmasına rağmen, herhangi esnek metrik kesin metriklerin parametrelendirilmiş bir ailesi değildir. Böylece esnek metrik, kesin metriklerin herhangi bir parametrelendirilmiş ailesinden daha genel ve daha kapsamlıdır.

Teorem 2.6.5. [37] $X\neq\varnothing$ bir evrensel küme ve $A\neq\varnothing$ bir parametreler kümesi olsun. $\tilde{X}$ üzerinde bir $d:SE(\tilde{X})\times SE(\tilde{X})\to\mathbb{R}(A)^{*}$ esnek metriği aşağıdaki (EM5) şartını sağlarsa her $\tilde{x},\tilde{y}\tilde{\in}\tilde{X}$ için $d_{\lambda}(\tilde{x}(\lambda),\tilde{y}(\lambda))=d(\tilde{x},\tilde{y})(\lambda)$ şeklinde tanımlanan $d_{\lambda}:X\times X\to\mathbb{R}^{+}$, her $\lambda\in A$ için X üzerinde bir metriktir.

EM5. Her $\lambda\in A$, $\tilde{x},\tilde{y}\tilde{\in}\tilde{X}$ ve $(\eta,\xi)\in X\times X$ için $\{d(\tilde{x},\tilde{y})(\lambda):\tilde{x}(\lambda)=\eta,\tilde{y}(\lambda)=\xi\}$ tek elemanlı bir kümedir.

2.7. Parçalı Metrik Uzaylar

Tanım 2.7.1. [41] X boştan farklı bir küme ve $x,y,z\in X$ olmak üzere $p:X\times X\to[0,\infty)$ fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlasın.

P1. $p(x,x)\leq p(x,y)$

P2. $x=y\Leftrightarrow p(x,x)=p(x,y)=p(y,y)$

P3. $p(x,y)=p(y,x)$

P4. $p(x,z)\leq p(x,y)+p(y,z)-p(y,y)$

Bu durumda p fonksiyonuna X üzerinde bir *parçalı metrik*, (X,p) ikilisine de *parçalı metrik uzay* adı verilir.

Eğer $p(x,y)=0$ ise $(P1)$ ve $(P2)$ şartlarından $x=y$ elde edilir. Fakat $x=y$ ise $p(x,y)$ değeri 0 olmayabilir.

Lemma 2.7.2. [42] Her metrik uzay bir parçalı metrik uzaydır.

Örnek 2.7.3. [41] $p:[0,\infty)\times[0,\infty)\to[0,\infty)$, $p(a,b)=\max\{a,b\}$ dönüşümü için $a,b,c\in[0,\infty)$ ve $0\le a\le b\le c$ olsun.

Çözüm. P1. $a\le b$ olduğundan dolayı $\max\{a,a\}\le\max\{a,b\}$ olur.

P2. $\max\{a,a\}=\max\{a,b\}=\max\{\mathrm{b},\mathrm{b}\}$ olması için gerek ve yeter şart $a=b$ olmasıdır.

P3. $\max\{a,b\}=\max\{b,a\}$ olduğu açıktır.

P4. $\max\{a,b\}=b,\ \max\{a,c\}=c,\ \max\{c,b\}=c,\ \max\{c,c\}=c$ olduğundan dolayı $\max\{a,b\}\le\max\{a,c\}+\max\{c,b\}-\max\{c,c\}$ olduğu kolaylıkla görülür. Sonuç olarak p bir parçalı metrik ve $([0,\infty),p)$ uzayı da bir parçalı metrik uzaydır. Fakat $\forall a,b\in X$ için $a=b$ iken $p(a,b)=0$ olmaz. Dolayısıyla p bir metrik değildir.

Teorem 2.7.4. [43] (X,p) bir parçalı metrik uzay olsun. $d^s(x,y)=2p(x,y)-p(x,x)-p(y,y)$ olarak tanımlansın. Bu durumda (X,d^s) bir metrik uzaydır.

Teorem 2.7.5. [44] (X, p) bir parçalı metrik uzay olsun. $d^w(x, y) = \max\{p(x, y) - p(x, x), p(x, y) - p(y, y)\}$ olarak tanımlansın. Bu durumda (X, d^w) bir metrik uzaydır.

BÖLÜM 3. ESNEK PARÇALI METRİK UZAYLAR

3.1. Esnek Parçalı Metrik

Tanım 3.1.1. $A \neq \emptyset$ parametreler kümesi $\tilde{X}$ mutlak esnek küme olsun. $\forall \tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z} \in SE(\tilde{X})$ için $p : SE(\tilde{X}) \times SE(\tilde{X}) \rightarrow \mathbb{R}(A)^*$ dönüşümü aşağıdaki şartları sağlasın.

EP1. $\overline{0} \,\tilde{\leq}\, p(\tilde{x}, \tilde{x}) \,\tilde{\leq}\, p(\tilde{x}, \tilde{y})$

EP2. $p(\tilde{x}, \tilde{x}) = p(\tilde{x}, \tilde{y}) = p(\tilde{y}, \tilde{y}) \Leftrightarrow \tilde{x} = \tilde{y}$

EP3. $p(\tilde{x}, \tilde{y}) = p(\tilde{y}, \tilde{x})$

EP4. $p(\tilde{x}, \tilde{y}) \,\tilde{\leq}\, p(\tilde{x}, \tilde{z}) + p(\tilde{z}, \tilde{y}) - p(\tilde{z}, \tilde{z})$

Bu durumda p dönüşümü $\tilde{X}$ üzerinde bir *esnek parçalı metrik* ve $(\tilde{X}, p, A)$ üçlüsüne *esnek parçalı metrik uzay* denir.

Uyarı 3.1.2. Eğer $p(\tilde{x}, \tilde{y}) = \overline{0}$ ise (*EP1*) ve (*EP2*) aksiyomlarından $\tilde{x} = \tilde{y}$ elde edilir. Fakat $\tilde{x} = \tilde{y}$ ise $p(\tilde{x}, \tilde{y})$ değeri $\overline{0}$ olmayabilir.

Uyarı 3.1.3. Her esnek metrik uzay bir esnek parçalı metrik uzaydır. Gerçekten yukarıdaki tanımdan $p(\tilde{x}, \tilde{x}) = \overline{0}$ olması durumunda (*EP1-EP4*) aksiyomları ile Tanım 2.6.1 de verilen (*EM1-EM4*) aksiyomlarına dönüşür. Böylece esnek parçalı metrik uzaylar esnek metrik uzaylardan daha geneldir.

Örnek 3.1.4. $p : \mathbb{R}(A)^* \times \mathbb{R}(A)^* \rightarrow \mathbb{R}(A)^*$, $\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c} \in \mathbb{R}(A)^*$ için $p(\tilde{a}, \tilde{b}) = \max\{\tilde{a}, \tilde{b}\}$ olsun. A sonlu parametreler kümesi olmak üzere $(\tilde{\mathbb{R}}^+, p, A)$ bir esnek parçalı metrik uzaydır.

Çözüm. $\tilde{a},\tilde{b},\tilde{c}\in\mathbb{R}(A)^*$ ve $\overline{0}\,\tilde{\leq}\,\tilde{a}\,\tilde{\leq}\,\tilde{b}\,\tilde{\leq}\,\tilde{c}$ olsun.

EP1. $\tilde{a}\,\tilde{\leq}\,\tilde{b}$ olduğundan $\max\{\tilde{a},\tilde{a}\}\,\tilde{\leq}\,\max\{\tilde{a},\tilde{b}\}$ olur.

EP2. $\Rightarrow$: $\max\{\tilde{a},\tilde{a}\}=\max\{\tilde{a},\tilde{b}\}=\max\{\tilde{b},\tilde{b}\}$ olsun. Bu durumda $\tilde{a}=\max\{\tilde{a},\tilde{b}\}=\tilde{b}$ ve buradan da $\tilde{a}=\tilde{b}$ bulunur.

$\Leftarrow$: $\tilde{a}=\tilde{b}$ olsun. Bu durumda $\max\{\tilde{a},\tilde{a}\}=\max\{\tilde{a},\tilde{b}\}$ ve $\max\{\tilde{a},\tilde{b}\}=\max\{\tilde{b},\tilde{b}\}$ yazılabilir. Buradan da $\max\{\tilde{a},\tilde{a}\}=\max\{\tilde{a},\tilde{b}\}=\max\{\tilde{b},\tilde{b}\}$ elde edilir.

EP3. $\max\{\tilde{a},\tilde{b}\}=\max\{\tilde{b},\tilde{a}\}$ olduğu açıktır.

EP4. $\max\{\tilde{a},\tilde{b}\}=\tilde{b}$, $\max\{\tilde{a},\tilde{c}\}=\tilde{c}$, $\max\{\tilde{c},\tilde{b}\}=\tilde{c}$ ve $\max\{\tilde{c},\tilde{c}\}=\tilde{c}$ olduğundan $\max\{\tilde{a},\tilde{b}\}\,\tilde{\leq}\,\max\{\tilde{a},\tilde{c}\}+\max\{\tilde{c},\tilde{b}\}-\max\{\tilde{c},\tilde{c}\}$ olduğu kolaylıkla görülür.

Dolayısıyla $(\tilde{\mathbb{R}}^{+},p,A)$ bir esnek parçalı metrik uzaydır. $\tilde{a}\neq\overline{0}$ için $p(\tilde{a},\tilde{a})\neq\overline{0}$ olduğundan (*EM2*) şartı sağlanmaz. Yani bir esnek metrik uzay değildir.

Örnek 3.1.5. A sonlu parametreler kümesi, $\tilde{\mathbb{R}}^{-}=\{(\lambda,\mathbb{R}^{-}):\forall\lambda\in A,\ \mathbb{R}^{-}=(-\infty,0]\}$ ve $SS(\tilde{\mathbb{R}}^{-})=\mathbb{R}(A)^{-}$ olsun. $p:\mathbb{R}(A)^{-}\times\mathbb{R}(A)^{-}\to\mathbb{R}(A)^{*}$ dönüşümü $\forall\tilde{x},\tilde{y}\in\mathbb{R}(A)^{-}$ için $p(\tilde{x},\tilde{y})=-\min\{\tilde{x},\tilde{y}\}$ ile tanımlansın. Bu durumda $(\tilde{\mathbb{R}}^{-},p,A)$ uzayı bir esnek parçalı metrik uzaydır.

Çözüm. $\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z}\in\mathbb{R}(A)^{-}$ esnek elemanları verilsin.

EP1. $p(\tilde{x},\tilde{x})=-\min\{\tilde{x},\tilde{x}\}=-\tilde{x}\,\tilde{\geq}\,\overline{0}$ olur. $\min\{\tilde{x},\tilde{y}\}\,\tilde{\leq}\,\tilde{x}$ olduğu için $p(\tilde{x},\tilde{x})\,\tilde{\leq}\,p(\tilde{x},\tilde{y})$ olur.

EP2. $p(\tilde{x},\tilde{x})=p(\tilde{x},\tilde{y})=p(\tilde{y},\tilde{y})\Leftrightarrow-\min\{\tilde{x},\tilde{x}\}=-\min\{\tilde{x},\tilde{y}\}=-\min\{\tilde{y},\tilde{y}\}$.

$$\Leftrightarrow -\tilde{x} = -\tilde{y} \Leftrightarrow \tilde{x} = \tilde{y} .$$

EP3. $p(\tilde{x},\tilde{y}) = -\min\{\tilde{x},\tilde{y}\} = -\min\{\tilde{y},\tilde{x}\} = p(\tilde{y},\tilde{x})$.

EP4. $\tilde{y} \,\tilde{\leq}\, \tilde{x} \leq \tilde{z}$, $\tilde{x} \,\tilde{\leq}\, \tilde{y} \,\tilde{\leq}\, \tilde{z}$ ve $\tilde{x} \,\tilde{\leq}\, \tilde{z} \,\tilde{\leq}\, \tilde{y}$ durumları gözönüne alınsın. Bu durumda $\min\{\tilde{x},\tilde{y}\} \,\tilde{\geq}\, \min\{\tilde{x},\tilde{z}\} + \min\{\tilde{z},\tilde{y}\} - \min\{\tilde{z},\tilde{z}\}$ olduğundan

$$p(\tilde{x},\tilde{y}) \,\tilde{\leq}\, p(\tilde{x},\tilde{z}) + p(\tilde{z},\tilde{y}) - p(\tilde{z},\tilde{z})$$

elde edilir. Dolayısıyla $(\tilde{\mathbb{R}}^{-}, p, A)$ bir esnek parçalı metrik uzaydır.

Örnek 3.1.6. A sonlu parametreler kümesi,

$$\tilde{Y} = \{(\lambda,[a,b]) : \forall\lambda \in A,\, [a,b] \subset \mathbb{R},\, a \leq b\}$$

bir esnek küme ve her $(F,A),(G,A) \in S(\tilde{Y})$ için

$$p((F,A),(G,A)) = \max\{\tilde{b},\tilde{d}\} - \min\{\tilde{a},\tilde{c}\}$$

olsun. Bu durumda $(\tilde{Y}, p, A)$ bir esnek parçalı metrik uzaydır.

Çözüm.

$$(G,A) = \{(\lambda,[a,b]) : \lambda \in A,\, [a,b] \subset \mathbb{R},\, a \leq b\}$$
$$(F,A) = \{(\lambda,[c,d]) : \lambda \in A,\, [c,d] \subset \mathbb{R},\, c \leq d\}$$
$$(H,A) = \{(\lambda,[e,f]) : \lambda \in A,\, [e,f] \subset \mathbb{R},\, e \leq f\}$$

ve $\tilde{a} \,\tilde{\leq}\, \tilde{c} \,\tilde{\leq}\, \tilde{e}$ ve $\tilde{b} \,\tilde{\leq}\, \tilde{d} \,\tilde{\leq}\, \tilde{f}$ olsun.

EP1. $\tilde{b} - \tilde{a} \,\tilde{\leq}\, \tilde{d} - \tilde{a}$ olduğundan $\max\{\tilde{b},\tilde{b}\} - \min\{\tilde{a},\tilde{a}\} \,\tilde{\leq}\, \max\{\tilde{b},\tilde{d}\} - \min\{\tilde{a},\tilde{c}\}$ elde edilir.

EP2. $\Rightarrow$: $\max\{\tilde{b},\tilde{b}\}-\min\{\tilde{a},\tilde{a}\}=\max\{\tilde{b},\tilde{d}\}-\min\{\tilde{a},\tilde{c}\}=\max\{\tilde{d},\tilde{d}\}-\min\{\tilde{c},\tilde{c}\}$ olsun. Buradan $\tilde{b}-\tilde{a}=\tilde{d}-\tilde{a}=\tilde{d}-\tilde{c}$ olur. Yani $\tilde{a}=\tilde{c}$ ve $\tilde{b}=\tilde{d}$ olur.

$\Leftarrow$: $\tilde{a}=\tilde{c}$ ve $\tilde{b}=\tilde{d}$ olsun. Buradan $\max\{\tilde{b},\tilde{b}\}-\min\{\tilde{a},\tilde{a}\}=\max\{\tilde{b},\tilde{d}\}-\min\{\tilde{a},\tilde{c}\}$ ve $\max\{\tilde{b},\tilde{d}\}-\min\{\tilde{a},\tilde{c}\}=\max\{\tilde{d},\tilde{d}\}-\min\{\tilde{c},\tilde{c}\}$ yazılabilir. Bu da $\max\{\tilde{b},\tilde{b}\}-\min\{\tilde{a},\tilde{a}\}=\max\{\tilde{b},\tilde{d}\}-\min\{\tilde{a},\tilde{c}\}=\max\{\tilde{d},\tilde{d}\}-\min\{\tilde{c},\tilde{c}\}$ demektir.

EP3. $\max\{\tilde{b},\tilde{d}\}-\min\{\tilde{a},\tilde{c}\}=\max\{\tilde{d},\tilde{b}\}-\min\{\tilde{c},\tilde{a}\}$ olduğu açıktır.

EP4. $\max\{\tilde{b},\tilde{d}\}-\min\{\tilde{a},\tilde{c}\}=\tilde{d}-\tilde{a}$, $\max\{\tilde{b},\tilde{f}\}-\min\{\tilde{a},\tilde{e}\}=\tilde{f}-\tilde{e}$, $\max\{\tilde{f},\tilde{d}\}-\min\{\tilde{e},\tilde{c}\}=\tilde{d}-\tilde{c}$ ve $\max\{\tilde{f},\tilde{f}\}-\min\{\tilde{e},\tilde{e}\}=\tilde{f}-\tilde{e}$ olduğundan $\tilde{d}-\tilde{a}\,\tilde{\leq}\,(\tilde{f}-\tilde{a})+(\tilde{f}-\tilde{c})-(\tilde{f}-\tilde{e})$ olur. Bu durumda

$$p((G,A),(F,A))\,\tilde{\leq}\,p((G,A),(H,A))+p((H,A),(F,A))-p((H,A),(H,A))$$

elde edilir. Sonuç olarak p bir esnek parçalı metrik ve $(\tilde{Y},p,A)$ bir esnek parçalı metrik uzaydır.

Teorem 3.1.7., bir X kümesi üzerindeki kesin parçalı metriklerin her parametrize edilmiş ailesi $\{p_\lambda:\lambda\in A\}$, $\tilde{X}$ üzerinde bir esnek parçalı metriktir.

İspat. $\forall\lambda\in A$ ve $\tilde{x},\tilde{y}\in SE(\tilde{X})$ için $\tilde{x}(\lambda),\tilde{y}(\lambda)\in X$ olsun. $\forall\lambda\in A$ ve $\forall\tilde{x},\tilde{y}\in SE(\tilde{X})$ için $p:SE(\tilde{\mathrm{X}})\times \mathrm{SE}(\tilde{\mathrm{X}})\to\mathbb{R}(A)^*$ dönüşümü $\tilde{X}$ üzerinde bir esnek parçalı metrik uzay olduğunu göstermek için ($EP1-EP4$) aksiyomlarını sağlatılmalıdır.

EP1. $\overline{0}\,\tilde{\leq}\,p(\tilde{x},\tilde{x})(\lambda)\,\tilde{\leq}\,p(\tilde{x},\tilde{y})(\lambda)$ olup $\overline{0}\,\tilde{\leq}\,p_\lambda(\tilde{x}(\lambda),\tilde{x}(\lambda))\,\tilde{\leq}\,p_\lambda(\tilde{x}(\lambda),\tilde{y}(\lambda))$ olur.

EP2. $p(\tilde{x},\tilde{x})(\lambda)=p(\tilde{x},\tilde{y})(\lambda)=p(\tilde{y},\tilde{y})(\lambda)$

$$\Leftrightarrow \ p_\lambda(\tilde{x}(\lambda),\tilde{x}(\lambda)) = p_\lambda(\tilde{x}(\lambda),\tilde{y}(\lambda)) = p_\lambda(\tilde{y}(\lambda),\tilde{y}(\lambda))$$
$$\Leftrightarrow \ \tilde{x}(\lambda) = \tilde{y}(\lambda). \Leftrightarrow \tilde{x} = \tilde{y}.$$

EP3. $p(\tilde{x},\tilde{y})(\lambda) = p_\lambda(\tilde{x}(\lambda),\tilde{y}(\lambda)) = p_\lambda(\tilde{y}(\lambda),\tilde{x}(\lambda)) = p(\tilde{y},\tilde{x})(\lambda)$ olduğu için $p(\tilde{x},\tilde{y}) = p(\tilde{y},\tilde{x})$ olur.

EP4. $\forall \tilde{x},\tilde{y},\tilde{z} \in SE(\tilde{\mathrm{X}})$ için

$$\begin{aligned}
[p(\tilde{x},\tilde{z}) + p(\tilde{z},\tilde{y}) - p(\tilde{z},\tilde{z})](\lambda) &= p(\tilde{x},\tilde{z})(\lambda) + p(\tilde{z},\tilde{y})(\lambda) - p(\tilde{z},\tilde{z})(\lambda) \\
&= p_\lambda(\tilde{x}(\lambda),\tilde{z}(\lambda)) + p_\lambda(\tilde{z}(\lambda),\tilde{y}(\lambda)) - p_\lambda(\tilde{z}(\lambda),\tilde{z}(\lambda)) \\
&\tilde{\geq} p_\lambda(\tilde{x}(\lambda),\tilde{y}(\lambda)) \\
&= p(\tilde{x},\tilde{y})(\lambda)
\end{aligned}$$

olur. Böylece $p(\tilde{x},\tilde{y}) \tilde{\leq} p(\tilde{x},\tilde{z}) + p(\tilde{z},\tilde{y}) - p(\tilde{z},\tilde{z})$ elde edilir. O halde p dönüşümü $\tilde{X}$ üzerinde bir esnek parçalı metriktir.

