T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Bİ-İZOTONİK UZAYLAR VE AYIRMA AKSİYOMLARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Nasiphan UYSAL

Enstitü Anabilim Dalı	**:**	**MATEMATİK**
Enstitü Bilim Dalı	**:**	**TOPOLOJİ**
Tez Danışmanı	**:**	**Prof. Dr. Soley ERSOY**

Temmuz 2018

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Bİ-İZOTONİK UZAYLAR VE AYIRMA AKSİYOMLARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Nasiphan UYSAL

Enstitü Anabilim Dalı	:	MATEMATİK
Enstitü Bilim Dalı	:	TOPOLOJİ

Bu tez 19/07/2018 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği / ~~oyçokluğu~~ ile kabul / ~~red~~ edilmiştir.

Prof. Dr. Soley ERSOY Başkan	Doç. Dr. İsmet ALTINTAŞ Üye	Doç. Dr. Emrah Evren KARA Üye

BEYAN

Tez içindeki tüm verilerin akademik kurallar çerçevesinde tarafımdan elde edildiğini, görsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçların akademik ve etik kurallara uygun şekilde sunulduğunu, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezde yer alan verilerin bu üniversite veya başka bir üniversitede herhangi bir tez çalışmasında kullanılmadığını beyan ederim.

Nasiphan UYSAL

19.07.2018

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans danışmanlığımı üstlenip, bilgi ve tecrübesiyle destek veren, çalışmamın her safhasında yardımını esirgemeyen sayın hocam Prof. Dr. Soley ERSOY'a şükran ve saygılarımı sunarım.

Desteğini her zaman yanımda hissettiğim değerli eşime sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

$\mathrm{cl}(A)$	: A kümesinin X topolojik uzayındaki kapanışı
$\mathrm{int}(A)$	: A kümesinin X topolojik uzayındaki içi
$\mathcal{N}(x)$	: x noktasının komşuluk kümeler ailesi
(X,cl)	: İzotonik uzay
(X,τ)	: Topolojik uzayı
(X,τ,ν)	: Bitopolojik uzay
$(X,\mathrm{cl}_1,\mathrm{cl}_2)$	: Bi-izotonik uzay
R_T_1	: Reilly anlamında T_1 uzayı
S_T_1	: Swart anlamında T_1 uzayı
$\nu\mathrm{cl}(U)$	: U kümesinin ν topolojisine göre kapanışı
$\tau\mathrm{cl}(V)$	: V kümesinin τ topolojisine göre kapanışı

ÖZET

Anahtar kelimeler: Kapanış uzayı, izotonik uzay, bitopolojik uzay, bi-izotonik uzay, ayırma aksiyomları.

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm tez konusuna ilişkin ayrıntılı literatür bilgisi içermektedir. İkinci bölümde izotonik uzayları tanımlamak üzere kapanış operatörü ve özellikleri verilmiştir. Ayrıca bu operatör yardımıyla iç ve komşuluk operatörleri tanımlanmış ve ilgili teoremler ifade ve ispat edilmiştir. Daha sonra bu operatörler göz önüne alarak bir uzayın izotonik uzay olması için gerek ve yeter koşulları belirtilmiştir. Ayrıca izotonik uzaylar arasında tanımlı dönüşümün sürekliliği ve izotonik uzaylarda ayırma aksiyomları ile ilgili tanım ve karakterizasyonlar verilmiştir. Üçüncü bölümde (X,τ,ν) bitopolojik uzaylarının temel tanımları ve bitopolojik uzaylarda dönüşümlerin sürekliliği ve bitopolojik uzaylarda ayırma aksiyomlarının genellemelerine yer verilmiştir.

Dördüncü bölüm bu çalışmanın orijinal kısmını oluşturmaktadır. Bu tezin ikinci ve üçüncü bölümde verilen izotonik uzaylar ve bitopolojik uzaylara ilişkin temel bilgiler ışığında $(X,\mathrm{cl}_1,\mathrm{cl}_2)$ bi-izotonik uzayları tanımlanmış ve temel karakterizasyonlar verilmiştir. Akabinde bi-izotonik uzaylar arasında $i-$sürekli ve bisürekli dönüşümler tanımlanarak ilgili teoremler ifade edilmiştir. Son olarak bi-izotonik uzaylarda ayırma aksiyomları tanımlanmış ve ilgili teoremler ifade ve ispat edilmiştir.

Beşinci bölümde bu tez çalışmasında elde edilen sonuçlar özetlenmiş ve bundan sonra yapılacak araştırmalara yönelik öneride bulunulmuştur.

BI-ISOTONIC SPACES AND SEPARATION AXIOMS

SUMMARY

Keywords: Closure space, isotonic space, bitopological space, bi-isotonic space, separation axioms.

This thesis consists of five chapters. The first chapter is devoted to detailed literature knowledge related to the subject of the thesis. In the second chapter, the closure operator and its properties are given to define the closure spaces. In addition, by the aid of this function the interior and neighborhood operators are defined. The related theorems are stated and proved. Afterwards, by considering these operators, the necessary and sufficient conditions for a space to be an isotonic space are expressed. Moreover, the definitions and characterizations of the continuity of mappings between the isotonic spaces and the separation axioms in isotonic spaces are given. In the third chapter, the fundamental definitions of (X,τ,ν) bitopological spaces and the continuity of mappings between bitopological spaces and the generalizations of separation axioms in bitopological spaces are represented.

The fourth chapter is the original part of this study. In the light of basic information on isotonic spaces and bitopological spaces given in the second and third chapters of this thesis, $(X,\mathrm{cl}_1,\mathrm{cl}_2)$ bi-isotonic spaces are introduced and fundamental characterizations are given Subsequently, by defining $i-$continuous and bicontinuous mappings between bi-isotonic spaces the corresponding theorems are expressed and proved. Finally, separation axioms are described in bi-isotonic spaces and the relevant theorems are expressed and proved.

In the fifth chapter of this thesis, a brief summary of this study is given and some suggestions are proposed for new investigations.

BÖLÜM 1. GİRİŞ

Bir küme üzerindeki topolojik yapı açıklar aksiyomu ile tanımlanıyor olmasının yanı sıra kapalı kümeler ailesi, komşuluk sistemleri, kapanış operatörü veya iç operatörü yardımıyla da tanımlanabilir. Örneğin X boştan farklı herhangi bir küme ve κ ailesi $P(X)$ kuvvet kümesinin bir alt ailesi olmak üzere

I. $\varnothing, X \in \kappa$

II. Her $U, V \in \kappa$ için $U \cup V \in \kappa$

III. Her $i \in I$ için $U_i \in \kappa$ ise $\bigcap_{i \in I} U_i \in \kappa$

aksiyomları sağlanıyorsa κ kapalılar ailesi olarak adlandırılır ve X üzerinde κ ailesine karşılık gelecek şekilde tek bir τ topolojisi tanımlanabilir.

Kuratowski topoloji tanımlamak için daha farklı bir yaklaşım ortaya koymuş ve kapanış fonksiyonu olarak adlandırdığı $\mathrm{cl}: P(X) \to P(X)$ dönüşümü ile $\mathrm{cl}(A) = A$ koşulunu sağlayan A kümelerini kapalı alarak topoloji tanımlamıştır öyle ki $\mathrm{cl}: P(X) \to P(X)$ dönüşümü her $A, B \in P(X)$ için

K$_0$) $\mathrm{cl}(\varnothing) = \varnothing$

K$_1$) $A \subseteq B \Rightarrow \mathrm{cl}(A) \subseteq \mathrm{cl}(B)$

K$_2$) $A \subseteq \mathrm{cl}(A)$

K$_3$) $\mathrm{cl}(A \cup B) = \mathrm{cl}(A) \cup \mathrm{cl}(B)$

K$_4$) $\mathrm{cl}(\mathrm{cl}(A)) = \mathrm{cl}(A)$

aksiyomlarını sağlıyorsa (X, cl) uzayı topolojik uzay olur. Ayrıca Kuratowski $\mathrm{cl}(A \cup B) \subseteq \mathrm{cl}(A) \cup \mathrm{cl}(B)$ kapsamasını kaldırarak topolojik uzayları genişletmiş ve kapanış uzaylarını tanımlamıştır [1]. Cech ise Kuratowski'den farklı olarak $\mathrm{cl}(\mathrm{cl}(A)) = \mathrm{cl}(A)$ aksiyomunu kaldırarak tanımlamıştır. Karışıklığı gidermek adına literatürde Kuratowski kapanış uzayı ve Cech kapanış uzayı gibi iki adlandırmaya rastlamak mümkündür [1].

Cech anlamındaki kapanış uzaylarının temelleri 1935'de Hausdorff tarafından yapılan [2] ve 1944'de Day tarafından yapılan [3] çalışmalarıdır ki bu makalelerde kapanış uzayları üzerinde yakınsaklık ve komşuluk kavramları ele alınmıştır. Daha sonra Gnilka kapanış uzayı yerine genişletilmiş topolojik uzay terimini kullanmayı tercih etmiş ve kapanış operatörü yardımıyla kompaktlık, quasi-metriklenebilme, simetri ve süreklilik gibi temel kavramları inceleyen [4], [5] ve [6] çalışmalarını ortaya koymuştur. Belirli küme özelliklerinin değişmezliğinin tartışmasında son derece önemli yere sahip olan süreklilik ve karakterizayonları genişletilmiş topolojik uzaylarda Hammer tarafından çalışılmıştır [7, 8].

Kapanış operatörünün ortaya koyduğu genellemeler bazı yeni matematik teorilerinin ortaya çıkmasında analiz, mantık, cebir ve topoloji alanlarında rol sahibi olmanın yansıra kimya, biyoloji ve bilgisayar bilimleri gibi alanlarda da kullanılmıştır.

Kimyasal reaksiyon ağı, filogenetik molekül, evrimsel değişiklikler ya da doğal polimer kıvrımı kavramlarının temelini oluşturan genel ilkelere matematiğin benzerlik, yakınlık, bağlantılılık ve süreklilik gibi kavramlar karşılık getirilmiştir. Özellikle Stadler ve arkadaşları son yıllarda evrimsel yörüngeler ve yapay kimyasallar üzerine yapmış oldukları birçok çalışmayı genelleştirilmiş topolojiler yardımıyla ortaya koymuştur. Yine Stadler ve arkadaşları genelleştirilmiş kapanış operatörü olarak bilinen küme-değerli küme-fonksiyonu ile donatılmış bir X kümesi üzerinde tanımlanabilecek bazı anlamlı topolojik kavramları araştırmış ve elde ettikleri teorik sonuçları kimya ve biyoloji bilimlerinde kullanarak yorumlamışlardır [9, 10, 11].

Kapanış uzaylarının kullanıldığı bir diğer alan da dijital görüntü işleme süreçleri olarak karşımıza çıkmaktadır. Çünkü topolojinin genel tanımlarının dijital görüntü işleme analizinde yeterli olmadığı görülmüş ve böylece genelleştirilmiş kapanış veya komşuluk fonksiyonu dijital topolojinin gereksinimlerini karşılamak üzere kullanılmıştır [12, 13, 14]. Genelleştirilmiş topolojik uzayların dijital görüntü işleme teknikleri ile birlikte görsel bilginin gösterimi ya da el yazısı tanıma sistemi gibi bilgisayar biliminin kullanım alanlarında pek çok uygulamaları vardır [15]-[22].

Tüm bu çalışmalarda hemen hemen tüm yaklaşımlar topolojinin genel çerçevesini genişletmek amacıyla izotonik olduğu bilinen kapanış fonksiyonunu kullanmıştır. cl kapanış operatörünün yukarıda verilen K_0 ve K_1 kapanış aksiyomlarını sağlaması koşuluyla tanımlanan izotonik uzaylar kapanış uzaylarını da genellemesinden dolayı son yıllarda ilgi çekmektedir. Habil ve Elzenati [23] ve [24] araştırmalarında izotonik uzaylarda bağlantılılık kavramı ile alt ayırma aksiyomları ve üst ayırma aksiyomlarına yer vermişlerdir.

Bu tez de özellikle [23, 24]'de verilen izotonik uzaylarda temel tanım ve teoremler ile [25]'de verilen izotonik uzaylarda ayırma aksiyomları tanımlarından yararlanılmıştır. Tezin ana amacı bi-izotonik uzayları tanımlamak olduğundan bitopolojik uzayların literatüre girişi ve gelişimi de irdelenmiştir.

Kelly 1963'de "*Bitopological Spaces"* isimli [26] makalesinde bitopolojik uzayı bir X kümesi üzerinde herhangi iki τ_1 ve τ_2 topolojisi almak suretiyle (X,τ_1,τ_2) üçlüsü olarak tanıtmıştır. Kelly bu çalışmasında özellikle iki noktayı, bir küme ile dışındaki herhangi bir noktayı veya ayrık iki kümeyi açık kümeleri kullanarak birbirinden ayırmayı tarif eden ve ayırma aksiyomları olarak da bilinen kavramların bazılarının bitopolojik uzaylardaki genellemeleri vermiştir. Bu temel makalede bitopolojik uzay kavramı kendisi üzerinde verilen iki topolojik yapıya sahip bir küme olarak açıkça formüle edildiğinden elde edilen sonuçlar daha sonra yapılan çalışmaları önemli ölçüde etkilemiştir. Aslında aynı küme üzerinde tanımlanan iki topolojik yapı alarak çalışma diğer yazarlar tarafından daha önceki makalelerde yapıldığı bilinmektedir. Wilson 1931 tarihinde [27]'de iki topolojili X uzayını tanımlamış ancak bu uzay üzerindeki topolojiler tamamen keyfi seçilmemiştir. Bitopolojik uzay terimi 1957'de ilk kez Motchane tarafından [28]'de kullanmış ancak (X,τ_1,τ_2) bitopolojik uzaylarını birbiri ile güçlü ilişkileri olan τ_1 ve τ_2 topolojilerini kullanarak tanımlamıştır. 1957'de Weston [29]'da X üzerinde keyfi τ_1 ve τ_2 topolojilerini almış olmasına rağmen (X,τ_1,τ_2) üçlüsü için özel bir terim kullanmamıştır. Wiweger 1961'de (X,τ_1,τ_2) üçlüsünü τ_1 topolojisi τ_2 den daha ince alarak çalışmıştır [30].

Akabinde bitopolojik uzaylarla ilgili birçok kavramın genellemeleri de yapılmıştır. Örneğin Murdeshwar ve Naimpally [31] ikili yarı Hausdorff bitopolojik uzayını çalışırken, Birsan bitopolojik grup kavramını araştırmış ve daha zayıf ikili Hausdorff özelliği üzerine çalışmalar yapmıştır. İlk olarak 2004 yılında Ravi ve Lellis Thivagar bitopolojik uzaylarda özel kümeler ele alarak birçok sonuç elde etmiştir [32]. Lane [33] ikili tamamen regüler ve ikili mükemmel normal bitopolojik uzayları tanıtmış ve Patty [34] ikili tamamen normal bitopolojik uzayı tanımlamıştır. Bunun yanı sıra Reilly [35] hemen hemen bitopolojik uzaylar üzerine çalışmalar yapmıştır. Marin ve Romaguera [36] bitopolojik uzaylarda monoton normallik kavramının doğal genellemesi üzerine çalışmıştır. Dvalishvili [37] bitopolojik uzaylarda ikili T_1, T_2, T_3, $T_{3\frac{1}{2}}$ ve T_4 uzayları tanımlamaları yapmış ve bazı nitelemelerini vermiştir. Ayrıca son zamanlarda bitopolojik uzaylar üzerine Jelic [38], Marin ve Romaguera [36], Umehara Jun-iti, Maki ve Noiri [39], Sen, Nandi ve Mukherjee [40] makalelerinde farklı yaklaşımlarla ayırma aksiyomlarını çalışmışlardır. Bu tezde özellikle Kelly ve Reilly, Dvalishvili'nin sırasıyla [26], [54] ve [37] çalışmalarından yararlanılmıştır.

Ayrıca bitopolojik uzaylarda fonksiyonların sürekliliği üzerine de çeşitli çalışmalar yapılmıştır. Özellikle, Popa [41] ikili sürekli ve ikili güçlü sürekli fonksiyonları açık kümelerle tanımlamıştır. Dube, Panwar ve Tiwari [42] ise güçsüz ikili fonksiyonları yarı-açık kümelerle ifade etmiştir. Jelic [43] ikili sürekliliği ikili açık kümeleri kullanarak üç farklı tasvirini vermiştir. Maki, Sundaram ve Balachandran [44] bitopolojik uzaylarda bisürekli fonksiyonları incelemiştir. Tüm bu çalışmaların benzerleri açık kümeler yerine açık-benzeri kümeler alınarak da yapılmıştır. Örneğin Khedr, Al-Areef ve Noiri [45] sürekliliği ön-açık ve ön-yarı-açık kümeler yardımıyla tanımlamıştır.

Bu tez çalışmasında bitopolojik uzaylar ve izotonik uzayların temel tanım ve teoremleri ifade edilerek bi-izotonik uzaylar tanımlanacak ve temel özellikleri incelenecektir. Böylece bi-izotonik uzaylar arasında tanımlı dönüşümlerin sürekliliği ile bi-izotonik uzaylarda ayırma aksiyomları ve bu kavramlar arasındaki ilişkiler araştırılacaktır.

BÖLÜM 2. İZOTONİK UZAYLAR

2.1. Temel Kavramlar

Bu bölümde kapanış operatörü ile kapanış uzayı ve izotonik uzay üzerine bilinen temel kavramlar özetlenmiştir. Kapanış, iç ve komşuluk operatörlerinin tanımları verilerek bu operatörler yardımıyla bir uzayın bir izotonik uzay olması için gerek ve yeter şartlar ifade edilmiştir.

Tanım 2.1.1. X herhangi bir küme ve $P(X)$ kuvvet kümesi olmak üzere $\mathrm{cl}: P(X) \to P(X)$ olarak tanımlanan operatörüne kapanış operatörü ve (X, cl) ikilisine de genelleştirilmiş kapanış uzayı adı verilir [23].

(X, cl) uzayında bir A alt kümesinin kapanışı $\mathrm{cl}(A)$ ile gösterilir [23].

Her $A, B \in P(X)$ için aşağıdaki aksiyomları göz önüne alalım.

K_0) $\mathrm{cl}(\varnothing) = \varnothing$

K_1) $A \subseteq B \Rightarrow \mathrm{cl}(A) \subseteq \mathrm{cl}(B)$

K_2) $A \subseteq \mathrm{cl}(A)$

K_3) $\mathrm{cl}(A \cup B) = \mathrm{cl}(A) \cup \mathrm{cl}(B)$

K_4) $\mathrm{cl}(\mathrm{cl}(A)) = \mathrm{cl}(A)$

K_5) $\bigcup_i \mathrm{cl}(A_i) = \mathrm{cl}\left(\bigcup_i A_i\right)$

Eğer cl operatörü

K_0 ve K_1 aksiyomlarını sağlıyorsa (X, cl) uzayı izotonik uzay

K_0, K_1, K_2 aksiyomlarını sağlıyorsa (X, cl) uzayı komşuluk uzayı

K_0, K_1, K_2, K_4 aksiyomlarını sağlıyorsa (X, cl) uzayı kapanış uzayı

K_0, K_1, K_2, K_3, K_4 aksiyomlarını sağlıyorsa (X, cl) uzayı topolojik uzay

olarak adlandırılır.

Önerme 2.1.1. $\mathrm{cl}: P(X) \to P(X)$ kapanış operatörü için aşağıdakiler denktir [23];

K_1) $A \subseteq B \subseteq X \Rightarrow \mathrm{cl}(A) \subseteq \mathrm{cl}(B)$,

K_1') $\mathrm{cl}(A) \cup \mathrm{cl}(B) \subseteq \mathrm{cl}(A \cup B)$,

K_1'') $\mathrm{cl}(A \cap B) \subseteq \mathrm{cl}(A) \cap \mathrm{cl}(B)$.

İspat. **($K_1 \Rightarrow K_1'$)** $A \subset B$ için $\mathrm{cl}(A) \subseteq \mathrm{cl}(B)$ olsun.

$A \subset A \cup B$ ve $B \subset A \cup B$ olduğundan $\mathrm{cl}(A) \subset \mathrm{cl}(A \cup B)$ ve $\mathrm{cl}(B) \subset \mathrm{cl}(A \cup B)$ sağlanır. Buradan $\mathrm{cl}(A) \cup \mathrm{cl}(B) \subseteq \mathrm{cl}(A \cup B)$ bulunur.

($K_1' \Rightarrow K_1$) $\forall A, B \in P(X)$ için $\mathrm{cl}(A) \cup \mathrm{cl}(B) \subseteq \mathrm{cl}(A \cup B)$ olsun. $A \subset B$ alalım. Böylece $A \cup B = B$ ve $\mathrm{cl}(A) \subset \mathrm{cl}(A) \cup \mathrm{cl}(B)$ olduğundan kolayca görülür. Sonuç olarak $\mathrm{cl}(A) \subset \mathrm{cl}(A) \cup \mathrm{cl}(B) \subseteq \mathrm{cl}(A \cup B) = \mathrm{cl}(B)$ den $\mathrm{cl}(A) \subseteq \mathrm{cl}(B)$ bulunur.

($K_1 \Rightarrow K_1''$) $A \subset B$ için $\mathrm{cl}(A) \subseteq \mathrm{cl}(B)$ olsun. $A \cap B \subseteq A$ ve $A \cap B \subseteq B$ olduğundan kabulden $\mathrm{cl}(A \cap B) \subseteq \mathrm{cl}(A)$ ve $\mathrm{cl}(A \cap B) \subseteq \mathrm{cl}(B)$ sağlanır. Böylece $\mathrm{cl}(A \cap B) \subseteq \mathrm{cl}(A) \cap \mathrm{cl}(B)$ bulunur.

($K_1'' \Rightarrow K_1$) $\forall A,B \in P(X)$ için $\mathrm{cl}(A \cap B) \subseteq \mathrm{cl}(A) \cap \mathrm{cl}(B)$ olsun. $A \subset B$ alalım. Böylece $A = A \cap B$ olduğundan $\mathrm{cl}(A) = \mathrm{cl}(A \cap B)$ sağlanır. Buradan $\mathrm{cl}(A) = \mathrm{cl}(A \cap B) \subseteq \mathrm{cl}(A) \cap \mathrm{cl}(B) \subseteq \mathrm{cl}(B) \Rightarrow \mathrm{cl}(A) \subseteq \mathrm{cl}(B)$ bulunur.

Tanım 2.1.2. X kümesi üzerinde herhangi iki genelleştirilmiş kapanış operatörü cl ve cl' olsun. Eğer $A \in P(X)$ için $\mathrm{cl}(A) \subseteq \mathrm{cl}'(A)$ ise cl, cl' operatöründen daha ince ya da cl', cl operatöründen daha kaba denir [25].

Tanım 2.1.3. X kümesi üzerinde cl kapanış operatörünün duali

$$\mathrm{int} : P(X) \to P(X),\ \mathrm{int}(A) = X - (\mathrm{cl}(X - A))$$

olarak tanımlanır ve iç operatörü olarak adlandırılır [23].

Tanım 2.1.4. (X, cl) genelleştirilmiş kapanış uzayında $A \in P(X)$ kümesi için, $\mathrm{cl}(A) = A$ ise A kümesine kapalıdır denir.

Eğer $X - A$ kapalı küme ya da $\mathrm{int}(A) = A$ ise A kümesine (X, cl) uzayında açık küme denir [23].

Örnek 2.1.1. X bir küme olsun. $\mathrm{cl} : P(X) \to P(X)$ operatörü

$$\mathrm{cl}(A) = \begin{cases} A, & A \text{ sonlu küme} \\ X, & A \text{ sonsuz küme} \end{cases}$$

olarak tanımlansın. Bu durumda (X, cl) uzayında $A \subseteq X$ kümesinin kapalı olması için gerek ve yeter şart A sonlu ya da $A = X$ olmasıdır.

Ayrıca X uzayının sonlu olması için gerek ve yeter şart X ayrık uzay olmasıdır [47].

Önerme 2.1.2. $\mathrm{int} : P(X) \to P(X)$ iç operatörü için aşağıdakiler denktir [23];

I_1) $A \subseteq B \Rightarrow \mathrm{int}(A) \subseteq \mathrm{int}(B)$,

$\mathbf{I}_1'$) $\quad \operatorname{int}(A)\cup\operatorname{int}(B)\subseteq\operatorname{int}(A\cup B)$,

$\mathbf{I}_1''$) $\quad \operatorname{int}(A\cap B)\subseteq\operatorname{int}(A)\cap\operatorname{int}(B)$.

İspat. **($\mathbf{I}_1 \Leftrightarrow \mathbf{I}_1'$)** $\operatorname{int}(A)=X-(\operatorname{cl}(X-A))$ ve $\operatorname{int}(B)=X-(\operatorname{cl}(X-B))$ ve $(\mathbf{K}_1 \Leftrightarrow \mathbf{K}_1'')$ olduğundan

$$\begin{aligned}A\subseteq B\Rightarrow\operatorname{int}(A)\subseteq\operatorname{int}(B)&\Leftrightarrow\operatorname{cl}(X-B)\subseteq\operatorname{cl}(X-A)\\&\Leftrightarrow\operatorname{cl}((X-B)\cap(X-A))\subseteq\operatorname{cl}(X-B)\cap\operatorname{cl}(X-A)\\&\Leftrightarrow X-(\operatorname{cl}(X-B)\cap\operatorname{cl}(X-A))\subseteq X-\operatorname{cl}((X-B)\cap(X-A))\\&\Leftrightarrow\operatorname{int}(A)\cup\operatorname{int}(B)\subseteq\operatorname{int}(A\cup B)\end{aligned}$$

olduğu kolayca görülür.

