T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ESNEK METRİK UZAYLARI TOPOLOJİSİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Elif ATALAY

Enstitü Anabilim Dalı	:	MATEMATİK
Enstitü Bilim Dalı	:	TOPOLOJİ
Tez Danışmanı	:	Doç. Dr. İsmet ALTINTAŞ

Ocak 2019

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ESNEK METRİK UZAYLARI TOPOLOJİSİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Elif ATALAY

Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK

Bu tez 11.01.2019 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği ile kabul edilmiştir.

Doç. Dr.	**Doç. Dr.**	**Doç. Dr.**
Banu PAZAR VAROL	**İsmet ALTINTAŞ**	**Mahpeyker ÖZTÜRK**
Juri Başkanı	**Üye**	**Üye**

BEYAN

Tez içindeki tüm verilerin akademik kurallar çerçevesinde tarafımdan elde edildiğini, görsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçların akademik ve etik kurallara uygun şekilde sunulduğunu, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezde yer alan verilerin bu üniversite veya başka bir üniversitede herhangi bir tez çalışmasında kullanılmadığını beyan ederim.

Elif ATALAY

11.01.2019

ÖNSÖZ

Bilimin birçok dalında belirsizlik içeren problemleri matematiksel olarak modellemek ve belirsizlikleri ortadan kaldırmak amacıyla, esnek küme teorisi 1999 yılında bir matematiksel araç olarak ileri sürülmüştür. Bu durum esnek kümeleri ilgi çekecek bir konuma getirmiştir. Günümüzde esnek kümeler üzerine matematiksel yapılar kurma ile ilgili çalışmalar hızla ilerlemektedir.

Bu çalışmada esnek metrik uzaylarda dizisel kompaktlık, total sınırlılık, kompaktlık, süreklilik gibi temel kavramlar çalışılmıştır. Klasik metrik uzayların aksine herhangi bir esnek metrik uzayda dizisel kompaktlık ile kompaktlığın denk kavramlar olmadığı görülmüştür.

Bu çalışmanın her aşamasında bilimsel bakış açısını, öngörüsünü, matematik bilgisini ve tecrübesini benden esirgemeyen hocam Doç. Dr. İsmet ALTINTAŞ' a teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca, bana her türlü desteği veren aileme teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ …..………...…………………………………………………… i
İÇİNDEKİLER ………………………………………………………. ii
SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ ………………………………. iv
ÖZET ………….……………………………………………………… vi
SUMMARY ………………………………………………………….. vii

BÖLÜM 1.
GİRİŞ ……………………………………………………………… 1

BÖLÜM 2.
TEMEL KAVRAMLAR ..….……………………………………............ 5
2.1. Esnek Kümeler ……...…………………………….……...... 5
2.2. Esnek Elemanter İşlemler ...……..………………....…..……... 8
2.3. Esnek Reel Sayılar …..……………………………….……….. 13
2.4. Esnek Fonksiyonlar ……………………………….………….. 15

BÖLÜM 3.
ESNEK METRİK UZAYLAR ……………….................…………….…..... 17
3.1. Esnek Metrik ..…………………….…..……..…………….… 17
3.2. Alt Uzay, Esnek Kümelerde Uzaklık ve Çap ..………………….. 21
3.3. Esnek Açık ve Esnek Kapalı Yuvarlar.. ………………………….. 25
3.4. Esnek Açık ve Esnek Kapalı Kümeler …..………………………. 30
3.5. Esnek Yığılma ve Esnek Kapanış Noktaları …………………….. 36
3.6. Esnek Metrik Uzayda Tamlık ..………………………………….. 39
3.7. Esnek Metrik Uzay için Banach Sabit Nokta Teoremi …………. 45

BÖLÜM 4.
ESNEK METRİK UZAYLARDA KOMPAKTLIK ……………………………. 49
4.1. Esnek Metrik Uzaylarda Kompaktlık …….……………………... 49

BÖLÜM 5.
SONUÇ VE ÖNERİLER ……………………………………………….. 57

KAYNAKLAR …...……………………………………………………...... 58
ÖZGEÇMİŞ …………..……………………………………………......... 61

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

A	: Parametreler kümesi
X	: Evrensel küme
(F,A)	: Esnek küme
$\tilde{X}$	: Mutlak esnek küme
Φ	: Esnek boş küme
$S_A(X)$	: E evrenseli üzerindeki tüm esnek kümelerin ailesi
$\tilde{x}$	: Esnek eleman
$\tilde{r}$	: Esnek reel sayı
$\overline{r}$	: Her λ parametresi için $\tilde{r}(\lambda)=r$ ile tanımlı özel esnek reel sayı
$S(\tilde{E})$	: Φ esnek küme ve her λ parametresi için $F(\lambda)\neq\emptyset$ olan esnek kümelerin ailesi
$SE(F,A)$	: (F,A) kümesinin esnek elemanlarının ailesi
$\mathbb{R}(A)$	: Esnek reel sayılar ailesi
$\{\tilde{x}_n\}$	: Esnek elemanlarının dizisi
$B(\tilde{x},\tilde{c})$	: Esnek elemanlardan oluşan açık yuvar
$SS(B(\tilde{x},\tilde{c}))$	: Esnek açık yuvar
$SS[B(\tilde{x},\tilde{c})]$	: Esnek kapalı yuvar
$\tilde{\cup}$	: Esnek birleşim işlemi
$\tilde{\cap}$	: Esnek kesişim işlemi
$\tilde{\subset}$	: Esnek kapsama
$\tilde{<}$	: Esnek küçüklük

$\tilde{\leq}$	: Esnek küçük eşitlik
$\Cup$	: Elemanter birleşim işlemi
$\Cap$	: Elemanter kesişim işlemi
EET	: Elemanter esnek topoloji
$\mathfrak{B}$	: Esnek baz

ÖZET

Anahtar kelimeler: Esnek küme, esnek eleman, elemanter esnek işlemler, esnek metrik, elemanter esnek topoloji, tamlık, Banach sabit nokta teoremi, total sınırlılık, dizisel kompaktlık, kompaktlık, süreklilik.

Bu tezin ikinci bölümünde esnek kümelerle ilgili kısa bir literatür bilgisi ile birlikte bazı temel kavram ve özellikler verilmektedir.

Üçüncü bölümde, esnek eleman ışığında esnek metrik uzaylar üzerinde detaylı bir çalışma yapılmaktadır. Bu bölümde, esnek kümeler üzerine esnek eleman yardımıyla kurulan esnek metrik yapısı verilmekte, esnek metrik uzaylar ile klasik metrik uzaylar arasındaki geçişler incelenmekte ve bazı örnekler verilmektedir. Aynı zamanda esnek alt uzay, esnek metrik uzaylarda uzaklık ve çap kavramları ve onların bazı özellikleri verilmektedir. Esnek açık ve esnek kapalı yuvarlar, esnek komşuluk, esnek iç, esnek açık ve kapalı kümeler incelenmekte ve birçok özelliği verilmektedir. Esnek açık kümelerin elemanter esnek birleşimi esnek açık olduğu halde iki esnek açık kümenin elemanter esnek kesişimi esnek açık olmayabilir. Bu yüzden esnek açık kümelerin kesişimlerinin esnek açık olacak şekilde esnek metrik uzaylar üzerine bir kısıtlama getirilmektedir (M5 şartı). (M5) şartını sağlayan her esnek metrik uzayın bir esnek elemanter topolojik uzay olduğu görüldükten sonra esnek metrik uzaylarda esnek yığılma elemanları, esnek kapanış elemanları gibi topolojik özellikler çalışılmaktadır. Ayrıca esnek metrik uzaylarda esnek elemanlardan oluşan dizilerin yakınsaması, Cauchy dizileri ve esnek metrik uzaylarda tamlık kavramları ve onların bazı özellikleri verildikten sonra Banach sabit nokta teoremi ispatlanmaktadır.

Dördüncü bölümde, esnek metrik uzayların kompaktlığı ve sürekliliği üzerine çalışılmaktadır. Bu bölümde esnek metrik uzaylarda dizisel kapalılık, dizisel kompaktlık, esnek ağ, esnek total sınırlılık, Lebesgues elemanı ve esnek dizisel süreklilik kavramları tanımlanmakta ve bazı temel özellikleri ispatlanmaktadır. Aynı zamanda elemanter esnek metrik topolojik uzayda esnek açık örtü ve esnek kompaktlık tanımları yapılmaktadır. Her esnek metrik uzay elemanter esnek topolojik uzay olmadığından bu uzayda dizisel kompaktlıkla kompaktlığın farklı olduğu görülmektedir. Buna rağmen (M5) şartını sağlayan esnek metrik uzaylarda dizisel kompaktlıkla kompaktlığın, dizisel süreklilik ile sürekliliğin aynı oldukları ispatlanmaktadır. Bu bölümde dizisel kompaktlık ve kompaktlığın bazı özellikleri de verilmektedir.

Bu tezin özellikle dördüncü bölümünden elde edilen sonuçlar, bu konulardaki çalışmalar için kaynak teşkil edecek niteliktedir.

TOPOLOGY OF SOFT METRIC SPACES

SUMMARY

Keywords: Soft set, soft element, elementary operations, soft metric, elementary soft topology, completeness, Banach fixed point theorem, totally boundedness, compactness, sequentially compactness, continuity.

In the second chapter in this thesis, a short literature information about the soft sets and some fundemantal concepts and properties are given.

The soft metric spaces via soft elements are discussed in detail in the third chapter. The soft metric structure that established by the soft element on the soft sets is given, relations between the soft metric spaces and the classical metric spaces are examined and some examples are given in this chapter. Also, soft subspace, the consepts of distance and diameter and their some properties in soft metric spaces are given. Soft open balls, soft closed balls, soft neighboard, soft interior, soft open and soft closed sets are examined. Although the elemanter soft unions of soft open sets are soft open, the elemantary intersection of two soft sets is not open. So, the soft metric spaces are restricted (the condition M5) for the elemantary intersection of two soft sets to be open. It is seen that every metric space satifyng the condition (M5) is a elemantary soft topological space. It is worked on limit elements and closure elements as the concepts of topological in the elemantery soft metric topological space. In addition, the concepts as convergence of sequences of the soft elements, Cauchy sequences and completeness in soft metric spaces are given.

In the fourth chapter, the compactness of soft metric spaces is considered. In this chapter, the concepts of sequentially closeness, sequentially compactness, soft net, soft totally boundedness, Lebesques element, soft covering, compactness, soft sequentially continuity and continuity are defined, and their basic properties are proved in soft metric spaces. Since every soft metric spaces is not a elementary soft topological space, it is seen that sequentially compactness is different from compactness. Nevertheless, it is proved that every sequentially compact soft set is compact, and every sequentially continuous mapping is continuous in the soft metric space satisfying (M5). It is also proved that some properties of sequentially compactness and compactness in this chapter.

The results obtained in the scope of this thesis will be the basis for further studies in this context.

BÖLÜM 1. GİRİŞ

Doğruluk değeri göreceli olan kavramların matematiksel olarak modelleyebilme arzusu, belirsiz problemlere olan ilgiyi artırmıştır. Bu problemleri klasik matematiksel yaklaşımla modellemek çözebilmek çok da kolay değildir. Çünkü klasik matematiksel mantıkta, bir varlık ya bir kümenin elemanıdır ya da değildir. Günlük hayatta sıkça kullanılan iyi insan, soğuk hava, güzel manzara, ucuz ev vb. ifadeler kişiden kişiye göre değiştiği için kesinlik içermezler. Kesinlik içermeyen belirsiz kavramların matematiksel olarak modellenmesi ve bu problemlerin çözümü için, aralık matematiği, olasılık teorisi, yaklaşımlı kümeler teorisi, bulanık kümeler teorisi, esnek kümeler teorisi gibi farklı teoriler geliştirildi. Bunlar arasında, en dikkat çekicilerden birisi, Zadeh'in bulanık kümeler teorisidir [1]. Bir bulanık küme, kendisine ait üyelik fonksiyonu yoluyla tanımlanabilir. Her bir özel durumda üyelik fonksiyonu kurulduğu için son derece bireyseldir. Bu nedenle, üyelik fonksiyonu inşasından bağımsız bir küme teorisine ihtiyaç duyulmuştur.

Bu ihtiyacı karşılamak ve belirsizlikle başa çıkmak amacıyla 1999 yılında Molodtsov [2] tarafından esnek küme teorisi ortaya atıldı. Esnek küme teorisi, bulanık küme ve sezgisel bulanık küme teorilerinden farklı olarak reel değerli bir fonksiyon yerine bir seçim fonksiyonuyla belirsizliği ortadan kaldırmayı hedeflemektedir. Molodtsov [2,3] sürekli diferansiyellenebilir fonksiyonlar, Riemann integrali, Peron integrali, olasılık teorisi, ölçüm teorisi gibi birçok kavramı esnek küme teorisine başarıyla uygulamıştır.

Yakın geçmişte matematiğin birçok alanında esnek küme teorisi üzerinde çalışmalar yapıldı. Maji ve ark. [4–6], Pawlak'ın [7] yaklaşımlı küme teorisi yardımıyla, bir karar verme probleminde esnek kümenin uygulamasını sundular, esnek kümelerde bazı işlemleri tanımladılar ve bulanık esnek kümeler üzerinde yaptıkları çalışmadan sonra sezgisel bulanık esnek küme teorisini ortaya attılar [6]. Xiao ve ark. [8] esnek küme temelli hesaplama metodu üzerine, Chen ve ark. [9] esnek kümelerde parametre indirgemesi üzerine ve Mushrif ve ark. [10] esnek küme temelli sınıflandırmalar üzerine çalışmalar yaptılar. Yang ve ark. [11,12] bulanık esnek kümelerde indirgemeyi tanımlayarak, bulanık esnek kümeler yoluyla karar verme problemini analiz ettiler. Ayrıca aralık değerli bulanık esnek küme kavramını tanımlayarak bu yeni kümenin kesişim, birleşim ve De Morgan gibi temel küme işlemi özelliklerinin sağladığını gösterdiler.

Son yıllarda esnek kümeler üzerine cebirsel ve topolojik yapılar kurup bu yapılara göre esnek kümelerin özelliklerini ortaya çıkaran çalışmalar yapılmaktadır. Feng ve ark. [13–15] esnek grup ve esnek yarı halkayı tanımlayıp temel özelliklerini inceledikten sonra karar vermeye dayalı bulanık esnek kümeye ayarlanabilir yaklaşım tanımını verip bir uygulama sundular. Sun ve ark. [16], Acar ve Tanay [17] Atagün ve Sezgin [18] ve diğer birçok yazar modüllerin, halka ve cisimlerin, esnek yapıları üzerinde çalıştılar. Aygünoğlu ve Aygün [19] bulanık esnek kümelerin bazı özelliklerini inceledikten sonra 2011 yılında esnek topolojik uzaylar üzerine bir çalışma yaptılar [20]. Aynı yıl Shabir ve Naz [21] tarafından esnek topolojik yapılar üzerine bir çalışma yayımlandı. Ardından Zorlutuna ve ark. [22] ve Min [23] esnek topolojik uzaylar üzerine temel bazı sonuçlar ortaya koydular. Taşköprü [24] doktora tezinde, esnek kümeler üzerine elemanter esnek küme işlemleri ile yeni esnek topolojik yapılar kurdu.

Günümüzde esnek kümeler ile ilgili araştırmalar yoğun ilgi çekmektedir. Özellikle Das ve Samanta’nın çalışmaları analiz konularına temel oluşturmaktadır. Das ve Samanta [25], esnek noktadan farklı olan esnek eleman kavramını ortaya atarak esnek reel sayılar ve esnek reel kümeler, esnek kompleks sayılar ve esnek kompleks kümeler [26] kavramlarını tanımladılar. Hem esnek nokta hem de esnek eleman bazında, esnek metrik uzaylar [27,28], esnek vektör uzaylar [29], esnek normlu uzaylar [30,31], esnek iç çarpım uzayları [32], esnek Banach uzaylar [33] gibi önemli çalışmalar yaptılar. Günümüzde esnek küme teorisi ve onun uygulamaları üzerine yeni çalışmalar hızla gelişmektedir.

Bu tezin temel amacı, esnek kümeler üzerine, esnek eleman tabanında kurulan esnek metrik uzayları inceleyerek esnek metrik uzayların elemanter esnek topolojik ve tamlık özelliklerini çalışmak ve esnek metrik uzayların dizisel kompaktlık, kompaktlık özelliklerini ispatlamaktır. Bu amaca uygun olarak aşağıdaki çalışmalar yapıldı.

Tezin ikinci bölümde, tezin diğer bölümlerinde kullanılacak esnek kümeler, elemanter esnek işlemler ve esnek fonksiyonlar ile ilgili bazı temel kavramlar verildi.

Üçüncü bölümde, esnek metrik uzaylar esnek eleman temelinde Das ve Samanta'nın [28] çalışması takip edilerek detaylı olarak çalışıldı. Bu bölümde, esnek metrik uzay örnekleri verildi. Esnek metrik uzaylarla klasik metrik uzaylar arasındaki ilişkiler incelendi. Esnek alt uzaylar, esnek kümeler arasındaki uzaklık ve çap kavramları, esnek açık ve esnek kapalı yuvarlar, esnek komşuluk, esnek iç, esnek açık kümeler esnek kapalı kümeler ve onların birçok özellikleri incelendi. Esnek metrik uzayda esnek açık iki kümenin elemanter esnek kesişimini her zaman esnek açık olmadığı görüldü. Metrik şartlarına ek olarak (M5) şartını sağlayan esnek metrik uzayda esnek açık iki kümenin elemanter esnek kesişiminin esnek açık olduğunun ispatı verildi. Böylece her esnek metrik uzayın değil de (M5) şartı sağlayan esnek metrik uzayların elemanter işlemlere göre bir elemanter topolojik uzayı olduğu görülmüş oldu. Elemanter esnek metrik topolojik uzaylarda esnek yığılma elemanları, esnek kapanış elemanları, esnek sürekli fonksiyonlar gibi bazı kavramların topolojik özellikleri çalışıldı. Bu bölümde, aynı zamanda esnek metrik uzaylarda esnek elemanlardan oluşan dizilerin yakınsaklığı, sınırlılığı, Cauchy dizileri ele alındı ve esnek metrik uzayların tamlığı verildikten sonra esnek metrik uzaylarda Banach sabit nokta teorimi ispatlandı.

Tezin orijinal olan dördüncü bölümünde, esnek metrik uzayların kompaktlığı ve sürekliliği üzerine çalışıldı. Bu bölümde esnek metrik uzayda dizisel kapalılık, dizisel kompaktlık, esnek ağ, esnek total sınırlılık, Lebesgues elemanı ve esnek dizisel süreklilik kavramları tanımlandı ve bazı temel özellikleri ispatlandı. Elemanter esnek metrik topolojik uzayda esnek açık örtü ve esnek kompaktlık tanımları yapıldı. Her esnek metrik uzay elemanter esnek topolojik uzay olmadığından bu uzayda dizisel kompaktlıkla kompaktlığın farklı olduğu görüldü. Her kompakt uzayın dizisel kompakt olduğu fakat dizisel kompakt uzayın kompakt olması gerekmediği gözlendi. Buna rağmen (M5) şartını sağlayan esnek metrik uzayda dizisel kompaktlıkla kompaktlığın, dizisel süreklilik ile sürekliliğin aynı oldukları ispatlandı. Bu bölümde dizisel kompaktlık ve kompaktlığın bazı özellikleri de ispatlandı.

Bu tezde elde edilen sonuçlar, bu konulardaki çalışmalara kaynak teşkil edecek nitelikte olduğu düşünülmektedir.

BÖLÜM 2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde bazı temel kavramlar verilmektedir. Bu kavramlar, bir sonraki bölümde tanım ve yapıların kurulmasında, teoremlerin ispatlanmasında önbilgi ve yöntem olarak kullanılacaktır

2.1. Esnek Kümeler

Tanım 2.1.1. [2] $A \neq \emptyset$ bir parametreler kümesi, $X \neq \emptyset$ bir evrensel küme ve $\mathcal{P}(X)$, X kümesinin bütün alt kümelerinin ailesi olsun. Bir $F : A \rightarrow \mathcal{P}(X)$ küme değerli dönüşümüne X kümesi üzerinde bir *esnek küme* denir ve (F, A) ikilisi ile gösterilir.

Başka bir ifade ile X kümesinin alt kümelerinin parametrelendirilmiş bir ailesine X üzerinde bir *esnek küme* denir. Her $\lambda \in A$ için $F(\lambda)$ kümesi, (F, A) esnek kümesinin λ-yaklaşımlı elemanlarının bir kümesi olarak göz önünde bulundurulabilir. Böylece X kümesi üzerinde bir (F, A) esnek kümesi

$$(F, A) = \{(\lambda, F(\lambda)) : \lambda \in A \text{ ve } F(\lambda) \subset X\}$$

şeklinde ikililer ile ifade edilir. A parametre kümesi tarafından parametrelendirilmiş X evrensel kümesi üzerindeki bütün esnek kümelerin ailesi $S_A(X)$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.2. [2] $(F, A), (G, A) \in S_A(X)$ esnek kümeler olsun.

Her $\lambda \in A$ için $F(\lambda)=\varnothing$ ise (F,A) esnek kümesine *esnek boş küme denir* ve Φ ile gösterilir.

Her $\lambda \in A$ için $F(\lambda)=X$ ise (F,A) esnek kümesine *mutlak esnek küme* denir ve $\tilde{X}$ ile gösterilir.

Her $\lambda \in A$ için $F(\lambda)\subset G(\lambda)$ ise (F,A) esnek kümesine (G,A) esnek kümesinin *esnek alt kümesi* denir ve $(F,A)\tilde{\subset}(G,A)$ ile gösterilir. (G,A) kümesine de (F,A) kümesinin *esnek üst kümesi* denir ve $(G,A)\tilde{\supset}(F,A)$ ile gösterilir.