Sonuç 3.1.8. ρ bir X kümesi üzerinde herhangi bir kesin metrik olmak üzere $\tilde{X}$ üzerinde bir esnek parçalı metriğe genişletilebilir.

İspat. $\forall \tilde{x},\tilde{y} \tilde{\in} \tilde{X}$ ve $\forall \lambda \in A$ için $p(\tilde{x},\tilde{y}) = \rho(\tilde{x}(\lambda),\tilde{y}(\lambda))$ şeklinde tanımlanmış $p(\tilde{x},\tilde{y}) \tilde{\leq} p(\tilde{x},\tilde{z}) + p(\tilde{z},\tilde{y}) - p(\tilde{z},\tilde{z})$ dönüşümünü tanımlayalım. Teorem 3.1.7. ispatındaki yöntemin aynısını kullanarak p dönüşümünün $\tilde{X}$ üzerinde bir esnek parçalı metrik olduğu kolaylıkla ispatlanır.

ρ kesin parçalı metriği kullanılarak tanımlanan esnek parçalı metriğe ρ metriği tarafından *üretilen esnek parçalı metrik* denir.

Uyarı 3.1.9. Teorem 3.1.7 nin tersi doğru değildir. Kesin parçalı metriklerin herhangi parametrize edilmiş ailesi bir esnek parçalı metrik olmasına rağmen, herhangi esnek parçalı metrik, kesin parçalı metriklerin parametrize edilmiş bir ailesi olması gerekmez. Böylece esnek parçalı metrik, kesin parçalı metriklerin herhangi parametrize edilmiş ailesinden daha genel ve daha kapsamlıdır.

Teorem 3.1.10. Eğer $\tilde{X}$ üzerinde bir p esnek parçalı metriği aşağıdaki (*EP5*) aksiyomunu sağlarsa $\forall \tilde{x}, \tilde{y} \tilde{\in} \tilde{X}$ ve $\forall \lambda \in A$ için $p_\lambda(\tilde{x}(\lambda), \tilde{y}(\lambda)) = p(\tilde{x}, \tilde{y})(\lambda)$ şeklinde tanımlanan $p_\lambda : X \times X \to \mathbb{R}^+$ fonksiyonu X üzerinde bir parçalı metriktir.

EP5. $\forall \lambda \in A$, $\tilde{x}, \tilde{y} \tilde{\in} \tilde{X}$ ve $(r, s) \in X \times X$ için $\{p(\tilde{x}, \tilde{y}(\lambda)); \tilde{x}(\lambda) = r, \tilde{y}(\lambda) = \mathrm{s}\}$ tek elemanlı kümedir.

İspat. $\forall \lambda \in A$ için $p_\lambda : X \times X \to \mathbb{R}^+$, X kümesinin bir sıralı çiftini $t \in \mathbb{R}^+$ elemanına karşılık getiren bir kuraldır. (*EP1*) aksiyomundan $0 \le t$ olur. $\forall \lambda \in A$ için p_λ dönüşümü iyi tanımlı olduğu (*EP5*) aksiyomundan çıkar. Böylece esnek parçalı metrik uzay aksiyomları $\forall \lambda \in A$ için p_λ dönüşümünün parçalı metrik şartlarını verir. Bu bakış açısından p_λ metriği (*EP5*) aksiyomunu sağlayan bir parçalı metrik olduğu görülür.

Teorem 3.1.11. $(\tilde{X}, p, A)$ bir esnek parçalı metrik uzay olsun. $\tilde{x}, \tilde{y} \in SE(\tilde{X})$ için $d^s(\tilde{x}, \tilde{y}) = 2p(\tilde{x}, \tilde{y}) - p(\tilde{x}, \tilde{x}) - p(\tilde{y}, \tilde{y})$ olarak tanımlansın. Bu durumda $(\tilde{X}, d, A)$ bir esnek metrik uzaydır.

İspat. $\forall \tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z} \in SE(\tilde{X})$ olsun.

EM1. $p(\tilde{x}, \tilde{x}) \tilde{\le} p(\tilde{x}, \tilde{y})$, $p(\tilde{y}, \tilde{y}) \tilde{\le} p(\tilde{x}, \tilde{y})$ olduğundan $p(\tilde{x}, \tilde{x}) + p(\tilde{y}, \tilde{y}) \tilde{\le} 2p(\tilde{x}, \tilde{y})$ olur. Buradan $\overline{0} \tilde{\le} 2p(\tilde{x}, \tilde{y}) - p(\tilde{x}, \tilde{x}) - p(\tilde{y}, \tilde{y})$ olup $\overline{0} \le d^s(\tilde{x}, \tilde{y})$ olur.

EM2. $\Rightarrow$: $d^s(\tilde{x},\tilde{y}) = 2p(\tilde{x},\tilde{y}) - p(\tilde{x},\tilde{x}) - p(\tilde{y},\tilde{y}) = \overline{0}$ olsun. Buradan $2p(\tilde{x},\tilde{y}) = p(\tilde{x},\tilde{x}) + p(\tilde{y},\tilde{y})$ olur. $p(\tilde{x},\tilde{x}) \tilde{\leq} p(\tilde{x},\tilde{y})$ olduğundan $2p(\tilde{x},\tilde{y}) + p(\tilde{x},\tilde{x}) \tilde{\leq} p(\tilde{x},\tilde{y}) + p(\tilde{x},\tilde{x}) + p(\tilde{y},\tilde{y})$ ve buradan $p(\tilde{x},\tilde{y}) \tilde{\leq} p(\tilde{y},\tilde{y})$ olur. Diğer taraftan $p(\tilde{y},\tilde{y}) \tilde{\leq} p(\tilde{x},\tilde{y})$ olduğu için $p(\tilde{y},\tilde{y}) = p(\tilde{x},\tilde{y})$ elde edilir. Benzer şekilde $p(\tilde{y},\tilde{y}) \tilde{\leq} p(\tilde{x},\tilde{y})$ olduğundan $2p(\tilde{x},\tilde{y}) + p(\tilde{y},\tilde{y}) \tilde{\leq} p(\tilde{x},\tilde{y}) + p(\tilde{x},\tilde{x}) + p(\tilde{y},\tilde{y})$ ve böylece $p(\tilde{x},\tilde{y}) \tilde{\leq} p(\tilde{x},\tilde{x})$ olur. Diğer taraftan $p(\tilde{x},\tilde{x}) \tilde{\leq} p(\tilde{x},\tilde{y})$ olduğundan $p(\tilde{x},\tilde{x}) = p(\tilde{x},\tilde{y})$ elde edilir. Sonuç olarak $p(\tilde{x},\tilde{x}) = p(\tilde{x},\tilde{y}) = p(\tilde{y},\tilde{y})$ ve dolaysıyla $\tilde{x} = \tilde{y}$ bulunur.

$\Leftarrow$: $\tilde{x} = \tilde{y}$ olsun. $d^s(\tilde{x},\tilde{y}) = 2p(\tilde{x},\tilde{y}) - p(\tilde{x},\tilde{x}) - p(\tilde{y},\tilde{y})$ için $\tilde{x} = \tilde{y}$ olduğundan $2p(\tilde{x},\tilde{x}) - p(\tilde{x},\tilde{x}) - p(\tilde{x},\tilde{x}) = \overline{0}$ olur. Yani $d^s(\tilde{x},\tilde{y}) = \overline{0}$ elde edilir.

EM3. $d^s(\tilde{x},\tilde{y}) = 2p(\tilde{x},\tilde{y}) - p(\tilde{x},\tilde{x}) - p(\tilde{y},\tilde{y}) = 2p(\tilde{y},\tilde{x}) - p(\tilde{y},\tilde{y}) - p(\tilde{x},\tilde{x}) = d^s(\tilde{y},\tilde{x})$ elde edilir.

EM4.
$$\begin{aligned} d^s(\tilde{x},\tilde{y}) &= 2p(\tilde{x},\tilde{y}) - p(\tilde{x},\tilde{x}) - p(\tilde{y},\tilde{y}) \\ &\tilde{\leq} 2(p(\tilde{x},\tilde{z}) - p(\tilde{z},\tilde{y}) - p(\tilde{z},\tilde{z})) - p(\tilde{x},\tilde{x}) - p(\tilde{y},\tilde{y}) \\ &= 2p(\tilde{x},\tilde{z}) - p(\tilde{x},\tilde{x}) - p(\tilde{z},\tilde{z}) + 2p(\tilde{z},\tilde{y}) - p(\tilde{z},\tilde{z}) - p(\tilde{y},\tilde{y}) \\ &= d^s(\tilde{x},\tilde{z}) + d^s(\tilde{z},\tilde{y}) \end{aligned}$$

olur. O halde $(\tilde{X}, d^s, A)$ bir esnek metrik uzaydır.

Teorem 3.1.12. $(\tilde{X}, p, A)$ esnek parçalı metrik uzay olsun. ve $\forall \tilde{x},\tilde{y} \in SE(\tilde{X})$ için $d^w(\tilde{x},\tilde{y}) = \max\{p(\tilde{x},\tilde{y}) - p(\tilde{x},\tilde{x}), p(\tilde{x},\tilde{y}) - p(\tilde{y},\tilde{y})\}$ biçiminde tanımlanan $d^w : SE(\tilde{X}) \times SE(\tilde{X}) \to \mathbb{R}(A)^*$ dönüşümü $\tilde{X}$ üzerinde bir esnek metriktir.

İspat. $\forall \tilde{x},\tilde{y},\tilde{z} \in SE(\tilde{X})$ olsun.

EM1. $(\tilde{X}, p, A)$ esnek parçalı metrik uzay olduğundan $\overline{0} \tilde{\leq} p(\tilde{x}, \tilde{x}) \tilde{\leq} p(\tilde{x}, \tilde{y})$ ve $\overline{0} \tilde{\leq} p(\tilde{y}, \tilde{y}) \tilde{\leq} p(\tilde{x}, \tilde{y})$ olup $\overline{0} \tilde{\leq} d^w(\tilde{x}, \tilde{y})$ elde edilir.

EM2. $d^w(\tilde{x}, \tilde{y}) = \overline{0} \Leftrightarrow \max\{p(\tilde{x}, \tilde{y}) - p(\tilde{x}, \tilde{x}), p(\tilde{x}, \tilde{y}) - p(\tilde{y}, \tilde{y})\} = \overline{0}$

$\Leftrightarrow p(\tilde{x}, \tilde{y}) - p(\tilde{x}, \tilde{x}) = \overline{0}$, $p(\tilde{x}, \tilde{y}) - p(\tilde{y}, \tilde{y}) = \overline{0}$, $\overline{0} \tilde{\leq} p(\tilde{x}, \tilde{y}) - p(\tilde{x}, \tilde{x})$, $\overline{0} \tilde{\leq} p(\tilde{x}, \tilde{y}) - p(\tilde{y}, \tilde{y})$.

$\Leftrightarrow p(\tilde{x}, \tilde{y}) = p(\tilde{x}, \tilde{x})$ ve $p(\tilde{x}, \tilde{y}) = p(\tilde{y}, \tilde{y}) \Leftrightarrow \tilde{x} = \tilde{y}$.

EM3. $(\tilde{X}, p, A)$ esnek parçalı metrik uzay olduğundan $p(\tilde{x}, \tilde{y}) = p(\tilde{y}, \tilde{x})$ eşitliği vardır. Böylece

$$\begin{aligned}
d^w(\tilde{x}, \tilde{y}) &= \max\{p(\tilde{x}, \tilde{y}) - p(\tilde{x}, \tilde{x}), p(\tilde{x}, \tilde{y}) - p(\tilde{y}, \tilde{y})\} \\
&= \max\{p(\tilde{x}, \tilde{y}) - p(\tilde{y}, \tilde{y}), p(\tilde{x}, \tilde{y}) - p(\tilde{x}, \tilde{x})\} \\
&= \max\{p(\tilde{y}, \tilde{x}) - p(\tilde{y}, \tilde{y}), p(\tilde{y}, \tilde{x}) - p(\tilde{x}, \tilde{x})\} \\
&= d^w(\tilde{y}, \tilde{x}).
\end{aligned}$$

EM4. $\max\{p(\tilde{x}, \tilde{y}) - p(\tilde{x}, \tilde{x}), p(\tilde{x}, \tilde{y}) - p(\tilde{y}, \tilde{y})\} = p(\tilde{x}, \tilde{y}) - p(\tilde{x}, \tilde{x})$,

$\max\{p(\tilde{x}, \tilde{z}) - p(\tilde{x}, \tilde{x}), p(\tilde{x}, \tilde{z}) - p(\tilde{z}, \tilde{z})\} = p(\tilde{x}, \tilde{z}) - p(\tilde{x}, \tilde{x})$,

$\max\{p(\tilde{z}, \tilde{y}) - p(\tilde{z}, \tilde{z}), p(\tilde{z}, \tilde{y}) - p(\tilde{y}, \tilde{y})\} = p(\tilde{z}, \tilde{y}) - p(\tilde{z}, \tilde{z})$

olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}
d^w(\tilde{x}, \tilde{y}) = p(\tilde{x}, \tilde{y}) - p(\tilde{x}, \tilde{x}) &\tilde{\leq} p(\tilde{x}, \tilde{z}) + p(\tilde{z}, \tilde{y}) - p(\tilde{z}, \tilde{z}) - p(\tilde{x}, \tilde{x}) \\
&= p(\tilde{x}, \tilde{z}) - p(\tilde{x}, \tilde{x}) + p(\tilde{z}, \tilde{y}) - p(\tilde{z}, \tilde{z}) \\
&= d^w(\tilde{x}, \tilde{z}) + d^w(\tilde{z}, \tilde{y})
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $(\tilde{X}, d^w, A)$ bir esnek metrik uzaydır.

3.2. Esnek Parçalı Metrik Uzayların Topolojisi

Tanım 3.2.1. $(\tilde{X}, p, A)$ esnek parçalı metrik uzay, $\tilde{\varepsilon} \tilde{>} \overline{0}$ esnek reel sayı ve $\tilde{x} \in SE(\tilde{X})$ olsun.

$$B_P(\tilde{x}, \tilde{\varepsilon}) = \{\tilde{y} \in SE(\tilde{X}) : p(\tilde{x}, \tilde{y}) \tilde{<} p(\tilde{x}, \tilde{x}) + \tilde{\varepsilon}\} \subset SE(\tilde{X})$$

ailesine $\tilde{x}$ merkezli $\tilde{\varepsilon}$ yarıçaplı bir p-açık yuvar ve

$$B_p[\tilde{x}, \tilde{\varepsilon}] = \{\tilde{y} \in SE(\tilde{X}) : p(\tilde{x}, \tilde{y}) \tilde{\leq} p(\tilde{x}, \tilde{x}) + \tilde{\varepsilon}\} \subset SE(\tilde{X})$$

ailesine $\tilde{x}$ merkezli $\tilde{\varepsilon}$ yarıçaplı bir p-kapalı yuvar, $SS(B_p(\tilde{x}, \tilde{\varepsilon}))$ kümesine $\tilde{x}$ merkezli $\tilde{\varepsilon}$ yarıçaplı bir *esnek p-açık yuvar*, $SS(B_p[\tilde{x}, \tilde{\varepsilon}])$ kümesine $\tilde{x}$ merkezli $\tilde{\varepsilon}$ yarıçaplı bir *esnek p-kapalı yuvar* denir.

İlerleyen kısımlarda aksi söylenmedikçe p-açık yuvar, p-kapalı yuvar, esnek p-açık yuvar ve esnek p-kapalı yuvar yerine açık yuvar, kapalı yuvar, esnek açık yuvar ve esnek kapalı yuvar ifadeleri ve $B_P(\tilde{x}, \tilde{\varepsilon})$, $B_p[\tilde{x}, \tilde{\varepsilon}]$, $SS(B_p(\tilde{x}, \tilde{\varepsilon}))$ ve $SS(B_p[\tilde{x}, \tilde{\varepsilon}])$ yerine $B(\tilde{x}, \tilde{\varepsilon})$, $B[\tilde{x}, \tilde{\varepsilon}]$, $SS(B(\tilde{x}, \tilde{\varepsilon}))$ ve $SS(B[\tilde{x}, \tilde{\varepsilon}])$ gösterimleri kullanılacaktır.

Örnek 3.2.2. $p : \mathbb{R}(A) \times \mathbb{R}(A) \to \mathbb{R}(A^*)$ dönüşümü $p(\tilde{x}, \tilde{y}) = |\tilde{x} - \tilde{y}|$ olarak tanımlansın. Bu durumda $(\tilde{\mathbb{R}}, p, A)$ bir esnek parçalı metrik uzaydır.

Çözüm. $\forall \tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z} \tilde{\in} \tilde{\mathbb{R}}$ olsun.

EP1. $|\tilde{x} - \tilde{x}| = |\overline{0}| = \overline{0}$ ve mutlak değer tanımı gereğince $\overline{0} \tilde{\leq} |\tilde{x} - \tilde{y}|$ olup buradan $\overline{0} = |\tilde{x} - \tilde{x}| \tilde{\leq} |\tilde{x} - \tilde{y}|$ olur.

EP2. $|\tilde{x} - \tilde{x}| = |\tilde{x} - \tilde{y}| = |\tilde{y} - \tilde{y}| \Leftrightarrow |\tilde{x} - \tilde{y}| = \overline{0} \Leftrightarrow \tilde{x} - \tilde{y} = \overline{0} \Leftrightarrow \tilde{x} = \tilde{y}$.

EP3. $\forall\lambda \in A$ için

$$p(\tilde{x},\tilde{y})(\lambda) = |\tilde{x}-\tilde{y}|(\lambda) = |\tilde{x}(\lambda)-\tilde{y}(\lambda)| = |(\tilde{y}(\lambda)-\tilde{x}(\lambda))| = |\tilde{y}(\lambda)-\tilde{x}(\lambda)| = p(\tilde{y},\tilde{x})(\lambda)$$

EP4. $|\tilde{x}-\tilde{y}| = |\tilde{x}-\tilde{z}+\tilde{z}-\tilde{y}| - \overline{0} \tilde{\leq} |\tilde{x}-\tilde{z}| + |\tilde{z}-\tilde{y}| - |\tilde{z}-\tilde{z}| = p(\tilde{x},\tilde{z}) + p(\tilde{z},\tilde{y}) - p(\tilde{z},\tilde{z})$

olup $p(\tilde{x},\tilde{y}) \tilde{\leq} p(\tilde{x},\tilde{z}) + p(\tilde{z},\tilde{y}) - p(\tilde{z},\tilde{z})$ olur.

Sonuç olarak $(\tilde{\mathbb{R}}, p, A)$ bir esnek parçalı metrik uzaydır. Bu esnek parçalı metriğine göre $\tilde{x}$ merkezli $\tilde{\varepsilon}$ yarıçaplı esnek açık yuvar

$$SS(B(\tilde{x},\tilde{\varepsilon})) = SS(\{\tilde{y}; p(\tilde{x},\tilde{y}) \tilde{<} p(\tilde{x},\tilde{x}) + \varepsilon\})$$
$$= SS(\{\tilde{y} : |\tilde{x}-\tilde{y}| < \varepsilon\})$$

ve $\tilde{x}$ merkezli $\tilde{\varepsilon}$ yarıçaplı esnek kapalı yuvar

$$SS(B[\tilde{x},\tilde{\varepsilon}]) = SS(\{\tilde{y}; p(\tilde{x},\tilde{y}) \tilde{\leq} p(\tilde{x},\tilde{x}) + \varepsilon\})$$
$$= SS(\{\tilde{y} : |\tilde{x}-\tilde{y}| \tilde{\leq} \varepsilon\})$$

olarak tanımlanır.

Teorem 3.2.3. $(\tilde{X}, p, A)$, $(EP5)$ şartını sağlayan bir esnek parçalı metrik uzay olsun. Bu durumda $(\tilde{X}, p, A)$ içinde esnek elemanların her $B(\tilde{x},\tilde{\varepsilon})$ yuvarı ve $\forall\lambda \in A$ için $SS(B(\tilde{x},\tilde{\varepsilon}))(\lambda) = B(\tilde{x}(\lambda),\tilde{\varepsilon}(\lambda))$, (X, p_λ) parçalı metrik uzayında bir açık yuvardır.

