T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ULLAH VE ARSHAD İTERASYON METODUNUN ÖZEL BİR HALİ İÇİN BAZI SABİT NOKTA TEOREMLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Zeynep KALKAN

Enstitü Anabilim Dalı	**:**	**MATEMATİK**
Tez Danışmanı	**:**	**Yrd. Doç. Dr. Aynur ŞAHİN**

Aralık 2017

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ULLAH VE ARSHAD İTERASYON METODUNUN ÖZEL BİR HALİ İÇİN BAZI SABİT NOKTA TEOREMLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Zeynep KALKAN

Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK

Bu tez 08.12.2017 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği / oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

Yrd. Doç. Dr.	**Prof. Dr.**	**Doç. Dr.**
Aynur ŞAHİN	**Metin BAŞARIR**	**Emrah Evren KARA**
Jüri Başkanı	**Üye**	**Üye**

BEYAN

Tez içindeki tüm verilerin akademik kurallar çerçevesinde tarafımdan elde edildiğini, görsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçların akademik ve etik kurallara uygun şekilde sunulduğunu, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezde yer alan verilerin bu üniversite veya başka bir üniversitede herhangi bir tez çalışmasında kullanılmadığını beyan ederim.

Zeynep KALKAN
08.12.2017

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimim boyunca değerli bilgi ve deneyimlerinden yararlandığım, her konuda bilgi ve desteğini almaktan çekinmediğim, araştırmanın planlanmasından yazılmasına kadar tüm aşamalarında yardımlarını esirgemeyen, teşvik eden, aynı titizlikte beni yönlendiren değerli danışman hocam Yrd. Doç. Dr. Aynur ŞAHİN'e teşekkürlerimi sunarım.

Tezin hazırlanması sürecinde değerli fikirlerinden yaralandığım Sayın Prof. Dr. Metin BAŞARIR'a ve Matematik Bölümü'nde gerekli ilgi ve yardımı esirgemeyen başta Bölüm Başkanı Sayın Prof. Dr. Ömer Faruk GÖZÜKIZIL olmak üzere bölümümüzün öğretim üyelerine sonsuz teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca çalışmamın tamamlanmasında bana her zaman destek olan sevgili eşim Metin KALKAN'a, aileme ve arkadaşlarıma teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

$\mathbb{F}$	: Cisim ($\mathbb{F}=\mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$)
$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$C(I)$	: I aralığında tanımlı ve kompleks değerli sürekli fonksiyonlar kümesi
$\mathbb{C}$	: Kompleks sayılar kümesi
(X, d)	: Metrik uzay
$(X, \|.\|)$	: Normlu uzay
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
sup	: Supremum
$F(T)$	: T dönüşümünün sabit noktalarının kümesi
$\{x_n\}$	: $\{x_n\}$ dizisi
$C[a, b]$	: [a,b] kapalı aralığı üzerinde sürekli fonksiyonlar kümesi
$D(x_0, \delta)$	: x_0 noktasının δ komşuluğu

ÖZET

Anahtar kelimeler: Volterra integral denklemleri, Sabit nokta, Veri bağımlılığı, İterasyon metotları, Kuvvetli yakınsama

Bu çalışmada, Ullah ve Arshad (Springer Plus (2016) 5(1), 1616) tarafından tanımlanan iterasyon metodunun basitleştirilmiş hali olan bir iteratif dizisinin, gecikmeli lineer olmayan bir Volterra integral denklemin çözümüne kuvvetli yakınsadığı gösterildi. Ayrıca bu integral denklemin çözümü için bir veri bağımlılığı sonucu ispatlandı.

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. İlk olarak tezdeki problemin tanıtıldığı giriş bölümü verilmiştir. Daha sonra, Temel Kavramlar adını alan ikinci bölümde çalışmada kullanılan temel tanım ve kavramlar verilmiştir.

Üçüncü bölümde ilk olarak integral denklemler tanıtılmış ve integral denklemlerin sınıflandırılması verilmiştir. Daha sonra sabit nokta kavramı ele alınmış ve Banach sabit nokta teoremi verilmiştir. Son olarak da bazı iterasyon metodları incelenmiştir. Bunlardan bazıları Picard iterasyon metodu, Mann iterasyon metodu, Ishikawa iterasyon metodu, Noor iterasyon metodu, Picard-S iterasyon metodu, Vatan two-step iterasyon metodu ve Ullah ve Arshad iterasyon metodudur. Üçüncü bölüm araştırma bulgularında kullanılacak olan bir lemma ile bitirilmiştir.

Dördüncü bölümde bir iterasyon metodunun lineer olmayan Volterra integral denklemin çözümüne kuvvetli yakınsaması teoremi ispatlanmış ve bu integral denklemin çözümünün veri bağımlılığı araştırılmıştır. Daha sonra sonuçları desteklemek amacıyla bir örnek sunulmuştur.

Beşinci bölümde ise çalışmada elde edilen sonuçlara ve görüşlere yer verilmiştir.

SOME FIXED POINT THEOREMS FOR A SPECIAL CASE OF THE ULLAH AND ARSHAD ITERATION METHOD

SUMMARY

Keywords: Volterra integral equations, Fixed point, Data dependence, Iteration methods, Strong convergence

In this study, it is shown that the iterative sequence which is a simplified form of the iteration method introduced by Ullah and Arshad (Springer Plus (2016) 5(1), 1616), converges strongly to the solution of a nonlinear Volterra integral equation with delay. Also, it is proved the result of a data dependence for the solution of this integral equation.

This thesis consists of five sections. Firstly, introductory section which it is introduced of problem in thesis is given. Afterwards, basic definitions and concepts, which are used in the study, are given in the second section, named as 'Basic Concepts'.

In the third section, integral equations are introduced at first and the classification of integral equations is given. Then, it is discussed on the concept of fixed point and Banach Fixed Point Theorem is given. Finally, some iteration methods are examined. Some of them are Picard iteration method, Mann iteration method, Ishikawa iteration method, Noor iteration method, Picard-S iteration method, Vatan two-step iteration method and Ullah and Arshad iteration method. Third section is finished with a lemma to be used in research findings.

In the fourth section, the strong convergence theorem of a iteration method to the solution of nonlinear Volterra integral equation is proven and the data dependence of the solution of this integral equation is researched. Then, an example is presented to support the results.

In the last section, the results and remarks, obtained in the study are included.

BÖLÜM 1. GİRİŞ

“Sabit Nokta Teorisi” çalışmaları 19. yüzyıl başlarına dayanmaktadır. Sabit nokta teorisi, adi diferansiyel denklemlerin çözümünün varlığını, tekliğini ve bir integral denklemde çözümün varlığını göstermek amacıyla başlamıştır.

Genel olarak sabit nokta teorisi çalışmaları iki yönde gelişmektedir. Birincisi tam metrik uzaylar üzerinde tanımlı daralma (büzülme) ve daralma tipi dönüşümler için sabit nokta teorisi, diğeri ise normlu lineer uzayların kompakt konveks alt kümeleri üzerinde tanımlı sürekli dönüşümler için sabit nokta teorisidir.

1922 yılında S. Banach tarafından ifade edilen ve “Daralma Dönüşümü İlkesi” olarak da bilinen Banach Sabit Nokta Teoremi, sabit noktanın varlığını ve tekliğini garanti eden en önemli teoremlerden biridir. Bu teorem ‘(X, d) bir tam metrik uzay ve $T: X \to X$ dönüşüm olsun. Her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq kd(x, y), \qquad 0 \leq k < 1$$

ise T, X de bir tek sabit noktaya sahiptir.’ şeklindedir. Bu teorem, S. Banach’ın doktora tezinin bir kısmı olarak belirlenmiş ve ispatı yapılmıştır. Bundan sonraki aşamalarda Banach’ın sabit nokta teoremi, matematiğin birçok dalındaki varlık problemlerinin çözümünde, kullanışlı ve kolaylık sağlayan bir unsur olmuştur.

Fizik ve mühendislik uygulamalarında zaman zaman diferansiyel denklemlerle ve integral denklemlerle karşılaşılır. Genellikle karşılaşılan diferansiyel denklemler, bilinmeyen fonksiyonun değişik türevlerinden oluşurlar. Türev, bir fonksiyonun bir nokta ve hemen yakınındaki değerleri kullanarak bulunduğundan, diferansiyel denklemler lokal (yerel) denklemlerdir. İntegral denklemler ise bütün uzay üzerinden integral alınmasını gerektirdiklerinden global (evrensel) denklemlerdir. Bu da aranan fonksiyonun bir noktadaki değerinin o fonksiyonun bütün uzay üzerinden integralini içeren ifadeler cinsinden bulunması demektir. İntegral denklemler genel olarak çözülmesi çok daha zor denklemlerdir. Bilindiği gibi tabiat kanunları diferansiyel denklemler yardımı ile ifade edilebilirler. Buradan, yakın çevre incelendiğinde evrenin tamamında geçerli tabiat kanunlarının bulunabileceği sonucu çıkarılabilir. Belki de büyük düşünür Albert Einstein'ın 'Bu tabiatın en anlaşılmaz yönü anlaşılabilir olmasıdır' sözünün altında yatan gerçeklerden bir tanesidir [1]. Diferansiyel denklemlerin önemli bir özelliği, tek başlarına bir problemi tanımlamaya yetmemeleridir. Onlara sınır şartlarının da ilave edilmesi gerekir. İntegral denklemler ise, bir problemin tam tanımını verirler. İlave şartlara ne gerek vardır, ne de koşulabilirler. Ancak, sınır şartları da uzayın bütününde onların ilgilenilen bölgeye etkisinin dolaylı yoldan denklemlere dahil edilmesi olarak yorumlanabileceğinde, integral denklemler ile diferansiyel denklemler arasında yakın bir ilişki olması da doğaldır.

İntegral denklemlerle ilk uğraşılar ise 19. yüzyılın ilk yarısında başlamıştır. Önceleri dağınık ve rastgele araştırmalar yapılmışken, aynı yüzyılın sonlarına doğru daha sistematik ve bilinçli araştırmaların yapıldığı ve bir takım sonuçların alınmaya başlandığı izlenmektedir. ABEL'in 1823 yılında bir mekanik problemini incelediği esnada ilk defa integral denkleme rastladığı bilinmektedir. Ancak İntegral Denklem deyimini Du Bois REYMOND'un 1888'de yayınlanan bir çalışmasında önerdiği anlaşılmaktadır [2].

İntegral denklemler, bilinmeyen fonksiyonun integral işareti altında bulunduğu denklemler olarak tanımlanmakla birlikte, bu tanım yetersiz kalmaktadır. Bir başka deyişle, bu tanımdan hareket ederek, integral denklemlerin bütün türlerini kapsayacak teoriyi kurmak olanaksızdır. Bu nedenle, birbirinden ayrı nitelikteki integral denklemleri tek tek incelemek gerekmektedir. Böylece geniş bir araştırma sahası açılmış olmakta ve konu bu oranda dağınık bir inceleme tarzı göstermektedir.

Bu çalışmadaki amaç, integral denklem çeşitlerinden Volterra integral denklemlerini, sabit nokta kavramını ve çeşitli iterasyon metodlarını inceleyip bir iterasyon metodunun lineer olmayan Volterra integral denklemlerin çözümüne kuvvetli yakınsamasını ve bu çözüm için veri bağımlılığını ispatlamaktır.

BÖLÜM 2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde tezin okunulabilirliğini ve anlaşılabilirliğini sağlamak amacıyla bazı temel bilgilere yer verilmiştir.

Tanım 2.1. (Metrik uzay)

X boştan farklı bir küme olsun. X üzerinde tanımlı bir metrik (metrik fonksiyon), her $x, y \in X$ için

a) $d(x, y) \geq 0$; (pozitif tanımlılık)
b) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
c) $d(x, y) = d(y, x)$ (simetriklik)

ve her $x, y, z \in X$ için

d) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (üçgen eşitsizliği)

özelliklerini sağlayan bir

$$d: X \times X \to \mathbb{R}$$

fonksiyonudur. Eğer d, X üzerinde bir metrik ise o zaman (X, d) çiftine bir metrik uzay denir [3].

Uyarı 2.1.

Aslında metrik aksiyomlarından (a) diğer üç aksiyomun bir sonucudur. Çünkü X bir metrik uzayı ise metrik aksiyomlarında (b), (c) ve (d) kullanılarak her $x, y \in X$ için

$$0 = d(x, x) \leq d(x, y) + d(y, x) = 2d(x, y)$$

yani $d(x,y) \geq 0$ bulunur. Bu yüzden metrik olduğunu gösterirken (a) koşulunun gerçeklendiği ayrıca gösterilmeyebilir [3].

Örnek 2.1.

$x, y \in \mathbb{F}$ (yani $\mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$) olmak üzere

$$d_{|.|}(x,y) = |x - y|$$

ile tanımlı $d_{|.|}$ (mutlak değer) metriği ile $\mathbb{F}$ kümesi bir metrik uzaydır. Bu metriğe $\mathbb{F}$ için doğal (alışılmış, standart) metrik adı verilir [3].

Örnek 2.2.

$C[a,b] = \{f| \ \ f:[a,b] \to \mathbb{F}$ fonksiyonu süreklidir$\}$ kümesini göz önüne alalım. $f, g \in C[a,b]$ için

$$d_\infty(f,g) \coloneqq \sup_{x\in[a,b]}|f(x) - g(x)|$$

ile tanımlı $d_\infty : C[a,b] \times C[a,b] \to \mathbb{R}$ metriği ile $(C[a,b], d_\infty)$ bir metrik uzaydır. d_∞, $C[a,b]$ uzayı için doğal metriktir ve bu metriğe $C[a,b]$ için supremum metriği (ya da düzgün metrik) denir [3].

Tanım 2.2. (Yakınsak dizi)

(X,d) bir metrik uzay ve $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ bu uzayda bir dizi olsun. Her bir $\varepsilon > 0$ için $n \geq n_0$ olduğunda $d(x_n, x) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sayısı varsa $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisine $x \in X$ noktasına yakınsaktır denir [4].

Tanım 2.3. (Cauchy dizisi)

(X, d) bir metrik uzay ve $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ bu uzayda bir dizi olsun. Her bir $\varepsilon > 0$ için $m, n \geq n_0$ olduğunda, $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sayısı varsa $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisine Cauchy dizisi denir [4].

Tanım 2.4. (Tam metrik uzay)

(X, d) metrik uzay olsun. X'teki her $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ Cauchy dizisi yakınsak ise (X, d) metrik uzayına tamdır denir [5].

Örnek 2.3.

a $< b$ olmak üzere I $= [a, b]$ olsun. $C(I) = \{u; \quad u: I \to C$ sürekli fonksiyon$\}$ kümesi ele alalım. $u, v \in C(I)$ için

$$d(u, v) = \sup_{x \in \mathrm{I}} \frac{|u(x) - v(x)|}{\varphi\,(x)}$$

ile tanımlı $d: C(I) \times C(I) \to \mathbb{R}$ metriği ile $C(I)$ kümesi bir metrik uzaydır. Burada $\varphi: I \to (0, \infty)$ azalmayan sürekli bir fonksiyondur. $(C(I), d)$ uzayı tam metrik uzaydır [6].

Tanım 2.5. (Lineer uzay)

L boş olmayan bir küme ve $\mathbb{F}$ bir cisim olsun. $+: L \times L \to L$ ve $.: \mathbb{F} \times L \to L$ işlemleri tanımlansın. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa L'ye $\mathbb{F}$ cismi üzerinde vektör uzay (lineer uzay) denir.

a. $L, +$ işlemine göre değişmeli bir gruptur. Yani;

(i) Her $x, y \in L$ için $x + y \in L$ dir,

(ii) Her $x, y, z \in L$ için $x + (y + z) = (x + y) + z$ dir,

(iii) Her $x \in L$ için $x + \theta = \theta + x = x$ olacak şekilde bir $\theta \in L$ vardır,

(iv) Her $x \in L$ için $x + (-x) = (-x) + x = \theta$ olacak şekilde bir $-x \in L$ vardır,

(v) Her $x, y \in L$ için $x + y = y + x$ dir.

b. $x, y \in L$ ve $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ olmak üzere aşağıdaki şartlar sağlanır.

(i) $\alpha . x \in L$ dir,

(ii) $\alpha . (x + y) = \alpha . x + \alpha . y$ dir,

(iii) $(\alpha + \beta). x = \alpha . x + \beta . x$ dir,

(iv) $(\alpha . \beta). x = \alpha . (\beta . x)$ dir,

(v) $1. x = x$ dir, (Burada 1, $\mathbb{F}$' nin birim elemanıdır.)

