T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HURWITZ SAYILARI ÜZERİNDE DÖNGÜSEL ÇİZGE YARDIMI İLE MÜKEMMEL KOD ELDE ETME

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Gökhan GÜNER

Enstitü Anabilim Dalı	**:**	**MATEMATİK**
Enstitü Bilim Dalı	**:**	**CEBİR VE SAYILAR TEORİSİ**
Tez Danışmanı	**:**	**Doç. Dr. Murat GÜZELTEPE**

Ocak 2018

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HURWITZ SAYILARI ÜZERİNDE DÖNGÜSEL ÇİZGE YARDIMI İLE MÜKEMMEL KOD ELDE ETME

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Gökhan GÜNER

Enstitü Anabilim Dalı	:	**MATEMATİK**
Enstitü Bilim Dalı	:	**CEBİR VE SAYILAR TEORİSİ**

Bu tez 16.01.2018 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği / ~~oyçokluğu~~ ile kabul edilmiştir.

Doç. Dr. Murat GÜZELTEPE Jüri Başkanı	Prof. Dr. Refik Keskin Üye	Yrd. Doç. Dr. Selda ÇALKAVUR Üye

BEYAN

Tez içindeki tüm verilerin akademik kurallar çerçevesinde tarafımdan elde edildiğini, görsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçların akademik ve etik kurallara uygun şekilde sunulduğunu, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezde yer alan verilerin bu üniversite veya başka bir üniversitede herhangi bir tez çalışmasında kullanılmadığını beyan ederim.

Gökhan GÜNER

16/01/2018

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimim boyunca değerli bilgi ve deneyimlerinden yararlandığım, her konuda bilgi ve desteğini almaktan çekinmediğim, araştırmanın planlanmasından yazılmasına kadar tüm aşamalarında yardımlarını esirgemeyen, teşvik eden, aynı titizlikte beni yönlendiren değerli danışman hocam Doç. Dr. Murat GÜZELTEPE' ye teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

$B_t(\gamma)$	: G_α çizgesi içinde t yarıçaplı ve γ merkezli yuvar
C	: Kod
$d_\alpha(\lambda,\gamma)$	: $\mathcal{H}_\alpha$ kümesinde λ ile γ arasındaki uzaklık
$D_\alpha(\lambda,\gamma)$	: $\mathbb{Z}[i]_\alpha$ kümesinde λ ile γ arasındaki uzaklık
EB	: Öklid bölgesi
G	: Grup
$G(V,E)$	: V köşeleri, E kenarlarından oluşan çizge
G_α	: α nın kalan sınıflarından oluşan çizge
$\mathbb{H}$	: Hamilton Quaternionları
$\mathbb{H}[\mathbb{Z}]$	: Lipschitz sayıları
$\mathcal{H}$	: Hurwitz sayıları
$\mathcal{H}_\alpha$	: $\mathcal{H}$ da α ya göre kalan sınıflarından oluşan küme
I	: İdeal
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
TİB	: Temel ideal bölgesi
$\mathbb{Z}$	: Tam sayılar kümesi
$\mathbb{Z}[i]$	: Gauss tamsayılar kümesi
$\mathbb{Z}[i]_\alpha$	: $\mathbb{Z}[i]$ de α ya göre kalan sınıflarından oluşan küme

ŞEKİLLER LİSTESİ

TABLOLAR LİSTESİ

ÖZET

Anahtar kelimeler: Mükemmel kodlar, Gauss tamsayıları ve Hurwitz tamsayılarında metrik, mükemmel küme.

Üç bölümden oluşan bu çalışmada, ilk bölümde cebir ve kodlama teorisinden bazı temel tanım ve teoremler verilmiştir. İkinci bölümde Gauss tamsayılarında yapılmış olan $t-$mükemmel kümeler ile ilgili çalışma açıklanmış ve örneklendirilmiştir. Son bölümde ise Gauss tamsayıları üzerinde yapılan çalışmalar Hurwitz sayılarına aktarılmıştır.

TO OBTAIN PERFECT CODES OVER HURWITZ INTEGERS VIA CIRCULANT GRAPH

SUMMARY

Keywords: Perfect codes, metric on Gaussian and Hurwitz integers, perfect set.

This thesis consists of three sections. The first section is devoted to definitions and theorems associated with coding theory and algebra. In the second section, studies for $t-$perfect sets on Gaussian integers are explained and exemplified. In the last section, the previous study is extended to Hurwitz integers.

BÖLÜM 1. GİRİŞ

Bu bölümde verilen temel tanım, teorem ve önermeler diğer bölümlerde kullanılacak ön bilgiler niteliğindedir.

1.1. Temel Tanım ve Teoremler

Tanım 1.1.1. $A\times A$ dan A ya bir fonksiyona A da bir ikili işlem denir.

$"*"$, A da bir ikili işlem ve $a,b\in A$ olsun. (a,b) nin $"*"$ işlemi altındaki görüntüsü $a*b$ ile gösterilsin. Fonksiyon olma özelliklerinden $\forall\ a,b\in A$ için A da bir $a*b$ elemanının var olmasına işlemin kapalılığı denir. Bu $a*b$ elemanının tek türlü belirli olmasına işlemin iyi tanımlılığı denir [1].

Tanım 1.1.2. G boş olmayan bir küme ve $"*"$, G de bir ikili işlem olsun. $(G,*)$ cebirsel yapısı aşağıdaki aksiyomları sağlıyorsa bu yapıya bir grup denir.

1) $"*"$, G de bir ikili işlemdir.

2) $"*"$ işleminin G de birleşme özelliği vardır. Yani, $\forall\ a,b,c\in G$ için $(a*b)*c=a*(b*c)$ dir.

3) $"*"$ işleminin, G de birim elemanı vardır. Yani, $\forall\ a\in G$ için $a*e=e*a=a$ olacak şekilde $e\in G$ vardır.

4) $"*"$ işlemine göre, G deki her elemanın bir tersi vardır. Yani $\forall a\in G$ için $a*a^{-1}=a^{-1}*a=e$ olacak şekilde $\exists\ a^{-1}\in G$ bulunabilir [1].

Tanım 1.1.3. G bir grup ve $\forall a,b\in G$ için $a*b=b*a$ oluyor ise G ye bir değişmeli (Abel) grup denir [1].

Tanım 1.1.4. G bir grup $\varnothing\neq H\subset G$ olsun. Eğer H, G deki işleme göre kendi başına bir grup ise H alt kümesine G nin bir alt grubu denir ve bu $H\leq G$ ile gösterilir [1].

Önerme 1.1.1. G bir grup $\varnothing\neq H\subset G$ olsun. H nin G nin bir altgrubu olması için gerek ve yeter şart aşağıdaki iki şartın sağlanmasıdır.

1) $\forall a,b\in H$ için $ab\in H$ dir,
2) $\forall a\in H$ için $a^{-1}\in H$ dir [1].

Önerme 1.1.2. G bir grup $\varnothing\neq H\subset G$ olsun. H nin G nin alt grubu olması için gerek ve yeter şart $\forall a,b\in H$ için $ab^{-1}\in H$ olmasıdır [1].

Önerme 1.1.3. G bir grup $\varnothing\neq H\subset G$ ve H sonlu elemanlı olsun. Eğer H kümesi G deki işleme göre kapalı ise $H\leq G$ dir [1].

Tanım 1.1.5. M, bir G grubunun bir alt kümesi olsun. M yi kapsayan, G nin bütün alt gruplarının arakesitine M nin ürettiği alt grup denir ve $\langle M\rangle$ ile gösterilir. M nin elemanlarına da $\langle M\rangle$ grubunun üreteçleri denir.

Eğer bir G grubu için $G=\langle M\rangle$ olacak şekilde bir $M\subset G$ alt kümesi bulunabiliyorsa; G ye M ile üretilmiş grup denir. Eğer M sonlu bir küme ise G ye sonlu üretilmiş grup ve $M=\{a\}$ tek elemanlı bir küme ise G ye a ile üretilmiş devirli grup denir ve $G=\langle a\rangle$ yazılır.

G çarpımsal grup olarak alınırsa $\langle a\rangle=\{a^n : n\in\mathbb{Z}\}$ dir.

G toplamsal grup olarak alınırsa $\langle a\rangle=\{na:n\in\mathbb{Z}\}$ dir [1].