İspat. $\tilde{\varepsilon} \tilde{>} \overline{0}$ ve $\forall\lambda \in A$ için $\tilde{\varepsilon}(\lambda) \in \mathbb{R}(A)^*$ olmak üzere $B(\tilde{x},\tilde{\varepsilon})$ bir açık yuvar ve $y \in SS(B(\tilde{x},\tilde{\varepsilon}))(\lambda)$ olsun. Bu durumda $\tilde{y}(\lambda) = y$ olacak şekilde $\tilde{y} \in B(\tilde{x},\tilde{\varepsilon})$ vardır. Dolayısıyla $p(\tilde{x},\tilde{y}) \tilde{<} p(\tilde{x},\tilde{x}) + \tilde{\varepsilon}$ olur. Böylece

$$p(\tilde{x},\tilde{y})(\lambda) = p_\lambda(\tilde{x}(\lambda), y) \tilde{<} p_\lambda(\tilde{x}(\lambda),\tilde{x}(\lambda)) + \tilde{\varepsilon}(\lambda)$$

olacak şekilde $\tilde{\varepsilon}(\lambda) \in \mathbb{R}(A)^*$ vardır. Buradan her $y \in SS(B(\tilde{x}, \tilde{\varepsilon}))(\lambda)$ için $p_\lambda(\tilde{x}(\lambda), y) \tilde{<} p_\lambda(\tilde{x}(\lambda), \tilde{x}(\lambda)) + \tilde{\varepsilon}(\lambda)$ olduğundan $SS(B(\tilde{x}, \tilde{\varepsilon}))(\lambda) \subset B(\tilde{x}(\lambda), \tilde{\varepsilon}(\lambda))$ elde edilir.

Tersine $p_\lambda(\tilde{x}(\lambda), y) \tilde{<} p_\lambda(\tilde{x}(\lambda), \tilde{x}(\lambda)) + \tilde{\varepsilon}(\lambda)$ olacak şekilde $y \in X$ olsun. $\tilde{y} \in B(\tilde{x}, \tilde{\varepsilon})$ seçilsin ve $\tilde{y} \tilde{\in} \tilde{X}$ esnek elemanını $\mu \in A$ için $\mu = \lambda$ ise $\tilde{y}(\mu) = y$ ile $\mu \neq \lambda$ ise $\tilde{y}(\mu) = \tilde{x}(\lambda)$ ile tanımlansın. Bu durumda (*EP5*) aksiyomundan $p(\tilde{x}, \tilde{y}) \tilde{<} p(\tilde{x}, \tilde{x}) + \tilde{\varepsilon}$ olur. Böylece $\tilde{y} \in B(\tilde{x}, \tilde{\varepsilon})$ ve $\forall \lambda \in A$ için $\tilde{y}(\lambda) = y$ olur. Buradan da $B(\tilde{x}(\lambda), \tilde{\varepsilon}(\lambda)) \subset SS(B(\tilde{x}, \tilde{\varepsilon}))(\lambda)$ elde edilir. O halde $B(\tilde{x}(\lambda), \tilde{\varepsilon}(\lambda)) = SS(B(\tilde{x}, \tilde{\varepsilon}))(\lambda)$ olur. Bu $\forall \lambda \in A$ için doğru olduğundan $\forall \lambda \in A$ için $SS(B(\tilde{x}, \tilde{\varepsilon}))(\lambda)$, (X, p_λ) parçalı metrik uzayında bir açık yuvardır.

Tanım 3.2.4. $(\tilde{X}, p, A)$ esnek parçalı metrik uzay, $\tilde{x} \in SE(\tilde{X})$ ve $\mathfrak{N} \subset SE(\tilde{X})$ olsun. Eğer $\tilde{x} \in B(\tilde{x}, \tilde{\varepsilon}) \subset \mathfrak{N}$ olacak şekilde $\tilde{\varepsilon} \tilde{>} \overline{0}$ varsa $\mathfrak{N}$ sınıfına $\tilde{x}$ esnek elemanın bir komşuluğu, $SS(\mathfrak{N})$ esnek kümesine $\tilde{x}$ esnek elemanının bir *esnek komşuluğu* denir. $\tilde{x}$ esnek elemanını esnek komşuluklar ailesi $\tilde{N}(\tilde{x})$ ile gösterilir.

Teorem 3.2.5. $(\tilde{X}, p, A)$ bir esnek parçalı metrik uzay ve $\tilde{x} \in SE(\tilde{X})$ olsun. $\mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}_2 \in N(\tilde{x})$ için $SS(\mathfrak{N}_1 \cap \mathfrak{N}_2)$ esnek kümesi $\tilde{x}$ esnek elemanının bir esnek komşuluğudur.

İspat. $(\tilde{X}, p, A)$ bir esnek parçalı metrik uzay, $\tilde{x} \in SE(\tilde{X})$ ve $\mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}_2 \in N(\tilde{x})$ olsun. $\tilde{\varepsilon}_1, \tilde{\varepsilon}_2 \tilde{>} \overline{0}$ için $\tilde{x} \in B(\tilde{x}, \tilde{\varepsilon}_1) \subset \mathfrak{N}_1$ ve $\tilde{x} \in B(\tilde{x}, \tilde{\varepsilon}_2) \subset \mathfrak{N}_2$ dir. $\tilde{\varepsilon} = \min\{\tilde{\varepsilon}_1, \tilde{\varepsilon}_2\}$ dersek $B(\tilde{x}, \tilde{\varepsilon}) \subseteq B(\tilde{x}, \tilde{\varepsilon}_1)$ ve $B(\tilde{x}, \tilde{\varepsilon}) \subseteq B(\tilde{x}, \tilde{\varepsilon}_2)$ olacağından

$$\tilde{x} \in B(\tilde{x}, \tilde{\varepsilon}) \subset B(\tilde{x}, \tilde{\varepsilon}_1) \cap B(\tilde{x}, \tilde{\varepsilon}_2) \subset \mathfrak{N}_1 \cap \mathfrak{N}_2$$

olur. Buradan $\mathfrak{N}_1 \cap \mathfrak{N}_2 \in N(\tilde{x})$ olup $SS(\mathfrak{N}_1 \cap \mathfrak{N}_2) \in \tilde{N}(\tilde{x})$ olur.

Tanım 3.2.6. $(\tilde{X}, p, A)$ bir esnek parçalı metrik uzay ve bu uzaydaki esnek elemanların bir sınıfı β olsun. $\tilde{x} \in \beta$ için $\tilde{x} \in B(\tilde{x}, \tilde{\varepsilon}) \subset \beta$ olacak şekilde bir $\tilde{\varepsilon} \tilde{>} \overline{0}$ varsa $\tilde{x}$ esnek elemanına β ailesinin bir *iç elemanı* denir.

Tanım 3.2.7. $(\tilde{X}, p, A)$ bir esnek parçalı metrik uzay ve bu uzaydaki esnek elemanların bir sınıfı β olsun. β ailesinin her elemanı bir iç eleman ise β ailesine *açıktır* denir.

Tanım 3.2.8. $(\tilde{X}, p, A)$ bir esnek parçalı metrik uzay ve $(F, A) \in S(\tilde{X})$ boştan farklı bir esnek küme olsun. Eğer $(F, A) = SS(\beta)$ olacak şekilde (F, A) esnek kümesinin esnek elemanlarının bir β açık ailesi varsa (F, A) kümesine *esnek açık küme* denir.

Teorem 3.2.9. Her esnek açık yuvar bir esnek açık kümedir

İspat. $(\tilde{X}, p, A)$ esnek parçalı metrik uzayında $B(\tilde{x}, \tilde{r})$ açık yuvarını ve $\tilde{z} \in B(\tilde{x}, \tilde{r})$ olsun. $\tilde{\varepsilon} = \tilde{r} + p(\tilde{x}, \tilde{x}) - p(\tilde{x}, \tilde{z})$ olsun. $B(\tilde{z}, \tilde{\varepsilon}) \subset B(\tilde{x}, \tilde{r})$ olduğu gösterilmelidir. $\forall \tilde{y} \in B(\tilde{z}, \tilde{\varepsilon})$ için $p(\tilde{y}, \tilde{z}) \tilde{<} p(\tilde{z}, \tilde{z}) + \tilde{\varepsilon}$ olur. Buradan

$$\begin{aligned}
p(\tilde{x}, \tilde{y}) &\tilde{\leq} p(\tilde{x}, \tilde{z}) + p(\tilde{z}, \tilde{y}) - p(\tilde{z}, \tilde{z}) \\
&\tilde{<} p(\tilde{x}, \tilde{z}) + p(\tilde{z}, \tilde{z}) + \tilde{\varepsilon} - p(\tilde{z}, \tilde{z}) \\
&= p(\tilde{x}, \tilde{z}) + \tilde{\varepsilon} \\
&= p(\tilde{x}, \tilde{z}) + \tilde{r} + p(\tilde{x}, \tilde{x}) - p(\tilde{x}, \tilde{y}) \\
&= p(\tilde{x}, \tilde{x}) + \tilde{r}
\end{aligned}$$

olup $\tilde{y} \in B(\tilde{x}, \tilde{r})$ bulunur. $B(\tilde{z}, \tilde{\varepsilon}) \subset B(\tilde{x}, \tilde{r})$ olduğundan $SS(B(\tilde{z}, \tilde{\varepsilon})) \tilde{\subseteq} SS(B(\tilde{x}, \tilde{r}))$ olur. Yani $SS(B(\tilde{x}, \tilde{r}))$ esnek yuvarı bir esnek kümedir.

Teorem 3.2.10. $(\tilde{X}, p, A)$, $(EP5)$ aksiyomunu sağlayan bir esnek parçalı metrik uzay olsun. Bu durumda $(F, A) \in S(\tilde{X})$ esnek kümesinin esnek açık olması için gerek ve yeter şart $\forall \lambda \in A$ için $(F, A)(\lambda)$ kümesinin (X, p_λ) kesin parçalı metrik uzayında açık olmasıdır.

İspat. $\Rightarrow$: $(F, A) \in S(\tilde{X})$ bir esnek açık küme olsun. Bu durumda (F, A) kümesinin esnek elemanlarının bir β ailesi vardır öyle ki β açıktır ve $(F, A) = SS(\beta)$ olur. $x \in SS(\beta)(\lambda)$ alalım. Bu durumda $\tilde{x}(\lambda) = x$ olacak şekilde $\tilde{x} \in \beta$ esnek elemanı vardır. β açık olduğundan $\tilde{x} \in B(\tilde{x}, \tilde{\varepsilon}) \subset \beta$ olacak şekilde $\tilde{\varepsilon} \tilde{>} \overline{0}$ vardır. Yani $x = \tilde{x}(\lambda) \in SS(B(\tilde{x}, \tilde{\varepsilon}))(\lambda) \subseteq SS(\beta)(\lambda)$ olup $SS(B(\tilde{x}, \tilde{\varepsilon}))(\lambda)$, (X, p_λ) uzayının bir açık yuvarıdır ve x, $SS(\beta)(\lambda)$ kümesinin bir iç elemanıdır. x keyfi bir eleman olduğundan $\forall x \in SS(\beta)(\lambda)$ elemanı bir iç elemandır ve $\forall \lambda \in A$ için $SS(\beta)(\lambda) = (F, A)(\lambda)$, (X, p_λ) uzayında bir açık kümedir.

$\Leftarrow$: $\forall \lambda \in A$ için $SS(\beta)(\lambda)$, (X, p_λ) uzayında bir açık küme olsun. $\tilde{x} \tilde{\in} SS(\beta)$ alalım. $\forall \lambda \in A$ için $\tilde{x}(\lambda) \in SS(\beta)(\lambda)$ olur. $SS(\beta)(\lambda)$ açık olduğundan $\varepsilon_\lambda > 0$ reel sayısı (X, p_λ) içinde bir $B_\lambda(\tilde{x}(\lambda, \varepsilon_\lambda))$ açık yuvarı vardır öyle ki $\forall \lambda \in A$ için $\tilde{x} \in B_\lambda(\tilde{x}(\lambda, \varepsilon_\lambda)) \subset SS(\beta)(\lambda)$ olur. $\forall \lambda \in A$ için $\tilde{\varepsilon}(\lambda) = \varepsilon_\lambda$ esnek elemanını ele alalım. Bu durumda $\tilde{\varepsilon} \tilde{>} \overline{0}$ ve $B(\tilde{x}, \tilde{\varepsilon})$, $(\tilde{X}, p, A)$ uzayında bir açık yuvardır. Böylece $\tilde{x} \in B(\tilde{x}, \tilde{\varepsilon}) \subset SE(SS(\beta))$ ve $SE(SS(\beta)) = \bigcup_{\tilde{x} \tilde{\in} SS(\beta)} B(\tilde{x}, \tilde{\varepsilon})$ olur. $SE(SS(\beta))$ açık ailelerin birleşimi olduğundan $SS(SE(\beta))$ açıktır. $SS(\beta) = SS(SE(SS(\beta)))$ olduğundan $(F, A) = SS(\beta)$ esnek açıktır.

Teorem 3.2.11. $(\tilde{X}, p, A)$ esnek parçalı metrik uzay olsun. Bu durumda

1. $\tilde{X}$ ve Φ esnek kümeleri esnek açıktır.
2. Esnek açık kümelerin keyfi elemanter birleşimi esnek açıktır.

İspat.

1. $\forall \tilde{x} \in SE(\tilde{X})$ için $\tilde{x} \in B(\tilde{x}, \tilde{\varepsilon}) \subset SE(\tilde{X})$ olacak şekilde $\tilde{\varepsilon} \tilde{>} \overline{0}$ olduğundan $\tilde{x}$, $SE(\tilde{X})$ ailesinin bir iç elemanıdır. $\tilde{X} = SS(SE(\tilde{X}))$ olduğundan $\tilde{X}$ esnek açıktır. Φ kümesinin esnek açık olduğu aşikardır.

2. I keyfi indis kümesi ve $\forall i \in I$ için (F_i, A) esnek kümeleri $(\tilde{X}, p, A)$ uzayında esnek açık kümeler olsun. $(F, A) = \Cup_{i \in I} (F_i, A)$ kümesinin esnek açık olduğunu gösterelim. $I = \varnothing$ ise $(F, A) = \Cup_{i \in I} (F_i, A) = \Phi$ kümesi esnek açıktır. $I \neq \varnothing$ olsun. $\forall i \in I$ için $(F_i, A) = \Phi$ ise $(F, A) = \Cup_{i \in I} (F_i, A) = \Phi$ olup esnek açıktır. $\exists i \in I$ için $(F_i, A) \neq \Phi$ olsun. Her bir (F_i, A) kümesi esnek açık olduğu için $(F_i, A) = SS(\beta_i)$ olacak şekilde (F_i, A) kümesinin esnek elemanlarının β_i açık ailesi vardır. Bu durumda $\bigcup_{i \in I} \beta_i$ açıktır. Böylece $(F, A) = \Cup_{i \in I} (F_i, A) = SS(\bigcup_{i \in I} \beta_i)$ esnek açıktır.

Uyarı 3.2.12. Genellikle $SS(\beta_1) \Cap SS(\beta_2) \neq SS(\beta_1 \cap \beta_2)$ olduğu için iki esnek açık kümenin elemanter kesişimi esnek açık olması gerekmez. Buna rağmen aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.2.13. (*EP5*) aksiyomunu sağlayan bir esnek parçalı metrik uzayda iki esnek açık kümenin elemanter kesişimi esnek açıktır.

İspat. $(\tilde{X}, p, A)$, (*EP5*) şartını sağlayan bir esnek parçalı metrik uzay, (F, A) ve (G, A) esnek açık iki küme olsun. Bu durumda $(\tilde{X}, p, A)$ uzayında esnek elemanların β_1 ve β_2 açık aileleri vardır öyle ki $(F, A) = SS(\beta_1)$ ve $(G, A) = SS(\beta_2)$ olur. Eğer $(F, A) \Cap (G, A) = \Phi$ ise esnek açıktır. $(F, A) \Cap (G, A) \neq \Phi$ ise $(F, A) \Cap (G, A) = (F, A) \tilde{\cap} (G, A)$ olur. Buradan $\forall \lambda \in A$ $((F, A) \tilde{\cap} (G, A))(\lambda) = (F, A)(\lambda) \cap (G, A)(\lambda)$ olur. $\forall \lambda \in A$ için $(F, A)(\lambda)$ ve $(G, A)(\lambda)$ kümeleri (X, p_λ) uzayında açık olduklarından $((F, A) \tilde{\cap} (G, A))(\lambda)$

kümesi de açıktır. Teorem 3.2.10. dan dolayı $(F,A)\tilde{\cap}(G,A)$ yani $(F,A)\Cap(G,A)$ esnek açıktır.

Teorem 3.2.14. (*EP5*) aksiyomunu sağlayan her esnek parçalı metrik uzay elemanter birleşim ve elemanter kesişim işlemine göre $\tilde{X}$ üzerinde bir elemanter esnek topolojik uzaydır. Bu topolojiye *elemanter esnek parçalı topoloji* denir.

İspat. $(\tilde{X},p,A)$, (*EP5*) aksiyomunu sağlayan bir esnek parçalı metrik uzay, β esnek elemanların bir ailesi ve

$$\tau_{\tilde{\varepsilon}} = \{(F,A)\in S(\tilde{X}) : \forall \tilde{x}\in \beta, \exists B(\tilde{x},\tilde{\varepsilon}) \ni \tilde{x}\in B(\tilde{x},\tilde{\varepsilon}) \subset \beta, (F,A) = SS(\beta), \tilde{\varepsilon} \tilde{>} \overline{\mathbf{0}}\} \in S(\tilde{X})$$

ailesinin $\tilde{X}$ üzerinde elemanter işlemlere göre bir topoloji olduğunu göstermeliyiz. Bu, Tanım 2.3.13, Teorem 3.2.11 ve Teorem 3.2.13 den çıkar.

Tanım 3.2.15. $(\tilde{X},p,A)$ esnek parçalı metrik uzay ve $(F,A)\in S(\tilde{X})$ olsun. Eğer $(F,A)^C \in S(\tilde{X})$ ve $(F,A)^{\mathbb{C}}$ bu uzayda esnek açık küme ise (F,A) kümesine *esnek kapalı küme* denir.

Teorem 3.2.18. $(\tilde{X},p,A)$ esnek parçalı metrik uzay olsun. Bu durumda

1. $\tilde{X}$ ve Φ esnek kümeleri esnek kapalıdır.
2. Esnek kapalı kümelerin keyfi elemanter kesişimi kapalıdır.

İspat. 1. $\Phi^{\mathbb{C}} = \tilde{X}$ olup $\tilde{X}$ esnek açık ve $\tilde{X}\in S(\tilde{X})$ olduğundan dolayı Φ esnek kapalıdır. Benzer şekilde $\tilde{X}^{\mathbb{C}} = \Phi$ olup Φ esnek açık ve $\Phi\in S(\tilde{X})$ olduğundan $\tilde{X}$ esnek kapalıdır.

2. I keyfi indis kümesi ve $\forall i \in I$ için (F_i, A) esnek kümeleri $(\tilde{X}, p, A)$ uzayında esnek kapalı kümeler olsun. $(F,A) = \Cap_{i\in I}(F_i, A)$ kümesinin esnek kapalı olduğunu gösterelim. $I = \varnothing$ ise $(F,A) = \Cap_{i\in I}(F_i, A) = \tilde{X}$ kümesi esnek kapalıdır. $I \neq \varnothing$ olsun. $\forall i \in I$ için $(F_i, A) = \Phi$ ise $(F,A) = \Cap_{i\in I}(F_i, A) = \Phi$ kümesi esnek kapalıdır. $\exists i \in I$ için $(F_i, A) = \Phi$ ise $(F,A) = \Cap_{i\in I}(F_i, A) = \Phi$ kümesi esnek kapalıdır. $\forall i \in I$ için $(F_i, A) \neq \Phi$ ve her bir (F_i, A) esnek kümesi ayrık ise $(F,A) = \Cap_{i\in I}(F_i, A) = \Phi$ esnek kapalıdır. $\forall i \in I$ için $(F_i, A) \neq \Phi$ ve ayrık olmasınlar. Her bir (F_i, A) esnek kümesi kapalı olduğundan $(F_i, A)^C \in S(\tilde{X})$ ve $(F_i, A)^{\mathbb{C}}$ kümeleri esnek açıktır. Bu durumda $\tilde{\bigcup}_{i\in I}(F_i^C, A) \in S(\tilde{X})$ ve $\Cup_{i\in I}(F_i^{\mathbb{C}}, A)$ kümesi esnek açıktır. Buradan

$$\left(\Cup_{i\in I}(F_i^{\mathbb{C}}, A)\right)^{\mathbb{C}} = \left(\tilde{\bigcup}_{i\in I}(F_i^C, A)\right)^C = \tilde{\bigcap}_{i\in I}(F_i, A) = \Cap_{i\in I}(F_i, A)$$

kümesi esnek kapalıdır.

Uyarı 3.2.19. Genellikle $SS(\beta_1) \Cap SS(\beta_2) \neq SS(\beta_1 \cap \beta_2)$ olduğu için iki esnek kapalı kümenin elemanter birleşimi esnek kapalı olması gerekmez. Buna rağmen aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.2.20. $(\tilde{X}, p, A)$, $(EP5)$ şartını sağlayan bir esnek parçalı metrik uzay, (F,A) ve (G,A) bu uzayda iki esnek kapalı küme ve $(F^{\mathbb{C}}, A) \Cap (G^{\mathbb{C}}, A) \neq \Phi$ ise $(F,A) \Cup (G,A)$ kümesi esnek kapalıdır.