$\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ise L'ye reel lineer uzay, $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ ise L'ye kompleks lineer uzay adı verilir [7].

Tanım 2.6. (Konveks küme)

L bir reel lineer uzay ve $A \subseteq L$ olsun. Her $x \in A$ için

$$B = \{z \in L : z = \alpha x + (1 - \alpha) y,\ 0 \leq \alpha \leq 1\} \subseteq A$$

ise A kümesine konvekstir denir [8].

Tanım 2.7. (Normlu uzay)

X, $\mathbb{F}$ üzerinde bir vektör uzay olsun. X üzerinde bir norm aşağıdaki özellikleri sağlayan bir $\|.\| : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonudur. Her $x, y \in X$ ve her $\alpha \in \mathbb{F}$ için

a. $\|x\| \geq 0$
b. $\|x\| = 0$ ancak ve ancak $x = 0$
c. $\|\alpha x\| = |\alpha| . \|x\|$

d. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Üzerinde bir $\|.\|$ normu tanımlanmış olan bir X vektör uzayına normlu vektör uzay ya da sadece normlu uzay adı verilir ve $(X, \|.\|)$ ile gösterilir [3].

Tanım 2.8. (Banach uzay)

X bir normlu lineer uzay olsun. Eğer X uzayı, $d(x, y) = \|x - y\|$, $(x, y \in X)$ ile verilen normdan üretilen metriğe göre tam ise bu uzaya Banach uzayı denir. $\mathbb{F}$ nin reel veya kompleks lineer uzay oluşuna göre X Banach uzayıda reel veya kompleks Banach uzayı olarak adlandırılır [9].

Tanım 2.9. (Düzgün konveks uzay)

$(X, \|.\|)$ bir normlu vektör uzay olsun. Eğer her bir $\varepsilon > 0$ ve $x, y \in X$ için $\|x\| \leq 1$, $\|y\| \leq 1$ ve $\|x - y\| \geq \varepsilon$ olduğunda

$$\frac{\|x-y\|}{2} \leq 1 - \delta$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı varsa, X uzayına düzgün konvekstir denir.[3].

Tanım. 2.10. (Sürekli dönüşüm)

(X, d) ve (Y, ρ) iki metrik uzay $f: X \to Y$ bir dönüşüm ve $x_0 \in X$ olsun. Her bir $\varepsilon > 0$ sayısı için $d(x, x_0) < \delta$ olduğunda $\rho(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ veya denk bir ifade ile $f(D(x_0; \delta)) \subseteq D(f(x_0); \varepsilon)$ olacak şekilde bir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sayısı varsa, f ye x_0 noktasında süreklidir denir [8].

Tanım 2.11. (Kuvvetli yakınsaklık)

$\{x_n\}$, (X,d) metrik uzayı içinde bir dizi, ve $x_0 \in X$ olsun. Eğer $\lim_{n\to\infty} d(x_n, x_0) = 0$ ise, başka bir deyişle, eğer $\forall\varepsilon > 0$ için $\exists n_\varepsilon \epsilon\, \mathbb{N} \ni \forall n > n_\varepsilon$ için $d(x_n, x_0) < \varepsilon$ oluyorsa,$\{x_n\}$ dizisi x_0 noktasına yakınsıyor (ya da kuvvetli yakınsıyor) denir ve

$x_n \to x_0$ ya da $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$

şeklinde gösterilir [10].

Tanım 2.12. (İç çarpım uzayı)

$K = \mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$ olmak üzere X bir vektör uzayı olsun. $\langle .,. \rangle : X \times X \to K$ dönüşümü aşağıdaki özelliklere sahip ise $\langle .,. \rangle$' ye X üzerinde bir iç çarpım, $(X, \langle .,. \rangle)$ ikilisine de iç çarpım uzayı (veya ön Hilbert uzayı) denir [3].

(i) Her $x \in X$ için $\langle x, x \rangle \geq 0$ ve $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
(ii) Her $x, y \in X$ için $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ (kompleks eşlenik);
(iii) Her $x, y \in X$ için ve $a \in K$ için $\langle ax, y \rangle = a\langle x, y \rangle$;
(iv)Her $x, y, z \in X$ için $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$.

Tanım 2.13. (Hilbert uzayı)

Bir $(X, \langle .,. \rangle)$ iç çarpım uzayı $\|x\| = \langle x, x \rangle^{1/2}$ normuna göre tam ise, yani $(X, \langle .,. \rangle)$ içindeki her Cauchy dizisi yakınsarsa, bu iç çarpım uzayına Hilbert uzayı denir [3].

Tanım 2.14. [11]

(X, d) bir metrik uzay ve $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun.

i) Her $x, y \in X$ için
$d(Tx, Ty) \leq Ld(x, y)$

olacak şekilde $L > 0$ sabit sayısı varsa, T ye Lipschitzian (ya da L-Lipschitzian) dönüşüm denir.

ii) $\alpha \in [0,1)$ olmak üzere T, α-Lipschitzian dönüşüm ise T ye daralma dönüşümü denir.

iii) T, 1-Lipschitzian dönüşüm ise T ye genişlemeyen dönüşüm denir.

iv) Her $x, y \in X$ ve $x \neq y$ için

$$d(Tx, Ty) < d(x, y)$$

ise T ye kesin daralma dönüşümü denir.

Tanım 2.15. (Pseudo-kesin daralma dönüşümü)

X bir reel Banach uzayı ve $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in X$ ve $r > 0$ için

$$\|x - y\| \leq \|(1 + r)(x + y) - r(Tx - Ty)\|$$

ise T ye pseudo-kesin daralma dönüşümü denir [11].

Tanım 2.16. (Quasi-daralma dönüşümü)

(X, d) bir tam metrik uzay ve $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq h.max\{d(x, y), d(x, Tx), d(y, Ty), d(x, Ty), d(y, Tx)\}$$

olacak şekilde bir $h \in (0,1)$ sayısı varsa T ye quasi-daralma dönüşümü denir [12].

Tanım 2.17. (Asimptotik genişlemeyen dönüşüm)

X bir normlu uzay, $K \subseteq X$ boş olmayan bir alt küme ve $T: K \to K$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $x, y \in K$ ve her $n \geq 1$ için

$$\|T^n x - T^n y\| \leq k_n \|x - y\|$$

olacak şekilde $k_n \to 1$ şartını sağlayan bir $\{k_n\} \subset [1, \infty)$ dizisi varsa T ye asimptotik genişlemeyen dönüşüm denir [13].

Asimptotik genişlemeyen dönüşümlerin sınıfı, genişlemeyen dönüşümlerin bir genellemesidir. Yani, her genişlemeyen dönüşüm asimptotik genişlemeyen bir dönüşümdür. Fakat tersi doğru değildir [13].

BÖLÜM 3. İNTEGRAL DENKLEMLER VE İTERASYON YÖNTEMLERİ

3.1. İntegral Denklemler

Tanım 3.1. (İntegral denklem)

İntegral işareti altında bir bilinmeyen ihtiva eden denklemdir [14].

3.1.1. İntegral denklemlerin sınıflandırılması

İntegral denklemler farklı özelliklerine göre aşağıdaki gibi sınıflandırılabilirler.

3.1.1.1. Lineer ve lineer olmayan integral denklemler

İntegral denklemler temel kavramlar açısından öncelikle, lineer ve lineer olmayan integral denklemler olarak iki büyük sınıfa ayrılır.

$u(x)$ bilinmeyen fonksiyon, $\lambda \neq 0$ reel veya kompleks bir parametre olmak üzere,

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_{a}^{x} K(x,t)u(t)dt$$

yapısında bir integral denklemde, $u(x)$ fonsiyonunun lineer olması halinde integral denklem de lineer integral denklem adını almaktadır [14].

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_{a}^{x} K(x,t)u^{n}(t)dt$$

integral denkleminde ise $u(x)$ bilinmeyen fonksiyonun $n.$ kuvveti bulunduğundan lineer olmayan bir integral denklem olmaktadır. Bunun gibi, daha genel olarak

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_{a}^{x} \phi[x,t,u(t)]dt$$

integral denklemi de lineer olmayan integral denklem olmaktadır [14].

Örnek 3.1.

$$y(x) = g(x) + \psi\left(\int_{a}^{x} f\left(x,t,y(t),y\big(\alpha(t)\big)\right)dt\right)$$

integral denklemi de lineer olmayan bir integral denklemdir. Bunların dışında birden çok sayıda değişkeni bulunan,

$$u(x,y) = f(x,y) + \lambda \int_{a}^{b}\int_{c}^{d} K[x,t;t_1,t_2]dt_1dt_2$$

şeklindeki integral denklemlerin de lineer olanı veya lineer olmayanı bulunmaktadır. Ele alınacak bir integral denklemin öncelikle lineer olup olmadığının saptanmasında yarar vardır [14].

3.1.1.2. Tekil ve tekil olmayan lineer integral denklemler

Tanım 3.2.

İntegral denklemlerin sınıflandırılmasında $K(x,t)$ fonksiyonunun sürekliliği önemlidir. $K(x,t)$ fonksiyonuna çekirdek fonksiyon denir. $K(x,t)$ fonksiyonu $a \leq x \leq b,\ a \leq t \leq b$ aralığında sürekli ise integral denklem tekil (singüler) olmayan integral denklem denir. Eğer $K(x,t)$ bu aralıkta sürekli değilse integral denklem tekil integral denklem olarak adlandırılır [14].

Örnek 3.2.

$0 < \alpha <1$ olmak üzere,

$$f(x) = \int_0^x \frac{u(t)dt}{(x-t)^\alpha}$$

şeklindeki bir integral denklem tekil integral denklem sınıfına girmektedir. Ayrıca, integral sınırlarından en az birinin sonsuz olması halinde de denklem, tekil integral denklemler sınıfına girmektedir.

$$f(x) = \lambda \int_0^\infty sinxt\, u(t)dt$$

ve

$$f(x) = \lambda \int_0^\infty e^{-xt}\, u(t)dt$$

denklemleri bu türe birer örnek teşkil etmektedir. Bunların ilkinde tanımlanan $f(x)$ fonksiyonu, $u(x)$ fonksiyonunun Fourier Sinüs Transformasyonu, ikincisinde ise $u(x)$ fonksiyonunun Laplace Transformasyonu olarak kullanılır [14].

3.1.2. İntegral denklemlerin yapılarına göre sınıflandırılması

İntegral denklemler, yapılarına göre üç sınıfa ayrılır.

Tanım 3.3. (I. cins integral denklemler)

$u(x)$ bilinmeyen fonksiyon ve $K(x,t)$ çekirdek fonksiyon olmak üzere,

$$\phi(x) = \lambda \int_a^b K(x,t)u(t)dt \tag{3.1}$$

şeklindeki bir integral denkleme I. cins integral denklem denir. Bilinmeyen fonksiyon sadece integral içinde mevcuttur. Burada $\phi(x)$ fonksiyonu bilinen bir fonksiyondur. Benzer şekilde,

$$\phi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)u(t)dt$$

şeklindeki bir integral denklem de yine I. cins integral denklemdir. Burada $\phi(x)$ ve $f(x)$ bilinen fonksiyonlardır. Ancak bu denklemler,

$$\phi(x) - f(x) = \psi(x)$$

olmak üzere

$$\psi(x) = \lambda \int_a^b K(x,t)u(t)dt$$

şeklinde ifade edilerek (3.1) yapısında yazılabilir [14].

Örnek 3.3.

$$x^2 = \int_0^1 (x-t)u(t)dt$$

ve

$$e^x = x - \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 t\, u(t)dt$$

denklemleri, I. cins integral denklemlerdir [14].

Tanım 3.4. (II. cins integral denklemler)

$u(x)$ bilinmeyen fonksiyon ve $K(x,t)$ çekirdek fonksiyon olmak üzere

$$u(x) = \lambda \int_a^b K(x,t)u(t)dt \tag{3.2}$$

veya

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)u(t)dt \tag{3.3}$$

şeklindeki integral denklemlere II. cins integral denklemler denir [14]. Görüldüğü gibi, $u(x)$ bilinmeyen fonksiyonu integralin hem içinde hem de dışında mevcuttur.

Örnek 3.4.

$$u(x) = 5 - e^{-x} \int_0^1 x^2 t^2 u(t)dt$$

ve

$$u(x) = 1 + x + \int_0^2 \sin(x+t)\, u(t)dt$$

denklemleri, II. cins integral denklemlerdir [14].

Tanım 3.5. (III. cins integral denklemler)

$\phi(x), f(x)$ ve $K(x,t)$ bilinen fonksiyonlar ve $u(x)$ bilinmeyen fonksiyon olmak üzere

$$\phi(x)u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)u(t)dt \tag{3.4}$$

şeklindeki integral denkleme III. cins integral denklemler denir [14].

Özel olarak $\phi(x) = 0$ ise (3.4) denklemi I. cins integral denkleme, $\phi(x) = 1$ ise aynı denklem II. cins integral denkleme dönüşmektedir. Buradan I. ve II. cins integral denklemlerin, III. cins integral denklemlerin birer özel hali olduğu görülmektedir.

Örnek 3.5.

$$x\, u(x) = 1 - e^{-x} \int_0^1 x^2 t^2 u(t)dt$$

denklemi III. cins bir integral denklemdir [14].

3.1.2.1. Homojen ve homojen olmayan integral denklemler

Tanım 3.6.

İntegral denklemler $u(x)$ bilinmeyen fonksiyonun homojen olup olmadığına göre sınıflandırılabilir. II. cins integral denklemler için söz konusu böyle bir sınıflandırma (3.2) ile verilen

$$u(x) = \lambda \int_a^b K(x,t)u(t)dt$$

integral denklemi için yapılırsa, bu denklem homojen integral denklem olarak adlandırılır. Homojenliği bozan bir $f(x)$ fonksiyonu içeren (3.3) formundaki,

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)u(t)dt$$

gibi denklemlere ise homojen olmayan integral denklemler denir [14].

$$u(x) = \lambda \int_a^b K(x,t)u(t)dt$$

homojen integral denkleminin kolayca görülebildiği gibi $u(x) \equiv 0$ olan bir çözümü vardır. Buna aşikar çözüm, sıfır çözüm veya trivial çözüm denir. Ancak bunun dışında çözümlerinin bulunup bulunmadığının veya hangi koşullar altında çözümün olabileceğinin araştırılması başlı başına bir konudur. Homojen integral denklemler daha genel bir yapıya sahip

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)u(t)dt$$

şeklindeki bir integral denklemin $f(x) = 0$ olması haline uyan özel bir durumu olarak göz önüne alınabilir [14].

3.1.2.2. Volterra ve Fredholm integral denklemleri

Tanım 3.7.

İntegral denklemler integral sınırlarının değişken veya sabit olmasına göre de sınıflandırılırlar. Lineer ve homojen olup olmadıklarına bakılmaksızın,

$$\phi(x) = \lambda \int_a^x K(x,t)u(t)dt$$

$$u(x) = \lambda \int_a^x K(x,t)u(t)dt$$

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x,t)u(t)dt$$

$$\phi(x)u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x,t)u(t)dt$$

gibi denklemlere Volterra İntegral Denklemleri denilmektedir [14]. Bu tür denklemlerde integral işaretinin üst sınırında (veya sınırlarından birinde) x değişkeni bulunmaktadır. x değişkeninin b gibi sabit bir değere eşit olması durumda yazılabilecek

$$\phi(x) = \lambda \int_a^b K(x,t)u(t)dt$$

$$u(x) = \lambda \int_a^b K(x,t)u(t)dt$$

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)u(t)dt$$

$$\phi(x)u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)u(t)dt$$

şeklindeki denklemlere ise Fredholm İntegral Denklemleri denilmektedir [14]. Volterra ve Fredholm integral denklemleri arasındaki tek fark bu sınır yapısında ortaya çıkmaktadır. Ancak bu iki denklem türünün incelenmesi, zaman zaman iç içe girmiş bir görünüm verebilmektedir.

Tanım 3.8. [15]

$$y(x) = g(x) + \psi\left(\int_a^x f\left(x,t,y(t),y\big(\alpha(t)\big)\right)dt\right), \qquad x \in [a,b]$$

şeklindeki denklemlere gecikmeli Volterra integral denklemleri denir. Burada

- a ve b sayıları $a < b$ şartını sağlayan sabit reel sayılardır,
- ψ fonksiyonu bilinen bir fonksiyondur,
- $g: [a,b] \to \mathbb{C}$ ve $f: [a,b] \times [a,b] \times \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ sürekli fonksiyonlardır,
- $\alpha: [a,b] \times [a,b]$ olmak üzere her $x \in [a,b]$ için $\alpha(x) \leq x$ şartını sağlayan sürekli bir gecikme fonksiyonudur.