($\mathbf{I}_1 \Leftrightarrow \mathbf{I}_1''$) $\operatorname{int}(A)=X-(\operatorname{cl}(X-A))$ ve $\operatorname{int}(B)=X-(\operatorname{cl}(X-B))$ ve $(\mathbf{K}_1 \Leftrightarrow \mathbf{K}_1')$ olduğundan

$$\begin{aligned}A\subseteq B\Rightarrow\operatorname{int}(A)\subseteq\operatorname{int}(B)&\Leftrightarrow\operatorname{cl}(X-B)\subseteq\operatorname{cl}(X-A)\\&\Leftrightarrow\operatorname{cl}(X-B)\cup\operatorname{cl}(X-A)\subseteq\operatorname{cl}((X-B)\cup(X-A))\\&\Leftrightarrow X-(\operatorname{cl}(X-B)\cup\operatorname{cl}(X-A))\supseteq X-(\operatorname{cl}((X-B)\cup(X-A)))\\&\Leftrightarrow X-(\operatorname{cl}(X-B)\cup\operatorname{cl}(X-A))\supseteq X-(\operatorname{cl}((X-B)\cup(X-A)))\\&\Leftrightarrow\operatorname{int}(A)\cap\operatorname{int}(B)\supseteq\operatorname{int}(A\cap B)\end{aligned}$$

sağlanır.

Önerme 2.1.3. (X,cl) uzayının bir izotonik uzay olması için gerek ve yeter şart $\operatorname{int}:P(X)\to P(X)$ iç operatörünün aşağıdaki şartları sağlamasıdır [23].

i) $\quad \operatorname{int}(X)=X$,

ii) $\quad A\subseteq B\Rightarrow\operatorname{int}(A)\subseteq\operatorname{int}(B)$.

İspat. $(\Rightarrow:)$ (X,cl) uzayı bir izotonik uzay olsun.

i) $\quad \operatorname{int}(X)=X-\operatorname{cl}(X-X)=X-\operatorname{cl}(\varnothing)=X-\varnothing=X$ bulunur.

ii) $\forall A,B\in X$ için $A\subseteq B$ ise $X-A\supseteq X-B$ sağlanır ve (X,cl) izotonik uzay olduğunda $\mathrm{cl}(X-B)\subseteq \mathrm{cl}(X-A)$ olur. Böylece $X-\mathrm{cl}(X-B)\supseteq X-\mathrm{cl}(X-A)$ olup $\mathrm{int}(A)\subseteq \mathrm{int}(B)$ elde edilir.

$(\Leftarrow:)$ Varsayalım $\mathrm{int}:P(X)\to P(X)$ iç operatörü için $\mathrm{int}(X)=X$ olsun. O halde $\mathrm{cl}(\varnothing)=X-\mathrm{int}(X-\varnothing)=X-X=\varnothing$ bulunur. Ayrıca $A\subseteq B$ iken $\mathrm{int}(A)\subseteq \mathrm{int}(B)$ olsun. Bu durumda $X-A\supseteq X-B$ iken $\mathrm{int}(X-B)\subseteq \mathrm{int}(X-A)$ olur ki buradan $X-\mathrm{int}(X-A)\subseteq X-\mathrm{int}(X-B)$ yani $\mathrm{cl}(A)\subseteq \mathrm{cl}(B)$ olduğu görülür. Sonuç olarak (X,cl) izotonik uzay olur.

Tanım 2.1.5. cl ve int sırasıyla X ’de kapanış ve iç operatörü olmak üzere her $x\in X$ için,

$$\mathcal{N}(x)=\{N\in P(X):x\in \mathrm{int}(N)\}$$

şeklinde tanımlanan $\mathcal{N}:X\to P(P(X))$ operatörü komşuluk operatörüdür [23].

Eğer her $x\in A$ için her $V\in\mathcal{N}(x)$ ise V kümesi A kümesinin komşuluğudur.

Önerme 2.1.4. (X,cl) uzayında $A\subseteq X$ olmak üzere $V\in\mathcal{N}(A)$ olması için gerek ve yeter şart $A\subseteq \mathrm{int}(V)$ olmasıdır [23].

İspat. $V\in\mathcal{N}(A)\Leftrightarrow \forall x\in A$ için $V\in\mathcal{N}(x)\Leftrightarrow x\in \mathrm{int}(V)\Leftrightarrow A\subseteq \mathrm{int}(V)$ olmasıdır. Böylece ispat tamamlanır.

Önerme 2.1.5. (X,cl) uzayında $\mathcal{N}$ komşuluk operatörü olsun. $x\in \mathrm{cl}(A)$ olması için gerek ve yeter şart $(X-A)\notin\mathcal{N}(x)$ olmasıdır [23].

İspat. $B=(X-A)$ olarak gösterilsin. Öyleyse

$$\begin{aligned} x\in \mathrm{cl}(A) &\Leftrightarrow x\in \mathrm{cl}(X-B)\\ &\Leftrightarrow x\notin X-\mathrm{cl}(X-B)=\mathrm{int}(B)\\ &\Leftrightarrow B\notin N(x)\\ &\Leftrightarrow (X-A)\notin \mathcal{N}(x)\end{aligned}$$

bulunur.

Önerme 2.1.6. (X,cl) uzayının bir izotonik uzay olması için gerek ve yeter şart $\mathcal{N}:X\to P(P(X))$ komşuluk operatörünün aşağıdaki şartları sağlamasıdır [23].

N_0) $\forall x\in X$ için $X\in N(x)$,

N_1) $N\in \mathcal{N}(x), N\subseteq N' \Rightarrow N'\in \mathcal{N}(x)$.

İspat. $(\Rightarrow:)$ (X,cl) uzayı bir izotonik uzay olsun.

N_0) $\forall x\in X$ için $\mathrm{int}(X)=X$ olduğundan $x\in \mathrm{int}(X)$ ise $X\in N(x)$ sağlanır.

N_1) $N\in N(x)$ ve $N\subseteq N'$ olsun. $x\in \mathrm{int}(N)$ ve $N\subseteq N'$ iken, $\mathrm{int}(N)\subseteq \mathrm{int}(N')$ olduğundan $x\in \mathrm{int}(N')$ bulunur. Buradan, $N'\in N(x)$ bulunur.

$(\Leftarrow:)$ $\forall x\in X$ için $X\in N(x)$ ve $N\in N(x), N\subseteq N'\Rightarrow N'\in N(x)$ olsun.

$\forall x\in X$ için $X\in N(x)$ olsun. Bu durumda $x\in \mathrm{int}(X)\Rightarrow X\subseteq \mathrm{int}(X)$ olur. Ayrıca $x\in \mathrm{int}(X)\Rightarrow x\in X$ olduğundan $\mathrm{int}(X)\subseteq X$ dir. Buradan $\mathrm{int}(X)=X$ bulunur.

$x\in \mathrm{int}(N)$ ve $N\subseteq N'$ iken, $\mathrm{int}(N)\subseteq \mathrm{int}(N')$ olsun. $x\in \mathrm{int}(N)$ ise $x\in \mathrm{int}(N')$ olur. $A\subseteq B$ olacak şekilde herhangi $A,B\in P(X)$ alalım. $x\in \mathrm{int}(A)$ olsun. O halde $A\in N(x)$ olur. $A\subseteq B$ olduğundan $B\in N(x)$ dir. Böylece $x\in \mathrm{int}(B)$ olur. Sonuç olarak $\mathrm{int}(A)\subseteq \mathrm{int}(B)$ bulunur.

Önerme 2.1.7. (X,cl) bir uzay ve her $A \subseteq X$

$$\mathrm{c}(A)=\{x \in X : \forall N \in \mathcal{N}(x), A \cap N \neq \varnothing\}$$

olsun.

i) $\mathrm{c}(A) \subseteq \mathrm{cl}(A)$ dir.

ii) $\mathrm{c} : P(X) \to P(X)$ izotoniktir.

iii) $\mathrm{c}(A)=\mathrm{cl}(A) \Leftrightarrow \mathrm{cl}$ izotoniktir [46].

Tanım 2.1.6. (X,cl) uzayı ve $Y \subseteq X$ verilsin.

$$\begin{aligned} \mathrm{cl}_Y : P(Y) &\to P(Y) \\ A &\to Y \cap \mathrm{cl}(A) \end{aligned}$$

operatörü cl kapanış operatörünün Y üzerine indirgenmesidir. (Y,cl_Y) uzayına (X,cl) uzayının alt uzayı denir [24].

İndirgenmiş iç operatörü int_Y ile gösterilmek üzere $A \subseteq Y$ için

$$\mathrm{int}_Y(A) = X - \mathrm{cl}_Y(X - A) = Y \cap \mathrm{int}\big(A \cup (X - Y)\big)$$

dir. İndirgenmiş komşuluk operatörü $\mathcal{N}_Y$ olmak üzere $A \subseteq Y$ için

$$\mathcal{N}_Y(A) = \{N \cap Y : N \in \mathcal{N}(A)\}$$

dır. Bu tanımların sonucu kümelerde işlemlerin özellikleri yardımıyla kolayca ispatlanabilen aşağıdaki önerme verilebilir.

Önerme 2.1.8. Her (X,cl) uzayı için K_0, K_1, K_2, K_3 kalıtsal özelliktir [24].

2.2. İzotonik Uzaylarda Sürekli Dönüşümler

Bu bölümde bir izotonik uzaydan diğerine tanımlı sürekli operatörü tanıtmak üzere öncelikle iki genelleştirilmiş kapanış uzay arasında tanımlı olan sürekli operatör kavramı ifade edilmiştir.

Tanım 2.2.1. (X,cl) ve (Y,cl') iki uzay ve $f: X \to Y$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $A \subseteq P(X)$ için $x \in \mathrm{cl}(A)$ iken $f(x) \in \mathrm{cl}'(f(A))$ ise f dönüşümü $x \in X$ noktasında süreklidir denir [47].

Eğer $f: X \to Y$ her $x \in X$ noktasında sürekli ise f süreklidir denir veya bu tanıma denk olan aşağıdaki tanım verilebilir.

Tanım 2.2.2. (X,cl) ve (Y,cl') iki uzay olsun. Eğer her $A \in P(X)$ için $f(\mathrm{cl}(A)) \subseteq \mathrm{cl}'(f(A))$ ise $f: X \to Y$ dönüşümü süreklidir [47].

Örnek 2.2.1. cl ve cl' X üzerinde iki kapanış operatörü olsun. $\mathrm{I}:(X,\mathrm{cl}) \to (X,\mathrm{cl}')$ özdeşlik dönüşümünün sürekli olması için gerek ve yeter şart cl operatörünün cl' operatöründen daha kaba olmasıdır [48].

Önerme 2.2.1. (X,cl) ve (Y,cl') iki izotonik uzay olsun. Her $B \in P(Y)$ için $\mathrm{cl}(f^{-1}(B)) \subseteq f^{-1}(\mathrm{cl}'(B))$ dir ancak ve ancak $f: X \to Y$ dönüşümü süreklidir [23].

İspat. $(\Rightarrow:)$ Her $B \in P(Y)$ için $\mathrm{cl}(f^{-1}(B)) \subseteq f^{-1}(\mathrm{cl}'(B))$ olsun. $A = f^{-1}(B)$ alınsın. Böylece $\mathrm{cl}(A) = \mathrm{cl}(f^{-1}(B)) \subseteq f^{-1}(\mathrm{cl}'(B))$ elde edilir. Buradan

$f(\mathrm{cl}(f^{-1}(B))) \subseteq f(f^{-1}(\mathrm{cl}'(B)))$ olup $f(\mathrm{cl}(A)) \subseteq \mathrm{cl}'(f(A))$ bulunur.

$(\Leftarrow:)$ Kabul edelim ki $f: X \to Y$ dönüşümü sürekli olsun. Bu durumda her $A \in P(X)$ için $f(\mathrm{cl}(A)) \subseteq \mathrm{cl}'(f(A))$ olur. $f^{-1}(B) = A$ alınsın. O halde $\mathrm{cl}(f^{-1}(B)) = \mathrm{cl}(A)$ olup $f(\mathrm{cl}(f^{-1}(B))) = f(\mathrm{cl}(A))$ bulunur. Kabulümüzden

$f\left(\mathrm{cl}\left(f^{-1}(B)\right)\right)=f\left(\mathrm{cl}(A)\right)\subseteq \mathrm{cl}'\left(f(A)\right)$ olup $\mathrm{cl}\left(f^{-1}(B)\right)\subseteq f^{-1}\left(\mathrm{cl}'\left(f(A)\right)\right)$ elde edilir. Sonuç olarak $\mathrm{cl}\left(f^{-1}(B)\right)\subseteq f^{-1}\left(\mathrm{cl}'(B)\right)$ bulunur.

Önerme 2.2.2. X, Y ve Z izotonik uzayları olmak üzere $f:X\rightarrow Y$ ve $g:Y\rightarrow Z$ sürekli dönüşüm olsun. $g\circ f:X\rightarrow Z$ süreklidir [23].

İspat. f sürekli olduğundan her $A\in P(X)$ ve her $x\in \mathrm{cl}(A)$ için $f(x)\in \mathrm{cl}\left(f(A)\right)$ dir. Ayrıca g sürekli olduğundan $g\left(f(x)\right)\in \mathrm{cl}\left(g\left(f(A)\right)\right)$ dir. $g\circ f(x)=g\left(f(x)\right)$ ve $g\circ f(A)=g\left(f(A)\right)$ olduğundan $g\circ f$ süreklidir [13].

Önerme 2.2.3. (X,cl) ve (Y,cl') iki izotonik uzay olsun. $f:X\rightarrow Y$ dönüşümü için aşağıdakiler denktir [46].

i) f süreklidir.

ii) $\forall B\in P(Y)$ için $f^{-1}\left(\mathrm{int}(B)\right)\subseteq \mathrm{int}\left(f^{-1}(B)\right)$ dir

iii) $\forall B\in P(Y)$ için $B\in \mathcal{N}\left(f(x)\right)$ ise $f^{-1}(B)\in \mathcal{N}(x)$ dir.

İspat. $(\mathrm{i}\Rightarrow \mathrm{ii})$ f sürekli olsun. Öyleyse $\forall B\in P(Y)$ için $\mathrm{cl}\left(f^{-1}(B)\right)\subseteq f^{-1}\left(\mathrm{cl}(B)\right)$ olur. Ayrıca $f^{-1}\left(\mathrm{int}(B)\right)=f^{-1}\left(Y-\mathrm{cl}(Y-B)\right)=X-f^{-1}\left(\mathrm{cl}(Y-B)\right)$ olup kabulden

$$X-f^{-1}\left(\mathrm{cl}(Y-B)\right)\subseteq X-\mathrm{cl}\left(f^{-1}(Y-B)\right)$$

sağlanır. $X-\mathrm{cl}\left(f^{-1}(Y-B)\right)=X-\mathrm{cl}\left(X-f^{-1}(B)\right)=\mathrm{int}\left(f^{-1}(B)\right)$ eşitliği de göz önüne alınırsa ispat tamamlanır.

$(\mathrm{ii}\Rightarrow \mathrm{iii})$ Varsayalım $\forall B\in P(Y)$ için $f^{-1}\left(\mathrm{int}(B)\right)\subseteq \mathrm{int}\left(f^{-1}(B)\right)$ sağlansın. $B\in \mathcal{N}\left(f(x)\right)$ alalım. O halde $f(x)\in \mathrm{int}(B)$ olur. Buradan $x\in f^{-1}\left(\mathrm{int}(B)\right)\subseteq \mathrm{int}\left(f^{-1}(B)\right)$ olup $x\in \mathrm{int}\left(f^{-1}(B)\right)$ yani $f^{-1}(B)\in \mathcal{N}(x)$ bulunur

$(\text{iii} \Rightarrow \text{i})$ $\forall B \in P(Y)$ için $B \in \mathcal{N}(f(x))$ iken $f^{-1}(B) \in \mathcal{N}(x)$ olsun. $x \in \text{cl}(f^{-1}(B))$ alalım. O halde $\text{cl}(f^{-1}(B)) = X - \text{int}(f^{-1}(Y-B))$ olduğunu göz önüne alırsak $x \in X - \text{int}(f^{-1}(Y-B))$ dolayısıyla $x \notin \text{int}(f^{-1}(Y-B))$ olduğu görülür ki buradan $f^{-1}(Y-B) = X - f^{-1}(B) \notin \mathcal{N}(x)$ elde edilir. Kabulümüzden $f^{-1}(Y-B) \notin \mathcal{N}(x)$ olması $(Y-B) \notin \mathcal{N}(f(x))$ olmasını gerektirir. Bu ise $f(x) \notin \text{int}(Y-B)$ demektir. Böylece $f(x) \in Y - (\text{int}(Y-B)) = \text{cl}(B)$ olduğundan $x \in f^{-1}(\text{cl}(B))$ bulunur. Sonuç olarak $\text{cl}(f^{-1}(B)) \subseteq f^{-1}(\text{cl}(B))$ elde edilir.

Tanım 2.2.3. (X, cl) ve (Y, cl') iki uzay olsun. $f : X \to Y$ homeomorfizmdir ancak ve ancak f birebir, örten, sürekli ve f^{-1} süreklidir. Ayrıca X ve Y uzayları homeomorfiktir denir [1].

Eğer X uzayında sağlanan bir özellik X 'e homeomorfik olan uzay da sağlanıyorsa bu özellik topolojik özellik olarak adlandırılır.

Önerme 2.2.4. (X, cl) ve (Y, cl') izotonik uzayları ve $f : (X, \text{cl}) \to (Y, \text{cl}')$ birebir ve örten dönüşüm olsun. X ve Y izotonik uzaylarının homeomorfik olması için gerek ve yeter şart her $A \in P(X)$ için $f(\text{cl}(A)) = \text{cl}'(f(A))$ olmasıdır [23].

2.3. İzotonik Uzaylarda Ayırma Aksiyomları

Bu bölümde (X, cl) genelleştirilmiş kapanış uzaylarında ayırma aksiyomları tanımları verilerek izotonik uzaylarda ayırma özellikleri karakterize edilmiştir.

Tanım 2.3.1. (X, cl) uzayında $x \neq y$ olmak üzere her $x, y \in X$ için $y \notin N_x$ olacak şekilde $N_x \in \mathcal{N}(x)$ ya da $x \notin N_y$ olacak şekilde $N_y \in \mathcal{N}(y)$ varsa (X, cl) uzayı $T_0 -$uzayı olarak adlandırılır [23].

Önerme 2.3.1. (X,cl) izotonik uzayının T_0-uzayı olması için gerek ve yeter şart $x \neq y$ olmak üzere her $x,y \in X$ için $y \notin \mathrm{cl}(\{x\})$ ya da $x \notin \mathrm{cl}(\{y\})$ olmasıdır [23].

İspat. $(\Rightarrow:)$ (X,cl) izotonik uzayının T_0-uzayı olsun. O halde $x \neq y$ olmak üzere her $x,y \in X$ için $y \notin N_x$ olacak şekilde $N_x \in \mathcal{N}(x)$ vardır. Ayrıca cl operatörü izotonik olduğundan Önerme 2.1.7'den

$$\mathrm{cl}(\{x\}) = \{y : \forall N_y \in \mathcal{N}(y), N_y \cap \{x\} \neq \varnothing\} = \{y : x \in \mathcal{N}(x)\}$$

dir. Buradan $y \in N_x$ olması için gerek ve yeter şart $y \in \mathrm{cl}(\{x\})$ olmasıdır. $y \notin N_x$ olduğundan $y \notin \mathrm{cl}(\{x\})$ bulunur. $x \notin \mathrm{cl}(\{y\})$ durumu da benzer şekilde gösterilir.

$(\Leftarrow:)$ X kümesinde $x \neq y$ olmak üzere her $x,y \in X$ için $y \notin \mathrm{cl}(\{x\})$ olsun. Diğer taraftan $\mathrm{cl}(\{x\}) = \{y : \forall N_y \in \mathcal{N}(y), N_y \cap \{x\} \neq \varnothing\} = \{y : x \in \mathcal{N}(x)\}$ dir. Yani $y \in N_x$ dir ancak ve ancak $y \in \mathrm{cl}(\{x\})$ dir. Kabulümüz gereği $y \notin \mathrm{cl}(\{x\})$ olduğundan $y \notin N_x$ elde edilir.

Tanım 2.3.2. (X,cl) uzayında $x \neq y$ olmak üzere her $x,y \in X$ için $y \notin N'$ ve $x \notin N''$ olacak şekilde $N' \in \mathcal{N}(x)$ ve $N'' \in \mathcal{N}(y)$ varsa (X,cl) uzayı T_1-uzayı olarak adlandırılır [1].

Önerme 2.3.2. (X,cl) izotonik uzayının T_1-uzayı olması için gerek ve yeter şart her $x \in X$ için $\mathrm{cl}(\{x\}) \subseteq \{x\}$ olmasıdır [23].

İspat. $(\Rightarrow:)$ (X,cl) izotonik uzayının T_1-uzayı olsun. her $x \in X$ için $\mathrm{cl}(\{x\}) \subseteq \{x\}$ olduğunu yani $X-\{x\} \subseteq X-\mathrm{cl}(\{x\}) = \mathrm{int}(X-\{x\})$ olduğunu gösterelim. Öyleyse $y \in X-\{x\}$ alınsın. Bu durumda $x \neq y$ olur. X T_1-uzayı olduğundan $y \notin U$ ve $x \notin V$ olacak şekilde $U \in \mathcal{N}(x)$ ve $V \in \mathcal{N}(y)$ vardır. Bu durumda $x \in \mathrm{int}(U)$ ve

$y \in \text{int}(V)$ bulunur. Ayrıca $x \in X - \{x\}$ iken $x \notin V$ olduğundan $V \subseteq X - \{x\}$ bulunur. (X, cl) izotonik uzayı olduğundan $\text{int}(V) \subseteq \text{int}(X - \{x\})$ olup $y \in \text{int}(X - \{x\})$ bulunmuş olur. Sonuç olarak her $x \in X$ için $X - \{x\} \subseteq \text{int}(X - \{x\})$ dolayısıyla $\text{cl}(\{x\}) \subseteq \{x\}$ elde edilir.

$(\Leftarrow:)$ Her $x \in X$ için $\text{cl}(\{x\}) \subseteq \{x\}$ olsun. Öyleyse $X - \{x\} \subseteq \text{int}(X - \{x\})$ olur. (X, cl) izotonik uzayının T_1-uzayı olduğunu göstermek için $x \neq y$ olacak şekilde $x, y \in X$ alınsın. Bu durumda $x \notin X - \{x\}$ dir ancak $y \in X - \{x\}$ olur. Kabulümüzden $y \in \text{int}(X - \{x\})$ olup $X - \{x\} \in \mathcal{N}(y)$ bulunur. Benzer şekilde $y \notin X - \{y\}$ dir ancak $x \in X - \{y\}$ olur. Kabulümüzden $x \in \text{int}(X - \{y\})$ olup $X - \{y\} \in \mathcal{N}(x)$ bulunur. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Tanım 2.3.3. (X, cl) uzayında $x \neq y$ olmak üzere her $x, y \in X$ için $N' \cap N'' = \varnothing$ olacak şekilde $N' \in \mathcal{N}(x)$ ve $N'' \in \mathcal{N}(y)$ varsa (X, cl) uzayı T_2-uzayı olarak adlandırılır [23].

Önerme 2.3.3. (X, cl) izotonik uzayının T_2-uzayı olması için gerek ve yeter şart $x \neq y$ olmak üzere her $x, y \in X$ için $y \notin \text{cl}(U)$ olacak şekilde bir $U \in \mathcal{N}(x)$ var olmasıdır [23].

İspat. (X, cl) izotonik uzayında herhangi farklı iki x ve y noktasını alalım. Kabul edelim ki (X, cl), T_2-uzayı olsun. O halde $U \cap V = \varnothing$ olacak şeklide $U \in \mathcal{N}(x)$ ve $V \in \mathcal{N}(y)$dir. Buradan $V \subseteq (X - U)$ bulunur. O halde (X, cl) izotonik uzay olduğundan $y \in \text{int}(V) \subseteq \text{int}(X - U)$ olup $(X - U) \in \mathcal{N}(y)$ olacak şekilde $U \in \mathcal{N}(x)$ vardır. Buradan $y \notin \text{cl}(U)$ olacak şekilde $U \in \mathcal{N}(x)$ bulunur. Tersi de benzer şekilde gösterilir.

Tanım 2.3.4. (X,cl) uzayında $x \neq y$ olmak üzere her $x, y \in X$ için $\mathrm{cl}(N') \cap \mathrm{cl}(N'') = \varnothing$ olacak şekilde $N' \in \mathcal{N}(x)$ ve $N'' \in \mathcal{N}(y)$ varsa (X,cl) uzayı $T_{2\frac{1}{2}}$ – uzayı olarak adlandırılır [23].

Önerme 2.3.4. Her izotonik uzay için T_0, T_1, T_2 ve $T_{2\frac{1}{2}}$ aksiyomları topolojik özelliktir [23].