Önerme 1.1.4. $G=\langle a\rangle$ t. mertebeden bir devirli grup ise G nin her alt grubunun mertebesi t yi böler [1].

Teorem 1.1.1. G bir grup ve $H\le G$ olsun. G de

$$a\equiv b\ (\text{mod } H)\ \Leftrightarrow\ ab^{-1}\in H$$

şeklinde tanımlanan "$\equiv$" bağıntısı denklik bağıntısıdır. Bu denklik bağıntısına göre bir $a\in G$ elemanının sınıfı $\overline{a}=Ha=\{ha:h\in H\}$ alt kümesidir [1].

Tanım 1.1.6. Teorem 1.1.1.' de verilen Ha kümesine, H alt grubuna göre a nın sağ denklik sınıfı denir [1].

Benzer şekilde sol denklik sınıfları da tanımlanabilir.

Teorem 1.1.2. $N\le G$ olsun. Aşağıdaki koşullar birbirine denktir.

1) $\forall\ a\in G$, $\forall\ x\in N$ için $axa^{-1}\in N$ dir.

2) $\forall\ a\in G$ için $aNa^{-1}\subset N$ dir.

3) $\forall\ a\in G$ için $aNa^{-1}=N$ dir.

4) $\forall\ a\in G$ için $aN=Na$ dır [1].

Tanım 1.1.7. Teorem 1.1.2.' de ki denk koşullardan birini sağlayan G nin bir N alt grubuna normal alt grup denir. $N\lhd G$ ile gösterilir. Buna göre $N\lhd G$ ise N ye göre göre tanımlanan sağ ve sol denklik sınıfları aynıdır [1].

Tanım 1.1.8. $N\lhd G$ olsun. G nin N normal alt grubuna göre sağ (veya sol) denklik sınıfları kümesi G/N ile gösterilir [1].

Teorem 1.1.3. $N \lhd G$ ise G/N gruptur [1].

Tanım 1.1.9. $N \lhd G$ ise G/N grubuna G nin N ye göre bölüm grubu denir [1].

Teorem 1.1.4. G sonlu bir grup ve $N \lhd G$ ise G/N de sonlu bir gruptur ve $\left|G/N\right| = \frac{|G|}{|N|}$ dir [1].

Teorem 1.1.5. (Lagrange Teoremi) G bir grup ve $H \leq G$ ise $|G| = \left|G/H\right| . |H|$ dir.

Özel olarak sonlu bir grubun her alt grubunun mertebesi, grubun mertebesini böler [1].

Tanım 1.1.10. $R \neq \varnothing$ kümesi üzerinde "$+$" ve "$\bullet$" ikili işlemleri tanımlı olsun.

Aşağıdaki aksiyomları sağlayan $(R,+,\bullet)$ cebirsel yapısına bir halka denir.

1) $(R,+)$ bir değişmeli gruptur.

2) "$\bullet$" işleminin R de birleşme özelliği vardır.

3) "$\bullet$" işleminin "$+$" işlemi üzerine sağdan ve soldan dağılma özellikleri vardır. Yani $\forall\ a,b,c \in R$ için $a\bullet(b+c) = a\bullet b + a\bullet c$ ve $(a+b)\bullet c = a\bullet c + b\bullet c$ dir.

Halkanın "$+$" işlemine göre etkisiz elemanına halkanın sıfır elemanı denir ve 0_R ile gösterilir. Halkanın "$\bullet$" işlemine göre etkisiz elemanı varsa buna halkanın birim elemanı denir ve 1_R ile gösterilir. Birim elemanı olan halkaya birimli halka denir. Halka "$\bullet$" işlemine göre değişme özelliğine sahip ise halkaya değişmeli halka denir [1].

Tanım 1.1.11. R halkasında $0_R \neq a \in R$ elemanı için; $ab = 0_R$ veya $ba = 0_R$ olacak şekilde $\exists\ 0_R \neq b \in R$ bulunabilirse a ya halkanın bir sıfır böleni denir [1].

Tanım 1.1.12. Sıfır bölensiz bir halkaya tam halka denir. Birimli, değişmeli ve sıfır bölensiz (tam) halkaya da bir tamlık bölgesi denir [1].

Tanım 1.1.13. R birimli ve değişmeli bir halka ve $R - \{0_R\} = R^*$, ikinci işlem olan "•" ya göre bir grup ise R ye bir cisim denir. Yani bir cisimde sıfırdan farklı her elemanın tersi vardır [1].

Önerme 1.1.5. Sonlu elemanlı her tamlık bölgesi cisimdir [1].

Tanım 1.1.14. R bir halka ve $\varnothing \neq S \subset R$ olsun. S kümesi R kümesindeki işlemlere göre kendi başına bir halka ise S ye R nin bir alt halkası denir [1].

Önerme 1.1.6. R bir halka ve $\varnothing \neq S \subset R$ olsun. S nin R nin bir alt halkası olması için gerek ve yeter koşul $\forall\ a,b \in S$ için $a - b \in S$ ve $ab \in S$ olmasıdır [1].

Tanım 1.1.15. R bir halka, $\varnothing \neq I \subset R$ ve $\forall\ a,b \in I$ için $a - b \in I$ olsun. Eğer $\forall\ a \in I$ ve $\forall\ r \in R$ için $ra \in I$ ise I ya R nin bir sol ideali denir. Benzer şekilde $\forall\ a \in I$ ve $\forall\ r \in R$ için $ar \in I$ ise I ya R nin bir sağ ideali denir.

Hem sol hem de sağ ideale kısaca ideal denir [1].

Önerme 1.1.7. Bir halkanın bir takım ideallerinin arakesiti de bir idealdir [1].

Tanım 1.1.16. I **,** R halkasının bir alt kümesi olsun. R nin, I yı kapsayan tüm ideallerinin arakesitine I nın ürettiği ideal denir ve $\langle I \rangle$ ile gösterilir. Eğer $I = \{a\}$ tek elemanlı bir küme ise I nın ürettiği ideale temel ideal denir ve $\langle a \rangle$ ile gösterilir. R birimli ve değişmeli bir halka ise $\langle a \rangle = aR = \{ar : r \in R\}$ dir [1].

Tanım 1.1.17. Her ideali temel ideal olan bir tamlık bölgesine temel ideal bölgesi denir ve kısaca TİB ile gösterilir [1].

Tanım 1.1.18. R bir halka ve I **,** R nin bir ideali olsun. $"\equiv"$ bağıntısı, $\forall\ a,b\in R$ için $a\equiv b \ (\mathrm{mod}\ I) \ \Leftrightarrow \ a-b\in I$ olarak tanımlansın [1].

Önerme 1.1.8. Yukarıda tanımlanan $"\equiv"$ bağıntısı R de bir denklik bağıntısıdır. Bu bağıntıya göre $r\in R$ nin denklik sınıfı $\overline{r}=r+I=\{r+a:a\in I\}$ dır. Bütün denklik sınıflarının kümesi R/I ile gösterilir [1].

Önerme 1.1.9. R halkasının bir I idealine göre tanımlanan denklik sınıfları arasında $(a+I)\oplus(b+I)=(a+b)+I$ ve $(a+I)\odot(b+I)=(ab)+I$ ile tanımlanan $"\oplus"$ ve $"\odot"$ işlemlerine göre R/I bir halkadır. Bu halkaya R nin I idealine göre bölüm halkası denir [1].

Tanım 1.1.19. R bir tamlık bölgesi olmak üzere $a,b\in R$ için, $a=bc$ olacak şekilde $\exists\ c\in R$ var ise b, a yı böler denir ve bu $b\,|\,a$ ile gösterilir [1].

Tanım 1.1.20. R tamlık bölgesinin tüm elemanlarını bölen R nin bir elemanına birimsel eleman ya da aritmetik birim denir. R nin tüm aritmetik birimlerinin kümesi U_R ile gösterilir [1].

Tanım 1.1.21. $a,b\in R$ için, $b=u_1au_2$ olacak şekilde $\exists\ u_1,u_2\in U_R$ var ise a ile b ile ilgilidir denir ve $a\approx b$ ile gösterilir [2].

Önerme 1.1.10. $a,b\in R$ olsun.