2013 yılında Castro ve Guerra [15], gecikmeli Volterra integral denklemlerin çözümünün varlığını ve tekliğini ispat etmiştir.

Teorem 3.1.

$\mu: I \times I \to [0,\infty)$ ve $\eta: I \times I \to [0,\infty)$ iki sürekli fonksiyon olsun. $g \in C(I)$, $f: I \times I \times \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ sürekli bir fonksiyon ve her $x \epsilon I$ için $\alpha(x) \leq x$ şartını sağlayan $\alpha: I \to I$ fonksiyonu sürekli bir gecikme fonksiyonu ve $\psi: C(I) \to C(I)$ fonksiyonu, $K > 0$ sabit sayı olmak üzere

$$d(\psi(h_1),\psi(h_2)\,) \leq K\, d\big(h_{1,}h_2\big)$$

eşitsizliğini sağlayacak şekilde verilmiş sınırlı bir fonksiyon olsun. Bunlara ek olarak, $\int_a^x \mu(x,t)\varphi(t)dt \leq \beta\varphi(x)$ ve $\int_a^x \eta(x,t)\varphi(t)dt \leq \gamma\varphi(x)$ eşitsizliklerini sağlayan $\beta,\gamma\, \epsilon[0,1)$ sabitlerinin var olduğunu ve her $x,t\ \in I,\, u,v \in \mathbb{C}(I)$ için

$$\left|f\left(x,t,u(t),u\big(\alpha(t)\big)\right) - f\left(x,t,v(t),v\big(\alpha(t)\big)\right)\right|$$

$$\leq \mu(x,t)|u(t)-v(t)| + \eta(x,t)\big|u\big(\alpha(t)\big) - v\big(\alpha(t)\big)\big|$$

eşitsizliğinin sağlandığını varsayalım. $K\ (\beta+\gamma) < 1$ ise

$$y(x) = g(x) +\ \psi\left(\int_a^x f\left(x,t,y(t),y\big(\alpha(t)\big)\right)dt\right), \qquad x \in I \tag{3.5}$$

lineer olmayan gecikmeli Volterra integral denkleminin tek bir $y_0 \in C(I)$ çözümü vardır [15, Teorem 2.1].

3.2. Sabit Nokta Kavramı

Tanım 3.9. (Sabit Nokta)

X boş olmayan bir küme ve $T\!: X \to X$ bir fonksiyon olsun. $Tx = x$ eşitliğini sağlayan $x \in X$ elemanına T nin bir sabit noktası denir [16]. O halde $Tx = x$ denkleminin çözümü veya çözümleri T nin sabit noktalarıdır. T nin tüm sabit noktalarının kümesi $F(T)$ ile gösterilir.

Aşağıdaki örneklerden de görüleceği gibi $T\!: X \to X$ ile tanımlanan bir T fonksiyonunun herhangi bir sabit noktası olmayabilir veya bir sabit noktası olabilir ya da birden çok sabit noktası olabilir.

Örnek 3.6. [13]

i. $X = [0,4]$ olmak üzere $T: X \to X$, $Tx = 4 - x$ dönüşümü için $F\,(T) = \{2\}$ dir.

ii. $X \neq \emptyset$ olmak üzere $I: X \to X$ özdeş dönüşümü için X in her bir noktası bir sabit noktadır.

iii. $X = [0,3]$ ve $Y = [4,5]$ olmak üzere herhangi bir $T: X \to Y$ dönüşümünün sabit noktası yoktur.

iv. $X = \mathbb{R}$ olmak üzere, $T: X \to X$, $Tx = x^5$ dönüşümünün sabit noktalarının kümesi $F(T) = \{-1,0,1\}$ dir.

v. $T: (0,1) \to (0,1]$, $Tx = \frac{x}{5}$ dönüşümünün sabit noktası yoktur. Bu dönüşüm için $x = 0$ noktası tek sabit nokta olabilirdi. Fakat $0 \notin (0,1]$ dir.

Teorem 3.2.

(X, d) bir metrik uzay ve $T: X \to X$ bir daralma fonksiyonu ise T, X üzerinde düzgün süreklidir [16].

Tanım 3.10.

X boş olmayan bir küme ve $T: X \to X$ bir fonksiyon olsun.

$T \circ T(x) = T(T(x))$

ile verilen fonksiyonda X den X e bir fonksiyondur ve T nin ikinci iterasyonu adını alır. Genel olarak n adet T den elde edilen $T \circ T \circ T \circ \ldots \circ T(x)$, n. iterasyon adını alır ve

$$\underbrace{T \circ T \circ T \circ \dots \circ T(x)}_{n\ adet\ T} = T\big(T(\dots T(x)\big)$$

ile verilir ve $T^n = \underbrace{T \circ T \circ T \circ \dots \circ T}_{n\ adet\ T}$ ile gösterilir [16].

Örnek 3.11.

$T(x) = x^3$ ile tanımlı $T: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun üçüncü iterasyonu

$$T^3(x) = T\left(T\big(T(x)\big)\right) = ((x^3)^3)^3) = x^{27}$$

ile verilir.

Teorem 3.3. (Banach Sabit Nokta Teoremi)

(X, d) tam metrik uzay ve $T: X \to X$ bir daralma dönüşümü olsun. Bu durumda T bir tek sabit noktaya sahiptir [13].

Örnek 3.12.

$K = [0,1] \subset \mathbb{R}, T: K \to K, Tx = \frac{x}{4}$ olsun. $x_0 = \frac{1}{4}$ olarak seçelim. Buradan,

$$x_1 = Tx_0 = \frac{1}{16}$$

$$x_2 = Tx_1 = T^2x_0 = \frac{1}{64}$$

$$x_3 = Tx_2 = T^2x_1 = T^3x_0 = \frac{1}{256}$$

$\vdots$

$$x_n = Tx_{n-1} = T^2x_{n-2} = \cdots = T^nx_0 = \frac{1}{4^{n+1}}$$

$\vdots$

şeklinde bir $\{x_n\}$ dizisi elde ederiz. $n \to \infty$ için

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0$$

olur. Dolayısıyla T dönüşümünün sabit noktası $0 \in [0,1]$ dir. Sabit nokta tanımından da

$$Tx = x \Rightarrow \frac{x}{4} = x \Rightarrow x = 4x \Rightarrow x = 0$$

dir. Yani $x = 0$, T dönüşümünün sabit noktasıdır.

Teorem 3.4.

(X, d) bir tam metrik uzay ve $n \in N$ için T^n bir daralma dönüşümü olacak şekilde bir $T: X \to X$ dönüşümü verilsin. Bu durumda T bir tek sabit noktaya sahiptir [17].

3.3. İterasyon Yöntemleri

Bir dönüşümün sabit noktasını veya noktalarını bulurken çeşitli iterasyon metodları kullanılır. Bunlardan bazıları aşağıda verilmiştir.

3.3.1. Picard iterasyon metodu

(X, d) bir metrik uzay, $K \subseteq X$ kapalı bir alt küme ve $T: K \to K$ bir dönüşüm olsun. $x_0 \in X$ olmak üzere Picard İterasyonu

$$x_n = Tx_{n-1} = T^n x_0, \quad n \geq 1, \tag{3.6}$$

şeklinde tanımlanır [18].

Tam metrik uzayda tanımlı daralma dönüşümlerinin sabit noktalarına yaklaşım için kullanılan iterasyonlardan biri de Picard iterasyonudur. Daralma dönüşümü yerine farklı sınıftan bir dönüşüm alınırsa Picard iterasyonu, dönüşümün sabit noktasına yakınsamayabilir.

Örnek 3.13.

$X = [0,1]$ olmak üzere her $x \in [0,1]$ için $T: [0,1] \to [0,1]$, $Tx = 1 - x$ olsun. T genişlemeyen bir dönüşümdür ve $F(T) = \frac{1}{2}$ dir. Herhangi bir $x_0 = \alpha \neq \frac{1}{2}$ noktası için (3.6) Picard iterasyonu,

$$x_1 = Tx_0 = 1 - \alpha$$

$$x_2 = Tx_1 = T^2x_0 = \alpha$$

$$x_3 = Tx_2 = T^2x_1 = T^3x_0 = 1 - \alpha$$
$$\vdots$$
$$x_n = Tx_{n-1} = T^2x_{n-2} = \cdots = T^nx_0$$
$$\vdots$$

şeklinde olup bu da $(\alpha, 1 - \alpha, \alpha, 1 - \alpha, \dots)$ salınımlı dizisine karşılık gelir. Bu dizi $\alpha \neq \frac{1}{2}$ için yakınsak olmadığından, Picard iterasyonu dönüşümün sabit noktasına yakınsamaz. Dolayısıyla istenilen sabit noktayı bulmak için diğer iterasyon metodlarını göz önüne almak gerekir [13].

3.3.2. Mann iterasyon metodu

Banach sabit nokta teoremini sağlamayan dönüşümlerin sabit noktalarını elde etmek için kullanılmıştır.

X bir normlu uzay, $K \subseteq X$ boş olmayan konveks bir alt küme, $T: K \to K$ bir dönüşüm ve $x_0 \in K$ keyfi bir nokta olmak üzere Mann iterasyonu

$$x_{n+1} = (1-\alpha_n)x_n + \alpha_n T x_n, \quad n \geq 0 \tag{3.7}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\alpha_n \in [0,1]$ dir [19].

(3.7) ile verilen Mann iterasyonunda her $n \geq 0$ için $\alpha_n = 1$ olarak alınırsa bu iterasyon, Picard iterasyonuna indirgenir.

W. R. Mann'ın bulmuş olduğu sonuçlar R. L. Franks ve R. P. Marzec [20] tarafından, aynı şekilde Franks ve Marzec'in sonuçları da B. E. Rhoades [21] tarafından genişletilmiştir. Yine B. E. Rhoades [21] herhangi bir kapalı ve sınırlı aralıktan yine bu aralığa tanımlı bir dönüşüm için Mann iterasyonunun bu dönüşümün bir sabit noktasına yakınsadığını göstermiştir.

Örnek 3.14.

$X = [\frac{1}{2}, 2]$ kümesi üzerinde, $T: X \to X$, $Tx = \frac{1}{x}$ olarak tanımlanırsa, Mann iterasyonu bu dönüşümün sabit noktası olan $x = 1$ e yakınsar [13].

3.3.3. Ishikawa iterasyon metodu

Lipschitzian ve pseudo-kesin daralma dönüşümleri için Mann iterasyon yönteminin yetersizliği durumunda yeni bir iterasyon metodu olarak oluşturulmuştur. Bu iterasyon ilk olarak bir Hilbert uzayının konveks ve kompakt alt kümesi üzerinde tanımlı Lipschitzian ve pseudo-kesin daralma bir dönüşümün sabit noktaya kuvvetli yakınsadığını göstermek amacıyla kullanılmıştır [11].

X bir normlu uzay, $K \subseteq X$ boş olmayan konveks alt küme, $T: K \to K$ bir dönüşüm ve $x_0 \in K$ keyfi bir nokta olmak üzere Ishikawa iterasyonu

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1-\alpha_n)x_n + \alpha_n T y_n, \\ y_n = (1-\beta_n)x_n + \beta_n T x_n, \qquad n \geq 0 \end{cases} \tag{3.8.}$$

şeklinde tanımlanır. Burada α_n, $\beta_n \in [0,1]$ dir [22].

(3.8) ile verilen iterasyonda her $n \geq 0$ için $\beta_n = 0$ alınırsa, bu iterasyon Mann iterasyonuna indirgenir. Buna rağmen Mann ve Ishikawa iterasyonları için yakınsama sonuçları arasında genel bir bağ yoktur [11].

3.3.4. Noor iterasyon metodu

X bir normlu uzay, $K \subseteq X$ boş olmayan konveks alt küme, $T: K \to K$ bir dönüşüm ve $x_0 \in K$ keyfi bir nokta olmak üzere Noor iterasyonu

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1-\alpha_n)x_n + \alpha_n T y_n, \\ y_n = (1-\beta_n)x_n + \beta_n T z_n, \\ z_n = (1-\gamma_n)x_n + \gamma_n T x_n, \quad n \geq 0 \end{cases} \tag{3.9}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n \in [0,1]$ dir [23].

M. A. Noor [23], Hilbert uzaylardaki çeşitli eşitsizliklerin yaklaşık çözümlerini çalışmak için Noor (3-adım) iterasyonunu tanıtmıştır. B. Xu ve M. A. Noor [24], (3.9) ile verilen iterasyonun düzgün konveks bir Banach uzayının kapalı, sınırlı ve konveks alt kümesinde kendi üzerine tanımlanmış asimptotik genişlemeyen bir dönüşümün sabit noktaya yakınsaklığını çalışmışlardır.

(3.9) ile verilen Noor iterasyonunda her $n \geq 0$ için $\gamma_n = 0$ olarak alınırsa bu iterasyon Ishikawa iterasyonuna ve her $n \geq 0$ için $\beta_n = \gamma_n = 0$ alınırsa bu iterasyon Mann iterasyonuna indirgenir [25].

3.3.5. SP-iterasyon metodu

X bir Banach uzay, $T: X \to X$ bir dönüşüm ve $x_0 \in X$ keyfi bir nokta olmak üzere SP-iterasyonu

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1-\alpha_n)\, y_n + \alpha_n T y_n, \\ y_n = (1-\beta_n)\, z_n + \beta_n T z_n, \\ z_n = (1-\gamma_n)\, x_n + \gamma_n T x_n, \quad n \geq 0 \end{cases} \tag{3.10}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n \in [0,1]$ dir [26].

SP-iterasyon metodunda her $n \geq 0$ için $\beta_n = \gamma_n = 0$ alınırsa bu iterasyon Mann iterasyonuna indirgenir [25]. Ayrıca W. Phuengrattana ve S. Suantai [26] SP-iterasyon metodunun sürekli ve genişlemeyen dönüşümler için Noor iterasyon metodundan daha hızlı yakınsadığını göstermişlerdir.

3.3.6. S-iterasyon metodu

X bir lineer uzay, $K \subseteq X$ boş olmayan konveks alt küme, $T: K \to K$ bir dönüşüm ve $x_1 \in K$ keyfi bir nokta olmak üzere S-iterasyonu

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1-\alpha_n) T x_n + \alpha_n T y_n, \\ y_n = (1-\beta_n)\, x_n + \beta_n T x_n, \quad n \geq 1 \end{cases}$$

(3.11)

şeklinde tanımlanır. Burada $\alpha_n, \beta_n \in [0,1]$ dir [27].

S-iterasyon yöntemi Mann ve Ishikawa iterasyon yöntemlerinden bağımsızdır. Yani S-iterasyonu ile Mann veya Ishikawa iterasyonu birbirinden elde edilemez. R. P. Agarwal, D. O'Regan ve D. R. Sahu [27] daralma dönüşümleri için S-iterasyon yönteminin yakınsama hızının Picard iterasyon yönteminin yakınsama hızına denk ve diğer sabit nokta iterasyon yöntemlerinin yakınsama hızlarından daha hızlı olduğunu göstermişlerdir.

3.3.7. Normal-S iterasyon metodu

X bir normlu lineer uzay, $K \subseteq X$ boş olmayan konveks alt küme, $T: K \to K$ bir dönüşüm ve $x_1 \in K$ olmak üzere Normal-S iterasyonu

$$\left\{x_{n+1} = T\left((1-\alpha_n)x_n + \alpha_n T x_n\right),\ n \in N\right. \tag{3.12}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\alpha_n \in (0,1)$ dir [28].

D. R. Sahu [28] daralma dönüşümleri için Normal-S iterasyon yönteminin yakınsama hızını Mann iterasyon yönteminin yakınsama hızından daha hızlı olduğunu göstermiştir.

3.3.8. Modifiye-SP iterasyon metodu

X bir lineer uzay, $K \subseteq X$ boş olmayan konveks alt küme, $T: K \to K$ bir dönüşüm ve $x_1 \in K$ olmak üzere

$$\begin{cases} x_{n+1} = T y_n, \\ y_n = (1-\alpha_n) z_n + \alpha_n T z_n, \\ z_n = (1-\beta_n) x_n + \beta_n T x_n, \qquad n \in \mathbb{N} \end{cases} \tag{3.13}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\alpha_n, \beta_n \in (0,1)$ dir [29].