İspat. (X,cl) ve (Y,cl') iki izotonik uzay ve $f : X \to Y$ homeomorfizm olsun.

i) T_0 – uzayı için:

(X,cl) T_0 – uzayı olsun. Y uzayında $x \neq y$ noktaları için X uzayında $f^{-1}(x) \neq f^{-1}(y)$ olur. Buradan $f^{-1}(y) \notin \mathrm{cl}\left(\left\{f^{-1}(x)\right\}\right)$ ya da $f^{-1}(x) \notin \mathrm{cl}\left(\left\{f^{-1}(y)\right\}\right)$ olduğundan sırasıyla $f\left(f^{-1}(y)\right) = y \notin f\left(\mathrm{cl}\left(\left\{f^{-1}(x)\right\}\right)\right) = \mathrm{cl}'\left(f\left(\left\{f^{-1}(x)\right\}\right)\right) = \mathrm{cl}'\left(\{x\}\right)$ ya da $f\left(f^{-1}(x)\right) = x \notin f\left(\mathrm{cl}\left(\left\{f^{-1}(y)\right\}\right)\right) = \mathrm{cl}'\left(f\left(\left\{f^{-1}(y)\right\}\right)\right) = \mathrm{cl}'\left(\{y\}\right)$ bulunur. Sonuç olarak (Y,cl') T_0 – uzayı elde edilir.

ii) T_1 – uzayı için:

(X,cl) T_1 – uzayı ve $y \in Y$ olsun. O halde $f^{-1}(y) \in X$ olup $\mathrm{cl}\left(\left\{f^{-1}(y)\right\}\right) \subseteq \left\{f^{-1}(y)\right\}$ dir. Buradan $\mathrm{cl}'\left(\{y\}\right) = \mathrm{cl}'\left(f\left(\left\{f^{-1}(y)\right\}\right)\right) = f\left(\mathrm{cl}\left(\left\{f^{-1}(y)\right\}\right)\right) \subseteq f\left(\left\{f^{-1}(y)\right\}\right) = \{y\}$ elde edilir. Böylece (Y,cl') T_1 – uzayı bulunur.

iii) T_2 – uzayı için:

(X,cl) T_2 – uzayı olsun. Y kümesinde $x \neq y$ noktaları için X kümesinde $f^{-1}(x) \neq f^{-1}(y)$ olur. Kabulümüzden $N' \cap N'' = \varnothing$ olacak şekilde

$N' \in \mathcal{N}\left(f^{-1}(x)\right)$ ve $N'' \in \mathcal{N}\left(f^{-1}(y)\right)$ kümeleri vardır. Buradan $f(N') \cap f(N'') = \varnothing$ olacak şekilde $f(N') \in \mathcal{N}(x)$ ve $f(N'') \in \mathcal{N}(y)$ kümeleri bulunur. Böylece (Y, cl') T_2-uzayı olduğu görülür.

iv) $T_{2\frac{1}{2}}-$uzayı için:

Kabul edelim ki (X, cl) $T_{2\frac{1}{2}}-$uzayı ve $x \neq y$ olmak üzere $x, y \in Y$ olsun. Buradan $\mathrm{cl}(N') \cap \mathrm{cl}(N'') = \varnothing$ olacak şekilde $N' \in \mathcal{N}\left(f^{-1}(x)\right)$ ve $N'' \in \mathcal{N}\left(f^{-1}(y)\right)$ kümeleri vardır. O halde $\mathrm{cl}'\left(f(N') \cap f(N'')\right) = \mathrm{cl}'\left(f(N')\right) \cap \mathrm{cl}'\left(f(N'')\right) = \varnothing$ olacak şekilde $f(N') \in \mathcal{N}(x)$ ve $f(N'') \in \mathcal{N}(y)$ kümeleri bulunur. Sonuç olarak (Y, cl') $T_{2\frac{1}{2}}-$uzayıdır.

Tanım 2.3.5. (X, cl) uzayında her $x \in X$ ve boştan farklı her $A \subset P(X)$ kümesi için $x \notin \mathrm{cl}(A)$ olmak üzere $N' \cap N'' = \varnothing$ olacak şekilde $N' \in \mathcal{N}(x)$ ve $N'' \in \mathcal{N}(A)$ varsa (X, cl) uzayı regülerdir denir [23].

Aynı zamanda (X, cl) uzayı regüler ve T_0 ise T_3-uzayıdır.

Önerme 2.3.5. (X, cl) bir izotonik uzayda aşağıdakiler denktir [23].

i) (X, cl) regüler uzaydır.

ii) Her $x \in X$ ve $\forall N \in \mathcal{N}(x)$ için $\mathrm{cl}(U) \subseteq N$ olacak şekilde $U \in \mathcal{N}(x)$ vardır.

İspat. $(\mathrm{i} \Rightarrow \mathrm{ii})$ (X, cl) izotonik uzayı regüler olsun. $\forall x \in X$ ve $x \notin \mathrm{cl}(A)$ olmak üzere boştan farklı $\forall A \in P(X)$ kümesi için $U \cap V = \varnothing$ olacak şekilde $U \in \mathcal{N}(x)$ ve $V \in \mathcal{N}(A)$ vardır. Herhangi $x \in X$ ve $N \in \mathcal{N}(x)$ alalım. Bu durumda $x \in \mathrm{int}(N)$ olur. Öyleyse $x \notin X - \mathrm{int}(N) = \mathrm{cl}(X - N)$ bulunur. Kabulden

$U \cap V = \varnothing$ olacak şekilde $U \in \mathcal{N}(x)$ ve $V \in \mathcal{N}(X-N)$ vardır. $U \cap V = \varnothing$ olduğundan $U \subseteq (X-V)$ dir. cl izotonik olduğundan $\mathrm{cl}(U) \subseteq \mathrm{cl}(X-V)$ yani $X-\mathrm{cl}(U) \supseteq X-\mathrm{cl}(X-V) = \mathrm{int}(V)$ bulunur. $V \in \mathcal{N}(X-N)$ ve $V \in \mathcal{N}(A) \Rightarrow A \in \mathrm{int}(V)$ olduğundan $X-N \subseteq \mathrm{int}(V) \subseteq X-\mathrm{cl}(U)$ bulunur. Sonuç olarak $\mathrm{cl}(U) \subseteq N$ olacak şekilde $U \in \mathcal{N}(x)$ elde edilmiş olur.

$(\mathrm{ii} \Rightarrow \mathrm{i})$ $\forall x \in X$ ve $\forall N \in \mathcal{N}(x)$ için $\mathrm{cl}(U) \subseteq N$ olacak şekilde $U \in \mathcal{N}(x)$ olsun.

$x \notin \mathrm{cl}(A)$ olacak şekilde herhangi $A \in P(X)$ alalım. O zaman $x \in X-\mathrm{cl}(A) = \mathrm{int}(X-A)$ olur. Böylece $X-A \in \mathcal{N}(x)$ dir. Kabulümüzden $\mathrm{cl}(U) \subseteq X-A$ olacak şekilde $U \in \mathcal{N}(x)$ vardır. $A \subseteq X-\mathrm{cl}(U)$ olur ki $X-\mathrm{cl}(U) = V$ dersek $U \cap V = \varnothing$ olacak şekilde $U \in \mathcal{N}(x)$ ve $V \in \mathcal{N}(A)$ bulunmuş olur, yani (X,cl) regüler uzaydır.

Tanım 2.3.6. X bir uzay ve $A, B \subseteq X$ olsun. Eğer $f(A) \subseteq \{0\}$ ve $f(X-B) \subseteq \{1\}$ olacak şekilde $f : X \to [0,1]$ sürekli fonksiyonu varsa A kümesi B kümesinin tamamen içindedir denir ve $A \Subset B$ şeklinde gösterilir [23].

Önerme 2.3.6. X bir uzay ve $A \Subset B$ olacak şekilde $A, B \subseteq X$ olsun. Bu durumda $A \subseteq B$ dir [23].

Önerme 2.3.7. (X,cl) izotonik uzay olsun. Eğer $A \Subset B$ ise $A \cup \mathrm{cl}(A) \Subset \mathrm{int}(B) \cap B$ dir [23].

Tanım 2.3.7. (X,cl) bir uzay olsun. $\forall x \in X$ ve $\forall N \in \mathcal{N}(x)$ için $N' \Subset N$ olacak şekilde $N' \in \mathcal{N}(x)$ varsa (X,cl) tamamen regülerdir denir [24].

Ayrıca (X,cl) izotonik uzayı tamamen regüler ve T_1 ise $T_{3\frac{1}{2}}$ – uzayıdır.

Önerme 2.3.8. Her tamamen regüler izotonik uzay regülerdir yani $T_{3\frac{1}{2}}$ – uzayı ise T_3 – uzayıdır.

İspat. (X,cl) izotonik uzayı tamamen regüler olsun. $x \in X$ noktası için her $N \in \mathcal{N}(x)$ için $U \Subset N$ olacak şekilde $U \in \mathcal{N}(x)$ vardır. Önerme 2.3.6 ve Önerme 2.3.7 gereği sırasıyla

$$U \cup \mathrm{cl}(U) \Subset \mathrm{int}(N) \cap N \text{ ve } U \cup \mathrm{cl}(U) \subseteq \mathrm{int}(N) \cap N$$

olduğundan $\mathrm{cl}(U) \subseteq N$ elde edilir. Sonuç olarak X regüler bulunur.

Önerme 2.3.9. Her izotonik uzay için regülerlik, tamamen regülerlik T_3 ve $T_{3\frac{1}{2}}$ – uzayı olmak topolojik özelliktir [23].

İspat. (X,cl) ve (Y,cl') iki izotonik uzay ve $f : X \to Y$ homeomorfizm olsun.

i) Regüler uzay için:

(X,cl) T_3 – uzayı olsun. Bu durumda X regüler ve T_0 – uzayıdır. $y \in Y$ ve $y \notin \mathrm{cl}'(A)$ olacak şekilde $A \subseteq Y$ kümesi alınsın. O halde $f^{-1}(y) \notin f^{-1}(\mathrm{cl}'(A)) = \mathrm{cl}(f^{-1}(A))$ dir. X uzayı regüler olduğundan $U \cap V = \varnothing$ olmak üzere $U \in \mathcal{N}(f^{-1}(y))$ ve $V \in \mathcal{N}(f^{-1}(A))$ kümeleri vardır. Buradan $f(U) \cap f(V) = \varnothing$ olacak şekilde $f(U) \in \mathcal{N}(y)$ ve $f(V) \in \mathcal{N}(A)$ kümeleri elde edilir. O zaman (Y,cl') regüler bulunur.

ii) T_3 – uzayı için:

(X,cl) uzayı T_3 – uzayı olsun. O halde (X,cl) uzayı regüler ve T_0 – uzayıdır. Önerme 2.3.4'den (Y,cl') uzayı da T_0 olduğundan Y uzayının T_3 – uzayı olduğu kolayca görülür.

iii) Tamamen Regüler uzay için:

(X,cl) uzayı tamamen regüler ve $y \in Y$, $N \in \mathscr{N}'(y)$ olsun. Buradan $f^{-1}(N) \in \mathscr{N}(f^{-1}(y))$ olur. Kabulümüzden $U \Subset f^{-1}(N)$ olmak üzere $U \in \mathscr{N}(f^{-1}(y))$ vardır. O halde $f(U) \Subset N$ olacak şekilde $f(U) \in \mathscr{N}'(y)$ bulunur. Sonuç olarak (Y,cl') tamamen regüler elde edilir.

iv) $T_{3\frac{1}{2}}-$uzayı için:

(X,cl) uzayı $T_{3\frac{1}{2}}-$uzayı olsun. O halde (X,cl) uzayı tamamen regüler ve T_1- uzayıdır. Önerme 2.3.4. den (Y,cl') uzayı da T_1 olduğundan Y uzayının $T_{3\frac{1}{2}}-$uzayı elde edilir.

Tanım 2.3.8. (X,cl) izotonik uzayı olsun.

(TN) Boştan farklı her ayrık kapalı $A,B \subseteq X$ alt kümeleri için $U \cap V = \varnothing$ olacak şekilde $U \in \mathscr{N}(A)$ ve $V \in \mathscr{N}(B)$ varsa, (X,cl) uzayı $t-$ normaldir.

(QN) $\mathrm{cl}(A) \cap \mathrm{cl}(B) = \varnothing$ olacak şekilde boştan farklı her $A,B \subseteq X$ alt kümeleri için $U \cap V = \varnothing$ olacak şekilde $U \in \mathscr{N}(A)$ ve $V \in \mathscr{N}(B)$ varsa (X,cl) uzayı quasi-normaldir.

(N) $\mathrm{cl}(A) \cap \mathrm{cl}(B) = \varnothing$ olacak şekilde boştan farklı her $A,B \subseteq X$ alt kümeleri $U \cap V = \varnothing$ olacak şekilde $U \in \mathscr{N}(\mathrm{cl}(A))$ ve $V \in \mathscr{N}(\mathrm{cl}(B))$ varsa (X,cl) uzayı normaldir [23].

Bu tanım (X,cl) kapanış uzayı içinde geçerlidir.

Önerme 2.3.10. (X,cl) izotonik uzay olsun [23].

i) (N) ise (TN) dir.

ii) (QN) ise (TN) dir.

İspat .

i) $\mathrm{cl}(A)\cap\mathrm{cl}(B)=\varnothing$ olacak şekilde herhangi boştan farklı A ve B kümeleri için $U\cap V=\varnothing$ olacak şekilde $U\in\mathcal{N}(\mathrm{cl}(A))$, $V\in\mathcal{N}(\mathrm{cl}(B))$ var olsun. A ve B ayrık kapalı kümeler alınırsa $A=\mathrm{cl}(A)$ ve $B=\mathrm{cl}(B)$ olduğundan $A\cap B=\mathrm{cl}(A)\cap\mathrm{cl}(B)=\varnothing$ olup kabulden $U\cap V=\varnothing$ olacak şekilde $U\in\mathcal{N}(A)$, $V\in\mathcal{N}(B)$ bulunur.

ii) $\mathrm{cl}(A)\cap\mathrm{cl}(B)=\varnothing$ olacak şekilde boştan farklı her $A,B\subseteq X$ alt kümeleri için $U\cap V=\varnothing$ olacak şekilde $U\in\mathcal{N}(A)$ ve $V\in\mathcal{N}(B)$ var olsun. A ve B ayrık kapalı kümeler alınırsa $A=\mathrm{cl}(A)$ ve $B=\mathrm{cl}(B)$ olduğundan $A\cap B=\mathrm{cl}(A)\cap\mathrm{cl}(B)=\varnothing$ olup kabulümüzden $U\cap V=\varnothing$ olacak şekilde $U\in\mathcal{N}(A)$, $V\in\mathcal{N}(B)$ bulunur.

Tanım 2.3.9. (X,cl) izotonik uzayı T_1 ve (QN) ise T_4-uzayıdır [23].

Tanım 2.3.10. (X,cl) izotonik uzayı olsun. $A,B\subseteq X$ için eğer

$$\mathrm{cl}(A)\cap B=A\cap\mathrm{cl}(B)=\varnothing$$

ise A,B kümeleri yarı ayrıktır denir [23].

Önerme 2.3.11. (X,cl) izotonik uzayı için aşağıdakiler denktir. Her $A,B\subseteq X$ için

i) $A\cap V=U\cap B=\varnothing$ olacak şekilde $U\in\mathcal{N}(A)$ ve $V\in\mathcal{N}(B)$ vardır.

ii) A,B yarı ayrıktır [23].

İspat $(\mathrm{i}\Rightarrow\mathrm{ii})$ (X,cl) izotonik uzayı için $A\cap V=U\cap B=\varnothing$ olacak şekilde $U\in\mathcal{N}(A)$ ve $V\in\mathcal{N}(B)$ bulunsun. Bu durumda $V\subseteq X-A$ ve $U\subseteq X-B$ olur ve cl izotonik olduğundan $B \subseteq \mathrm{int}(V) \subseteq \mathrm{int}(X-A)$ ve $A \subseteq \mathrm{int}(U) \subseteq \mathrm{int}(X-B)$ bulunur. O halde

$$\mathrm{cl}(A) = X - \mathrm{int}(X-A) \subseteq X - B \text{ ve } \mathrm{cl}(B) = X - \mathrm{int}(X-B) \subseteq X - A$$

elde edilir. Buradan $\mathrm{cl}(A) \cap B = A \cap \mathrm{cl}(B) = \varnothing$ olarak bulunur.

$(\mathrm{ii} \Rightarrow \mathrm{i})$ Benzer şekilde gösterilir.

Tanım 2.3.11. (X, cl) uzayı için;

(CN) Eğer her iki yarı ayrık küme ayrıksa, tamamen normaldir [23].

Ayrıca tamamen normal ve T_1 ise T_5-uzayıdır.

Önerme 2.3.12. Her izotonik uzay için (TN), (QN), (N), (CN), T_4 ve T_5 aksiyomları topolojik özelliktir [23].

İspat (X, cl) ve (Y, cl') iki izotonik uzay ve $f: X \to Y$ homeomorfizm olsun.

i) (TN) için:

X t-normal uzay olsun. Y kümesinde A, B iki ayrık kapalı kümeler olsun. Bu durumda $f^{-1}(A)$ ve $f^{-1}(B)$ kümeleri X kümesinde ayrık kapalı kümelerdir. X t-normal uzayı olduğundan $U \cap V = \varnothing$ olacak şekilde $U \in \mathcal{N}(f^{-1}(A))$ ve $V \in \mathcal{N}(f^{-1}(B))$ kümeleri vardır. Önerme 2.2.3'den $f(U) \cap f(V) = \varnothing$ olacak şekilde $f(U) \in \mathcal{N}'(A)$ ve $f(V) \in \mathcal{N}'(B)$ kümeleri bulunur. Sonuç olarak Y t-normal uzayı olarak elde edilir.

ii) (QN) için:

X quasi-normal uzay olsun. Y kümesinde $\mathrm{cl}'(A) \cap \mathrm{cl}'(B) = \varnothing$ olacak şekilde boştan farklı A, B kümeleri alınsın. f homeomorfizm olduğundan

$\mathrm{cl}\left(f^{-1}(A)\right)\cap\mathrm{cl}\left(f^{-1}(B)\right)=\varnothing$ olduğu kolayca görülür. Ayrıca X quasi-normal uzay olduğundan $U\cap V=\varnothing$ olmak üzere $U\in\mathcal{N}\left(f^{-1}(A)\right)$ ve $V\in\mathcal{N}\left(f^{-1}(B)\right)$ kümeleri vardır. O halde $f(U)\cap f(V)=\varnothing$ olacak şekilde $f(U)\in\mathcal{N}'(A)$ ve $f(V)\in\mathcal{N}'(B)$ kümeleri bulunur.

iii) (N) için:

X normal uzay olsun. Y kümesinde $\mathrm{cl}'(A)\cap\mathrm{cl}'(B)=\varnothing$ olacak şekilde boştan farklı A,B kümeleri alınsın. Buradan $\mathrm{cl}\left(f^{-1}(A)\right)\cap\mathrm{cl}\left(f^{-1}(B)\right)=\varnothing$ olup X normal uzay olduğundan $U\cap V=\varnothing$ olacak şekilde $U\in\mathcal{N}\left(\mathrm{cl}\left(f^{-1}(A)\right)\right)$ ve $V\in\mathcal{N}\left(\mathrm{cl}\left(f^{-1}(B)\right)\right)$ kümeleri vardır. Bu durumda $f(U)\cap f(V)=\varnothing$ olacak şekilde $f(U)\in\mathcal{N}'\left(f\left(\mathrm{cl}\left(f^{-1}(A)\right)\right)\right)$ ve $f(V)\in\mathcal{N}'\left(f\left(\mathrm{cl}\left(f^{-1}(B)\right)\right)\right)$ kümeleri elde edilir. f homeomorfizm olduğundan $\mathrm{cl}'(A)=f\left(\mathrm{cl}\left(f^{-1}(A)\right)\right)$ ve $\mathrm{cl}'(B)=f\left(\mathrm{cl}\left(f^{-1}(B)\right)\right)$ olup buradan $f(U)\in\mathcal{N}'\left(\mathrm{cl}'(A)\right)$ ve $f(V)\in\mathcal{N}'\left(\mathrm{cl}'(B)\right)$ kümeleri bulunur.

iv) (CN) için:

X tamamen normal ve $A,B\subset Y$ yarı ayrık iki küme olsun. f sürekli olduğundan $f^{-1}(A)$ ve $f^{-1}(B)$ kümeleri X kümesinde yarı ayrık kümelerdir. X tamamen normal olduğundan $U\cap V=\varnothing$ olacak şekilde $U\in\mathcal{N}\left(f^{-1}(A)\right)$ ve $V\in\mathcal{N}\left(f^{-1}(B)\right)$ kümeleri vardır. Ayrıca f^{-1} sürekli olduğundan $f(U)\cap f(V)=\varnothing$ olacak şekilde $f(U)\in\mathcal{N}'(A)$ ve $f(V)\in\mathcal{N}'(B)$ kümeleri elde edilir. Sonuç olarak A,B kümeleri ayrık bulunur.

v) T_4-uzay için:

Yukarıda yapılan ispatlardan ve Önerme 2.3.4 gereği (X,cl) T_4-uzayı iken (Y,cl') T_4-uzayı bulunur.

vi) T_5-uzay için:

Yukarıda yapılan ispatlardan ve Önerme 2.3.4 gereği (X,cl) T_5-uzayı iken (Y,cl') T_5-uzayı bulunur.

BÖLÜM 3. BİTOPOLOJİK UZAYLAR

3.1. Temel Kavramlar

Bu bölümde bitopolojik uzay ve bitopolojik uzaylarda açık küme, kapalı küme kümenin içi ve dışı kavramları tanıtılmış ve alt bitopolojik uzay kavramına yer verilmiştir.

Tanım 3.1.1. X boştan farklı bir küme olmak üzere τ ve ν, X üzerinde farklı iki topoloji olsun. (X,τ,ν) sıralı üçlüsüne bitopolojik uzay denir [26].

Örnek 3.1.1. $\mathbb{R}$ reel sayılar doğrusu ile üzerinde $\omega_1 = \{\mathbb{R},\varnothing\} \cup \{(a,\infty) : a \in \mathbb{R}\}$ sağ topolojik yapı ve $\omega_2 = \{\mathbb{R},\varnothing\} \cup \{(-\infty,a) : a \in \mathbb{R}\}$ sol topolojik yapı verilsin. Bu durumda $(\mathbb{R},\omega_1,\omega_2)$ üçlüsü bitopolojik uzay oluşturur. Bitopolojik uzay teorisinde $(\mathbb{R},\omega_1,\omega_2)$ uzayı, topolojik uzaylarda $\omega = \{\mathbb{R},\varnothing\} \cup \{(a,b) : a,b \in \mathbb{R}\}$ topolojik yapısı ile verilen $(\mathbb{R},\omega)$ alışılmış uzay ile benzer role sahiptir.

Tanım 3.1.2. (X,τ,ν) bir bitopolojik uzay ve $S \subset X$ olsun. $A_1 \in \tau$ ve $A_2 \in \nu$ olmak üzere $S = A_1 \cup A_2$ şeklinde yazılabiliyorsa S alt kümesine $\tau\nu-$açık küme denir [32].

S kümesi $\tau\nu-$açık küme olmak üzere $F = X - S$ tümleyenine $\tau\nu-$kapalı küme ya da B_1 ve B_2 sırasıyla $\tau-$kapalı ve $\nu-$kapalı küme olmak üzere $F = B_1 \cap B_2$ şeklinde yazılabiliyorsa F alt kümesine $\tau\nu-$kapalı küme denir [32].

Uyarı 3.1.1. (X,τ,ν) bir bitopolojik uzay olsun. $\tau\nu-$açık kümelerin ailesi bir topoloji belirtmek zorunda değildir çünkü $\tau\nu-$açık ($\tau\nu-$kapalı) kümelerin keyfi birleşimi (kesişimi) $\tau\nu-$açık ($\tau\nu-$kapalı) küme olmasına rağmen sonlu kesişimi (birleşimi) $\tau\nu-$açık ($\tau\nu-$kapalı) olmak zorunda değildir [37].

Örnek 3.1.2. $X=\{a,b,c\}, \tau=\{X,\varnothing,\{a,b\}\}$ ve $\nu=\{X,\varnothing,\{b,c\}\}$ olmak üzere $A=\{a,b\}$ ve $B=\{b,c\}$ $\tau\nu$-açıktır ancak $A\cap B=\{b\}$ $\tau\nu$-açık değildir.

Tanım 3.1.3. (X,τ,ν) bitopolojik uzayında bir $\tau\nu-$açık ve bir $\tau\nu-$kapalı kümenin kesişimine ikili yerel kapalı küme denir [49].

Tanım 3.1.4. (X,τ,ν) bir bitopolojik uzay ve $A\subset X$ olsun.

a) A kümesini içeren tüm $\tau\nu-$kapalı kümelerin kesişimine A kümesinin $\tau\nu-$kapanışı denir ve

$$\tau\nu\text{cl}(A)=\bigcap\{F: A\subset F, F\ \ \tau\nu-\text{kapalı}\}$$

şeklinde gösterilir.

b) A kümesini içeren tüm $\tau\nu-$açıkların birleşimine A kümesinin $\tau\nu-$içi denir ve

$$\tau\nu\text{int}(A)=\bigcup\{U: U\subset A, U\ \ \tau\nu-\text{açık}\}$$

şeklinde gösterilir [32].

Örnek 3.1.3. $X=\{a,b,c\}$, $\tau=\{X,\varnothing\{a\}\}$ ve $\nu=\{X,\varnothing\{b\}\}$ olsun. Bu durumda (X,τ,ν) bitopolojik uzayında $\tau\nu-$açık kümelerin ailesi $\{\varnothing,X,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$ ve $\tau\nu-$kapalılar ailesi $\{\varnothing,X,\{b,c\},\{a,c\},\{c\}\}$ olarak bulunur. $\tau_1\tau_2\,\text{int}(\{a,b\})=\{a,b\}$ ve $\tau\,\text{int}(\{a,b\})=\{a\}$ eşitliklerinden $\tau\nu\,\text{int}(\{a,b\})\not\subset\tau\,\text{int}(\{a,b\})$ olduğu görülür.

Önerme 3.1.1. (X,τ,ν) bir bitopolojik uzay ve $U,V\in X$ olsun. Bu durumda aşağıdaki koşullar sağlanır [32];

i) $\tau\,\text{int}(U)\subset\tau\nu\,\text{int}(U)$ ve $\nu\,\text{int}(U)\subset\tau\nu\,\text{int}(U)$,

ii) $\tau\nu\text{cl}(U)\subset\tau\text{cl}(U)$ ve $\tau\nu\text{cl}(U)\subset\nu\text{cl}(U)$,

iii) $\tau\nu\text{cl}(U\cap V)\subset\tau\nu\text{cl}(U)\cap\tau\nu\text{cl}(V)$,

iv) $\tau\nu\,\text{int}(U)\cup\tau\nu\,\text{int}(V)\subset\tau\nu\,\text{int}(U\cup V)$.