(F,A) kümesi, (G,A) kümesinin esnek alt kümesi ve (G,A) de (F,A) kümesinin esnek alt kümesi ise (F,A) ve (G,A) kümelerine *esnek eşit kümeler* denir.

(F,A) ve (G,A) esnek kümelerinin *esnek birleşimi* (H,A), her $\lambda \in A$ için $H(\lambda)=F(\lambda)\cup G(\lambda)$ şeklinde tanımlanır ve $(H,A)=(F,A)\tilde{\cup}(G,A)$ ile gösterilir.

(F,A) ve (G,A) esnek kümelerinin *esnek kesişimi* (H,A), her $\lambda \in A$ için $H(\lambda)=F(\lambda)\cap G(\lambda)$ şeklinde tanımlanır ve $(H,A)=(F,A)\tilde{\cap}(G,A)$ ile gösterilir.

(F,A) ve (G,A) esnek kümelerinin *esnek farkı* (H,A), her $\lambda \in A$ için $H(\lambda)=F(\lambda)\setminus G(\lambda)$ şeklinde tanımlanır ve $(H,A)=(F,A)\tilde{\setminus}(G,A)$ ile gösterilir.

Her $\lambda \in A$ için $F^c(\lambda)=X-F(\lambda)$ ile tanımlanan $F^c : A \to \mathcal{P}(X)$ dönüşümüne X üzerinde (F,A) esnek kümesinin *esnek tümleyeni* denir ve $(F^c,A)=(F,A)^c$ ile gösterilir. Açıkça $\tilde{X}^c=\Phi$ ve $\Phi^c=\tilde{X}$ olur.

Önerme 2.1.1. [2,3] (F,A), (G,A) ve (H,A), X üzerinde esnek kümeler olsun. Aşağıdaki eşitlikler sağlanır.

1. $((F,A)\tilde{\cup}(G,A))^c = (F,A)^c \tilde{\cap} (G,A)^c$,
2. $((F,A)\tilde{\cap}(G,A))^c = (F,A)^c \tilde{\cup} (G,A)^c$,
3. $((F,A)\tilde{\cap}(G,A))\tilde{\cup}(H,A) = ((F,A)\tilde{\cup}(H,A))\tilde{\cap}((G,A)\tilde{\cup}(H,A))$,
4. $((F,A)\tilde{\cup}(G,A))\tilde{\cap}(H,A) = ((F,A)\tilde{\cap}(H,A))\tilde{\cup}((G,A)\tilde{\cap}(H,A))$.

Tanım 2.1.3. [25,28] Bir $\varepsilon : A \to X$ dönüşümüne X kümesi üzerinde bir *esnek eleman* denir. ε, X üzerinde bir esnek eleman ve bir $(F,A) \in S_A(X)$ verildiğinde her $\lambda \in A$ için $\varepsilon(\lambda) \in F(\lambda)$ ise ε esnek elemanı (F,A) esnek kümesine *aittir* denir ve $\varepsilon \tilde{\in} (F,A)$ ile gösterilir. Burada $(F,A)(\lambda) = \{\varepsilon(\lambda), \varepsilon \tilde{\in} (F,A)\}$ dir. Her tek elemanlı esnek küme yalnızca bir tek esnek eleman ile özdeşlenebilir.

Esnek elemanlar için $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}, \ldots$ gösterimi kullanılmıştır. Her $\lambda \in A$ için $F(\lambda) \neq \varnothing$ olacak şekilde X üzerinde tanımlı tüm esnek kümeler ile birlikte Φ esnek boş kümenin oluşturduğu aile $S(\tilde{X})$ ve $(F,A) \in S(\tilde{X})$ esnek kümesinin tüm esnek elemanlarının ailesi $SE((F,A))$ ile gösterilir.

Önerme 2.1.2. [28] 1. Bir $(F,A) \in S(\tilde{X})$ esnek kümesinin esnek elemanlarının bir ailesi bu esnek kümenin bir esnek alt kümesini üretir.

2. $\mathfrak{B}$, $\tilde{X}$ mutlak esnek kümesinin esnek elemanlarının bir ailesi olmak üzere $\mathfrak{B}$ ailesinin ürettiği esnek küme $SS(\mathfrak{B})$ ile gösterilir.

3. Herhangi bir $(F,A)\in S(\tilde{X})$ esnek kümesi için $SS(SE(F,A))=(F,A)$ olur. Ancak $\tilde{X}$ kümesinin esnek elemanlarının bir $\mathfrak{B}$ sınıfı için $SE(SS(\mathfrak{B}))\neq\mathfrak{B}$ olur.
4. $\mathfrak{B}_1,\mathfrak{B}_2\subset SE(\tilde{X})$ olmak üzere $\mathfrak{B}_1\subseteq\mathfrak{B}_2$ olsun. Her $\lambda\in A$ için $\mathfrak{B}_1(\lambda)=\mathfrak{B}_2(\lambda)$ ise $SS(\mathfrak{B}_1)=SS(\mathfrak{B}_2)$ olur.
5. Herhangi $(F,A),(G,A)\in S(\tilde{X})$ esnek kümeleri için (F,A) kümesinin her esnek elemanı (G,A) esnek kümesinin de bir esnek elemanı ise $(F,A)\tilde{\subset}(G,A)$ olur.

Uyarı 2.1.1. [28] $(F,A),(G,A)\in S(\tilde{X})$ verilsin.

1. $\tilde{x}\tilde{\in}(F,A)\tilde{\cup}(G,A)$ ise $\tilde{x}\tilde{\in}(F,A)$ veya $\tilde{x}\tilde{\in}(G,A)$ olması gerekmez.
2. Herhangi $(F,A),(G,A)\in S(\tilde{X})$ esnek kümelerinin esnek tümleyenlerinin veya bu iki esnek kümenin esnek kesişiminin $S(\tilde{X})$ sınıfına ait olması gerekmez.

2.2. Esnek Elemanter İşlemler

Tanım 2.2.1. [24,28] $(F,A),(G,A)\in S(\tilde{X})$ esnek kümeleri verilsin. $\mathfrak{B}=\{\tilde{x}\tilde{\in}\tilde{X}:\tilde{x}\tilde{\in}(F,A)\text{ veya }\tilde{x}\tilde{\in}(G,A)\}$ olmak üzere $(F,A)\Cup(G,A)=SS(\mathfrak{B})$ esnek kümesine (F,A) ve (G,A) esnek kümelerinin *elemanter birleşimi* denir. Diğer bir deyişle

$$(F,A)\Cup(G,A)=SS(SE(F,A)\cup SE(G,A))$$

olarak tanımlanır.

$\mathfrak{B}=\left\{\tilde{x}\tilde{\in}\tilde{X}:\tilde{x}\tilde{\in}(F,A) \text{ ve } \tilde{x}\tilde{\in}(G,A)\right\}$ olmak üzere $(F,A)\Cap(G,A)=SS(\mathfrak{B})$ esnek kümesine (F,A) ve (G,A) esnek kümelerinin *elemanter kesişimi* denir. Diğer bir deyişle

$$(F,A)\Cap(G,A)=SS\big(SE(F,A)\cap SE(G,A)\big)$$

olarak tanımlanır.

$\mathfrak{B}=\left\{\tilde{x}\tilde{\in}\tilde{X}:\tilde{x}\tilde{\in}\left(F^{c},A\right)\right\}$ olmak üzere $\left(F^{\mathbb{C}},A\right)=SS(\mathfrak{B})$ esnek kümesine (F,A) esnek kümesinin *elemanter tümleyeni* denir. Diğer bir deyişle

$$\left(F^{\mathbb{C}},A\right)=SS\left(SE\left(F^{c},A\right)\right)$$

olarak tanımlanır.

$\mathfrak{B}=\left\{\tilde{x}\tilde{\in}\tilde{X}:\tilde{x}\tilde{\in}(F,A)\tilde{\setminus}(G,A)\right\}$ olmak üzere $(F,A)\setminus(G,A)=SS(\mathfrak{B})$ esnek kümesine (F,A) ve (G,A) esnek kümelerinin *elemanter farkı* denir. Diğer bir deyişle

$$(F,A)\setminus(G,A)=SS\Big(SE\big((F,A)\tilde{\setminus}(G,A)\big)\Big)$$

olarak tanımlanır.

Önerme 2.2.1. [24,28] $(F,A),(G,A)\in S\left(\tilde{X}\right)$ esnek kümeleri ve $\left\{\mathfrak{B}_i : i\in I\right\}$ esnek elemanların ailesi için aşağıdaki işlemler sağlanır.

1. $(F,A)\Cup(G,A)=(F,A)\tilde{\cup}(G,A)$.
2. $(F,A)\Cap(G,A)\tilde{\subseteq}(F,A)\tilde{\cap}(G,A)$.

3. $(F^{\mathbb{C}}, A) \tilde{\subseteq} (F^{c}, A)$.

4. $(F, A) \setminus (G, A) \tilde{\subseteq} (F, A) \tilde{\diagdown} (G, A)$.

5. $(F, A) \Cup (F^{\mathbb{C}}, A) \tilde{\subseteq} \tilde{X}$.

6. $(F, A) \Cap (F^{\mathbb{C}}, A) = \Phi$.

7. Her $i \in I$ için $(F_i, A) = SS(\mathfrak{B}_i)$ olmak üzere $\bigcup\!\!\!\bigcup_{i\in I}(F, A)_i = SS\left(\bigcup_{i\in I}\mathfrak{B}_i\right)$.

8. Her $i \in I$ için $(F_i, A) = SS(\mathfrak{B}_i)$ olmak üzere $\bigcap\!\!\!\bigcap_{i\in I}(F_i, A) \tilde{\supseteq} SS\left(\bigcap_{i\in I}\mathfrak{B}_i\right)$.

Uyarı 2.2.1. Herhangi $(F, A), (G, A) \in S(\tilde{X})$ esnek kümeleri için $(F, A) \Cap (G, A) = \Phi$ olması $(F, A) \tilde{\subset} (G^{\mathbb{C}}, A)$ ve $(G, A) \tilde{\subset} (F^{\mathbb{C}}, A)$ olmasını gerektirmez.

Örneğin; $X = \{a, b, c, d\}$ ve $A = \{\lambda, \mu\}$ olmak üzere

$$
\begin{aligned}
F &= \{(\lambda, \{a, b\}), (\mu, \{a, c\})\}, \\
G &= \{(\lambda, \{c, d\}), (\mu, \{b, c\})\}, \\
H &= \{(\lambda, \{c, d\}), (\mu, \{a, b, d\})\},
\end{aligned}
$$

esnek kümelerini ve onların elemanter tümleyenlerini ele alalım. $(F, A) \Cap (G, A) = \Phi$ ve $(F, A) \Cap (H, A) = \Phi$ olmasına rağmen $(F, A) \tilde{\not\subset} (G^{\mathbb{C}}, A)$ veya $(G, A) \tilde{\not\subset} (F^{\mathbb{C}}, A)$ ve $(F, A) \tilde{\not\subset} (H^{\mathbb{C}}, A)$ veya $(H, A) \tilde{\not\subset} (F^{\mathbb{C}}, A)$ olur. Fakat $(H^{\mathbb{C}}, A) \tilde{\subset} (F, A)$ ve $(F^{\mathbb{C}}, A) \tilde{\subset} (H, A)$ olur. Ayrıca $(G, A) \Cap (H, A) \neq \Phi$ olmasına rağmen $(G^{\mathbb{C}}, A) \Cap (H^{\mathbb{C}}, A) = \Phi$ olur.

Önerme 2.2.2. [24] Herhangi $(F,A),(G,A)\in S\left(\tilde{X}\right)$ esnek kümeleri için $(F,A)\Cap(G,A)=\Phi$ ve $(F,A)\tilde{\cap}(G,A)\in S\left(\tilde{X}\right)$ ise $(F,A)\tilde{\subset}(G^{\mathbb{C}},A)$ ve $(G,A)\tilde{\subset}(F^{\mathbb{C}},A)$ olur.

Lemma 2.2.1. [24,28] Herhangi $(F,A),(G,A)\in S\left(\tilde{X}\right)$ esnek kümeleri için aşağıdaki bağıntılar sağlanır.

1. $SE\big((F,A)\Cap(G,A)\big)=SE(F,A)\cap SE(G,A)$,
2. $SE\big((F,A)\Cup(G,A)\big)\tilde{\supseteq} SE(F,A)\cup SE(G,A)$.

Önerme 2.2.3. [24,28] $(F,A),(G,A),(H,A)\in S\left(\tilde{X}\right)$ herhangi esnek kümeler olsun.

1. $\big((F,A)\Cap(G,A)\big)\Cup(H,A)\tilde{\subseteq}\big((F,A)\Cup H,A)\big)\Cap\big((G,A)\Cup(H,A)\big)$,
2. $\big((F,A)\Cup(G,A)\big)\Cap(H,A)\tilde{\supseteq}\big((F,A)\Cap(H,A)\big)\Cup\big((G,A)\Cap(H,A)\big)$.

Hangi şartlarda elemanter birleşim ve elemanter kesişim işlemlerinin $S\left(\tilde{X}\right)$ üzerinde dağılma özelliğine sahip olacağı aşağıdaki önermede verilmiştir.

Önerme 2.2.4. [24] Herhangi $(F,A),(G,A),(H,A)\in S\left(\tilde{X}\right)$ esnek kümeleri için aşağıdaki bağıntılar sağlanır.

1. Eğer $(F,A)\tilde{\cap}(G,A)\in S\left(\tilde{X}\right)$ ise

$$\big((F,A)\Cap(G,A)\big)\Cup(H,A)=\big((F,A)\Cup H,A)\big)\Cap\big((G,A)\Cup(H,A)\big).$$

2. Eğer $(F,A)\tilde{\cap}(H,A)\in S\left(\tilde{X}\right)$ ve $(G,A)\tilde{\cap}(H,A)\in S\left(\tilde{X}\right)$ ise

$$\big((F,A)\Cup(G,A)\big)\Cap(H,A)=\big((F,A)\Cap(H,A)\big)\Cup\big((G,A)\Cap(H,A)\big).$$

Önerme 2.2.5. [24] Herhangi $(F,A),(G,A)\in S\left(\tilde{X}\right)$ esnek kümeleri için aşağıdaki bağıntılar sağlanır.

1. $(F^c,A)\Cap(G^c,A)\neq\Phi$ ise $\left((F,A)\Cup(G,A)\right)^c=(F^c,A)\Cap(G^c,A)$,
2. $\left((F,A)\Cap(G,A)\right)^c\neq\Phi$ ise $\left((F,A)\Cap(G,A)\right)^c=(F^c,A)\Cup(G^c,A)$.

Önerme 2.2.6. [24] Herhangi $(F,A),(G,A)\in S\left(\tilde{X}\right)$ esnek kümeleri için aşağıdaki bağıntılar sağlanır.

1. $(F^c,A)\Cap(G^c,A)\neq\Phi$, $(F^{\mathbb{C}},A)\neq\Phi$ ve $(G^{\mathbb{C}},A)\neq\Phi$ ise

$\left((F,A)\Cup(G,A)\right)^{\mathbb{C}}=(F^{\mathbb{C}},A)\Cap(G^{\mathbb{C}},A)$.

2. $(F,A)\Cap(G,A)\neq\Phi$, $(F^{\mathbb{C}},A)\neq\Phi$ ve $(G^{\mathbb{C}},A)\neq\Phi$ ise

$\left((F,A)\Cap(G,A)\right)^{\mathbb{C}}=(F^{\mathbb{C}},A)\Cup(G^{\mathbb{C}},A)$.

Uyarı 2.2.2. [24] Yukarıdaki önermede de görüldüğü gibi elemanter işlemler De Morgan kurallarını genelde sağlamazlar. Eğer her $(F,A),(G,A)\in S\left(\tilde{X}\right)$ için $(F,A)\tilde{\cap}(G,A)\in S\left(\tilde{X}\right)$, $(F^c,A),(G^c,A)\in S\left(\tilde{X}\right)$ ve $(F^c,A)\tilde{\cap}(G^c,A)\in S\left(\tilde{X}\right)$ ise De Morgan kuralları elemanter işlemler için sağlanır.

Tanım 2.2.2. [24] $\mathcal{T}\subset S\left(\tilde{X}\right)$ esnek elemanların bir ailesi olmak üzere

1. $\Phi,\tilde{X}\in\mathcal{T}$,
2. $\{U_i\}_{i\in I}\subset\mathcal{T}$ için $\bigcup\limits_{i\in I}U_i\in\mathcal{T}$,

3. $\{U_i\}_{i=1}^{n} \subset \mathcal{T}$ için $\bigcap_{i=1}^{n} U_i \in \mathcal{T}$.

şartları sağlanırsa $\mathcal{T}$ sınıfına $\tilde{X}$ üzerinde bir elemanter işlemlere göre bir *esnek topoloji* veya *elemanter esnek topoloji* ve $(\tilde{X}, \mathcal{T}, A)$ üçlüsüne de *elemanter esnek topolojik (EET) uzay* adı verilir.

Tanım 2.2.3. [24] $\mathcal{B} \subset S(\tilde{X})$ esnek kümelerin bir ailesi olsun. $\mathcal{B}$ ailesi aşağıdaki şartları sağlarsa $\tilde{X}$ üzerindeki bir *elemanter esnek topoloji için esnek bazdır* denir.

B1. Her $\tilde{x} \tilde{\in} \tilde{X}$ için $\tilde{x} \tilde{\in} B$ olacak şekilde en az bir $B \in \mathcal{B}$ esnek kümesi vardır.

B2. $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ için $\tilde{x} \tilde{\in} \tilde{X}$ ve $\tilde{x} \tilde{\in} B_1 \Cap B_2$ ise $\tilde{x} \tilde{\in} B_3 \tilde{\subset} B_1 \Cap B_2$ olacak şekilde $B_3 \in \mathcal{B}$ esnek kümesi vardır.

2.3. Esnek Reel Sayılar

Tanım 2.3.1. [25] $B(\mathbb{R})$, $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesinin boştan farklı tüm sınırlı alt kümelerinin ailesi olsun. $F : A \to B(\mathbb{R})$ dönüşümü *esnek reel küme* ve (F, A) ile gösterilir. Eğer (F, A) esnek reel kümesi tek elemanlı esnek küme ise (F, A) kümesine karşılık gelen esnek eleman ile ilişkilendirerek bu esnek kümeye *esnek reel sayı* denir. Tüm esnek reel kümelerin ailesi $\mathrm{R}(A)$, tüm esnek reel sayıların ailesi $\mathbb{R}(A)$ ve negatif olmayan esnek reel sayıların ailesi $\mathbb{R}(A)^*$ ile gösterilir. $\mathbb{R}(A) = SE(\tilde{\mathbb{R}})$ olduğu açıktır. Esnek sayılar için $\tilde{r}, \tilde{s}, \tilde{t}, \ldots$ gösterimi ve özel olarak her $\lambda \in A$ için $\tilde{r}(\lambda) = r$ ise $\overline{r}$ gösterimi kullanılmıştır.

Tanım 2.3.2. [25] $\tilde{r}, \tilde{s} \in \mathbb{R}(A)$ esnek reel sayıları verildiğinde bu esnek reel sayıların sıralaması, her $\lambda \in A$ için

$\tilde{r}(\lambda) \leq \tilde{s}(\lambda)$ ise $\tilde{r} \,\tilde{\leq}\, \tilde{s}$,

$\tilde{r}(\lambda) \geq \tilde{s}(\lambda)$ ise $\tilde{r} \,\tilde{\geq}\, \tilde{s}$,

$\tilde{r}(\lambda) < \tilde{s}(\lambda)$ ise $\tilde{r} \,\tilde{<}\, \tilde{s}$,

$\tilde{r}(\lambda) > \tilde{s}(\lambda)$ ise $\tilde{r} \,\tilde{>}\, \tilde{s}$.

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.3.3. [25] $(F,A),(G,A) \in \mathrm{R}(A)$, esnek reel kümeler olsun. (F,A) ve (G,A) esnek reel kümelerinin *toplamı,* her $\lambda \in A$ için

$$(F+G)(\lambda) = \{a+b : a \in F(\lambda), b \in G(\lambda)\}$$

şeklinde tanımlanır. (F,A) ve (G,A) esnek reel kümelerinin *farkı* her $\lambda \in A$ için

$$(F-G)(\lambda) = \{a-b : a \in F(\lambda), b \in G(\lambda)\}$$

ile tanımlanır. (F,A) ve (G,A) esnek reel kümelerinin *çarpımı* her $\lambda \in A$ için

$$(F.G)(\lambda) = \{a.b : a \in F(\lambda), b \in G(\lambda)\}$$

ile tanımlanır. (F,A) ve (G,A) esnek reel kümelerinin *bölümü* her $\lambda \in A$ için

$$(F/G)(\lambda) = \{a/b : a \in F(\lambda), b \in G(\lambda) \setminus \{0\}\}$$

ile tanımlanır.

$\mathbb{R}(A)$ esnek reel sayılar sınıfı üzerinde toplama, çıkarma, çarpma ve bölme işlemleri $\mathrm{R}(A)$ üzerindeki işlemlere benzer şekilde yapılır. Örneğin; $\tilde{r},\tilde{s} \in \mathbb{R}(A)$ verildiğinde bu iki esnek reel sayının toplamı, her $\lambda \in A$ için

$$(\tilde{r}+\tilde{s})(\lambda)=\{a+b:a=\tilde{r}(\lambda),b=\tilde{s}(\lambda)\}$$

olmak üzere $\tilde{r}+\tilde{s}$ biçiminde ve bu iki esnek reel sayının çarpımı, her $\lambda\in A$ için

$$(\tilde{r}.\tilde{s})(\lambda)=\{a.b:a=\tilde{r}(\lambda),b=\tilde{s}(\lambda)\}$$

olmak üzere $\tilde{r}.\tilde{s}$ biçimindedir. Bu durumda $\mathbb{R}(A)$, tanımlanan toplama ve çarpma işlemlerine göre bir cisim olur.