(3.13) ile verilen iterasyon yöntemi $\alpha_n, \beta_n \in (0,1)$ olduğu için Picard, Mann, Ishikawa ve S iterasyon yöntemlerinden bağımsızdır. Eğer (3.13) de her $n \in \mathbb{N}$ için $\beta_n = 0$ alınırsa Normal-S iterasyonu ve her $n \in \mathbb{N}$ için $\alpha_n = \beta_n = 0$ alınırsa da Picard iterasyonu elde edilir [29].

N. Kadıoğlu ve I. Yıldırım [29] Modifiye-SP iterasyon yönteminin daralma dönüşümleri için S ve Normal-S iterasyonlarından daha hızlı yakınsadığını göstermişlerdir.

3.3.9. CR-iterasyon metodu

X bir Banach uzay, $T: X \to X$ bir dönüşüm ve $x_0 \in X$ keyfi bir nokta olmak üzere CR-iterasyonu

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1-\alpha_n)\, y_n + \alpha_n T y_n, \\ y_n = (1-\beta_n) T x_n + \beta_n T z_n, \\ z_n = (1-\gamma_n)\, x_n + \gamma_n T x_n, \quad n \in \mathbb{N} \end{cases} \tag{3.14}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n \in [0,1]$ ve $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = \infty$ dir [25].

R. Chugh, V. Kumar ve S. Kumar [25], Banach uzayda quasi-daralma dönüşümleri için CR-iterasyon yönteminin yakınsama hızının Picard, Mann, Ishikawa, Noor, S ve SP-iterasyon metotlarından daha hızlı olduğunu göstermişlerdir.

3.3.10. Abbas ve Nazır iterasyon metodu

X bir normlu uzay $K \subseteq X$ boş olmayan konveks alt küme $T: K \to K$ bir dönüşüm ve $x_1 \in K$ olmak üzere

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1-\alpha_n) T y_n + \alpha_n T z_n, \\ y_n = (1-\beta_n) T x_n + \beta_n T z_n, \\ z_n = (1-\gamma_n)\, x_n + \gamma_n T x_n, \quad n \in \mathbb{N} \end{cases} \tag{3.15}$$

şeklindedir. Burada $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}, \{\gamma_n\} \in (0,1)$ dir [30].

M. Abbas ve T. Nazır [30], (3.15) ile verilen iterasyonun daralma dönüşümleri için Picard, Mann ve S-iterasyonlarından daha hızlı yakınsadığını göstermişlerdir.

3.3.11. S*-iterasyon metodu

X bir normlu uzay $K \subseteq X$ boş olmayan konveks alt küme $T: K \to K$ bir dönüşüm ve $x_1 \in K$ olmak üzere S*-iterasyonu

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1-\alpha_n) Tx_n + \alpha_n Ty_n, \\ y_n = (1-\beta_n) Tx_n + \beta_n Tz_n, \\ z_n = (1-\gamma_n) x_n + \gamma_n Tx_n, \; n \in \mathbb{N} \end{cases} \tag{3.16}$$

şeklindedir. Burada $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}, \{\gamma_n\} \in (0,1)$ dir [31].

(3.16) iterasyonu Picard, Mann, Ishikawa ve S-iterasyonlarından bağımsızdır. I. Karahan ve M. Özdemir [31], (3.16) ile verilen iterasyon metodunun quasi-daralma dönüşümleri için Picard, Mann, Ishikawa ve S-iterasyon metodlarından daha hızlı yakınsadığını göstermişlerdir.

3.3.12. Picard-S iterasyon metodu

X bir normlu uzay, $K \subseteq X$ boş olmayan konveks alt küme, $T: K \to K$ bir dönüşüm ve $x_0 \in K$ keyfi bir nokta olmak üzere bu iterasyon

$$\begin{cases} x_{n+1} = Ty_n, \\ y_n = (1-\alpha_n) Tx_n + \alpha_n Tz_n, \\ z_n = (1-\beta_n) x_n + \beta_n Tx_n, \qquad n \in \mathbb{N} \end{cases} \tag{3.17}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\alpha_n, \beta_n \in [0,1]$ ve $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = \infty$ dir [32].

V. Karakaya ve F. Gürsoy [32] daralma dönüşümleri için Picard-S iterasyonun, Picard, Mann, Ishikawa, Noor, SP, CR, S, Normal-S, S* ve Abbas ve Nazır iterasyon metodlarından daha hızlı yakınsadığını göstermişlerdir. Ayrıca Picard-S iterasyonunun diferansiyel denklemleri çözmek için etkili bir yöntem olduğunu belirtmişlerdir.

3.3.13. Thakur, Thakur ve Postolache iterasyon metodu

X bir normlu uzay, $K \subseteq X$ boş olmayan konveks alt küme, $T: K \to K$ bir dönüşüm ve $x_0 \in K$ keyfi bir nokta olmak üzere bu iterasyon

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1-\alpha_n) T x_n + \alpha_n T y_n, \\ y_n = (1-\beta_n) z_n + \beta_n T z_n, \\ z_n = (1-\gamma_n) x_n + \gamma_n T x_n, \qquad n \in \mathbb{N} \end{cases} \tag{3.18}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n \in (0,1)$ dir [33].

D. Thakur, B. S. Thakur ve M. Postalache [33] bu iterasyonun daralma dönüşümleri için Picard, Mann, S ve Abbas ve Nazır iterasyon metodlarından daha hızlı yakınsadığını göstermişlerdir.

3.3.14. Picard-Mann iterasyon metodu

X bir Banach uzay, $T: X \to X$ bir dönüşüm ve $x_0 \in X$ keyfi bir nokta olmak üzere Picard-Mann iterasyonu

$$\begin{cases} x_{n+1} = T y_n, \\ y_n = (1-\alpha_n) x_n + \alpha_n T x_n, \quad n \geq 1 \end{cases} \tag{3.19}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\alpha_n \in (0,1)$ dir [34].

S. H. Khan [34] bu iterasyonun Picard, Mann ve Ishikawa iterasyonlarından bağımsız olduğunu ve Ishikawa iterasyonundan daha hızlı yakınsadığını göstermiştir.

3.3.15. Vatan two-step iterasyon metodu

X bir normlu uzay $K \subseteq X$ boş olmayan konveks alt küme $T: K \to K$ bir dönüşüm $x_0 \in K$ ve keyfi bir nokta olmak üzere Vatan two-step iterasyon metodu

$$\begin{cases} x_{n+1} = T\left[(1-\alpha_n) y_n + \alpha_n T y_n\right], \\ y_n = T\left[(1-\beta_n) x_n + \beta_n T x_n\right], \quad n \in \mathbb{N} \end{cases} \tag{3.20}$$

şeklindedir. Burada her $n \in \mathbb{N}$ için $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\} \in [0,1]$ ve $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = \infty$ dir [35].

V. Karakaya, N. Bouzara, K. Doğan ve Y. Atalan [35], (3.20) ile verilen iterasyon metodunun daralma dönüşümleri için yakınsama hızının Picard-Mann, Ishikawa, CR, Picard-S ve SP-iterasyon metodlarından daha hızlı olduğunu göstermişlerdir.

3.3.16. Ullah ve Arshad iterasyon metodu

X bir Banach uzay $K \subseteq X$ boş olmayan konveks alt küme $T: K \to K$ bir dönüşüm ve $x_0 \in K$ olmak üzere bu iterasyon

$$\begin{cases} x_{n+1}^{(1)} = T x_n^{(2)}, \\ x_n^{(2)} = T\left(\left(1-\alpha_n^{(1)}\right) x_n^{(3)} + \alpha_n^{(1)} T x_n^{(3)}\right), \\ x_n^{(3)} = T\left(\left(1-\alpha_n^{(2)}\right) x_n^{(1)} + \alpha_n^{(2)} T x_n^{(1)}\right), \quad n \in \mathbb{N} \end{cases} \tag{3.21}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\left\{\alpha_n^{(1)}\right\}, \left\{\alpha_n^{(2)}\right\} \in [0,1]$ dir [36].

K. Ullah ve M. Arshad [36] (3.21) ile verilen iterasyon yönteminin daralma dönüşümleri için Vatan-two step iterasyon metodundan daha hızlı yakınsadığını göstermişlerdir.

Ertürk ve arkadaşları [37] ise (3.21) de her $n \in \mathbb{N}$ için $\alpha_n^{(1)} = 1$ alarak aşağıdaki iterasyon metodunu çalışmışlardır:

$$\begin{cases} x_{n+1}^{(1)} = Tx_n^{(2)}, \\ x_n^{(2)} = T\left(Tx_n^{(3)}\right), \\ x_n^{(3)} = T\left(\left(1-\alpha_n^{(2)}\right)x_n^{(1)} + \alpha_n^{(2)}Tx_n^{(1)}\right), \quad n \in \mathbb{N}. \end{cases} \tag{3.22}$$

Ertürk ve arkadaşları [37], (3.22) ile verilen iterasyonun Picard, Mann, Ishikawa, Noor, S, Normal-S, CR, Picard-S, Modifiye-SP, Thakur, Thakur ve Postolache, Vatan two-step, Abbas ve Nazır, S* ve Ullah ve Arshad iterasyon metodlarından daha hızlı yakınsadığını göstermişlerdir.

Şimdi, Araştırma Bulguları kısmında ispatlanan teoremlerde kullanılacak olan lemma verilecektir.

Lemma 3.1.

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ negatif olmayan reel dizisi verilsin ve her $n \geq n_0$ için

$$a_{n+1} \leq (1-\mu_n)a_n + \mu_n\eta_n \tag{3.23}$$

olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ mevcut olsun. Burada $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\mu_n \in (0,1)$, $\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n = \infty$ ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\eta_n \geq 0$ dır. Bu durumda

$$0 \leq \limsup_{n\to\infty} a_n \leq \limsup_{n\to\infty} \eta_n$$

eşitsizliği sağlanır [38].

BÖLÜM 4. ARAŞTIRMA BULGULARI

Bu bölümde elde edilen sonuçlardan oluşan makale (bak. [39]), Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisinde yayınlanmak üzere kabul edilmiştir.

İlk olarak $(C(I), d)$ tam metrik uzayında (3.5) de verilen lineer olmayan gecikmeli Volterra integral denklem için (3.22) ile tanımlanan $\{x_n^{(1)}\}$ iterasyon dizisinin kuvvetli yakınsaklık teoremi verilmiştir.

Teorem 4.1.

$\{\alpha_n^{(2)}\}$, $[0,1]$' da bir reel dizi olmak üzere $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^{(2)} = \infty$ şartını sağlasın. Teorem 3.1'in varsayımları altında, (3.5) denklemi $C(I)$ kümesinde tek bir çözüme sahiptir (bu çözüme y_0 diyelim) ve (3.22) ile verilen iterasyon metodu y_0 a kuvvetli yakınsaktır.

İspat:

$\{x_n^{(1)}\}$ dizisi

$$T : C(I) \rightarrow C(I), \quad T(u)(x) = g(x) + \psi\left(\int_a^x f\left(x, t, u(t), u(\alpha(t))\right) dt\right)$$

dönüşümü ile (3.22) iterasyon metodu tarafından oluşturulan bir iterasyon dizisi olsun. Burada $n \rightarrow \infty$ iken $x_n^{(1)} \rightarrow y_0$ olduğunu ispatlanacaktır. (3.5), (3.22) ve Teorem 3.1'in varsayımlarından

$$d\left(x_n^{(3)}, y_0\right) = \sup_{x\in I} \frac{\left|x_n^{(3)}(x) - y_0(x)\right|}{\varphi(x)}$$

$$= \sup_{x\in I} \frac{\left|T\left(\left(1-\alpha_n^{(2)}\right)x_n^{(1)} + \alpha_n^{(2)}Tx_n^{(1)}\right)(x) - Ty_0(x)\right|}{\varphi(x)}$$

$$= \sup_{x\in I} \frac{\left|\begin{array}{l}\psi\left(\int_a^x f\left(x,t,\left(\left(1-\alpha_n^{(2)}\right)x_n^{(1)} + \alpha_n^{(2)}Tx_n^{(1)}\right)(t), \left(\left(1-\alpha_n^{(2)}\right)x_n^{(1)} + \alpha_n^{(2)}Tx_n^{(1)}\right)(\alpha(t))\right)dt\right) \\ -\psi\left(\int_a^x f\left(x,t,y_0(t),y_0(\alpha(t))\right)dt\right)\end{array}\right|}{\varphi(x)}$$

$$\leq K\sup_{\mathrm{x}\in \mathrm{I}} \frac{\left|\begin{array}{l}\int_a^x f\left(x,t,\left(\left(1-\alpha_n^{(2)}\right)x_n^{(1)} + \alpha_n^{(2)}Tx_n^{(1)}\right)(t), \left(\left(1-\alpha_n^{(2)}\right)x_n^{(1)} + \alpha_n^{(2)}Tx_n^{(1)}\right)(\alpha(t))\right)dt \\ -\int_a^x f\left(x,t,y_0(t),y_0(\alpha(t))\right)dt\end{array}\right|}{\varphi(x)}$$

$$\leq K\sup_{\mathrm{x}\in \mathrm{I}} \frac{\int_a^x \left|\begin{array}{l}f\left(x,t,\left(\left(1-\alpha_n^{(2)}\right)x_n^{(1)} + \alpha_n^{(2)}Tx_n^{(1)}\right)(t), \left(\left(1-\alpha_n^{(2)}\right)x_n^{(1)} + \alpha_n^{(2)}Tx_n^{(1)}\right)(\alpha(t))\right) \\ -f\left(x,t,y_0(t),y_0(\alpha(t))\right)\end{array}\right| dt}{\varphi(x)}$$

$$\leq K\sup_{x\in I} \frac{\int_a^x \left(\begin{array}{c}\mu(x,t)\left|\left(\left(1-\alpha_n^{(2)}\right)x_n^{(1)} + \alpha_n^{(2)}Tx_n^{(1)}\right)(t) - y_0(t)\right| \\ +\eta(x,t)\left|\left(\left(1-\alpha_n^{(2)}\right)x_n^{(1)} + \alpha_n^{(2)}Tx_n^{(1)}\right)(\alpha(t)) - y_0(\alpha(t))\right|\end{array}\right) dt}{\varphi(x)}$$

$$= K\sup_{x\in I} \frac{\begin{array}{c}\int_a^x \mu(x,t)\varphi(t)\dfrac{\left|\left(\left(1-\alpha_n^{(2)}\right)x_n^{(1)} + \alpha_n^{(2)}Tx_n^{(1)}\right)(t) - y_0(t)\right|}{\varphi(t)}dt \\ +\int_a^x \eta(x,t)\varphi(\alpha(t))\dfrac{\left|\left(\left(1-\alpha_n^{(2)}\right)x_n^{(1)} + \alpha_n^{(2)}Tx_n^{(1)}\right)(\alpha(t)) - y_0(\alpha(t))\right|}{\varphi(\alpha(t))}dt\end{array}}{\varphi(x)}$$

$$\leq K\sup_{t\in I}\frac{\left|\left(\left(1-\alpha_n^{(2)}\right)x_n^{(1)}+\alpha_n^{(2)}Tx_n^{(1)}\right)(t)-y_0(t)\right|}{\varphi(t)}\sup_{x\in I}\frac{\int_a^x\mu(x,t)\varphi(t)dt}{\varphi(x)}$$

$$+K\sup_{t\in I}\frac{\left|\left(\left(1-\alpha_n^{(2)}\right)x_n^{(1)}+\alpha_n^{(2)}Tx_n^{(1)}\right)\big(\alpha(t)\big)-y_0\big(\alpha(t)\big)\right|}{\varphi\big(\alpha(t)\big)}\sup_{x\in I}\frac{\int_a^x\eta(x,t)\varphi\big(\alpha(t)\big)dt}{\varphi(x)}$$

$$\leq K\left[d\left(\left(1-\alpha_n^{(2)}\right)x_n^{(1)}+\alpha_n^{(2)}Tx_n^{(1)},y_0\right).\beta+d\left(\left(1-\alpha_n^{(2)}\right)x_n^{(1)}+\alpha_n^{(2)}Tx_n^{(1)},y_0\right).\gamma\right]$$

$$=K(\beta+\gamma)d\left(\left(1-\alpha_n^{(2)}\right)x_n^{(1)}+\alpha_n^{(2)}Tx_n^{(1)},y_0\right)$$

$$\leq K(\beta+\gamma)\left(\left(1-\alpha_n^{(2)}\right)d\left(x_n^{(1)},y_0\right)+\alpha_n^{(2)}d\left(Tx_n^{(1)},y_0\right)\right) \tag{4.1}$$