1) $a\,|\,b \Leftrightarrow \langle b\rangle\subset\langle a\rangle$ dır.

2) $b\neq 0$ olmak üzere $a\,|\,b$ ve $b\,|\,a \ \Leftrightarrow \ a\approx b$ dir [1].

Tanım 1.1.22. R bir tamlık bölgesi ve $a,b \in R$ olsun.

1) $c \in R$ olmak üzere $c \mid a$ ve $c \mid b$ ise c ye a ile b nin bir ortak böleni denir.

2) c, a ile b nin ortak böleni olmak üzere a ile b nin tüm ortak bölenleri c yi bölüyor ise c ye a ile b nin bir en büyük ortak böleni denir [1].

Tanım 1.1.23. Ebob leri aritmetik birimler olan elemanlara aralarında asal denir ve a ile b aralarında asal ise $(a,b)=1$ ile gösterilir [1].

Tanım 1.1.24. $x \in R$**,** $x \in U_R$ ve $x \neq 0_R$ olsun.

1) x in aritmetik birimlerden ve x ile ilgili elemanlardan başka hiçbir böleni yoksa x elemanına, R nin bir indirgenemez elemanı denir.

2) $a,b \in R$ için, $x \mid ab \Rightarrow x \mid a$ veya $x \mid b$ oluyorsa $x \in R$ ye asal eleman denir [1].

Tanım 1.1.25. R bir tamlık bölgesi olsun. Aşağıdaki özellikleri sağlayacak şekilde bir $d : R \to \mathbb{Z}$ fonksiyonu var ise R ye bir Euclid bölgesi denir ve kısaca EB ile gösterilir.

1) $\forall\ x \in R$ için, $d(x) \geq 0$,

2) $d(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0_R$,

3) $\forall\ x,y \in R$ için, $d(xy) = d(x)d(y)$,

4) $\forall\ x,y \in R$, $y \neq 0_R$ için, $x = qy + r$ ve $0 \leq d(r) < d(y)$ olacak şekilde $\exists\ q,r \in R$ bulunabilir [1].

Teorem 1.1.6. R bir EB ise TİB dir [1].

Tanım 1.1.26. $\mathbb{Z}[i] = \{a+bi : a,b \in \mathbb{Z}\}$ tamlık bölgesine Gauss tamsayılar bölgesi denir [1].

Önerme 1.1.11. $\mathbb{Z}[i]$ Gauss tamsayılar bölgesi EB dir [1].

Tanım 1.1.27. $(M,+)$ bir değişmeli grup ve R bir değişmeli halka olsun. M deki elemanların, R deki elemanlarla skaler çarpımı, $R\times M\rightarrow M$ fonksiyonu aşağıdaki koşulları sağlıyorsa, M ye R üzerinde bir modül veya kısaca $R-$modül denir.

1) Her $r\in R$, her $m,m^{'}\in M$ için, $r\left(m+m^{'}\right)=rm+rm^{'}$,

2) Her $r,r^{'}\in R,$ her $m\in M$ için $\left(r+r^{'}\right)m=rm+rm^{'}$,

3) Her $r,r^{'}\in R,$ her $m\in M$ için $\left(rr^{'}\right)m=r\left(r^{'}m\right)$,

4) Her $m\in M$ için, $1_R m=m$ [3].

Eğer R bir değişmeli halka değil ise sağ ve sol $R-$Modül tanımı benzer şekilde yapılabilir.

Tanım 1.1.28. $A=\{a_1,a_2,\ldots,a_q\}$, q elemanlı bir küme olsun. Bu kümeye alfabe kümesi denir [4].

Tanım 1.1.29. Her i için $w_i\in A$ olmak üzere, A^n üzerinde $w=w_1w_2...w_n$ şeklinde tanımlanan bir diziye n uzunluklu bir söz denir. n uzunluklu bir söz $w=(w_1,w_2,...,w_n)$ şeklinde bir vektör olarak da göz önüne alınabilir. A^n kümesine söz kümesi denir [4].

Tanım 1.1.30. A^n kümesinin boştan farklı bir C alt kümesine $q-$lu blok kod yada kısaca kod denir. C kodunun elemanlarına da kodsöz denir. C nin kodsözlerinin sayısı $|C|$ ile gösterilir ve buna C nin büyüklüğü denir [4].

Tanım 1.1.31. n uzunluklu bir C kodunun hızı $\left(\log_q|C|\right)/n$ olarak tanımlanır [4].

Tanım 1.1.32. n uzunluğunda ve M büyüklüğünde bir kod (n,M) kodu olarak tanımlanır [4].

Tanım 1.1.33. Bir iletişim kanalında kodsözler iletilirken iletişim sırasında bir hata oluştuğunda en çok ihtimalle gönderilmiş kodsözü bulmak için oluşturulan kurala dekodlama kuralı denir [4].

Tanım 1.1.34. x ve y bir A alfabesi üzerinde n uzunluklu iki söz olsun. x ve y arasındaki Hamming uzaklığı $d\left(x,y\right)$ ile gösterilir ve aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$x = x_1 ... x_n, \; y = y_1 ... y_n \text{ ve } d\left(x_i, y_i\right) = \begin{cases} 1, & x_i \neq y_i \\ 0, & x_i = y_i \end{cases}$$

olmak üzere

$$d\left(x,y\right) = d(x_1, y_1) + \ldots + d(x_n, y_n)$$

dir [4].

Tanım 1.1.35. Bir C kodunun bir kodsözü bir iletişim kanalından geçsin ve bir x sözü olarak alınsın. x in diğer tüm $c \in C$ ler ile arasındaki uzaklık hesaplanarak bu uzaklığın en az olduğu kodsöz c_x olarak bulunur ise x sözü, c_x olarak dekodlanır. Yani $d(x,c_x) = \min\limits_{c \in C} d(x,c)$ ise kanaldan gelen x sözü c_x olarak dekodlanır. Bu dekodlamaya en yakın komşuluk dekodlama kuralı (minimum mesafe dekodlama kuralı) denir [4].

Tanım 1.1.36. En az iki kodsöze sahip bir C kodunun minimum mesafesi $d(C)$ ile gösterilir ve $d(C) = \min\left\{d(x,y) : x, y \in C, \, x \neq y\right\}$ olarak tanımlanır [4].

Tanım 1.1.37. n uzunluklu, M büyüklüğünde ve d minimum mesafesine sahip bir kod $\left(n, M, d\right)$ kodu olarak adlandırılır. Burada n, M ve d sayılarına kodun parametreleri denir [4].

Tanım 1.1.38. p bir asal sayı olmak üzere $p^k = q$ ve F_q, karakteristiği p olan sonlu bir cisim olsun. $F_q^n = \left\{\left(v_1, v_2, \ldots, v_n\right) : v_i \in F_q\right\}$ ve $V \subset F_q^n$ boştan farklı bir küme olmak üzere; V vektörel toplama olan "+" işlemi ile F_q nun elemanları ile skaler çarpım "." işlemlemine göre aşağıdaki koşulları sağlıyor ise V ye F_q üzerinde bir vektör uzayı denir.

Her $u, v \in V$ ve $\lambda, \mu \in F_q$ için;

1) $(V, +)$ değişmeli grup,

2) $\lambda.v \in V$,

3) $\lambda.(u+v) = \lambda.u + \lambda.v$ ve $(\lambda + \mu).u = \lambda.u + \mu.u$,

4) $(\lambda\mu).u = \lambda.(\mu.u)$,

5) Eğer F_q nun çarmaya göre etkisiz elemanı 1 ise $1.u = u$ [4].

Tanım 1.1.39. V vektör uzayının boştan farklı bir C alt kümesi, V vektör uzayındaki vektörel toplam ve skalerle çarpma işlemlerine göre kendi başına bir vektör uzayı ise C ye V vektör uzayının bir alt vektör uzayı denir [4].

Tanım 1.1.40. F_q^n vektör uzayının herhangi bir C alt vektör uzayı bir lineer kod olarak tanımlanır [4].

BÖLÜM 2. GAUSS TAMSAYILARINDA $t-$MÜKEMMEL KÜMELER VE ÖZELLİKLERİ

2.1. Gauss Tamsayılarında Kalan Sınıfları ve G_α Çizgesinin Özellikleri

Tanım 2.1.1. Gauss tamsayılar kümesi $\mathbb{Z}[i]$ ile gösterilir. Bu küme kompleks sayıların bir alt kümesidir ve $\mathbb{Z}[i]=\{a+bi:a,b\in\mathbb{Z}\}$ olarak tanımlanır.