İspat. **i)** $x\in\tau\,\text{int}(U)$ olsun. Bu durumda $x\in\bigcup\{V:V\subset U,\ V\in\tau\}$ olur. Biz $x\in\bigcup\{V:V\subset U, V\in\tau\nu-\text{açık}\}$ olduğunu gösterelim. $V\in\tau$ ve $\varnothing\in\nu$ olarak seçilirse $V=V\cup\varnothing$ yazılabildiğinden, V kümesi $\tau\nu-$açık olur. O halde $x\in\bigcup\{V:V\subset U,\ V\in\tau\nu-\text{açık}\}=\tau\nu\,\text{int}(U)$ bulunur.

Benzer şekilde $\nu\,\text{int}(U)\subset\tau\nu\,\text{int}(U)$ olduğu görülür.

ii) $x\in\tau\nu\text{cl}(U)$ olsun. Bu durumda, $x\in\bigcap\{F:U\subset F, F\ \ \tau\nu\text{-kapalı}\}$ olup F $\tau\nu-$kapalı kümeleri U kümesini kapsayan tüm kümelerdir yani $X-F$ kümeleri $\tau\nu-$açıktır. Bu durumda $X-F=A\cup B$ olacak şekilde A $\tau-$açık ve B $\nu-$açık kümeleri vardır. Buradan $F=X-(X-F)=X-(A\cup B)=(X-A)\cap(X-B)$ bulunur. O halde $F\subset(X-A)$ ve $F\subset(X-B)$ dir. Böylece

$$x\in\bigcap\{X-A:U\subset(X-A),(X-A)\quad\tau\text{-kapalı}\}$$

ve

$$x\in\bigcap\{X-B:U\subset(X-B),(X-B)\quad\nu\text{-kapalı}\}$$

elde edilir. Dolayısıyla $\tau\nu\text{cl}(U)\subset\tau\text{cl}(U)$ ve $\tau\nu\text{cl}(U)\subset\nu\text{cl}(U)$ dir.

iii) ve **iv)** benzer şekilde gösterilir.

Tanım 3.1.5. (X,τ,ν) bitopolojik uzayı olsun. $\tau_Y=\{A\cap Y:A\in\tau\}$ ve $\nu_Y=\{B\cap Y:B\in\nu\}$ koleksiyonları $Y\subset X$ uzayının indirgenmiş topolojileridir. (Y,τ_Y,ν_Y) bitopolojik uzayına, (X,τ,ν) bitopolojik uzayının alt uzayı denir [50].

Örnek 3.1.4. $X=\{a,b,c\}$, $\tau=\{X,\varnothing\{a\}\}$ ve $\nu=\{X,\varnothing\{b\}\}$ olsun. $Y=\{b,c\}$ olacak şekilde $Y\subset X$ alalım. $\tau_Y=\{Y,\varnothing\}$ ve $\nu_Y=\{Y,\varnothing,\{b\}\}$ indirgenmiş topolojileri ile (Y,τ_Y,ν_Y) bitopolojik uzayı (X,τ,ν) bitopolojik uzayının alt uzayı olarak bulunur.

3.2. Bitopolojik Uzaylarda Sürekli Dönüşümler

Bu bölümde bitopolojik uzaylar arasında tanımlı dönüşümler ele alınmış ve bisürekliliği ifade edilmiştir.

Tanım 3.2.1. (X,τ_1,τ_2) ve (Y,ν_1,ν_2) bitopolojik uzay olsun. Eğer $f:(X,\tau_i)\to(Y,\nu_i)$ dönüşümü sürekli (açık, kapalı ya da homeomorfizm) ise $f:(X,\tau_1,\tau_2)\to(Y,\nu_1,\nu_2)$ dönüşümü $i-$sürekli ($i-$açık, $i-$kapalı ya da $i-$homeomorfizm) denir [35].

Tanım 3.2.2. (X,τ_1,τ_2) ve (Y,ν_1,ν_2) bitopolojik uzay olsun. Eğer $f:(X,\tau_1,\tau_2)\to(Y,\nu_1,\nu_2)$ dönüşümü $1-$sürekli ve $2-$sürekli ise f dönüşümüne bisüreklidir denir.

f dönüşümü birebir ve örten olsun. Eğer f bisürekli ve f^{-1} bisürekli ise f dönüşümüne bihomeomorfizm denir [51].

Bihomeomorfizmler altında invaryant kalan özellikler bitopolojik özellikler olarak adlandırılır. Böylece bir $\wp$ bitopolojik özelliğinin (X,τ_1,τ_2) bitopolojik uzayında var olması için gerek ve yeter şart (X,τ_1,τ_2) uzayına bihomeomorfik olan her bir bitopolojik uzayında da $\wp$ özelliğinin var olmasıdır [37].

Tanım 3.2.3. (X,τ_1,τ_2) ve (Y,ν_1,ν_2) bitopolojik uzay olsun. Eğer $f:(X,\tau_1,\tau_2)\to(Y,\nu_1,\nu_2)$ dönüşümü için her yerel kapalı kümesinin öngörüntüsü ikili yerel kapalıysa f dönüşümü ikili süreklidir denir [49].

Tanım 3.2.4. (X,τ,ν) bitopolojik uzay ve $(\mathbb{R},\omega)$ alışılmış topolojik uzay olmak üzere $f:X\to\mathbb{R}$ dönüşümü verilsin. Eğer $a\in\mathbb{R}$ için $f^{-1}((a,\infty))=\{x\in X: f(x)>a\}\in\tau$ oluyorsa f dönüşümüne $\tau-$alt yarı sürekli denir. Eğer $a\in\mathbb{R}$ için $f^{-1}((-\infty,a))=\{x\in X: f(x)<a\}\in\tau$ oluyorsa f dönüşümüne $\tau-$üst yarı sürekli denir [52].

Örnek 3.2.1. (X,τ,ν) herhangi bitopolojik uzay ve $c\in\mathbb{R}$ olmak üzere $\forall x\in X$ için $f(x)=c$ olsun. O zaman f dönüşümü hem $\tau-$alt yarı sürekli ve $\tau-$üst yarı süreklidir hem de $\nu-$alt yarı sürekli ve $\nu-$üst yarı süreklidir.

Tanım 3.2.5. (X,τ_1,τ_2) bitopolojik uzay ve $(\mathbb{R},\omega)$ alışılmış topolojik uzay olmak üzere $f:X\to\mathbb{R}$ dönüşümü verilsin. Eğer $i,j\in\{1,2\}$ olmak üzere f dönüşümü $i-$ alt yarı sürekli ve $j-$üst yarı sürekli ise f f dönüşümüne $(i,j)-$alt üst yarı sürekli denir [37].

Önerme 3.2.1. (X,τ_1,τ_2) ve $(\mathbb{R},\omega_1,\omega_2)$ bitopolojik uzaylar ve $(\mathbb{R},\omega)$ alışılmış topolojik uzay olsun. Eğer $f:(X,\tau_1,\tau_2)\to(\mathbb{R},\omega)$ dönüşümünün $(i,j)-$alt üst yarı sürekli olması için gerek ve yeter şart $f:(X,\tau_1,\tau_2)\to(\mathbb{R},\omega_1,\omega_2)$ bisürekli olmasıdır [37].

İspat. Burada $i=1$ ve $j=2$ alarak ispatlayacağız diğeri de benzer şekilde yapılır.

$(\Rightarrow:)$ $f:(X,\tau_1,\tau_2)\to(\mathbb{R},\omega)$ dönüşümü $(1,2)-$ alt üst yarı sürekli olsun. Her $a\in\mathbb{R}$ için (a,∞), ω_1-açık küme ve $(-\infty,a)$ ω_2-açık kümesini göz önüne alalım. $f:(X,\tau_1,\tau_2)\to(\mathbb{R},\omega)$ dönüşümü $(1,2)-$ alt üst yarı sürekli olduğundan $1-$alt yarı sürekli ve $2-$üst yarı sürekli olduğundan her $a\in\mathbb{R}$ için $f^{-1}((a,\infty))\in\tau_1$ ve $f^{-1}((-\infty,a))\in\tau_2$ sağlanır. Böylece $f:(X,\tau_1,\tau_2)\to(\mathbb{R},\omega_1,\omega_2)$ dönüşümü $1-$ sürekli ve $2-$sürekli olup bisüreklidir.

$(\Leftarrow:)$ $f:(X,\tau_1,\tau_2)\to(\mathbb{R},\omega_1,\omega_2)$ bisürekli olsun. Bu durumda $1-$sürekli ve $2-$ süreklidir. Öyleyse herhangi $a\in\mathbb{R}$ noktası için $(a,\infty)\in\omega_1$ ve $(-\infty,a)\in\omega_2$ kümeleri verildiğinde $f^{-1}((a,\infty))\in\tau_1$ ve $f^{-1}((-\infty,a))\in\tau_2$ sağlanır. Böylece $f:(X,\tau_1,\tau_2)\to(\mathbb{R},\omega)$ dönüşümü $1-$alt yarı sürekli ve $2-$üst yarı sürekli olup $(1,2)-$ alt üst yarı süreklidir.

3.3. Bitopolojik Uzaylarda Ayırma Aksiyomları

Bu bölüme temel ayırma aksiyomları ile bu kavramların bitopolojik uzaylarda genellemeleri ve aralarındaki ilişkilere yer verilmiştir.

Tanım 3.3.1. (X,τ,ν) bitopolojik uzayı $\wp$ özelliğine sahip olması için gerek ve yeter şart hem τ hem de ν topolojilerine göre $\wp$ özelliğine sahip olmasıdır [51].

Tanım 3.3.2. (X,τ) topolojik uzayına $x\neq y$ olacak şekilde $x,y\in X$ noktaları için, birinin diğerini içermeyen komşuluğu varsa T_0- uzayı denir.

Tanım 3.3.3. (X,τ,ν) bitopolojik uzay olsun. X uzayının $x\neq y$ noktaları için $x\in U$ ve $y\notin U$ olacak şekilde U $\tau-$açık kümesi varsa ya da $y\in V$ ve $x\notin V$ olacak şekilde V $\nu-$açık kümesi varsa, (X,τ,ν) ikili T_0- uzayıdır [51].

Örnek 3.3.1. $\mathbb{R}$ reel sayılar doğrusu ile üzerinde $\omega_1=\{\mathbb{R},\varnothing\}\cup\{(a,\infty):a\in\mathbb{R}\}$ sağ topolojik yapı ve $\omega_2=\{\mathbb{R},\varnothing\}\cup\{(-\infty,a):a\in\mathbb{R}\}$ sol topolojik yapı verilsin. Bu durumda $(\mathbb{R},\omega_1,\omega_2)$ bitopolojik uzayı ikili T_0- uzayıdır.

Tanım 3.3.4. (X,τ) topolojik uzayının $x\neq y$ olacak şekilde $x,y\in X$ noktalarının her biri için birinin diğerini içermeyen komşuluğu varsa T_1-uzayıdır denir.

Bitopolojik uzaylar için ikili T_1-uzayı için Swart ve Reilly'nin sırasıyla [53] ve [54] araştırmalarından yararlanarak aşağıdaki iki farklı tanım verilir.

Tanım 3.3.5. (X,τ,ν) bitopolojik uzay olsun.

- Eğer X uzayının $x \neq y$ noktaları için $x \in U$ ve $y \notin U$ olacak şekilde bir U $\tau-$açık kümesi ve $y \in V$ ve $x \notin V$ olacak şekilde bir V $\nu-$açık kümesi varsa, (X,τ,ν) ikili S_T_1-uzayıdır (Swart anlamında ikili T_1-uzayıdır) denir.
- Eğer X uzayı τ için T_1-uzayı ve ν için T_1-uzayı ise ikili R_T_1-uzayıdır (Reilly anlamında ikili T_1-uzayıdır) denir [37].

Örnek 3.3.2. $\mathbb{R}$ reel sayılar doğrusu ile üzerinde $\omega_1=\{\mathbb{R},\varnothing\}\cup\{(a,\infty):a\in\mathbb{R}\}$ sağ topolojik yapı ve $\omega_2=\{\mathbb{R},\varnothing\}\cup\{(-\infty,a):a\in\mathbb{R}\}$ sol topolojik yapı verilsin. Bu durumda $(\mathbb{R},\omega_1,\omega_2)$ bitopolojik uzayı ikili S_T_1-uzayıdır ancak ikili R_T_1-uzayı değildir

Önerme 3.3.1. (X,τ) topolojik uzayı T_1 olması için gerek ve yeter şart her $x \in X$ için $\{x\}$ tek nokta kümesi kapalı olmasıdır.

Önerme 3.3.2 (X,τ,ν) bitopolojik uzayı ikili R_T_1-uzayı olması için gerek ve yeter şart her $x \in X$ noktası için $\{x\}$ tek nokta kümesinin $\tau-$kapalı ve $\nu-$kapalı olmasıdır [55].

İspat. $(\Rightarrow:)$ (X,τ,ν) bitopolojik uzayı ikili R_T_1-uzayı olsun. X, τ topolojisine göre T_1-uzayı ve ν topolojisine göre T_1-uzayı olduğundan her $x \in X$ için $\{x\}$ tek nokta kümesi $\tau-$kapalı ve $\nu-$kapalı bulunur.

$(\Leftarrow:)$ Her $x \in X$ için $\{x\}$ tek nokta kümesi $\tau-$kapalı ve $\nu-$kapalı olsun. Bu durumda (X,τ) ve (X,ν) topolojik uzayları T_1-uzayı olur. O halde (X,τ,ν) bitopolojik uzayı ikili R_T_1- uzayı bulunur.

Tanım 3.3.6. (X,τ) topolojik uzayının birbirinden farklı her $x,y\in X$ noktalarının ayrık komşulukları varsa Hausdorff uzayıdır (T_2-uzayıdır) denir.

Tanım 3.3.7. (X,τ,ν) bitopolojik uzay olsun. Eğer birbirinden farklı her $x,y\in X$ noktaları için $U\cap V=\varnothing$ olacak şekilde x noktası içeren bir U $\tau-$açık kümesi ve y noktasını içeren bir V $\nu-$açık kümesi varsa X ikili Hausdorff (T_2-) uzayıdır denir [51].

Uyarı 3.3.1. (X,τ,ν) ikili Hausdorff iken (X,τ) ve (X,ν) topolojileri Hausdorff olması gerekmez.

Örnek 3.3.3. $\mathbb{R}$ uzayında τ ayrık topoloji ve ν sonlu tümleyen topolojisi olsun. $(\mathbb{R},\tau,\nu)$ bitopolojik uzayı ikili Hausdorff uzayıdır ancak $(\mathbb{R},\nu)$ Hausdorff değildir.

Önerme 3.3.3. (X,τ,ν) bitopolojik uzayı ikili Hausdorff ise X τ ve ν topolojilerine göre T_1-uzayıdır [51].

İspat. (X,τ,ν) ikili Hausdorff olsun. Her farklı $x,y\in X$ için $x\in U_1$ ve $y\in V_1$ olacak şekilde $U_1\in\tau$ ve $V_1\in\nu$ ayrık kümeleri vardır. Benzer şekilde $y\in U_2$ ve $x\in V_2$ olacak şekilde $U_2\in\tau$ ve $V_2\in\nu$ ayrık kümeleri vardır. O halde $x\in U_1$, $y\notin U_1$ ve $x\notin U_2$, $y\in U_2$ olacak şekilde $U_1,U_2\in\tau$ bulunur. Buradan (X,τ) topolojik uzayı T_1-uzayıdır. Benzer şekilde (X,ν) topolojik uzayının T_1-uzayı olduğu gösterilir.

Önermenin tersi doğru olmak zorunda değildir.

Örnek 3.3.4. τ_1 ve τ_2 bir X kümesi üzerinde sonlu tümleyen topolojileri olsun. (X,τ_1) ve (X,τ_2) uzayları T_1-uzayıdır ancak (X,τ_1,τ_2) ikili Hausdorff değildir.

Önerme 3.3.4. Her ikili Hausdorff bitopolojik uzayı ikili R_T_1-uzayıdır [37].

Tanım 3.3.8. (X,τ) topoloji uzayı her $x \in X$ noktasının ve $x \notin F$ olacak şekilde her $F \subset X$ kapalı kümesinin ayrık komşulukları varsa ya da X deki her noktanın kapalı komşuluk ailesi bu noktanın komşuluk tabanı ise regülerdir denir.

Tanım 3.3.9. (X,τ,ν) bitopolojik uzayı olsun. Her $x \in X$ noktası $\nu-$kapalı kümelerinden oluşan bir $\tau-$komşuluk tabanına sahipse τ topolojisi ν topolojisine göre regülerdir denir.

Eğer X, τ topolojisi ν topolojisine göre regüler ve ν topolojisi τ topolojisine göre regüler ise ikili regülerdir [51].

Tanım 3.3.10. (X,τ,ν) bitopolojik uzayı eğer ikili regüler ve ikili R_T_1-uzayı ise ikili T_3-uzayıdır denir [37].

Önerme 3.3.5. (X,τ,ν) bitopolojik uzayı ikili T_3-uzayı ise ikili T_2-uzayıdır [37].

Örnek 3.3.5. $\mathbb{R}$ uzayında $\omega_1 = \{\mathbb{R},\varnothing\} \cup \{(a,\infty) : a \in \mathbb{R}\}$ sağ topolojik yapı ve $\omega_2 = \{\mathbb{R},\varnothing\} \cup \{(-\infty,a) : a \in \mathbb{R}\}$ sol topolojik yapı verilsin. $(\mathbb{R},\omega_1,\omega_2)$ bitopolojik uzayı ikili regülerdir. Ancak ikili R_T_1-uzayı olmadığından ikili T_3-uzayı değildir.

Önerme 3.3.6. İkili regüler bitopolojik uzayının her alt uzayı ikili regülerdir [50].

İspat . (X,τ,ν) bitopolojik uzayı ikili regüler ve (Y,τ_Y,ν_Y) bitopolojik uzayı (X,τ,ν) bitopolojik uzayının alt uzayı olsun. F, Y kümesinde τ_Y-kapalı küme olsun. A, X kümesinde $\tau-$kapalı küme olmak üzere $F = A \cap Y$ dir. Eğer $y \in Y$ ve $y \notin F$ ise $y \notin A$ olur. Bu durumda $y \in U$, $A \subseteq V$ ve $U \cap V = \varnothing$ olacak şekilde U, $\tau-$açık ve V, $\nu-$açık kümeleri vardır.

Aynı zamanda $U \cap Y$ ve $V \cap Y$ sırasıyla τ_Y-açık ve ν_Y-açıktır. $y \in (U \cap Y), F \subseteq (V \cap Y)$ olup $(U \cap Y) \cap (V \cap Y) = (U \cap V) \cap Y = \varnothing$ bulunur.

Benzer şekilde G , Y kümesinde ν_Y-kapalı kümesi olsun. B, X kümesinde $\nu-$ kapalı küme olmak üzere $G=B\cap Y$ dir. Eğer $y\in Y$ ve $y\notin G$ ise $y\notin B$ olur. Bu durumda $y\in U,B\subseteq V$ ve $U\cap V=\varnothing$ olacak şekilde U , $\nu-$açık ve V , $\tau-$açık kümeleri vardır. Aynı zamanda $U\cap Y,V\cap Y$ sırasıyla ν_Y-açık ve τ_Y-açıktır. $y\in(U\cap Y),G\subseteq(V\cap Y)$ olup $(U\cap Y)\cap(V\cap Y)=\varnothing$ bulunur.

Önerme 3.3.7 (X,τ,ν) bitopolojik uzayı ikili regüler olsun. $\tau\text{cl}(U)$, U kümesinin ν topolojisine göre kapanışı ve $\nu\text{cl}(V)$, V kümesinin τ topolojisine göre kapanışı olmak üzere $x,y\in X$ için $x\in A\in\tau$ ve $y\notin A$ ise $x\in U,y\in V$ ve $\tau\text{cl}(U)\cap\nu\text{cl}(V)=\varnothing$ olacak şekilde $U\in\tau$, $V\in\nu$ kümeleri vardır [56].

İspat. $x\in A\in\tau$ olduğundan $x\notin(X-A)$ $\tau-$kapalı küme, X ikili regüler olduğundan $x\in G,y\in(X-A)\subseteq H$ ve $G\cap H=\varnothing$ olacak şekilde $G\in\tau,H\in\nu$ kümeleri vardır. Yine ikili regülerlikten $x\in U\subseteq\nu\text{cl}(U)\subseteq G,y\in V\subseteq\nu\text{cl}(V)\subseteq H$ olacak şekilde $U\in\tau,V\in\nu$ kümeleri vardır. Bu durumdan $\tau\text{cl}(U)\cap\nu\text{cl}(V)=\varnothing$ olur.

Önerme 3.3.8. (X,τ,ν) bitopolojik uzayının τ topolojisinin ν ye göre regüler olması için gerek ve yeter şart her $x\in X$ noktası ve $x\notin S$ olmak üzere her S $\tau-$ kapalı kümesi için $x\in U$, $S\subseteq V$ ve $U\cap V=\varnothing$ olacak şekilde $U\in\tau$ ve $V\in\nu$ kümeleri vardır [51].

İspat. $(\Rightarrow)$ (X,τ,ν) bitopolojik uzayının τ topolojisi ν ye göre regüler olsun $x\in X$ $,x\notin S$ ve S $\tau-$kapalı küme alınsın. Bu durumda $(X-S)\in\tau$ ve $x\in(X-S)$ dir. Kabulümüzden $x\in U\subseteq(X-S)$ olacak şekilde $\nu-$kapalı kümelerinden oluşan bir $\tau-$komşuluk tabanı U vardır. U , $\tau-$komşuluk olduğundan $x\in U'\subseteq U\subseteq(X-S)$ olacak şekilde bir $U'\in\tau$ vardır. O halde $S\subseteq(X-U),x\in U',U'\in\tau,(X-U)\in\nu$ ve $U'\cap(X-S)=\varnothing$ dir.

$(\Leftarrow)$ $x \in X$ ve U_x kümesi X noktasının $\tau-$komşuluğu olsun. $x \in U \subseteq U_x$ olacak şekilde $U \in \tau$ vardır. $(X-U)$ kümesi $\tau-$kapalıdır. O zaman $x \in G$ ve $(X-U) \subseteq H$ olacak şekilde $G \in \tau$ ve $H \in \nu$ ayrık kümeleri vardır.

$x \in G \subseteq (X-H) \subseteq U \subseteq U_x$ olduğundan $(X-H)$ kümesi X noktasının $\nu-$kapalı $\tau-$komşuluğudur. Dolayısıyla X noktasının $\nu-$kapalı kümelerinden oluşan $\tau-$ komşuluğu vardır. O halde τ topolojisi X ye göre regülerdir [37].

Tanım 3.3.11. (X,τ,ν) bitopolojik uzayında. A ve B alt kümeleri olsun. Eğer $f(A)=0$ ve $f(B)=1$ olacak şekilde $f:(X,\tau,\nu) \to (\mathbb{R},\omega)$ dönüşümü $(i,j)-$alt üst yarı sürekli ise A kümesi B kümesinden $(i,j)-$tamamen ayrıktır denir.

Açıkça görülür ki, A kümesi B kümesinden $(i,j)-$tamamen ayrık olması için gerek ve yeter şart B kümesi A kümesinden $(j,i)-$tamamen ayrık olmasıdır.

Tanım 3.3.12. (X,τ,ν) bitopolojik uzay olsun. Eğer her F $\tau-$kapalı ($\nu-$kapalı) kümesi her $x \in F$ noktasından $(\tau,\nu)-$tamamen ayrık ($(\nu,\tau)-$tamamen ayrık) ise $(\tau,\nu)-$tamamen regülerdir ($(\nu,\tau)-$tamamen regülerdir.) denir.

(X,τ,ν) bitopolojik uzayı ikili tamamen regüler ve ikili R_T_1-uzayı ise ikili $T_{3\frac{1}{2}}-$ uzaydır denir [37].

Önerme 3.3.9. (X,τ,ν) bitopolojik uzayı ikili $T_{3\frac{1}{2}}-$uzayı ise ikili T_3-uzayıdır [37].

Tanım 3.3.13. (X,τ) topolojik uzayında $F_1, F_2 \subset X$ ayrık kapalı kümeleri olsun. $F_1 \subset G_1$ ve $F_2 \subset G_2$ olacak şekilde $G_1, G_2 \in \tau$ ayrık kümeleri varsa X normal uzaydır denir.

Tanım 3.3.14. (X,τ,ν) bitopolojik uzayı olsun. Eğer $A\cap B=\varnothing$ olacak şekilde A, $\tau-$kapalı ve B, $\nu-$kapalı kümeleri verildiğinde $A\subset U$, $B\subset V$ ve $U\cap V=\varnothing$ olacak şekilde U $\tau-$açık ve V $\nu-$açık kümeleri varsa X uzayına ikili normaldir denir [51].

(X,τ,ν) bitopolojik uzayı ikili normal ve R_T_1-uzayı ise ikili T_4-uzayı denir [37].

Örnek 3.3.6. $X=\{a,b,c\}$ kümesinde $\tau_1=\{\varnothing,X,\{a\},\{b,c\}\}$ ve $\tau_1=\{\varnothing,X,\{a\},\{b\}\{a,b\}\}$ topolojileri tanımlansın. (X,τ,ν) bitopolojik uzayı ikili normaldir.

Sonuç 3.3.1. (X,τ,ν) ikili normal uzayında her birbirinden ve boştan farklı A, B kümeleri için A $\tau-$kapalı, B $\nu-$kapalı küme olmak üzere $A\subset U$, $B\subset V$ ve $\tau\mathrm{cl}(U)\cap\nu\mathrm{cl}(V)=\varnothing$ olacak şekilde U $\nu-$açık ve V $\tau-$açık kümeleri vardır [37].

Önerme 3.3.10. (X,τ,ν) bitopolojik uzayı ikili T_4-uzayı ise ikili $T_{3\frac{1}{2}}-$uzayıdır [37].

Önerme 3.3.11. (X,τ,ν) bitopolojik uzayı ikili normaldir ancak ve ancak C $\tau-$kapalı, D $\nu-$açık kümeleri $C\subset D$ olacak şekilde verildiğinde; $C\subset G\subset F\subset D$ olmak üzere G $\nu-$açık, F $\tau-$kapalı kümesi vardır [51].