2.4. Esnek Fonksiyonlar

Tanım 2.4.1. [24] X ve Y boştan farklı iki küme ve A boştan farklı parametreler kümesi olsun. $f:SE(\tilde{X})\to SE(\tilde{Y})$ dönüşümüne bir *esnek dönüşüm* denir.

X ve Y boştan farklı herhangi iki küme, A boştan farklı parametreler kümesi ve $\{f_\lambda:\lambda\in A\}$, X kümesinden Y kümesine kesin dönüşümlerin herhangi parametrize edilmiş ailesi olsun. Bu durumda her $\tilde{x}\tilde{\in}\tilde{X}$ ve her $\lambda\in A$ için $f(\tilde{x})(\lambda)=f_\lambda(\tilde{x}(\lambda))$ şeklinde tanımlanan $f:SE(\tilde{X})\to SE(\tilde{Y})$ dönüşümü bir esnek dönüşümdür.

Yine X ve Y boştan farklı herhangi iki küme ve A boştan farklı parametreler kümesi olsun. $g:X\to Y$, bir kesin dönüşüm olmak üzere her $\tilde{x}\tilde{\in}\tilde{X}$ ve her $\lambda\in A$ için $f(\tilde{x})(\lambda)=g(\tilde{x}(\lambda))$ şeklinde tanımlanan $f:SE(\tilde{X})\to SE(\tilde{Y})$ dönüşümü bir esnek dönüşümdür. Bu şekildeki bir esnek dönüşüme g kesin dönüşümü tarafından *üretilen esnek dönüşüm* denir.

Böylece, X kümesinden Y kümesine herhangi bir kesin dönüşüm bir esnek dönüşüme genişletilebilir.

Dikkat edilmelidir ki, kesin dönüşümlerin herhangi parametrize edilmiş ailesi bir esnek dönüşüm olmasına rağmen bir esnek dönüşüm kesin dönüşümlerin herhangi parametrize edilmiş ailesi olmayabilir.

Böylece esnek dönüşüm kesin dönüşümlerin herhangi parametrize edilmiş ailesinden daha genel ve daha kapsamlıdır.

Teorem 2.4.1. [24] X ve Y boştan farklı herhangi iki küme ve A boştan farklı parametreler kümesi olsun. $f : SE(\tilde{X}) \to SE(\tilde{Y})$ esnek dönüşümü aşağıdaki (f^*) şartını sağlarsa her $\tilde{x} \tilde{\in} \tilde{X}$ ve her $\xi \in X$ için $\tilde{x}(\lambda) = \xi$ olmak üzere $f_\lambda(\xi) = f(\tilde{x})(\lambda)$ ile tanımlanan $f_\lambda : X \to Y$, her bir $\lambda \in A$ için bir kesin dönüşümdür.

$(\boldsymbol{f}^*)$**.** Her $\lambda \in A$ ve $\xi \in X$ için $\{f(\tilde{x})(\lambda) : \tilde{x} \tilde{\in} \tilde{X} \ni \tilde{x}(\lambda) = \xi\}$ tek elemanlı bir kümedir.

Tanım 2.4.2. [24] X ve Y boştan farklı iki küme ve A boştan farklı parametreler kümesi olsun. (f^*) şartını sağlayan $f : SE(\tilde{X}) \to SE(\tilde{Y})$ dönüşümüne bir *esnek fonksiyon* denir.

BÖLÜM 3. ESNEK METRİK UZAYLAR

Bu bölümde, esnek metrik uzaylar esnek eleman bazında tanımlanmakta ve birçok özelliği verilmektedir.

3.1. Esnek Metrik

Tanım 3.1.1. [28] $A \neq \varnothing$ parametreler kümesi, $X \neq \varnothing$ bir küme ve $\tilde{X}$ mutlak esnek küme olsun. Bir $d : SE\left(\tilde{X}\right)\times SE\left(\tilde{X}\right)\rightarrow R\left(A\right)^{*}$ dönüşümü aşağıdaki şartları sağlıyorsa d dönüşümüne $\tilde{X}$ esnek kümesi üzerinde bir esnek metriktir denir. Her $\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z}\in SE(\tilde{X})$ için

(M1) $d(\tilde{x},\tilde{y})\tilde{\geq}\overline{0}$,

(M2) $d(\tilde{x},\tilde{y})=\overline{0} \Leftrightarrow \tilde{x}=\tilde{y}$,

(M3) $d(\tilde{x},\tilde{y})=d(\tilde{y},\tilde{x})$,

(M4) $d(\tilde{x},\tilde{z})\tilde{\leq}d(\tilde{x},\tilde{y})+d(\tilde{y},\tilde{z})$

d esnek metriği ile beraber $\tilde{X}$ esnek kümesine esnek metrik uzay denir ve $\left(\tilde{X},d,A\right)$ veya $\left(\tilde{X},d\right)$ ile gösterilir.

Örnek 3.1.1. [28] X boştan farklı bir küme ve A boş olmayan parametreler kümesi ve $\tilde{X}$ mutlak esnek küme olsun. Her $\tilde{x},\tilde{y}\tilde{\in}\tilde{X}$ için $d : SE\left(\tilde{X}\right)\times SE\left(\tilde{X}\right)\rightarrow R\left(A\right)^{*}$ dönüşümü

$$d(\tilde{x},\tilde{y})=\begin{cases}\overline{0}, & \tilde{x}=\tilde{y}\\ \overline{1}, & \tilde{x}\neq\tilde{y}\end{cases}$$

ile tanımlanan d dönüşümü bütün esnek metrik aksiyomlarını sağlar. Böylece d, $\tilde{X}$ esnek kümesi üzerinde bir esnek metriktir. Bu metrik, ayrık esnek metrik ve $\left(\tilde{X},d\right)$ ikilisi, ayrık metrik uzay olarak adlandırılır.

Teorem 3.1.1. Bir kesin X kümesi üzerinde $\{d_\lambda:\lambda\in A\}$ kesin metriklerinin her parametrize edilmiş ailesi $\tilde{X}$ esnek kümesi üzerinde bir esnek metriktir.

İspat. $\tilde{X}$, boş olmayan A parametreler kümesinde kesin esnek küme olsun. $\tilde{X}$ kesin küme üzerinde kesin metrik ailesi $\{d_\lambda:\lambda\in A\}$ olsun. Her $\tilde{x},\tilde{y}\tilde{\in}\tilde{X}$ ve her $\lambda\in A$ için $d:SE\left(\tilde{X}\right)\times SE\left(\tilde{X}\right)\to R\left(A\right)^*$ dönüşümü $d\left(\tilde{x},\tilde{y}\right)\left(\lambda\right)=d_\lambda\left(\tilde{x}\left(\lambda\right),\tilde{y}\left(\lambda\right)\right)$ ile tanımlansın. Bu durumda d, $\tilde{X}$ üzerinde esnek metriktir. Şimdi (M1)-(M4) aksiyomlarını esnek metrik için doğrulayalım.

(M1) Her $\tilde{x},\tilde{y}\tilde{\in}\tilde{X}$ ve her $\lambda\in A$ için $d\left(\tilde{x},\tilde{y}\right)\left(\lambda\right)=d_\lambda\left(\tilde{x}\left(\lambda\right),\tilde{y}\left(\lambda\right)\right)\geq 0$ olduğundan $d\left(\tilde{x},\tilde{y}\right)\tilde{\geq}\overline{0}$ olur.

(M2) Her $\tilde{x},\tilde{y}\tilde{\in}\tilde{X}$ ve her $\lambda\in A$ için

$$\begin{aligned}d\left(\tilde{x},\tilde{y}\right)=\overline{0}&\Leftrightarrow d\left(\tilde{x},\tilde{y}\right)\left(\lambda\right)=0\\&\Leftrightarrow d_\lambda\left(\tilde{x}\left(\lambda\right),\tilde{y}\left(\lambda\right)\right)=0\\&\Leftrightarrow \tilde{x}\left(\lambda\right)=\tilde{y}\left(\lambda\right)\\&\Leftrightarrow \tilde{x}=\tilde{y}\end{aligned}$$

(M3) Her $\tilde{x},\tilde{y}\tilde{\in}\tilde{X}$ ve her $\lambda\in A$ için

$$d(\tilde{x},\tilde{y})(\lambda)=d_\lambda\left(\tilde{x}(\lambda),\tilde{y}(\lambda)\right)=d_\lambda\left(\tilde{y}(\lambda),\tilde{x}(\lambda)\right)$$
$$=d(\tilde{y},\tilde{x})(\lambda) \Rightarrow d(\tilde{x},\tilde{y})=d(\tilde{y},\tilde{x})$$

(M4) Her $\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z}\tilde{\in}\tilde{X}$ ve her $\lambda\in A$ için

$$\left[d(\tilde{x},\tilde{y})+d(\tilde{y},\tilde{z})\right](\lambda)=d(\tilde{x},\tilde{y})(\lambda)+d(\tilde{y},\tilde{z})(\lambda)$$
$$=d_\lambda\left(\tilde{x}(\lambda),\tilde{y}(\lambda)\right)+d_\lambda\left(\tilde{y}(\lambda),\tilde{z}(\lambda)\right)\geq d_\lambda\left(\tilde{x}(\lambda),\tilde{z}(\lambda)\right)$$
$$=d(\tilde{x},\tilde{z})(\lambda)\Rightarrow d(\tilde{x},\tilde{y})+d(\tilde{y},\tilde{z})\tilde{\geq} d(\tilde{x},\tilde{z})$$

Böylece d , $\tilde{X}$ üzerinde bir esnek metrik olur.

Sonuç 3.1.1. X kesin kümesi üzerindeki her ρ kesin metriği $\tilde{X}$ esnek kümesi üzerindeki bir esnek metriğe genişletilebilir.

İspat. A boştan farklı parametreler kümesini kullanarak $\tilde{X}$ mutlak esnek kümesi oluşturulsun ve $d:SE(\tilde{X})\times SE(\tilde{X})\to R(A)^*$ dönüşümü her $\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z}\tilde{\in}\tilde{X}$ ve her $\lambda\in A$ için $d(\tilde{x},\tilde{y})(\lambda)=\rho(\tilde{x}(\lambda),\tilde{y}(\lambda))$ olarak tanımlansın. Bu durumda Teorem 3.1.1 kullanılarak X üzerinde d dönüşümünün esnek metrik olduğu kolayca ispatlanabilir.

Kesin metrik kullanarak tanımlanan esnek metriğe ρ tarafından üretilmiş esnek metrik denir.

Uyarı 3.1.1. Teorem 3.1.1 in tersi doğru değildir. Kesin metriklerin her parametre edilmiş ailesi esnek metrik olarak alınabilir. Fakat hiçbir esnek metrik kesin metrik ailesinin parametresi değildir. Böylece esnek metrik birçok kesin metrik parametre ailesinden daha genel ve daha kapsamlıdır.

Örnek 3.1.2 $X=\{a,b\}$, $A=\{\lambda,\mu\}$ olsun. Bu durumda $\tilde{x}_1(\lambda)=a$, $\tilde{x}_1(\mu)=a$; $\tilde{x}_2(\lambda)=a$, $\tilde{x}_2(\mu)=b$; $\tilde{x}_3(\lambda)=b$, $\tilde{x}_3(\mu)=a$; $\tilde{x}_4(\lambda)=b$, $\tilde{x}_4(\mu)=b$ ile $SE(\tilde{X})=\{\tilde{x}_1,\tilde{x}_2,\tilde{x}_3,\tilde{x}_4\}$ olur. $\tilde{X}$ üzerinde ayrık metrik uzayını alalım. $\forall\lambda\in A, \forall\tilde{x},\tilde{y}\tilde{\in}\tilde{X}$ için $d(\tilde{x},\tilde{y})(\lambda)=d_\lambda(\tilde{x}(\lambda),\tilde{y}(\lambda))$ olur.

Böylece $d_\lambda : X\times X\to\mathbb{R}^+$ iyi tanımlı değildir. Açıkça $d(\tilde{x}_1,\tilde{x}_1)=\overline{0}$ olduğundan $d(\tilde{x}_1,\tilde{x}_1)(\lambda)=0\Rightarrow d_\lambda(\tilde{x}_1(\lambda),\tilde{x}_1(\lambda))=0\Rightarrow d_\lambda(a,a)=0$ olur. Ayrıca $d(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2)=\overline{1}$ olduğundan $d(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2)(\lambda)=1\Rightarrow d_\lambda(\tilde{x}_1(\lambda),\tilde{x}_2(\lambda))=1\Rightarrow d_\lambda(a,a)=1$ elde edilir. Sonuç olarak d_λ, X üzerinde bir metrik olamaz.

Teorem 3.1.2. (Ayrıştırma Teoremi). Eğer $d : SE(\tilde{X})\times SE(\tilde{X})\to R(A)^*$ esnek metriği aşağıdaki (M5) şartını sağlıyorsa ve $d_\lambda : X\times X\to\mathbb{R}^+$ metriği $\forall\lambda\in A$ için $d_\lambda(\tilde{x}(\lambda),\tilde{y}(\lambda))=d(\tilde{x},\tilde{y})(\lambda)$ ile tanımlı ise d_λ, X üzerinde bir metriktir.

(M5) $(\zeta,\mu)\in X\times X$ ve $\forall\lambda\in A$ için $\{d(\tilde{x},\tilde{y})(\lambda) : \tilde{x}(\lambda)=\zeta, \tilde{y}(\lambda)=\mu\}$ tek nokta kümesidir.

İspat. Açıkça $\forall\lambda\in A$ için $d_\lambda : X\times X\to\mathbb{R}^+$ dönüşümü, X in bir sıralı çiftini negatif olmayan bir kesin reel sayıya karşılık getiren kuraldır. d_λ dönüşümünün iyi tanımlılığı (M5) şartından çıkar ve esnek metrik aksiyomları $\forall\lambda\in A$ için d_λ dönüşümünün metrik olma şartlarını verir. Böylece (M5) şartını sağlayan esnek metrik, kesin metriklerin parametrik ailesini verir. Bu bakış açısından (M5) şartını sağlayan bir esnek metrik $d : A\to(\mathbb{R}^+)^{X\times X}$ biçiminde bir özel esnek dönüşümdür.

Tanım 3.1.2. [28] $\left(\tilde{X},d\right)$ bir esnek metrik uzay olsun. Eğer $\forall\tilde{x},\tilde{y}\tilde{\in}\tilde{X}$ için $d\left(\tilde{x},\tilde{y}\right)\tilde{\leq}\overline{k}$ olacak şekilde bir $\overline{k}$ pozitif esnek reel sayısı varsa $\left(\tilde{X},d\right)$ uzayına sınırlı, aksi takdirde sınırsız esnek metrik uzay denir.

3.2. Esnek Alt Uzay, Esnek Kümelerde Uzaklık ve Çap

Tanım 3.2.1. [28] $(\tilde{X}, d)$ esnek metrik uzay ve (Y, A), $S(\tilde{X})$ sınıfının boş olmayan esnek alt kümesi olsun. Her $\tilde{x}, \tilde{y} \tilde{\in} (Y, A)$ için $d_Y(\tilde{x}, \tilde{y}) = d(\tilde{x}, \tilde{y})$ ile verilen $d_Y : SE(Y, A) \times SE(Y, A) \to \mathbb{R}(A)^*$ dönüşümü, (Y, A) üzerinde bir esnek metriktir. Bu metriğe d ile üretilmiş esnek relatif metrik denir. (Y, d_Y, A) esnek metrik uzayına da (X, d, A) esnek metrik uzayının bir esnek alt uzayı yada kısaca esnek alt metrik uzay denir.

Tanım 3.2.2. [28] $(\tilde{X}, d)$ bir esnek metrik uzay ve $(Y, A) \in S(\tilde{X})$, boş olmayan bir esnek kümesi olsun. Bu durumda (Y, A) nın çapı $\delta(Y, A)$ ile gösterilir ve

$$\delta((Y, A))(\lambda) = \sup\{d(\tilde{x}, \tilde{y})(\lambda); \tilde{x}, \tilde{y} \tilde{\in} (Y, A)\}, \forall \lambda \in A$$

ile tanımlanır. Eğer her $\lambda \in A$ için sonlu bir supremumu yoksa (Y, A) kümesine sonsuz çaplı esnek küme denir. Açıkça her boş olmayan $(Y, A) \in S(\tilde{X})$ esnek kümesi için $\delta((Y, A)) \tilde{\geq} \overline{0}$ olur.

Teorem 3.2.1. $(\tilde{X}, d)$ esnek metrik uzay olsun. Bu durumda,

i. $\delta((Y, A)) = \overline{0}$ olması için gerek ve yeter şart $(Y, A)(\in S(\tilde{X}))$ tek noktalı bir küme olmasıdır. Yani $\forall \lambda \in A$ için $Y(\lambda)$, tek noktalı bir kümedir.

ii. $S(\tilde{X})$ sınıfına ait her boş olmayan (Y, A) ve (Z, A) esnek alt kümeleri için $(Y, A) \tilde{\subset} (Z, A)$ ise $\delta(Y, A) \tilde{\leq} \delta(Z, A)$ olur.

İspat. i. İspat açıktır.

ii. $(Y,A),(Z,A)\in S(\tilde{X})$ esnek alt kümeler olsun. Bu durumda $(Y,A)\tilde{\subset}(Z,A)$ ise her $\lambda\in A$ için $Y(\lambda)\subset Z(\lambda)$ olur. $\forall\lambda\in A$ için

$$F_{(Y,A)}(\lambda)=\{d(\tilde{x},\tilde{y})(\lambda);\tilde{x},\tilde{y}\tilde{\in}(Y,A)\},$$

$$F_{(Z,A)}(\lambda)=\{d(\tilde{x},\tilde{y})(\lambda);\tilde{x},\tilde{y}\tilde{\in}(Z,A)\}$$

kümelerini alalım. $(Y,A)\tilde{\subset}(Z,A)$ olduğunda $\tilde{x},\tilde{y}\tilde{\in}(Y,A)\Rightarrow\tilde{x},\tilde{y}\tilde{\in}(Z,A)$ olur. Böylece $\forall\lambda\in A$ için

$$\begin{aligned}
d(\tilde{x},\tilde{y})(\lambda)\in F_{(Y,A)}(\lambda)\Rightarrow d(\tilde{x},\tilde{y})(\lambda)\in F_{(Z,A)}(\lambda)\\
&\Rightarrow F_{(Y,A)}(\lambda)\subseteq F_{(Z,A)}(\lambda)\\
&\Rightarrow \sup F_{(Y,A)}(\lambda)\leq \sup F_{(Z,A)}(\lambda)\\
&\Rightarrow \delta((Y,A))(\lambda)\leq\delta((Z,A))(\lambda)\\
&\Rightarrow \delta((Y,A))\tilde{\leq}\delta((Z,A))
\end{aligned}$$

olur ve ispat tamamlanır.

Tanım 3.2.3. [28] $(\tilde{X},d)$ esnek metrik uzay olsun. $\tilde{a}$, $\tilde{X}$ kümesinin sabit bir elemanı ve (S,A), $S(\tilde{X})$ sınıfının boş olmayan bir esnek kümesi olsun. Bu durumda, $\tilde{a}$ esnek elemanın (S,A) esnek kümesine uzaklığı $\delta(\tilde{a},(S,A))(\lambda)$ ile gösterilir ve her $\lambda\in A$ için

$$\delta(\tilde{a},(S,A))(\lambda)=\inf\{d(\tilde{a},\tilde{x})(\lambda);\tilde{x}\in(S,A)\}$$

ile tanımlanır. $\tilde{a}$ esnek elemanının, (S,A) esnek kümesinin esnek elemanı olması durumunda her $\lambda \in A$ için

$$\begin{aligned}\delta(\tilde{a},(S,A))(\lambda) &= \inf\{d(\tilde{a},\tilde{x})(\lambda); \tilde{x} \tilde{\in} (S,A)\} \\ &= d(\tilde{a},\tilde{a})(\lambda) = 0 = \overline{0}(\lambda) \\ &\Rightarrow \delta(a,(S,A)) = \overline{0}\end{aligned}$$

dlde edilir. Diğer taraftan $\tilde{a}$, (S,A) esnek kümesine ait olmasa bile $\delta(\tilde{a},(S,A)) = \overline{0}$ olabilir.

Örnek 3.2.1. d alışılmış metrikle donatılmış $\mathbb{R}$ reel sayıların kümesi göz önüne alınsın. A sonlu parametreler kümesi olmak üzere $(\tilde{\mathbb{R}},d,A)$, $(\mathbb{R},d)$ kesin metrik ile üretilmiş esnek metrik olsun. $(S,A) \tilde{\subset} \mathbb{R}$ olsun öyle ki her $\lambda \in A$ için $S(\lambda) =$ $(a_\lambda, b_\lambda) \subseteq \mathbb{R}$ açık aralığı olsun. Bu durumda $a_\lambda \notin S(\lambda)$ olduğundan $\forall \lambda \in A$ $\tilde{a}(\lambda) = a_\lambda$ için $\tilde{a} \tilde{\notin} (S,A)$ olur. Böylece,

$$\begin{aligned}\delta(\tilde{a},(S,A))(\lambda) &= \inf\{d(\tilde{a},\tilde{x})(\lambda) : \tilde{x} \tilde{\in} (S,A)\} \\ &= \inf\{|\tilde{a}(\lambda) - \tilde{x}(\lambda)| : \tilde{x} \tilde{\in} (S,A)\} = 0 = \overline{0}(\lambda) \\ &\Rightarrow \delta(a,(S,A)) = \overline{0}.\end{aligned}$$

Tanım 3.2.4. [28] $(\tilde{X},d)$ bir esnek metrik uzay, (Y,A) ve (Z,A), $S(\tilde{X})$ sınıfının boş olmayan iki esnek alt kümesi olsun. (Y,A) ve (Z,A) esnek kümeleri arasındaki uzaklık $\delta((Y,A),(Z,A))$ ile gösterilir ve her $\lambda \in A$ için

$$\delta((Y,A),(Z,A))(\lambda) = \inf\{d(\tilde{x},\tilde{y})(\lambda) : \tilde{x} \tilde{\in} (Y,A), \tilde{y} \tilde{\in} (Z,A)\}$$

şeklinde tanımlanır. Her $\lambda \in A$ ve (Y,A), (Z,A) esnek alt kümeleri için

$$\delta\big((Y,A),(Z,A)\big)(\lambda)=\inf\left\{d(\tilde{x},\tilde{y})(\lambda):\tilde{x}\tilde{\in}(Y,A),\tilde{y}\tilde{\in}(Z,A)\right\}$$
$$=\inf\left\{d(\tilde{y},\tilde{x})(\lambda);\tilde{x}\tilde{\in}(Y,A),\tilde{y}\tilde{\in}(Z,A)\right\},\ (d \text{ simetrik})$$
$$=\delta\big((Z,A),(Y,A)\big)(\lambda)$$
$$\Rightarrow \delta\big((Y,A),(Z,A)\big)=\delta\big((Z,A),(Y,A)\big)$$

olur. $(Y,A)\Cap(Z,A)\neq\Phi$ olsun. Buradan $\forall\lambda\in A$ için

$$\delta\big((Y,A),(Z,A)\big)(\lambda)=\inf\left\{d(\tilde{x},\tilde{y})(\lambda):\tilde{x}\tilde{\in}(Y,A),\tilde{y}\tilde{\in}(Z,A)\right\}$$
$$=d(\tilde{u},\tilde{u})(\lambda)=0$$
$$\Rightarrow \delta\big((Y,A),(Z,A)\big)=\overline{0}$$

olur. Ancak bunun tersi doğru değildir. $\delta\big((Y,A),(Z,A)\big)=\overline{0}$ olduğu halde $(Y,A)\Cap(Z,A)=\Phi$ olabilir.