İspat. $(\tilde{X}, p, A)$, $(EP5)$ şartını sağlayan bir esnek parçalı metrik uzay, (F,A) ve (G,A) esnek kapalı iki küme olsun. Bu durumda $(F^C, A), (G^C, A) \in S(\tilde{X})$ ve $(F^{\mathbb{C}}, A)$ ve $(G^{\mathbb{C}}, A)$ kümeleri esnek açık olur. Buradan

$$\left((F,A)\Cup(G,A)\right)^{\mathbb{C}} = \left((F,A)\tilde{\cup}(G,A)\right)^{C} = (F^{C},A)\tilde{\cap}(G^{C},A)$$

olur. $(F^{\mathbb{C}},A)\Cap(G^{\mathbb{C}},A) \neq \Phi$ olduğundan $(F^{C},A)\tilde{\cap}(G^{C},A) = (F^{\mathbb{C}},A)\Cap(G^{\mathbb{C}},A)$ elde edilir. O halde $(F^{\mathbb{C}},A)\Cap(G^{\mathbb{C}},A)$ kümesi esnek açıktır. $(F^{C},A),(G^{C},A) \in S(\tilde{X})$ olduğundan $(F^{C},A)\tilde{\cap}(G^{C},A) \in S(\tilde{X})$ olur. Sonuç olarak $(F,A)\Cup(G,A)$ kümesi esnek kapalıdır.

Tanım 3.2.21. $(\tilde{X},p,A)$ esnek parçalı metrik uzay, $(F,A) \in S(\tilde{X})$ ve $\tilde{\varepsilon} \tilde{>} \overline{0}$ olsun. $\tilde{x} \tilde{\in} (F,A)$ için $\tilde{x} \in B(\tilde{x},\tilde{\varepsilon}) \subset SE(F,A)$ olacak şekilde $B(\tilde{x},\tilde{\varepsilon})$ yuvarı varsa $\tilde{x}$ esnek elemanına (F,A) esnek kümesinin bir *esnek iç elemanı* denir. Esnek iç elemanların kümesi $\text{int}(F,A)$ ile gösterilir. $SS(\text{int}(F,A)) = (F^{\circ},A)$ kümesine ise (F,A) esnek kümesinin *esnek içi* denir.

Teorem 3.2.22. $(\tilde{X},p,A)$ esnek parçalı metrik uzay $(F,A),(G,A) \in S(\tilde{X})$ iki esnek küme olsun. Aşağıdaki özellikler sağlanır.

1. $((\text{int}(F,A) \cap \text{int}(G,A)) \subset \text{int}((F,A)\Cap(G,A))$
2. $((\text{int}(F,A) \cup \text{int}(G,A)) \subset \text{int}((F,A)\Cup(G,A))$

İspat. 1. $\tilde{x} \in \text{int}(F,A) \cap \text{int}(G,A)$ herhangi bir esnek eleman olsun. Bu durumda $\tilde{x} \in \text{int}(F,A)$ ve $\tilde{x} \in \text{int}(G,A)$ olur. Tanım 3.2.21 den $\varepsilon_1,\varepsilon_2 \tilde{>} \overline{0}$ için $\tilde{x} \in B(\tilde{x},\tilde{\varepsilon}_1) \subset SE(F,A)$ ve $\tilde{x} \in B(\tilde{x},\tilde{\varepsilon}_2) \subset SE(G,A)$ olacak şekilde $B(\tilde{x},\tilde{\varepsilon}_1)$ ve $B(\tilde{x},\tilde{\varepsilon}_2)$ yuvarları vardır. $\tilde{\varepsilon} = \min\{\tilde{\varepsilon}_1,\tilde{\varepsilon}_2\}$ olsun. Bu durumda $\tilde{x} \in B(\tilde{x},\tilde{\varepsilon}) \subset SE(F,A)$ ve $\tilde{x} \in B(\tilde{x},\tilde{\varepsilon}) \subset SE(G,A)$ olacak şekilde $B(\tilde{x},\tilde{\varepsilon})$ açık yuvarı vardır. Buradan da $\tilde{x} \in B(\tilde{x},\tilde{\varepsilon}) \subset SE(F,A) \cap SE(G,A)$ ve dolaysıyla $\tilde{x} \in \text{int}((F,A)\Cap(G,A))$ bulunur ve ispat tamamlanır.

2. $\tilde{x} \in \operatorname{int}(F,A) \cup \operatorname{int}(G,A)$ herhangi bir esnek eleman olsun. Bu durumda $\tilde{x} \in \operatorname{int}(F,A)$ veya $\tilde{x} \in \operatorname{int}(G,A)$ olur. Yani $\tilde{\varepsilon} \tilde{>} \overline{0}$ için $\tilde{x} \in B(\tilde{x},\tilde{\varepsilon}) \subset SE(F,A)$ veya $\tilde{x} \in B(\tilde{x},\tilde{\varepsilon}) \subset SE(G,A)$ olacak şekilde $B(\tilde{x},\tilde{\varepsilon})$ yuvarı vardır. Buradan $\tilde{x} \in B(\tilde{x},\tilde{\varepsilon}) \subset (SE(F,A) \cup SE(G,A)) \subset SE(F,A) \Cup SE(G,A)$ olur. Buradan da $\tilde{x} \in B(\tilde{x},\tilde{\varepsilon}) \subset SE(F,A) \Cup SE(G,A)$ olduğundan $\tilde{x} \in \operatorname{int}((F,A) \Cup (G,A))$ olur. Sonuç olarak da $((\operatorname{int}(F,A) \cup \operatorname{int}(G,A)) \subset \operatorname{int}((F,A) \Cup (G,A))$ elde edilir.

Teorem 3.2.23. $(\tilde{X},p,A)$, $(EP5)$ şartını sağlayan bir esnek parçalı metrik uzay ve $(F,A) \in S(\tilde{X})$ olsun. Aşağıdaki özellikler sağlanır.

1. (F°,A), (F,A) kümesinin esnek açık alt kümelerinin elemanter birleşimine eşittir.
2. (F°,A), (F,A) kümesinin kapsadığı en büyük esnek açık alt kümedir.
3. (F,A) esnek açıktır $\Leftrightarrow$ $(F^{\circ},A) = (F,A)$

İspat. 1. (F,A) kümesinin esnek açık alt kümelerinin elemanter birleşimi

$$(G,A) = \Cup \{(U,A) \in S(\tilde{X}) : (U,A) \tilde{\subset} (F,A) \, ve \, (U,A) \, esnek \, açık\} \tag{3.1}$$

olsun. $(F^{\circ},A) = (G,A)$ olduğunu gösterelim. $\tilde{x} \in \operatorname{int}(F,A)$ olsun. Buradan $\tilde{\varepsilon} \tilde{>} \overline{0}$ için $\tilde{x} \in B(\tilde{x},\tilde{\varepsilon}) \subset SE(F,A)$ olacak şekilde $B(\tilde{x},\tilde{\varepsilon})$ yuvarı vardır. Her esnek açık yuvar esnek açık küme olduğundan $SS(B(\tilde{x},\tilde{\varepsilon}))$ esnek açık bir kümedir ve $SS(B(\tilde{x},\tilde{\varepsilon})) \tilde{\subseteq} (F,A)$ olduğundan $SS((\tilde{x},\tilde{\varepsilon})) \tilde{\subseteq} (G,A)$ olur. Buradan $\tilde{x} \in B(\tilde{x},\tilde{\varepsilon}) \subset SE(G,A)$ olur. Buradan da $\operatorname{int}(F,A) \subset SE(G,A)$ ve $SS(\operatorname{int}(F,A) \tilde{\subset} SS(SE(G,A))$ yani $(F^{\circ},A) \tilde{\subset} (G,A)$ olur.

Tersine $\tilde{x} \tilde{\in} (G,A)$ olsun. Bu durumda $\tilde{x} \in SE(G,A)$ olur. (3.1) eşitliğinde $\tilde{x} \in (U,A) \tilde{\subset} (F,A)$ olacak şekilde en az bir (U,A) esnek açık kümesi vardır.

Buradan $\tilde{x} \in \mathrm{int}(F,A)$ olur. Böylece $SE(G,A) \subset \mathrm{int}(F,A)$ olur. Dolayısıyla $SS(SE(G,A)) \tilde{\subset} SS(\mathrm{inf}(F,A))$ yani $(G,A) \tilde{\subset} (F^{\circ},A)$ olur. Sonuç olarak $(G,A) = (F^{\circ},A)$ elde edilir.

2. (3.1) ifadesinden ispat açıktır.

3. $\Rightarrow$: (F,A) esnek açık olsun. Bu durumda $(F,A) \tilde{\subset} (G,A)$ olur. $(G,A) = (F^{\circ},A)$ olduğundan $(F,A) \tilde{\subset} (F^{\circ},A)$ olur. (F°,A), (F,A) esnek kümesinin kapsadığı en büyük esnek açık alt kümesi olduğundan $(F^{\circ},A) \tilde{\subset} (F,A)$ olur. Sonuç olarak $(F,A) = (F^{\circ},A)$ olur.

$\Leftarrow$: $(F,A) = (F^{\circ},A)$ olsun. (F°,A) esnek açık küme olduğundan (F,A) esnek açıktır.

Teorem 3.2.24. $(\tilde{X},p,A)$, $(EP5)$ şartını sağlayan bir esnek parçalı metrik uzay ve $(F,A),(G,A) \in S(\tilde{X})$ olsun. Aşağıdaki özellikler sağlanır.

1. $\tilde{X}^{\circ} = \tilde{X}$ ve $\Phi^{\circ} = \Phi$
2. $(F,A) \tilde{\subset} (G,A) \Rightarrow (F^{\circ},A) \tilde{\subset} (G^{\circ},A)$
3. $((F^{\circ},A))^{\circ} = (F^{\circ},A)$
4. $(F^{\circ},A) \Cap (G^{\circ},A) = ((F,A) \Cap (G,A))^{\circ}$
5. $(F^{\circ},A) \Cup (G^{\circ},A) \tilde{\subseteq} ((F,A) \Cup (G,A))^{\circ}$

İspat. 1. İspat açıktır.

2. $(F,A) \tilde{\subset} (G,A)$ olsun. $\tilde{x} \in \mathrm{int}(F,A)$ alalım. Bu durumda $\tilde{\varepsilon} \tilde{>} \overline{0}$ için $\tilde{x} \in B(\tilde{x},\tilde{\varepsilon}) \subset SE(F,A)$ olacak şekilde $B(\tilde{x},\tilde{\varepsilon})$ yuvarı vardır. $(F,A) \tilde{\subset} (G,A)$ olduğundan $\tilde{x} \in B(\tilde{x},\tilde{\varepsilon}) \subset SE(G,A)$ olup $\tilde{x} \in \mathrm{int}(G,A)$ olur. Yani $(F^{\circ},A) \tilde{\subset} (G^{\circ},A)$

3. $(F^{\circ},A)=(H,A)$ olsun. Bu durumda (H,A) esnek açık olur. Yani $(H,A)=(H^{\circ},A)$ olduğundan $((F^{\circ},A))^{\circ}=(F^{\circ},A)$ olur.

4. $(F,A)\Cap(G,A)\tilde{\subset}(F,A)$ ve $(F,A)\Cap(G,A)\tilde{\subset}(G,A)$ olduğundan 2. özellikten $((F,A)\Cap(G,A))^{\circ}\tilde{\subset}(F^{\circ},A)$ ve $((F,A)\Cap(G,A))^{\circ}\tilde{\subset}(G^{\circ},A)$ olur. Böylee $((F,A)\Cap(G,A))^{\circ}\tilde{\subset}(F^{\circ},A)\tilde{\cap}(G^{\circ},A)$ olur.

Diğer taraftan $(F^{\circ},A)\tilde{\subset}(F,A)$ ve $(G^{\circ},A)\tilde{\subset}(G,A)$ olduğundan $((F,A)\Cap(G,A))^{\circ}\tilde{\subset}(F^{\circ},A)\Cap(G^{\circ},A)$ olur. $((F,A)\Cap(G,A))^{\circ}$, $(F,A)\Cap(G,A)$ esnek kümesinin en büyük açık alt kümesi olduğu için $(F^{\circ},A)\Cap(G^{\circ},A)\tilde{\subset}((F,A)\Cap(G,A))^{\circ}$ elde edilir. Sonuç olarak $(F^{\circ},A)\Cap(G^{\circ},A)=((F,A)\Cap(G,A))^{\circ}$ olur.

5. $(F^{\circ},A)\tilde{\subset}(F,A)$ ve $(G^{\circ},A)\tilde{\subset}(G,A)$ olduğu için $(F^{\circ},A)\Cup(G^{\circ},A)\tilde{\subset}(F,A)\Cup(G,A)$ olur. $(F,A)\Cup(G,A)$ kümesinin en büyük esnek açık alt kümesi $((F,A)\Cup(G,A))^{\circ}$ olduğundan $(F^{\circ},A)\Cup(G^{\circ},A)\tilde{\subset}((F,A)\Cup(G,A))^{\circ}$ olur.

Tanım 3.2.25. $(\tilde{X},p,A)$ esnek parçalı metrik uzay, $\tilde{x}\in SE(\tilde{X})$ ve $(F,A)\in S(\tilde{X})$ olsun. $\forall\mathfrak{N}\in N(\tilde{x})$ için $\mathfrak{N}\cap SE(F,A)\neq\varnothing$ ise $\tilde{x}$ esnek elemanına (F,A) esnek kümesinin bir esnek kapanış elemanı denir.

Buna denk olarak; Bir $\tilde{x}\tilde{\in}\tilde{X}$ esnek elemanının her (N,A) esnek komşuluğu için $(F,A)\Cap(N,A)\neq\Phi$ ise $\tilde{x}$ esnek elemanına (F,A) esnek kümesinin bir esnek kapanış elemanı denir.

Esnek kapanış elemanların kümesi $cl(F,A)$ ile gösterilir. $SS(cl(F,A))=(\overline{F},A)$ kümesine ise (F,A) esnek kümesinin esnek kapanışı denir.

$(F,A) \Cap (N,A) = \Phi$ ve $(F,A) \tilde{\cap} (N,A) \in S(\bar{X})$ olacak şekilde $\tilde{x} \tilde{\in} \tilde{X}$ esnek elemanının bir (N,A) esnek komşuluğu varsa $\tilde{x} \tilde{\in} \tilde{X}$ esnek elamaı (F,A) esnek kümesinin bir esnek kapanışı noktası değildir denir.

Teorem 3.2.26. $(\tilde{X}, p, A)$ esnek parçalı metrik uzay $(F,A),(G,A) \in S(\tilde{X})$ iki esnek küme olsun. Aşağıdaki özellikler sağlanır.

1. $cl((F,A) \Cap (G,A)) \subset (cl(F,A) \cap cl(G,A))$
2. $(cl(F,A) \cup cl(G,A)) \subset cl((F,A) \Cup (G,A))$

İspat. 1. $\tilde{x} \in cl((F,A) \Cap (G,A)$ olsun. Bu durumda $\forall \mathfrak{N} \in N(\tilde{x})$ ve $\mathfrak{N} \in S(\tilde{X})$ için $\mathfrak{N} \cap SE((F,A) \Cap (G,A)) \neq \varnothing$ olur. Lemma 2.3.6 ile $\mathfrak{N} \cap (SE(F,A) \cap SE(G,A)) \neq \varnothing$ olup $(\mathfrak{N} \cap SE(F,A)) \cap (\mathfrak{N} \cap SE(G,A)) \neq \varnothing$ olur. Buradan da $\mathfrak{N} \cap SE(F,A) \neq \varnothing$ ve böylece $\tilde{x} \in cl(F,A)$ ve $\tilde{x} \in cl(G,A)$ olur. Buradan $\tilde{x} \in cl(F,A) \cap cl(G,A)$ olur ve $cl((F,A) \Cap (G,A)) \subset (cl(F,A) \cap cl(G,A))$ elde edilir.

2. $\tilde{x} \in cl(F,A) \cup cl(G,A)$ olsun. Bu durumda $\tilde{x} \in cl(F,A)$ veya $\tilde{x} \in cl(G,A)$ olur. Yani $\mathfrak{N} \in S(\tilde{X})$ ve $\forall \mathfrak{N} \in N(\tilde{x})$ için $\mathfrak{N} \cap SE(F,A) \neq \varnothing$ veya $\mathfrak{N} \cap SE(G,A) \neq \varnothing$ olur. Bu durumda $\mathfrak{N} \cap (SE(F,A) \cup SE(G,A)) \neq \varnothing$ elde edilir.

$$(SE(F,A) \cup SE(G,A)) \subset SE((F,A) \Cup (G,A))$$

olduğundan $\mathfrak{N} \cap SE((F,A) \Cup (G,A)) \neq \varnothing$ olur. Dolayısıyla $\tilde{x} \in cl((F,A) \Cup (G,A))$ olup $(cl(F,A) \cup cl(G,A)) \subset cl((F,A) \Cup (G,A))$ bulunur.

Teorem 3.2.27. $(\tilde{X}, p, A)$, $(EP5)$ şartını sağlayan bir esnek parçalı metrik uzay ve $(F,A) \in S(\tilde{X})$ iki esnek küme olsun. Aşağıdaki özellikler sağlanır.

1. $(\overline{F}, A)$, (F, A) kümesinin kapsayan esnek kapalı kümelerin elemanter kesişimine eşittir.
2. $(\overline{F}, A)$, (F, A) kümesini kapsayan en küçük esnek kapalı kümedir.
3. (F, A) esnek kapalıdır $\Leftrightarrow$ $(\overline{F}, A) = (F, A)$

İspat. 1. (F, A) kümesini kapsayan esnek kapalı kümelerin elemanter kesişimi

$$(G, A) = \Cap \{(K, A) \in S(\tilde{X}) : (F, A) \tilde{\subset} (K, A), (K, A)\, esnek\ kapalı\} \tag{3.2}$$

olsun. $(\overline{F}, A) = (G, A)$ olduğunu göstermeliyiz. $\tilde{x} \tilde{\in} (G, A)$ alalım. $\tilde{x} \tilde{\notin} (\overline{F}, A)$ kabul edelim. Bu durumda $(F, A) \Cap (N, A) = \Phi$ ve $(F, A) \tilde{\cap} (N, A) \in S(\tilde{X})$ olacak şekilde $\tilde{x} \tilde{\in} \tilde{X}$ esnek elemanının bir (N,A) esnek komşuluğu vardır. Böylece $\tilde{\varepsilon} \tilde{>} \overline{0}$ için $\tilde{x} \in B(\tilde{x}, \tilde{\varepsilon}) \subset \beta$ ve $SS(\beta) = (N, A)$ olacak şekilde β açık ailesi vardır. Buradan $(F, A) \Cap SS(B(\tilde{x}, \tilde{\varepsilon})) = \Phi$ ve $(F, A) \tilde{\cap} SS(B(\tilde{x}, \tilde{\varepsilon})) \in S(\tilde{X})$ olur. Böylece $SS(B(\tilde{x}, \tilde{\varepsilon}))^C \in S(\tilde{X})$ ve Önerme 2.3.5. ile $(F, A) \tilde{\subset} SS(B(\tilde{x}, \tilde{\varepsilon}))^C$ elde edilir. Dolayısıyla $SS(B(\tilde{x}, \tilde{\varepsilon}))^C = SS(B(\tilde{x}, \tilde{\varepsilon}))^{\mathbb{C}}$ olur. Bu $SS(B(\tilde{x}, \tilde{\varepsilon}))^{\mathbb{C}}$ kümesinin esnek kapalı olmasını gerektir fakat $\tilde{x} \notin SS(B(\tilde{x}, \tilde{\varepsilon}))^{\mathbb{C}}$ olur. Bu ise $\tilde{x} \tilde{\in} (G, A)$ olması ile çelişir. O halde $\tilde{x} \tilde{\in} (G, A)$ iken $\tilde{x} \tilde{\in} (\overline{F}, A)$ olur ve $(G, A) \tilde{\subset} (\overline{F}, A)$ elde edilir.

Tersine $\tilde{x} \in cl(F, A)$ olsun. Buradan $\tilde{x} \tilde{\in} (\overline{F}, A)$ olur. Kabul edelim ki $\tilde{x} \notin (G, A)$ olsun. Bu durumda $(F, A) \subset (K, A)$ olacak şekilde (K, A) esnek kapalı kümesi vardır ve $\tilde{x} \notin (K, A)$ olur. Buradan $\tilde{x} \tilde{\in} (K, A)^{\mathbb{C}}$ ve $(K, A)^{\mathbb{C}}$ esnek açık olduğundan $(K, A)^{\mathbb{C}}$, $\tilde{x}$ esnek elemanının bir esnek komşuluğu olur. Böylece $\tilde{x}$, (F, A) kümesinin bir esnek kapanış elemanı değildir. Bu ise $\tilde{x} \in cl(F, A)$ olması ile çelişir. Dolayısıyla $\tilde{x} \in cl(F, A)$ iken $\tilde{x} \tilde{\in} (G, A)$ olur ve $(\overline{F}, A) \tilde{\subset} (G, A)$ olur. Sonuç olarak da $(\overline{F}, A) = (G, A)$ elde edilir.