ve benzer şekilde

$$d\left(Tx_n^{(1)},y_0\right)=\sup_{x\in I}\frac{\left|Tx_n^{(1)}(x)-Ty_0(x)\right|}{\varphi(x)}$$

$$=\sup_{x\in I}\frac{\left|\psi\left(\int_a^x f\left(x,t,x_n^{(1)}(t),x_n^{(1)}\big(\alpha(t)\big)\right)dt\right)-\psi\left(\int_a^x f\left(x,t,y_0(t),y_0\big(\alpha(t)\big)\right)dt\right)\right|}{\varphi(x)}$$

$$\leq K\sup_{x\in I}\frac{\left|\int_a^x f\left(x,t,x_n^{(1)}(t),x_n^{(1)}\big(\alpha(t)\big)\right)dt-\int_a^x f\left(x,t,y_0(t),y_0\big(\alpha(t)\big)\right)dt\right|}{\varphi(x)}$$

$$\leq K\sup_{x\in I}\frac{\int_a^x\left|f\left(x,t,x_n^{(1)}(t),x_n^{(1)}\big(\alpha(t)\big)\right)-f\left(x,t,y_0(t),y_0\big(\alpha(t)\big)\right)\right|dt}{\varphi(x)}$$

$$\leq K\sup_{x\in I}\frac{\int_a^x\left(\mu(x,t)\left|x_n^{(1)}(t)-y_0(t)\right|+\eta(x,t)\left|x_n^{(1)}\big(\alpha(t)\big)-y_0\big(\alpha(t)\big)\right|\right)dt}{\varphi(x)}$$

$$\leq K\sup_{\mathrm{x\in I}} \frac{\int_a^x \mu(x,t)\varphi(t)\frac{\left|x_n^{(1)}(t)-y_0(t)\right|}{\varphi(t)}dt+\int_a^x \eta(x,t)\varphi(\alpha(t))\frac{\left|x_n^{(1)}(\alpha(t))-y_0(\alpha(t))\right|}{\varphi(\alpha(t))}dt}{\varphi(x)}$$

$$\leq K\sup_{t\in I}\frac{\left|x_n^{(1)}(t)-y_0(t)\right|}{\varphi(t)}\sup_{x\in I}\frac{\int_a^x \mu(x,t)\varphi(t)dt}{\varphi(x)}$$

$$+K\sup_{t\in I}\frac{\left|x_n^{(1)}(\alpha(t))-y_0(t)\right|}{\varphi(\alpha(t))}\sup_{x\in I}\frac{\int_a^x \eta(x,t)\varphi(\alpha(t))dt}{\varphi(x)}$$

$$\leq K\left[d\left(x_n^{(1)},y_o\right).\beta+d\left(x_n^{(1)},y_0\right).\gamma\right]$$

$$=K(\beta+\gamma)d\left(x_n^{(1)},y_0\right) \tag{4.2}$$

eşitsizliği elde edilir.

(4.1) ve (4.2)'in birleşiminden aşağıdaki eşitsizlik yazılabilir.

$$d\left(x_n^{(3)},y_0\right)\leq K(\beta+\gamma)\left(1-\alpha_n^{(2)}\left(1-K(\beta+\gamma)\right)\right)d\left(x_n^{(1)},y_0\right).$$

Diğer yandan,

$$d\left(x_n^{(2)},y_0\right)=\sup_{x\in I}\frac{\left|T\left(Tx_n^{(3)}\right)(x)-Ty_0(x)\right|}{\varphi(x)}$$

$$=\sup_{x\in I}\frac{\left|\psi\left(\int_a^x f\left(x,t,Tx_n^{(3)}(t),Tx_n^{(3)}(\alpha(t))\right)dt\right)-\psi\left(\int_a^x f\left(x,t,y_0(t),y_0(\alpha(t))\right)dt\right)\right|}{\varphi(x)}$$

$$\leq K\sup_{\mathrm{x\in I}}\frac{\left|\int_a^x f\left(x,t,Tx_n^{(3)}(t),Tx_n^{(3)}(\alpha(t))\right)dt-\int_a^x f\left(x,t,y_0(t),y_0(\alpha(t))\right)dt\right|}{\varphi(x)}$$

$$\leq K\sup_{x\in I}\frac{\int_a^x\left|f\left(x,t,Tx_n^{(3)}(t),Tx_n^{(3)}\big(\alpha(t)\big)\right)-f\left(x,t,y_0(t),y_0\big(\alpha(t)\big)\right)\right|dt}{\varphi(x)}$$

$$\leq K\sup_{x\in I}\frac{\int_a^x\left(\mu(x,t)\left|Tx_n^{(3)}(t)-y_0(t)\right|+\eta(x,t)\left|Tx_n^{(3)}\big(\alpha(t)\big)-y_0\big(\alpha(t)\big)\right|\right)dt}{\varphi(x)}$$

$$=K\sup_{\mathrm{x\in I}}\frac{\begin{array}{c}\int_a^x\mu(x,t)\varphi(t)\dfrac{\left|Tx_n^{(3)}(t)-y_0(t)\right|}{\varphi(t)}dt\\+\int_a^x\eta(x,t)\varphi(\alpha(t))\dfrac{\left|Tx_n^{(3)}\big(\alpha(t)\big)-y_0\big(\alpha(t)\big)\right|}{\varphi(\alpha(t))}dt\end{array}}{\varphi(x)}$$

$$\leq K\sup_{t\in I}\frac{\left|Tx_n^{(3)}(t)-y_0(t)\right|}{\varphi(t)}\sup_{x\in I}\frac{\int_a^x\mu(x,t)\varphi(t)dt}{\varphi(x)}$$

$$+K\sup_{t\in I}\frac{\left|Tx_n^{(3)}\big(\alpha(t)\big)-y_0(t)\right|}{\varphi\big(\alpha(t)\big)}\sup_{x\in I}\frac{\int_a^x\eta(x,t)\varphi\big(\alpha(t)\big)dt}{\varphi(x)}$$

$$\leq K(\beta+\gamma)d\left(Tx_n^{(3)},y_0\right)$$

ve

$$d\left(Tx_n^{(3)},y_0\right)=\sup_{x\in I}\frac{\left|Tx_n^{(3)}(x)-Ty_0(x)\right|}{\varphi(x)}$$

$$=\sup_{x\in I}\frac{\left|\psi\left(\int_a^x f\left(x,t,x_n^{(3)}(t),x_n^{(3)}\big(\alpha(t)\big)\right)dt\right)-\psi\left(\int_a^x f\left(x,t,y_0(t),y_0\big(\alpha(t)\big)\right)dt\right)\right|}{\varphi(x)}$$

$$\leq K\sup_{\mathrm{x\in I}}\frac{\left|\int_a^x f\left(x,t,x_n^{(3)}(t),x_n^{(3)}\big(\alpha(t)\big)\right)dt-\int_a^x f\left(x,t,y_0(t),y_0\big(\alpha(t)\big)\right)dt\right|}{\varphi(x)}$$

$$\leq K\sup_{x\in I}\frac{\int_a^x\left|f\left(x,t,x_n^{(3)}(t),x_n^{(3)}\big(\alpha(t)\big)\right)-f\left(x,t,y_0(t),y_0\big(\alpha(t)\big)\right)\right|dt}{\varphi(x)}$$

$$\leq K\sup_{x\in I}\frac{\int_a^x\left(\mu(x,t)\left|x_n^{(3)}(t)-y_0(t)\right|+\eta(x,t)\left|x_n^{(3)}\big(\alpha(t)\big)-y_0\big(\alpha(t)\big)\right|\right)dt}{\varphi(x)}$$

$$=K\sup_{\mathrm{x\in I}}\frac{\int_a^x\mu(x,t)\varphi(t)\frac{\left|x_n^{(3)}(t)-y_0(t)\right|}{\varphi(t)}dt+\int_a^x\eta(x,t)\varphi(\alpha(t))\frac{\left|x_n^{(3)}\big(\alpha(t)\big)-y_0\big(\alpha(t)\big)\right|}{\varphi(\alpha(t))}dt}{\varphi(x)}$$

$$\leq K\sup_{t\in I}\frac{\left|x_n^{(3)}(t)-y_0(t)\right|}{\varphi(t)}\sup_{x\in I}\frac{\int_a^x\mu(x,t)\varphi(t)dt}{\varphi(x)}$$

$$+K\sup_{t\in I}\frac{\left|x_n^{(3)}\big(\alpha(t)\big)-y_0(t)\right|}{\varphi\big(\alpha(t)\big)}\sup_{x\in I}\frac{\int_a^x\eta(x,t)\varphi\big(\alpha(t)\big)dt}{\varphi(x)}$$

$$\leq K(\beta+\gamma)d(x_n^3,y_0)$$

eşitsizlikleri yazılabilir ve bu eşitsizliklerin birleşiminden

$$d\left(x_n^{(2)},y_0\right)\leq[K(\beta+\gamma)]^3\left(1-\alpha_n^{(2)}\big(1-K(\beta+\gamma)\big)\right)d\left(x_n^{(1)},y_0\right) \tag{4.3}$$

elde edilir.

Benzer şekilde

$$d\left(x_{n+1}^{(1)},y_0\right)=\sup_{x\in I}\frac{\left|Tx_n^{(2)}(x)-Ty_0(x)\right|}{\varphi(x)}$$

$$=\sup_{x\in I}\frac{\left|\psi\left(\int_a^x f\left(x,t,x_n^{(2)}(t),x_n^{(2)}\big(\alpha(t)\big)\right)dt\right)-\psi\left(\int_a^x f\left(x,t,y_0(t),y_0\big(\alpha(t)\big)\right)dt\right)\right|}{\varphi(x)}$$

$$\leq K\sup_{x\in I}\frac{\left|\int_a^x f\left(x,t,x_n^{(2)}(t),x_n^{(2)}\big(\alpha(t)\big)\right)dt-\int_a^x f\left(x,t,y_0(t),y_0\big(\alpha(t)\big)\right)dt\right|}{\varphi(x)}$$

$$\leq K\sup_{x\in I}\frac{\int_a^x\left|f\left(x,t,x_n^{(2)}(t),x_n^{(2)}\big(\alpha(t)\big)\right)-f\left(x,t,y_0(t),y_0\big(\alpha(t)\big)\right)\right|dt}{\varphi(x)}$$

$$\leq K\sup_{x\in I}\frac{\int_a^x\left(\mu(x,t)\left|x_n^{(2)}(t)-y_0(t)\right|+\eta(x,t)\left|x_n^{(2)}\big(\alpha(t)\big)-y_0\big(\alpha(t)\big)\right|\right)dt}{\varphi(x)}$$

$$=K\sup_{x\in I}\frac{\begin{array}{c}\int_a^x\mu(x,t)\varphi(t)\frac{\left|x_n^{(2)}(t)-y_0(t)\right|}{\varphi(t)}dt\\+\int_a^x\eta(x,t)\varphi(\alpha(t))\frac{\left|x_n^{(2)}\big(\alpha(t)\big)-y_0\big(\alpha(t)\big)\right|}{\varphi\big(\alpha(t)\big)}dt\end{array}}{\varphi(x)}$$

$$\leq K\sup_{t\in I}\frac{\left|x_n^{(2)}(t)-y_0(t)\right|}{\varphi(t)}\sup_{x\in I}\frac{\int_a^x\mu(x,t)\varphi(t)dt}{\varphi(x)}$$

$$+K\sup_{t\in I}\frac{\left|x_n^{(2)}\big(\alpha(t)\big)-y_0(t)\right|}{\varphi\big(\alpha(t)\big)}\sup_{x\in I}\frac{\int_a^x\eta(x,t)\varphi\big(\alpha(t)\big)dt}{\varphi(x)}$$

$$\leq K(\beta+\gamma)d\left(x_n^{(2)},y_0\right) \tag{4.4}$$

eşitsizliği elde edilir.

(4.3) ve (4.4) eşitsizliklerinden,

$$d\left(x_{n+1}^{(1)},y_0\right)\leq[K(\beta+\gamma)]^4\left(1-\alpha_n^{(2)}\big(1-K(\beta+\gamma)\big)\right)d\left(x_n^{(1)},y_0\right)$$

eşitsizliğine ulaşılır. $K(\beta+\gamma)<1$ olduğundan,

$$d\left(x_{n+1}^{(1)}, y_0\right) \leq \left(1 - \alpha_n^{(2)}\left(1 - K(\beta + \gamma)\right)\right) d\left(x_n^{(1)}, y_0\right)$$

yazılabilir. Buradan

$$d\left(x_{n+1}^{(1)}, y_0\right) \leq d\left(x_0^{(1)}, y_0\right) \prod_{k=0}^{n}\left[1 - \alpha_k^{(2)}\left(1 - K(\beta + \gamma)\right)\right] \quad (4.5)$$

olur. Her $k \in \mathbb{N}$ için $\alpha_k^{(2)} \in [0,1]$ ve $K\,(\beta + \gamma) < 1$ olduğundan

$$0 \leq \alpha_k^{(2)}\left(1 - K(\beta + \gamma)\right) \leq 1$$

elde edilir. Her $x \in [0,1]$ için $1 - x \leq e^{-x}$ olduğundan (4.5) eşitsizliği

$$d(x_{n+1}^{(1)}, y_0) \leq d(x_0^{(1)}, y_0) e^{-[1-K(\beta+\gamma)] \sum_{k=0}^{n} \alpha_k^{(2)}}$$

olarak yazılabilir. Bu eşitsizliğin her iki tarafından limit alınırsa

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n^{(1)}, y_0) = 0$$

bulunur ve böylece ispat tamamlanır.

Teorem 4.1'de özel olarak $\psi(g) = \lambda g$ seçilirse lineer olmayan gecikmeli Volterra integral denklemleri için aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.1.

$\left\{\alpha_n^{(2)}\right\}$ dizisi Teorem 4.1 deki gibi olsun ve $\mu: I \times I \to [0, \infty)$ ile $\eta: I \times I \to [0, \infty)$ sürekli fonksiyonları verilsin. $g \in C(I)$, $f: I \times I \times \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ sürekli bir fonksiyon ve $\alpha: I \to I$ fonksiyonu her $x \epsilon I$ için $\alpha(x) \leq x$ şartını sağlayan sürekli bir gecikme fonksiyonu olsun. Bunlara ek olarak $\int_a^x \mu(x,t)\varphi(t)dt \leq \beta\varphi(x)$ ve

$\int_a^x \eta(x,t)\varphi(t)dt \leq \gamma\varphi(x)$ şartlarını sağlayacak şekilde $\beta,\gamma \epsilon [0,1)$ sabitlerinin var olduğunu ve her $x,t \in I, u,v \in C(I)$ için

$$\left|f\left(x,t,u(t),u\big(\alpha(t)\big)\right) - f\left(x,t,v(t),v\big(\alpha(t)\big)\right)\right|$$

$$\leq \mu(x,t)|u(t)-v(t)| + \eta(x,t)\left|u\big(\alpha(t)\big) - v\big(\alpha(t)\big)\right|$$

eşitsizliğinin sağlandığını varsayalım. Eğer $|\lambda|(\beta+\gamma) < 1$ ise

$$y(x) = g(x) + \lambda\int_a^x f\left(x,t,y(t),y\big(\alpha(t)\big)\right)dt$$

gecikmeli Volterra integral denkleminin tek bir $y_0 \in C(I)$ çözümü vardır ve (3.22) ile tanımlanan $\left\{x_n^{(1)}\right\}$ iterasyon dizisi y_0 a kuvvetli yakınsar.

Sonuç 4.1'i destekleyecek bir örnek verelim.

Örnek 4.1.

Her $t \in [1,10]$ için $\alpha(t) = t$ gecikme fonksiyonu ile f fonksiyonu

$$f(x,t,y(t),y\big(\alpha(t)\big)) = \frac{1}{x}\left(y(t) + y\big(\alpha(t)\big)\right)$$

şeklinde verilsin. $g(x) = \frac{1}{2x} + \frac{x}{2}$ ve $\lambda = \frac{1}{2}$ olsun. $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\alpha_n^{(2)} = \frac{1}{n}$ ve $\varphi: [1,10] \to (0,\infty)$, $\varphi(x) = x^2$ alalım.

$$y(x) = \frac{1}{2x} + \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\int_1^x \frac{1}{x}\left(y(t) + y\big(\alpha(t)\big)\right)dt, \qquad x \in [1,10\,]$$

denkleminin tam çözümü $y_0(x) = x$ dir. Sonuç 4.1'in şartlarını sağladığını gösterelim.