Örnek 3.2.2. $(\tilde{\mathbb{R}},d)$, Örnek 3.2.1 de verilen esnek metrik uzay olsun. $\tilde{\mathbb{R}}$ esnek uzayının boş olmayan iki esnek alt kümesi (Y,A) ve (Z,A) olsun, öyle ki her $\lambda\in A$ için $Y(\lambda)=(u_\lambda,v_\lambda)$, $Z(\lambda)=(u_\lambda,w_\lambda)$, reel doğru içinde açık aralıklardır. Bu durumda her $\lambda\in A$ için,

$$\delta\big((Y,A),(Z,A)\big)(\lambda)=\inf\left\{\left|\tilde{x}(\lambda)-\tilde{y}(\lambda)\right|:\tilde{x}\tilde{\in}(Y,A),\tilde{y}\tilde{\in}(Z,A)\right\}$$
$$=\inf\left\{\left|\tilde{x}(\lambda)-\tilde{y}(\lambda)\right|:u_\lambda<\tilde{x}(\lambda)<v_\lambda,v_\lambda<\tilde{y}(\lambda)<w_\lambda\right\}=0=\tilde{0}(\lambda)$$
$$\Rightarrow \delta\big((Y,A),(Z,A)\big)=\overline{0}$$
$$\Rightarrow SS(Y,A)\Cap(Z,A)=\Phi.$$

3.3. Esnek Açık ve Esnek Kapalı Yuvarlar

Tanım 3.3.1. [28] $(\tilde{X}, d)$ esnek metrik uzay, $\tilde{r}$ negatif olmayan esnek reel sayı ve $\tilde{a} \tilde{\in} \tilde{X}$ olsun. $\tilde{a}$ merkezli, $\tilde{r}$ yarıçaplı bir açık yuvar, $\tilde{X}$ nın $d(\tilde{x}, \tilde{a}) \tilde{<} \tilde{r}$ şartını sağlayan esnek elemanların ailesini kastediyor. $\tilde{a}$ merkezli, $\tilde{r}$ yarıçaplı açık yuvar $B(\tilde{a}, \tilde{r})$ ile gösterilir.

$$B(\tilde{a}, \tilde{r}) = \left\{ \tilde{x} \tilde{\in} \tilde{X}; d(\tilde{x}, \tilde{a}) \tilde{<} \tilde{r} \right\} \subset SE(\tilde{X})$$

şeklinde tanımlanır. $SS(B(\tilde{a}, \tilde{r}))$ kümesine $\tilde{a}$ merkezli, $\tilde{r}$ yarıçaplı esnek açık yuvar denir.

Tanım 3.3.2. [28] $(\tilde{X}, d)$ esnek metrik uzay, $\tilde{r}$ negatif olmayan esnek reel sayı ve $\tilde{a} \tilde{\in} \tilde{X}$ olsun. $\tilde{a}$ merkezli, $\tilde{r}$ yarıçaplı bir kapalı yuvar, $\tilde{X}$ in $d(\tilde{x}, \tilde{a}) \tilde{\leq} \tilde{r}$ şartını sağlayan esnek elemanların ailesini kastediyor. $\tilde{a}$ merkezli, $\tilde{r}$ yarıçaplı kapalı yuvar $B[\tilde{a}, \tilde{r}]$ ile gösterilir ve

$$B[\tilde{a}, \tilde{r}] = \left\{ \tilde{x} \tilde{\in} \tilde{X}; d(\tilde{x}, \tilde{a}) \tilde{\leq} \tilde{r} \right\} \subset SE(\tilde{X})$$

şeklinde tanımlanır ve $SS(B[\tilde{a}, \tilde{r}])$ kümesine $\tilde{a}$ merkezli, $\tilde{r}$ yarıçaplı esnek kapalı yuvar denir.

Örnek 3.3.1. Örnek 3.1.1 deki esnek metrik uzayı alınsın. Bu durumda herhangi bir $a \tilde{\in} \tilde{X}$ için

$$B(\tilde{a}, \tilde{r}) = \begin{cases} SE(\tilde{X}), & \overline{1} \tilde{<} \tilde{r} \\ \{\tilde{a}\}, & \tilde{r} \tilde{\leq} \overline{1} \end{cases}, \qquad B[\tilde{a}, \tilde{r}] = \begin{cases} SE(\tilde{X}), & \overline{1} \tilde{\leq} \tilde{r} \\ \{\tilde{a}\}, & \tilde{r} \tilde{<} \overline{1} \end{cases}$$

olur.

Tanım 3.3.3. $(\tilde{X},d)$, en az iki esnek elemanlı bir esnek metrik uzay olsun. $\tilde{X}$ içinde $d(\tilde{a},\tilde{b})\tilde{>}\overline{0}$ olacak şekilde herhangi iki esnek $\tilde{a}$, $\tilde{b}$ elemanı vardır. Bu durumda $\tilde{a}$ ve $\tilde{b}$ merkezli $B(\tilde{a},\tilde{r})$ ve $B(\tilde{b},\tilde{r})$ açık yuvarları vardır, öyle ki

$$SS\left(B(\tilde{a},\tilde{r})\cap B(\tilde{b},\tilde{r})\right)=\Phi \text{ ve } SS\left(B(\tilde{a},\tilde{r})\cap B(\tilde{b},\tilde{r})\right)(\lambda)=\phi$$

olur. Bu özelliğe Hausdorff özelliği denir.

Teorem 3.3.1. Her esnek metrik uzay Hausdorff özelliğini sağlar.

İspat: $(\tilde{X},d)$ esnek metrik uzayı en az iki esnek elemana sahip olsun. $\tilde{a}$ ve $\tilde{b}$, $\tilde{X}$ esnek kümesinin iki esnek elemanı olsun öyle ki $d(\tilde{a},\tilde{b})\tilde{>}\overline{0}$ yani her $\lambda\in A$ için $d(\tilde{a},\tilde{b})(\lambda)>0$. Her $\lambda\in A$ için $0<r_\lambda<\frac{1}{2}\,d(\tilde{a},\tilde{b})(\lambda)$ şartını sağlayan her r_λ reel sayısını göz önüne alalım. Her $\lambda\in A$ için $\tilde{r}(\lambda)=r_\lambda$ olsun. Böylece $\tilde{r}\tilde{\in}\tilde{\mathbb{R}}$ yarıçaplı, $\tilde{a}$ ve $\tilde{b}$ merkezli açık yuvarları

$$B(\tilde{a},\tilde{r})=\left\{\tilde{x}\tilde{\in}\tilde{X}:d(\tilde{x},\tilde{a})\tilde{<}\tilde{r}\right\}$$
$$B(\tilde{b},\tilde{r})=\left\{\tilde{x}\tilde{\in}\tilde{X}:d(\tilde{x},\tilde{b})\tilde{<}\tilde{r}\right\}$$

olsun. Açıkça $B(\tilde{a},\tilde{r})\cap B(\tilde{b},\tilde{r})(\lambda)=\phi$ ve sonuç olarak $SS\left(B(\tilde{a},\tilde{r})\cap B(\tilde{b},\tilde{r})\right)=\Phi$ olur.

Tanım 3.3.4. $(\tilde{X},d)$ esnek metrik uzay, $\tilde{a}\tilde{\in}\tilde{X}$ ve $N(\tilde{a})$, $SE(\tilde{X})$ esnek elemanların bir ailesi ve $\tilde{a}$ esnek elemanların bir alt küme olsun. Eğer

$\tilde{a} \in B(\tilde{a},\tilde{r}) \subset N(\tilde{a})$ olacak şekilde bir $\tilde{r}$ pozitif esnek reel sayısı varsa $N(\tilde{a})$ esnek kümesine $\tilde{a}$ esnek elemanının bir komşuluğu denir. $SS(N(\tilde{a}))$ esnek kümesine de $\tilde{a}$ esnek elemanının bir esnek komşuluğu denir.

Teorem 3.3.2. $(\tilde{X},d)$ esnek metrik uzay, $\tilde{a} \tilde{\in} \tilde{X}$ ve N_1 ve N_2, $\tilde{a}$ esnek elemanının komşulukları olsun. Bu durumda $SS(N_1 \cap N_2)$, $\tilde{a}$ esnek elemanının bir esnek komşuluğudur.

İspat. $\tilde{a} \in N_1$ ve $\tilde{a} \in N_2 \Rightarrow \tilde{a} \in N_1 \cap N_2$ olur. N_1 ve N_2, $(\tilde{X},d)$ içinde $\tilde{a}$ esnek elemanının komşulukları olduğundan $\tilde{a} \in B(\tilde{a},\tilde{r}_1) \subset N_1$ ve $\tilde{a} \in B(\tilde{a},\tilde{r}_2) \subset N_2$ olacak şekilde $\tilde{r}_1$, $\tilde{r}_2$ pozitif esnek reel sayıları vardır. $\forall \lambda \in A$ için $\tilde{r}(\lambda) = \min\{\tilde{r}_1(\lambda), \tilde{r}_2(\lambda)\}$ olacak şekilde $\tilde{r}$ esnek reel sayısını seçelim. Böylece $\overline{0} \tilde{<} \tilde{r} \tilde{\leq} \tilde{r}_1, \tilde{r}_2$ ve sonuç olarak,

$$\tilde{a} \in B(\tilde{a},\tilde{r}) \subset B(\tilde{a},\tilde{r}_1) \Rightarrow \tilde{a} \in B(\tilde{a},\tilde{r}) \subset N_1$$
$$\tilde{a} \in B(\tilde{a},\tilde{r}) \subset B(\tilde{a},\tilde{r}_2) \Rightarrow \tilde{a} \in B(\tilde{a},\tilde{r}) \subset N_2$$

olur. Böylece $\tilde{a} \in B(\tilde{a},\tilde{r}) \subset N_1 \cap N_2$ elde edilir. O halde $N_1 \cap N_2$, $(\tilde{X},d)$ içinde $\tilde{a}$ esnek elemanının bir komşuluğudur. Buradan $SS(N_1 \cap N_2)$, $(\tilde{X},d)$ içinde $\tilde{a}$ esnek elemanının bir esnek komşuluğudur.

Tanım 3.3.5. [28] $\mathfrak{B}$, $(\tilde{X},d)$ esnek metrik uzayında $\tilde{X}$ esnek kümesinin esnek elemanlarının bir ailesi olsun. Eğer $\tilde{a} \in B(\tilde{a},\tilde{r}) \subset \mathfrak{B}$ olacak şekilde bir $\tilde{r}$ pozitif esnek reel sayısı varsa $\tilde{a}$ esnek elemanına, $\mathfrak{B}$ ailesinin bir iç elemanı denir.

Tanım 3.3.6. [28] (Y,A), $(\tilde{X},d)$ esnek metrik uzayında esnek alt küme olsun. Eğer $\tilde{a}\in B(\tilde{a},\tilde{r})\subset SE(Y,A)$ olacak şekilde bir $\tilde{r}$ pozitif esnek reel sayısı varsa $\tilde{a}$ esnek elemanına (Y,A) kümesinin bir iç elemanı denir.

Tanım 3.3.7. [28] (Y,A), $(\tilde{X},d)$ esnek metrik uzayında bir esnek alt küme olsun. Bu durumda (Y,A) esnek kümesinin içi, (Y,A) esnek kümesinin bütün iç elemanlarını içeren küme olarak tanımlanır ve $Int(Y,A)$ ile gösterilir. Diğer bir deyişle,

$$Int(Y,A)=\{\,\tilde{x}\tilde{\in}(Y,A):\tilde{x}\in B(\tilde{x},\tilde{r})\subset SE(Y,A),\ \exists\tilde{r}\in\mathbb{R}(A),\ \tilde{r}\tilde{>}\overline{0}\,\}.$$

biçiminde tanımlanır. $SS(Int(Y,A))=(Y,A)^{o}$ ye (Y,A) esnek kümesinin esnek içi denir.

Teorem 3.3.3. (Y,A) ve (Z,A), $(\tilde{X},d)$ esnek metrik uzayında boş olmayan iki esnek alt küme olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler sağlanır.

1. $SS(Int(Y,A))\tilde{\subset}(Y,A)$
2. $(Y,A)\tilde{\subset}(Z,A)\Rightarrow Int((Y,A))\subset Int((Z,A))$
3. $Int((Y,A))\cap Int((Z,A))\subset Int((Y,A)\Cap(Z,A))$
4. $Int((Y,A)\Cup(Z,A))\supset Int((Y,A))\cup Int((Z,A))$.

İspat. 1. $\tilde{x}\in Int((Y,A))$ olsun. Bu durumda $\tilde{r}$ pozitif esnek reel sayısı vardır öyle ki $\tilde{x}\in B(\tilde{x},\tilde{r})\subset SE(Y,A)\ \Rightarrow\ \tilde{x}\in SE(Y,A)\ \Rightarrow\ SS(Int((Y,A)))\tilde{\subset}(Y,A)$ olur.

2. $\tilde{x} \in Int((Y,A))$ olsun. Bu durumda $\tilde{r}$ esnek pozitif reel sayısı vardır öyle ki $\tilde{x} \in B(\tilde{a},r) \subset SE(Y,A)$ olur. $(Y,A) \tilde{\subset} (Z,A)$ olduğundan

$$\tilde{x} \in B(\tilde{x},r) \subset SE(Y,A) \subset SE(Z,A) \Rightarrow \tilde{x} \in Int((Z,A))$$
$$\Rightarrow Int((Y,A)) \subset Int((Z,A)).$$

3. $\tilde{y} \in Int((Y,A)) \cap Int((Z,A))$ gerektirir ki $\tilde{y} \in Int((Y,A))$ ve $\tilde{y} \in Int((Z,A))$ olur. Bu durumda, $\tilde{r}_1$, $\tilde{r}_2$ pozitif esnek reel sayıları vardır öyle ki $\tilde{y} \in B(\tilde{y},\tilde{r}_1) \subset SE(Y,A)$ ve $\tilde{y} \in B(\tilde{y},\tilde{r}_2) \subset SE(Z,A)$ olur. $\forall \lambda \in A$ için $\tilde{r}(\lambda) = \min\{\tilde{r}_1(\lambda), \tilde{r}_2(\lambda)\}$ ile $\tilde{r}$ bir pozitif esnek reel sayı olsun. Böylece,

$$\tilde{y} \in B(\tilde{y},r) \subset SE(Y,A),\ \tilde{y} \in B(\tilde{y},r) \subset SE(Z,A)$$
$$\Rightarrow \tilde{y} \in B(\tilde{y},\tilde{r}) \subset SE(Y,A)$$
$$\Rightarrow \tilde{y} \in Int((Y,A) \Cap (Z,A))$$
$$\Rightarrow Int((Y,A)) \cap Int((Z,A)) \subset Int((Y,A) \Cap (Z,A)).$$

4. Bazı $\tilde{r} \tilde{>} \overline{0}$ için

$$\tilde{x} \in Int((Y,A)) \cup Int((Z,A))$$
$$\Rightarrow \tilde{x} \in B(\tilde{x},\tilde{r}) \subset SE(Y,A) \text{ veya } \tilde{x} \in B(\tilde{x},\tilde{r}) \subset SE(Z,A).$$
$$\Rightarrow \tilde{x} \in B(\tilde{x},\tilde{r}) \subset SE(Y,A) \cup SE(Z,A) \subset SE((Y,A) \Cup (Z,A))$$
$$\Rightarrow \tilde{x} \in Int((Y,A) \Cup (Z,A))$$
$$\Rightarrow Int((Y,A) \Cup (Z,A)) \supset Int(Y,A) \cup Int(Z,A).$$

3.4. Esnek Açık ve Esnek Kapalı Kümeler

Tanım 3.4.1. [28] $(\tilde{X}, d)$ esnek metrik uzay ve $\mathfrak{B}$, $\tilde{X}$ kümesinin esnek elemanlarının boş olmayan bir ailesi olsun. Eğer $\mathfrak{B}$ ailesini tüm elemanları iç eleman ise $\mathfrak{B}$ ailesine $\tilde{X}$ içinde d esnek metriğine göre açıktır veya kısaca $(\tilde{X}, d)$ esnek uzayında açıktır denir.

Tanım 3.4.2. $(\tilde{X}, d)$ esnek metrik uzay ve $(Y, A) \in S(\tilde{X})$, $(\tilde{X}, d)$ içinde boş olmayan bir esnek alt küme olsun. Eğer (Y, A) esnek kümesinin esnek elemanlarının bir açık ailesi varsa ve $(Y, A) = SS(\mathfrak{B})$ ise (Y, A) esnek kümesine X içinde esnek açıktır denir.

Teorem 3.4.1. Esnek metrik uzayda her açık yuvar bir açık ailedir. Böylece her esnek açık yuvar bir esnek açık kümedir.

İspat. Her açık yuvar esnek elemanların bir ailesi olduğundan ispat aşikardır.

Teorem 3.4.2. Her $(\tilde{X}, d)$ esnek metrik uzayında,

1. Boş esnek küme Φ esnek açıktır ve $\tilde{X}$ mutlak esnek kümesi esnek açıktır.
2. Esnek açık kümelerin keyfi elemanlarının birleşimi esnek açıktır.

İspat. 1. Φ kümesinin esnek açık olduğu aşikardır. Açıkça $SE(\tilde{X})$, $\tilde{X}$ kümesini esnek elemanlarının kümesidir ve tüm elemanlar iç elemandır. Böylece $SE(\tilde{X})$ açıktır ve $\tilde{X} = SS(SE(\tilde{X}))$ olur. O halde $\tilde{X}$ esnek açıktır.

2. Λ bir keyfi indis kümesi ve $\forall\alpha\in\Lambda$ için $(Y_\alpha,A)(\tilde{\sqsubseteq}\tilde{X})$ esnek kümeleri $(\tilde{X},d)$ de esnek açık olsunlar. $(Y,A)=\Cup_{\alpha\in\Lambda}(Y_\alpha,A)$ esnek kümesinin $(\tilde{X},d)$ içinde esnek açık olduğunu ispatlayalım. $\Lambda=\phi$ ise $(Y,A)=\Cup_{\alpha\in\Lambda}(Y_\alpha,A)=\Phi$ esnek açıktır. $\Lambda\neq\phi$ olsun. Eğer $\forall\alpha\in\Lambda$ için $(Y_\alpha,A)=\Phi$ ise $(Y,A)=\Cup_{\alpha\in\Lambda}(Y_\alpha,A)=\Phi$ esnek açıktır. En az bir $\alpha\in\Lambda$ için $(Y_\alpha,A)\neq\Phi$ olsun. Bu durumda $(Y,A)=\Cup_{\alpha\in\Lambda}(Y_\alpha,A)\neq\Phi$ olur. Her bir (Y_α,A), $(\tilde{X},d)$ içinde esnek açık olduğundan (Y_α,A) nın esnek elemanlarının bir $\mathfrak{B}_\alpha$ ailesi vardır öyle ki $\cup_{\alpha\in\Lambda}\mathfrak{B}_\alpha$, d metriğine göre açıktır ve $(Y,A)=\Cup_{\alpha\in\Lambda}(Y_\alpha,A)=SS(\cup_{\alpha\in\Lambda}\mathfrak{B}_\alpha)$ olduğundan (Y,A) esnek açıktır.

Uyarı 3.4.1. İki esnek açık kümenin elemanter kesişimi esnek açık olmayabilir. Çünkü genel olarak $SS(\mathfrak{B}_1)\Cap SS(\mathfrak{B}_2)\neq SS(\mathfrak{B}_1\cap\mathfrak{B}_2)$ biçimindedir. Örneğin, $X=\{x,y,z\}$, $A=\{\lambda,\mu\}$ olsun. $\tilde{x}$ esnek elemanı $\tilde{x}(\lambda)=x$, $\tilde{x}(\mu)=y$ ile tanımlansın. $\mathfrak{B}_1=\{(x,x),(y,y),(z,z)\}$ ailesi için $SS(\mathfrak{B}_1)=\tilde{X}$ $\mathfrak{B}_2=\{(x,x),(x,y),(y,z),(z,x)\}$ ailesi için $SS(\mathfrak{B}_2)=\tilde{X}$ ve dolayısıyla $SS(\mathfrak{B}_1)\Cap SS(\mathfrak{B}_2)=\tilde{X}$ olur. Diğer taraftan $\mathfrak{B}_1\cap\mathfrak{B}_2=\{(x,x)\}$ olduğundan $SS(\mathfrak{B}_1\cap\mathfrak{B}_2)\neq\tilde{X}$ elde edilir. Böylece $SS(\mathfrak{B}_1)\Cap SS(\mathfrak{B}_2)\neq SS(\mathfrak{B}_1\cap\mathfrak{B}_2)$ elde edilir.