2. $(F,A) = \Cap \{(K,A) \in S(\tilde{X}) : (F,A) \tilde{\subseteq} (K,A), (K,A)\, esnek\ kapalı\}$ kapalı bir küme olduğundan $(F,A) \tilde{\subseteq} (\overline{F},A)$ olur. (3.2) eşitliğinden dolayı

$$(\overline{F},A) \in \{(K,A) \in S(\tilde{X}) : (F,A) \tilde{\subseteq} (K,A), (K,A)\, esnek\ kapalı\}$$

olur. $\Cap (K,A) \tilde{\subseteq} (K,A)$ olduğundan $(\overline{F},A)$, (F,A) esnek kümesini kapsayan en küçük esnek kapalı kümedir.

3. $\Rightarrow$: (F,A) esnek kapalı olsun. Bu durumda

$$(F,A) \in \{(K,A) \in S(\tilde{X}) : (F,A) \tilde{\subseteq} (K,A), (K,A)\, esnek\ kapalı\}$$

ve $(\overline{F},A)$, (F,A) esnek kümesini kapsayan en küçük kapalı esnek küme olduğundan $(\overline{F},A) \tilde{\subseteq} (F,A)$ olur. $(F,A) \tilde{\subseteq} (\overline{F},A)$ olduğu aşikardır. Sonuç olarak $(F,A) = (\overline{F},A)$ elde edilir.

$\Leftarrow$: $(F,A) = (\overline{F},A)$ olsun. $(\overline{F},A)$ esnek kapalı küne olduğundan dolayı (F,A) esnek kapalıdır.

Teorem 3.2.28. $(\tilde{X},p,A)$, $(EP5)$ şartını sağlayan bir esnek parçalı metrik uzay ve $(F,A),(G,A) \in S(\tilde{X})$ iki esnek küme olsun. Aşağıdaki özellikler sağlanır.

1. $\overline{\tilde{X}} = \tilde{X}$ ve $\overline{\Phi} = \Phi$
2. $(F,A) \tilde{\subseteq} (G,A) \Rightarrow (\overline{F},A) \tilde{\subseteq} (\overline{G},A)$
3. $\overline{(\overline{F},A)} = (\overline{F},A)$
4. $(\overline{F},A)^{\mathbb{C}} \Cap (\overline{G},A)^{\mathbb{C}} \neq \Phi$ ise $(\overline{F},A) \Cup (\overline{G},A) = \overline{(F,A) \Cup (G,A)}$
5. $\overline{(F,A) \Cap (G,A)} \tilde{\subseteq} (\overline{F},A) \Cap (\overline{G},A)$

İspat. 1. İspat açıktır.

2. $(F,A)\tilde{\subset}(G,A)$ olsun. $\tilde{x}\in cl(F,A)$ alalım. Bu durumda $\forall\mathfrak{N}\in N(\tilde{x})$ için $SE(F,A)\cap\mathfrak{N}\neq\varnothing$ olur. $(F,A)\tilde{\subset}(G,A)$ olduğundan $SE(F,A)\tilde{\subset}SE(G,A)$ olup $SE(G,A)\cap\mathfrak{N}\neq\varnothing$ olur. Buradan da $\tilde{x}\in cl(G,A)$ olup $(\overline{F},A)\tilde{\subset}(\overline{G},A)$ elde edilir.

3. $(\overline{F},A)=(H,A)$ olsun. Bu durumda (H,A) esnek kapalı olur. Yani $(H,A)=(\overline{H},A)$ olduğundan $\overline{(\overline{F},A)}=(\overline{F},A)$ olur.

4. $(\overline{F},A)^{\mathbb{C}}\Cap(\overline{G},A)^{\mathbb{C}}\neq\Phi$ olsun. $(F,A)\tilde{\subset}(F,A)\Cup(G,A)$ ve $(G,A)\tilde{\subset}(F,A)\Cup(G,A)$ olduğundan $(\overline{F},A)\tilde{\subset}\overline{((F,A)\Cup(G,A))}$ ve $(\overline{G},A)\tilde{\subset}\overline{((F,A)\Cup(G,A))}$ olur. Böylece $(\overline{F},A)\Cup(\overline{G},A)\tilde{\subset}\overline{((F,A)\Cup(G,A))}$ olur. $(F,A)\tilde{\subset}(\overline{F},A)$ ve $(G,A)\tilde{\subset}(\overline{G},A)$ olduğundan $(F,A)\Cup(G,A)\tilde{\subset}(\overline{F},A)\Cup(\overline{G},A)$ olur. $(\overline{F},A)\Cup(\overline{G},A)$ herhangi bir esnek kapalı kümedir. $(F,A)\Cup(G,A)$ esnek kümesini kapsayan en küçük esnek kapalı küme $\overline{((F,A)\Cup(G,A))}$ olduğundan $\overline{((F,A)\Cup(G,A))}\tilde{\subset}(\overline{F},A)\Cup(\overline{G},A)$ olur. Böylece $(\overline{F},A)\Cup(\overline{G},A)=\overline{(F,A)\Cup(G,A)}$ elde edilir.

5. $(F,A)\tilde{\subset}(\overline{F},A)$ ve $(G,A)\tilde{\subset}(\overline{G},A)$ olduğundan $(\overline{F},A)\Cap(\overline{G},A)$ kapalı olup $(F,A)\Cap(G,A)\tilde{\subset}(\overline{F},A)\Cap(\overline{G},A)$ olur. $(F,A)\Cap(G,A)$ esnek kümesini kapsayan en küçük esnek kapalı küme $\overline{((F,A)\Cap(G,A))}$ olduğundan $\overline{(F,A)\Cap(G,A)}\tilde{\subset}(\overline{F},A)\Cap(\overline{G},A)$ elde edilir.

Teorem 3.2.29. $(\tilde{X},p,A)$, $(EP5)$ şartını sağlayan bir esnek parçalı metrik uzay ve $(F,A),(F^{C},A)\in S(\tilde{X})$ olsun. Bu durumda $((\overline{F},A))^{\mathbb{C}}=((F^{\mathbb{C}},A))^{\circ}$ olur.

İspat. $\tilde{x} \tilde{\in} ((\overline{F}, A))^{\mathbb{C}}$ olsun. Bu durumda $\tilde{x} \tilde{\notin} (\overline{F}, A)$ olur. Buradan $\tilde{x}$ esnek elemanının bir $(N, A) \in S(\tilde{X})$ esnek komşuluğu vardır öyleki $(F, A) \Cap (N, A) = \Phi$ ve $(F, A) \tilde{\cap} (N, A) \in S(\tilde{X})$ olur. Önerme 2.3.5. ile $\tilde{x} \tilde{\in} (N, A) \tilde{\subset} (F^{\mathbb{C}}, A)$ yani $\tilde{x} \in \operatorname{int}(F^{\mathbb{C}}, A)$ olur. Buradan $\tilde{x} \tilde{\in} ((F^{\mathbb{C}}, A))^{\circ}$ olur. Böylee $((\overline{F}, A))^{\mathbb{C}} \tilde{\subset} ((F^{\mathbb{C}}, A))^{\circ}$ olur.

Tersine $\tilde{x} \tilde{\in} ((F^{\mathbb{C}}, A))^{\circ}$ olsun. Bu durumda $((F^{\mathbb{C}}, A))^{\circ} \in \tilde{N}(\tilde{x})$ olur. $((F^{\mathbb{C}}, A))^{\circ} \Cap (F, A) = \Phi$ ve her durumda $((F^{\mathbb{C}}, A))^{\circ} \tilde{\cap} (F, A) = \Phi$ olup $((F^{\mathbb{C}}, A))^{\circ} \tilde{\cap} (F, A) \in S(\tilde{X})$ olur. Dolayısıyla $\tilde{x} \notin cl(F, A)$ yani $\tilde{x} \tilde{\notin} (\overline{F}, A)$ olur. Buradan da $\tilde{x} \tilde{\in} ((\overline{F}, A))^{\mathbb{C}}$ olup $((F^{\mathbb{C}}, A))^{\circ} \tilde{\subset} ((\overline{F}, A))^{\mathbb{C}}$ olur. Böylece $((\overline{F}, A))^{\mathbb{C}} = ((F^{\mathbb{C}}, A))^{\circ}$ elde edilir.

Teorem 3.2.30. $(\tilde{X}, p, A)$, $(EP5)$ şartını sağlayan bir esnek parçalı metrik uzay ve $(F, A), (F^{C}, A) \in S(\tilde{X})$ olsun. Bu durumda $((F^{\circ}, A))^{\mathbb{C}} = \overline{((F^{\mathbb{C}}, A))}$ olur.

İspat. $(F^{\mathbb{C}}, A) = (G, A)$ olsun. Teorem 3.2.29. ile $((G^{\mathbb{C}}, A))^{\circ} = ((\overline{G}, A))^{\mathbb{C}}$ elde edilir. Buradan $(F^{\mathbb{C}}, A) \in S(\tilde{X})$ olduğundan $((G^{\mathbb{C}}, A))^{\circ} = (((F^{\mathbb{C}}, A))^{\mathbb{C}})^{\circ} = (F^{\circ}, A)$ olur. Bu durumda $((\overline{G}, A))^{\mathbb{C}} = (F^{\circ}, A)$ ve bunun sonucunda $(\overline{G}, A) = ((F^{\circ}, A))^{\mathbb{C}}$ yazılabilir. Böylece $((F^{\circ}, A))^{\mathbb{C}} = \overline{((F^{\mathbb{C}}, A))}$ elde edilir.

Teorem 3.2.31. $(\tilde{X}, p, A)$, $(EP5)$ şartını sağlayan bir esnek parçalı metrik uzay ve bu uzaydaki esnek açık yuvarların ailesi, $\tilde{X}$ üzerindeki bir T_0 topolojisinin esnek tabanıdır. Bu topolojiye esnek parçalı metrik topolojisi denir. $\tau[p]$ ile gösterilir.

İspat. $(\tilde{X}, p, A)$, $(EP5)$ şartını sağlayan bir esnek parçalı metrik uzay olsun. $\forall \tilde{x} \tilde{\in} \tilde{X}$ ve $\tilde{\varepsilon} \tilde{>} \overline{0}$ için $\tilde{x} \tilde{\in} SS(B(\tilde{x}, \tilde{\varepsilon})) \tilde{\subset} \tilde{X}$ olacak şekilde bir $SS(B(\tilde{x}, \tilde{\varepsilon}))$ esnek yuvarı vardır. Şimdi $\forall \tilde{\varepsilon}, \tilde{\delta} \tilde{>} \overline{0}$ ve $\tilde{x}, \tilde{y} \tilde{\in} \tilde{X}$ için $SS(B(\tilde{x}, \tilde{\varepsilon}))$ ve $SS(B(\tilde{y}, \tilde{\delta}))$ iki esnek açık yuvar olsun. $SS(B(\tilde{x},\tilde{\varepsilon})) \Cap SS(B(\tilde{y},\tilde{\delta})) \neq \Phi$ ile $\tilde{z} \,\tilde{\in}\, SS(B(\tilde{x},\tilde{\varepsilon})) \,\tilde{\cap}\, SS(B(\tilde{y},\tilde{\delta}))$ alalım. $\tilde{\eta} = \min\{\tilde{\varepsilon} + p(\tilde{x},\tilde{x}) - p(\tilde{x},\tilde{z}), \tilde{\delta} + p(\tilde{y},\tilde{y}) - p(\tilde{y},\tilde{z})\}$ olsun. Bu durumda $\tilde{z} \,\tilde{\in}\, SS(B(\tilde{z},\tilde{\eta}))$ olur. Çünkü $\tilde{\varepsilon} + p(\tilde{x},\tilde{x}) - p(\tilde{x},\tilde{z}) \,\tilde{>}\, \overline{0}$ ve $\tilde{\delta} + p(\tilde{y},\tilde{y}) - p(\tilde{y},\tilde{z}) \,\tilde{>}\, \overline{0}$ olduğundan $p(\tilde{z},\tilde{z}) \,\tilde{<}\, p(\tilde{z},\tilde{z}) + \tilde{\eta}$ olur. Şimdi $\tilde{z}' \,\tilde{\in}\, SS(B(\tilde{z},\tilde{\eta}))$ olduğunu varsayıp $\tilde{z}' \,\tilde{\in}\, SS(B(\tilde{x},\tilde{\varepsilon})) \,\tilde{\cap}\, SS(B(\tilde{y},\tilde{\delta}))$ olduğunu gösterelim. $\tilde{\eta} = \tilde{\varepsilon} + p(\tilde{x},\tilde{x}) - p(\tilde{x},\tilde{z})$ olduğunu kabul edecek olursak (*EP4*) şartından

$$
\begin{aligned}
p(\tilde{x},\tilde{z}') &\,\tilde{\leq}\, p(\tilde{x},\tilde{z}) + p(\tilde{z},\tilde{z}') - p(\tilde{z}',\tilde{z}') \\
&\,\tilde{<}\, \tilde{\eta} + p(\tilde{z},\tilde{z}) - p(\tilde{z},\tilde{z}) + p(\tilde{x},\tilde{z}) \\
&\,\tilde{<}\, \tilde{\varepsilon} + p(\tilde{x},\tilde{z}) - p(\tilde{x},\tilde{z}) + p(\tilde{x},\tilde{x}) = \tilde{\varepsilon} + p(\tilde{x},\tilde{x})
\end{aligned}
$$

olur ve $\tilde{z}' \,\tilde{\in}\, SS(B(\tilde{x},\tilde{\varepsilon}))$ yazılır. Eğer $\tilde{\eta} = \tilde{\delta} + p(\tilde{y},\tilde{y}) - p(\tilde{y},\tilde{z})$ olduğunu kabul edersek (*EP*4) şartından

$$
\begin{aligned}
p(\tilde{y},\tilde{z}') &\,\tilde{\leq}\, p(\tilde{y},\tilde{z}) + p(\tilde{z}',\tilde{z}) - p(\tilde{z},\tilde{z}) \\
&\,\tilde{<}\, \tilde{\eta} + p(\tilde{z},\tilde{z}) - p(\tilde{z},\tilde{z}) + p(\tilde{y},\tilde{z}) \\
&\,\tilde{<}\, \tilde{\delta} + p(\tilde{y},\tilde{z}) - p(\tilde{y},\tilde{z}) + p(\tilde{y},\tilde{y}) = \tilde{\delta} + p(\tilde{y},\tilde{y})
\end{aligned}
$$

olur ve $\tilde{z}' \,\tilde{\in}\, SS(B(\tilde{y},\tilde{\delta}))$ yazılır. Sonuç olarak $\tilde{z}' \,\tilde{\in}\, SS(B(\tilde{x},\tilde{\varepsilon})) \,\tilde{\cap}\, SS(B(\tilde{y},\tilde{\delta}))$ ve $SS(B(\tilde{z},\tilde{\eta})) \,\tilde{\subset}\, SS(B(\tilde{x},\tilde{\varepsilon})) \,\tilde{\cap}\, SS(B(\tilde{y},\tilde{\delta}))$ elde edilir. Bu durumda esnek açık yuvarların ailesi, $\tilde{X}$ üzerinde $\tau[p]$ ile gösterilen topolojinin esnek tabanıdır. Bu topolojinin T_0 olduğunu göstermek için birbirinden farklı $\forall \tilde{x},\tilde{y} \,\tilde{\in}\, \tilde{X}$ için $p(\tilde{x},\tilde{x}) \,\tilde{\leq}\, p(\tilde{x},\tilde{y})$ olduğundan dolayı $\tilde{\varepsilon} = \dfrac{p(\tilde{x},\tilde{y}) + p(\tilde{x},\tilde{x})}{\overline{2}} \,\tilde{>}\, \overline{0}$ alırsak $2p(\tilde{x},\tilde{x}) \,\tilde{<}\, p(\tilde{x},\tilde{x}) + p(\tilde{x},\tilde{y})$ olur. $2p(\tilde{x},\tilde{y}) \,\tilde{\geq}\, p(\tilde{x},\tilde{x}) + p(\tilde{x},\tilde{y})$ olduğundan dolayı $\tilde{x} \,\tilde{\in}\, SS(B(\tilde{x},\tilde{\varepsilon}))$ ve $\tilde{y} \,\tilde{\notin}\, SS(B(\tilde{x},\tilde{\varepsilon}))$ olur.

Tanım 3.2.32. $(\tilde{X},p,A)$ ve $(\tilde{Y},p',A)$, $(EP5)$ şartını sağlayan iki esnek parçalı metrik uzay, $f:SE(\tilde{X})\to SE(\tilde{Y})$ bir esnek fonksiyon olsun. Eğer $\tilde{x}\tilde{\in}\tilde{X}$ ve $\forall\tilde{\varepsilon}\tilde{>}\overline{0}$ için $\tilde{x}\in B_p(\tilde{x}_0,\tilde{\delta})$ iken $f(\tilde{x})\in B_{p'}(f(\tilde{x}_0),\tilde{\varepsilon})$ olacak şekilde $\tilde{\delta}(\varepsilon)\tilde{>}\overline{0}$ varsa f esnek fonksiyonuna $\tilde{x}_0\tilde{\in}\tilde{X}$ esnek elemanında *süreklidir* denir.

Uyarı 3.2.33. Bu tanıma denk olarak aşağıdaki tanımlarda verilebilir.

Tanım 3.2.34. $(\tilde{X},p,A)$ ve $(\tilde{Y},p',A)$, $(EP5)$ şartını sağlayan iki esnek parçalı metrik uzay, $f:SE(\tilde{X})\to SE(\tilde{Y})$ bir esnek fonksiyon olsun. Eğer $\tilde{x}\tilde{\in}\tilde{X}$ ve $\forall\tilde{\varepsilon}\tilde{>}\overline{0}$ için $p(\tilde{x},\tilde{x}_0)-p(\tilde{x}_0,\tilde{x}_0)\tilde{<}\tilde{\delta}\Rightarrow p'(f(\tilde{x}),f(\tilde{x}_0))-p'(f(\tilde{x}_0),f(\tilde{x}_0))\tilde{<}\tilde{\varepsilon}$ olacak şekilde $\tilde{\delta}\tilde{>}\overline{0}$ varsa f esnek fonksiyonuna $\tilde{x}_0\tilde{\in}\tilde{X}$ elemanında *süreklidir* denir.

Tanım 3.2.35. $(\tilde{X},p,A)$ ve $(\tilde{Y},p',A)$, $(EP5)$ şartını sağlayan iki esnek parçalı metrik uzay, $f:SE(\tilde{X})\to SE(\tilde{Y})$ bir esnek fonksiyon olsun. $\forall\tilde{\varepsilon}\tilde{>}\overline{0}$ için $f(B_p(\tilde{x}_0,\tilde{\delta})\subseteq B_{p'}(f(\tilde{x}_0),\tilde{\varepsilon})$ olacak şekilde $\tilde{\delta}\tilde{>}\overline{0}$ varsa f esnek fonksiyonuna $\tilde{x}_0\tilde{\in}\tilde{X}$ esnek elemanında *süreklidir* denir.

Tanım 3.2.36. $(\tilde{X},p,A)$ ve $(\tilde{Y},p',A)$, $(EP5)$ şartını sağlayan iki esnek parçalı metrik uzay, $f:SE(\tilde{X})\to SE(\tilde{Y})$ bir esnek fonksiyon ve $\tilde{x}_0\tilde{\in}\tilde{X}$ olsun. $f(\tilde{x}_0)$ esnek elemanının her (N',A) esnek komşuluğu için $f(SE(N,A))\tilde{\subset}SE(N',A)$ olacak şekilde $\tilde{x}_0$ esnek elemanının bir (N,A) esnek komşuluğu varsa f esnek fonksiyonuna $\tilde{x}_0\tilde{\in}\tilde{X}$ esnek elemanında *süreklidir* denir.

Sonuç 3.2.37. $(\tilde{X},p,A)$ ve $(\tilde{Y},p',A)$, $(EP5)$ şartını sağlayan iki esnek parçalı metrik uzay, $f:SE(\tilde{X})\to SE(\tilde{Y})$ bir esnek fonksiyon ve $\tilde{x}_0\tilde{\in}\tilde{X}$ olsun. $f(\tilde{x}_0)$ elemanını içeren her (V,A) esnek açık kümesi için $f(SE(U,A))\subset SE(V,A)$ olacak şekilde $\tilde{x}_0$

elemanını içeren bir (U,A) esnek açık kümesi varsa f esnek fonksiyonuna $\tilde{x}_0 \tilde{\in} \tilde{X}$ esnek elemanında *süreklidir* denir.