- $g: [1,10] \to \mathbb{C}$ sürekli fonksiyondur;
- $\alpha: [1,10] \to [1,10]$ süreklidir ve her $x \epsilon [1,10]$ için $\alpha(x) \leq x$ sağlanır;
- $f: [1,10] \times [1,10] \times \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ süreklidir ve

$$\left| f\left(x, t, u(t), u\big(\alpha(t)\big)\right) - f\left(x, t, v(t), v\big(\alpha(t)\big)\right) \right|$$

$$= \left| \tfrac{1}{x}\Big(u(t) + u\big(\alpha(t)\big)\Big) - \tfrac{1}{x}\Big(v(t) + v\big(\alpha(t)\big)\Big) \right|$$

$$\leq \frac{1}{x}|u(t) - v(t)| + \frac{1}{x}\left|u\big(\alpha(t)\big) - v\big(\alpha(t)\big)\right|$$

eşitsizliği sağlanmaktadır.

- $\mu: [1,10] \times [1,10] \to [0, \infty)$ ve $\eta: [1,10] \times [1,10] \to [0, \infty)$ olmak üzere

$\mu(x,t) = \eta(x,t) = \frac{1}{x}$ fonksiyonları süreklidir. O halde her $x, t \in [1,10\ ]$ için

$$\int_1^x \mu(x,t)\varphi(t)dt = \int_1^x \eta(x,t)\varphi(t)dt$$

$$\int_1^x \frac{1}{x}t^2 dt = \frac{1}{x}\left(\frac{x^3}{3} - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}x^2\left(1 - \frac{1}{x^3}\right) \leq \frac{1}{3}\varphi(x)$$

olup $\beta = \gamma = \frac{1}{3} \epsilon [0,1)$ bulunur.

- $|\lambda|(\beta + \gamma) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} < 1$

sağlanır.

Bunlara ek olarak;

$$y(x) = \frac{1}{2x} + \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\int_1^x \frac{1}{x}\Big(y(t) + y\big(\alpha(t)\big)\Big)\,dt\,, \qquad x \in [1,10\,]$$

çözümü $y_0(x) = x$ dir. Gerçekten

$$\frac{1}{2x} + \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\int_1^x \frac{1}{x}(t+t)dt = \frac{1}{2x} + \frac{x}{2} + \frac{1}{x}\int_1^x tdt = \frac{1}{2x} + \frac{x}{2} + \frac{1}{x}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\right) = x$$

dir.

Şimdi (3.22) de verilen iterasyon metodunun yardımı ile (3.5) deki lineer olmayan gecikmeli Volterra integral denklemin çözümünün veri bağımlılığı teoremini ispatlanacaktır. Bu teoremde aşağıdaki notasyonlar kullanılacaktır.

$$T(u)(x) = g(x) + \psi\left(\int_a^x f\left(x, t, u(t), u\big(\alpha(t)\big)\right) dt\right) \tag{4.6}$$

ve

$$\breve{T}(u)(x) = \breve{g}(x) + \psi\left(\int_a^x \breve{f}\left(x, t, u(t), u\big(\alpha(t)\big)\right) dt\right). \tag{4.7}$$

Burada $g, \breve{g} \in C(I)$ ve $f, \breve{f}\colon I \times I \times \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ sürekli fonksiyonlardır.

Teorem 4.2.

f, g, α ve ψ Teorem 3.1 deki gibi olsun. $\left\{x_n^{(1)}\right\}$, (3.22) ile verilen iterasyon dizisi ve $\left\{\breve{x}_n^{(1)}\right\}$ iterasyon dizisi ise

$$\begin{cases} \breve{x}_{n+1}^{(1)} = \breve{T}\breve{x}_n^{(2)}, \\ \breve{x}_n^{(2)} = \breve{T}\left(\breve{T}\breve{x}_n^{(3)}\right), \\ \breve{x}_n^{(3)} = \breve{T}\left(\left(1-\alpha_n^{(2)}\right)\breve{x}_n^{(1)} + \alpha_n^{(2)}\breve{T}\breve{x}_n^{(1)}\right), \qquad n \in \mathbb{N} \end{cases} \tag{4.8}$$

şeklinde verilsin. Burada $\left\{\alpha_n^{(2)}\right\}$, $[0,1]$ de her $n \in \mathbb{N}$ için (i) $\frac{1}{2} \leq \alpha_n^{(2)}$ şartını sağlayan reel bir dizidir. Ayrıca her $x, t \in I, u \in C(I)$ için

(ii) $|g(x) - \breve{g}(x)| \leq \varepsilon_1$ ve $\left|f(x,t,u(t),u(\alpha(t)) - \breve{f}(x,t,u(t),u(\alpha(t))\right| \leq \frac{\varepsilon_2}{b-a}$

şartlarını sağlayan negatif olmayan ε_1 ve ε_2 sabitlerinin var olduğunu varsayalım. Eğer (4.6) ve (4.7) deki denklemlerin çözümleri sırasıyla y_0 ve $\breve{y}_0$ ise $M = \sup_{x \in I} \frac{1}{\varphi(x)}$ olmak üzere

$$d(y_0, \breve{y}_o) \leq \frac{9M(\varepsilon_1 + K\varepsilon_2)}{1 - K(\beta + \gamma)}$$

eşitsizliği elde edilir.

İspat:

(3.5), (4.5), (4.6), (4.7) ve Teorem 3.1'in hipotezleri ile (ii) şartı göz önünde bulundurularak, aşağıdaki eşitsizlikler elde edilir;

$$d\left(x_n^{(3)}, \breve{x}_n^{(3)}\right) = \sup_{x \in I} \frac{\left|x_n^{(3)}(x) - \breve{x}_n^{(3)}(x)\right|}{\varphi(x)}$$

$$= \sup_{x \in I} \frac{\left|T\left(\left(1-\alpha_n^{(2)}\right)x_n^{(1)} + \alpha_n^{(2)}Tx_n^{(1)}\right)(x) - \breve{T}\left(\left(1-\alpha_n^{(2)}\right)\breve{x}_n^{(1)} + \alpha_n^{(2)}\breve{T}\breve{x}_n^{(1)}\right)(x)\right|}{\varphi(x)}$$

$$\leq \sup_{\mathrm{x \in I}} \frac{|g(x) - \breve{g}(x)|}{\varphi(x)}$$

$$+\sup_{\mathrm{x \in I}} \frac{\left| \begin{array}{l} \psi\left(\int_a^x f\begin{pmatrix} x, t, \left(\left(1-\alpha_n^{(2)}\right) x_n^{(1)} + \alpha_n^{(2)} T x_n^{(1)}\right)(t), \\ \left(\left(1-\alpha_n^{(2)}\right) x_n^{(1)} + \alpha_n^{(2)} T x_n^{(1)}\right)(\alpha(t)) \end{pmatrix} dt\right) \\ -\psi\left(\int_a^x \breve{f}\begin{pmatrix} x, t, \left(\left(1-\alpha_n^{(2)}\right) \breve{x}_n^{(1)} + \alpha_n^{(2)} \breve{T} \breve{x}_n^{(1)}\right)(t), \\ \left(\left(1-\alpha_n^{(2)}\right) \breve{x}_n^{(1)} + \alpha_n^{(2)} \breve{T} \breve{x}_n^{(1)}\right)(\alpha(t)) \end{pmatrix} dt\right) \end{array} \right|}{\varphi(x)}$$

$$\leq \sup_{x \in I} \frac{\varepsilon_1}{\varphi(x)}$$

$$+K\sup_{x \in I} \frac{\left| \begin{array}{l} \int_a^x f\begin{pmatrix} x, t, \left(\left(1-\alpha_n^{(2)}\right) x_n^{(1)} + \alpha_n^{(2)} T x_n^{(1)}\right)(t), \\ \left(\left(1-\alpha_n^{(2)}\right) x_n^{(1)} + \alpha_n^{(2)} T x_n^{(1)}\right)(\alpha(t)) \end{pmatrix} dt \\ -\int_a^x \breve{f}\begin{pmatrix} x, t, \left(\left(1-\alpha_n^{(2)}\right) \breve{x}_n^{(1)} + \alpha_n^{(2)} \breve{T} \breve{x}_n^{(1)}\right)(t), \\ \left(\left(1-\alpha_n^{(2)}\right) \breve{x}_n^{(1)} + \alpha_n^{(2)} \breve{T} \breve{x}_n^{(1)}\right)(\alpha(t)) \end{pmatrix} dt \end{array} \right|}{\varphi(x)}$$

$$\leq \varepsilon_1 . M$$

$$+K\sup_{x \in I} \frac{\int_a^x \left| \begin{array}{l} f\begin{pmatrix} x, t, \left(\left(1-\alpha_n^{(2)}\right) x_n^{(1)} + \alpha_n^{(2)} T x_n^{(1)}\right)(t), \\ \left(\left(1-\alpha_n^{(2)}\right) x_n^{(1)} + \alpha_n^{(2)} T x_n^{(1)}\right)(\alpha(t)) \end{pmatrix} \\ -f\begin{pmatrix} x, t, \left(\left(1-\alpha_n^{(2)}\right) \breve{x}_n^{(1)} + \alpha_n^{(2)} \breve{T} \breve{x}_n^{(1)}\right)(t), \\ \left(\left(1-\alpha_n^{(2)}\right) \breve{x}_n^{(1)} + \alpha_n^{(2)} \breve{T} \breve{x}_n^{(1)}\right)(\alpha(t)) \end{pmatrix} \end{array} \right| dt}{\varphi(x)}$$

$$+K\sup_{x\in I}\frac{\int_a^x\left|\begin{matrix} f\left(\begin{matrix} x,t,\left(\left(1-\alpha_n^{(2)}\right)\breve{x}_n^{(1)}+\alpha_n^{(2)}\breve{T}\breve{x}_n^{(1)}\right)(t), \\ \left(\left(1-\alpha_n^{(2)}\right)\breve{x}_n^{(1)}+\alpha_n^{(2)}\breve{T}\breve{x}_n^{(1)}\right)(\alpha(t))\end{matrix}\right) \\ -\breve{f}\left(\begin{matrix} x,t,\left(\left(1-\alpha_n^{(2)}\right)\breve{x}_n^{(1)}+\alpha_n^{(2)}\breve{T}\breve{x}_n^{(1)}\right)(t), \\ \left(\left(1-\alpha_n^{(2)}\right)\breve{x}_n^{(1)}+\alpha_n^{(2)}\breve{T}\breve{x}_n^{(1)}\right)(\alpha(t))\end{matrix}\right)\end{matrix}\right|dt}{\varphi(x)}$$

$$\leq \varepsilon_1.M$$

$$+K\sup_{x\in I}\frac{\int_a^x\left(\mu(x,t)\left|\begin{matrix}\left(\left(1-\alpha_n^{(2)}\right)x_n^{(1)}+\alpha_n^{(2)}Tx_n^{(1)}\right)(t) \\ -\left(\left(1-\alpha_n^{(2)}\right)\breve{x}_n^{(1)}+\alpha_n^{(2)}\breve{T}\breve{x}_n^{(1)}\right)(t)\end{matrix}\right|\right)dt}{\varphi(x)}$$

$$+K\sup_{x\in I}\frac{\int_a^x\left(\eta(x,t)\left|\begin{matrix}\left(\left(1-\alpha_n^{(2)}\right)x_n^{(1)}+\alpha_n^{(2)}Tx_n^{(1)}\right)(\alpha(t)) \\ -\left(\left(1-\alpha_n^{(2)}\right)\breve{x}_n^{(1)}+\alpha_n^{(2)}\breve{T}\breve{x}_n^{(1)}\right)(\alpha(t))\end{matrix}\right|\right)dt}{\varphi(x)}$$

$$+K\sup_{x\in I}\int_a^x\frac{\varepsilon_2}{b-a}.\frac{1}{\varphi(x)}dt$$

$$\leq \varepsilon_1.M$$

$$+\ K\sup_{x\in I}\frac{\int_a^x\mu(x,t)\varphi(t)\frac{\left|\begin{matrix}\left(\left(1-\alpha_n^{(2)}\right)x_n^{(1)}+\alpha_n^{(2)}Tx_n^{(1)}\right)(t) \\ -\left(\left(1-\alpha_n^{(2)}\right)\breve{x}_n^{(1)}+\alpha_n^{(2)}\breve{T}\breve{x}_n^{(1)}\right)(t)\end{matrix}\right|}{\varphi(t)}dt}{\varphi(x)}$$

$$+ K\sup_{x\in I}\frac{\int_a^x \eta(x,t)\varphi\big(\alpha(t)\big)\frac{\left|\begin{matrix}\left(\left(\left(1-\alpha_n^{(2)}\right)x_n^{(1)}+\alpha_n^{(2)}Tx_n^{(1)}\right)\big(\alpha(t)\big)\right)\\ -\left(\left(1-\alpha_n^{(2)}\right)\breve{x}_n^{(1)}+\alpha_n^{(2)}\breve{T}\breve{x}_n^{(1)}\right)\big(\alpha(t)\big)\end{matrix}\right|}{\varphi\big(\alpha(t)\big)}dt}{\varphi(x)}$$

$$+K\varepsilon_2.M$$

$$\leq M(\varepsilon_1+K\varepsilon_2)$$

$$+K\sup_{t\in I}\frac{\left|\begin{matrix}\left(\left(1-\alpha_n^{(2)}\right)x_n^{(1)}+\alpha_n^{(2)}Tx_n^{(1)}\right)(t)\\ -\left(\left(1-\alpha_n^{(2)}\right)\breve{x}_n^{(1)}+\alpha_n^{(2)}\breve{T}\breve{x}_n^{(1)}\right)(t)\end{matrix}\right|}{\varphi(t)}\sup_{x\in I}\frac{\int_a^x \mu(x,t)\varphi(t)dt}{\varphi(x)}$$

$$+K\sup_{t\in I}\frac{\left|\begin{matrix}\left(\left(1-\alpha_n^{(2)}\right)x_n^{(1)}+\alpha_n^{(2)}Tx_n^{(1)}\right)\big(\alpha(t)\big)\\ -\left(\left(1-\alpha_n^{(2)}\right)\breve{x}_n^{(1)}+\alpha_n^{(2)}\breve{T}\breve{x}_n^{(1)}\right)\big(\alpha(t)\big)\end{matrix}\right|}{\varphi\big(\alpha(t)\big)}\sup_{x\epsilon I}\frac{\int_a^x \eta(x,t)\varphi(\alpha(t))dt}{\varphi(x)}$$

$$\leq M(\varepsilon_1+K\varepsilon_2)$$

$$+K(\beta+\gamma)d\left(\left(1-\alpha_n^{(2)}\right)x_n^{(1)}+\alpha_n^{(2)}Tx_n^{(1)},\left(1-\alpha_n^{(2)}\right)\breve{x}_n^{(1)}+\alpha_n^{(2)}\breve{T}\breve{x}_n^{(1)}\right)$$

$$\leq K(\beta+\gamma)\left(\left(1-\alpha_n^{(2)}\right)d\left(x_n^{(1)},\breve{x}_n^{(1)}\right)+\alpha_n^{(2)}d\left(Tx_n^{(1)},\breve{T}\breve{x}_n^{(1)}\right)\right)$$

$$+M(\varepsilon_1+K\varepsilon_2) \tag{4.9}$$

ve

$$d\left(Tx_n^{(1)},\breve{T}\breve{x}_n^{(1)}\right)=\sup_{x\in I}\frac{\left|Tx_n^{(1)}(x)-\breve{T}\breve{x}_n^{(1)}(x)\right|}{\varphi(x)}$$

$$\leq \sup_{x\in I}\frac{|g(x)-\breve{g}(x)|}{\varphi(x)}$$

$$+\sup_{x\in I}\frac{\left|\psi\left(\int_a^x f\left(x,t,x_n^{(1)}(t),x_n^{(1)}(\alpha(t))\right)dt\right)-\psi\left(\int_a^x \breve{f}\left(x,t,\breve{x}_n^{(1)}(t),\breve{x}_n^{(1)}(\alpha(t))\right)dt\right)\right|}{\varphi(x)}$$

$$\leq \sup_{x\in I}\frac{\varepsilon_1}{\varphi(x)}$$

$$+K\sup_{x\in I}\frac{\left|\int_a^x f\left(x,t,x_n^{(1)}(t),x_n^{(1)}(\alpha(t))\right)dt-\int_a^x \breve{f}\left(x,t,\breve{x}_n^{(1)}(t),\breve{x}_n^{(1)}(\alpha(t))\right)dt\right|}{\varphi(x)}$$