Eğer d esnek metriği (*M5*) aksiyomunu sağlıyorsa, aşağıdaki önermeler geçerlidir.

Önerme 3.4.1. $(\tilde{X},d)$, (*M5*) aksiyomunu sağlayan bir esnek metrik uzay olsun. Bu durumda $(\tilde{X},d)$ içinde her $B(\tilde{a},\tilde{r})$ açık yuvarı ve her bir $\lambda\in A$ için $SS(B(\tilde{a},\tilde{r}))(\lambda)=B(\tilde{a}(\lambda),\tilde{r}(\lambda))$, (X,d_λ) içinde bir açık yuvardır.

İspat. $B(\tilde{a},\tilde{r})$, $\tilde{a}$ merkezli, $\tilde{r}$ yarıçaplı bir açık yuvar olsun. $x \in SS(B(\tilde{a},\tilde{r}))(\lambda)$ olduğunda $B(\tilde{a},\tilde{r})$ içinde öyle bir $\tilde{x}$ elemanı vardır ki $\tilde{x}(\lambda) = x$ olur. $\tilde{x} \in B(\tilde{a},\tilde{r})$ olduğunda $d(\tilde{a},\tilde{x}) < \tilde{r}$ olur. Böylece

$$
\begin{aligned}
d(\tilde{a},\tilde{x})(\lambda) &= d_\lambda(\tilde{a}(\lambda),\tilde{x}(\lambda)) < \tilde{r}(\lambda) \\
&\Rightarrow d_\lambda(\tilde{a}(\lambda),x) < \tilde{r}(\lambda).
\end{aligned}
$$

Böylece her $x \in SS(B(\tilde{a},\tilde{r}))$ için, $d_\lambda(\tilde{a}(\lambda),x) < \tilde{r}(\lambda)$ ve buradan $SS(B(\tilde{a},\tilde{r}))(\lambda) \subset B(\tilde{a}(\lambda),\tilde{r}(\lambda))$ olur.

Tersine $d_\lambda(\tilde{a}(\lambda),y) < \tilde{r}(\lambda)$ olacak şekilde $y \in X$ olsun. $\tilde{x}' \in B(\tilde{a},\tilde{r})$ seçelim. $\tilde{y} \tilde{\in} \tilde{X}$ için $\mu = \lambda$ ise $\tilde{y}(\lambda) = y$ ve $\mu \neq \lambda$ ise $\tilde{y}(\mu) = \tilde{x}'(\mu)$ ile tanımlansın. Bu durumda (*M5*) aksiyomunda $d(\tilde{y},\tilde{a}) \tilde{<} \tilde{r}$ olur. Böylece

$$
\begin{aligned}
\tilde{y} \in B(\tilde{a},\tilde{r}) \text{ ve } \tilde{y}(\lambda) = y \;&\Rightarrow\; B(\tilde{a}(\lambda),\tilde{r}(\lambda)) \subset SS(B(\tilde{a},\tilde{r}))(\lambda) \\
&\Rightarrow\; SS(B(\tilde{a},\tilde{r}))(\lambda) = B(\tilde{a}(\lambda),\tilde{r}(\lambda))
\end{aligned}
$$

olur. Bu her $\lambda \in A$ için doğru olduğundan her bir $\lambda \in A$ için $SS(B(\tilde{a},\tilde{r}))(\lambda)$, (X,d_λ) içinde bir açık yuvardır.

Önerme 3.4.2. $(\tilde{X},d)$, (*M5*) aksiyomunu sağlayan bir esnek metrik uzay olsun. $(F,A) \in S(\tilde{X})$ kümesinin d esnek metriğine göre açık küme olması için gerek ve yeter şart her bir $\lambda \in A$ için, $(F,A)(\lambda)$ kümesinin (X,d_λ) içinde açık küme olmasıdır.

İspat. (F,A), d metriğine göre esnek açık olsun. Bu durumda (F,A) kümesinin esnek elemanlarının bir $\mathfrak{B}$ ailesi vardır öyle ki $\mathfrak{B}$ açıktır ve $(F,A)=SS(\mathfrak{B})$ olur. $x\in SS(\mathfrak{B})(\lambda)$ olsun. Böylece $\mathfrak{B}$ içinde öyle bir $\tilde{x}$ esnek elemanı vardır ki $\tilde{x}(\lambda)=x$ olur. $\mathfrak{B}$ açık olduğunda $\tilde{x}\in B(\tilde{x},\tilde{r})\subset\mathfrak{B}$olacak şekilde bir $\tilde{r}\tilde{>}\overline{0}$ esnek reel sayısı vardır. Yani $x=\tilde{x}(\lambda)\in SS(B(\tilde{x},\tilde{r}))(\lambda)\subset SS(\mathfrak{B})(\lambda)$ ve $SS(B(\tilde{x},\tilde{r}))(\lambda)$, (X,d_λ) içinde bir açık yuvardır. O halde x, $SS(\mathfrak{B})(\lambda)$ yuvarının bir iç noktasıdır. $x\in SS(\mathfrak{B})(\lambda)$ keyfi seçildiğinde $SS(\mathfrak{B})(\lambda)$, (X,d_λ) içinde açıktır.

Tersini alarak her $\lambda\in A$ için, $SS(\mathfrak{B})(\lambda)$ (X,d_λ) içinde açık olsun. $\tilde{x}\tilde{\in} SS(\mathfrak{B})$ alalım. Bu durumda her bir $\lambda\in A$ için $\tilde{x}\in SS(\mathfrak{B})(\lambda)$ olur. $SS(\mathfrak{B})(\lambda)$, (X,d_λ) içinde açık olduğundan $\lambda\in A$ için $\tilde{x}(\lambda)\in B_\lambda(\tilde{x}(\lambda),r_\lambda)\subset SS(\mathfrak{B})(\lambda)$ olacak şekilde (X,d_λ) içinde $B_\lambda(\tilde{x}(\lambda),r_\lambda)$ açık yuvarı vardır. $\forall\lambda\in A$ için $\tilde{r}(\lambda)=r_\lambda$ ile $\tilde{r}$ esnek reel sayısını göz önüne alalım. Bu durumda $\tilde{r}\tilde{>}\overline{0}$ ve $B(\tilde{x},\tilde{r})$, $(\tilde{X},d)$ içinde bir esnek açık yuvardır. O halde $\tilde{x}\in B(\tilde{x},\tilde{r})\subset SE(SS(\mathfrak{B}))$ olur. Böylece $SE(SS(\mathfrak{B}))=\cup_{\tilde{x}\in ss(\mathfrak{B})}B(\tilde{x},\tilde{r})$ elde edilir. Açık kümelerin keyfi birleşimi açık olduğundan $SE(SS(\mathfrak{B}))$ açıktır ve $SS(\mathfrak{B})=SS(SE(B(\tilde{x},\tilde{r})))$, d esnek metriğine göre esnek açıktır.

Teorem 3.4.3. $(\tilde{X},d)$, (*M5*) aksiyomunu sağlayan bir esnek metrik uzay olsun. Bu durumda esnek açık iki kümenin elemanter kesişimi de esnek açıktır.

İspat. (F,A) ve (G,A), $(\tilde{X},d)$ içinde iki esnek açık küme olsun. Bu durumda $(\tilde{X},d)$ içinde esnek elemanların öyle $\mathfrak{B}_1$ ve $\mathfrak{B}_2$ esnek açık aileleri vardır ki, $(F,A)=SS(\mathfrak{B}_1)$ ve $(G,A)=SS(\mathfrak{B}_2)$ olur. Eğer $(Y,A)\Cap(Z,A)\neq\Phi$ ise $(Y,A)\Cap(Z,A)=(Y,A)\tilde{\cap}(Z,A)$ olur. Böylece her $\forall\lambda\in A$ için

$\left[(Y,A)\tilde{\cap}(Z,A)\right](\lambda)=(Y,A)(\lambda)\cap(Z,A)(\lambda)$ olur. $(Y,A)(\lambda)$ ve $(Z,A)(\lambda)$, (X,d_λ) içinde açık olduğundan her bir $\lambda\in A$ için $\left[(Y,A)\tilde{\cap}(Z,A)\right](\lambda)$, (X,d_λ) içinde açık olur. Önerme 3.4.2 den $(Y,A)\tilde{\cap}(Z,A)$ yani $(Y,A)\Cap(Z,A)$, $(\tilde{X},d)$ içinde bir esnek açık kümedir. Eğer $(Y,A)\Cap(Z,A)=\Phi$ ise $(Y,A)\Cap(Z,A)$, $(\tilde{X},d)$ içinde bir esnek açık kümedir. Böylece iki esnek açık kümenin elemanter kesişimi, her iki durumda da esnek açık olur.

Uyarı 3.4.2. Teorem 3.4.2 ve Teorem 3.4.3 den (*M5*) aksiyomunu sağlayan her $(\tilde{X},d)$ esnek metrik uzayının bütün esnek kümelerin τ ailesi esnek kümelerin esnek elamanter birleşim ve kesişim işlemine göre $\tilde{X}$ üzerinde bir topoloji oluşturur. Bu topolojiye, $\tilde{X}$ üzerinde esnek metrik topoloji denir.

Uyarı 3.4.3. Esnek açık kümelerin keyfi ailesinin elemanter kesişimi esnek açık olmayabilir. Örneğin, Örnek 3.2.1 teki esnek metrik uzay göz önüne alınsın. $\forall\lambda\in A$ ve $\forall n\in\mathbb{N}$ için $(Y,A)_n(\lambda)=(0,1/n)$ olacak şekilde $(Y,A)_n$ esnek açık kümeleri ele alınsın. Böylece $(Y,A)=\Cap_{n\in N}(Y,A)_n=\{\overline{0}\}$ olur. O halde (Y,A), $(\tilde{\mathbb{R}},d)$ içinde esnek açık değildir.

Tanım 3.4.3. $(\tilde{X},d)$ bir esnek metrik uzay ve $(Y,A)\in S(\tilde{X})$ bir esnek küme olsun. Eğer $(Y,A)^C$ tümleyeni, $S(\tilde{X})$ sınıfının bir elemanı ise ve $(Y,A)^{\mathbb{C}}$, $(\tilde{X},d)$ içinde bir açık küme ise (Y,A) esnek kümesine d esnek metriğine göre $\tilde{X}$ içinde esnek kapalıdır denir.

Teorem 3.4.4. Her $(\tilde{X},d)$ esnek metrik uzayında aşağıdaki özellikler sağlanır.

1. Φ ve $\tilde{X}$ esnek kapalı kümelerdir.
2. Herhangi sayıda esnek kapalı kümelerin esnek elemanter kesişimi esnek kapalıdır.

İspat. 1. $\Phi^C = \tilde{X}$, $(\tilde{X}, d)$ esnek metrik uzayında esnek açık olduğundan Φ esnek kapalıdır. Aynı şekilde $\tilde{X}^C = \Phi$, $(\tilde{X}, d)$ esnek metrik uzayında açık olduğundan $\tilde{X}$ esnek kapalı kümedir.

2. Λ bir keyfi indis kümesi olmak üzere $\{(Y_i, A); i \in \Lambda\}$, $(\tilde{X}, d)$ esnek metrik uzayında esnek kapalı kümelerin bir ailesi olsun. $(Y, A) = \Cap\{(Y_i, A); i \in \Lambda\}$ esnek kümesinin $(\tilde{X}, d)$ içinde esnek kapalı olduğunu ispatlayalım. Eğer $(Y, A) = \Phi$ ise $(Y, A) = \Cap\{(Y_i, A); i \in \Lambda\}$, $(\tilde{X}, d)$ esnek metrik uzayında esnek kapalı olduğu açıktır. Eğer $(Y, A) \neq \Phi$ ise $\Cap\{(Y_i, A); i \in \Lambda\} = \tilde{\cap}\{(Y_i, A); i \in \Lambda\}$ ve böylece

$$(Y, A)^C = \left[\tilde{\cap}\{(Y_i, A); i \in \Lambda\}\right]^C = \tilde{\cup}\left\{(Y_i, A)^C; i \in \Lambda\right\} = \Cup\left\{(Y_i, A)^C; i \in \Lambda\right\}$$

esnek kapalıdır. Herhangi sayıda esnek açık kümelerin elemanter birleşimi esnek açık olduğundan $(Y, A) = \Cap\{(Y_i, A); i \in \Lambda\}$, $(\tilde{X}, d)$ esnek kapalıdır.

Teorem 3.4.5. $\{(Y_i, A); i = 1, 2, \cdots, n\}$, (M5) aksiyomunu sağlayan $(\tilde{X}, d)$ esnek metrik uzayında sonlu sayıda esnek kapalı kümenin bir ailesi olsun. Bu durumda eğer $\Phi \neq \Cap\{(Y_i, A); i = 1, 2, \cdots, n\} \in S(\tilde{X})$ ise $\Cup\{(Y_i, A); i = 1, 2, \cdots, n\}$, $(\tilde{X}, d)$ içinde esnek kapalıdır.

İspat. $\{(Y_i, A); i = 1, 2, \cdots, n\}$ (M5) aksiyomunu sağlayan $(\tilde{X}, d)$ uzayında sonlu sayıda esnek kapalı kümelerin bir ailesi olsun. $(Y, A) = \Cup\{(Y_i, A); i = 1, 2, \cdots, n\}$, $(\tilde{X}, d)$ içinde esnek kapalı olduğunu ispatlayalım. Her bir $i = 1, 2, \cdots, n$ için (Y_i, A), $(\tilde{X}, d)$ içinde esnek kapalı kümeler olduğundan $(Y_i, A)^C$, $(\tilde{X}, d)$ içinde esnek açık tır. Böylece $\Cap\left\{(Y_i, A)^C; i = 1, 2, \cdots, n\right\} \neq \Phi$ olduğunda

$$
\begin{aligned}
(Y,A)^C &= \tilde{\cup}\left[\left\{(Y_i,A); i=1,2,\cdots,n\right\}\right]^C \\
&= \tilde{\cap}\left\{(Y_i,A)^C; i=1,2,\cdots,n\right\} \\
&= \Cap\left\{(Y_i,A)^C; i=1,2,\cdots,n\right\}
\end{aligned}
$$

olur. (M5) aksiyomunu sağlayan $(\tilde{X},d)$ uzayında sonlu sayıda esnek açık kümenin elemanter kesişimi esnek açık olduğundan $(Y,A)^C$ esnek açıktır. Böylece, $(\tilde{X},d)$ esnek metrik uzayında esnek kapalıdır.

Uyarı 3.4.4. Yukarıdaki teoremde $\Cap\left\{(Y_i,A)^C; i=1,2,\cdots,n\right\} \neq \Phi$ şartı geçerlidir. Çünkü esnek kümelerde elemanter işlemlere göre De-Morgen kuralı sağlanmaz ve genellikle $\left((Y,A)^{\mathbb{C}}\right)^{\mathbb{C}} \neq (Y,A)$ olur.

3.5. Esnek Yığılma ve Esnek Kapanış Noktaları

Tanım 3.5.1. [28] $(\tilde{X},d)$ bir esnek metrik uzay ve $\mathfrak{B}$, $\tilde{X}$ içindeki esnek elemanlarının bir ailesi ve $\tilde{a} \tilde{\in} \mathfrak{B}$ bir esnek eleman olsun. Eğer $(\tilde{X},d)$ içinde $\tilde{a}$ esnek elemanını içeren her $B(\tilde{a},\tilde{r})$ açık yuvarı $\mathfrak{B}$ ailesinin $\tilde{a}$ elemanından farklı en az bir esnek elemanını içeriyorsa $\tilde{a}$ elemanına $\mathfrak{B}$ ailesini bir yığılma elemanı denir. $\mathfrak{B}$ ailesinin tüm yığılma elemanları kümesine türev kümesi denir ve $\mathfrak{B}^d$ ile gösterilir.

Tanım 3.5.2. [28] $(\tilde{X},d)$ bir esnek metrik uzay, $(Y,A) \in S(\tilde{X})$ ve $\tilde{a} \tilde{\in} \tilde{X}$ olsun. $(\tilde{X},d)$ içinde $\tilde{a}$ elemanını içeren her $B(\tilde{a},\tilde{r})$ açık yuvarı, (Y,A) esnek kümesinin $\tilde{a}$ elemanından farklı en az bir esnek elemanını içeriyorsa $\tilde{a}$ esnek elemanına (Y,A) esnek kümesinin bir yığılma elemanı denir.

Bir (Y,A) esnek kümesinde bir esnek yığılma elemanı, (Y,A) esnek kümesine ait olabilir ya da olmayabilir. (Y,A) esnek kümesinin tüm esnek yığılma elemanlarının ürettiği küme ve (Y,A) esnek kümesinin türev kümesi denir ve $(Y,A)^d$ ile gösterilir.

Örnek 3.5.1. Örnek 3.2.1 de verilen $(\tilde{\mathbb{R}},d,A)$ esnek metrik uzayını göz önüne alalım. $(Y,A)\tilde{\subset}\tilde{\mathbb{R}}$ olsun, öyle ki $\forall\lambda\in A$ ve $a_\lambda<b_\lambda$ ile $a_\lambda,b_\lambda\in\mathbb{R}$ için $Y(\lambda)=(a_\lambda,b_\lambda)$ olsun. Şimdi her $\lambda\in A$ için $\tilde{x}(\lambda)=x_\lambda\in[a_\lambda,b_\lambda]$ şartını sağlayan her $\tilde{x}$ esnek elemanı ve $\tilde{r}(\lambda)=r_\lambda$, ile herhangi bir pozitif $\tilde{r}$ esnek reel sayısı için

$$SS(B(\tilde{x},\tilde{r}))(\lambda)\cap SS([(Y,A)\backslash\{\tilde{x}\}])(\lambda)=(x_\lambda-r_\lambda,x_\lambda+r_\lambda)\cap[(a_\lambda,b_\lambda)\backslash\{x_\lambda\}]$$
$$=(\alpha_\lambda,\beta_\lambda)\backslash\{x_\lambda\}\neq\phi$$

elde ederiz. Burada $\alpha_\lambda=max\{x_\lambda-r_\lambda,a_\lambda\}$, $\beta_\lambda=min\{x_\lambda+r_\lambda,b_\lambda\}$. Böylece $B(\tilde{x},\tilde{r})$, (Y,A) esnek kümesinde $\tilde{x}$ esnek elemanından başka esnek elemanları içerir. Böylece $\forall\lambda\in A$ için $\tilde{x}(\lambda)=x_\lambda\in[a_\lambda,b_\lambda]$ ile herhangi bir x_λ esnek elemanı, $(\tilde{X},d)$ uzayındaki (Y,A) esnek alt kümesinin bir esnek yığılma elemandır.

Tanım 3.5.3. [28] $(\tilde{X},d)$ bir esnek metrik uzay, $\mathfrak{B}$, $\tilde{X}$ içindeki esnek elemanlarının bir ailesi olsun. $\mathfrak{B}$ ailesinin tüm esnek elemanları ile $(\tilde{X},d)$ uzayında $\mathfrak{B}$ ailesinin tüm yığılma elemanlarının ailesine $\mathfrak{B}$ ailesinin kapanışı denir. $c\ell(\mathfrak{B})$ ile gösterilir.

Tanım 3.5.4. [28] $(\tilde{X},d)$ bir esnek metrik uzay ve $(Y,A)\in S(\tilde{X})$ bir esnek alt küme olsun. $(\tilde{X},d)$ içinde (Y,A) esnek kümesinin tüm esnek elamanları ile tüm esnek yığılma elemanlarının ailesine esnek kapanışı denir ve $\overline{(Y,A)}$ ile gösterilir.

Teorem 3.5.1. $(\tilde{X},d)$ bir esnek metrik uzay ve $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$, $(\tilde{X},d)$ içindeki esnek elemanların iki ailesi olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler sağlanır.

1. $(\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2)^d = \mathcal{B}_1^d \cup \mathcal{B}_2^d$
2. $(\mathcal{B}_1^d)^d = \mathcal{B}_1^d$

İspat. (2). ci eşitliğin ispatı açık olduğundan sadece (1). ci eşitliği ispatlayalım. $\tilde{x} \in (\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2)^d$ herhangi bir esnek yığılma elemanı olsun. Bu durumda her $B(\tilde{x},\tilde{r})$ açık yuvarı, $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ ailesinin $\tilde{x}$ elemanından farklı en az bir elemanını içerir. Yani $B(\tilde{x},\tilde{r})$ açık yuvarı, hem $\mathcal{B}_1$ ailesinin hem de $\mathcal{B}_2$ ailesinin $\tilde{x}$ elemanından farklı en az bir elemanını içerir. Buradan $\tilde{x} \in (\mathcal{B}_1)^d$ ve $\tilde{x} \in (\mathcal{B}_2)^d$ ve dolayısıyla $\tilde{x} \in \mathcal{B}_1^d \cup \mathcal{B}_2^d$ çıkar. Böylece $(\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2)^d \subset \mathcal{B}_1^d \cup \mathcal{B}_2^d$ elde edilir.

Tersine olarak $\tilde{x} \in \mathcal{B}_1^d \cup \mathcal{B}_2^d$ olsun. Bu durumda $\tilde{x}$ esnek elemanı, $\mathcal{B}_1$ veya $\mathcal{B}_2$ ailesinin bir yığılma elemanıdır. Dolayısıyla $\tilde{x}$, $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ ailesinin bir yığılma elemanıdır. Buradan da $\tilde{x} \in (\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2)^d$ ve $\mathcal{B}_1^d \cup \mathcal{B}_2^d \subset (\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2)^d$ elde edilir. O halde $(\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2)^d = \mathcal{B}_1^d \cup \mathcal{B}_2^d$ olur.