Tanım 3.2.38. $(\tilde{X},p,A)$ ve $(\tilde{Y},p',A)$, $(EP5)$ şartını sağlayan iki esnek parçalı metrik uzay, $f:SE(\tilde{X})\to SE(\tilde{Y})$ bir esnek fonksiyon olsun. Eğer f esnek fonksiyonu her $\tilde{x}_0 \tilde{\in} \tilde{X}$ elemanında sürekli ise f esnek fonksiyonuna $\tilde{X}$ üzerinde *süreklidir* denir.

Teorem 3.2.39. $(\tilde{X},p,A)$ ve $(\tilde{Y},p',A)$, $(EP5)$ şartını sağlayan iki esnek parçalı metrik uzay, $f:SE(\tilde{X})\to SE(\tilde{Y})$ bir esnek fonksiyon olsun. f esnek fonksiyonunun esnek sürekli olması için gerek ve yeter şart her $(V,A)\in S(\tilde{Y})$ esnek açık kümesi için $SS(f^{-1}(SE(V,A)))=(U,A)\in S(\tilde{X})$ kümesinin esnek açık olmasıdır.

İspat. $\Rightarrow$: f sürekli ve $(V,A)\in S(\tilde{Y})$ esnek açık bir küme olsun. Herhangi $\tilde{x}\in f^{-1}(SE(V,A))$ için $f(\tilde{x})\in SE(V,A)$ olur. (V,A) esnek açık olduğundan dolayı (V,A), $f(\tilde{x})$ elemanının bir esnek komşuluğu olur. f sürekli olduğundan Tanım 3.2.36. gereğince $f(SE(N,A))\subset SE(V,A)$ olacak şekilde $\tilde{x}$ elemanın bir (N,A) esnek komşuluğu vardır. Bu durumda $\tilde{x}\in SE(N,A)\subset f^{-1}(SE(V,A))$ olur. (N,A) bir esnek komşuluk olduğundan $\tilde{\varepsilon}\tilde{>}\overline{0}$ için

$$\tilde{x}\tilde{\in} SS(B_p(\tilde{x},\tilde{\varepsilon}))\tilde{\subset}(N,A)\tilde{\subset} SS(f^{-1}(SE(V,A)))$$

olacak şekilde $B_p(\tilde{x},\tilde{\varepsilon})$ açık yuvarı vardır. Bu durumda $\tilde{x}\in \mathrm{int}(SS(f^{-1}(SE(V,A))))$ ve $\tilde{x}\in SS(f^{-1}(SE(V,A)))^{\circ}$ olur. Dolayısıyla Teorem 3.2.23. gereğince $SS(f^{-1}(SE(V,A)))\in S(\tilde{X})$ bir esnek açık kümedir.

$\Leftarrow$: Her $(V,A)\in S(\tilde{Y})$ esnek açık kümesi için $(U,A)=SS(f^{-1}(SE(V,A)))\in S(\tilde{X})$ esnek açık bir küme olsun. Herhangi $\tilde{x}\tilde{\in}\tilde{X}$ ve $(N,A)\in\tilde{N}(f(\tilde{x}))$ alalım. Bu durumda $\tilde{\varepsilon}\tilde{>}\overline{0}$ için $f(\tilde{x})\tilde{\in}SS(B_{p'}(f(\tilde{x}),\tilde{\varepsilon}))\tilde{\subset}(N,A)$ olacak şekilde $B_{p'}(f(\tilde{x}),\tilde{\varepsilon})$ açık yuvarı vardır ve Teorem 3.2.9. gereğince $SS(B_{p'}(f(\tilde{x}),\tilde{\varepsilon}))=(V,A)$ bir esnek açık kümedir. Bu durumda $f(\tilde{x})\in SE(V,A)\subset SE(N,A)$ olur. Yani $\tilde{x}\in f^{-1}(SE(V,A))\subset f^{-1}(SE(N,A))$ ve buradan $\tilde{x}\tilde{\in}(U,A)\tilde{\subset}SS(f^{-1}(SE(N)))$ olur. (U,A) esnek açık olduğundan dolayı $(U,A)\in\tilde{N}(\tilde{x})$ olur. Buradan $f(SE(U,A))\subset f(SE(SS(f^{-1}(SE(N,A)))))$ yazılabilir. Komşuluk özelliklerinden dolayı $SS(f(SE(SS(f^{-1}(SE(N,A))))))$ esnek kümesi $f(\tilde{x})$ elemanının bir esnek komşuluğudur. Bu durumda f esnek fonksiyonu $\tilde{x}$ elemanında süreklidir.

Sonuç 3.2.40. $(\tilde{X},p,A)$ ve $(\tilde{Y},p',A)$, $(EP5)$ şartını sağlayan iki esnek parçalı metrik uzay olsun. $\tilde{X}$ ve $\tilde{Y}$ mutlak esnek kümelerindeki esnek açık kümelerin sonlu elemanter kesişimleri sırasıyla $S(\tilde{X})$ ve $S(\tilde{Y})$ sınıflarının elemanları olsun. $f:SE(\tilde{X})\to SE(\tilde{Y})$ esnek fonksiyonunun $(\tilde{X},p,A)$ üzerinde sürekli olması için gerek ve yeter şart her $\lambda\in A$ ve her $\tilde{x}\tilde{\in}\tilde{X}$ için $f_\lambda(x(\lambda))=f(\tilde{x})(\lambda)$ ile tanımlanan $f_\lambda:X\to Y$ dönüşümünün (X,p_λ) üzerinde sürekli olmasıdır.

Teorem 3.2.41. $(\tilde{X},p,A)$ ve $(\tilde{Y},p',A)$, $(EP5)$ şartını sağlayan iki esnek parçalı metrik uzay, $f:SE(\tilde{X})\to SE(\tilde{Y})$ bir esnek fonksiyon ve $(F,A)\in S(\tilde{X})$ olsun. f esnek dönüşümü $\tilde{x}\tilde{\in}\tilde{X}$ elemanında sürekli ve $\tilde{x}\in cl(F,A)$ ise $f(\tilde{x})\in cl(SS(f(SE(F,A))))$ olur.

İspat. f esnek dönüşümü $\tilde{x}\tilde{\in}\tilde{X}$ elemanında sürekli olsun. Teorem 3.2.39. gereğince her $(V,A)\in\tilde{N}(f(\tilde{x}))$ esnek açık komşuluğu için $(U,A)=SS(f^{-1}(SE(V,A)))\in\tilde{N}(\tilde{x})$ bir esnek açık komşuluktur. $\tilde{x}\in cl(F,A)$

olduğundan dolayı $(F,A) \Cap (U,A) \neq \Phi$ olur. Buradan $f(SE((F,A) \Cap (U,A)) \neq \varnothing$ ve Lemma 2.3.6 gereğince $f(SE((F,A) \cap SE(U,A)) \neq \varnothing$ olur. Ayrıca

$$f(SE((F,A) \cap SE(U,A)) \subset f(SE(F,A)) \cap f(SE(U,A)) \neq \varnothing$$

olduğundan $SS(f(SE((F,A) \Cap SS(f(SE(U,A))) \neq \Phi$ olur. Teorem 3.2.5. gereğince $SS(f(SE(U,A)))$ esnek kümeside $f(\tilde{x})$ elemanının bir esnek komşuluğu olduğundan dolayı $f(\tilde{x}) \in cl(SS(f(SE(F,A))))$ olur.

Sonuç 3.2.42. $(\tilde{X},p,A)$ ve $(\tilde{Y},p',A)$, $(EP5)$ şartını sağlayan iki esnek parçalı metrik uzay, $f: SE(\tilde{X}) \to SE(\tilde{Y})$ bir esnek fonksiyon ve $(F,A) \in S(\tilde{X})$ olsun. Bu durumda $SS\left(f\left(cl(F,A)\right)\right) \tilde{\subset} \overline{SS\left(f\left(SE\left(F,A\right)\right)\right)}$ olur.

Tanım 3.2.43. $(\tilde{X},p,A)$ ve $(\tilde{Y},p',A)$, $(EP5)$ şartını sağlayan iki esnek parçalı metrik uzay ve $f: SE(\tilde{X}) \to SE(\tilde{Y})$ bir esnek dönüşüm olsun. Eğer f esnek dönüşümü bire bir, örten, sürekli ve f^{-1} esnek dönüşümü sürekli ise, f esnek dönüşümüne *homeomorfizm*, $(\tilde{X},p,A)$ ve $(\tilde{Y},p',A)$ uzaylarına da *esnek homeomorf uzaylar* denir.

Tanım 3.2.44. $(\tilde{X},p,A)$ ve $(\tilde{Y},p',A)$, $(EP5)$ şartını sağlayan iki esnek parçalı metrik uzay ve $f: SE(\tilde{X}) \to SE(\tilde{Y})$ bir esnek dönüşüm olsun. $(\tilde{X},p,A)$ uzayının her esnek açık (kapalı) alt kümesinin f altındaki esnek görüntü kümesi $(\tilde{Y},p',A)$ uzayında esnek açık (kapalı) ise f esnek dönüşümüne *esnek açık (kapalı) dönüşüm* denir.

Tanım 3.2.45. $(\tilde{X},p,A)$ ve $(\tilde{Y},p',A)$ iki esnek parçalı metrik uzay ve $f:SE(\tilde{X})\to SE(\tilde{Y})$ bir esnek fonksiyon olsun. Eğer her $\tilde{x},\tilde{y}\tilde{\in}\tilde{X}$ için $p(\tilde{x},\tilde{y})=p'(f(\tilde{x}),f(\tilde{y}))$ oluyorsa f esnek fonksiyonuna bir *izometri* denir.

Teorem 3.2.46. $(\tilde{X},p,A)$ ve $(\tilde{Y},p',A)$, $(EP5)$ şartını sağlayan iki esnek parçalı metrik uzay ve $f:SE(\tilde{X})\to SE(\tilde{Y})$ bir esnek fonksiyon olsun. Eğer f esnek fonksiyonu bir izometri ise f esnek fonksiyonu süreklidir.

İspat. $f:SE(\tilde{X})\to SE(\tilde{Y})$ bir izometri, $\tilde{\varepsilon}\tilde{>}\overline{0}$ ve $\tilde{x}_0\tilde{\in}\tilde{X}$ olsun. $p(\tilde{x}_0,\tilde{x})\tilde{<}p(\tilde{x}_0,\tilde{x}_0)+\tilde{\varepsilon}$ olacak şekilde bir $\tilde{x}\tilde{\in}\tilde{X}$ alalım. Böylece

$$p'(f(\tilde{x}_0),f(\tilde{x}))-p'(f(\tilde{x}_0),f(\tilde{x}_0))=p(\tilde{x}_0,\tilde{x})-p(\tilde{x}_0,\tilde{x}_0)\tilde{<}\tilde{\varepsilon}$$

olur. Yani $p'(f(\tilde{x}_0),f(\tilde{x}))\tilde{<}p'(f(\tilde{x}_0),f(\tilde{x}_0))+\tilde{\varepsilon}$ olur. Dolayısıyla f esnek fonksiyonu $\tilde{x}_0$ elemanında süreklidir. $\tilde{x}_0$ elemanı keyfi olduğundan dolayı f esnek fonksiyonu $(\tilde{X},p,A)$ üzerinde süreklidir.

3.3. Esnek Parçalı Metrik Uzayların Tamlığı

Tanım 3.3.1. $(\tilde{X},p,A)$ esnek parçalı metrik uzay ve $(\tilde{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, bu uzaydaki esnek elemanların bir dizisi olsun. $\tilde{x}\tilde{\in}\tilde{X}$ ve $\tilde{\varepsilon}\tilde{>}\overline{0}$ için $\tilde{x}\in B(\tilde{x},\tilde{\varepsilon})$ iken $\forall n\geq n_0$ için $\tilde{x}_n\in B(\tilde{x},\tilde{\varepsilon})$ olacak şekilde $n_0\in\mathbb{N}$ varsa $(\tilde{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi $\tilde{x}$ esnek elemanına *yakınsaktır* denir ve $\lim\limits_{n\to\infty}\tilde{x}_n=\tilde{x}$ veya $\tilde{x}_n\to\tilde{x}$ ile gösterilir.

Teorem 3.3.2. $(\tilde{X},p,A)$ esnek parçalı metrik uzay ve bu uzayın esnek elemanlarından oluşan bir $(\tilde{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisini alalım. $\tilde{x}\in\tilde{X}$ için $\tilde{x}_n\to\tilde{x}$ olması için gerek ve yeter şart $\lim\limits_{n\to\infty}p(\tilde{x}_n,\tilde{x})=p(\tilde{x},\tilde{x})$ olmasıdır.

İspat. $\Rightarrow$: $\tilde{x}_n \to \tilde{x}$ olsun. Bu durumda $\tilde{\varepsilon} \mathrel{\tilde{>}} \bar{0}$ için $\tilde{x}_n \in B(\tilde{x}, \tilde{\varepsilon})$ olacak şekilde $\forall n \geq n_0$ için $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Buradan $\bar{0} \mathrel{\tilde{\leq}} p(x_n, x) \mathrel{\tilde{<}} \tilde{\varepsilon} + p(\tilde{x}, \tilde{x})$ olup $p(\tilde{x}_n, \tilde{x}) - p(\tilde{x}, \tilde{x}) \mathrel{\tilde{<}} \tilde{\varepsilon}$ yazılabilir. Buradan da $\lim\limits_{n\to\infty}(p(\tilde{x}_n, \tilde{x}) - p(\tilde{x}, \tilde{x})) \mathrel{\tilde{<}} \tilde{\varepsilon}$ olur. Bu eşitsizlik $\forall \tilde{\varepsilon} \mathrel{\tilde{>}} \bar{0}$ için sağlandığından dolayı $\lim\limits_{n\to\infty} p(\tilde{x}_n, \tilde{x}) = p(\tilde{x}, \tilde{x})$ elde edilir.

$\Leftarrow$: $\lim\limits_{n\to\infty} p(\tilde{x}_n, \tilde{x}) = p(\tilde{x}, \tilde{x})$ olsun. Buradan $\tilde{\varepsilon}_1 \mathrel{\tilde{>}} \bar{0}$ için $\forall n \geq n_0$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ doğal sayısı için $p(\tilde{x}_n, \tilde{x}) \mathrel{\tilde{<}} \tilde{\varepsilon}_1 + p(\tilde{x}, \tilde{x})$ olur. Bu durumda $\tilde{\varepsilon}_1 = \tilde{\varepsilon} - p(\tilde{x}, \tilde{x})$ olacak şekilde bir $\tilde{\varepsilon} \mathrel{\tilde{>}} \bar{0}$ için $\tilde{x}_n \in B(\tilde{x}, \tilde{\varepsilon})$ olur. $\forall \tilde{\varepsilon} \mathrel{\tilde{>}} \bar{0}$ için $\forall n \geq n_0$ olacak şekilde $n_0 \in \mathbb{N}$ doğal sayısı var olduğundan dolayı $\tilde{x}_n \to \tilde{x}$ elde edilir.

Teorem 3.3.3. $(\tilde{X}, p, A)$ esnek parçalı metrik uzay ve bu uzaydaki esnek elemanların bir dizisi $(\tilde{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olsun. $\tilde{x} \mathrel{\tilde{\in}} \tilde{X}$ için $\tilde{x}_n \to \tilde{x}$ ve $p(\tilde{x}, \tilde{x}) = \bar{0}$ ise $\forall \tilde{z} \mathrel{\tilde{\in}} \tilde{X}$ için $\lim\limits_{n\to\infty} p(\tilde{x}_n, \tilde{z}) = p(\tilde{x}, \tilde{z})$ olur.

İspat. Üçgen eşitsizliğinden $p(\tilde{x}, \tilde{z}) - p(\tilde{x}_n, \tilde{x}) \mathrel{\tilde{\leq}} p(\tilde{x}_n, \tilde{z}) \mathrel{\tilde{\leq}} p(\tilde{x}, \tilde{z}) + p(\tilde{x}_n, \tilde{x})$ olur. Buradan da $n \to \infty$ iken $p(\tilde{x}_n, \tilde{z}) \to p(\tilde{x}, \tilde{z})$ elde edilir.

Teorem 3.3.4. Esnek parçalı metrik uzaylarda yakınsak her dizinin limiti tektir.

İspat. $(\tilde{X}, p, A)$ bir esnek parçalı metrik uzay ve $(\tilde{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\tilde{X}$ kümesinin esnek elemanlarından oluşan bir dizi olsun. Bu dizi $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2 \mathrel{\tilde{\in}} \tilde{X}$ esnek elemanlarına yakınsasın. $p(\tilde{x}_1, \tilde{x}_1) = p(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) = p(\tilde{x}_2, \tilde{x}_2)$ eşitliğinin sağlanıp sağlanmadığını inceleyelim. $\tilde{\varepsilon} \mathrel{\tilde{>}} \bar{0}$ ve her $n \geq n_1$ için $|p(\tilde{x}_n, \tilde{x}_1) - p(\tilde{x}_1, \tilde{x}_1)| \mathrel{\tilde{<}} \tilde{\varepsilon}$ ve $|p(\tilde{x}_1, \tilde{x}_1) - p(\tilde{x}_n, \tilde{x}_n)| \mathrel{\tilde{<}} \tilde{\varepsilon}$ olacak şekilde $n_1 \in \mathbb{N}$ vardır. Ayrica $\tilde{\varepsilon} \mathrel{\tilde{>}} \bar{0}$ ve her $n \mathrel{\tilde{\geq}} n_2$ için $|p(\tilde{x}_n, \tilde{x}_2) - p(\tilde{x}_2, \tilde{x}_2)| \mathrel{\tilde{<}} \tilde{\varepsilon}$ ve $|p(\tilde{x}_2, \tilde{x}_2) - p(\tilde{x}_n, \tilde{x}_n)| \mathrel{\tilde{<}} \tilde{\varepsilon}$ olacak şekilde $n_2 \in \mathbb{N}$ vardır. $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ seçersek her $n \geq n_0$ için

$$\begin{aligned}
\left|p(\tilde{x}_1,\tilde{x}_1)-p(\tilde{x}_2,\tilde{x}_2)\right| &\,\tilde{\leq}\, \left|p(\tilde{x}_1,\tilde{x}_n)+p(\tilde{x}_2,\tilde{x}_n)-p(\tilde{x}_n,\tilde{x}_n)-p(\tilde{x}_2,\tilde{x}_2)\right| \\
&\,\tilde{\leq}\, \left|p(\tilde{x}_1,\tilde{x}_1)+\tilde{\varepsilon}+p(\tilde{x}_2,\tilde{x}_2)+\tilde{\varepsilon}-p(\tilde{x}_n,\tilde{x}_n)-p(\tilde{x}_2,\tilde{x}_2)\right| \\
&= \left|p(\tilde{x}_1,\tilde{x}_1)+2\tilde{\varepsilon}-p(\tilde{x}_n,\tilde{x}_n)\right| \\
&\,\tilde{\leq}\, \left|p(\tilde{x}_1,\tilde{x}_1)-p(\tilde{x}_n,\tilde{x}_n)\right|+2\tilde{\varepsilon} \\
&\,\tilde{\leq}\, \tilde{\varepsilon}+2\tilde{\varepsilon} \\
&= 3\tilde{\varepsilon}
\end{aligned}$$

olur. Buradan da $p(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2)=p(\tilde{x}_2,\tilde{x}_2)$ ve $p(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2)=p(\tilde{x}_1,\tilde{x}_1)$ olup (*EP2*) şartından $\tilde{x}_1=\tilde{x}_2$ elde edilir. Yani $(\tilde{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi tek bir esnek elemana yakınsar.

Teorem 3.3.5. $(\tilde{X},p,A)$ bir esnek parçalı metrik uzay, $\tilde{x},\tilde{y}\,\tilde{\in}\,\tilde{X}$ esnek elemanlarına sırasıyla yakınsayan, $\tilde{X}$ kümesinin esnek elemanlarından oluşan $(\tilde{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ve $(\tilde{y}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizileri için $\lim_{n\to\infty} p(\tilde{x}_n,\tilde{y}_n)=p(\tilde{x},\tilde{y})$ olur.