$$\leq \varepsilon_1 M$$

$$+K\sup_{x\in I}\frac{\int_a^x \left|f\left(x,t,x_n^{(1)}(t)x_n^{(1)}(\alpha(t))\right)-f\left(x,t,\breve{x}_n^{(1)}(t),\breve{x}_n^{(1)}(\alpha(t))\right)\right|dt}{\varphi(x)}$$

$$+K\sup_{x\in I}\frac{\int_a^x \left|f\left(x,t,\breve{x}_n^{(1)}(t),\breve{x}_n^{(1)}(\alpha(t))\right)-\breve{f}\left(x,t,\breve{x}_n^{(1)}(t),\breve{x}_n^{(1)}(\alpha(t))\right)\right|dt}{\varphi(x)}$$

$$\leq \varepsilon_1 . M$$

$$+K\sup_{x\in I}\frac{\int_a^x \left(\mu(x,t)\left|x_n^{(1)}(t)-\breve{x}_n^{(1)}(t)\right|+\eta(x,t)\left|x_n^{(1)}(\alpha(t))-\breve{x}_n^{(1)}(\alpha(t))\right|\right)dt}{\varphi(x)}$$

$$+K\sup_{x\in I}\int_a^x \frac{\varepsilon_2}{b-a}.\frac{1}{\varphi(x)}dt$$

$$\leq \varepsilon_1 . M$$

$$+K\sup_{x\in I}\frac{\int_a^x \mu(x,t)\varphi(t)\dfrac{\left|x_n^{(1)}(t)-\breve{x}_n^{(1)}(t)\right|}{\varphi(t)}dt}{\varphi(x)}$$

$$+\,K\sup_{x\in I}\frac{\int_a^x \eta(x,t)\varphi\big(\alpha(t)\big)\dfrac{\left|x_n^{(1)}\big(\alpha(t)\big)-\breve{x}_n^{(1)}\big(\alpha(t)\big)\right|}{\varphi\big(\alpha(t)\big)}dt}{\varphi(x)}$$

$$+K\varepsilon_2.M$$

$$\leq M(\varepsilon_1+K\varepsilon_2)$$

$$+K\sup_{t\in I}\frac{\left|x_n^{(1)}(t)-\breve{x}_n^{(1)}(t)\right|}{\varphi(t)}\sup_{x\in I}\frac{\int_a^x \mu(x,t)\varphi(t)dt}{\varphi(x)}$$

$$+K\sup_{t\in I}\frac{\left|x_n^{(1)}(t)(\alpha(t))-\breve{x}_n^{(1)}(\alpha(t))\right|}{\varphi(\alpha(t))}\sup_{x\epsilon I}\frac{\int_a^x \eta(x,t)\varphi(\alpha(t))dt}{\varphi(x)}$$

$$\leq M(\varepsilon_1+K\varepsilon_2)+K(\beta+\gamma)d\Big(x_n^{(1)},\breve{x}_n^{(1)}\Big). \tag{4.10}$$

(4.9) ve (4.10) ’un birleşiminden

$$d\Big(x_n^{(3)},\breve{x}_n^{(3)}\Big)$$

$$\leq K(\beta+\gamma)\Big(1-\alpha_n^{(2)}(1-K(\beta+\gamma)\Big)d\Big(x_n^{(1)},\breve{x}_n^{(1)}\Big)$$

$$+K(\beta+\gamma)\alpha_n^{(2)}M(\varepsilon_1+K\varepsilon_2)+M(\varepsilon_1+K\varepsilon_2) \tag{4.11}$$

yazılır. Ayrıca,

$$d(x_n^{(2)},\breve{x}_n^{(2)})=\sup_{x\in I}\frac{\left|T(Tx_n^{(3)})(x)-\breve{T}(\breve{T}\breve{x}_n^{(3)})(x)\right|}{\varphi(x)}$$

$$\leq \sup_{x\in I}\frac{|g(x)-\breve{g}(x)|}{\varphi(x)}$$

$$+\sup_{x\in I}\frac{\left|\psi\left(\int_a^x f\left(x,t,Tx_n^{(3)}(t),Tx_n^{(3)}\left(\alpha(t)\right)\right)dt\right)-\psi\left(\int_a^x \check{f}\left(x,t,\check{T}\check{x}_n^{(3)}(t),\check{T}\check{x}_n^{(3)}\left(\alpha(t)\right)\right)dt\right)\right|}{\varphi(x)}$$

$$\leq \sup_{x\in I}\frac{\varepsilon_1}{\varphi(x)}$$

$$+K\sup_{x\in I}\frac{\left|\int_a^x f\left(x,t,Tx_n^{(3)}(t),Tx_n^{(3)}\left(\alpha(t)\right)\right)dt-\int_a^x \check{f}\left(x,t,\check{T}\check{x}_n^{(3)}(t),\check{T}\check{x}_n^{(3)}\left(\alpha(t)\right)\right)dt\right|}{\varphi(x)}$$

$$\leq \varepsilon_1 M$$

$$+K\sup_{x\in I}\frac{\int_a^x\left|f\left(x,t,Tx_n^{(3)}(t),Tx_n^{(3)}\left(\alpha(t)\right)\right)-f\left(x,t,\check{T}\check{x}_n^{(3)}(t),\check{T}\check{x}_n^{(3)}\left(\alpha(t)\right)\right)\right|dt}{\varphi(x)}$$

$$+K\sup_{x\in I}\frac{\int_a^x\left|f\left(x,t,\check{T}\check{x}_n^{(3)}(t),\check{T}\check{x}_n^{(3)}\left(\alpha(t)\right)\right)-\check{f}\left(x,t,\check{T}\check{x}_n^{(3)}(t),\check{T}\check{x}_n^{(3)}\left(\alpha(t)\right)\right)\right|dt}{\varphi(x)}$$

$$\leq \varepsilon_1 . M$$

$$+K\sup_{x\in I}\frac{\int_a^x\begin{pmatrix}\mu(x,t)\left|Tx_n^{(3)}(t)-\check{T}\check{x}_n^{(3)}(t)\right|\\ +\eta(x,t)\left|Tx_n^{(3)}\left(\alpha(t)\right)-\check{T}\check{x}_n^{(3)}\left(\alpha(t)\right)\right|\end{pmatrix}dt}{\varphi(x)}$$

$$+K\sup_{x\in I}\int_a^x\frac{\varepsilon_2}{b-a}.\frac{1}{\varphi(x)}dt$$

$$\leq \varepsilon_1 . M$$

$$+K\sup_{x\in I}\frac{\int_a^x\mu(x,t)\varphi(t)\frac{\left|Tx_n^{(3)}(t)-\check{T}\check{x}_n^{(3)}(t)\right|}{\varphi(t)}dt}{\varphi(x)}$$

$$+ K\sup_{x\in I}\frac{\int_a^x \eta(x,t)\varphi\big(\alpha(t)\big)\frac{\left|Tx_n^{(3)}\big(\alpha(t)\big)-\check{T}\check{x}_n^{(3)}\big(\alpha(t)\big)\right|}{\varphi\big(\alpha(t)\big)}dt}{\varphi(x)}$$

$$+K\varepsilon_2.M$$

$$\leq M(\varepsilon_1+K\varepsilon_2)$$

$$+K\sup_{t\in I}\frac{\left|Tx_n^{(3)}(t)-\check{T}\check{x}_n^{(3)}(t)\right|}{\varphi(t)}\sup_{x\in I}\frac{\int_a^x \mu(x,t)\varphi(t)dt}{\varphi(x)}$$

$$+K\sup_{t\in I}\frac{\left|Tx_n^{(3)}(\alpha(t))-\check{T}\check{x}_n^{(3)}(\alpha(t))\right|}{\varphi(\alpha(t))}\sup_{x\epsilon I}\frac{\int_a^x \eta(x,t)\varphi(\alpha(t))dt}{\varphi(x)}$$

$$\leq M(\varepsilon_1+K\varepsilon_2)+K(\beta+\gamma)d\Big(Tx_n^{(3)},\check{T}\check{x}_n^{(3)}\Big)$$

ve

$$d\Big(Tx_n^{(3)},\check{T}\check{x}_n^{(3)}\Big) = \sup_{x\in I}\frac{\left|Tx_n^{(3)}(x)-\check{T}\check{x}_n^{(3)}(x)\right|}{\varphi(x)}$$

$$\leq \sup_{x\in I}\frac{|g(x)-\check{g}(x)|}{\varphi(x)}$$

$$+\sup_{x\in I}\frac{\left|\psi\left(\int_a^x f\left(x,t,x_n^{(3)}(t),x_n^{(3)}\big(\alpha(t)\big)\right)dt\right)-\psi\left(\int_a^x \check{f}\left(x,t,\check{x}_n^{(3)}(t),\check{x}_n^{(3)}\big(\alpha(t)\big)\right)dt\right)\right|}{\varphi(x)}$$

$$\leq \sup_{x\in I}\frac{\varepsilon_1}{\varphi(x)}$$

$$+K\sup_{x\in I}\frac{\left|\int_a^x f\left(x,t,x_n^{(3)}(t),x_n^{(3)}\big(\alpha(t)\big)\right)dt-\int_a^x \check{f}\left(x,t,\check{x}_n^{(3)}(t),\check{x}_n^{(3)}\big(\alpha(t)\big)\right)dt\right|}{\varphi(x)}$$

$\leq \varepsilon_1 M$

$$+K\sup_{x\in I}\frac{\int_a^x\left|f\left(x,t,x_n^{(3)}(t),x_n^{(3)}\big(\alpha(t)\big)\right)-f\left(x,t,\breve{x}_n^{(3)}(t),\breve{x}_n^{(3)}\big(\alpha(t)\big)\right)\right|dt}{\varphi(x)}$$

$$+K\sup_{x\in I}\frac{\int_a^x\left|f\left(x,t,\breve{x}_n^{(3)}(t),\breve{x}_n^{(3)}\big(\alpha(t)\big)\right)-\breve{f}\left(x,t,\breve{x}_n^{(3)}(t),\breve{x}_n^{(3)}\big(\alpha(t)\big)\right)\right|dt}{\varphi(x)}$$

$\leq \varepsilon_1 . M$

$$+K\sup_{x\in I}\frac{\int_a^x\left(\mu(x,t)\left|x_n^{(3)}(t)-\breve{x}_n^{(3)}(t)\right|+\eta(x,t)\left|x_n^{(3)}\big(\alpha(t)\big)-\breve{x}_n^{(3)}\big(\alpha(t)\big)\right|\right)dt}{\varphi(x)}$$

$$+K\sup_{x\in I}\int_a^x\frac{\varepsilon_2}{b-a}.\frac{1}{\varphi(x)}dt$$

$\leq \varepsilon_1 . M$

$$+\,K\sup_{x\in I}\frac{\int_a^x\mu(x,t)\varphi(t)\frac{\left|x_n^{(3)}(t)-\breve{x}_n^{(3)}(t)\right|}{\varphi(t)}dt}{\varphi(x)}$$

$$+\,K\sup_{x\in I}\frac{\int_a^x\eta(x,t)\varphi\big(\alpha(t)\big)\frac{\left|x_n^{(3)}\big(\alpha(t)\big)-\breve{x}_n^{(3)}\big(\alpha(t)\big)\right|}{\varphi\big(\alpha(t)\big)}dt}{\varphi(x)}$$

$+K\varepsilon_2 . M$

$\leq M(\varepsilon_1+K\varepsilon_2)$

$$+K\sup_{t\in I}\frac{\left|x_n^{(3)}(t)-\breve{x}_n^{(3)}(t)\right|}{\varphi(t)}\sup_{x\in I}\frac{\int_a^x\mu(x,t)\varphi(t)dt}{\varphi(x)}$$

$$+K\sup_{t\in I}\frac{\left|x_n^{(3)}(\alpha(t))-\breve{x}_n^{(3)}(\alpha(t))\right|}{\varphi(\alpha(t))}\sup_{x\epsilon I}\frac{\int_a^x\eta(x,t)\varphi(\alpha(t))dt}{\varphi(x)}$$

$$\leq M(\varepsilon_1+K\varepsilon_2)+K(\beta+\gamma)d\left(x_n^{(3)},\breve{x}_n^{(3)}\right)$$

eşitsizlikleri elde edilir. Daha sonra aşağıdaki eşitsizlik yazılır;

$$d\left(x_n^{(2)},\breve{x}_n^{(2)}\right)\leq[K(\beta+\gamma)]^2d\left(x_n^{(3)},\breve{x}_n^{(3)}\right)+K(\beta+\gamma)M(\varepsilon_1+K\varepsilon_2)$$

$$+M(\varepsilon_1+K\varepsilon_2). \tag{4.12}$$

(4.11) ve (4.12) den aşağıdaki eşitsizlik elde edilir;

$$d\left(x_n^{(2)},\breve{x}_n^{(2)}\right)\leq[K(\beta+\gamma)]^3\left(1-\alpha_n^{(2)}(1-K(\beta+\gamma)\right)d\left(x_n^{(1)},\breve{x}_n^{(1)}\right)$$

$$+[K(\beta+\gamma)]^3\alpha_n^{(2)}M(\varepsilon_1+K\varepsilon_2)+[K(\beta+\gamma)]^2M(\varepsilon_1+K\varepsilon_2)$$

$$+K(\beta+\gamma)M(\varepsilon_1+K\varepsilon_2)+M(\varepsilon_1+K\varepsilon_2). \tag{4.13}$$

Benzer şekilde

$$d(x_{n+1}^{(1)},\breve{x}_{n+1}^{(1)})=\sup_{x\in I}\frac{\left|Tx_n^{(2)}(x)-\breve{T}\breve{x}_n^{(2)}(x)\right|}{\varphi(x)}$$

$$\leq\sup_{x\in I}\frac{|g(x)-\breve{g}(x)|}{\varphi(x)}$$

$$+\sup_{x\in I}\frac{\left|\psi\left(\int_a^x f\left(x,t,x_n^{(2)}(t),x_n^{(2)}(\alpha(t))\right)dt\right)-\psi\left(\int_a^x\breve{f}\left(x,t,\breve{x}_n^{(2)}(t),\breve{x}_n^{(2)}(\alpha(t))\right)dt\right)\right|}{\varphi(x)}$$

$$\leq \sup_{x\in I} \frac{\varepsilon_1}{\varphi(x)}$$

$$+K\sup_{x\in I} \frac{\left|\int_a^x f\left(x,t,x_n^{(2)}(t),x_n^{(2)}\big(\alpha(t)\big)\right)dt - \int_a^x \check{f}\left(x,t,\check{x}_n^{(2)}(t),\check{x}_n^{(2)}\big(\alpha(t)\big)\right)dt\right|}{\varphi(x)}$$

$$\leq \varepsilon_1 . M$$

$$+K\sup_{x\in I} \frac{\int_a^x \left|f\left(x,t,x_n^{(2)}(t)x_n^{(2)}\big(\alpha(t)\big)\right) - f\left(x,t,\check{x}_n^{(2)}(t),\check{x}_n^{(2)}\big(\alpha(t)\big)\right)\right|dt}{\varphi(x)}$$

$$+K\sup_{x\in I} \frac{\int_a^x \left|f\left(x,t,\check{x}_n^{(2)}(t),\check{x}_n^{(2)}\big(\alpha(t)\big)\right) - \check{f}\left(x,t,\check{x}_n^{(2)}(t),\check{x}_n^{(2)}\big(\alpha(t)\big)\right)\right|dt}{\varphi(x)}$$

$$\leq \varepsilon_1 . M$$

$$+K\sup_{x\in I} \frac{\int_a^x \left(\mu(x,t)\left|x_n^{(2)}(t) - \check{x}_n^{(2)}(t)\right| + \eta(x,t)\left|x_n^{(2)}\big(\alpha(t)\big) - \check{x}_n^{(2)}\big(\alpha(t)\big)\right|\right)dt}{\varphi(x)}$$

$$+K\sup_{x\in I} \int_a^x \frac{\varepsilon_2}{b-a} . \frac{1}{\varphi(x)}\, dt$$

$$\leq \varepsilon_1 . M$$

$$+K\sup_{x\in I} \frac{\int_a^x \mu(x,t)\varphi(t)\frac{\left|x_n^{(2)}(t) - \check{x}_n^{(2)}(t)\right|}{\varphi(t)}dt}{\varphi(x)}$$

$$+ K\sup_{x\in I} \frac{\int_a^x \eta(x,t)\varphi\big(\alpha(t)\big)\frac{\left|x_n^{(2)}\big(\alpha(t)\big) - \check{x}_n^{(2)}\big(\alpha(t)\big)\right|}{\varphi\big(\alpha(t)\big)}dt}{\varphi(x)}$$