İspat .$(\Rightarrow)$ C $\tau-$kapalı, D $\nu-$açık kümeleri $C\subset D$ olacak şekilde verilsin. Buradan; $C\cap(X-D)=\varnothing$ dır.

Normal uzay tanımından $C\subset G$ ve $(T-D)\subset(T-F)$ olacak şekilde $G\cap(T-F)=\varnothing$ olacak şekilde G $\nu-$açık ve $(T-F)$ $\tau-$açık kümeleri vardır.

Buradan, $C\subset G$, $F\subset D$ve $G\subset F$ olup $C\subset G\subset F\subset D$ bulunur.

$(\Leftarrow)$ C τ-kapalı, D $\nu-$açık kümeleri $C \subset D$ olacak şekilde verildiğinde; $C \subset G \subset F \subset D$ olmak üzere G $\nu-$açık, F $\tau-$kapalı kümesi olsun. $A \cap B = \varnothing$ olacak şekilde A $\tau-$kapalı ve B $\nu-$kapalı kümelerini alalım. $A \subset (X-B)$ olup $(X-B)$ $\nu-$açıktır. Kabulümüzden, $A \subset G \subset F \subset (T-B)$ olacak şekilde G $\nu-$açık, F $\tau-$kapalıdır. $A \subset G$ ve $B \subset (T-F)$ bulunur. Buradan, $G \cap (T-F) = \varnothing$ olacak şekilde G $\nu-$açık ve $(T-F)$ $\tau-$açık bulunur. Bu durumda X ikili normaldir.

BÖLÜM 4. Bİ-İZOTONİK UZAYLAR

2.1. Temel Kavramlar

Bu bölümde bi-izotonik uzaylar tanımlanmış ve ilgili temel kavramlar verilmiştir.

Tanım 4.1.1. X herhangi bir küme, $P(X)$ kuvvet kümesi $\mathrm{cl}_1 : P(X) \to P(X)$ ve $\mathrm{cl}_2 : P(X) \to P(X)$ kapanış operatörü olmak üzere $(X, \mathrm{cl}_1, \mathrm{cl}_2)$ üçlüsüne genelleştirilmiş bi-kapanış uzayı adı verilir [57].

$\mathrm{cl}_1 : P(X) \to P(X)$ ve $\mathrm{cl}_2 : P(X) \to P(X)$ kapanış operatörleri Bölüm 2'de verilen $\mathbf{K_0}$ ve $\mathbf{K_1}$ aksiyomlarını sağlayan izotonik operatörler olması durumunda [57]'de verilen olan bi-kapanış uzaylarını da içeren aşağıdaki tanım verilebilir.

Tanım 4.1.2. X uzayında cl_1 ve cl_2 iki izotonik operatörü olsun. Bu durumda $(X, \mathrm{cl}_1, \mathrm{cl}_2)$ üçlüsüne bi-izotonik uzay denir.

Tanım 4.1.3. $(X, \mathrm{cl}_1, \mathrm{cl}_2)$ bi-izotonik uzayında $\mathrm{cl}_1\mathrm{cl}_2(A) = A$ ise A kümesine kapalı küme denir. Kapalı kümenin tümleyenine açık küme denir.

Bu tanım göz önüne alınırsa aşağıdaki önerme kolayca görülür.

Önerme 4.1.1. $(X, \mathrm{cl}_1, \mathrm{cl}_2)$ bi-izotonik uzayında bir A kümesinin kapalı olması için gerek ve yeter şart (X, cl_1) ve (X, cl_2) izotonik uzaylarında kapalı olmasıdır.

Başka bir deyişle, $(X, \mathrm{cl}_1, \mathrm{cl}_2)$ bi-izotonik uzayında aşağıdakiler denktir.

i) $\mathrm{cl}_1\mathrm{cl}_2(A) = A$.

ii) $\mathrm{cl}_1(A) = A$ ve $\mathrm{cl}_2(A) = A$.

Bu durumda $i \in \{1,2\}$ için $\text{int}_i(A) = X - (\text{cl}_i(X-A)) = A$ ise A kümesi açıktır denir.

Örnek 4.1.1. $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi üzerinde

$$\text{cl}_1(A) = \begin{cases} \varnothing, & A = \varnothing \\ (-\infty, a], & \sup A = a \\ \mathbb{R}, & \sup A = \infty \end{cases} \text{ ve } \text{cl}_2(A) = \begin{cases} \varnothing, & A = \varnothing \\ [b, \infty), & \inf A = b \\ \mathbb{R}, & \inf A = -\infty \end{cases}$$

olacak şekilde $\text{cl}_1 : P(\mathbb{R}) \to P(\mathbb{R})$ ve $\text{cl}_2 : P(\mathbb{R}) \to P(\mathbb{R})$ operatörlerini alalım. Bu durumda herhangi bir $A \subseteq \mathbb{R}$ için $\text{cl}_1(\text{cl}_2(A)) = \mathbb{R}$ ya da $\text{cl}_1(\text{cl}_2(A)) = \varnothing$ olduğundan $(\mathbb{R}, \text{cl}_1, \text{cl}_2)$ uzayı ayrık olmayan uzaydır.

$(X, \text{cl}_1, \text{cl}_2)$ bi-izotonik uzayı topolojik uzay olmak zorunda değildir çünkü kapalı kümelerin sonlu birleşimi kapalı olmak zorunda değildir.

Örnek 4.1.2. $X = \{a,b,c\}$ kümesi verilsin $\text{cl}_1 : \mathrm{P}(X) \to \mathrm{P}(X)$ operatörü, $\text{cl}_1(\varnothing) = \varnothing$, $\text{cl}_1(\{b\}) = \{b\}$, $\text{cl}_1(\{c\}) = \{c\}$, $\text{cl}_1(\{a,b\}) = \{a,b\}$, $\text{cl}_1(\{b,c\}) = \{b,c\}$ ve $\text{cl}_1(X) = \text{cl}_1(\{a\}) = \text{cl}_1(\{a,c\}) = X$ olarak tanımlansın. Ayrıca $\text{cl}_2 : \mathrm{P}(X) \to \mathrm{P}(X)$ operatörü de $\text{cl}_2(\{b\}) = \{b\}$, $\text{cl}_2(\{c\}) = \{c\}$, $\text{cl}_2(\varnothing) = \varnothing$ ve $\text{cl}_2(X) = \text{cl}_2(\{a\}) = \text{cl}_2(\{a,b\}) = \text{cl}_2(\{a,c\}) = \text{cl}_2(\{b,c\}) = X$ olarak verilsin. Bu durumda $\{b\}$ ve $\{c\}$ kümeleri $(X, \text{cl}_1, \text{cl}_2)$ bi-izotonik uzayında kapalı kümeler olur ancak $\text{cl}_1(\{b,c\}) = \{b,c\}$ ve $\text{cl}_2(\{b,c\}) = X$ olduğundan $\{b,c\}$ kümesi $(X, \text{cl}_1, \text{cl}_2)$ bi-izotonik uzayında kapalı değildir.

Önerme 4.1.2. $(X, \text{cl}_1, \text{cl}_2)$ bi-izotonik uzay olsun. $A \subseteq X$ için aşağıdakiler vardır.

i) A açık küme olması için gerek ve yeter şart $A = X - \text{cl}_1\text{cl}_2(X - A)$ olmasıdır.

ii) Eğer A açık küme ve $A \subseteq G$ ise $A \subseteq X - \text{cl}_1\text{cl}_2(X - G)$ sağlanır.

İspat. i) $(X, \mathrm{cl}_1, \mathrm{cl}_2)$ bi-izotonik uzayındaki açık küme tanımından aşikardır.

ii) A açık kümesi ve $A \subseteq G$ olsun. Buradan $X - G \subseteq X - A$ elde edilir. Ayrıca cl_1 ve cl_2 izotonik uzay olduğundan $\mathrm{cl}_1(\mathrm{cl}_2(X - G)) \subseteq \mathrm{cl}_1(\mathrm{cl}_2(X - A))$ bulunur. O halde $X - \mathrm{cl}_1(\mathrm{cl}_2(X - A)) \subseteq X - \mathrm{cl}_1(\mathrm{cl}_2(X - G))$ olur ki A açık küme olduğundan $A \subseteq X - \mathrm{cl}_1(\mathrm{cl}_2(X - G))$ bulunur.

Önerme 4.1.3. $(X, \mathrm{cl}_1, \mathrm{cl}_2)$ bi-izotonik uzayı ve $Y \subseteq X$ alt kümesi verildiğinde her . $A \subseteq Y$. kümesi ve $i \in \{1,2\}$ için $\mathrm{cl}_i^Y(A) = \mathrm{cl}_i(A) \cap Y$ olarak tanımlı $\mathrm{cl}_i^Y : P(Y) \to P(Y)$ operatörleri izotoniktir.

İspat. $A, B \subseteq Y$ alt kümelerini $A \subseteq B$ olacak şekilde alınsın. $i \in \{1,2\}$ için $\mathrm{cl}_i : P(X) \to P(X)$ operatörleri izotonik olduğundan $\mathrm{cl}_i(A) \subseteq \mathrm{cl}_i(B)$ olur. Böylece $\mathrm{cl}_i(A) \cap Y \subseteq \mathrm{cl}_i(B) \cap Y$, dolayısıyla $\mathrm{cl}_i^Y(A) \subseteq \mathrm{cl}_i^Y(B)$ sağlanır.

Böylece aşağıdaki tanım verilir.

Tanım 4.1.4. $(X, \mathrm{cl}_1, \mathrm{cl}_2)$ bi-izotonik uzayı olsun. $Y \subseteq X$ alt kümesi için cl_1^Y ve cl_2^Y iki izotonik operatörleri ile birlikte $(Y, \mathrm{cl}_1^Y, \mathrm{cl}_2^Y)$ uzayına $(X, \mathrm{cl}_1, \mathrm{cl}_2)$ bi-izotonik uzayının alt uzayı denir.

Tanım 4.1.5. $(X, \mathrm{cl}_1, \mathrm{cl}_2)$ bi-izotonik uzayının alt uzayı $(Y, \mathrm{cl}_1^Y, \mathrm{cl}_2^Y)$ bi-izotonik uzayı olsun.

- İndirgenmiş iç operatörü int_i^Y ile gösterilmek üzere $A \subseteq Y$ için

$$\mathrm{int}_i^Y(A) = Y - \mathrm{cl}_i^Y(Y - A) = Y \cap \mathrm{int}_i(A \cup (X - Y))$$

dir.

- İndirgenmiş komşuluk operatörü $\mathcal{N}_i^Y$ olmak üzere $A \subseteq Y$ için

$$\mathcal{N}_i^Y = \{N \cap Y : N \in \mathcal{N}_i(A)\}$$

dır.

Önerme 4.1.4. $(X,\mathrm{cl}_1,\mathrm{cl}_2)$ bi-izotonik uzayı ve $Y \subseteq X$ kapalı alt kümesi verilsin. A kümesinin $(Y,\mathrm{cl}_1^Y,\mathrm{cl}_2^Y)$ bi-izotonik alt uzayında kapalı olması için gerek ve yeter şart A kümesinin $(X,\mathrm{cl}_1,\mathrm{cl}_2)$ bi-izotonik uzayında kapalı olmasıdır.

İspat. $(\Rightarrow:)$ A kümesi $(Y,\mathrm{cl}_1^Y,\mathrm{cl}_2^Y)$ bi-izotonik uzayında kapalı olsun. Bu durumda $A=\mathrm{cl}_i^Y(A)=\mathrm{cl}_i(A)\cap Y$ olacak şekilde X uzayında $\mathrm{cl}_i(A)$ kapalı kümesi vardır. O zaman $A\subseteq \mathrm{cl}_i(A)$ olur. Ayrıca $A\subseteq Y$ olduğundan $\mathrm{cl}_i(A)\subseteq \mathrm{cl}_i(Y)$ olduğu görülür ki, buradan kolayca $\mathrm{cl}_i(A)\subseteq \mathrm{cl}_i(Y)\cap \mathrm{cl}_i(A)$ elde edilir. Ayrıca Y kapalı olduğundan $\mathrm{cl}_i(A)\subseteq Y\cap \mathrm{cl}_i(A)=A$ bulunur. Sonuç olarak $A=\mathrm{cl}_i(A)$ sağlanır.

$(\Leftarrow:)$ $(X,\mathrm{cl}_1,\mathrm{cl}_2)$ bi-izotonik uzay, $Y\subseteq X$ kapalı alt küme ve $A\subseteq Y$ olsun. Kabul edelim ki A kümesi $(X,\mathrm{cl}_1,\mathrm{cl}_2)$ uzayında kapalı olsun. O halde $\mathrm{cl}_i(A)=A$ olur. Buradan $\mathrm{cl}_i^Y(A)=\mathrm{cl}_i(A)\cap Y=A\cap Y=A$ kolayca elde edilir. Öyleyse A kümesi $(Y,\mathrm{cl}_1^Y,\mathrm{cl}_2^Y)$ uzayında da kapalıdır.

Örnek 4.1.3. $X=\{a,b,c\}$ kümesi verilsin $\mathrm{cl}_1:\mathrm{P}(X)\to\mathrm{P}(X)$ operatörü $\mathrm{cl}_1(X)=\mathrm{cl}_1(\{\mathrm{b},\mathrm{c}\})=\mathrm{cl}_1(\{a,c\})=X$, $\mathrm{cl}_1(\varnothing)=\varnothing$, $\mathrm{cl}_1(\{a\})=\{a\}$, $\mathrm{cl}_1(\{b\})=\{b\}$, $\mathrm{cl}_1(\{c\})=\{c\}$, $\mathrm{cl}_1(\{a,b\})=\{a,b\}$ olarak tanımlansın.

Ayrıca $\mathrm{cl}_2:\mathrm{P}(X)\to\mathrm{P}(X)$ operatörü de $\mathrm{cl}_2(\varnothing)=\varnothing$, $\mathrm{cl}_2(\{a\})=\{a\}$, $\mathrm{cl}_2(\{a,b\})=\{a,b\}$ ve $\mathrm{cl}_2(X)=\mathrm{cl}_2(\{c\})=\mathrm{cl}_2(\{b\})=\mathrm{cl}_2(\{a,c\})=\mathrm{cl}_2(\{b,c\})=X$ olarak verilsin.

X'in bir $Y=\{a,b\}$ alt kümesi verildiğinde $(Y,\mathrm{cl}_1^Y,\mathrm{cl}_2^Y)$ bi-izotonik alt uzayı, sırasıyla, $\mathrm{cl}_1^Y(Y)=\mathrm{cl}_1^Y(\{\mathrm{a},\mathrm{b}\})=Y$, $\mathrm{cl}_1^Y(\varnothing)=\varnothing$, $\mathrm{cl}_1^Y(\{a\})=\{a\}$, $\mathrm{cl}_1^Y(\{b\})=\{b\}$ ve $\mathrm{cl}_2^Y(\varnothing)=\varnothing$, $\mathrm{cl}_2^Y(\{a\})=\{a\}$, $\mathrm{cl}_2^Y(Y)=\mathrm{cl}_2^Y(\{b\})=\mathrm{cl}_2^Y(\{a,\mathrm{b}\})=Y$ olarak elde edilen $\mathrm{cl}_1^Y:\mathrm{P}(Y)\to\mathrm{P}(Y)$ ve $\mathrm{cl}_2^Y:\mathrm{P}(Y)\to\mathrm{P}(Y)$ operatörleri ile birlikte inşa edilir.

4.2. Bi-izotonik Uzaylarda Sürekli Dönüşümler

Tanım 4.2.1. $(X,\mathrm{cl}_1,\mathrm{cl}_2)$ ve $(Y,\mathrm{cl}'_1,\mathrm{cl}'_2)$ genelleştirilmiş bi-kapanış uzayları ve $f:(X,\mathrm{cl}_1,\mathrm{cl}_2)\to(Y,\mathrm{cl}'_1,\mathrm{cl}'_2)$ dönüşümü olsun. Eğer $i\in\{1,2\}$ için $f:(X,\mathrm{cl}_i)\to(Y,\mathrm{cl}'_i)$ sürekli (açık, kapalı ya da homeomorfizm) ise f dönüşümüne $i-$sürekli ($i-$açık, $i-$kapalı ya da $i-$homeomorfizm) denir.

Ayrıca f dönüşümü her $i\in\{1,2\}$ için $i-$sürekli ise bi-süreklidir denir.

Örnek 4.2.1. $(X,\mathrm{cl}_1,\mathrm{cl}_2)$ ve $(X,\mathrm{cl}'_1,\mathrm{cl}'_2)$ genelleştirilmiş bi-kapanış uzayları olmak üzere Örnek 2.2.1'den de görüleceği üzere $\mathrm{I}:(X,\mathrm{cl}_1,\mathrm{cl}_2)\to(X,\mathrm{cl}'_1,\mathrm{cl}'_2)$ özdeşlik dönüşümünün bi-sürekli olması için gerek ve yeter şart $i\in\{1,2\}$ için cl_i operatörünün cl'_i den daha kaba olmasıdır.

Tanım 2.2.2'de verilen $f:(X,\mathrm{cl}_i)\to(Y,\mathrm{cl}'_i)$ dönüşümünün sürekliliği tanımından aşağıdaki önerme verilir.

Önerme 4.2.1. $(X,\mathrm{cl}_1,\mathrm{cl}_2)$ ve $(Y,\mathrm{cl}'_1,\mathrm{cl}'_2)$ genelleştirişmiş bi-kapanış uzayları olsun. $f:(X,\mathrm{cl}_1,\mathrm{cl}_2)\to(Y,\mathrm{cl}'_1,\mathrm{cl}'_2)$ dönüşümü bi-süreklidir ancak ve ancak her $A\in P(X)$ ve her $i\in\{1,2\}$ için $f(\mathrm{cl}_i(A))\subseteq\mathrm{cl}'_i(f(A))$ dir.

Önerme 2.2.1'de izotonik uzaylar arasında tanımlı $f:(X,\mathrm{cl}_i)\to(Y,\mathrm{cl}'_i)$ dönüşümünün sürekliliği için verilen karakterizasyon göz önüne alınarak aşağıdaki önerme verilir.

Önerme 4.2.2. $(X,\mathrm{cl}_1,\mathrm{cl}_2)$ ve $(Y,\mathrm{cl}'_1,\mathrm{cl}'_2)$ bi-izotonik uzayları ve $f:(X,\mathrm{cl}_1,\mathrm{cl}_2)\to(Y,\mathrm{cl}'_1,\mathrm{cl}'_2)$ dönüşümü olsun. f dönüşümü bi-süreklidir ancak ve ancak her $B\in P(Y)$ ve $i\in\{1,2\}$ için $\mathrm{cl}_i(f^{-1}(B))\subseteq f^{-1}(\mathrm{cl}'_i(B))$ dir.

Önerme 4.2.3. $(X,\mathrm{cl}_1,\mathrm{cl}_2)$, $(Y,\mathrm{cl}_1',\mathrm{cl}_2')$ ve $(Z,\mathrm{cl}_1'',\mathrm{cl}_1'')$ bi-izotonik uzayları olmak üzere $f:X\to Y$ ve $g:Y\to Z$ bi-sürekli dönüşümler olsun. Bu durumda $g\circ f:X\to Z$ bi-süreklidir.

İspat. Herhangi $B\in P(Z)$ alt kümesini alalım. g bi-sürekli olduğundan her $i\in\{1,2\}$ için $\mathrm{cl}_i'\left(g^{-1}(B)\right)\subseteq g^{-1}\left(\mathrm{cl}_i''(B)\right)$ olur. $g^{-1}(B)\in P(Y)$ olup f bi-sürekli olduğundan $\mathrm{cl}_i\left(f^{-1}\left(g^{-1}(B)\right)\right)\subseteq f^{-1}\left(\mathrm{cl}_i'\left(g^{-1}(B)\right)\right)$ sağlanır.

Ayrıca $f^{-1}\left(\mathrm{cl}_i'\left(g^{-1}(B)\right)\right)\subseteq f^{-1}\left(g^{-1}\left(\mathrm{cl}_i''(B)\right)\right)$ olur. Son iki kapsama göz önüne alınırsa $\mathrm{cl}_i\left(f^{-1}\left(g^{-1}(B)\right)\right)\subseteq f^{-1}\left(g^{-1}\left(\mathrm{cl}_i''(B)\right)\right)$ bulunur.

Böylece $f^{-1}\left(g^{-1}(B)\right)=(g\circ f)^{-1}(B)$ olduğu da bilindiğinden $g\circ f:X\to Z$ bi-süreklidir.

Önerme 4.2.4. $(X,\mathrm{cl}_1,\mathrm{cl}_2)$ ve $(X,\mathrm{cl}_1',\mathrm{cl}_2')$ bi-izotonik uzayları olsun. $f:(X,\mathrm{cl}_1,\mathrm{cl}_2)\to(Y,\mathrm{cl}_1',\mathrm{cl}_2')$ dönüşümü için aşağıdakiler denktir.

i) f dönüşümü bi-süreklidir.

ii) Her $B\in P(Y)$ ve $i\in\{1,2\}$ için $f^{-1}\left(\mathrm{int}_i'(B)\right)\subseteq \mathrm{int}_i\left(f^{-1}(B)\right)$ dir

iii) Her $B\in P(Y)$ ve $i\in\{1,2\}$ için $B\in\mathcal{N}_i(f(x))$ ise $f^{-1}(B)\in\mathcal{N}_i(x)$ dir.

İspat. $(\mathrm{i}\Rightarrow\mathrm{ii})$ f dönüşümü bi-sürekli olsun. $i\in\{1,2\}$ olmak üzere $\forall B\in P(Y)$ için $\mathrm{cl}_i\left(f^{-1}(B)\right)\subseteq f^{-1}\left(\mathrm{cl}_i'(B)\right)$ olduğundan $f^{-1}\left(\mathrm{int}_i'(B)\right)=f^{-1}\left(Y-\mathrm{cl}_i'(Y-B)\right)$ olup buradan $X-f^{-1}\left(\mathrm{cl}_i'(Y-B)\right)\subseteq X-\mathrm{cl}_i\left(f^{-1}(Y-B)\right)$ dir. Ayrıca

$$X-\mathrm{cl}_i\left(f^{-1}(Y-B)\right)=\mathrm{int}_i\left(f^{-1}(B)\right)$$

olduğundan $X-f^{-1}\left(\mathrm{cl}_i'(Y-B)\right)\subseteq \mathrm{int}_i\left(f^{-1}(B)\right)$ elde edilir.

$(\text{ii} \Rightarrow \text{iii})$ $\forall B \in P(Y)$ için $f^{-1}(\text{int}'_i(B)) \subseteq \text{int}_i(f^{-1}(B))$ olduğunu kabul edelim. $B \in \mathcal{N}_i(f(x))$ olsun. O halde $f(x) \in \text{int}'_i(B)$ dir. Buradan $x \in f^{-1}(\text{int}'_i(B)) \subseteq \text{int}_i(f^{-1}(B))$ olup $x \in \text{int}_i(f^{-1}(B)) \Rightarrow f^{-1}(B) \in \mathcal{N}_i(x)$ bulunur.

$(\text{iii} \Rightarrow \text{i})$ $\forall B \in P(Y)$ için $B \in \mathcal{N}_i(f(x))$ ise $f^{-1}(B) \in \mathcal{N}_i(x)$ olsun. $x \in \text{cl}_i(f^{-1}(B))$ alınsın. O halde $\text{cl}_i(f^{-1}(B)) = X - \text{int}_i(X - f^{-1}(B))$ olduğundan $x \in X - \text{int}_i(X - f^{-1}(B))$ bulunur. Buradan $x \notin \text{int}_i(X - f^{-1}(B))$ olup $X - f^{-1}(B) \notin \mathcal{N}_i(x)$ elde edilir. Bu durumda $f^{-1}(B) \in \mathcal{N}_i(x)$ bulunur. Ayrıca kabulümüzden $B \in \mathcal{N}_i(f(x))$ vardır. O halde $(Y - B) \notin \mathcal{N}_i(f(x))$ $f(x) \notin \text{int}'_i(Y - B)$ olup $f(x) \in Y - (\text{int}'_i(Y - B)) = \text{cl}'_i(B)$ ise $x \in f^{-1}(\text{cl}'_i(B))$ dir. Sonuç olarak $\text{cl}_i(f^{-1}(B)) \subseteq f^{-1}(\text{cl}'_i(B))$ elde edilir.

Tanım 4.2.2. f dönüşümü birebir ve örten olsun. Eğer f bi-sürekli ve f^{-1} bi-sürekli ise bi-homeomorfizm denir.

Tanım 4.2.3. $(X, \text{cl}_1, \text{cl}_2)$ ve $(\mathbb{R}, \omega)$ alışılmış topolojik uzay olmak üzere $f : X \to \mathbb{R}$ dönüşümü verilsin. Eğer $a \in \mathbb{R}$ için $f^{-1}((a, \infty))$ kümesi (X, cl_1) uzayında açık ((X, cl_2) uzayında açık) küme ise f dönüşümüne $\text{cl}_1 -$ alt yarı sürekli ($\text{cl}_2 -$ alt yarı sürekli) denir. Eğer $a \in \mathbb{R}$ için $f^{-1}((-\infty, a))$ (X, cl_1) uzayında açık ((X, cl_2) uzayında açık) küme ise f dönüşümüne $\text{cl}_1 -$ üst yarı sürekli ($\text{cl}_2 -$ üst yarı sürekli) denir.