$\mathbb{Z}[i]$ Euclid bölgesinde, N norm fonksiyonu

$N=\mathbb{Z}[i]\to\mathbb{Z}^{+}\cup\{0\}$,

$N(x+yi)=(x+yi).\overline{(x+yi)}=(x+yi).(x-yi)=x^2+y^2$

olarak tanımlanır.

Bu norm fonsiyonuna göre bölme algoritması ise aşağıdaki gibidir.

$\forall\alpha,\beta\in\mathbb{Z}[i]$ ve $\alpha\neq 0$ için $\beta=q\alpha+r$ ve $N(r)<N(q)$ olacak şekilde $q,r\in\mathbb{Z}[i]$ vardır [5].

Bir halka Euclid bölgesi ise temel ideal bölgesi olacağından $\mathbb{Z}[i]$ Gauss tamsayılar halkası bir temel ideal bölgesidir. Yani $\mathbb{Z}[i]$ deki her ideal tek elemanla üretilir.

Tanım 2.1.2. $0\neq\alpha\in\mathbb{Z}[i]$ ve I da α ile üretilen ideal olsun. Bu durumda $\mathbb{Z}[i]_\alpha$ kümesi $\mathbb{Z}[i]/I$ olarak düşünülebilir. Bu küme sonlu bir halkadır. Bu halkaya bölüm halkası denir.

Eğer β ve β' elemanları $\mathbb{Z}[i]_\alpha$ da aynı sınıfa ait iki eleman ise $\beta \equiv \beta' \pmod{\alpha}$ şeklinde gösterilir [5].

Not 2.1.1. $\bar{z} \in \mathbb{Z}[i]_\alpha$ için $\bar{z} = \{z + k.\alpha : k \in \mathbb{Z}[i]\}$ olup $\bar{z}$ kümesi α modülüne göre bir denklik sınıfı belirtir.

Not 2.1.2. $\alpha = m + ni$, $z = c + di \in \mathbb{Z}[i]$ ve $\alpha^* = m - ni$ olmak üzere, z nin α ile bölümünden kalan $x + yi$ ise

$$x + yi = z - \left[\frac{z \cdot \alpha^*}{\alpha \cdot \alpha^*}\right] \cdot \alpha \tag{2.1}$$

dir.

Burada $x + yi \in \bar{z}$ olup $\forall a + bi \in \bar{z}$ için genellikle $|x| + |y| \le |a| + |b|$ dir. Eğer α bir asal Gaus tamsayısı ve $N(\alpha) < 113$ ise $x + yi \in \bar{z}$ olup, $\forall a + bi \in \bar{z}$ için $|x| + |y| \le |a| + |b|$ dir.

Ayrıca "$[\cdot]$" sembolü en yakın tamsayıya yuvarlama işlemidir. $a + bi$ bir kompleks sayı olmak üzere, bu kompleks sayıyı en yakın Gauss tamsayısına yuvarlama

$[a + bi] = [a] + [b]i$

şeklinde tanımlanır.

Bundan sonra $\bar{a} \in \mathbb{Z}[i]_\alpha$ kolaylık için a olarak yazılacaktır.

Örnek 2.1.1. $z = 4 + 2i$ nin $\alpha = 3 + 2i$ ile bölümünden kalan aşağıdaki gibi bulunur.

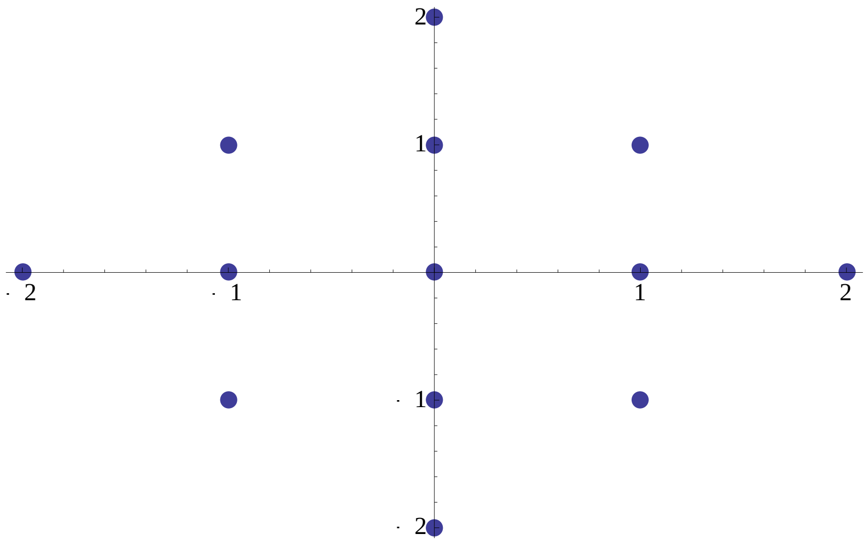
$$4+2i-\left[\frac{(4+2i)(3-2i)}{(3+2i)(3-2i)}\right](3+2i)=4+2i-\left[\frac{17-2i}{13}\right](3+2i)$$
$$=4+2i-\left(\left[\frac{17}{13}\right]-\left[\frac{2}{13}\right]i\right)(3+2i)=4+2i-(1-0\cdot i)(3+2i)$$
$$=4+2i-3-2i=1$$
dir.

Örnek 2.1.2. $\alpha=3+2i$ için $\mathbb{Z}[i]_{3+2i}$ kümesi şu şekilde bulunur.

$\mathbb{Z}[i]_{3+2i}$ kümesinin elemanlarını bulmak için $\mathbb{Z}[i]$ deki tüm elemanların α ile bölümünden kalanları incelemek yerine $N(z)<N(\alpha)=3^2+2^2=13$ olacak şekilde $z\in\mathbb{Z}[i]$ elemanlarına (2.1) işlemini yapmak yeterlidir.

Buna göre
$$\mathbb{Z}[i]_{3+2i}=\left\{\overline{0},\overline{1},\overline{-1},\overline{2},\overline{-2},\overline{i},\overline{-i},\overline{2i},\overline{-2i},\overline{1+i},\overline{1-i},\overline{-1+i},\overline{-1-i},\right\}$$
olarak bulunur.

Şekil 2.1.' de $\mathbb{Z}[i]_{3+2i}$ kümesinin elemanları kompleks düzlemde gösterilmiştir.



Şekil 2.1. $\mathbb{Z}[i]_{3+2i}$ kümesi

Teorem 2.1.1. $\alpha = a+bi \in \mathbb{Z}[i]$ ve $(a,b)=1$ olsun.

$\phi : \mathbb{Z}_{N(\alpha)} \to \mathbb{Z}[i]_\alpha$, $\phi(k) = x+yi \ (\text{mod } \alpha)$ fonksiyonu birebir ve örten bir halka homomorfizmasıdır. Yani $\mathbb{Z}_{N(\alpha)} \cong \mathbb{Z}[i]_\alpha$ dır [5].

Örnek 2.1.3. $\alpha = 2+3i$ için $N(\alpha) = 2^2+3^2 = 13$ olduğundan $\mathbb{Z}[i]_{2+3i} \cong \mathbb{Z}_{13}$ olup $\mathbb{Z}[i]_{2+3i}$ nin 13 tane elemanı vardır. Bu elemanlar $\mathbb{Z}_{13}$ ün elemanlarına sırasıyla (2.1) işlemi yapılarak, yani $\alpha = 2+3i$ ile bölümünden kalanlar bulunarak, elde edilir.

Buna göre
$\mathbb{Z}[i]_{2+3i} = \{0,1,-1,2,-2,\ i,-i,2i,-2i,1+i,1-i,-1+i,-1-i\}$
olarak bulunur.

Tanım 2.1.3. $\beta,\gamma \in \mathbb{Z}[i]_\alpha$ olmak üzere $x+yi$ elemanı $\beta-\gamma$ nın sınıfındaki elemanlardan reel ve imajiner kısımlarının mutlak değerleri toplamı en küçük olan eleman olsun. Yani $x+yi \in \overline{\beta-\gamma}$ öyleki $\forall\, a+bi \in \overline{\beta-\gamma}$ için $|x|+|y| \le |a|+|b|$ olsun.