İspat. $(\tilde{X},p,A)$ esnek parçalı metrik uzay, $\tilde{x},\tilde{y}\,\tilde{\in}\,\tilde{X}$ esnek elemanlarına sırasıyla yakınsayan, $\tilde{X}$ kümesinin esnek elemanlarından oluşan $(\tilde{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ve $(\tilde{y}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizilerini alalım. $\tilde{\varepsilon}\,\tilde{>}\,\overline{0}$ ve her $n\geq n_1$ için $\left|p(\tilde{x}_n,\tilde{x})-p(\tilde{x},\tilde{x})\right|\tilde{<}\,\tilde{\varepsilon}$ ve $\left|p(\tilde{x}_n,\tilde{x})-p(\tilde{x}_n,\tilde{x}_n)\right|\tilde{<}\,\tilde{\varepsilon}$ olacak şekilde bir $n_1\in\mathbb{N}$ vardır. Her $n\geq n_2$ için $\left|p(\tilde{y}_n,\tilde{y})-p(\tilde{y},\tilde{y})\right|\tilde{<}\,\tilde{\varepsilon}$ ve $\left|p(\tilde{y}_n,\tilde{y})-p(\tilde{y}_n,\tilde{y}_n)\right|\tilde{<}\,\tilde{\varepsilon}$ olacak şekilde bir $n_2\in\mathbb{N}$ vardır. $n_0=\max\{n_1,n_2\}$ seçersek her $n\geq n_0$ için

$$\begin{aligned}
p(\tilde{x}_n,\tilde{y}_n)-p(\tilde{x},\tilde{y}) &\,\tilde{\leq}\, p(\tilde{x}_n,\tilde{x})+p(\tilde{x},\tilde{y}_n)-p(\tilde{x},\tilde{x})-p(\tilde{x},\tilde{y}) \\
&\,\tilde{\leq}\, p(\tilde{x}_n,\tilde{x})+p(\tilde{x},\tilde{y})+p(\tilde{y},\tilde{y}_n)-p(\tilde{y},\tilde{y})-p(\tilde{x},\tilde{x})-p(\tilde{x},\tilde{y}) \\
&= p(\tilde{x}_n,\tilde{x})-p(\tilde{x},\tilde{x})+p(\tilde{y}_n,\tilde{y})-p(\tilde{y},\tilde{y}) \\
&\,\tilde{\leq}\, \left|p(\tilde{x}_n,\tilde{x})-p(\tilde{x},\tilde{x})\right|+\left|p(\tilde{y}_n,\tilde{y})-p(\tilde{y},\tilde{y})\right| \\
&\,\tilde{<}\, \tilde{\varepsilon}+\tilde{\varepsilon} \\
&= 2\tilde{\varepsilon}
\end{aligned}$$

olur. Benzer şekilde

$$\begin{aligned} p(\tilde{x},\tilde{y})-p(\tilde{x}_n,\tilde{y}_n) &\,\tilde{\leq}\, p(\tilde{x},\tilde{x}_n)+p(\tilde{x}_n,\tilde{y})-p(\tilde{x}_n,\tilde{x}_n)-p(\tilde{x}_n,\tilde{y}_n) \\ &\,\tilde{\leq}\, p(\tilde{x}_n,\tilde{x})+p(\tilde{x}_n,\tilde{y}_n)+p(\tilde{y}_n,\tilde{y})-p(\tilde{y}_n,\tilde{y}_n)-p(\tilde{x}_n,\tilde{x}_n)-p(\tilde{x}_n,\tilde{y}_n) \\ &= p(\tilde{x}_n,\tilde{x})-p(\tilde{x}_n,\tilde{x}_n)+p(\tilde{y}_n,\tilde{y})-p(\tilde{y}_n,\tilde{y}_n) \\ &\,\tilde{\leq}\, \left|p(\tilde{x}_n,\tilde{x})-p(\tilde{x}_n,\tilde{x}_n)\right|+\left|p(\tilde{y}_n,\tilde{y})-p(\tilde{y}_n,\tilde{y}_n)\right| \\ &\,\tilde{<}\, \tilde{\varepsilon}+\tilde{\varepsilon} \\ &= 2\tilde{\varepsilon} \end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla $\left|p(\tilde{y}_n,\tilde{y})-p(\tilde{y}_n,\tilde{y}_n)\right| \,\tilde{<}\, 2\tilde{\varepsilon}$ olup $\lim_{n\to\infty} p(\tilde{x}_n,\tilde{y}_n)=p(\tilde{x},\tilde{y})$ elde edilir.

Teorem 3.3.6. $(\tilde{X},p,A)$ *(EP5)* şartını sağlayan esnek parçalı metrik uzay, $(F,A)\in S(\tilde{X})$ ve $\tilde{x}\,\tilde{\in}\,(F,A)$ olsun. $\tilde{x}\,\tilde{\in}\,(\overline{F},A)$ olması için gerek ve yeter şart (F,A) esnek kümesinde $\tilde{x}$ esnek elemanına yakınsayan ve (F,A) esnek kümesinin esnek elemanlarından oluşan bir $(\tilde{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin bulunmasıdır.

İspat. $\Rightarrow$: $\tilde{x}\,\tilde{\in}\,(\overline{F},A)$ olsun. Her $n\in\mathbb{N}$ için $B\left(\tilde{x},\frac{\overline{1}}{n}\right)\in N(\tilde{x})$ alalım. Bu durumda $B\left(\tilde{x},\frac{\overline{1}}{n}\right)\cap SE(F,A)\neq\varnothing$ olur. $\tilde{x}_n\in B\left(\tilde{x},\frac{\overline{1}}{n}\right)\cap SE(F,A)$ seçersek $\tilde{x}_n\in B\left(\tilde{x},\frac{\overline{1}}{n}\right)$ elde edilir. Dolayısıyla $p(\tilde{x},\tilde{x}_n)\,\tilde{<}\,p(\tilde{x},\tilde{x})+\frac{\overline{1}}{n}$ olur. $(EP1)$ aksiyomundan $\overline{0}\,\tilde{\leq}\,p(\tilde{x},\tilde{x})\,\tilde{\leq}\,p(\tilde{x},\tilde{x}_n)\,\tilde{<}\,p(\tilde{x},\tilde{x})+\frac{\overline{1}}{n}$ yazılır. Böylece $\lim_{n\to\infty} p(\tilde{x},\tilde{x}_n)=p(\tilde{x},\tilde{x})$ olur. Ayrıca

$$\begin{aligned} \left|p(\tilde{x}_n,\tilde{x}_n)-p(\tilde{x},\tilde{x})\right| &\,\tilde{\leq}\, \left|p(\tilde{x}_n,\tilde{x})+p(\tilde{x},\tilde{x}_n)-p(\tilde{x},\tilde{x})-p(\tilde{x},\tilde{x})\right| \\ &= 2\left|p(\tilde{x}_n,\tilde{x})-p(\tilde{x},\tilde{x})\right| \end{aligned}$$

$$\tilde{<} \frac{\overline{2}}{n}$$

olur. Dolayısıyla $\lim_{n\to\infty} p(\tilde{x}_n, \tilde{x}_n) = p(\tilde{x}, \tilde{x})$ ve $\lim_{n\to\infty} p(\tilde{x}_n, \tilde{x}) = p(\tilde{x}, \tilde{x}) = \lim_{n\to\infty} p(\tilde{x}_n, \tilde{x}_n)$ olur. Yani $\tilde{x}_n \to \tilde{x}$ elde edilir.

$\Leftarrow$: (F, A) esnek kümesinde $\tilde{x}$ esnek elemanına yakınsayan ve (F, A) esnek kümesinin esnek elemanlarından oluşan bir $(\tilde{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi alalım. $\mathfrak{N} \in N(\tilde{x})$ olsun. Bu durumda $\tilde{\varepsilon} \tilde{>} \overline{0}$ için $B(\tilde{x}, \tilde{\varepsilon}) \subset \mathfrak{N}$ olur. $\tilde{x}_n \to \tilde{x}$ olduğundan her $n \geq n_0$ için $\left|p(\tilde{x}_n, \tilde{x}) - p(\tilde{x}, \tilde{x})\right| \tilde{<} \tilde{\varepsilon}$ ve $\left|p(\tilde{x}_{n_0}, \tilde{x}) - p(\tilde{x}, \tilde{x})\right| \tilde{<} \tilde{\varepsilon}$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Böylece $\tilde{x}_{n_0} \in \mathfrak{N} \cap SE(F, A)$ olduğundan $\tilde{x} \tilde{\in} (\overline{F}, A)$ elde edilir.

Tanım 3.3.7. $(\tilde{X}, p, A)$ esnek parçalı metrik uzay ve $(\tilde{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bu uzaydaki esnek elemanlardan oluşan bir dizisi olsun. Eğer $\lim_{n,m\to\infty} p(\tilde{x}_n, \tilde{x}_m)$ limiti varsa $(\tilde{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisine *Cauchy dizisi* denir.

Tanım 3.3.8. $(\tilde{X}, p, A)$ esnek parçalı metrik uzayındaki her Cauchy dizisi $\tilde{X}$ kümesinde bir esnek elemana yakınsıyor ise $(\tilde{X}, p, A)$ esnek parçalı metrik uzayına *tamdır* denir.

Teorem 3.3.9. $(\tilde{X}, p, A)$ esnek parçalı metrik uzay ve bu uzayın esnek elemanlarının bir dizisi $(\tilde{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olsun. Bu durumda $(\tilde{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin $(\tilde{X}, p, A)$ uzayında bir Cauchy dizisi olması için gerek ve yeter şart $(\tilde{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin $(\tilde{X}, d^s, A)$ esnek metrik uzayında bir Cauchy dizisi olmasıdır.

İspat. $\Rightarrow$: $(\tilde{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi $(\tilde{X}, p, A)$ uzayında bir Cauchy dizisi olsun. Yani $\lim\limits_{n,m\to\infty} p(\tilde{x}_n, \tilde{x}_m)$ limiti var olsun. Kabul edelim ki $\exists \tilde{\varepsilon} \tilde{>} \overline{0}$ için $d^s(\tilde{x}_n, \tilde{x}_m) \tilde{>} \tilde{\varepsilon}$ olsun. Bu durumda

$$2p(\tilde{x}_n, \tilde{x}_m) - p(\tilde{x}_n, \tilde{x}_n) - p(\tilde{x}_m, \tilde{x}_m) \tilde{>} \tilde{\varepsilon} \text{ ve } p(\tilde{x}_n, \tilde{x}_m) \tilde{>} \frac{\tilde{\varepsilon} + p(\tilde{x}_n, \tilde{x}_n) + p(\tilde{x}_m, \tilde{x}_m)}{2}$$

olur. $\frac{\tilde{\varepsilon}}{2} = \tilde{\varepsilon}_1$ dersek

$$p(\tilde{x}_n, \tilde{x}_m) \tilde{>} \tilde{\varepsilon}_1 + \frac{p(\tilde{x}_n, \tilde{x}_n)}{2} + \frac{p(\tilde{x}_m, \tilde{x}_m)}{2}$$

olur. Böylece

$$\lim_{n,m\to\infty} p(\tilde{x}_n, \tilde{x}_m) \tilde{>} \tilde{\varepsilon}_1 + \lim_{n\to\infty}\left(\frac{p(\tilde{x}_n, \tilde{x}_n)}{2}\right) + \lim_{m\to\infty}\left(\frac{p(\tilde{x}_m, \tilde{x}_m)}{2}\right)$$

elde edilir. $\tilde{\varepsilon}$ keyfi olduğu için $\lim\limits_{n,m\to\infty} p(\tilde{x}_n, \tilde{x}_m) \to \infty$ olur. Bu da $\lim\limits_{n,m\to\infty} p(\tilde{x}_n, \tilde{x}_m)$ limitinin olmadığını gösterir. Bu bir çelişkidir. Dolayısıyla $\forall \tilde{\varepsilon} \tilde{>} \overline{0}$ için $n, m \geq n_0$ iken $p(\tilde{x}_n, \tilde{x}_m) \tilde{<} \tilde{\varepsilon}$ olacak şekilde $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Yani $(\tilde{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi (X, d^s, A) uzayında bir Cauchy dizisidir.

$\Leftarrow$: $(\tilde{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi (X, d^s, A) uzayında bir Cauchy dizisi olsun. Yani $\forall \tilde{\varepsilon} \tilde{>} \overline{0}$ için $n, m \geq n_0$ iken $p(\tilde{x}_n, \tilde{x}_m) \tilde{<} \tilde{\varepsilon}$ olacak şekilde $n_0 \in \mathbb{N}$ var olsun. Buradan

$$2p(\tilde{x}_n, \tilde{x}_m) - p(\tilde{x}_n, \tilde{x}_n) - p(\tilde{x}_m, \tilde{x}_m) \tilde{<} \tilde{\varepsilon}$$

olur. $\frac{\tilde{\varepsilon}}{2} = \tilde{\varepsilon}_1$ için

$$p(\tilde{x}_n,\tilde{x}_m)\,\tilde{<}\,\tilde{\varepsilon}_1+\frac{p(\tilde{x}_n,\tilde{x}_n)}{2}+\frac{p(\tilde{x}_m,\tilde{x}_m)}{2}$$

elde edilir. Buradan da

$$\lim_{n,m\to\infty} p(\tilde{x}_n,\tilde{x}_m)\,\tilde{<}\,\tilde{\varepsilon}_1+\lim_{n\to\infty}\left(\frac{p(\tilde{x}_n,\tilde{x}_n)}{2}\right)+\lim_{m\to\infty}\left(\frac{p(\tilde{x}_m,\tilde{x}_m)}{2}\right)$$

olur. Bu da $\lim\limits_{n,m\to\infty} p(\tilde{x}_n,\tilde{x}_m)$ limitinin var olduğunu gösterir. Dolayısıyla $(\tilde{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi $(\tilde{X},p,A)$ uzayında bir Cauchy dizisidir.

Teorem 3.3.10. Bir esnek parçalı metrik uzaylarda her yakınsak dizi bir Cauchy dizisidir.

İspat. $(\tilde{X},p,A)$ esnek parçalı metrik uzayında $\tilde{x}\,\tilde{\in}\,\tilde{X}$ esnek elemanına yakınsayan, $\tilde{X}$ kümesinin esnek elemanlarından oluşan bri $(\tilde{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi alalım. $\tilde{\varepsilon}\,\tilde{>}\,\overline{0}$ ve her $n\geq n_1$ için $|p(\tilde{x}_n,\tilde{x})-p(\tilde{x}_n,\tilde{x}_n)|\,\tilde{<}\,\tilde{\varepsilon}$ olacak şekilde $n_1\in\mathbb{N}$ ve her $n\geq n_2$ için $|p(\tilde{x}_n,\tilde{x})-p(\tilde{x},\tilde{x})|\,\tilde{<}\,\tilde{\varepsilon}$ olaak şekilde $n_2\in\mathbb{N}$ vardır. Her $m,n\geq n_0$ için $n_0=\max\{n_1,n_2\}$ olsun. Buradan

$$\begin{aligned}
2p(\tilde{x}_n,\tilde{x}_m)-p(\tilde{x}_n,\tilde{x}_n)-p(\tilde{x}_m,\tilde{x}_m) &\,\tilde{\leq}\, 2p(\tilde{x}_n,\tilde{x})+2p(\tilde{x},\tilde{x}_m)-2p(\tilde{x},\tilde{x})-p(\tilde{x}_n,\tilde{x}_n)\\
&\quad -p(\tilde{x}_m,\tilde{x}_m)\\
&= p(\tilde{x},\tilde{x}_m)-p(\tilde{x}_m,\tilde{x}_m)+p(\tilde{x}_m,\tilde{x})-p(\tilde{x},\tilde{x})\\
&\quad +p(\tilde{x}_n,\tilde{x})-p(\tilde{x}_n,\tilde{x}_n)+p(\tilde{x}_n,\tilde{x})-p(\tilde{x},\tilde{x})\\
&\,\tilde{\leq}\, |p(\tilde{x}_m,\tilde{x})-p(\tilde{x}_m,\tilde{x}_m)|+|p(\tilde{x}_m,\tilde{x})-p(\tilde{x},\tilde{x})|\\
&\quad +|p(\tilde{x},\tilde{x}_n)-p(\tilde{x}_n,\tilde{x}_n)|+|p(\tilde{x},\tilde{x}_n)-p(\tilde{x},\tilde{x})|\\
&\,\tilde{\leq}\, 4\tilde{\varepsilon}
\end{aligned}$$

olur. Bu durumda $(\tilde{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi $(\tilde{X}, d^s, A)$ uzayında bir Cauchy dizisidir. Teorem 3.3.9 ile $(\tilde{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi $(\tilde{X}, p, A)$ uzayında bir Cauchy dizisidir.

Teorem 3.3.11. $(\tilde{X}, p, A)$ parçalı metrik uzayının tam olması için gerek ve yeter şart $(\tilde{X}, d^s, A)$ uzayının tam olmasıdır.

İspat. $\Rightarrow$: $(\tilde{X}, p, A)$ uzayı tam olsun. Yani $(\tilde{X}, p, A)$ uzayındaki her $(\tilde{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy dizisi bir $\tilde{x} \in \tilde{X}$ elemanına yakınsasın. Bu durumda Teorem 3.3.2. gereğince $\lim_{n\to\infty} p(\tilde{x}_n, \tilde{x}) = p(\tilde{x}, \tilde{x})$ olur. $(\tilde{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi $(\tilde{X}, p, A)$ uzayında bir Cauchy dizisi olduğundan dolayı Teorem 3.3.9. gereğince $(\tilde{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi $(\tilde{X}, d^s, A)$ uzayında bir Cauchy dizisidir. Yani $\forall \tilde{\varepsilon} \tilde{>} \overline{0}$ için $n, m \geq n_0$ iken $\lim_{n\to\infty} d^s(\tilde{x}_n, \tilde{x}_m) \tilde{<} \tilde{\varepsilon}$ olacak şekilde $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Buradan

$$\lim_{n,m\to\infty} \left(2p(\tilde{x}_n, \tilde{x}_m) - p(\tilde{x}_n, \tilde{x}_n) - p(\tilde{x}_m, \tilde{x}_m)\right) \tilde{<} \tilde{\varepsilon}$$

olur. $(\tilde{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi $(\tilde{X}, p, A)$ uzayında yakınsak olduğundan

$$\lim_{n,m\to\infty} \left(2p(\tilde{x}_n, \tilde{x}) - p(\tilde{x}_n, \tilde{x}_n) - p(\tilde{x}, \tilde{x})\right) \tilde{<} \tilde{\varepsilon}$$

olur. Yani $\lim_{n\to\infty} d^s(\tilde{x}_n, \tilde{x}) \tilde{<} \tilde{\varepsilon}$ olur. Bu eşitsizlik $\forall \tilde{\varepsilon} \tilde{>} \overline{0}$ için sağlandığından dolayı $\lim_{n\to\infty} d^s(\tilde{x}_n, \tilde{x}) = \overline{0}$ olup $(\tilde{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi $(\tilde{X}, d^s, A)$ uzayında yakınsaktır. Bu durum her $(\tilde{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy dizisi için geçerli olduğundan dolayı $(\tilde{X}, d^s, A)$ uzayı tamdır.

$\Leftarrow$: $(\tilde{X}, d^s, A)$ uzayı tam olsun. Yani $(\tilde{X}, d^s, A)$ uzayındaki her $(\tilde{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy dizisi için $\lim_{n\to\infty} d^s(\tilde{x}_n, \tilde{x}) = \overline{0}$ olsun. Bu durumda

$$\lim_{n\to\infty} 2p(\tilde{x}_n,\tilde{x}) - \lim_{n\to\infty} p(\tilde{x}_n,\tilde{x}_n) - p(\tilde{x},\tilde{x}) = \overline{0}$$

olur. Buradan

$$\lim_{n\to\infty} 2p(\tilde{x}_n,\tilde{x}) = \lim_{n\to\infty} p(\tilde{x}_n,\tilde{x}_n) + p(\tilde{x},\tilde{x})$$

olur. $p(\tilde{x}_n,\tilde{x}_n) \tilde{\leq} p(\tilde{x}_n,\tilde{x})$ olduğundan dolayı $\lim_{n\to\infty} p(\tilde{x}_n,\tilde{x}_n) \tilde{\leq} \lim_{n\to\infty} p(\tilde{x}_n,\tilde{x})$ olur.

$$\lim_{n\to\infty} p(\tilde{x}_n,\tilde{x}) + \lim_{n\to\infty} p(\tilde{x}_n,\tilde{x}_n) \tilde{\leq} \lim_{n\to\infty} p(\tilde{x}_n,\tilde{x}_n) + p(\tilde{x},\tilde{x})$$

şeklinde yazarsak

$$\lim_{n\to\infty} p(\tilde{x}_n,\tilde{x}) \leq p(\tilde{x},\tilde{x}) \tag{3.3}$$

elde edilir. $p(\tilde{x},\tilde{x}) \leq p(\tilde{x}_n,\tilde{x})$ olduğundan dolayı

$$p(\tilde{x},\tilde{x}) \leq \lim_{n\to\infty} p(\tilde{x}_n,\tilde{x}) \tag{3.4}$$

elde edilir. (3.3) ve (3.4) eşitsizliklerinden dolayı $\lim_{n\to\infty} p(\tilde{x}_n,\tilde{x}) = p(\tilde{x},\tilde{x})$ elde edilir. Teorem 3.3.2 gereğince $(\tilde{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi bir $\tilde{x} \in \tilde{X}$ elemanına yakınsar. Teorem 3.3.9 ile $(\tilde{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi $(\tilde{X},p,A)$ uzayında bir Cauchy dizisidir ve $(\tilde{X},d^s,A)$ uzayındaki her $(\tilde{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy dizisi için $(\tilde{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi $(\tilde{X},p,A)$ uzayında yakınsak olduğundan dolayı $(\tilde{X},p,A)$ uzayı tamdır.