Önerme 4.2.5. $(X, \text{cl}_1, \text{cl}_2)$ bi-izotonik uzay ve $(\mathbb{R}, \omega)$ alışılmış topolojik uzay olmak üzere $f : X \to \mathbb{R}$ dönüşümü verilsin. Eğer $a \in \mathbb{R}$ için

- $\text{cl}_1(f^{-1}((-\infty, a))) \subseteq f^{-1}((-\infty, a])$ ise f dönüşümü $\text{cl}_1 -$ alt yarı sürekli,
- $\text{cl}_1(f^{-1}((a, \infty))) \subseteq f^{-1}([a, \infty))$ ise f dönüşümü $\text{cl}_1 -$ üst yarı sürekli,

- $\mathrm{cl}_2\left(f^{-1}\left((-\infty,a)\right)\right)\subseteq f^{-1}\left((-\infty,a]\right)$ ise f dönüşümü cl_2-alt yarı sürekli,
- $\mathrm{cl}_2\left(f^{-1}\left((a,\infty)\right)\right)\subseteq f^{-1}\left([a,\infty)\right)$ ise f dönüşümü cl_2-üst yarı süreklidir.

İspat. Herhangi $a\in\mathbb{R}$ için $f^{-1}\left((a,\infty)\right)$ kümesi $\left(X,\mathrm{cl}_1\right)$ uzayında açık küme ise $f^{-1}\left((a,\infty)\right)=\mathrm{int}_1\left(f^{-1}\left((a,\infty)\right)\right)$dir. Diğer taraftan $(a,\infty)\subseteq[a,\infty)$ olduğundan $f^{-1}\left((a,\infty)\right)\subseteq f^{-1}\left([a,\infty)\right)$ olur ki f dönüşümü izotonik olduğundan $\mathrm{int}_1\left(f^{-1}\left((a,\infty)\right)\right)\subseteq\mathrm{int}_1\left(f^{-1}\left([a,\infty)\right)\right)$ sağlanır. Bu $f^{-1}\left((a,\infty)\right)\subseteq\mathrm{int}_1\left(f^{-1}\left([a,\infty)\right)\right)$ olmasını gerektirir. Buradan da $X-f^{-1}\left((a,\infty)\right)\supseteq X-\mathrm{int}_1\left(f^{-1}\left([a,\infty)\right)\right)$ bulunur. Dolayısıyla $f^{-1}\left(\mathbb{R}-(a,\infty)\right)\supseteq\mathrm{cl}_1\left(f^{-1}\left(\mathbb{R}-[a,\infty)\right)\right)$ elde edilir ki bu $\mathrm{cl}_1\left(f^{-1}\left((-\infty,a)\right)\right)\subseteq f^{-1}\left((-\infty,a]\right)$ demektir. Diğerleri de benzer yolla kolayca gösterilir.

Tanım 4.2.4. $\left(X,\mathrm{cl}_1,\mathrm{cl}_2\right)$ bi-izotonik uzayı ve $(\mathbb{R},\omega)$ alışılmış topolojik uzay olmak üzere $f:X\to\mathbb{R}$ dönüşümü verilsin. Eğer her $i,j\in\{1,2\}$ ve $i\neq j$ için f dönüşümü cl_i-alt yarı sürekli ve cl_j-üst yarı sürekli ise f dönüşümüne $\mathrm{cl}_i\mathrm{cl}_j-$alt üst yarı sürekli denir.

Önerme 4.2.6. $\left(X,\mathrm{cl}_1,\mathrm{cl}_2\right)$ bi-izotonik uzay, $\mathbb{R}$ reel sayılar doğrusu üzerinde $\omega_1=\{\mathbb{R},\varnothing\}\cup\{(a,\infty):a\in\mathbb{R}\}$ sağ topolojik yapı ve $\omega_2=\{\mathbb{R},\varnothing\}\cup\{(-\infty,a):a\in\mathbb{R}\}$ sol topolojik yapı olmak üzere $\left(\mathbb{R},\omega_1,\omega_2\right)$ bitopolojik uzay ve $(\mathbb{R},\omega)$ alışılmış topolojik uzay olsun. $f:\left(X,\mathrm{cl}_1,\mathrm{cl}_2\right)\to(\mathbb{R},\omega)$ dönüşümünün her $i,j\in\{1,2\}$ ve $i\neq j$ için $\mathrm{cl}_i\mathrm{cl}_j-$alt üst yarı sürekli olması için gerek ve yeter şart $f:\left(X,\mathrm{cl}_1,\mathrm{cl}_2\right)\to\left(\mathbb{R},\omega_1,\omega_2\right)$ dönüşümü bi-sürekli olmasıdır

İspat. Burada $i=1$ ve $j=2$ alarak ispatlayacağız diğeri de benzer şekilde yapılır.

$(\Rightarrow)$ $f:(X,\mathrm{cl}_1,\mathrm{cl}_2)\to(\mathbb{R},\omega_1,\omega_2)$ dönüşümü bi-sürekli iken herhangi $B\in P(\mathbb{R})$, $i\in\{1,2\}$ için $\mathrm{cl}_i\left(f^{-1}(B)\right)\subseteq f^{-1}\left(\mathrm{cl}_{\omega_i}(B)\right)$ olur. Eğer herhangi $a\in\mathbb{R}$ noktası için $B=(-\infty,a)$ alırsak ω_1 sağ topolojik yapıya göre kapanışı $\mathrm{cl}_{\omega_1}(B)=(-\infty,a]$ olduğundan kabulden $\mathrm{cl}_1\left(f^{-1}((-\infty,a))\right)\subseteq f^{-1}((-\infty,a])$ elde edilir. Öyleyse $f:(X,\tau_1,\tau_2)\to(\mathbb{R},\omega)$ cl_1-alt yarı süreklidir. Benzer şekilde herhangi $a\in\mathbb{R}$ noktası için $B=(a,\infty)$ alırsak ω_2 sol topolojik yapıya göre kapanışı $\mathrm{cl}_{\omega_2}(B)=[a,\infty)$ olur ki kabulden $\mathrm{cl}_2\left(f^{-1}((a,\infty))\right)\subseteq f^{-1}([a,\infty))$ bulunur. Bu ise $f:(X,\tau_1,\tau_2)\to(\mathbb{R},\omega)$ dönüşümü cl_2-üst yarı sürekli olduğunu gösterir. Sonuç olarak $f:(X,\tau_1,\tau_2)\to(\mathbb{R},\omega)$'nin $\mathrm{cl}_1\mathrm{cl}_2-$alt üst yarı sürekli dönüşüm olduğu görülür.

$(\Leftarrow)$ $f:(X,\mathrm{cl}_1,\mathrm{cl}_2)\to(\mathbb{R},\omega)$ dönüşümü $\mathrm{cl}_1\mathrm{cl}_2-$alt üst yarı sürekli olsun. Her $a\in\mathbb{R}$ için (a,∞), ω_1-açık kümelerini ve $(-\infty,a)$ ω_2-açık kümelerini göz önüne alalım. $f:(X,\mathrm{cl}_1,\mathrm{cl}_2)\to(\mathbb{R},\omega)$ dönüşümü $\mathrm{cl}_1\mathrm{cl}_2-$alt üst yarı sürekli olduğundan yani cl_1-alt yarı sürekli ve cl_2-üst yarı sürekli olduğundan her $a\in\mathbb{R}$ için $\mathrm{cl}_1\left(f^{-1}((-\infty,a))\right)\subseteq f^{-1}((-\infty,a])$ ve $\mathrm{cl}_2\left(f^{-1}((a,\infty))\right)\subseteq f^{-1}([a,\infty))$ sağlanır. Böylece her $i\in\{1,2\}$ için $f:(X,\mathrm{cl}_i)\to(\mathbb{R},\omega_i)$ dönüşümü $i-$sürekli olduğundan $f:(X,\tau_1,\tau_2)\to(\mathbb{R},\omega_1,\omega_2)$ dönüşümü bi-süreklidir.

4.3. Bi-izotonik Uzaylarda Ayırma Aksiyomları

Tanım 4.3.1. $(X,\mathrm{cl}_1,\mathrm{cl}_2)$ genelleştirilmiş bi-kapanış uzayı olsun. Eğer her $x,y\in X$ noktaları için $y\notin N_x$ olacak şekilde $N_x\in\mathcal{N}_1(x)$ ya da $x\notin N_y$ olacak şekilde $N_y\in\mathcal{N}_2(y)$ varsa $(X,\mathrm{cl}_1,\mathrm{cl}_2)$ ikili T_0- uzayıdır, denir.

Önerme 4.3.1. $(X, \mathrm{cl}_1, \mathrm{cl}_2)$ bi-izotonik uzayı olsun. Eğer her $x, y \in X$ için $y \notin \mathrm{cl}_1(\{x\})$ ya da $x \notin \mathrm{cl}_2(\{y\})$ ise $(X, \mathrm{cl}_1, \mathrm{cl}_2)$ ikili T_0 −uzayıdır.

İspat. Tanım 2.3.1 ve Önerme 2.3.1 gereği $y \notin N_x$ olacak şekilde $N_x \in \mathcal{N}_1(x)$ vardır ancak ve ancak her $x, y \in X$ için $y \notin \mathrm{cl}_1(\{x\})$ dir. Benzer şekilde $x \notin N_y$ olacak şekilde $N_y \in \mathcal{N}_2(y)$ vardır ancak ve ancak her $x, y \in X$ için $x \notin \mathrm{cl}_2(\{y\})$ dir. Böylece ispat tamamlanır.

Tanım 4.3.2. $(X, \mathrm{cl}_1, \mathrm{cl}_2)$ genelleştirilmiş bi-kapanış uzayı olsun.

- $x \neq y$ olmak üzere $\forall x, y \in X$ için $y \notin N_x$ olacak şekilde $N_x \in \mathcal{N}_1(x)$ ve $x \notin N_y$ olacak şekilde $N_y \in \mathcal{N}_2(y)$ varsa $(X, \mathrm{cl}_1, \mathrm{cl}_2)$ ikili S_T_1 −uzayıdır denir.
- Eğer (X, cl_1) ve (X, cl_2) uzayları T_1 −uzayı ise $(X, \mathrm{cl}_1, \mathrm{cl}_2)$ uzayı ikili R_T_1 − uzayıdır.

Önerme 4.3.2. Eğer $(X, \mathrm{cl}_1, \mathrm{cl}_2)$ bi-izotonik uzayı ikili R_T_1 −uzayı ise ikili S_T_1 − uzayıdır.

İspat. $(X, \mathrm{cl}_1, \mathrm{cl}_2)$ bi-izotonik uzayı ikili R_T_1 −uzayı olsun. Önerme 2.3.2.'den (X, cl_1) ve (X, cl_2) izotonik uzayları T_1 −uzayı olup $x \neq y$ olacak şekilde her $x, y \in X$ için $\mathrm{cl}_1(\{x\}) \subseteq \{x\}$ ve $\mathrm{cl}_2(\{y\}) \subseteq \{y\}$ sağlanır. O halde $X - \{x\} \subseteq \mathrm{int}_1(X - \{x\})$ ve $X - \{y\} \subseteq \mathrm{int}_2(X - \{y\})$ dir. $x \neq y$ olduğundan $y \in X - \{x\}$ ve $x \notin X - \{x\}$ olup kabulümüzden $y \in X - \{x\} \subseteq \mathrm{int}_1(X - \{x\})$ sağlanır ki böylece $X - \{x\} \in \mathcal{N}_1(y)$ bulunur. Benzer şekilde $x \in X - \{y\}$ ve $y \notin X - \{y\}$ olup $x \in \mathrm{int}_2(X - \{y\})$ sağlanır. Buradan da $X - \{y\} \in \mathcal{N}_2(x)$ bulunur. Sonuç olarak X bi-izotonik uzayı ikili S_T_1 − uzayı olur.

Tanım 4.3.3. $(X, \mathrm{cl}_1, \mathrm{cl}_2)$ genelleştirilmiş bi-kapanış uzayı olsun. $x \neq y$ olmak üzere her $x, y \in X$ noktaları için $U \cap V = \varnothing$ olacak şekilde $U \in \mathcal{N}_1(x)$ ve $V \in \mathcal{N}_2(y)$ kümeleri varsa $(X, \mathrm{cl}_1, \mathrm{cl}_2)$ ikili Hausdorff uzayıdır.

Önerme 4.3.3. $(X, \mathrm{cl}_1, \mathrm{cl}_2)$ bi-izotonik uzayı olsun. X ikili Hausdorff uzayı olması için gerek ve yeter şart $x \neq y$ olmak üzere her $x, y \in X$ için $y \notin \mathrm{cl}_1(U)$ olacak şekilde $U \in \mathcal{N}_2(x)$ veya $x \notin \mathrm{cl}_2(V)$ olacak şekilde $V \in \mathcal{N}_1(y)$ var olmasıdır.

İspat. $(\Rightarrow:)$ $(X, \mathrm{cl}_1, \mathrm{cl}_2)$ bi-izotonik uzayı ikili Hausdorff olsun. Öyleyse herhangi farklı $x, y \in X$ için $U \cap V = \varnothing$ olacak şekilde $U \in \mathcal{N}_2(x)$ ve $V \in \mathcal{N}_1(y)$ vardır. $V \in \mathcal{N}_1(y)$ olduğundan $y \in \mathrm{int}_1(V)$ olur. Öyleyse $y \notin X - \mathrm{int}_1(V)$ olur. $y \notin X - \mathrm{int}_1(V) = \mathrm{cl}_1(X - V)$ dir. $U \subseteq X - V$ olduğundan $\mathrm{cl}_1(U) \subseteq \mathrm{cl}_1(X - V)$ dir. Bu durumda $y \notin \mathrm{cl}_1(U)$ olacak şekilde $U \in \mathcal{N}_2(x)$ bulunur. Benzer şekilde $U \in \mathcal{N}_2(x)$ olduğundan $x \in \mathrm{int}_2(U)$ olur. Öyleyse $x \notin X - \mathrm{int}_2(U)$ olur. $x \notin \mathrm{cl}_2(X - U)$ dir. $V \subseteq X - U$ olduğundan $\mathrm{cl}_2(V) \subseteq \mathrm{cl}_2(X - U)$ dir. Bu durumda $x \notin \mathrm{cl}_2(V)$ olacak şekilde $V \in \mathcal{N}_1(y)$ bulunur.

$(\Leftarrow:)$ Her farklı $x, y \in X$ için $y \notin \mathrm{cl}_2(U)$ olacak şekilde $U \in \mathcal{N}_1(x)$ var olsun. O zaman $y \in X - \mathrm{cl}_2(U) = \mathrm{int}_2(X - U)$ olur. Yani $X - U \in \mathcal{N}_2(y)$ dir. $X - U = V$ dersek $U \cap V = \varnothing$ olacak şekilde $U \in \mathcal{N}_1(x)$ ve $V \in \mathcal{N}_2(y)$ bulunmuş olur. Böylece X ikili Hausdorff uzayıdır.

Önerme 4.3.4. $(X, \mathrm{cl}_1, \mathrm{cl}_2)$ bi-izotonik uzayı ikili Hausdorff uzayı ise (X, cl_1) ve (X, cl_2) uzayları T_1-uzayıdır.

İspat. $(X, \mathrm{cl}_1, \mathrm{cl}_2)$ bi-izotonik uzayı ikili Hausdorff olsun. O zaman $x \neq y$ olacak şekilde $x, y \in X$ için $x \notin \{y\}$ olur. Buradan X ikili Hausdorff uzayı olduğundan $U \cap V = \varnothing$ olacak şekilde $U \in \mathcal{N}_1(x)$ ve $V \in \mathcal{N}_2(y)$ vardır. $U \in \mathcal{N}_1(x)$ olup

$x \in \text{int}_1(U)$ dir. Yani $x \notin X - \text{int}_1(U) = \text{cl}_1(X - U)$ olur. Ayrıca $V \subseteq X - U$ olduğundan $\text{cl}_1(V) \subseteq \text{cl}_1(X - U)$ dir. Dolayısıyla $x \notin \text{cl}_1(V)$ bulunur. Diğer taraftan $y \in V$ ve $\{y\} \subseteq V$ olup cl_1 izotonik olduğundan $\text{cl}_1\{y\} \subseteq \text{cl}_1(V)$ dir. O halde $x \notin \text{cl}_1\{y\}$ bulunur. Sonuç olarak $\text{cl}_1\{y\} \subseteq \{y\}$ olduğu görülür ki bu (X, cl_1) uzayının $T_1 -$uzayı olduğu anlamına gelir. Benzer şekilde (X, cl_2) uzayının $T_1 -$ uzayı olduğu gösterilir.

Bu son önerme ile ikili $R_T_1 -$uzayı tanımı ve sonrasında Önerme 4.3.2 göz önüne alınarak aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 4.3.1. Her ikili Hausdorff bi-izotonik uzayı ikili $R_T_1 -$uzayı, dolayısıyla $S_T_1 -$uzayıdır

Tanım 4.3.4. $(X, \text{cl}_1, \text{cl}_2)$ bi-izotonik uzayı olsun. $x \neq y$ olmak üzere her $x, y \in X$ için $\text{cl}_1(U) \cap \text{cl}_2(V) = \varnothing$ olacak şekilde $U \in \mathcal{N}_1(x)$ ve $V \in \mathcal{N}_2(y)$ varsa $(X, \text{cl}_1, \text{cl}_2)$ ikili $T_{2\frac{1}{2}} -$ uzayıdır.

Tanım 4.3.5. $(X, \text{cl}_1, \text{cl}_2)$ genelleştirilmiş bi-kapanış uzayında her $x \in X$ noktası ve her $F \subseteq X$ alt kümesi için $x \notin \text{cl}_1(F)$ olmak üzere $U \cap V = \varnothing$ olacak şekilde $U \in \mathcal{N}_1(x)$ ve $V \in \mathcal{N}_2(F)$ varsa (X, cl_1) uzayı (X, cl_2) uzayına göre regülerdir denir.

Eğer (X, cl_1) uzayı (X, cl_2) uzayına göre regüler ve (X, cl_2) uzayı (X, cl_1) uzayına göre regüler ise $(X, \text{cl}_1, \text{cl}_2)$ ikili regülerdir.

Önerme 4.3.5. $(X, \text{cl}_1, \text{cl}_2)$ bi-izotonik uzay olsun. (X, cl_1) izotonik uzayı (X, cl_2) izotonik uzayına göre regüler olması için gerek ve yeter şart her $x \in X$ noktasının her $N \in \mathcal{N}_1(x)$ komşuluğu için $\text{cl}_2(U) \subseteq N$ olacak şekilde $U \in \mathcal{N}_1(x)$ var olmasıdır.

İspat. $(\Rightarrow:)$ (X,cl_1) izotonik uzayı (X,cl_2) izotonik uzayına göre regüler olsun. Her. $x\in X$ noktası ve her $F\subseteq X$ alt kümesi için $x\notin \mathrm{cl}_1(F)$ olmak üzere $U\cap V=\varnothing$ olacak şekilde $U\in\mathcal{N}_1(x)$ ve $V\in\mathcal{N}_2(F)$ vardır. Herhangi $x\in X$ ve $N\in\mathcal{N}_1(x)$ alalım. Bu durumda $x\in \mathrm{int}_1(N)$ olur. Öyleyse $x\notin X-\mathrm{int}_1(N)=\mathrm{cl}_1(X-N)$ bulunur. Kabulden $U\cap V=\varnothing$ olacak şekilde ve $V\in\mathcal{N}_2(X-N)$ vardır. Ayrıca $U\subseteq(X-V)$ ve cl_2 izotonik olduğundan $\mathrm{cl}_2(U)\subseteq \mathrm{cl}_2(X-V)$ yani $X-\mathrm{cl}_2(U)\supseteq X-\mathrm{cl}_2(X-V)=\mathrm{int}_2(V)$ bulunur. $V\in\mathcal{N}_2(X-N)$ ve $V\in\mathcal{N}_2(F)\Rightarrow F\in \mathrm{int}_2(V)$ olduğundan $X-N\subseteq \mathrm{int}_2(V)\subseteq X-\mathrm{cl}_2(U)$ bulunur. Sonuç olarak $\mathrm{cl}_2(U)\subseteq N$ olacak şekilde $U\in\mathcal{N}_1(x)$ elde edilmiş olur.

$(\Leftarrow:)$ Her $x\in X$ noktasının her $N\in\mathcal{N}_1(x)$ komşuluğu için $\mathrm{cl}_2(U)\subseteq N$ olacak şekilde $U\in\mathcal{N}_1(x)$ var olsun. Herhangi $x\in X$ noktası ve $x\notin \mathrm{cl}_1(F)$ olacak şekilde herhangi $F\subseteq X$ alt kümesi alınsın.

O zaman $x\in X-\mathrm{cl}_1(F)=\mathrm{int}_1(X-F)$ olur. Böylece $X-F\in\mathcal{N}_1(x)$ dir. Kabulümüzden $\mathrm{cl}_2(U)\subseteq X-F$ olacak şekilde $U\in\mathcal{N}_1(x)$ vardır. $F\subseteq X-\mathrm{cl}_2(U)$ olur ki $X-\mathrm{cl}_2(U)=V$ dersek $U\cap V=\varnothing$ olacak şekilde $U\in\mathcal{N}_1(x)$ ve $V\in\mathcal{N}_2(F)$ bulunmuş olur. Sonuç olarak (X,cl_1) izotonik uzayı (X,cl_2) izotonik uzayına göre regüler bulunur.

Tanım 4.3.5 ve Önerme 4.3.5'den aşağıdaki sonuç verilir.

Sonuç 4.3.2. $(X,\mathrm{cl}_1,\mathrm{cl}_2)$ bi-izotonik uzayının ikili regüler olması için gerek ve yeter şart her $x\in X$ noktasının her $N'\in\mathcal{N}_1(x)$ komşuluğu için $\mathrm{cl}_2(U)\subseteq N'$ olacak şekilde $U\in\mathcal{N}_1(x)$ kümesinin ve her $N''\in\mathcal{N}_2(x)$ komşuluğu için $\mathrm{cl}_1(V)\subseteq N''$ olacak şekilde $V\in\mathcal{N}_2(x)$ kümesinin var olmasıdır.

Tanım 4.3.6. $(X,\mathrm{cl}_1,\mathrm{cl}_2)$ bi-izotonik uzayı eğer ikili regüler ve ikili R_T_1-uzayı ise ikili T_3-uzayıdır denir.

Önerme 4.3.6. $(X,\mathrm{cl}_1,\mathrm{cl}_2)$ bi-izotonik uzayı ikili T_3-uzayı ise ikili T_2-uzayıdır.

İspat. $(X,\mathrm{cl}_1,\mathrm{cl}_2)$ bi-izotonik uzayı ikili T_3-uzayı olsun. Bu durumda ikili regüler ve ikili R_T_1-uzayı olup herhangi farklı $x,y\in X$ için $\mathrm{cl}_2(\{y\})\subseteq\{y\}$ sağlanır. Dolayısıyla $X-\{y\}\subseteq\mathrm{int}_2(X-\{y\})$ olur. Buradan $x\in X-\{y\}$ olduğundan $X-\{y\}\in\mathcal{N}_2(x)$ bulunur. Ayrıca X ikili regüler olduğundan Sonuç 4.3.2.'den her $X-\{y\}\in\mathcal{N}_2(x)$ komşuluğu için $\mathrm{cl}_1(V)\subseteq X-\{y\}$ olacak şekilde $V\in\mathcal{N}_2(x)$ kümesinin vardır. $y\notin\mathrm{cl}_1(V)$ olacak şekilde $V\in\mathcal{N}_2(x)$ kümesinin var olduğundan Önerme 4.3.3. gereği X ikili Hausdorff uzayı bulunur.

Tanım 4.3.7. $(X,\mathrm{cl}_1,\mathrm{cl}_2)$ bi-izotonik uzayında A ve B alt kümeleri verilsin. Eğer $f(A)=0$ ve $f(B)=1$ olacak şekilde $f:(X,\mathrm{cl}_1,\mathrm{cl}_2)\to(\mathbb{R},\omega)$ dönüşümü $\mathrm{cl}_i\mathrm{cl}_j-$ alt üst yarı sürekli ise A kümesi B kümesinden $(i,j)-$tamamen ayrıktır denir.

Tanım 4.3.8. $(X,\mathrm{cl}_1,\mathrm{cl}_2)$ bi-izotonik uzayında her kapalı ($\mathrm{cl}_1\mathrm{cl}_2-$kapalı) F kümesi her $x\notin F$ noktasından $(1,2)-$tamamen ayrık ($(2,1)-$tamamen ayrık) ise $(1,2)-$ tamamen regülerdir ($(2,1)-$tamamen regülerdir) denir.

Eğer $(X,\mathrm{cl}_1,\mathrm{cl}_2)$ bi-izotonik uzayı hem $(1,2)-$tamamen regüler ve hem de $(2,1)-$ tamamen regüler ise X uzayı ikili tamamen regüler olarak adlandırılır.

$(X,\mathrm{cl}_1,\mathrm{cl}_2)$ bi-izotonik uzayı ikili tamamen regüler ve ikili R_T_1 ise ikili $T_{3\frac{1}{2}}-$ uzayıdır denir.

Önerme 4.3.7. $(X,\mathrm{cl}_1,\mathrm{cl}_2)$ bi-izotonik uzayı ikili tamamen regüler ise ikili regülerdir.