$+K\varepsilon_2 . M$

$\leq M(\varepsilon_1 + K\varepsilon_2)$

$+K\sup_{t\in I} \frac{\left|x_n^{(2)}(t) - \breve{x}_n^{(2)}(t)\right|}{\varphi(t)} \sup_{x\in I} \frac{\int_a^x \mu(x,t)\varphi(t)dt}{\varphi(x)}$

$+K\sup_{t\in I} \frac{\left|x_n^{(2)}(\alpha(t)) - \breve{x}_n^{(2)}(\alpha(t))\right|}{\varphi(\alpha(t))} \sup_{x\epsilon I} \frac{\int_a^x \eta(x,t)\varphi(\alpha(t))dt}{\varphi(x)}$

$$\leq M(\varepsilon_1 + K\varepsilon_2) + K(\beta+\gamma)d\left(x_n^{(2)}, \breve{x}_n^{(2)}\right) \tag{4.14}$$

yazılabilir. (4.13) ve (4.14) ün kombinasyonu ile

$d\left(x_{n+1}^{(1)}, \breve{x}_{n+1}^{(1)}\right)$

$\leq [K(\beta+\gamma)]^4 \left(1 - \alpha_n^{(2)}(1 - K(\beta+\gamma)\right) d\left(x_n^{(1)}, \breve{x}_n^{(1)}\right)$

$+[K(\beta+\gamma)]^4 \alpha_n^{(2)} M(\varepsilon_1 + K\varepsilon_2) + [K(\beta+\gamma)]^3 M(\varepsilon_1 + K\varepsilon_2)$

$+[K(\beta+\gamma)]^2 M(\varepsilon_1 + K\varepsilon_2) + K(\beta+\gamma)M(\varepsilon_1 + K\varepsilon_2) + M(\varepsilon_1 + K\varepsilon_2)$

eşitsizliği elde edilir. $K\,(\beta+\gamma) < 1$ olduğu için

$d\left(x_{n+1}^{(1)}, \breve{x}_{n+1}^{(1)}\right)$

$\leq \left(1 - \alpha_n^{(2)}\left(1 - K(\beta+\gamma)\right)\right) d\left(x_n^{(1)}, \breve{x}_n^{(1)}\right) + \alpha_n^{(2)} M(\varepsilon_1 + K\varepsilon_2) + 4M(\varepsilon_1 + K\varepsilon_2)$

$$= \left(1 - \alpha_n^{(2)}\left(1 - K(\beta + \gamma)\right)\right) d\left(x_n^{(1)}, \breve{x}_n^{(1)}\right) + 4M\varepsilon_1 + \alpha_n^{(2)} M\varepsilon_1$$

$$+4MK\varepsilon_2 + \alpha_n^{(2)} MK\varepsilon_2 \tag{4.15}$$

olur. (i) varsayımı kullanılarak, her $n \in \mathbb{N}$ için $\frac{1}{\alpha_n^{(2)}} \leq 2$ elde edilir. Bu nedenle (4.15) şu şekilde yazılabilir.

$$d\left(x_{n+1}^{(1)}, \breve{x}_{n+1}^{(1)}\right)$$

$$\leq \left(1 - \alpha_n^{(2)}\left(1 - K(\beta + \gamma)\right)\right) d\left(x_n^{(1)}, \breve{x}_n^{(1)}\right)$$

$$+\alpha_n^{(2)}\left(1 - K(\beta + \gamma)\right) \frac{9M(\varepsilon_1 + K\varepsilon_2)}{1 - K(\beta + \gamma)}. \tag{4.16}$$

(4.16) eşitsizliğinin Lemma 3.1 deki tüm şartları sağladığı açıktır ve bu nedenle

$$d(y_0, \breve{y}_0) \leq \frac{9M(\varepsilon_1 + K\varepsilon_2)}{1 - K(\beta + \gamma)}$$

elde edilir.

BÖLÜM 5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu bölümde, çalışmada elde edilen sonuçlara yer verilecektir.

İlk olarak $(C(I), d)$ tam metrik uzayında lineer olmayan gecikmeli bir Volterra integral denklem için (3.22) ile tanımlanan $\left\{x_n^{(1)}\right\}$ iterasyon dizisinin kuvvetli yakınsamasıyla ilgili sonuçları verelim.

Bulunan sonuçlar şunlardır:

Sonuç 5.1.

$\left\{\alpha_n^{(2)}\right\}$, [0,1] aralığında bir reel dizi olmak üzere $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^{(2)} = \infty$ şartını sağlasın. $\mu: I \times I \rightarrow [0, \infty)$ ve $\eta: I \times I \rightarrow [0, \infty)$ sürekli iki fonksiyon olsun. $g \in C(I)$, $f: I \times I \times \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ sürekli bir fonksiyon ve her $x \in I$ için $\alpha(x) \leq x$ şartını sağlayan $\alpha: I \rightarrow I$ fonksiyonu sürekli bir gecikme fonksiyonu ve $\psi: C(I) \rightarrow C(I)$ fonksiyonu, $K > 0$ sabit sayı olmak üzere

$$d(\psi(h_1), \psi(h_2)) \leq K\, d(h_1, h_2)$$

eşitsizliğini sağlayacak şekilde verilmiş sınırlı bir fonksiyon olsun. Bunlara ek olarak, $\int_a^x \mu(x,t)\varphi(t)dt \leq \beta\varphi(x)$ ve $\int_a^x \eta(x,t)\varphi(t)dt \leq \gamma\varphi(x)$ eşitsizliklerini sağlayan $\beta, \gamma \in [0,1)$ sabitlerinin var olduğunu ve her $x, t \in I$, $u, v \in \mathbb{C}(I)$ için

$$\left|f\left(x, t, u(t), u\big(\alpha(t)\big)\right) - f\left(x, t, v(t), v\big(\alpha(t)\big)\right)\right|$$

$$\leq \mu(x,t)|u(t)-v(t)|+\eta(x,t)\big|u\big(\alpha(t)\big)-v\big(\alpha(t)\big)\big|$$

eşitsizliğinin sağlandığını varsayalım. $K\,(\beta+\gamma)<1$ ise

$$y(x)=g(x)+\ \psi\left(\int_a^x f\left(x,t,y(t),y\big(\alpha(t)\big)\right)dt\right), \qquad x\in I \tag{5.1}$$

lineer olmayan gecikmeli Volterra integral denkleminin tek bir $y_0\in C(I)$ çözümü vardır ve (3.22) ile verilen iterasyon metodu y_0 a kuvvetli yakınsaktır.

Sonuç 5.2.

Sonuç 5.1. deki varsayımlar altında $\psi(g)=\lambda g$ seçilirse

$$y(x)=g(x)+\lambda\int_a^x f\left(x,t,y(t),y\big(\alpha(t)\big)\right)dt$$

gecikmeli Volterra integral denkleminin tek bir $y_0\in C(I)$ çözümü vardır ve (3.22) ile tanımlanan $\left\{x_n^{(1)}\right\}$ iterasyon dizisi y_0 a kuvvetli yakınsar.

Son olarak (3.22) ile tanımlanan iterasyon metodunun yardımı ile (5.1) de verilen lineer olmayan gecikmeli Volterra integral denklemin çözümünün veri bağımlılığıyla ilgili sonucu verelim.

Sonuç 5.3.

f,g,α ve ψ Sonuç 5.1 deki gibi olsun. $\left\{x_n^{(1)}\right\}$, (3.22) ile verilen iterasyon dizisi ve $\left\{\breve{x}_n^{(1)}\right\}$ iterasyon dizisi

$$\begin{cases} \breve{x}_{n+1}^{(1)} = \breve{T}\breve{x}_n^{(2)}, \\ \breve{x}_n^{(2)} = \breve{T}\left(\breve{T}\breve{x}_n^{(3)}\right), \\ \breve{x}_n^{(3)} = \breve{T}\left(\left(1-\alpha_n^{(2)}\right)\breve{x}_n^{(1)} + \alpha_n^{(2)}\breve{T}\breve{x}_n^{(1)}\right), \qquad n \in \mathbb{N} \end{cases} \tag{5.2}$$

şeklinde verilsin. Burada $\left\{\alpha_n^{(2)}\right\}$, $[0,1]$ aralığında her $n \in \mathbb{N}$ için (i) $\frac{1}{2} \leq \alpha_n^{(2)}$ şartını sağlayan reel bir dizidir. Ayrıca her $x, t \in I, u \in C(I)$ için

(ii) $|g(x) - \breve{g}(x)| \leq \varepsilon_1$ ve $\left|f(x,t,u(t),u(\alpha(t)) - \check{f}(x,t,u(t),u(\alpha(t))\right| \leq \frac{\varepsilon_2}{b-a}$

şartlarını sağlayan negatif olmayan ε_1 ve ε_2 sabitlerinin var olduğunu varsayalım. Eğer (4.6) ve (4.7) deki denklemlerin çözümleri sırasıyla y_0 ve $\breve{y}_0$ ise

$M = \sup_{x \in I} \frac{1}{\varphi(x)}$ olmak üzere

$$d(y_0, \breve{y}_o) \leq \frac{9M(\varepsilon_1 + K\varepsilon_2)}{1 - K(\beta + \gamma)}$$

eşitsizliği elde edilir.

Elde edilen bu sonuçlar (3.21) ile tanımlanan Ullah ve Arshad iterasyon metodu ile benzer şekilde ispat edilebilir.

KAYNAKLAR

[1] Bayın, S.Ş., Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler, 249-254, 2000.

[2] Bocher, M., An Introduction to the Study of Integral Equations, New York, 1913.

[3] Soykan, Y., Fonksiyonel Analiz, Genişletilmiş ve Yeniden Düzenlenmiş 2. Basım, Nobel Yayıncılık, 2012.

[4] Kreyszig, E., Introductory Functional Analysis with Applications, John Wiley & Sons, USA, 1989.

[5] Maddox, I.J., Elements of Functional Analysis, 2nd edition, Cambridge University Press, Cambridge, 1988.

[6] Cădariu, L., Găvruta, L., Găvruta, P., Weighted space method for the stability of some nonlinear equation, Appl. Anal. Discrete Math. 6(1), 126-139, 2012.

[7] Pugachev, V.S., Sinitsyn, I.N., Lectures on functional analysis and applications, World Scientific Publishing Company, Singapore, 1999.

[8] Brown, A.L., Page, A., Elements of functional analysis, Van Nostrand-Reinhold, London, 1970.

[9] Curtain, R.F., Pritchard, A.J., Functional in Modern Applied Mathematics, Academic Press, London, 1977.

[10] Musayev, B., Alp, M., Fonksiyonel Analiz, Balcı Yayınları, 2000.

[11] Berinde, V., Iterative Approximation of Fixed Points, Springer, Berlin, 2007.

[12] Gürsoy, F., Bazı yeni sabit nokta iterasyon yöntemlerinin yakınsaklıklarının ve kararlılıklarının incelenmesi, Yıldız Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Bölümü, Doktora Tezi, 2014.

[13] Yüce, A., Asimptotik genişlemeyen uzaylar için yeni yaklaşım yöntemleri, Atatürk Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Bölümü, Yüksek Lisans Tezi, 2011.

[14] Aksoy, Y., İntegral Denklemler, Yıldız Teknik Üniversitesi Yayınları, Cilt 1, Sayı 166, 1983.

[15] Castro, L.P., Guerra, R.C., Hyers-Ulam-Rassias stability of Volterra integral equations within weighted spaces. Libertas Math. (new series), 33(2), 21-35, 2013.

[16] Soykan, Y., Metrik Uzaylar ve Topolojisi, Nobel Yayıncılık, 2012.

[17] Khamsi, M.A. and Kirk W.A., An Introduction to Metric Spaces and Fixed Point Theory, 2001.

[18] Picard, E.M., Memorie sur la theorie des equations aux derivees partielles et la methode des approximations successives. J. Math. Pure Appl. 6, 145-210, 1890.

[19] Mann, W.R., Mean value methods in iteration, Proc. Amer. Math. Soc., 4, 506-510, 1953.

[20] Franks, R.L. and Marzec, R.P., A theorem on mean-value iterations, Proc. Amer. Math. Soc., 30, 324-326, 1971.

[21] Rhoades, B.E., Fixed point iterations for certain nonlinear mappings, J. Math. Anal. Appl., 183, 118-120, 1994.

[22] Ishikawa, S., Fixed points by a new iteration method, Proc. Amer. Math. Soc., 44, 147-150, 1974.

[23] Noor, M.A., New approximation schemes for general variational inequalities, J. Math. Anal. Appl., 251, 217-229, 2000.

[24] Xu, B., Noor M.A., Fixed point iterations for asymptotically nonexpansive mappings in Banach spaces, J. Math. Anal. Appl., 267, 444-453, 2002.

[25] Chugh, R., Kumar, V., Kumar, S., Strong convergence of a new three step iterative scheme in Banach space. Amer. J. Comput. Math. 2, 345-357, 2012.

[26] Phuengrattana, W., Suantai, S., On the rate of convergence of Mann, Ishikawa, Noor and SP-iteration for continuous functions on an arbitrary interval, Journal of Computational and Applied Mathematics, 235, 3006-3014, 2011.

[27] Agarwal, R.P., O'Regan, D., Sahu, D.R., İterative construction of fixed points of nearly asymtotically nonexpansive mappings, J. Nonlinear Convex Anal., 8 (1), 61-79, 2007.

[28] Sahu, D.R, Applications of S iteration process to constrained minimization problems and split feasibility problems. Fixed Point Theory, 12(1), 187-204, 2011.

[29] Kadıoğlu, N., Yıldırım, I., Approximating fixed points of nonexpansive mappings by a faster iteration process. J.Adv. Math. Stud. 8(2), 257-264, 2015.

[30] Abbas, M., Nazır, T., A new faster iteration process applied to constrained minimization and feasibility problems. Mat. Vesnik, 66(2), 223-234, 2014.

[31] Karahan, I., Özdemir, M., A general iterative method for approximation of fixed points and their applications. Adv. Fixed Point Theory, 3(3), 510-526, 2013.

[32] Gürsoy, F., Karakaya, V., A Picard-S hybrid type iteration method for solving a differential equation with retarded argument. arXiv:1403.2546v2 [math. FA], 2014, https://arxiv.org/abs/1403.2546v2. Erişim Tarihi: 10.11.2017.

[33] Thakur, D., Thakur, B.S., Postolache, M., New iteration schme for numerical reckoning fixed points of nonexpansive mapping. J. Inequal. Appl. 2014:1, 1-5, 2014.

[34] Khan, S.H., A Picard-Mann hybrid iterative process. Fixed Point Theory Appl. Article ID 69 (2013), doi.10.1186/1687-1872-2013-69, 2013.

[35] Karakaya, V., Bouzara, N.E.H., Doğan, K., Atalan, Y., On different results for a new two-step iteration method under weak-contraction mapping in Banach spaces. arXiv:1507.00200v1 [maths.FA], 2015, https://arxiv.org/abs/1507.00200vl, Erişim Tarihi: 10.11.2017.

[36] Ullah, A., Arshad, M., On different results for the new three step iteration process in Banach spaces. SpringerPlus, 5(1), 1616, 2016.

[37] Ertürk, M., Gürsoy, F., Karakaya, V., Başarır, M., Şahin, A., Some convergence and data dependence results by a simpler and faster iterative scheme. Appl. Comput. Math. dergiye gönderildi, 2017.

[38] Şoltuz, Ş.M., Grosan, T., Data dependence for Ishikawa iteration when dealing contractive like operators. Fixed Point Theory Appl. 2008: 242916, 1-7, 2008.

[39] Şahin, A., Kalkan, Z., Arısoy, H., On the solution of a nonlinear Volterra integral equation with delay. SAÜ Fen. Bil. Der., yayına kabul edildi, 2017.

ÖZGEÇMİŞ

Zeynep Kalkan, 28.07.1992'de Malatya'da doğdu. İlk, orta ve lise eğitimini Malatya'da tamamladı. 2010 yılında Beydağı Anadolu Lisesi'nden mezun oldu. 2010 yılında başladığı İnönü Üniversitesi İlköğretim Matematik Öğretmenliği Bölümü'nü 2014 yılında bitirdi ve aynı yıl Sakarya/Karasu'da öğretmenliğe başladı. 2015 yılında Sakarya Üniversitesi Matematik Bölümü'nde yüksek lisans eğitimine başladı. Halen hem Muş'da öğretmenlik görevine hem de lisansüstü öğrenimine devam etmektedir.