Teorem 3.5.2. $(\tilde{X},d)$ bir esnek metrik uzay ve $(Y,A),(Z,A) \in S(\tilde{X})$ olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler sağlanır.

1. $\overline{\Phi} = \Phi$ ve $\overline{\tilde{X}} = \tilde{X}$,
2. $(Y,A) \tilde{\subset} SS\left(SE\left(\overline{Y,A}\right)\right)$,
3. $\overline{(Y,A)} = \overline{\overline{(Y,A)}}$,
4. $(Y,A) \tilde{\subset} (Z,A) \Rightarrow \overline{(Y,A)} \subset \overline{(Z,A)}$,

5. $\overline{(Y,A)} \cup \overline{(Z,A)} \subset \overline{(Y,A) \tilde{\cup} (Z,A)}$,

6. $\overline{(Y,A) \tilde{\cap} (Z,A)} \subset \overline{(Y,A)} \cap \overline{(Z,A)}$.

İspat. Sadece (3) gösterelim. $\overline{(Y,A)} \subset \overline{\overline{(Y,A)}}$ olduğu açıktır. $\tilde{x} \in \overline{\overline{(Y,A)}}$ olsun. Bu durumda, $\tilde{x} \in \overline{(Y,A)}$ veya $\tilde{x}$, $\overline{(Y,A)}$ kümesinin bir yığılma elemanıdır. Eğer $\overline{(Y,A)}$ kümesinin yığılma elemanlarının kümesi boş ise $\overline{\overline{(Y,A)}} \subset \overline{(Y,A)}$ olur ve ispat tamamlanır. $\overline{(Y,A)}$ kümesinin yığılma elemanlarının kümesi boştan farklı ve $\tilde{x}$, $\overline{(Y,A)}$ kümesinin bir yığılma elemanı olsun. Böylece $\tilde{x}$, $SE(Y,A)$ ailesinin bir esnek yığılma elemanıdır veya $\tilde{x}$, $(Y,A)^d$ türev kümesinin bir esnek elemanıdır. Eğer $\tilde{x}$, $SE(Y,A)$ ailesinin bir yığılma elemanı ise $SS(SE(Y,A)) = (Y,A)$ olduğundan $\tilde{x}$, (Y,A) kümesinin de bir yığılma elemanıdır. Böylece $\tilde{x} \tilde{\in} \overline{(Y,A)}$ olur ve ispat biter. Son olarak $\tilde{x}$, $(Y,A)^d$ kümesinin bir yığılma elemanı olsun. Bu durumda herhangi bir esnek reel sayı $\tilde{r} \tilde{>} \overline{0}$ için $B(\tilde{x},\tilde{r})$, $(Y,A)^d$ kümesinin $\tilde{x}$ elemanından farklı en az bir elemanını içerir. $\tilde{x} \neq \tilde{y} \in B(\tilde{x},\tilde{y}) \cap (Y,A)^d$ olsun. Bu durumda $\tilde{y}$, (Y,A) kümesinde bir esnek yığılma elemanıdır. Öyleyse $B(\tilde{x},\tilde{r}) \cap (Y,A)$, (Y,A) kümesinde $\tilde{y}$ elemanından başka en az bir esnek elemanı içerir. Böylece $\tilde{x}$, (Y,A) da bir esnek yığılma elemanıdır. Bu gerektirir ki $\tilde{x} \in (Y,A)^d$ ise $\tilde{x} \in \overline{(Y,A)}$ olur. O halde her durumda $\overline{\overline{(Y,A)}} \subset \overline{(Y,A)}$ elde edilir. Böylece $\overline{(Y,A)} = \overline{\overline{(Y,A)}}$ bulunur.

3.6. Esnek Metrik Uzayda Tamlık

Tanım 3.6.1. [28] $\{\tilde{x}_n\}$, $(\tilde{X},d)$ esnek metrik uzayında esnek elemanların bir dizisi olsun. Eğer $n \to \infty$ iken $d(\tilde{x}_n,\tilde{x}) \to \overline{0}$ olacak şekilde $\tilde{x} \tilde{\in} \tilde{X}$ esnek elemanı varsa

$\{\tilde{x}_n\}$ dizisi $(\tilde{X}, d)$ uzayında yakınsaktır denir. Yani her $\tilde{\varepsilon} \tilde{>} \overline{0}$ esnek reel sayısına karşılık $n > N$ için $\overline{0} \tilde{\leq} d(\tilde{x}_n, \tilde{x}) \tilde{<} \tilde{\varepsilon}$ olacak şekilde $N = N(\varepsilon)$ doğal sayısı varsa veya $n > N \Rightarrow \tilde{x}_n \in B(\tilde{x}, \tilde{\varepsilon})$ olmasını gerektiriyorsa $\tilde{x}_n$ dizisi $\tilde{x}$ esnek elemanına yakınsar denir ve $\tilde{x}$ elemanına $\tilde{x}_n$ dizisinin limit noktası denir. $n \to \infty \Rightarrow \tilde{x}_n \to \tilde{x}$ şeklinde veya $\lim\limits_{x\to\infty} \tilde{x}_n = \tilde{x}$ ile gösterilir.

Örnek 3.6.1. Örnek 3.2.1 de verilen $(\tilde{\mathbb{R}}, d, A)$ esnek metrik uzayını göz önüne alalım. $\forall\lambda \in A$ için, reel uzayda $Y(\lambda) = (0,1]$ olacak şekilde $(Y, A) \tilde{\subset} \tilde{\mathbb{R}}$ olsun, (Y, A) kümesinin esnek elemanlarının $\{\tilde{x}_n\}$ dizisini, $\forall\lambda \in A$ için $\tilde{x}_n(\lambda) = 1/n$ şeklinde seçelim. Bu durumda (Y, d_y, A) içinde $\tilde{x}_n \to \tilde{x}$ olacak şekilde bir $\tilde{x} \tilde{\in} (Y, A)$ yoktur. Bununla birlikte (Y, A) kümesini esnek elemanlarının, $\forall n \in \mathbb{N}$ ve $\forall\lambda \in A$ için $\tilde{y}_n(\lambda) = 1/2$ ile tanımlanan sabit esnek dizisi (Y, d_y, A) içinde $\overline{1}/2$ esnek elemanına yakınsar.

Teorem 3.6.1. Bir esnek metrik uzayda bir dizinin limiti varsa tektir.

İspat. $\{\tilde{x}_n\}$, $(\tilde{X}, d)$ esnek metrik uzayda esnek elemanların bir dizisi olsun, öyle ki $\tilde{x} \neq \tilde{x}'$ için $\lim\limits_{x\to\infty} \tilde{x}_n = \tilde{x}$ ve $\lim\limits_{x\to\infty} \tilde{x}_n = \tilde{x}'$ olsun. Bu durumda en az bir $\lambda \in A$ için $d(\tilde{x}, \tilde{x}')(\lambda) \neq 0$ olur. $0 < \varepsilon_\lambda < 1/2\, d(\tilde{x}, \tilde{x}')(\lambda)$ eşitsizliğini sağlayan ε_λ pozitif reel sayısını göz önüne alalım ve $\tilde{\varepsilon} \tilde{>} \overline{0}$ için $\tilde{\varepsilon}(\lambda) = \varepsilon_\lambda$ olsun. $\tilde{x}_n \to \tilde{x}$, $\tilde{x}_n \to \tilde{x}'$ olduğunda $\tilde{\varepsilon} \tilde{>} \overline{0}$ esnek reel sayısına karşılık $N_1 = N_1(\tilde{\varepsilon})$, $N_2 = N_2(\tilde{\varepsilon})$ doğal sayısı vardır, öyle ki

$$n > N_1 \Rightarrow \tilde{x}_n \in B(\tilde{x}, \tilde{\varepsilon}) \Rightarrow d(\tilde{x}_n, \tilde{x}) \tilde{<} \tilde{\varepsilon} \Rightarrow d(\tilde{x}_n, \tilde{x})(\lambda) < \varepsilon_\lambda,$$

$$n > N_2 \Rightarrow \tilde{x}_n \in B(\tilde{x}', \tilde{\varepsilon}) \Rightarrow d(\tilde{x}_n, \tilde{x}') \tilde{<} \tilde{\varepsilon} \Rightarrow d(\tilde{x}_n, \tilde{x}')(\lambda) < \varepsilon_\lambda$$

olur. Böylece her $n > N = \max\{N_1, N_2\}$ için

$$d(\tilde{x},\tilde{x}')(\lambda) \le d(\tilde{x}_n,\tilde{x})(\lambda) + d(\tilde{x}_n,\tilde{x}')(\lambda) < 2\varepsilon$$

olur. Buradan $\varepsilon_\lambda > 1/2\, d(\tilde{x},\tilde{x}')(\lambda)$ elde edilir. Bu hipotezle çelişir. O halde dizinin limiti tektir.

Önerme 3.6.1. $(\tilde{X}, d)$ bir esnek metrik uzay ve $\{\tilde{x}_n\}$ ve $\{\tilde{y}_n\}$, $(\tilde{X}, d)$ esnek metrik uzayının esnek elemanlarının iki dizisi olsun. $n \to \infty$ iken $\tilde{x}_n \to \tilde{x}$ ve $\tilde{y}_n \to \tilde{y}$ ise $n \to \infty$ için $d(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n) \to d(\tilde{x}, \tilde{y})$ olur.

İspat. Her esnek reel $\tilde{\varepsilon} \tilde{>} \overline{0}$ sayısı için $\tilde{x}_n \to \tilde{x}$ ve $\tilde{y}_n \to \tilde{y}$ olduğundan her $n > N$ doğal sayısı için $d(\tilde{x}_n, \tilde{x}) \tilde{<} \frac{\tilde{\varepsilon}}{2}$ ve $d(\tilde{y}_n, \tilde{y}) \tilde{<} \frac{\tilde{\varepsilon}}{2}$ olacak şekilde N sayısı vardır. Şimdi

$$d(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n) \tilde{<} d(\tilde{x}_n, \tilde{x}) + d(\tilde{x}, \tilde{y}) + d(\tilde{y}_n, \tilde{y}) \tilde{<} d(\tilde{x}, \tilde{y}) + \tilde{\varepsilon}$$

olur. Buradan $\overline{0} \tilde{<} d(\tilde{x}, \tilde{y}) \tilde{<} \tilde{\varepsilon} - d(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n)$ ve $|d(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n) - d(\tilde{x}, \tilde{y})| \tilde{<} \tilde{\varepsilon}$ elde edilir. Böylece $n \to \infty$ iken $d(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n) \to d(\tilde{x}, \tilde{y})$ olur.

Tanım 3.6.2. $(\tilde{X}, d, A)$ bir esnek metrik uzay ve $(Y, A) \in S(\tilde{X})$ bir esnek küme olsun. Eğer her $\tilde{x}, \tilde{y} \tilde{\in} (Y, A)$ için $d(\tilde{x}, \tilde{y}) \tilde{\le} \tilde{\varepsilon}$ olacak şekilde $\tilde{\varepsilon} \tilde{>} \overline{0}$ esnek elemanı varsa, (Y, A) esnek kümesine *üstten sınırlıdır* denir.

Teorem 3.6.2. $(\tilde{X}, d)$ esnek metrik uzayının bir esnek alt kümesi (Y, A) olsun. Bu durumda $\tilde{x} \tilde{\in} \tilde{X}$, $(Y, A)^d$ esnek kümesinin bir esnek elemanı olması için gerek ve yeter şart (Y, A) içinde $\tilde{x}$ elemanına yakınsayan $\{\tilde{x}\}$ dizisinden başka esnek elemanların bir $\{\tilde{x}_n\}$ dizisi vardır.

İspat. $\tilde{x}$, (Y,A) esnek kümesinin bir esnek yığılma elemanı olsun. Bu durumda, her bir pozitif n tamsayısı için $B(\tilde{x},\overline{1}/n)$, (Y,A) kümesinde $\tilde{x}$ elemanından başka en az bir esnek eleman içerir. Her bir $n\in\mathbb{N}$ için $\tilde{x}\in B(\tilde{x},\overline{1}/n)$ seçelim. Bu durumda $n\to\infty$ iken $d(\tilde{x}_n,\tilde{x})=\overline{1}/n\to\overline{0}$ olduğunda (Y,A) içinde $\tilde{x}$ elemanına yakınsayan $\{\tilde{x}\}$ dizisinden başka esnek elemanlarının bir dizisi $\{\tilde{x}_n\}$ olsun. Bu durumda her $\tilde{\varepsilon}\tilde{>}\overline{0}$ için $B(\tilde{x},\tilde{\varepsilon})$, (Y,A) esnek kümesinin $\tilde{x}$ esnek elemanından başka esnek elemanlarını da içerir. Böylece $\tilde{x}$, $\{\tilde{x}_n\}$ esnek dizisinin esnek limit elemanıdır.

Tanım 3.6.3. [28] $\{\tilde{x}_n\}$, $(\tilde{X},d)$ uzayında esnek elemanların bir dizisi olsun. $\forall m,n\in N$ için $d(\tilde{x}_m,\tilde{x}_n)\tilde{\leq}\overline{M}$ olacak şekilde bir $\overline{M}\tilde{>}\overline{0}$ varsa $\{\tilde{x}_n\}$ dizisine sınırlı dizi ve $\{d(\tilde{x}_m,\tilde{x}_n);m,n\in N\}$ kümesine sınırlı küme denir.

Tanım 3.6.4. $\{\tilde{x}_n\}$, $(\tilde{X},d)$ uzayında esnek elemanların bir dizisi olsun. Eğer her $\tilde{\varepsilon}\tilde{>}\overline{0}$ esnek reel sayısına karşılık bir $m\in N$ varsa öyle ki $\forall i,j\geq m$ için $d(\tilde{x}_i,\tilde{x}_j)\tilde{\leq}\tilde{\varepsilon}$ ise yani $i,j\to\infty$ iken $d(\tilde{x}_i,\tilde{x}_j)\to\overline{0}$ ise $\{\tilde{x}_n\}$ dizisine bir Cauchy dizisi denir.

Teorem 3.6.3. Bir esnek metrik uzayda her yakınsak dizi Cauchy dizisidir ve her Cauchy dizisi sınırlıdır. Bir Cauchy dizisinin sınırlı olması için gerek ve yeter şart bu dizinin yakınsak bir alt diziye sahip olmasıdır.

İspat. Teoremin ispatı, klasik metrik uzaydaki ispatların bir benzeridir.

Tanım 3.6.5. [28] Bir $(\tilde{X},d)$ esnek metrik uzayında her Cauchy dizisi $\tilde{X}$ esnek kümesinde bir esnek elemana yakınsıyorsa $(\tilde{X},d)$ uzayına tamdır denir.

Örnek 3.6.2. $\left(\tilde{\mathbb{R}},d,A\right)$ esnek metrik uzayının $\left(Y,d_Y,A\right)$ alt uzayı $\forall\lambda\in A$ için $Y(\lambda)=(0,1]$ ile göz önüne alınsın. Bu durumda $\forall n\in N$, $\forall\lambda\in A$ için $\tilde{x}_n(\lambda)=1/n$, $\tilde{\mathbb{R}}$ içinde $\{\tilde{x}_n\}$ dizisi (Y,A) kümesinde ve ayrıca $\left(\tilde{\mathbb{R}},d,A\right)$ esnek metrik uzayında bir Cauchy dizisi olduğu açıktır. Gerçekten herhangi $\varepsilon>0$, $m\in N$ için $m>1/\varepsilon$ seçilirse bu durumda $i\geq j\geq m$ için $|1/i-1/j|=|i-j/ij|\leq i/ij=1/j\leq 1/m<\varepsilon$ olur. Buradan $i\geq j\geq m$ için $d\left(\tilde{x}_i,\tilde{x}_j\right)\tilde{<}\overline{\varepsilon}$ bulunur. Aynı zamanda $\overline{0}\tilde{\in}\tilde{\mathbb{R}}\setminus(Y,A)$ olduğundan $\tilde{\mathbb{R}}$ uzayında bu dizinin $\overline{0}$ elemanına yakınsak olduğu açıktır. Bu dizi, $\left(Y,d_Y,A\right)$ uzayında yakınsak değildir. Böylece $\left(Y,d_Y,A\right)$ bir tam esnek metrik uzay değildir.

Önerme 3.6.2. Bir $\left(\tilde{X},d\right)$ esnek metrik uzayında herhangi bir (Y,A) esnek alt kümesi için, $\delta\left((Y,A)\right)=\delta\left(\overline{(Y,A)}\right)$ olur.

İspat. $(Y,A)\tilde{\subset}\overline{(Y,A)}$ olduğundan $\delta\left((Y,A)\right)\tilde{\leq}\delta\left(\overline{(Y,A)}\right)$ olur. Keyfi $\tilde{\varepsilon}\tilde{>}\overline{0}$ ve $\tilde{x},\tilde{y}\in\overline{(Y,A)}$ olsun. $\tilde{x}\in\overline{(Y,A)}$ olduğunda $\tilde{x}_1\in B\left(\tilde{x},\tilde{\varepsilon}/2\right)\cap SE(Y,A)$ vardır ve benzer şekilde $\tilde{y}_1\in B\left(\tilde{y},\tilde{\varepsilon}/2\right)\cap SE(Y,A)$ vardır. Bu durumda $\tilde{x}_1,\tilde{y}_1\tilde{\in}(Y,A)$ ve $d\left(\tilde{x},\tilde{x}_1\right)\tilde{<}\tilde{\varepsilon}/2$ ve $d\left(\tilde{x},\tilde{y}_1\right)\tilde{<}\tilde{\varepsilon}/2$ dır. Böylece

$$d\left(\tilde{x},\tilde{y}\right)\tilde{\leq}d\left(\tilde{x},\tilde{x}_1\right)+d\left(\tilde{x},\tilde{y}_1\right)+d\left(\tilde{x},\tilde{y}\right)\tilde{<}\tilde{\varepsilon}/2+\tilde{\varepsilon}/2+d\left(\tilde{x}_1,\tilde{y}_1\right)\tilde{<}\tilde{\varepsilon}+\delta\left((Y,A)\right)$$

$\tilde{x},\tilde{y}\in\overline{(Y,A)}$ keyfi esnek elemanları olduğunda $\delta\left(\overline{(Y,A)}\right)\tilde{\leq}\tilde{\varepsilon}+\delta\left((Y,A)\right)$ olur. Keyfi $\tilde{\varepsilon}\tilde{>}\overline{0}$ için $\delta\left(\overline{(Y,A)}\right)\tilde{\leq}\delta\left((Y,A)\right)\Rightarrow\delta\left((Y,A)\right)=\delta\left(\overline{(Y,A)}\right)$ bulunur.

Teorem 3.6.4. (Esnek metrik uzaylar için Cantor'un Arakesit teoremi). Bir $\left(\tilde{X},d\right)$ esnek metrik uzayının tam olması için gerek ve yeter şart $n\to\infty$ iken $\delta\left((Y,A)_n\right)\to\overline{0}$ olacak şekilde $(Y,A)_1\tilde{\supset}(Y,A)_2\tilde{\supset}\cdots\tilde{\supset}(Y,A)_n\tilde{\supset}\cdots$ için

$\overline{(Y,A)}_n=(Y,A)_n$ ile boş olmayan esnek kümelerin herhangi bir $\{(Y,A)_n\}$ dizisi için $(Y,A)=\cap_{n=1}^{\infty}(Y,A)_n$ bir tek elemandan ibarettir.

İspat: Bir $(\tilde{X},d)$ tam metrik uzay ve $\{(Y,A)_n\}$, $n\to\infty$ iken $\delta((Y,A)_n)\to\overline{0}$ olacak şekilde $(Y,A)_1\tilde{\supset}(Y,A)_2\tilde{\supset}\cdots\tilde{\supset}(Y,A)_n\tilde{\supset}\cdots$ ile $\overline{(Y,A)}=\{(Y,A)_n,\forall n\in N\}$ boş olmayan esnek kümelerin dizisi olsun. $\forall\lambda\in A$ ve $\forall n\in N$ için $(Y,A)_n(\lambda)\neq\phi$ olduğundan her bir $n\in N$ için $\tilde{x}\tilde{\in}(Y,A)_n$ bir esnek elemanını seçelim. İddia ediyoruz ki esnek elemanların $\{\tilde{x}_n\}$ dizisi $(\tilde{X},d)$ uzayında bir Cauchy dizisidir. Gerçekten $n\to\infty$ iken (ve böylece $m\to\infty$ iken)

$$m>n\Rightarrow(Y,A)_m\tilde{\subset}(Y,A)_n\Rightarrow\tilde{x}_m,\tilde{x}_n\tilde{\in}(Y,A)_n\Rightarrow d(\tilde{x}_m,\tilde{x}_n)\tilde{\leq}\delta((Y,A)_n)\to\overline{0}$$

yani $m,n\to\infty$ iken $d(\tilde{x}_m,\tilde{x}_n)\to\overline{0}$ gerektirir ki $\{\tilde{x}_n\}$, $(\tilde{X},d)$ uzayında bir Cauchy dizisidir. Bu durumda hipotezden bir $\tilde{x}\tilde{\in}\tilde{X}$ esnek elemanı vardır öyle ki $\lim\limits_{x\to\infty}\tilde{x}_n=\tilde{x}$ olur. $\tilde{x}\tilde{\in}\cap_{n=1}^{\infty}(Y,A)_n$ olduğunu gösterelim. $\tilde{x}_n\to\tilde{x}$ iken $\tilde{x}$ esnek elemanının esnek komşuluğu, dizinin sonsuz çokluktaki terimini içerir ve her bir $n\in N$ için $(Y,A)_n$, mümkün olan sonlu çoklukta tüm terimler hariç diğer bütün terimleri içerir. ($\forall m\geq n$ iken ($\tilde{x}_m\tilde{\in}(Y,A)_n,\tilde{x}_m\tilde{\in}(Y,A)_m\tilde{\subset}(Y,A)_n$). Öyle ise $\tilde{x}$ elemanının her bir esnek komşuluğu $(Y,A)_n$ ile kesişir. Böylece $\tilde{x}_n\tilde{\in}\overline{(Y,A)}_n=(Y,A)_n$ olur. O halde $\cap_{n=1}^{\infty}(Y,A)_n$ en az bir esnek eleman içerir. Şimdi, eğer $\tilde{x}\neq\tilde{y}$ ile $\tilde{y}\tilde{\in}\cap_{n=1}^{\infty}(Y,A)_n$ ise en az bir $\lambda\in A$ için $d(\tilde{x},\tilde{y})(\lambda)=r>0$ olur. Bu durumda $\forall n\in N$ için $\delta((Y,A)_n(\lambda))\geq r>0$ olur. Bu $n\to\infty$ iken $\delta((Y,A)_n)\to\overline{0}$ ile çelişir. Böylece (Y,A), bir tek esnek eleman içerir.