İspat. $(X,\mathrm{cl}_1,\mathrm{cl}_2)$ bi-izotonik uzayı ikili tamamen regüler uzay olsun. Herhangi kapalı F kümesini ve $x\notin F$ olacak şekilde herhangi x noktasını alalım. X ikili tamamen regüler uzay olduğundan $f(x)=0$ ve $f(F)=1$ olacak şekilde $\mathrm{cl}_i\mathrm{cl}_j-$alt üst yarı sürekli $f:(X,\mathrm{cl}_1,\mathrm{cl}_2)\to(\mathbb{R},\omega)$ dönüşümü vardır. Buradan $f:(X,\mathrm{cl}_1,\mathrm{cl}_2)\to(\mathbb{R},\omega_1,\omega_2)$ dönüşümünün bi-sürekli olmasıdır. Diğer taraftan $(\mathbb{R},\omega)$ alışılmış uzayı Hausdorff uzayı olduğundan $U\cap V=\varnothing$ olacak şekilde 0 noktasının U ve 1 noktasının V $\omega-$açık komşulukları vardır. Öyleyse $\mathrm{cl}_i\left(f^{-1}(U)\right)\subseteq f^{-1}\left(\mathrm{cl}_{\omega_i}(U)\right)$ yani $f^{-1}(0)=x\in f^{-1}\left(\mathrm{int}_{\omega_i}(U)\right)\subseteq \mathrm{int}_i\left(f^{-1}(U)\right)$ olur ki bu da $f^{-1}(U)\in\mathcal{N}_i(x)$ olduğu görülür. Benzer şekilde $f^{-1}(V)\in\mathcal{N}_j\left(f^{-1}(1)\right)=\mathcal{N}_j(F)$ olur ki böylece $f^{-1}(U)\cap f^{-1}(V)=\varnothing$ olacak şekilde $f^{-1}(U)\in\mathcal{N}_i(x)$ ve $f^{-1}(V)\in\mathcal{N}_j(F)$ kümeleri var olduğundan $(X,\mathrm{cl}_1,\mathrm{cl}_2)$ bi-izotonik uzayı ikili regülerdir

Bu önerme ile ikili $T_{3\frac{1}{2}}-$uzayı ve ikili T_3-uzayı tanımları göz önüne alınarak aşağıdaki sonuç verilir.

Sonuç 4.3.3. $(X,\mathrm{cl}_1,\mathrm{cl}_2)$ bi-izotonik uzayı ikili $T_{3\frac{1}{2}}-$uzayı ise ikili T_3-uzayıdır.

Tanım 4.3.9. $(X,\mathrm{cl}_1,\mathrm{cl}_2)$ bi-izotonik uzay olsun.

(TN) Boştan farklı her ayrık kapalı $F,K\subseteq X$ alt kümeleri için $U\cap V=\varnothing$ olacak şekilde $U\in\mathcal{N}_1(F)$ ve $V\in\mathcal{N}_2(K)$ kümeleri varsa X uzayına ikili t-normaldir.

(QN) Her $F,K\subseteq X$ için $\mathrm{cl}_1(F)\cap\mathrm{cl}_2(K)=\varnothing$ olmak üzere $U\cap V=\varnothing$ olacak şekilde $U\in\mathcal{N}_1(F)$ ve $V\in\mathcal{N}_2(K)$ kümeleri varsa X uzayına ikili quasi-normaldir.

(N) Her $F, K \subseteq X$ boştan farklı kümeleri için $\mathrm{cl}_1(F) \cap \mathrm{cl}_2(K) = \varnothing$ olmak üzere $U \cap V = \varnothing$ olacak şekilde $U \in \mathcal{N}_1(\mathrm{cl}_1(F))$ ve $V \in \mathcal{N}_2(\mathrm{cl}_2(K))$ varsa X kümesi ikili normaldir.

Önerme 4.3.8. $(X, \mathrm{cl}_1, \mathrm{cl}_2)$ bi-izotonik uzay olsun.

i) (N) ise (TN) dir.
ii) (QN) ise (TN) dir.

İspat. Bi-izotonik uzaylarda kapalı küme tanımları ile Tanım 4.3.9'dan görülür.

Tanım 4.3.10. $(X, \mathrm{cl}_1, \mathrm{cl}_2)$ bi-izotonik uzayı ikili quasi-normal ve ikili R_T_1-uzayı ise ikili T_4-uzayıdır denir

Önerme 4.3.9. $(X, \mathrm{cl}_1, \mathrm{cl}_2)$ bi-izotonik uzayı ikili T_4-uzayı ise ikili $T_{3\frac{1}{2}}-$uzayıdır,

Tanım 4.3.11. $(X, \mathrm{cl}_1, \mathrm{cl}_2)$ bi-izotonik uzayı olsun. $A, B \subseteq X$ için eğer

$$\mathrm{cl}_1(A) \cap B = A \cap \mathrm{cl}_2(B) = \varnothing$$

ise A, B kümeleri yarı ayrıktır denir.

Tanım 4.3.12. $(X, \mathrm{cl}_1, \mathrm{cl}_2)$ bi-izotonik uzay olsun. Eğer her $A, B \subseteq X$ yarı ayrık kümeleri $U \cap V = \varnothing$ olacak şekilde $U \in \mathcal{N}_1(A)$ ve $V \in \mathcal{N}_2(B)$ kümeleri varsa ikili tamamen normaldir.

Ayrıca ikili tamamen normal ve R_T_1 ise T_5-uzayıdır.

Önerme 4.3.10. Bi-izotonik uzaylarda ikili T_0, ikili R_T_1, ikili S_T_1, ikili Hausdorff, ikili $T_{2\frac{1}{2}}$, ikili regüler, ikili T_3, ikili tamamen regüler, ikili $T_{3\frac{1}{2}}$, ikili t-normal, ikili quasi normal, ikili normal, ikili T_4, ikili tamamen normal ve ikili T_5- uzayı olmak topolojik özelliktir.

İspat. $(X,\mathrm{cl}_1,\mathrm{cl}_2)$ ve $(Y,\mathrm{cl}'_1,\mathrm{cl}'_2)$ iki bi-izotonik uzay ve $f:X\to Y$ bi-homeomorfizm olsun.

- $(X,\mathrm{cl}_1,\mathrm{cl}_2)$ ikili T_0-uzayı olsun. Y uzayında herhangi farklı x',y' noktalarını alalım. $f:X\to Y$ birebir olduğundan X uzayında $f^{-1}(x')\neq f^{-1}(y')$ olur. Buradan $f^{-1}(y')\notin \mathrm{cl}_1(\{f^{-1}(x')\})$ ya da $f^{-1}(x')\notin \mathrm{cl}_2(\{f^{-1}(y')\})$ olduğundan sırasıyla $y'=f(f^{-1}(y'))\notin f(\mathrm{cl}_1(\{f^{-1}(x')\}))\subseteq \mathrm{cl}'_1(f(\{f^{-1}(x')\}))=\mathrm{cl}'_1(\{x'\})$ ya da $x'=f(f^{-1}(x'))\notin f(\mathrm{cl}_2(\{f^{-1}(y')\}))\subseteq \mathrm{cl}'_2(f(\{f^{-1}(y')\}))=\mathrm{cl}'_2(\{y'\})$ bulunur. Sonuç olarak $(Y,\mathrm{cl}'_1,\mathrm{cl}'_2)$ ikili T_0-uzayı elde edilir.

- $(X,\mathrm{cl}_1,\mathrm{cl}_2)$ ikili R_T_1-uzayı olsun. Bu durumda (X,cl_1) ve (X,cl_2) T_1-uzayıdır. $f:X\to Y$ dönüşümü örten olduğundan herhangi $x'\in Y$ noktası için $f^{-1}(x')=x\in X$ noktası vardır. Her $i\in\{1,2\}$ için $\mathrm{cl}_i(\{x\})\subseteq\{x\}$ dir. Ayrıca her $i\in\{1,2\}$ için $f:(X,\mathrm{cl}_i)\to(Y,\mathrm{cl}'_i)$ dönüşümleri $i-$homeomorfizm olduğundan her $A\in P(X)$ için $f(\mathrm{cl}_i(A))=\mathrm{cl}'_i(f(A))$ sağlanır. Buradan

$$\mathrm{cl}'_1(x')=\mathrm{cl}'_1(f(\{x\}))=f(\mathrm{cl}_1(\{x\}))\subseteq f(x)=\{x'\}$$

ve

$$\mathrm{cl}'_2(x')=\mathrm{cl}'_2(f(\{x\}))=f(\mathrm{cl}_2(\{x\}))\subseteq f(x)=\{x'\}$$

elde edilir. Böylece sırasıyla (Y,cl'_1) ve (Y,cl'_2) T_1-uzayı bulunur. Sonuç olarak $(Y,\mathrm{cl}'_1,\mathrm{cl}'_2)$ bi-izotonik uzayı ikili R_T_1-uzayıdır.

- $(X,\mathrm{cl}_1,\mathrm{cl}_2)$ ikili S_T_1-uzayı olsun. Y uzayında herhangi farklı x',y' noktalarını alalım. $f:X\to Y$ birebir ve örten olduğundan X uzayında $x\neq y$ olacak şekilde $f^{-1}(x')=x$ ve $f^{-1}(y')=y$ noktaları vardır O zaman $y\notin N_x$ olacak şekilde $N_x\in\mathcal{N}_1(x)$ ve $x\notin N_y$ olacak şekilde $N_y\in\mathcal{N}_2(y)$ vardır.

$f:(X,\mathrm{cl}_i)\to(Y,\mathrm{cl}'_i)$ dönüşümleri $i-$homeomorfizm olduğundan $\forall A\in P(X)$ için $A\in\mathcal{N}_i(x)$ ise $f(A)\in\mathcal{N}'_i(f(x))$ sağlanır. Böylece $y'\notin f(N_x)$ olacak şekilde $f(N_x)\in\mathcal{N}'_1(x')$ ve $x'\notin f(N_y)$ olacak şekilde $f(N_y)\in\mathcal{N}'_2(y')$ bulunmuş olur ve $(Y,\mathrm{cl}'_1,\mathrm{cl}'_2)$ bi-izotonik uzayının ikili S_T_1-uzayı olduğu görülür.

- $(X,\mathrm{cl}_1,\mathrm{cl}_2)$ bi-izotonik uzayı ikili Hausdorff uzayı olsun. Y uzayında herhangi farklı x',y' noktalarını alalım. $f:X\to Y$ birebir ve örten olduğundan X uzayında $x\neq y$ olacak şekilde $f^{-1}(x')=x$ ve $f^{-1}(y')=y$ noktaları vardır. Kabulümüzden herhangi farklı $x,y\in X$ için $y\notin\mathrm{cl}_1(U)$ olacak şekilde $U\in\mathcal{N}_2(x)$ veya $x\notin\mathrm{cl}_2(V)$ olacak şekilde $V\in\mathcal{N}_1(y)$ vardır. Ayrıca f dönüşümü bi-sürekli olduğundan her $A\in P(X)$ ve her $i\in\{1,2\}$ için $f(\mathrm{cl}_i(A))\subseteq\mathrm{cl}'_i(f(A))$dir. Bu durumda $y'\notin f(\mathrm{cl}_1(U))\subseteq\mathrm{cl}'_1(f(U))$ olacak şekilde $f(U)\in\mathcal{N}'_2(x')$ veya $x'\notin f(\mathrm{cl}_2(V))\subseteq\mathrm{cl}'_2(f(V))$ olacak şekilde $f(V)\in\mathcal{N}'_1(y')$ bulunur. Buradan $(Y,\mathrm{cl}'_1,\mathrm{cl}'_2)$ bi-izotonik uzayı da ikili Hausdorff uzayı olur.

- Kabul edelim ki $(X,\mathrm{cl}_1,\mathrm{cl}_2)$ ikili $T_{2\frac{1}{2}}-$uzayı ve $x'\neq y'$ olmak üzere $x',y'\in Y$ olsun. $f:X\to Y$ birebir ve örten olduğundan X uzayında $x\neq y$ olacak şekilde $f^{-1}(x')=x$ ve $f^{-1}(y')=y$ noktaları vardır. Kabulümüzden herhangi farklı $x,y\in X$ için $\mathrm{cl}_1(U)\cap\mathrm{cl}_2(V)=\varnothing$ olacak şekilde $U\in\mathcal{N}_1(x)$ ve $V\in\mathcal{N}_2(y)$ vardır. f dönüşümü birebir ve her $i\in\{1,2\}$ için $i-$homeomorfizm olduğundan sırasıyla

$$f(\mathrm{cl}_1(U)\cap\mathrm{cl}_2(V))=f(\mathrm{cl}_1(U))\cap f(\mathrm{cl}_2(V))$$

ve

$$f(\mathrm{cl}_1(U))\cap f(\mathrm{cl}_2(V))=\mathrm{cl}'_1(f(U))\cap\mathrm{cl}'_2(f(V))$$

bulunur. Ayrıca $f:(X,\mathrm{cl}_i)\to(Y,\mathrm{cl}'_i)$ dönüşümleri $i-$homeomorfizm olduğundan $\forall A\in P(X)$ için $A\in\mathcal{N}_i(x)$ ise $f(A)\in\mathcal{N}'_i(f(x))$ olduğu göz önüne alınırsa herhangi farklı $x',y'\in Y$ için $\mathrm{cl}'_1(f(U))\cap\mathrm{cl}'_2(f(V))=\varnothing$ olacak şekilde $f(U)\in\mathcal{N}'_1(x')$ ve $f(V)\in\mathcal{N}'_2(y')$ bulunur. Buradan $(Y,\mathrm{cl}'_1,\mathrm{cl}'_2)$ bi-izotonik uzayı ikili $T_{2\frac{1}{2}}-$uzayıdır.

- Kabul edelim ki $(X,\mathrm{cl}_1,\mathrm{cl}_2)$ ikili regüler uzay olsun ve herhangi $x'\in Y$ noktasını alalım. $f:X\to Y$ dönüşümü örten olduğundan $f^{-1}(x')=x\in X$ noktası vardır. Kabulümüzden herhangi $x\in X$ noktasının her $N'\in\mathcal{N}_1(x)$ komşuluğu için $\mathrm{cl}_2(U)\subseteq N'$ olacak şekilde $U\in\mathcal{N}_1(x)$ kümesinin ve her $N''\in\mathcal{N}_2(x)$ komşuluğu için $\mathrm{cl}_1(V)\subseteq N''$ olacak şekilde $V\in\mathcal{N}_2(x)$ kümesi vardır. Her $i\in\{1,2\}$ için $f:(X,\mathrm{cl}_i)\to(Y,\mathrm{cl}'_i)$ dönüşümleri $i-$homeomorfizm iken her $A\in P(X)$ için $A\in\mathcal{N}_i(x)$ ise $f(A)\in\mathcal{N}'_i(f(x))$ ve ayrıca $f(\mathrm{cl}_i(A))=\mathrm{cl}'_i(f(A))$ olduğunu göz önüne alalım. Öyleyse $x'\in Y$ noktasının her $f(N')\in\mathcal{N}'_1(x')$ komşuluğu için $\mathrm{cl}'_2(f(U))\subseteq f(N')$ olacak şekilde $f(U)\in\mathcal{N}'_1(x')$ kümesi ve her $f(N'')\in\mathcal{N}'_2(x')$ komşuluğu için $\mathrm{cl}'_1(f(V))\subseteq f(N'')$ olacak şekilde $f(V)\in\mathcal{N}'_2(x')$ kümesi bulunur. Bu da $(Y,\mathrm{cl}'_1,\mathrm{cl}'_2)$ bi-izotonik uzayının ikili regüler uzay olduğunu gösterir.

- $(X,\mathrm{cl}_1,\mathrm{cl}_2)$ bi-izotonik uzayı ikili T_3-uzayı olsun. O zaman $(X,\mathrm{cl}_1,\mathrm{cl}_2)$ ikili regüler ve ikili R_T_1-uzayıdır. $f:X\to Y$ bi-homeomorfizm olduğundan $(Y,\mathrm{cl}'_1,\mathrm{cl}'_2)$ ikili regüler ve ikili R_T_1-uzayıdır. Böylece Y bi-izotonik uzayı da ikili T_3-uzayıdır.

- $(X,\mathrm{cl}_1,\mathrm{cl}_2)$ bi-izotonik uzayı ikili tamamen regüler olsun. Herhangi $\mathrm{cl}'_1\mathrm{cl}'_2-$kapalı F' kümesini ve $x'\notin F'$ olacak şekilde $x'\in Y$ noktasını alalım. $f:X\to Y$ dönüşümü bi-homeomorfizm olduğundan $x\in X$ noktası ve $x\notin F$ olacak şekilde $f^{-1}(F')=F$ $\mathrm{cl}_1\mathrm{cl}_2-$kapalı kümesi vardır. X ikili tamamen regüler uzay olduğundan $g(x)=0$ ve $g(F)=1$ olacak şekilde $\mathrm{cl}_i\mathrm{cl}_j-$alt üst yarı sürekli $\mathrm{g}:(X,\mathrm{cl}_1,\mathrm{cl}_2)\to(\mathbb{R},\omega)$ dönüşümü vardır. Buradan $\mathrm{g}:(X,\mathrm{cl}_1,\mathrm{cl}_2)\to(\mathbb{R},\omega_1,\omega_2)$ dönüşümü bi-süreklidir.

$$\begin{tikzcd}
(X,\mathrm{cl}_1,\mathrm{cl}_2) \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & (\mathbb{R},\omega_1,\omega_2) \\
(Y,\mathrm{cl}_1',\mathrm{cl}_2') \arrow[ur, "f^{-1}\circ g"'] &
\end{tikzcd}$$

Diyagramından $g\circ f^{-1}:(Y,\mathrm{cl}_1',\mathrm{cl}_2')\to(\mathbb{R},\omega_1,\omega_2)$ dönüşümünün bi-sürekli olduğu dolayısıyla $g\circ f^{-1}:(Y,\mathrm{cl}_1',\mathrm{cl}_2')\to(\mathbb{R},\omega)$ dönüşümünün $\mathrm{cl}_i'\mathrm{cl}_j'-$alt üst yarı sürekli olup $g(x)=g\left(f^{-1}(x')\right)=g\circ f^{-1}(x')=0$ ve $g(F)=g\left(f^{-1}(F')\right)=g\circ f^{-1}(F')=1$ sağlanır. $(Y,\mathrm{cl}_1',\mathrm{cl}_2')$ bi-izotonik uzayında herhangi $\mathrm{cl}_1'\mathrm{cl}_2'-$kapalı F' kümesi herhangi $x'\notin F'$ noktasından $(1,2)-$tamamen ayrık ve $(2,1)-$tamamen ayrık olur ve $(Y,\mathrm{cl}_1',\mathrm{cl}_2')$ bi-izotonik uzayı ikili tamamen regüler uzaydır.

- $(X,\mathrm{cl}_1,\mathrm{cl}_2)$ bi-izotonik uzayı ikili $T_{3\frac{1}{2}}-$uzayı olsun. O zaman $(X,\mathrm{cl}_1,\mathrm{cl}_2)$ ikili tamamen regüler ve ikili R_T_1-uzayıdır. $f:X\to Y$ bi-homeomorfizm olduğundan $(Y,\mathrm{cl}_1',\mathrm{cl}_2')$ ikili tamamen regüler ve ikili R_T_1-uzayıdır. Böylece Y bi-izotonik uzayı da ikili $T_{3\frac{1}{2}}-$uzayıdır.

- $(X,\mathrm{cl}_1,\mathrm{cl}_2)$ bi-izotonik uzayı ikili t-normal uzay olsun. Y kümesinde F' ve K' iki ayrık kapalı kümeler olsun. $f:X\to Y$ bi-homeomorfizm olduğundan $f^{-1}(F')=F$ ve $f^{-1}(K')=K$ kümeleri X kümesinde ayrık kapalı kümelerdir. X ikili t-normal uzayı olduğundan $U\cap V=\varnothing$ olacak şekilde $U\in\mathcal{N}_1(F)$ ve $V\in\mathcal{N}_2(K)$ kümeleri vardır. Önerme 4.2.4'den den $f(U)\cap f(V)=\varnothing$ olacak şekilde $f(U)\in\mathcal{N}'_1(F')$ ve $f(V)\in\mathcal{N}'_2(K')$ kümeleri bulunur. Sonuç olarak Y ikili t-normal uzayı olarak elde edilir.

- $\left(X,\mathrm{cl}_1,\mathrm{cl}_2\right)$ bi-izotonik uzayı ikili quasi-normal olsun. Y kümesinde $\mathrm{cl}_1'\left(F'\right)\cap\mathrm{cl}_2'\left(K'\right)=\varnothing$ olacak şekilde boştan farklı F' ve K' kümeleri alınsın. f bi-homeomorfizm olduğundan

$$
\begin{aligned}
f^{-1}\left(\varnothing\right) &= f^{-1}\left(\mathrm{cl}_1'\left(F'\right)\cap\mathrm{cl}_2'\left(K'\right)\right)\\
\varnothing &= f^{-1}\left(\mathrm{cl}_1'\left(F'\right)\right)\cap f^{-1}\left(\mathrm{cl}_2'\left(K'\right)\right)\\
&=\mathrm{cl}_1\left(f^{-1}\left(F'\right)\right)\cap\mathrm{cl}_2\left(f^{-1}\left(K'\right)\right)\\
&=\mathrm{cl}_1\left(F\right)\cap\mathrm{cl}_2\left(K\right)
\end{aligned}
$$

olduğu kolayca görülür. Ayrıca X ikili quasi-normal uzay olduğundan $U\cap V=\varnothing$ olacak şekilde $U\in\mathcal{N}_1\left(F\right)$ ve $V\in\mathcal{N}_2\left(K\right)$ kümeleri vardır. Önerme 4.2.4'den $f\left(U\right)\cap f\left(V\right)=\varnothing$ olacak şekilde $f\left(U\right)\in\mathcal{N}'_1\left(F'\right)$ ve $f\left(V\right)\in\mathcal{N}'_2\left(K'\right)$ kümeleri bulunur. Sonuç olarak Y ikili quasi-normal uzayı olarak elde edilir.

- $\left(X,\mathrm{cl}_1,\mathrm{cl}_2\right)$ bi-izotonik uzayı ikili normal uzay olsun ve Y kümesinde $\mathrm{cl}_1'\left(F'\right)\cap\mathrm{cl}_2'\left(K'\right)=\varnothing$ olacak şekilde boştan farklı F' ve K' kümeleri alınsın. Y kümesinde $\mathrm{cl}_1'\left(F\right)\cap\mathrm{cl}_2'\left(K\right)=\varnothing$ olacak şekilde boştan farklı F,K kümeleri alınsın. Buradan $\mathrm{cl}_1\left(F\right)\cap\mathrm{cl}_2\left(K\right)=\varnothing$ olup X ikili normal uzay olduğundan $U\cap V=\varnothing$ olacak şekilde $U\in\mathcal{N}_1\left(\mathrm{cl}_1\left(F\right)\right)$ ve $V\in\mathcal{N}_2\left(\mathrm{cl}_2\left(K\right)\right)$ kümeleri vardır. Bu durumda $f\left(U\right)\cap f\left(V\right)=\varnothing$ olacak şekilde $f\left(U\right)\in\mathcal{N}_1\left(f\left(\mathrm{cl}_1\left(F\right)\right)\right)$ ve $f\left(V\right)\in\mathcal{N}_2'\left(f\left(\mathrm{cl}_2\left(K\right)\right)\right)$ kümeleri elde edilir. Ayrıca f bi-homeomorfizm olduğundan $f\left(\mathrm{cl}_1\left(F\right)\right)=\mathrm{cl}_1'\left(F'\right)$ ve $f\left(\mathrm{cl}_2\left(K\right)\right)=\mathrm{cl}_2'\left(K'\right)$ olup buradan $f\left(U\right)\in\mathcal{N}'_1\left(\mathrm{cl}_1'\left(F'\right)\right)$ ve $f\left(V\right)\in\mathcal{N}'_2\left(\mathrm{cl}_2'\left(K\right)\right)$ kümeleri bulunur. Sonuç olarak Y bi-izotonik uzayı ikili normal uzayı olarak elde edilir.

- $\left(X,\mathrm{cl}_1,\mathrm{cl}_2\right)$ bi-izotonik uzayı ikili T_4-uzayı olsun. O zaman $\left(X,\mathrm{cl}_1,\mathrm{cl}_2\right)$ ikili normal ve ikili R_T_1-uzayıdır. $f:X\to Y$ bi-homeomorfizm olduğundan $\left(Y,\mathrm{cl}_1',\mathrm{cl}_2'\right)$ ikili normal ikili R_T_1-uzayıdır. Böylece Y bi-izotonik uzayı da ikili T_4-uzayıdır.

- $(X,\mathrm{cl}_1,\mathrm{cl}_2)$ bi-izotonik uzayı ikili tamamen normal ve $A',B'\subset Y$ yarı ayrık iki küme olsun. O zaman $\mathrm{cl}_1'(A')\cap B'=A'\cap\mathrm{cl}_2(B')=\varnothing$ olur. Buradan

$$f^{-1}\left(\mathrm{cl}_1'(A')\right)\cap f^{-1}(B')=f^{-1}(B')\cap f^{-1}\left(\mathrm{cl}_2'(A')\right)=\varnothing$$

sağlanır. O halde f dönüşümü bi-homeomorfizm sürekli olduğundan X uzayının $f^{-1}(A')=A$ ve $f^{-1}(B')=B$ kümeleri $\mathrm{cl}_1(A)\cap B=A\cap\mathrm{cl}_2(B)=\varnothing$ eşitliklerini sağlar. $A,B\subset X$ kümeleri yarı ayrık olup kabulümüzden $U\cap V=\varnothing$ olacak şekilde $U\in\mathcal{N}_1(A)$ ve $V\in\mathcal{N}_2(B)$ kümeleri vardır. Böylece $f(U)\cap f(V)=\varnothing$ olacak şekilde $f(U)\in\mathcal{N}'_1(A')$ ve $f(V)\in\mathcal{N}'_2(B')$ kümeleri bulunur. Bu durumda $(Y,\mathrm{cl}_1',\mathrm{cl}_2')$ bi-izotonik uzayı ikili tamamen normal elde edilir.

- $(X,\mathrm{cl}_1,\mathrm{cl}_2)$ bi-izotonik uzayı ikili T_5-uzayı olsun. O zaman $(X,\mathrm{cl}_1,\mathrm{cl}_2)$ ikili tamamen normal ve ikili R_T_1-uzayıdır. $f:X\to Y$ bi-homeomorfizm olduğundan $(Y,\mathrm{cl}_1',\mathrm{cl}_2')$ ikili tamamen normal ve ikili R_T_1-uzayıdır. Böylece Y bi-izotonik uzayı da ikili T_5-uzayıdır.

Önerme 4.3.11. $(X,\mathrm{cl}_1,\mathrm{cl}_2)$ bi-izotonik uzayında ikili T_0, ikili R_T_1, ikili S_T_1, ikili Hausdorff, ikili $T_{2\frac{1}{2}}$, ikili regüler, ikili T_3, ikili tamamen regüler, ikili tamamen normal ve ikili T_5-uzayı olmak kalıtsal özelliktir.