Bu durumda β ile γ arasındaki Mannheim mesafesi $D_\alpha(\beta,\gamma)$ ile gösterilir ve $D_\alpha(\beta,\gamma) = |x|+|y|$ olarak tanımlanır [5].

Teorem 2.1.2. Yukarıda tanımlanan D_α mesafesi, $\mathbb{Z}[i]_\alpha$ halkası üzerinde bir metrik tanımlar [5].

Örnek 2.1.4. $\alpha = 3+2i$ ve $\beta = 1+i$, $\gamma = -1-i$ olsun.

Bu durumda β ile γ arasındaki mesafe şu şekilde bulunur.

$\beta-\gamma = 1+i-(-1-i) = 2+2i \equiv -1 \ (\text{mod } 3+2i)$ olup, buna göre

$D_\alpha(1+i,-1-i)=|-1|+|0|=1$ dir.

Örnek 2.1.5.

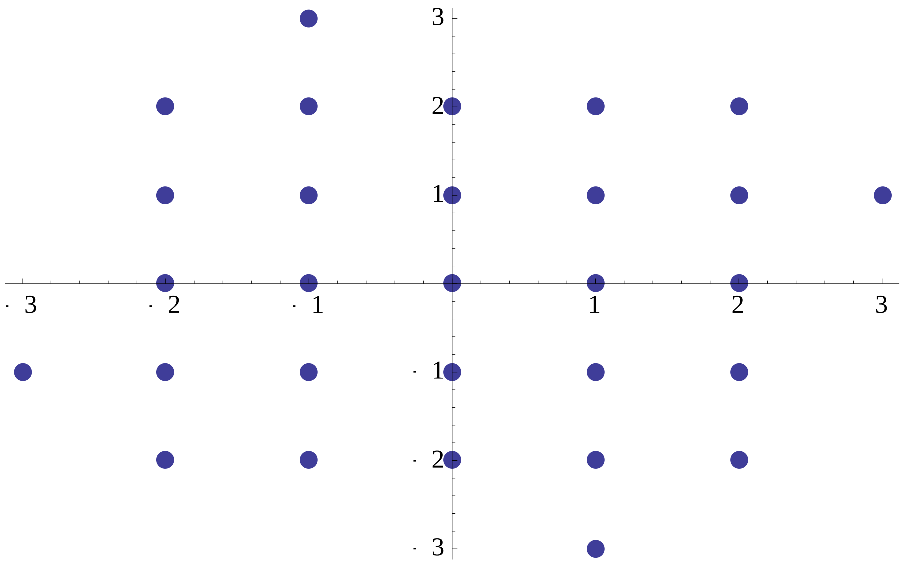
$$\mathbb{Z}[i]_{2+5i}=\{1,2,-2+2i,-1+2i,2i,1+2i,2+2i,1-3i,-3-i,-2-i,-1-i,-i,1-i,2-i,$$
$$-2+i,-1+i,i,1+i,2+i,3+i,-1+3i,-2-2i,-1-2i,-2i,1-2i,2-2i,-2,-1,0\}$$

kümesinin bazı elemanları için D_α mesafesi aşağıdaki gibi bulunur.

$\beta=-2+2i$ ve $\gamma=1-i$ için $\beta-\gamma=-3+3i\equiv 2+i \pmod{2+5i}$ olduğundan $D_\alpha(-2+2i,1-i)=|2|+|1|=3$ olarak bulunur.

$\beta=-1$ ve $\gamma=-1-i$ için $\beta-\gamma=i\equiv i \pmod{2+5i}$ olduğundan $D_\alpha(-1,-1-i)=|0|+|1|=1$ olarak bulunur.

Şekil 2.2.' de $\mathbb{Z}[i]_{2+5i}$ kümesinin elemanları kompleks düzlemde gösterilmiştir.



Şekil 2.2. $\mathbb{Z}[i]_{2+5i}$ kümesi

Tanım 2.1.4. İki ayrı uç noktası olan doğru parçasına çizgi, bir çizginin her bir uç noktasına düğüm denir [6].

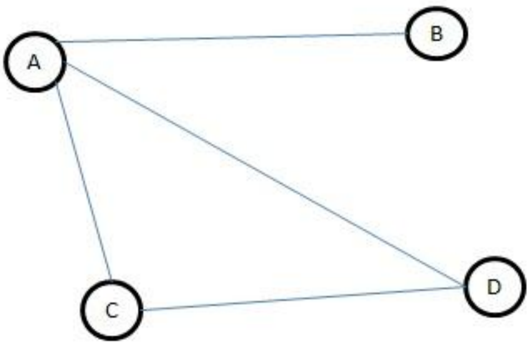
Tanım 2.1.5. Rastgele sayıda çizgilerin düğümlere çakışık olduğu çizgiler ve düğümler kümesinin tümüne çizge (graf) denir [6].

Tanım 2.1.6. G çizgesinde hiçbir çizginin çakışmadığı düğümlere tekdüğüm denir [6].

Tanım 2.1.7. Bir G çizgesinin çizgilerinin veya tekdüğümlerinin alt kümesinden oluşan G_S çizgesine, G nin bir alt çizgesi denir [6].

Tanım 2.1.8. Bir çizge üzerinde bir veya daha fazla düğümden ve kenardan geçen rotaya yol denir.

Çizge teorisi (graph theory) literatürde çok farklı disiplinlerin çalışma alanına girmektedir. $G=(V,E)$ gösterimi çoğu kaynakta sıralı olarak kabul edilmektedir. Öncelikle düğümler, ardından da kenarlar gösterilmektedir.



Şekil 2.3. Çizge örneği [7]

Örneğin yukarıdaki şekilde, 4 düğümden ve 4 kenardan oluşan bir çizge gösterilmektedir. Bu çizgeyi

$G=\left(\{A,B,C,D\},\{(A,B),(A,C),(C,D),(A,D)\}\right)$

şeklinde ifade etmek mümkündür [7].

Tanım 2.1.9. Bir G çizgesinde her düğüm çifti arasında en az bir yol var ise G çizgesine bir bağlı çizge denir [6].

Tanım 2.1.10. n ve N iki pozitif tamsayı olsun. $0 \leq n \leq N-1$ olmak üzere, bir n köşeyi diğer tüm $n \mp j_i$ köşeye bağlayan çizgeye yönsüz çizge denir. Burada $m < \frac{N}{2}$, $1 \leq i \leq m$ ve $\{j_1, j_2, ..., j_m\}$ köşelerin atlama kümesidir [5].

Tanım 2.1.11. $m < \frac{N}{2}$ olmak üzere N köşenin herbiri için $\{j_1, j_2, ..., j_m\}$ atlamaları ile oluşturulan ve yukarıdaki gibi tanımlanan bir yönsüz çizgeye, döngüsel çizge denir. Bu çizge $C_N(j_1, ..., j_m)$ sembolü ile gösterilir. C_N nin bağlı olması için gerek ve yeter şart $(j_1, j_2, \ldots, j_m, N) = 1$ olmasıdır. Bu durumda C_N çizgesi bir düzenli çizge olur [5].

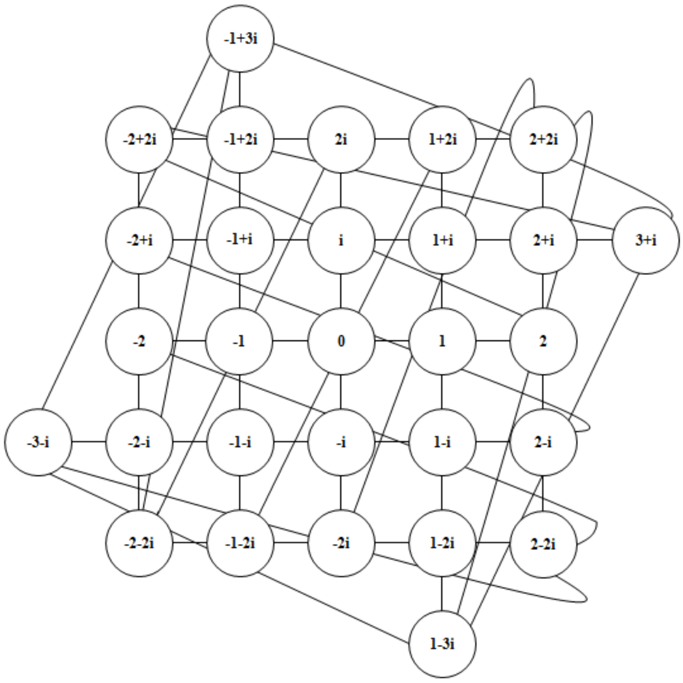
Çizge teorisi hakkında daha fazla bilgi [5, 6, 7]' de bulunabilir.