Tersine yeter şart sağlansın ve $\{\tilde{x}_n\}$, $(\tilde{X}, d)$ içinde esnek elemanların bir Cauchy dizisi olsun. Her bir $n \in N$ için $(Y, A)_n = \{\tilde{x}_n, \tilde{x}_{n+1}, \cdots\}$ olsun. Açıkça

$$(Y, A)_1 \tilde{\supset} (Y, A)_2 \tilde{\supset} \cdots \tilde{\supset} (Y, A)_n \tilde{\supset} \cdots$$

ve böylece

$$\overline{(Y, A)_1} \tilde{\supset} \overline{(Y, A)_2} \tilde{\supset} \cdots \tilde{\supset} \overline{(Y, A)_n} \tilde{\supset} \cdots$$

olur. $\{\tilde{x}_n\}$ bir Cauchy dizisi olduğunda $n \to \infty$ iken $\delta\left((Y, A)_n\right) \to \overline{0}$ olur. Bu durumda $\delta\left(\overline{(Y, A)_n}\right) \to \overline{0}$ olur. Hipotezden $\cap_{n=1}^{\infty} \overline{(Y, A)_n}$, bir tek $\tilde{x}$ esnek elemanını içerir. Böylece $n \to \infty$ iken $d(\tilde{x}, \tilde{x}_n) \tilde{\leq} \delta\left(\overline{(Y, A)_n}\right) \to \overline{0}$ yani $n \to \infty$ iken $d(\tilde{x}, \tilde{x}_n) \to \overline{0}$ yazılır. Böylece $\{\tilde{x}_n\}$, $(\tilde{X}, d)$ içinde $\tilde{x}$ elemanına yakınsar. Yani $(\tilde{X}, d)$ bir tam esnek metrik uzaydır.

3.7. Esnek Metrik Uzay için Banach Sabit Nokta Teoremi

Tanım 3.7.1. [28] $(\tilde{X}, d)$ bir esnek metrik uzay ve $f : (\tilde{X}, d) \to (\tilde{X}, d)$ bir dönüşüm olsun. $\tilde{x}, \tilde{y} \tilde{\in} \tilde{X}$ için $d\left(f(\tilde{x}), f(\tilde{y})\right) \tilde{<} \tilde{t} \cdot d(\tilde{x}, \tilde{y})$ olacak şekilde $\overline{0} \tilde{<} \tilde{t} < \overline{1}$ pozitif esnek reel sayısı varsa f dönüşümüne $(\tilde{X}, d)$ içinde bir daralma dönüşümü denir.

Örnek 3.7.1. Örnek 3.2.1 deki $(\tilde{\mathbb{R}}, d, A)$ esnek metrik uzayı göz önüne alınsın. $f_\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun ve $\mathbb{R}$ üzerinde $\left|f_\lambda'(x)\right| < t_\lambda < 1$ kabul edilsin. Bu durumda $f : (\tilde{X}, d) \to (\tilde{X}, d)$ dönüşümü $\forall \lambda \in A$ için $f(\lambda) = f_\lambda$

ile $\tilde{t}(\lambda)=t_\lambda$, Lipschitz sabiti $(\tilde{\mathbb{R}},d)$ de bir daralma dönüşümüdür. $\tilde{x},\tilde{y}\tilde{\in}\tilde{\mathbb{R}}$, $\forall\lambda\in A$ ile $\tilde{x}(\lambda)=x_\lambda$, $\tilde{y}(\lambda)=y_\lambda$ olsun. Bu durumda ortalama değer teoremine göre ($y_\lambda<a_\lambda<x_\lambda$ olduğunda)

$$\left|f_\lambda(x_\lambda)-f_\lambda(y_\lambda)\right|=\left|f_\lambda'(a_\lambda)\right|\left|x_\lambda-y_\lambda\right| \le t_\lambda\left|x_\lambda-y_\lambda\right|$$

öyle ki $\forall x_\lambda,y_\lambda\in\mathbb{R}$, $0<t_\lambda<1$ olduğunda $\left|f_\lambda(x_\lambda)-f_\lambda(y_\lambda)\right|\le t_\lambda\left|x_\lambda-y_\lambda\right|$ olur. Bu her $\lambda\in A$ için doğrudur. Böylece $\forall\tilde{x},\tilde{y}\tilde{\in}\tilde{\mathbb{R}}$, $\overline{0}\tilde{<}\tilde{t}\tilde{<}\overline{1}$ olduğunda $\left|f(\tilde{x})-f(\tilde{y})\right|\tilde{\le}\tilde{t}\left|\tilde{x}-\tilde{y}\right|$ olur.

Tanım 3.7.2. [28] $(\tilde{X},d)$ bir esnek metrik uzay olsun. $\tilde{X}$ kümesini, A parametreler kümesine göre $\tilde{X}$ kümesinin bütün esnek elemanlarının bir ailesi olarak düşünebiliriz. $f:(\tilde{X},d)\to(\tilde{X},d)$ bir dönüşüm olsun. Eğer $f(\tilde{x}_0)=\tilde{x}_0$ olacak şekilde $\tilde{x}_0\tilde{\in}\tilde{X}$ esnek elemanı varsa $\tilde{x}_0$ esnek elemanına f dönüşümünün sabit elemanı denir.

Tanım 3.7.3. [28] $(\tilde{X},d)$ bir esnek metrik uzay olsun. $\tilde{X}$ kümesini, A parametreler kümesine göre $\tilde{X}$ kümesinin bütün esnek elemanlarının ailesi olarak düşünebiliriz. $f:(\tilde{X},d)\to(\tilde{X},d)$ bir dönüşüm olsun. Bir keyfi $\tilde{x}_0\tilde{\in}\tilde{X}$ esnek elemanı için $\tilde{x}_0$ elemanında f dönüşümü uygulanarak sırasıyla;

$$\tilde{x}_1=f(\tilde{x}_0),\ \tilde{x}_2=f(\tilde{x}_1)=f^2(\tilde{x}_0),\cdots,\ \tilde{x}_n=f(\tilde{x}_{n-1})=\cdots=f^n(\tilde{x}_0),\cdots$$

esnek elemanların dizisini belirleyebiliriz. Bu diziye indirgeme metoduyla elde edilen dizi denir.

Teorem 3.7.1. $(\tilde{X},d)$ bir tam esnek metrik uzay ve $f:(\tilde{X},d)\to(\tilde{X},d)$ bir daralma dönüşümü olsun. Bu durumda f dönüşümünün tek bir sabit elemanı vardır.

İspat. $(\tilde{X},d)$ bir tam esnek metrik uzay ve $f:(\tilde{X},d)\to(\tilde{X},d)$ bir daralma dönüşümü olsun. Bu durumda $\overline{0}\,\tilde{<}\,\tilde{t}\,\tilde{<}\,\overline{1}$ ile $\tilde{t}$ esnek pozitif reel sayısı vardır öyle ki $\forall\tilde{x},\tilde{y}\,\tilde{\in}\,\tilde{X}$ için $d(f(\tilde{x}),f(\tilde{y}))\,\tilde{<}\,\tilde{t}\cdot d(\tilde{x},\tilde{y})$ olur. Keyfi $\tilde{x}\,\tilde{\in}\,\tilde{X}$ sabit esnek elemanlarını seçelim. Tekrarlama yöntemiyle $\tilde{X}$ kümesinde

$\tilde{x}_1=f(\tilde{x}),\ \tilde{x}_2=f(\tilde{x}_1)=f^2(\tilde{x}),\cdots,\ \tilde{x}_n=f(\tilde{x}_{n-1})=\cdots=f^n(\tilde{x}),\cdots$

ile esnek elemanlarının bir $\{\tilde{x}_n\}$ dizisini belirleyelim ve $\{\tilde{x}_n\}$ dizisinin $(\tilde{X},d)$ uzayında bir Cauchy dizisi olduğunu gösterelim. Gerçekten $m>n$ için

$$\begin{aligned}
d(\tilde{x}_n,\tilde{x}_m)&=d\left(f^n(\tilde{x}),f^m(\tilde{x})\right)\,\tilde{\leq}\,\tilde{t}\cdot d\left(f^{n-1}(\tilde{x}),f^{m-1}(\tilde{x})\right)\\
&\tilde{\leq}\,\tilde{t}^2\cdot d\left(f^{n-2}(\tilde{x}),f^{m-2}(\tilde{x})\right)\cdots\,\tilde{\leq}\,\tilde{t}^n\cdot d\left(\tilde{x},f^{m-2}(\tilde{x})\right)\\
&=\tilde{t}^n\cdot d(\tilde{x},\tilde{x}_{m-n})\,\tilde{\leq}\,\tilde{t}^n\cdot\left[d(\tilde{x},\tilde{x}_1)+d(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2)+\cdots+d(\tilde{x}_{m-n-1},\tilde{x}_{m-n})\right]\\
&=\tilde{t}^n\cdot\left[d(\tilde{x},\tilde{x}_1)+d\left(f(\tilde{x}),f^2(\tilde{x})\right)+d\left(f^{m-n-1}(\tilde{x}),f^{m-n}(\tilde{x})\right)\right]\\
&=\tilde{t}^n\cdot\left[d(\tilde{x},\tilde{x}_1)+\tilde{t}\cdot d\left(\tilde{x},f(\tilde{x})\right)+\cdots+\tilde{t}^{m-n-1}\cdot d\left(\tilde{x},f(\tilde{x})\right)\right]\\
&=\tilde{t}^n\cdot d(\tilde{x},\tilde{x}_1)\left[1+\tilde{t}+\tilde{t}^2+\cdots+\tilde{t}^{m-n-1}\right]\\
&\tilde{<}\,\tilde{t}^n\cdot d(\tilde{x},\tilde{x}_1)\left[1+\tilde{t}+\tilde{t}^2+\cdots+\tilde{t}^{m-n-1}+\tilde{t}^{m-n}+\cdots\right]\\
&=\tilde{t}^n\cdot d(\tilde{x},\tilde{x}_1)/(1-\tilde{t})
\end{aligned}$$

$n\to\infty$ (ve böylece $m\to\infty$) iken $\overline{0}\,\tilde{<}\,\tilde{t}\,\tilde{<}\,\overline{1}\to\overline{0}$ olduğundan, yani $d(\tilde{x}_m,\tilde{x}_n)\to\overline{0}$ olduğundan $m,n\to\infty$ iken $\{x_n\}$, $(\tilde{X},d)$ uzayında bir Cauchy dizisi olur. $(\tilde{X},d)$ tam olduğundan $\{\tilde{x}_n\}$ dizisi $\tilde{X}$ içinde bir $\tilde{x}_0$ esnek elemanına yakınsar.

Şimdi $\tilde{x}_0$ elemanının, f dönüşümünün bir sabit elemanı olduğunu gösterelim.

$$d\left(\tilde{x}_0,f(\tilde{x}_0)\right)\,\tilde{\leq}\,d(\tilde{x}_0,\tilde{x}_{n+1})+d\left(\tilde{x}_{n+1},f(\tilde{x}_0)\right)$$

$$\tilde{\leq} d\left(\tilde{x}_0, \tilde{x}_{n+1}\right) + d\left(f\left(\tilde{x}_n\right), f\left(\tilde{x}_0\right)\right)$$

$$\tilde{\leq} d\left(\tilde{x}_0, \tilde{x}_{n+1}\right) + \tilde{t} d\left(\tilde{x}_n, \tilde{x}_0\right) \rightarrow \overline{0}, n \rightarrow \infty$$

olduğundan $d\left(\tilde{x}, f\left(\tilde{x}_0\right)\right) = \overline{0}$ olur. Böylece $f\left(\tilde{x}_0\right) = \tilde{x}_0$ elde edilir.

Son olarak sabit elemanın tek olduğunu gösterelim. f dönüşümünün $\tilde{x}_0$ ve $\tilde{y}_0$ gibi iki sabit esnek elemanı olsun öyleki $f\left(\tilde{x}_0\right) = \tilde{x}_0$ ve $f\left(\tilde{y}_0\right) = \tilde{y}_0$. Bu durumda $d\left(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0\right) = d\left(f\left(\tilde{x}_0\right), f\left(\tilde{y}_0\right)\right) \tilde{<} \tilde{t} \cdot d\left(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0\right) \Rightarrow d\left(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0\right) = \overline{0} \Rightarrow \tilde{x}_0 = \tilde{y}_0$ olur Böylece f dönüşümü bir tek sabit esnek elemana sahiptir.

BÖLÜM 4. ESNEK METRİK UZAYLARDA KOMPAKTLIK

4.1.Esnek Metrik Uzayların Kompaktlığı

Tanım 4.1.1. $(\tilde{X}, d, A)$ bir esnek metrik uzay ve $(F, A) \in S(\tilde{X})$ bir esnek küme olsun. (F, A) kümesinin esnek elemanlarından oluşan her $\{\tilde{x}_n\}$ dizisi (F, A) içindeki bir esnek noktaya yakınsak ise (F, A) esnek kümesine *dizisel kapalıdır* denir.

Önerme 4.1.1. $(\tilde{X}, d, A)$ bir esnek metrik uzay, $\tilde{x} \tilde{\in} \tilde{X}$ ve $\tilde{\varepsilon} \tilde{>} \overline{0}$ esnek reel sayı olsun. Bu durumda $B[\tilde{x}, \tilde{\varepsilon}] = \{\tilde{y} \tilde{\in} \tilde{X} : d(\tilde{x}, \tilde{y}) \tilde{\leq} \tilde{\varepsilon}\} \subset SE(\tilde{X})$ kapalı yuvarı ve dolayısıyla $SS(B[\tilde{x}, \tilde{\varepsilon}])$ esnek kapalı yuvarı dizisel kapalıdır.

İspat. $\{\tilde{y}_n\} \subset B[\tilde{x}, \tilde{\varepsilon}]$ yakınsak bir dizi ve $\tilde{y}_n \to \tilde{y} \in B[\tilde{x}, \tilde{\varepsilon}]$ olsun. Bu durumda $d(\tilde{y}_n, \tilde{x}) \tilde{\leq} \tilde{\varepsilon}$ ve $d(\tilde{y}_n, \tilde{x}) \to \overline{0}$, $(n \to \infty)$ olur. Böylece $\tilde{y} \in B[\tilde{x}, \tilde{\varepsilon}] \Leftrightarrow d(\tilde{x}, \tilde{y}) \tilde{\leq} \tilde{\varepsilon}$ bulunur. Önerme 3.6.1 ile $d(\tilde{y}_n, \tilde{x}) \to d(\tilde{y}, \tilde{x})$ ve $B[\tilde{x}, \tilde{\varepsilon}]$ kapalı olduğundan $d(\tilde{y}, \tilde{x}) \in B[\tilde{x}, \tilde{\varepsilon}]$ olur ve ispat tamamlanır.

Tanım 4.1.2. $(\tilde{X}, d, A)$ bir esnek metrik uzay, $(F, A) \in S(\tilde{X})$ boş olmayan bir esnek küme, sonlu esnek elemanların ürettiği bir esnek küme ve $\tilde{\varepsilon} \tilde{>} \overline{0}$ esnek reel sayı olsun. Eğer her bir $\tilde{x} \tilde{\in} (F, A)$ için $d(\tilde{x}, \tilde{u}_{i_0}) \tilde{<} \tilde{\varepsilon}$ olacak şekilde $\tilde{u}_{i_0} \tilde{\in} (U, A)$ esnek elemanı varsa, (U, A) kümesine (F, A) için bir *esnek* $\tilde{\varepsilon} -$ *ağ* denir.

Tanım 4.1.3. $\left(\tilde{X},d,A\right)$ bir esnek metrik uzay, $(F,A)\in S(\tilde{X})$ bir esnek küme, $\delta\left(U_i,A\right)\tilde{<}\tilde{\varepsilon}$ ile $(U_i,A)\in S(\tilde{X}),\ i=1,2,...,n$ esnek kümeler olsun. Eğer $(F,A)\tilde{\subset}\bigcup_{i=1}^{n}(U_i,A)$ ise (F,A) kümesine *esnek total sınırlıdır* denir.

Teorem 4.1.1. $\left(\tilde{X},d,A\right)$ bir esnek metrik uzay ve $(F,A)\in S(\tilde{X})$ bir esnek küme (F,A) kümesinin esnek total sınırlı olması için gerek ve yeter şart (F,A) kümesinin bir esnek $\tilde{\varepsilon}-a\breve{g}$ a sahip olmasıdır.

İspat. (F,A) kümesinin esnek total sınırlı ve $\tilde{\varepsilon}\tilde{>}\overline{0}$ esnek reel sayı olsun. Bu durumda Tanım 4.1.3 ile $(F,A)\tilde{\subset}\bigcup_{i=1}^{n}(U_i,A)$ olacak şekilde $\delta\left(U_i,A\right)\tilde{<}\tilde{\varepsilon}$ ile $(U_i,A)\in S(\tilde{X}),i=1,2,...,n$ esnek kümeleri bulabiliriz. Her bir (U_i,A) kümesinden bir $\tilde{u}_i$ esnek elemanı seçelim ve $(U,A)=SS\left\{\tilde{u}_1,\tilde{u}_2,\tilde{u}_3,...\tilde{u}_n\right\}$ diyelim. (U,A) kümesinin (F,A) için bir esnek $\tilde{\varepsilon}-a\breve{g}$ olduğunu göstermeliyiz. $\tilde{x}\tilde{\in}(F,A)$ olsun. Bu durumda $\tilde{u}_{i_0}$ esnek elemanı vardır öyle ki $\tilde{x}\tilde{\in}(U_{i_0},A)$ olur. $\tilde{u}_{i_0},\tilde{x}\in(U_{i_0},A)$ olduğundan $d(\tilde{x},\tilde{u}_{i_0})\tilde{<}\tilde{\varepsilon}$ elde edilir.

$\left(F,A\right)$ kümesi bir $\tilde{\varepsilon}-a\breve{g}$ a sahip olsun. Bu durumda bir $(U,A)=SS\left\{\tilde{u}_1,\tilde{u}_2,\tilde{u}_3,...\tilde{u}_n\right\}$ esnek kümesi bulabiliriz öyle ki her $\tilde{x}\tilde{\in}(F,A)$ için $d(\tilde{x},\tilde{u}_{i_0})\tilde{<}\tilde{\varepsilon}$ ile $\tilde{u}_{i_0}\tilde{\in}(U,A)$ vardır.

$(U_{i_0},A)=SS\left(B(\tilde{u}_i,\tilde{\varepsilon})\right)=SS\left\{\tilde{x}\tilde{\in}\tilde{X}:B(\tilde{x},\tilde{u}_i)\tilde{<}\tilde{\varepsilon}\right\}$

olsun. Açıkça $(F,A)\tilde{\subset}\bigcup_{i=1}^{n}(U_i,A)$ ve $\delta\left(U_i,A\right)\tilde{<}\tilde{\varepsilon}$ olur.

Tanım 4.1.4. $\left(\tilde{X},d,A\right)$, $(M5)$ şartını sağlayan bir esnek metrik uzay, $(F,A)\in S(\tilde{X})$ bir esnek küme ve τ_d esnek elemanter metrik topoloji olsun ve $\mathcal{G}=\left\{\left(V_i,A\right)\right\}\subset\tau_d$,

$i \in I$, esnek kümelerin bir ailesi verildiğinde $(F,A) \tilde{\subseteq} \Cup_{i \in I} (V_i, A)$ ise $\mathcal{G}$ sınıfına, (F,A) kümesinin *bir açık örtü*sü denir.

Eğer (F,A) kümesinin her açık örtüsü bir sonlu alt örtüye indirgenebiliyorsa (F,A) esnek kümesine *kompakttır* denir.

Tanım 4.1.5. $(\tilde{X}, d, A)$, (M5) şartını sağlayan bir esnek metrik uzay, $(F,A) \in S(\tilde{X})$ ve $\tilde{\varepsilon} \tilde{>} \overline{0}$ esnek reel sayı olsun. Eğer $\delta(G,A) \tilde{<} \tilde{\varepsilon}$ ile her $(G,A) \in S((F,A))$ esnek kümesi için $(G,A) \in S((V_{i_0}, A))$ olacak şekilde $(V_{i_0}, A) \in \mathcal{G}$ varsa $\tilde{\varepsilon} \tilde{>} \overline{0}$ esnek reel sayısına $\mathcal{G}$ açık örtüsünün bir *esnek Lebesgue sayısı* denir.

Tanım 4.1.6. $(\tilde{X}, d, A)$ bir esnek metrik uzay, $(F,A) \in S(\tilde{X})$ bir esnek küme olsun. Eğer (F,A) esnek kümesinin esnek elemanlarından oluşan her $\{\tilde{x}_n\}$ dizisinin (F,A) içinde yakınsak bir $\{\tilde{x}_{n_i}\}$ alt dizisi varsa (F,A) esnek kümesine *dizisel kompakttır* denir.

Teorem 4.1.2. $(\tilde{X}, d, A)$ bir esnek metrik uzay, $(F,A) \in S(\tilde{X})$ bir esnek küme olsun. Eğer (F,A) esnek kümesi dizisel kompakt ise total sınırlıdır.