Teorem 3.3.12. $(\tilde{X},p,A)$ ensek parçalı metrik uzay, $(\tilde{X},d^s,A)$ esnek metrik uzay, $\tilde{x} \in \tilde{X}$ ve $\tilde{X}$ esnek kümesinin esnek elemanlarından oluşan bir dizi $(\tilde{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olsun.

$\lim_{n\to\infty} p(\tilde{x}_n,\tilde{x}) = p(\tilde{x},\tilde{x}) = \lim_{n,m\to\infty} p(\tilde{x}_n,\tilde{x}_m)$ eşitliğinin sağlanması için gerek ve yeter şart $\lim_{n,m\to\infty} d^s(\tilde{x}_n,\tilde{x}_m) = \overline{0}$ olmasıdır.

İspat. $\Rightarrow$: $\lim_{n\to\infty} p(\tilde{x}_n,\tilde{x}) = p(\tilde{x},\tilde{x}) = \lim_{n,m\to\infty} p(\tilde{x}_n,\tilde{x}_m)$ olsun. $\lim_{n\to\infty} p(\tilde{x}_n,\tilde{x}) = p(\tilde{x},\tilde{x})$ olduğundan Teorem 3.3.2 ile $(\tilde{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi $(\tilde{X},p,A)$ uzayında yakınsaktır. Ayrıca $\lim_{n,m\to\infty} p(\tilde{x}_n,\tilde{x}_m) = p(\tilde{x},\tilde{x})$ olduğundan dolayı $(\tilde{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi $(\tilde{X},p,A)$ uzayında bir Cauchy dizisidir. Bu durumda Teorem 3.3.9 ile $(\tilde{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi $(\tilde{X},d^s,A)$ uzayında bir Cauchy dizisidir ve Teorem 3.3.11 den $\lim_{n\to\infty} d^s(\tilde{x}_n,\tilde{x}) = \overline{0}$ bulunur. Yani

$$\lim_{n,m\to\infty} \left(2p(\tilde{x}_n,\tilde{x}) - p(\tilde{x}_n,\tilde{x}_n) - p(\tilde{x},\tilde{x})\right) = \overline{0}$$

olur. $(\tilde{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi $(\tilde{X},p,A)$ uzayında yakınsak olduğundan dolayı

$$\lim_{n,m\to\infty} \left(2p(\tilde{x}_n,\tilde{x}_m) - p(\tilde{x}_n,\tilde{x}_n) - p(\tilde{x}_m,\tilde{x}_m)\right) = \overline{0}$$

olur. Bu da $\lim_{n,m\to\infty} d^s(\tilde{x}_n,\tilde{x}_m) = \overline{0}$ olması demektir.

$\Leftarrow$: $\lim_{n,m\to\infty} d^s(\tilde{x}_n,\tilde{x}_m) = \overline{0}$ olsun. Bu durumda $(\tilde{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi $(\tilde{X},d^s,A)$ uzayında $\tilde{x}\in\tilde{X}$ elemanına yakınsaktır. Yani $\lim_{n\to\infty} d^s(\tilde{x}_n,\tilde{x}) = \overline{0}$ olur. Bu durumda

$\lim_{n\to\infty} 2p(\tilde{x}_n,\tilde{x}) - \lim_{n\to\infty} p(\tilde{x}_n,\tilde{x}_n) - p(\tilde{x},\tilde{x}) = \overline{0}$ ve $\lim_{n\to\infty} 2p(\tilde{x}_n,\tilde{x}) = \lim_{n\to\infty} p(\tilde{x}_n,\tilde{x}_n) + p(\tilde{x},\tilde{x})$ olur. $p(\tilde{x}_n,\tilde{x}_n) \precsim p(\tilde{x}_n,\tilde{x})$ olduğundan $\lim_{n\to\infty} p(\tilde{x}_n,\tilde{x}_n) \precsim \lim_{n\to\infty} p(\tilde{x}_n,\tilde{x})$ olur. Buradan $\lim_{n\to\infty} p(\tilde{x}_n,\tilde{x}) + \lim_{n\to\infty} p(\tilde{x}_n,\tilde{x}_n) \precsim \lim_{n\to\infty} p(\tilde{x}_n,\tilde{x}_n) + p(\tilde{x},\tilde{x})$ şeklinde yazarsak

$$\lim_{n\to\infty} p(\tilde{x}_n,\tilde{x}) \leq p(\tilde{x},\tilde{x}) \tag{3.5}$$

elde edilir. $p(\tilde{x},\tilde{x}) \tilde{\leq} p(\tilde{x}_n,\tilde{x})$ olduğundan dolayı

$$p(\tilde{x},\tilde{x}) \leq \lim_{n\to\infty} p(\tilde{x}_n,\tilde{x}) \tag{3.6}$$

elde edilir. (3.5) ve (3.6) eşitsizliklerinden dolayı $\lim_{n\to\infty} p(\tilde{x}_n,\tilde{x}) = p(\tilde{x},\tilde{x})$ elde edilir. Teorem 3.3.2 den $(\tilde{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi $(\tilde{X},p,A)$ uzayında yakınsaktır. $(\tilde{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi $(\tilde{X},d^s,A)$ uzayında yakınsak olduğundan $(\tilde{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi $(\tilde{X},d^s,A)$ uzayında bir Cauchy dizisidir. Teorem 3.3.9 ile $(\tilde{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi $(\tilde{X},p,A)$ uzayında yakınsaktır. Yani $(\tilde{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin limiti vardır ve bu limit yakınsadığı elemana eşittir. Yani

$$\lim_{n,m\to\infty} p(\tilde{x}_n,\tilde{x}_m) \leq p(\tilde{x},\tilde{x}) \tag{3.7}$$

olur. $(\tilde{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi $(\tilde{X},p,A)$ uzayında yakınsak olduğundan dolayı Teorem 3.3.2 den dolayı

$$\lim_{n\to\infty} p(\tilde{x}_n,\tilde{x}) = p(\tilde{x},\tilde{x}) \tag{3.8}$$

olur. Sonuç olarak (3.7) ve (3.8) eşitliklerinden dolayı $\lim_{n\to\infty} p(\tilde{x}_n,\tilde{x}) = p(\tilde{x},\tilde{x}) = \lim_{n,m\to\infty} p(\tilde{x}_n,\tilde{x}_m)$ eşitliği elde edilir.

Teorem 3.3.13. *(EP5)* şartını sağlayan bir tam esnek parçalı metrik uzayın esnek kapalı alt kümesi tamdır.

İspat. $(\tilde{X},p,A)$ bir tam esnek parçalı metrik uzay ve $(F,A)\tilde{\subseteq}\tilde{X}$ esnek kapalı kümesini alalım. $(\tilde{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, (F,A) esnek kümesinin esnek elemanlarından oluşan bir Cauchy dizisi olsun. Bu durumda $(\tilde{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\tilde{X},p,A)$ uzayında bir Cauchy dizisidir. $(\tilde{X},p,A)$ uzayı tam olduğundan $(\tilde{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi $\tilde{X}$ kümesinde bir $\tilde{x}$ esnek elemanına yakınsar. Yani $\tilde{\varepsilon} \tilde{>} \overline{0}$, her $B(\tilde{x},\tilde{\varepsilon})$ açık yuvarı için $\tilde{x}_n \in B(\tilde{x},\tilde{\varepsilon})$ olur. Buradan $B(\tilde{x},\tilde{\varepsilon}) \cap \{x_n\} \neq \varnothing$ ve $B(\tilde{x},\tilde{\varepsilon}) \cap (F,A) \neq \varnothing$ olduğundan dolayı $\tilde{x} \in cl(F,A)$ olur. Buradan da $\tilde{x} \tilde{\in} (\overline{F},A) = (F,A)$ olur. Sonuç olarak da (F,A) tamdır.

Örnek 3.3.14. $\forall \lambda \in A$, $(F,A)(\lambda) = [0,1]$ ve $(G,A)(\lambda) = [2,3]$ olmak üzere $\tilde{X} = (F,A) \Cup (G,A)$ esnek kümesi üzerinde $p : SE(\tilde{X}) \times SE(\tilde{X}) \to \mathbb{R}(A)^*$ dönüşümü

$$p(\tilde{x},\tilde{y}) = \begin{cases} \max\{\tilde{x},\tilde{y}\}, & \{\tilde{x},\tilde{y}\} \Cap (G,A) \neq \Phi \\ |\tilde{x}-\tilde{y}|, & \{\tilde{x},\tilde{y}\} \tilde{\subset} (F,A) \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda $(\tilde{X},p,A)$ bir tam esnek parçalı metrik uzaydır.

Tanım 3.3.15. $(\tilde{X},p,A)$ bir esnek parçalı metrik uzay ve $(F,A) \in S(\tilde{X})$ boş olmayan bir esnek küme olsun. $P|_F : SE(F,A) \times SE(F,A) \to \mathbb{R}(A)^*$ fonksiyonunun $\forall \tilde{x},\tilde{y} \in (F,A)$ için $P|_F(\tilde{x},\tilde{y}) = p(\tilde{x},\tilde{y})$ ile tanımlayalım. Bu durumda $P|_F$, (F,A) üzerinde bir esnek parçalı metriktir ve p tarafından (F,A) üzerine *indirgenen esnek parçalı metrik* olarak adlandırılır. $((F,A),P|_F,A)$ uzayına da $(\tilde{X},p,A)$ uzayının bir *esnek parçalı metrik alt uzayı* denir.

Teorem 3.3.16. *(EP5)* şartını sağlayan bir esnek parçalı metrik uzayın tam alt uzayı esnek kapalı alt kümedir.

İspat. $(\tilde{X},p,A)$ esnek parçalı metrik uzay, (F,A) tam alt uzay ve $\tilde{y} \tilde{\in} (\overline{F},A)$ olsun. Dolayısıyla $\tilde{y}_n \to \tilde{y}$ olacak şekilde (F,A) esnek kümesinde, (F,A) esnek kümesinin esnek elemanlarından oluşan bir $(\tilde{y}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi vardır. Böylece $(\tilde{y}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\tilde{X}$ kümesinde bir Cauchy dizisi dolayısıyla da (F,A) esnek kümesinde bir Cauchy dizisidir. (F,A) tam olduğundan dolayı $\tilde{y} \tilde{\in} (F,A)$ olur. Dolayısıyla $(\overline{F},A) \tilde{\subset} (F,A)$ elde edilir.

Diğer taraftan $(F,A)\tilde{\subseteq}(\overline{F},A)$ olduğundan dolayı $(\overline{F},A)=(F,A)$ elde edilir. Yani (F,A) esnek kapalıdır.

BÖLÜM 4. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tez esnek parçalı metrik uzaylara giriş niteliğindedir. Tezde ilk önce esnek parçalı metrik kavramı tanımlanmış temel özellikleri ve ispatlanmıstır. Bu özellikler esnek parçalı metrik uzaylar üzerinde yapılacak elemanter işlemler kullanılarak kurulacak yeni yapılar için önemlidir.

Tezin asıl amacı doğrultusunda esnek kümeler ve elemanter işlemler yardımıyla esnek parçalı metrik uzaylarda çeşitli özellikler ispatlanmış, bu özelliklerin bir kısmının klasik parçalı metrik uzayların litaretürde bulunan özelliklerden farklı olduğu gösterilmiştir. Esnek parçalı metrik uzaylarda esnek açık, esnek kapalı yuvar, esnek açık küme kavramları tanımlanmış. Bir esnek metrik uzayın elemanter esnek işlemler altında bir esnek topoljik uzay olması için sağlaması gereken şart verildikten sonra bir esnek kümenin esnek içi, esnek dışı ve esnek kapanışı gibi topolojik kavramlar tanımlanmış ve bazı özellikleri ispatlanmıştır.

Son olarak esnek parçalı metrik uzaylarda yakınsaklık, tamlık, esnek parçalı alt metrik uzay kavramları ile esnek fonksiyonların bu yapıdaki özellikleri ispatlanmıştır.

Bu tezdeki çalışmalardan hareketle esnek parçalı metrik uzaylarda dizisel süreklilik, süreklilik, total sınırlılık, kompaktlık gibi birçok kavram üzerine çalışmalar yapılabilir.

KAYNAKLAR

[1] Zadeh, L. A., Fuzzy sets. Inform. Control., 8(3): 338-353, 1965.

[2] Molodtsov, D., Soft sets theory-First results. Comput. Math. Appl., 37(4-5): 19-31, 1999.

[3] Molodtsov, D., The theory of soft sets (in Russian), URSS Publishers, 2004.

[4] Molodtsov, D. A., Leonov, V. Y., Kovkov, D. V., Soft sets technique and its application. Nechetkie Sistemy i Myagkie Vychisleniya, 1(1): 8-39, 2006.

[5] Maji, P. K., Biswas, R., Roy, A. R., Soft set theory. Comput. Math. Appl, 45(4-5): 555-562, 2003.

[6] Maji, P. K., Roy, A. R., Biswas, R., An application of soft sets in a decision making problem. Comput. Math. Appl., 44(8-9): 1077-1083, 2002.

[7] Maji, P. K., Biswas, R., Roy, A. R., Fuzzy soft sets. J. Fuzzy Math., 9(3): 589-602, 2001.

[8] Maji, P. K., Biswas, R., Roy, A. R., Intuitionistic fuzzy soft sets. J. Fuzzy Math., 9(3): 677-692, 2001.

[9] Ahmad, B., Kharal, A., On fuzzy soft sets. Adv. Fuzzy Syst., 2009, Article ID 586507, 2009.

[10] Xu, W., Ma, J., Wang, S., Hao, G., Vague soft sets and their properties. Comput. Math. Appl., 59(2): 787-794, 2010.

[11] Feng, F., Li, C., Davvaz, B., Ali, M. I., Soft sets combined with fuzzy sets and rough sets: a tentative approach. Soft Comput., 14(9): 899-911, 2010.

[12] Ali, M. I., A note on soft sets, rough soft sets and fuzzy soft sets. Appl. Soft Comput., 11(4): 3329-3332, 2011.

[13] Feng, F., Liu, X., Leoreanu-Fotea, V., Jun, Y. B., Soft sets and soft rough sets. Inform. Sci., 181(6): 1125-1137, 2011.

[14] Jun, Y. B., Soft BCK/BCI-algebras. Comput. Math. Appl., 56(5): 1408-1413, 2008.

[15] Jun, Y. B., Park, C. H., Applications of soft sets in ideal theory of BCK/BCI-algebras. Inform. Sci., 178(11): 2466-2475, 2008.

[16] Feng, F., Jun, Y. B., Zhao, X., Soft semirings. Comput. Math. Appl., 56(10): 2621-2628, 2008.

[17] Park, C. H., Jun, Y. B., Öztürk, M. A., Soft WS-algebras. Commun. Korean Math. Soc., 23(3): 313-324, 2008.

[18] Jun, Y. B., Lee, K. J., Zhan, J., Soft p-ideals of soft BCI-algebras. Comput. Mathe. Appl., 58(10): 2060-2068, 2009.

[19] Jun, Y. B., Lee, K. J., Park, C. H., Soft set theory applied to ideals in d-algebras. Comput. Math. Appl., 57(3): 367-378, 2009.

[20] Atagün, A. O., Sezgin, A., Soft substructures of rings, fields and modules. Comput. Math. Appl., 61(3): 592-601, 2011.

[21] Ali, M. I., Shabir, M., Naz, M., Algebraic structures of soft sets associated with new operations. Comput. Math. Appl., 61(9): 2647-2654, 2011.

[22] Shabir, M., Naz, M., On soft topological spaces. Comput. Math. Appl., 61(7): 1786-1799, 2011.

[23] Min, W. K., A note on soft topological spaces. Comput. Math. Appl., 62(9): 3524-3528, 2011.

[24] Hazra, H., Majumdar, P., Samanta, S. K., Soft topology. Fuzzy Inf. Eng., 4(1): 105-115, 2012.

[25] Aygünoğlu, A., Aygün, H., Some notes on soft topological spaces. Neural Comput. Appl., 21(1): 113-119, 2012.

[26] Varol, B. P., Aygün, H., A new approach to soft topology. Hacet. J. Math. Stat.,41(5): 731-741, 2012.

[27] Varol, B. P., Aygün, H., Fuzzy soft topology. Hacet. J. Math. Stat., 41(3): 407-419, 2012.

[28] Varol, B. P., Aygün, H., On soft Hausdorff spaces. Ann. Fuzzy Math. Inform., 5(1): 15-24, 2013.

[29] Zorlutuna, I., Akdağ, M., Min, W. K., Atmaca, S., Remarks on soft topological spaces. Ann. Fuzzy Math. Inform., 3(2): 171-185, 2012.

[30] Hussain, S., Ahmad, B., Some properties of soft topological spaces. Comput. Math. Appl., 62(11): 4058-4067, 2011.

[31] Ahmad, B., Hussain, S., On some structures of soft topology. Math. Sci., 6: 64, 2012.

[32] Kannan, K., Soft generalized closed sets in soft topological spaces. J. Theor. Appl. Inf. Technol., 37(1): 17-21, 2012.

[33] Nazmul, S., Samanta, S. K., Neighbourhood properties of soft topological spaces. Ann. Fuzzy Math. Inform., 6(1): 1-15, 2013.

[34] Georgiou, D. N., Megaritis, A. C., Soft set theory and topology. Appl. Gen. Topol., 15(1): 93-109, 2014.

[35] Das, S., Samanta, S. K., Soft real sets, soft real numbers and their properties. J. Fuzzy Math., 20(3): 551-576, 2012.

[36] Das, S., Samanta, S. K., On soft complex sets and soft complex numbers. J. Fuzzy Math.,21(1): 195-216, 2013

[37] Das, S., Samanta, S. K., On soft metric spaces. J. Fuzzy Math., 21(3): 707-734, 2013.

[38] Taşköprü, K., Elemanter esnek topolojik uzaylara giriş. Sakarya Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Topoloji Bilim Dalı, Doktora Tezi, 2017.

[39] Taşköprü, K., Altıntaş, İ., Introduction to elemantary soft topology, Under review.

[40] Majumdar, P., Samanta, S. K., On soft mappings. Comput. Math. Appl., 60(9): 2666-2672, 2010.

[41] Matthews, S.G., Partial metric topology, Research Report 212, Department of Computer Science, University of Warwick, 1992.

[42] Matthews, S.G., The topology of partial metric spaces. Research Report 222. Dept. of Computer Science, University of Warwick, 1992.

[43] Matthews, S.G., Partial metric topology, in: Proc. 8th Summer Conference on General Topology and Applications. Ann. New York Acad. Sci. 728, 183-197, 1994.

[44] S.J. O'Neill, Two topologies are better than one, Tech. Report, University of Warwick, Conventry, UK, 1995.

[45] Oltra, S., Valero, O., Banach‟s fixed point theorem for partial metric spaces, Rend. Ist. Mat. Univ. Trieste 36, 17-26, 2004.

[46] Rabarison, A.F., Partial metrics, Annals of The New York. Academy of Sciences, 1994, pp. 183-197, 2007.

[47] Bari , C.D., Vetro P., Fixed points for weak-contractions on partial metric spaces. 1, No. 1, 4-9. 2011.

[48] Ay, A., Kısmi metrik uzaylarda sabit nokta teoremleri. Atatürk Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Yüksek Lisans Tezi, 2013.

[49] Durmaz, G., Zayıf kısmi metrik uzayda bazı sabit nokta teoremleri, Kırıkkale Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilimdalı Doktora Tezi, 2015.

ÖZGEÇMİŞ

Oğulcan Olgun, 14.10.1993 tarihinde Kocaeli'nin İzmit ilçesinde doğdu. İlk, orta ve lise eğitimini Kocaelide tamamladı. 2011 yılında Sabancı Anadolu Teknik Lisesi Elektrik-Elektronik Bölümünün Endüstriyel Bakım Onarım dalından mezun oldu. 2011 yılında başladığı Sakarya Üniversitesi Matematik Bölümünü 2016 yılında bitirdi. 2016 yılında Sakarya Üniversitesi Matematik Anabilimdalı Topoloji Bilim Dalında yüksek lisansa başladı. Halen özel bir okulda Matematik Öğretmeni olarak görev yapmaktadır.