Tanım 2.1.12. $\alpha = a + bi \in \mathbb{Z}[i]$ ve $(a,b) = 1$ olsun.

1) $V = \mathbb{Z}[i]_\alpha$ kümesi, köşelerin kümesi ve

2) $E = \{(\beta, \gamma) \in V \times V : D_\alpha(\beta, \gamma) = 1\}$ kümesi, kenarların kümesi olarak alınırsa $G_\alpha = (V, E)$ bir çizge tanımlar [5].

Örnek 2.1.6. $\alpha = 2 + 5i$ için G_{2+5i} çizgesi aşağıdaki gibidir.



Şekil 2.4. G_{2+5i} çizgesi

Örnek 2.1.7. $\alpha = 3+4i$ için E kümesi aşağıdaki şekilde bulunur.

Öncelikle $N(3+4i) = 3^2 + 4^2 = 25$ olduğundan $\mathbb{Z}_{25}$ in elemanlarının α ile bölümünden kalanlardan oluşan

$$\mathbb{Z}[i]_{3+4i} = \{0,1,-1,i,-i,2,-2,2i,-2i,3,-3,3i,-3i,1+i,1-i,-1+i,-1-i,1+2i, 1-2i,-1+2i,-1-2i,2+i,2-i,-2+i,-2-2i\}$$

kümesi bulunur.

E kümesini bulmak için $\forall\ \beta \in \mathbb{Z}[i]_{3+4i}$ için $D_\alpha(\beta,\gamma) = 1$ olan $\gamma \in \mathbb{Z}[i]_\alpha$ sayıları bulunmalıdır.

$\beta - \gamma = |x| + |y| = 1$ ise $x = \mp 1$ ve $y = 0$ veya $x = 0$ ve $y = \mp 1$ dir.

Buna göre γ sayısı $\beta - 1,\ \beta + 1,\ \beta - i,\ \beta + i$ değerlerini alır.

$\beta = 0$ elemanına 1 uzaklıktaki γ elemanları bulunur ise;

$\beta - 1 = -1 \equiv -1 \pmod{3+4i} \Rightarrow (0,-1) \in E$ dir.

$\beta + 1 = 1 \equiv 1 \pmod{3+4i} \Rightarrow (0,1) \in E$ dir.

$\beta - i = -i \equiv -i \pmod{3+4i} \Rightarrow (0,-i) \in E$ dir.

$\beta + i = i \equiv i \pmod{3+4i} \Rightarrow (0,i) \in E$ dir.

$\beta = 3i$ elemanına 1 uzaklıktaki γ elemanları bulunur ise;

$\beta - 1 = -1 + 3i \equiv 3 \pmod{3+4i} \Rightarrow (3i,3) \in E$ dir.

$\beta + 1 = 1 + 3i \equiv -2 - i \pmod{3+4i} \Rightarrow (3i,-2-i) \in E$ dir.

$\beta - i = 2i \equiv 2i \pmod{3+4i} \Rightarrow (3i,2i) \in E$ dir.

$\beta + i = 4i \equiv -3 \pmod{3+4i} \Rightarrow (3i,-3) \in E$ dir.

$\mathbb{Z}_{3+4i}$ kümesindeki diğer elemanlara da benzer işlemler yapıldığında E kümesi bulunmuş olur.

$$E=\{(0,1),(0,-1),(0,i),(0,-i),(1,0),(1,2),(1,1+i),(1,1-i),(-1,0),(-1,-2),$$
$$(-1,-1-i),(-1,-1+i),(2,1),(2,3),(2,2+i),(2,2-i),(-2,-1),(-2,-3),(-2,-2-i),$$
$$(-2,-2+i),(3,2),(3,3i),(3,-3i),(3,-1+2i),(-3,-2),(-3,-3i),(-3,1-2i),(i,0),$$
$$(i,2i),(i,1+i),(i,-1+i),(-i,0),(-i,-2i),(-i,-1-i),(-i,1-i),(2i,i),(2i,3i),$$
$$(2i,1+2i),(2i,-1+2i),(-2i,-i),(-2i,-3i),(-2i,-1-2i),(-2i,1-2i),(3i,-3),$$
$$(3i,3),(3i,2i),(3i,-2-i),(-3i,3),(-3i,-2i),(-3i,-2i),(-3i,2+i),(1+i,1),(1+i,i),$$
$$(1+i,1+2i),(1+i,2+i),(1-i,1),(1-i,-i),(1-i,1-2i),(1-i,2-i),(-1+i,-1),$$
$$(-1+i,i),(-1+i,-1+2i),(-1+i,-2+i),(-1-i,-1),(-1-i,-i),(-1-i,-1-2i),$$
$$(-1-i,-2-i),(1+2i,2i),(1+2i,1+i),(1+2i,-1-i),(1+2i,-2-i),(1-2i,-3),$$
$$(1-2i,-2i),(1-2i,1-i),(1-2i,-2+i),(-1+2i,3),(-1+2i,2i),(-1+2i,-1+i),$$
$$(-1+2i,2-i),(-1-2i,-2i),(-1-2i,-1-i),(-1-2i,1+2i),(-1-2i,2+i),(2+i,2),$$
$$(2+i,-3i),(2+i,1+i),(2+i,-1-2i),(2-i,2),(2-i,3i),(2-i,1-i),(2-i,-2+i),$$
$$(-2+i,-2),(-2+i,-3i),(-2+i,-1+i),(-2+i,2-i),(-2-i,-2),(-2-i,3i),$$
$$(-2-i,-1-i),(-2-i,1+2i)\}$$

dir.

Teorem 2.1.3. $\alpha=a+bi\in\mathbb{Z}[i]$ ve $(a,b)=1$ olsun. Bu durumda $C_N(a,b)$ döngüsel çizgesi ile G_α çizgesi izomorf çizgelerdir. $k\equiv ax+by\ (\mathrm{mod}\ N(\alpha))$ olmak üzere $\phi:\mathbb{Z}_{N(\alpha)}\to\mathbb{Z}[i]_\alpha$, $\phi(k)=x+yi\ (\mathrm{mod}\ \alpha)$ fonksiyonu bir çizge izomorfizmasıdır [5].

2.2. Ağırlık Dağılımları

Tanım 2.2.1. G_α daki β ve γ köşeleri arasındaki mesafe $D_\alpha(\beta,\gamma)=\min\{|x|+|y|:\beta-\gamma\equiv x+yi\ (\mathrm{mod}\ \alpha)\}$ olarak tanımlanır [5].

Tanım 2.2.2. G_α daki β köşesinin ağırlığı $w_\alpha(\beta)$ ile gösterilir ve $w_\alpha(\beta)=D_\alpha(\beta,0)=\min\{|x|+|y|:\beta\equiv x+yi\ (\mathrm{mod}\ \alpha)\}$ olarak tanımlanır [5].

Buna göre bir Gauss çizgesinin mesafe dağılımını hesaplamak için k çizgenin çapı ve $s = 0,1,2,...,k$ olmak üzere s ağırlıklı köşelerin sayısını bulmak yeterlidir. Bu sayı $W_\alpha(s)$ ile gösterilecektir [5].

Lemma 2.2.1. $G_{a+bi} \cong G_{c+di}$ olması için gerek ve yeter şart $a+bi = u(c+di)$ veya $a-bi = u(c+di)$ olacak şekilde $u \in \{-1,1,i,-i\}$ elemanının var olmasıdır [5].

Örnek 2.2.1. $(-i)(2+3i) = 3-2i$ olduğundan $G_{3-2i} \cong G_{2+3i}$ ve $G_{3+2i} \cong G_{2+3i}$ dir.