İspat. Kabul edelim ki $\tilde{\varepsilon} \tilde{>} \overline{0}$ esnek reel sayısı vardır öyle ki (F,A) bir esnek $\tilde{\varepsilon} - a\breve{g}a$ sahip olmasın. Bu durumda bir $\tilde{x}_1 \tilde{\in} (F,A)$ esnek elemanı için $d(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) \tilde{<} \tilde{\varepsilon}$ olacak şekilde herhangi bir $\tilde{x}_2 \tilde{\in} (F,A)$ elemanı vardır. Aynı zamanda $SS\{\tilde{x}_1, \tilde{x}_2\}$ kümesi (F,A) için bir ağ olamaz. Böylece bir $\tilde{x}_3 \tilde{\in} (F,A)$ esnek elemanı vardır öyleki $\tilde{\varepsilon} - d(\tilde{x}_1, \tilde{x}_3) \tilde{\notin} \operatorname{int}(P,A)$ ve $\tilde{\varepsilon} - d(\tilde{x}_2, \tilde{x}_3) \tilde{\notin} \operatorname{int}(P,A)$ olur. Bu şekilde devam edersek $\tilde{\varepsilon} - d(\tilde{x}_n, \tilde{x}_m) \tilde{\notin} \operatorname{int}(P,A)$, $\forall n, m \in \mathbb{N}$ olacak şekilde (F,A) içinde bir $\{\tilde{x}_n\}$ dizisi elde ederiz. Bu dizi bir Cauchy dizisi değil ve yakınsak alt dizilere sahip değildir. Böylece (F,A) esnek kümesi dizisel kompakt değildir. Bu bir çelişkidir. O halde kabulümüz yanlıştır. Yani teorem doğrudur.

Teorem 4.1.3. $(\tilde{X},d,A)$, $(M5)$ şartını sağlayan bir esnek metrik uzay, $(F,A)\in S(\tilde{X})$ bir dizisel kompakt esnek küme olsun. Bu durumda (F,A) esnek kümesi her $\mathcal{G}=\{(V_i,A)\}_{i\in I}\subset\tau_d$ açık örtüsü bir esnek Lebesgue elemanına sahiptir.

İspat. Kabul edelim ki $\mathcal{G}$, (F,A) esnek kümesinin bir esnek Lebesgue elemana sahip olmayan bir açık örtüsü olsun. Bu durumda bir $\tilde{\varepsilon}\,\tilde{>}\,\overline{0}$ esnek sabit elemanı ve her bir $n\in\mathbb{N}$ için $\delta(H,A)\,\tilde{<}\,\frac{\tilde{\varepsilon}(\lambda)}{n},\forall\lambda\in A$ ile bir $(H_n,A)\in S((F,A))$ bulunabilir ve $(H_n,A)\notin S((V_i,A))$, $\forall(V_i,A)\in\mathcal{G}$ olur. Her bir (H_n,A) kümesinden $\tilde{h}_n\,\tilde{\in}\,(H_n,A)$ esnek eleman seçelim. (F,A) esnek dizisel kompakt olduğundan $\{\tilde{h}_n\}$ dizisi $\tilde{h}_{n_k}\to\tilde{x}\,\tilde{\in}\,(F,A)$ ile bir yakınsak alt diziye sahiptir. $(F,A)\,\tilde{\subseteq}\,\tilde{\bigcup}_{i\in I}(V_i,A)$ olduğu için $\tilde{x}\,\tilde{\in}\,(V_{i_0},A)$ olacak şekilde $i_0\in I$ vardır ve bir $\tilde{\varepsilon}_1\,\tilde{>}\,\overline{0}$ esnek elemanı bulunabilir öyle ki $\tilde{x}\in B(\tilde{x},\tilde{\varepsilon}_1)\subset SE(V_{i_0},A)$ olur. $\tilde{h}_{n_k}\to\tilde{x}$ ve $\tilde{\varepsilon},\tilde{\varepsilon}_1\in\operatorname{int}(P,A)$ olduğundan bir $i_{n_0}\in\mathbb{N}$ bulunabilir öyle ki $d(\tilde{x},\tilde{h}_{n_0})\,\tilde{<}\,\frac{\tilde{\varepsilon}_1}{2}$ ve $\frac{2\tilde{\varepsilon}}{i_{n_0}}\,\tilde{<}\,\tilde{\varepsilon}_1$ olur. Simdi gösterebiliriz ki $B_{i_{n_0}}\subset B(\tilde{x},\tilde{\varepsilon}_1)\subset SE(V_{i_0},A)$ ve bir çelişki elde ederiz. Yani, $\tilde{y}\,\tilde{\in}\,B_{i_{n_0}}$ ise bu durumda

$$d(\tilde{y},\tilde{x})\,\tilde{\leq}\,d(\tilde{y},\tilde{h}_{n_0})+d(\tilde{h}_{n_0},\tilde{x})\,\tilde{<}\,\frac{\tilde{\varepsilon}}{i_{n_0}}+\frac{\tilde{\varepsilon}_1}{2}\,\tilde{<}\,\frac{\tilde{\varepsilon}_1}{2}+\frac{\tilde{\varepsilon}_1}{2}=\tilde{\varepsilon}_1$$

elde edilir.

Teorem 4.1.4. $(\tilde{X},d,A)$, $(M5)$ şartını sağlayan bir esnek metrik uzay olsun. Bu durumda her $(F,A)\in S(\tilde{X})$ esnek dizisel kompakt kümesi esnek kompakttır.

İspat. $\mathcal{G}=\{(V_i,A)\}_{i\in I}$, (F,A) kümesinin bir açık örtüsü olsun. (F,A) esnek dizisel kompakt olduğundan bir $\tilde{\varepsilon}\tilde{>}\overline{0}$ esnek elemanı vardır öyle ki $\delta(H,A)\tilde{<}\tilde{\varepsilon}$ ile herhangi bir $(H,A)\in S((F,A))$ için bir $i_0\in I$ vardır öyle ki $(H,A)\in S((V_{i_0},A))$ olur. Böylece (F,A) esnek total sınırlı olduğundan $\delta(U_i,A)\tilde{<}\tilde{\varepsilon}$ ile $(F,A)\tilde{\subseteq}\Cup_{i\in I}(U_i,A)$ olur. Böylece her bir $i=1,2,\dots n$ için

$$(U_i,A)\in S((V_i,A)) \text{ ve } (V_1,A),(V_2,A),\dots,(V_n,A)\in\mathcal{G}$$

olur. Yani,

$$(F,A)\tilde{\subseteq}\Cup_{i=1}^{m}(U_i,A)\tilde{\subseteq}\Cup_{i=1}^{m}(V_i,A)$$

olur. O halde (F,A) esnek kompakttır.

Uyarı 4.1.1. (*M5*) şartını sağlayan her esnek metrik uzay elamenter işlemler altında bir esnek topolojik uzaydır. Bu durumda her kompakt esnek metrik uzay dizisel kompakttır.

Teorem 4.1.5. (*M5*) şartını sağlayan her $(\tilde{X},d,A)$ esnek metrik uzay birinci sayılabilirdir.

İspat. $\tilde{x}\tilde{\in}\tilde{X}$ ve bir $\tilde{\varepsilon}\tilde{>}\overline{0}$ sabit esnek eleman ve τ_d, $\tilde{X}$ üzerindeki esnek metrik topoloji olsun.

$$\beta_{\tilde{x}}=\left\{SS\left(B(\tilde{x},\tfrac{\tilde{\varepsilon}}{n})\right):n\in\mathbb{N}\right\}$$

sayılabilir ailesinin $\tilde{x}\tilde{\in}\tilde{X}$ esnek elemanı için lokal baz olduğunu göstermeliyiz. $(U,A)\in\tau_d$ bir esnek açık küme olsun. Bu durumda $\tilde{x}\tilde{\in}B(\tilde{x},\tilde{\varepsilon}_l)\subset SE((U,A))$ veya

$SS\left(B(\tilde{x},\tilde{\varepsilon}_1)\right) \tilde{\subset} (U,A)$ olacak şekilde bir $\tilde{\varepsilon}_1 \tilde{>} \overline{0}$ esnek eleman bulunabilir. Bu durumda $\frac{\tilde{\varepsilon}}{n_0} \tilde{<} \tilde{\varepsilon}_1$ olacak şekilde bir n_0 doğal sayısı bulunabilir. Böylece

$$\tilde{x} \tilde{\in} B(\tilde{x},\tfrac{\tilde{\varepsilon}}{n_0}) \subset B(\tilde{x},\tilde{\varepsilon}_1) \subset SE\left((U,A)\right)$$

ve dolayısıyla

$$SS\left(B(\tilde{x},\tfrac{\tilde{\varepsilon}}{n_0})\right) \tilde{\subset} SS\left(B(\tilde{x},\tilde{\varepsilon}_1)\right) \tilde{\subset} (U,A)$$

olur. O halde

$$\beta_{\tilde{x}} = \left\{SS\left(B(\tilde{x},\tfrac{\tilde{\varepsilon}}{n})\right) : n \in \mathbb{N}\right\}$$

ailesi bir esnek lokal bazdır ve $\left(\tilde{X},\tau_{\tilde{\varepsilon}},A\right)$ esnek topolojik metrik uzayı birinci sayılabilirdir.

Tanım 4.1.6. $\left(\tilde{X},d,A\right)$, bir esnek metrik uzay, $f : SE(\tilde{X}) \to SE(\tilde{X})$ bir esnek dönüşüm, $\{\tilde{x}_n\}$ esnek elemanların bir dizisi ve $\tilde{x} \tilde{\in} \tilde{X}$ olsun. Eğer $\tilde{x}_n \to \tilde{x} \Rightarrow f(\tilde{x}_n) \to f(\tilde{x})$ ise $f : SE(\tilde{X}) \to SE(\tilde{X})$ esnek dönüşümüne dizisel süreklidir denir.

Tanım 4.1.7. $\left(\tilde{X},d,A\right)$, $(M5)$ şartını sağlayan bir esnek metrik uzay, $\tilde{x} \tilde{\in} \tilde{X}$ ve $f : SE(\tilde{X}) \to SE(\tilde{X})$ bir esnek dönüşüm olsun. Eğer $f(\tilde{x}) \in SE\left((V,A)\right)$ olacak şekildeki her $(V,A) \in \tau_d$ esnek açık kümesi için $\tilde{x} \in SE\left((U,A)\right)$ olacak şekilde bir $(U,A) \in \tau_d$ varsa öyle ki $f\left(SE\left((U,A)\right)\right) \subset SE\left((V,A)\right)$ ise f dönüşümüne $\tilde{x} \tilde{\in} \tilde{X}$ *elemanınında süreklidir* denir. f dönüşümü her $\tilde{x} \tilde{\in} \tilde{X}$ elemanınıda sürekli ise f dönüşümüne $\tilde{X}$ üzerinde *süreklidir* denir.

Önerme 4.1.2. $(\tilde{X}, d, A)$, (*M5*) şartını sağlayan bir esnek metrik uzay ve $f : SE(\tilde{X}) \to SE(\tilde{X})$, (f^*) aksiyomunu sağlayan bir esnek dönüşüm olsun. Bu durumda *f* esnek dönüşümünün sürekli olması için gerek ve yeter şart dizisel sürekli olmasıdır.

İspat. $\tilde{x}_n \to \tilde{x}$ ve $\tilde{\varepsilon} \tilde{>} \overline{0}$ olsun. *f* esnek fonksiyonu $\tilde{x} \tilde{\in} \tilde{X}$ esnek noktasında sürekli olduğundan $f\left(B(\tilde{x}, \tilde{\varepsilon}_1)\right) \subset B\left(f(\tilde{x}), \tilde{\varepsilon}\right)$ olacak şekilde bir $\tilde{\varepsilon}_1 \tilde{>} \overline{0}$ bulunabilir. $\{\tilde{x}_n\}$ dizisinin yakınsaklığından her $n > N$ doğal sayısı için $d\left(\tilde{x}_n, \tilde{x}\right) \tilde{<} \tilde{\varepsilon}_1$ olacak şekilde N doğal sayısı bulunabilir. Buradan her $n > N$ doğal sayısı için $d\left(f(\tilde{x}_n), f(\tilde{x})\right) \tilde{<} \tilde{\varepsilon}$ olur. $(\tilde{X}, d, A)$ esnek metrik uzayı birinci sayılabilir olduğundan gerek şart sağlanır. Yeter şartın sağlandığı açıktır.

Teorem 4.1.6. $(\tilde{X}, d, A)$, (*M5*) şartını sağlayan bir esnek metrik uzay ve $(F, A) \in S(\tilde{X})$ bir dizisel kompakt esnek küme olsun. Bu durumda

$$\delta(F, A) = \sup\left\{d(\tilde{x}, \tilde{y}) : \tilde{x}, \tilde{y} \tilde{\in} (F, A)\right\} = d(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0)$$

olacak şekilde $\tilde{x}_0, \tilde{y}_0 \tilde{\in} (F, A)$ esnek elemanları vardır.

İspat. $\tilde{\varepsilon} \tilde{>} \overline{0}$ sabit esnek elemanı için $\delta(F, A) - \dfrac{\tilde{\varepsilon}}{n} \tilde{<} \delta(F, A)$ elde ederiz. Supremum tanımından her bir $n \in N$ için $\tilde{x}_n, \tilde{y}_n \tilde{\in} (F, A)$ öyle ki $\delta(F, A) - \dfrac{\tilde{\varepsilon}}{n} \tilde{<} d(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n) \tilde{<} \delta(F, A)$ olur. (F, A) esnek kümesinin dizisel kompaktlığından $\tilde{x}_n \to \tilde{x}_0 \tilde{\in} (F, A)$ ve $\tilde{y}_n \to \tilde{y}_0 \tilde{\in} (F, A)$ kabul edebiliriz. Böylece

$$\lim_{x \to \infty} \left(\delta(F, A) - \frac{\tilde{\varepsilon}}{n}\right) \tilde{<} \lim_{x \to \infty} d(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n) \tilde{<} \delta(F, A)$$

olur. Buradan

$$\delta(F,A) \mathbin{\tilde{\leq}} \lim_{x\to\infty} d(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n) \mathbin{\tilde{\leq}} \delta(F,A)$$

elde edilir. Yani $\delta(F,A) = \lim_{x\to\infty} d(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n)$ ve Önerme 3.6.1 ile $\lim_{x\to\infty} d(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n) = d(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0)$ olacak şekilde $\tilde{x}_0, \tilde{y}_0 \tilde{\in} (F,A)$ esnek elemanları bulunur.

BÖLÜM 5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tezde, esnek metrik uzaylar üzerine çalışıldı. Tezde ilk önce esnek metrik uzayların bazı topolojik ve tamlık özellikleri verilmiştir.

Daha sonra, esnek metrik uzayların kompaktlığı ve sürekliliği üzerine çalışılmıştır. Herhangi bir esnek metrik uzaylarda esnek eleman bazında dizisel kapalılık, dizisel kompaktlık, esnek ağ, esnek total sınırlılık, Lebesques elemanı ve esnek dizisel sürekli fonksiyon kavramları tanımlanmış ve tanımlanan bu kavramların önemli bazı özellikleri ispatlanmıştır. Aynı zamanda elemanter esnek metrik topolojik uzayda esnek açık örtü, esnek kompaktlık ve esnek sürekli fonksiyon kavramları tanımlanmıştır. Her esnek metrik uzay elemanter esnek topolojik uzay olmadığından bu uzayda dizisel kompaktlıkla kompaktlığın farklı olduğu görülmüştür. Buna rağmen (M5) şartını sağlayan esnek metrik uzaylarda dizisel kompaktlıkla kompaktlığın, dizisel süreklilik ile sürekliliğin aynı oldukları ispatlanmıştır.

Tezde tanımlanan ve temel özellikleri verilen kavramların birçok özellelliği, tezde ele alınan yöntemle ispatlanabilir. Ayrıca esnek metrik uzayların ayrılabilirliği, sayılabilirliği gibi temel kavramlar ve daha ileri konular çalışılabilir. Bu ve benzeri araştırma konuları başka çalışmalada ele alınacaktır.

KAYNAKLAR

[1] L.A. Zadeh, Fuzzy sets, Inform. and Control, 8(1), 338-353, 1965.

[2] D. Molodtsov, Soft set theory-First results, Computers and Mathematics with Applications, 37(1), 19-31, 1999.

[3] D. Molodtsov, The theory of soft sets (in Russian), URSS Publishers,Moscow, 2004.

[4] P. K. Maji, A. R. Roy and R. Biswas, An application of soft sets in a decision making problem, Computers and Mathematics with Applications, 44(1), 1077-1083, 2002.

[5] K. Maji, A. R. Roy and R. Biswas, Soft set theory, Computers and Mathematics with Applications, 45(1), 555-562, 2003.

[6] K. Maji, A. R. Roy and R. Biswas, On intuitionistic fuzzy soft sets. J. Fuzzy Math, 12(3), 669-683, 2004.

[7] Z. Pawlak, Rough sets, International Journal of Information and Computer Sciences, 11(1), 341-356, 1982.

[8] Z. Xiao, L. Chen, B. Zhong, and S. Ye, Recognition for Soft InformationBased on the Theory of Soft Sets, In Proceedings of ICSSSM-05 (Ed: J.Chen), IEEE, 2, 1104-1106, 2005.

[9] D. Chen, E.C.C. Tsang, D.S. Yeung and X.Wang, The parameterization reduction of soft sets and its applications, Computers and Mathematics with Applications, 49(1), 757-763, 2005.

[10] M. M. Mushrif, S. Sengupta and A.K. Ray, Texture classifcation using a novel, soft-set theory based classifcation, Algorithm. Lecture Notes In Computer Science, 3851, 246-254, 2006.

[11] X. Yang, D. Yu, J. Yang and C. Wu, Generalization of soft set sheory from crisp to fuzzy case, In Fuzzy Information and Engineering: Proceedings of ICFIE, Advances in Soft Computing 40, Springer, 345-355, 2007.

[12] X. Yang, T. Lin, Y.J. Yang, Y. Li, and D. Yu, Combination of interval-valued fuzzy set and soft set. Computers and Mathematics with Applications, 58, 521-527, 2009.

[13] F. Feng, Y. B. Jun and X. Zhao, Soft semirings, Computers and Mathematics with Applications, 56(10), 2621-2628, 2008.

[14] F. Feng, Y. Li, and V. Leoreanu-Fotea, Application of level soft sets in decision making based on interval-valued fuzzy soft sets, Computers and Mathematics with Applications, 60, 1756-1767, 2010.

[15] F. Feng, X. Liu, V. Leoreanu-Fotea, and Y. B. Jun, Soft sets and soft roughsets, Information Sciences, 181, 1125-1137, 2011.

[16] Q-M. Sun, Z-L. Zhang and J. Liu, Soft sets and soft Modules, (In Guoyin Wang, Tian-rui Li, Jerzy W. Grzymala-Busse, Duoqian Miao, Andrzej Skowron, Yiyu Yao Eds.): Rough Sets and Knowledge Technology, RSKT, Proceedings, Springer, 403-409, 2008.

[17] U. Acar, F. Koyuncu, and B. Tanay, Soft sets and soft rings, Computers and Mathematics with Applications, 59, 3458-3463, 2010.

[18] A. O. Atagün, ve A. Sezgin, Soft substructures of rings, felds and modules. Computers and Mathematics with Applications, 61, 592-60, 12011.

[19] A. Aygünoğlu, H. Aygün, Introduction to fuzzy soft groups, Computers and Mathematics with Applications, 58, 1279–1286, 2009.

[20] A. Aygünoğlu, H. Aygün, Some notes on soft topological spaces, Neural Computation and Application, 113-119, 2011.

[21] M. Shabir and M. Naz, On soft topological spaces, Comput. Math. Appl.61, 1786-1799, 2011.

[22] I. Zorlutuna, M. Akdağ, W. K. Min and S. Atmaca, Remarks on soft topological spaces, Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics, 3 (2), 171-185, 2011.

[23] W.K. Min, A Note on soft topological spaces, Comput. Math. Appl. 62, 3524-3528, 2011.

[24] K. Taşköprü, Elemanter esnek topolojik uzaylara giriş, Doktora tezi, sakarya Üniversitesi, Fen Bilmleri Enstitüsü, 2017.

[25] S. Das and S. K. Samanta, Soft real sets, soft real numbers and their properties, J. Fuzzy Math., 20(3), 551–576, 2012.

[26] S. Das and S. K. Samanta. (2013). On soft complex sets and soft complex numbers. J.Fuzzy Math., 21(1):195–216, 2012.

[27] S. Das and S. K. Samanta, Soft metric. Ann. Fuzzy Math. Inform., 6(1), 77–94, 2013.

[28] S. Das and S. K. Samanta, On soft metric spaces, J. Fuzzy Math., 21(3), 707–734, 2013.

[29] M. Chiney and S. K. Samanta, Vector soft topology, Ann. Fuzzy Math. Inform.,10(1), 45–64,2015.

[30] S. Das and S. K. Samanta. Soft linear operators in soft normed linear spaces, Ann. Fuzzy Math. Inform., 6(2), 295–314, 2013.

[31] S. Das, P. Majumdar and S. K. Samanta On soft linear spaces and soft normed linear spaces, Ann. Fuzzy Math. Inform., 9(1), 91–109,2015.

[32] S. Das and S. K. Samanta. On soft inner product spaces, Ann. Fuzzy Math. Inform., 6(1), 151–170, 2013.

[33] S. Das and S. K. Samanta, Soft linear functionals in soft normed linear spaces, Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics, Volume 7, No. 4, 629–651, 2014.

ÖZGEÇMİŞ

Elif Atalay, 01.07.1992 tarihinde İstanbul'da doğdu. İlk, orta ve lise eğitimini İstanbul'da tamamladı. 2010 yılında başladığı Sakarya Üniversitesi Matematik Bölümünü 2014 yılında bitirdi. 2015 yılında Sakarya Üniversitesi Matematik Bölümünde yüksek lisansa başladı.