İspat. $(Y,\mathrm{cl}_1^Y,\mathrm{cl}_2^Y)$ bi-izotonik uzayı $(X,\mathrm{cl}_1,\mathrm{cl}_2)$ bi-izotonik uzayının alt uzayı olsun.

- $(X,\mathrm{cl}_1,\mathrm{cl}_2)$ bi-izotonik uzayı ikili T_0-uzayı olsun. Herhangi $x,y\in Y$ için $x,y\in Y\subseteq X$ olup kabulümüzden ya $y\notin\mathrm{cl}_1(\{x\})$ ya da $x\notin\mathrm{cl}_2(\{y\})$ dir. Ayrıca Önerme 4.1.3'den $y\notin\mathrm{cl}_1(\{x\})\cap Y=\mathrm{cl}_1^Y(\{x\})$ ya da $x\notin\mathrm{cl}_2(\{y\})\cap Y=\mathrm{cl}_2^Y(\{x\})$ bulunur. Dolayısıyla $(Y,\mathrm{cl}_1',\mathrm{cl}_2')$ bi-izotonik uzayı ikili T_0-uzayı olarak elde edilir.

- $(X,\mathrm{cl}_1,\mathrm{cl}_2)$ bi-izotonik uzayı ikili R_T_1-uzayı olsun. Bu durumda (X,cl_1) ve (X,cl_2) uzayları T_1-uzayıdır. Bu durumda her $x\in Y\subseteq X$ için $\mathrm{cl}_1(\{x\})\subseteq\{x\}$ ve her $\mathrm{cl}_2(\{x\})\subseteq\{x\}$ dir. Dolayısıyla (Y,cl_1^Y) ve (Y,cl_2^Y) için sırasıyla $\mathrm{cl}_1^Y(\{x\})=\mathrm{cl}_1(\{x\})\cap Y\subseteq\{x\}\cap Y=\{x\}$ ve $\mathrm{cl}_2^Y(\{x\})=\mathrm{cl}_2(\{x\})\cap Y\subseteq\{x\}\cap Y=\{x\}$ bulunur. Böylece (Y,cl_1^Y) ve (Y,cl_2^Y) uzayları T_1-uzayı bulunur. Böylece $(Y,\mathrm{cl}_1',\mathrm{cl}_2')$ ikili R_T_1-uzayı elde edilir.

- $(X,\mathrm{cl}_1,\mathrm{cl}_2)$ bi-izotonik uzayı ikili S_T_1-uzayı olsun. Bu durumda $x\neq y$ olmak üzere $x,y\in Y$ alınsın. O halde $y\notin N_x$ olacak şekilde $N_x\in N_1(x)$ ve $x\notin N_y$ olacak şekilde $N_y\in N_2(y)$ vardır. Y alt uzay olduğundan $y\notin N_x\cap Y=N_x^Y$ olacak şekilde $N_x^Y\in\mathcal{N}_1^Y(x)$ ve $x\notin N_y\cap Y=N_y^Y$ olacak şekilde $N_y^Y\in\mathcal{N}_2^Y(y)$ vardır. O halde $(Y,\mathrm{cl}_1',\mathrm{cl}_2')$ ikili S_T_1-uzayı olarak bulunur.

- $(X,\mathrm{cl}_1,\mathrm{cl}_2)$ bi-izotonik uzayı ikili Hausdorff uzayı olsun. $x\neq y$ olmak üzere $x,y\in Y$ alınsın. Kabulümüzden $x\neq y$ olmak üzere her $x,y\in X$ için $y\notin\mathrm{cl}_1(U)$ olacak şekilde $U\in\mathcal{N}_2(x)$ veya $x\notin\mathrm{cl}_2(V)$ olacak şekilde $V\in\mathcal{N}_1(y)$ vardır. Buradan $y\notin\mathrm{cl}_1(U)\cap Y=\mathrm{cl}_1^Y(U)$ olup Tanım.4.1.5'den $U\in\mathcal{N}_2^Y(x)$ veya benzer şekilde $x\notin\mathrm{cl}_2(V)\cap Y=\mathrm{cl}_2^Y(V)$ olup $V\in\mathcal{N}_1^Y(x)$ sağlandığı görülür. Sonuç olarak $(Y,\mathrm{cl}_1',\mathrm{cl}_2')$ ikili Hausdorff uzayı elde edilir.

- $(X,\mathrm{cl}_1,\mathrm{cl}_2)$ ikili $T_{2\frac{1}{2}}-$uzayı olsun. $x\neq y$ olmak üzere $x,y\in Y$ alınsın. Kabulümüzden $\mathrm{cl}_1(U)\cap\mathrm{cl}_2(V)=\varnothing$ olacak şekilde $U\in\mathcal{N}_1(x)$ ve $V\in\mathcal{N}_2(y)$ vardır. O halde

$$\mathrm{cl}_1^Y(U)\cap\mathrm{cl}_2^Y(V)=(\mathrm{cl}_1(U)\cap Y)\cap(\mathrm{cl}_2(V)\cap Y)=(\mathrm{cl}_1(U)\cap\mathrm{cl}_2(V))\cap Y=\varnothing\cap Y=\varnothing$$

olacak şekilde $U\in\mathcal{N}_2^Y(x)$ ve $V\in\mathcal{N}_2^Y(y)$ bulunur. Sonuç olarak $(Y,\mathrm{cl}_1',\mathrm{cl}_2')$ ikili $T_{2\frac{1}{2}}-$uzayı elde edilir.

- $\left(X,\mathrm{cl}_1,\mathrm{cl}_2\right)$ bi-izotonik uzayı ikili regüler ve $x\in Y\subset X$ olsun. Bu durumda her $N_1\in\mathcal{N}_1(x)$ komşuluğu için $\mathrm{cl}_2(U)\subseteq N_1$ olacak şekilde $U\in N_1(x)$ kümesi ve her $N_2\in\mathcal{N}_2(x)$ komşuluğu için $\mathrm{cl}_1(V)\subseteq N_2$ olacak şekilde $V\in N_2(y)$ kümesi vardır. O halde $N_1\cap Y=N_1^Y\in\mathcal{N}_1^Y(x)$ komşuluğu için $\mathrm{cl}_2^Y(U)=\mathrm{cl}_2(U)\cap Y\subseteq N_1\cap Y=N_1^Y$ olacak şekilde $U\in\mathcal{N}_1^Y(x)$ ve $N_2\cap Y=N_2^Y\in\mathcal{N}_2^Y(x)$ komşuluğu için $\mathrm{cl}_1^Y(V)=\mathrm{cl}_1(V)\cap Y\subseteq N_2\cap Y=N_2^Y$ olacak şekilde $V\in\mathcal{N}_2^Y(x)$ kümesi vardır. $\left(Y,\mathrm{cl}_1',\mathrm{cl}_2'\right)$ ikili regüler olarak bulunur.

- $\left(X,\mathrm{cl}_1,\mathrm{cl}_2\right)$ bi-izotonik uzayı T_3-uzayı olsun. O halde X ikili regüler ve ikili R_T_1-uzayıdır ve $Y\subset X$ alt uzayı da ikili regüler ve ikili R_T_1-uzayı olur. Böylece $\left(Y,\mathrm{cl}_1',\mathrm{cl}_2'\right)$ bi-izotonik alt uzayının da T_3-uzayı olduğu görülür.

- $\left(X,\mathrm{cl}_1,\mathrm{cl}_2\right)$ bi-izotonik uzayı ikili tamamen regüler ve $Y\subset X$ bi-izotonik alt uzay olsun. Herhangi $\mathrm{cl}_1^Y\mathrm{cl}_2^Y-$kapalı F kümesini ve $x\notin F$ olacak şekilde herhangi $x\in Y$ noktasını alalım. $\mathrm{cl}_1\mathrm{cl}_2(F)$ kümesi X'de kapalı küme olup $x\notin\mathrm{cl}_1\mathrm{cl}_2(F)$ olur. X ikili tamamen regüler uzay olduğundan $f(x)=0$ ve $f\left(\mathrm{cl}_1\mathrm{cl}_2(F)\right)=1$ olacak şekilde $\mathrm{cl}_i\mathrm{cl}_j-$alt üst yarı sürekli $f:\left(X,\mathrm{cl}_1,\mathrm{cl}_2\right)\to(\mathbb{R},\omega)$ dönüşümü vardır. f dönüşümünün Y bi-izotonik alt uzayı üzerine kısıtlanmasını $f|_Y=g$ ile gösterirsek $g:\left(Y,\mathrm{cl}_1^Y,\mathrm{cl}_2^Y\right)\to(\mathbb{R},\omega)$ $\mathrm{cl}_i^Y\mathrm{cl}_j^Y-$alt üst yarı sürekli olup $g(x)=0$ ve $g(F)=1$ sağlanır. Böylece $\left(Y,\mathrm{cl}_1',\mathrm{cl}_2'\right)$ bi-izotonik alt uzayı da ikili tamamen regüler uzaydır.

- $\left(X,\mathrm{cl}_1,\mathrm{cl}_2\right)$ bi-izotonik uzayı $T_{3\frac{1}{2}}-$uzayı olsun. O halde X ikili tamamen regüler ve ikili R_T_1-uzayıdır ve $Y\subset X$ alt uzayı da ikili tamamen regüler ve ikili R_T_1-uzayı olur. Böylece $\left(Y,\mathrm{cl}_1',\mathrm{cl}_2'\right)$ bi-izotonik alt uzayının da $T_{3\frac{1}{2}}-$uzayı olduğu görülür.

- $(X,\mathrm{cl}_1,\mathrm{cl}_2)$ bi-izotonik uzayı ikili tamamen normal olsun. $A,B\subseteq Y$ yarı ayrık kümeleri olsun. Yani $\mathrm{cl}_1^Y(A)\cap B=A\cap\mathrm{cl}_2^Y(B)=\varnothing$ olsun. Bu durumda $\mathrm{cl}_1(A)\cap B=A\cap\mathrm{cl}_2(B)=\varnothing$ olur. Kabulümüzden $U\cap V=\varnothing$ olacak şekilde $U\in\mathcal{N}_1(A)$ ve $V\in\mathcal{N}_2(B)$ kümeleri vardır. Buradan $U^Y\cap V^Y=\varnothing$ olacak şekilde $U^Y\in\mathcal{N}_1^Y(A)$ ve $V^Y\in\mathcal{N}_2^Y(B)$ kümeleri elde edilir. Sonuç olarak $(Y,\mathrm{cl}_1^Y,\mathrm{cl}_2^Y)$ bi-izotonik alt uzayı ikili tamamen normal uzay olarak bulunur.

- $(X,\mathrm{cl}_1,\mathrm{cl}_2)$ bi-izotonik uzayı T_5-uzayı olsun. O halde X ikili tamamen normal ve ikili R_T_1-uzayıdır. Böylece $(Y,\mathrm{cl}_1^Y,\mathrm{cl}_2^Y)$ bi-izotonik alt uzayı ikili tamamen normal ve ikili R_T_1-uzayı olduğundan T_5-uzayıdır.

Önerme 4.3.12. $(X,\mathrm{cl}_1,\mathrm{cl}_2)$ bi-izotonik uzayı ve $Y\subseteq X$ kapalı alt kümesi verilsin. Eğer $(X,\mathrm{cl}_1,\mathrm{cl}_2)$ bi-izotonik uzayı, sırasıyla, ikili t-normal, ikili quasi normal, ikili normal uzay ve ikili T_4-uzayı ise $(Y,\mathrm{cl}_1^Y,\mathrm{cl}_2^Y)$ bi-izotonik alt uzayı da ikili t-normal, ikili quasi normal, ikili normal ve ikili T_4-uzayıdır.

İspat. $(X,\mathrm{cl}_1,\mathrm{cl}_2)$ bi-izotonik uzay ve $Y\subseteq X$ kapalı alt küme olsun.

- $(X,\mathrm{cl}_1,\mathrm{cl}_2)$ bi-izotonik uzayı ikili t-normal ve boştan farklı ayrık kapalı $F,K\subseteq Y$ alt kümeleri olsun. Önerme 4.1.4'den F,K kümeleri $(X,\mathrm{cl}_1,\mathrm{cl}_2)$ bi-izotonik uzayında kapalı kümedir. Kabulümüzden $U\cap V=\varnothing$ olacak şekilde $U\in\mathcal{N}_1(F)$ ve $V\in\mathcal{N}_2(K)$ kümeleri vardır. O halde $U^Y\cap V^Y=(U\cap Y)\cap(V\cap Y)=\varnothing$ olacak şekilde $U^Y\in\mathcal{N}_1^Y(F)$ ve $V^Y\in\mathcal{N}_2^Y(K)$ kümeleri bulunur. Sonuç olarak $(Y,\mathrm{cl}_1',\mathrm{cl}_2')$ bi-izotonik alt uzayı ikili t-normal uzaydır.

- $(X,\mathrm{cl}_1,\mathrm{cl}_2)$ bi-izotonik uzayı ikili quasi-normal ve boştan farklı ayrık kapalı $F,K\subseteq Y$ alt kümeleri olsun. O halde F,K kümeleri $(X,\mathrm{cl}_1,\mathrm{cl}_2)$ bi-izotonik uzayında kapalı olup $\mathrm{cl}_1(F)\cap\mathrm{cl}_2(K)=\varnothing$ olmak üzere $U\cap V=\varnothing$ olacak şekilde

$U \in \mathcal{N}_1(F)$ ve $V \in \mathcal{N}_2(K)$ kümeleri vardır. O halde $\text{cl}_1^Y(F) \cap \text{cl}_2^Y(K) = (\text{cl}_1(F) \cap Y) \cap (\text{cl}_2(K) \cap Y) = (\text{cl}_1(F) \cap \text{cl}_2(K)) \cap Y = \varnothing$ olur ve $U^Y \cap V^Y = (U \cap Y) \cap (V \cap Y) = \varnothing$ olacak şekilde $U^Y \in \mathcal{N}_1^Y(F)$ ve $V^Y \in \mathcal{N}_2^Y(K)$ kümeleri bulunur. Sonuç olarak $(Y, \text{cl}_1^Y, \text{cl}_2^Y)$ bi-izotonik alt uzayı da ikili quasi-normal uzayıdır.

- $(X, \text{cl}_1, \text{cl}_2)$ bi-izotonik uzayı ikili normal ve boştan farklı ayrık kapalı $F, K \subseteq Y$ alt kümeleri olsun. O halde F, K kümeleri $(X, \text{cl}_1, \text{cl}_2)$ bi-izotonik uzayında kapalı olup kabulden $\text{cl}_1(F) \cap \text{cl}_2(K) = \varnothing$ iken $U \cap V = \varnothing$ olacak şekilde $U \in \mathcal{N}_1(\text{cl}_1(F))$ ve $V \in \mathcal{N}_2(\text{cl}_2(K))$ kümeleri vardır. O halde $\text{cl}_1^Y(F) \cap \text{cl}_2^Y(K) = \varnothing$ olup $U^Y \cap V^Y = \varnothing$ olacak şekilde $U^Y \in \mathcal{N}_1^Y(\text{cl}_1(F))$ ve $V^Y \in \mathcal{N}_2^Y(\text{cl}_2(K))$ kümeleri bulunur. Sonuç olarak $(Y, \text{cl}_1^Y, \text{cl}_2^Y)$ bi-izotonik alt uzayı ikili normal uzayı olur.

- $(X, \text{cl}_1, \text{cl}_2)$ bi-izotonik uzayı T_4-uzayı iken ikili quasi-normal ve ikili R_T_1-uzayıdır. Böylece $(Y, \text{cl}_1^Y, \text{cl}_2^Y)$ bi-izotonik alt uzayı ikili quasi-normal ve ikili R_T_1-uzayı olduğundan T_4-uzayıdır.

BÖLÜM 5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmadaki orijinal kısım Bölüm 4'te verilmiştir. Bu bölümde önceki bölümlerde verilen tanım ve teoremler yardımıyla cl_1 ve cl_2 kapanış operatörleri ile birlikte tanımlanan $\left(X, \mathrm{cl}_1, \mathrm{cl}_2\right)$ bi-izotonik uzaylar incelenmiştir. Bi-izotonik uzaylarında açık ve kapalı kümelerin tanımı yapılmış ve küme özellikleri belirtilmiştir. Bi-izotonik uzaylar arasında sürekli ve bisürekli dönüşümler tanımlanarak ilgili teoremler ifade ve ispat edilmiştir. Yine bi-izotonik uzaylarda ayırma aksiyomları tanımlanmış ve ilgili teoremler ifade ve ispat edilmiştir.

Bu çalışma göz önüne alınarak yapılabilecek daha ileri bir çalışmada $\left(X, \mathrm{cl}_1, \mathrm{cl}_2\right)$ bi-izotonik uzaylarında bağlantılılık ve bikompaktlık kavramları araştırılabilir.

KAYNAKLAR

[1] Kuratowski, K., Topology, Academic Press, New York, Vol. I, 1966.

[2] Hausdorff, F., Gestufte Raume. Fund. Math., 25, 486–502, 1935.

[3] Day, M.M., Convergence, closure, and neighborhoods, Duke Math. J., 11, 181–199, 1944.

[4] Gnilka, S., On extended topologies. I: Closure operators, Ann. Soc. Math. Pol., Ser. I, Com- mentat. Math., 34, 81–94, 1994.

[5] Gnilka, S., On extended topologies. II: Compactness, quasi-metrizability, symmetry, Ann. Soc. Math. Pol., Ser. I, Commentat. Math., 35, 147–162, 1995.

[6] Gnilka, S., On continuity in extended topologies, Ann. Soc. Math. Pol., Ser. I, Commentat. Math., 37, 99–108, 1997.

[7] Hammer, P.C., Extended topology: Set-valued set functions, Nieuw Arch. Wisk. III, 10, 55–77, 1962.

[8] Hammer, P.C., Extended topology: Continuity I. Portug. Math., 25, 77–93, 1964.

[9] Stadler, B.M.R., Stadler, P.F., Generalized topological spaces in evolutionary theory and combinatorial chemistry, J. Chem. Inf. Comput. Sci., 2001.

[10] Stadler, B.M.R., Stadler, P.F., Shpak, M., Wagner, G., Recombination spaces, metrics, and pretopologies, Z. Phys. Chem., 2001.

[11] Stadler, B.M.R., Stadler, P.F., Wagner, G., Fontana, W., The topology of the possible: Formal spaces underlying patterns of evolutionary change, J. Theor. Biol., 213, 241–274, 2001.

[12] Eckhardt, U., Latecki, L., Digital topology. In Current Topics in Pattern Recognition Re- search. Council of Scientific Information, Vilayil Gardens, Trivandrum, India, 1994.

[13] Galton, A., Continuous motion in discrete space. Principles of Knowledge Representation and Reasoning: Proc. of the Seventh International Conference, San Francisco, 26–37, 2000

[14] Rosenfeld, A., Digital topology, American Mathematical Monthly, 86, 621–630, 1979.

[15] Eckhardt, U., Lateck, L., Digital topology, Technical Report 89, Hamburg Beitrz. Angew. Math. A, 1994.

[16] Smyth, M.B., Semi-metric, closure spaces and digital topology, Theo. Computer Sci., 151, 257-276, 1995.

[17] Pfaltz, J., Closurenlattices. Discrete Mathematics, 154, 217-236, 1996.

[18] Galton, A.P., Continuous Motion in Discrete Space, 7th International Conference on Principles of Knowledge Representation and Reasoning (KR2000), Breckenridge, Colorado, USA, 11th - 15th Apr 2000, Principles of Knowledge Representation and Reasoning, 26-37, 2000.

[19] Marchand-Maillet, S., Sharaiha, Y.M., Discrete convexity, straightness, and the 16-neighnorhood, Computer Vision & Image Underst., 66, 316-329, 1997.

[20] Largeron, C., Bonnevay, S., A pretopological approach for structural analysis, Information Sciences,. 144, 169-185, 2002.

[21] LeBourgeois, H.E.F., Bouayad, M., Structure relation between classes for supervised learning using pretopology, In Fifth International Conference on Documnt Analysis and Recognition, 33, 1999.

[22] Pekalska, E., Duin, R.P.W., The Dissimilarity Representation for Pattern Recognition: Foundations and Applications, World Scientific, Singapore, 2005.

[23] Habil, E.D., Elzenati, K.A., Topological properties in isotonic space, Department of Mathematics, Preprint in Researchgate, 1993.

[24] Habil, E.D., Hereditary Properties in Isotonic spaces, Islamic University Journal. 20, 2009

[25] Stadler, B. M. R. and Stadler, P. F., Basic properties of closure spaces, J. Chem. Inf. Comput. Sci. 42, 577-585, 2002.

[26] Kelley, J.C., Bitopological spaces, 1962.

[27] Wilson, W.A., On quasi-metric spaces, American J. Math. 53, 675-84, 1931

[28] Motchane, M.L., Sur la notion d'espace bitopologique et sur les espaces de Baire, Compt. Rend. Paris, 244, 3121-3123, 1957.

[29] Weston, J.D., On the comparison of topologies, J. London Math. Soc. 32, 342-54, 1957.

[30] Wiweger, A., Linear spaces with mixed topology, Studia Math., 20, 47-68, 1961.

[31] Murdeshwar, M.G., Naimpally, S.A., Quasi-Uniform Topological Spaces, Noordhoff, Groningen, 1966.

[32] Ravi, O., Thivagar, M.L., A bitopological (1,2)∗ semi-generalised continuous maps. Bull. Malays. Math. Sci. Soc. (2) 29, 1, 79–88, 2006.

[33] Lane, E.P., Bitopological spaces and quasi-uniform spaces, Proc. London Math. Soc., 1-2, 2, 241-256, 1967.

[34] Patty, C.W., Bitopological spaces, Duke Math. J., 3-4, 3, 387-391, 1967.

[35] Reilly, I.L., On essentially pairwise Hausdorff spaces, Rend. Circ. Mat. Palermo, 2-5, Nos. 1-2, 47-52, 1986.

[36] Marin, J., Romaguera, S., Pairwise monotonically normal spaces, Comment. Math. Univ. Carolin., 32, 567-579, 1991

[37] Dvalishvili, B.P., Bitopological space: Theory, Relations with Generalized Algebraic Structures and Applications, North-Holland Math. Studies, 199, 2005.

[38] Jelic, M., On pairwise To-spaces, Mat. Vesn., 42, 207-209, 1990.

[39] Jun-iti, U., Maki, H., Noiri, T., Bioperations on topological spaces and some separation axioms, Mere. Fac. Sci. Kochi Univ., 13-20, 45-59, 1992.

[40] Sen, S.K., Nandi, J.N., Mukherjee, M.N., Characterization of some bitopological axioms in terms of i,j-closure operator, Mat. Vesn., 44, 75-82, 1992.

[41] Popa, V., Properties of rarely palrwise continuous functions, Math. Rev. Anal. Numer. Theor. Approzim. Mathernatica (Cluj), 32 (55), 77-80 1990.

[42] Dube, K.K., Panwar, O.S., Tiwari, R.K., On weakly pairwise irresolute mappings, Bull. Calcutta Math. Soc., 82, 250-255, 1990.

[43] Jelic, M., On pairwise LC-continuous mapping, Indian J. Pure Appl. Math., 22, 55-59, 1991.

[44] Maki, H., Sundaram, P., Balachandran, P., On generalized continuous maps and the pasting lemma in bitopological spaces, Bull. Fukuoka Univ., Ed. 3, 40, 23-31, 1991.

[45] Khedr, F.H., AI-Areefi, S.M., Noiri, T., Precontinuity and semi-precontinuity in bitopological spaces, Indian J. Pure Appl. Math., 23, 625-633, 1992.

[46] Habil, E.D., Elzenati, K.A., Connectedness in isotonic spaces, Turk J Math., 247-262., 2006

[47] Čech, E., Frolík, Z., Katětov, M., Topological spaces, Prague: Academia, Publishing House of the Czechoslovak Academy of Sciences, 233–394, 1966.

[48] Altuntaş, B., Kapanış uzayları, Nevşehir Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Yüksek Lisans Tezi, 2012.

[49] Ivanov A. A., Problems of the theory of bitopological spaces, III. (Russian) Zap. Nauchn. Sem. S. –Peterburg. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (POMI) 231(1995), Issled. Po Topol. 8, 9-54,English Trans.: J. Math. Sci. (New York) 91(1998), No.6, 3339 – 3364

[50] Kilicman, A., Salleh, Z., On pairwise Lindelöf bitopological spaces, Topology and its Applications, 154, 1600–1607, 2007.

[51] Cobzaş, Ş., Functional analysis in asymmetric normed spaces. Frontiers in Mathematics. Birkhäuser/Springer Basel AG, Basel, 2013.

[52] Kelley, J.L., General Topology, Van Nostrand Reinhold Co., New York., 1955.

[53] Swart, J., Total disconnectedness in bitopological spaces and product bitopological spaces, Nederl. Akad. Wetensh. Proc. Set. A 74 Indag. Math., 33, 135-145, 1971.

[54] Reilly, I.L., On bitopological separation properties, Nanta Math., 5, 2, 14-25, 1972.

[55] Al-Areefi, S.M., Operation-Separation Axioms in Bitopological Spaces, 17(2), 5–18, 2009

[56] Onay, H., İkili Topoloji Uzaylarında p-Uzay Kavramı, Hacettepe Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim dalı, Ankara, 1989.

[57] Boonpok, C., Hausdorff biclosure spaces, Int. J. Contemp. Math. Sci. 5, 5-8, 359–363, 2010.

ÖZGEÇMİŞ

Nasiphan UYSAL 09.10.1989 tarihinde İstanbul'da doğdu. İlk ve orta öğrenimini İstanbul'da tamamladı. 2007 yılında Sakarya Üniversitesi, Matematik Bölümünde başladığı Lisans öğrenimini 2011 yılında tamamladı. 2016 yılında Sakarya Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Topoloji Bilim Dalında yüksek lisans eğitimine başladı.