Teorem 2.2.1. $0 \neq \alpha = a+bi \in \mathbb{Z}[i]$, $0 < a < b$ ve $(a,b)=1$ olsun. Eğer $N(\alpha) = a^2 + b^2$ tek tamsayı ve $t = \dfrac{a+b-1}{2}$ ise G_α nın ağırlık dağılımı aşağıdaki gibidir.

1) $W_\alpha(0) = 1$ dir.
2) Eğer $1 \leq s \leq t$ ise $W_\alpha(s) = 4s$ dir.
3) Eğer $t < s \leq b-1$ ise $W_\alpha(s) = 4(b-s)$ dir [5].

Örnek 2.2.2. $\alpha = 4+7i$ için G_{4+7i} nin elemanlarının ağırlık dağılımı aşağıdaki gibi bulunur.

$a = 4$, $b = 7$ olduğundan $t = \dfrac{4+7-1}{2} = 5$ dir.

1) $W_\alpha(0) = 1$ olduğundan ağırlığı sıfır olan eleman 1 tanedir ve bu eleman 0 dır.

2) $1 \leq s \leq t \Rightarrow 1 \leq s \leq 5$ dir.

Buna göre $W_\alpha(1)=4.1=4$ olup ağırlığı bir olan eleman 4 tanedir. Bu elemanlar $1,-1,i$ ve $-i$ dir.

$W_\alpha(2)=4.2=8$ olup ağırlığı iki olan elemanlar 8 tanedir. Bu elemanlar $2,-2,2i,-2i,1+i,1-i,-1+i$ ve $-1-i$ dir.

$W_\alpha(3)=4.3=12$ olup ağırlığı 3 olan elemanlar 12 tanedir. Bu elemanlar $3,-3,3i,-3i,1+2i,1-2i,-1+2i,-1-2i,2+i,2-i,-2+i$ ve $-2-i$ dir.

$W_\alpha(4)=4.4=16$ olup ağırlığı 4 olan elemanlar 16 tanedir. Bu elemanlar $4,-4,4i,-4i,1-3i,1+3i,-1+3i,-1-3i,2+2i,2-2i,-2+2i,-2-2i,3+i,3-i,-3+i$ ve $-3-i$ dir.

$W_\alpha(5)=4.5=20$ olup ağırlığı 5 olan elemanlar 20 tanedir. Bu elemanlar $5,-5,5i,-5i,1+4i,1-4i,-1+4i,-1-4i,2+3i,2-3i,-2+3i,-2-3i,3+2i,3-2i$ $-3+2i,-3-2i,4+i,4-i,-4+i$ ve $-4-i$ dir.

3) $t<s\leq b-1 \Rightarrow 5<s\leq 6 \Rightarrow s=6$ dır. $w_\alpha(s)=4(b-s)$ ise $w_\alpha(6)=4(7-6)=4$ dür.

Buna göre ağırlığı 6 olan 4 eleman vardır. Bu elemanlar $1-5i,-1+5i,5+i$ ve $-5-i$ dir.

2.3. Gauss Tamsayılarında $t-$Mükemmel Kümeler ve Kodlama İle İlişkisi

$0<a<b$ ve $(a,b)=1$ olmak üzere $\alpha=a+bi$ olsun.

Bu bölümde $t<b$ olmak üzere $\mathbb{Z}[i]_\alpha$ kümesi içinde bir $t-$baskın alt küme olan S nin varlığı için gerek ve yeter koşul verilmektedir. Burada S, elemanları $\mathbb{Z}[i]_\alpha$ nın

bir alt grubunu oluşturan G_α içinde bir kümedir. Bu sonuç $\mathbb{Z}[i]_\alpha$ üzerinde mükemmel grup kodların varlığını gerektirir.

Sonuç 2.3.1. $\alpha = a+bi \in \mathbb{Z}[i]$ ve $(a,b)=1$ olsun.

1) $\beta \in \mathbb{Z}[i]$ ve $\beta \mid \alpha$ ise $\langle \beta \rangle$ toplamsal grubunun mertebesi $|\langle \beta \rangle| = \dfrac{N(\alpha)}{N(\beta)}$ ve $\langle \beta \rangle \subset \mathbb{Z}[i]_\alpha$ dır.

2) $\beta \in \mathbb{Z}[i]$, $\beta \nmid \alpha$ ve $\beta \nmid \gamma = (\beta, \alpha)$ ise $S = \langle \beta \rangle \subset \mathbb{Z}[i]_\alpha$ toplamsal grubu γ tarafından üretilir. Yani $S = \langle \beta \rangle = \langle \gamma \rangle$ dır.

Ayrıca $|\langle \beta \rangle| = \dfrac{N(\alpha)}{N(\gamma)}$ dır [5].

Örnek 2.3.1. $\beta = 2-3i$ ve $\alpha = 4+7i$ için $(2-3i) \mid (4+7i)$ dir.

Buna göre $|\langle 2-3i \rangle| = \dfrac{N(4+7i)}{N(2-3i)} = \dfrac{65}{13} = 5$ olup $\langle \beta \rangle = \langle 2-3i \rangle$ kümesinin elemanları aşağıdaki gibi bulunur.

$0.(2-3i) = 0 \equiv 0 \pmod{4+7i}$,

$1.(2-3i) = 2-3i \equiv 2-3i \pmod{4+7i}$,

$2.(2-3i) = 4-6i \equiv -3-2i \pmod{4+7i}$,

$3.(2-3i) = 6-9i \equiv 3+2i \pmod{4+7i}$,

$4.(2-3i) = 8-12i \equiv -2+3i \pmod{4+7i}$,

$5.(2-3i) = 0 \equiv 0 \pmod{4+7i}$ dir.

Buna göre $\langle 2-3i\rangle = \{0, 2-3i, -3-2i, 3+2i, -2+3i\}$ dir.

Örnek 2.3.2. $\alpha = 4+7i$, $\beta = 4+2i$ için $\beta \nmid \alpha$ dır.
$\gamma = 1-2i = (4+2i, 4+7i)$ seçilirse $\beta \nmid \gamma$ dır.

Buna göre

$$\langle 4+2i\rangle = \langle 1-2i\rangle \text{ ve } |\langle \gamma\rangle| = \frac{N(\alpha)}{N(\gamma)} = \frac{65}{5} = 13$$

dür.

Örnek 2.3.1.' deki işlemler yapıldığında $\langle 4+2i\rangle = \langle 1-2i\rangle$ kümesi
$\{0, 1-2i, 2-4i, -4-2i, 1+3i, 2+i, 3-i, -3+i, -2-i, -1-3i, 4+2i, -2+4i, -1+2i\}$
olarak bulunur.

Tanım 2.3.1. $0 < a < b$ ve $(a,b) = 1$ olmak üzere $\alpha = a+bi \in \mathbb{Z}[i]$ olsun.

$t \le b$ için G_α içinde γ merkezli ve t yarıçaplı bir yuvar
$B_t(\gamma) = \{\lambda \in \mathbb{Z}[i]_\alpha : D_\alpha(\lambda, \gamma) \le t\}$
olarak tanımlanır.

Eğer $\lambda \in B_t(\gamma)$ ise γ köşesi λ köşesine $t-$baskındır denir [5].

Örnek 2.3.3. $\mathbb{Z}[i]_{2+5i}$ kümesinde $B_1(3+i)$ ve $B_2(3+i)$ yuvarları aşağıdaki gibi bulunur.

$$\begin{aligned}\mathbb{Z}[i]_{2+5i} = \{&0, 1, -1, 2, -2, i, -i, 2i, -2i, 1+i, 1-i, -1+i, -1-i, 1+2i, 1-2i, -1+2i,\\ &-1-2i, 2+i, 2-i, -2+i, -2-i, 2+2i, 2-2i, -2+2i, -2-2i, -1+3i,\\ &1-3i, 3+i, -3-i\}\end{aligned}$$

dir.

Buna göre $B_1(3+i)=\{\lambda\in\mathbb{Z}[i]_{2+5i}:D_{2+5i}(\lambda,3+i)\le 1\}$ ve $B_2(3+i)=\{\lambda\in\mathbb{Z}[i]_{2+5i}:D_{2+5i}(\lambda,3+i)\le 2\}$ kümeleri, merkezleri $3+i$ ve sırasıyla yarıçapları 1 ve 2 olan yuvarlardır.

$B_1(3+i)$ kümesinin elemanları aşağıdaki gibi bulunur.

Burada birbiri ile karışmaması için λ değerleri indislenmiştir.

$t=0$ ise $D_{2+5i}(\lambda,3+i)=0$ olup $\lambda_1=3+i$ dir.

$t=1$ ise $D_{2+5i}(\lambda,3+i)=1$ dir.

Buna göre $3+i$ elemanına ağırlığı 1 olan elemanlar eklenip sonuçların $2+5i$ ye göre kalanları bulunur ise;

$\lambda_2=(3+i)-1=2+i\equiv 2+i\ (\mathrm{mod}\ 2+5i)$,
$\lambda_3=(3+i)+1=4+i\equiv -1+3i\ (\mathrm{mod}\ 2+5i)$,
$\lambda_4=(3+i)-i=3\equiv -2+2i\ (\mathrm{mod}\ 2+5i)$,
$\lambda_5=(3+i)+i=3+2i\equiv 1-3i\ (\mathrm{mod}\ 2+5i)$
olur.

Böylece t nin 0 ve 1 değerlerine göre
$B_1(3+i)=\{3+i,2+i,-1+3i,-2+2i,1-3i\}$
olarak bulunur.

$t=2$ ise $D_{2+5i}(\lambda,3+i)=2$ dir.

Yukarıda $3+i$ elemanına 0 ve 1 uzaklıkdaki elemanlar bulunduğundan burada $3+i$ ye 2 uzaklıktaki elemanların bulunması yeterlidir. $3+i$ elemanına ağırlığı 2 olan elemanlar eklenip $2+5i$ ye göre kalanları bulunur ise;

$\lambda_6 = (3+i)-2 = 1+i \equiv 1+i \pmod{2+5i}$,

$\lambda_7 = (3+i)+2 = 5+i \equiv -2-2i \pmod{2+5i}$,

$\lambda_8 = (3+i)-2i = 3-i \equiv -2+i \pmod{2+5i}$,

$\lambda_9 = (3+i)+2i = 3+3i \equiv 1-2i \pmod{2+5i}$,

$\lambda_{10} = (3+i)+(1+i) = 4+2i \equiv -3-i \pmod{2+5i}$,

$\lambda_{11} = (3+i)+(1-i) = 4 \equiv -1+2i \pmod{2+5i}$,

$\lambda_{12} = (3+i)+(-1+i) = 2+2i \equiv 2+2i \pmod{2+5i}$,

$\lambda_{13} = (3+i)+(-1-i) = 2 \equiv 2 \pmod{2+5i}$

olur.

Böylece t nin 0, 1ve 2 değerlerine göre $B_2(3+i)$ kümesi

$\{3+i, 2+i, -1+3i, -2+2i, 1-3i, 1+i, -2-2i, -2+i, 1-2i, -3-i, -1+2i, 2+2i, 2\}$

olarak bulunur.

Tanım 2.3.2. $S \subset G_\alpha$ ve $t \in \mathbb{Z}^+$ olsun. Eğer G_α nın her köşesi S deki yalnız bir köşe ile $t-$baskılanırsa S ye bir mükemmel $t-$baskın küme denir [5].

Teorem 2.3.1. $\alpha = a+bi \in \mathbb{Z}[i]$, $(a,b)=1$ ve $t \in \mathbb{Z}^+$ olsun.

1) $\beta = t+(t+1)i$ olmak üzere $\beta \mid \alpha$ ise $S = \langle \beta \rangle$ kümesi, G_α da bir mükemmel $t-$ baskın kümedir.

2) $\beta^* = t-(t+1)i$ olmak üzere $\beta^* \mid \alpha$ ise $S = \langle \beta^* \rangle$ kümesi G_α da bir mükemmel $t-$baskın kümedir [5].

$t \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere, $t+(t+1)i$ ya da $t-(t+1)i$ α yı bölüyor ise Teorem 2.3.1.' e göre G_α içinde bir $t-$ baskın S kümesi vardır. Bu küme $\mathbb{Z}[i]_\alpha$ nın bir alt grubudur. Bundan yararlanarak kod sözleri S nin elemanları olan $\mathbb{Z}[i]_\alpha$ üzerinde bir $C=S$ kodu tanımlanabilir. S uzunluğu t olan, $2t+1$ mesafeli bir mükemmel grup koddur.

Örnek 2.3.4. $\alpha = 4+7i$ ve $t=1$ için G_α da mükemmel $1-$baskın küme aşağıdaki gibi bulunur.

$$\begin{aligned}\mathbb{Z}[i]_{4+7i} = \{&0,1,-1,2,-2,3,-3,4,-4,5,-5,i,-i,2i,-2i,3i,-3i,4i,-4i,5i,-5i,1+i,1-i,\\ &-1+i,-1-i,1+2i,1-2i,-1+2i,-1-2i,1+3i,1-3i,-1+3i,-1-3i,1+4i,\\ &1-4i,-1+4i,-1-4i,1-5i,-1+5i,2+i,2-i,-2+i,-2-i,2+2i,2-2i,\\ &-2+2i,-2-2i,2+3i,2-3i,-2+3i,-2-3i,3+i,3-i,-3+i,-3-i,3+2i,\\ &3-2i,-3+2i,-3-2i,4+i,4-i,-4+i,-4-i,5+i,-5-i\}\end{aligned}$$

dir.

$t=1$ olduğundan Teorem 2.3.1 e göre $1\mp 2i$ elemanlarının α yı bölüp bölmediği kontrol edilir. $\beta = 1+2i \nmid 4+7i$ fakat $\beta^* = 1-2i \mid 4+7i$ dir.

Buna göre $1-$baskın küme için üreteç olarak β^* elemanı seçilir.

$$\begin{aligned}S &= \langle \beta^* \rangle = \{x+yi : k(1-2i) \equiv x+yi \ (\text{mod } 4+7i), k \in \mathbb{Z}\}\\ &= \{0,1-2i,-5,5i,1+3i,2+i,3-i,-3+i,-2-i,-1-3i,-5i,5,-1+2i\}\end{aligned}$$

dir.

$S = \{0,1-2i,-5,5i,1+3i,2+i,3-i,-3+i,-2-i,-1-3i,-5i,5,-1+2i\}$ kümesinin elemanlarına ağırlığı 0 ve 1 olan elemanlar eklenerek $\alpha = 4+7i$ ye göre mod işlemi yapıldığında oluşan 1 yarıçaplı yuvarlar aşağıda verilmiştir.

$0 \in S$ için $B_1(0) = \{\lambda \in \mathbb{Z}[i]_{4+7i} : D_{4+7i}(\lambda, 0) \le 1\} = \{0,1,-1,i,-i\}$

dir.

$1-2i \in S$ için

$B_1(1-2i)=\{\lambda \in \mathbb{Z}[i]_{4+7i} : D_{4+7i}(\lambda,1-2i)\leq 1\}=\{1-2i,2-2i,-2i,1-i,1-3i\}$,

$-5 \in S$ için

$B_1(-5)=\{\lambda \in \mathbb{Z}[i]_{4+7i} : D_{4+7i}(\lambda,2-4i)\leq 1\}=\{-5,-4,1-4i,2-3i,-5-i\}$

dir.

Benzer şekilde;

$5i \in S$ için $B_1(5i)=\{5i,-3-2i,-1+5i,-4-i,4i\}$,

$1+3i \in S$ için $B_1(1+3i)=\{1+3i,2+3i,3i,1+4i,1+2i\}$,

$2+i \in S$ için $B_1(2+i)=\{2+i,3+i,1+i,2+2i,2\}$,

$3-i \in S$ için $B_1(3-i)=\{3-i,4-i,2-i,3,3-2i\}$,

$-3+i \in S$ için $B_1(-3+i)=\{-3+i,-2+i,-4+i,-3+2i,-3\}$,

$-2-i \in S$ için $B_1(-2-i)=\{-2-i,-1-i,-3-i,-2,-2-2i\}$,

$-1-3i \in S$ için $B_1(-1-3i)=\{-1-3i,-1-2i,-1-4i,-3i,-2-3i\}$,

$-5i \in S$ için $B_1(-5i)=\{-5i,1-5i,3+2i,-4i,4+i\}$,

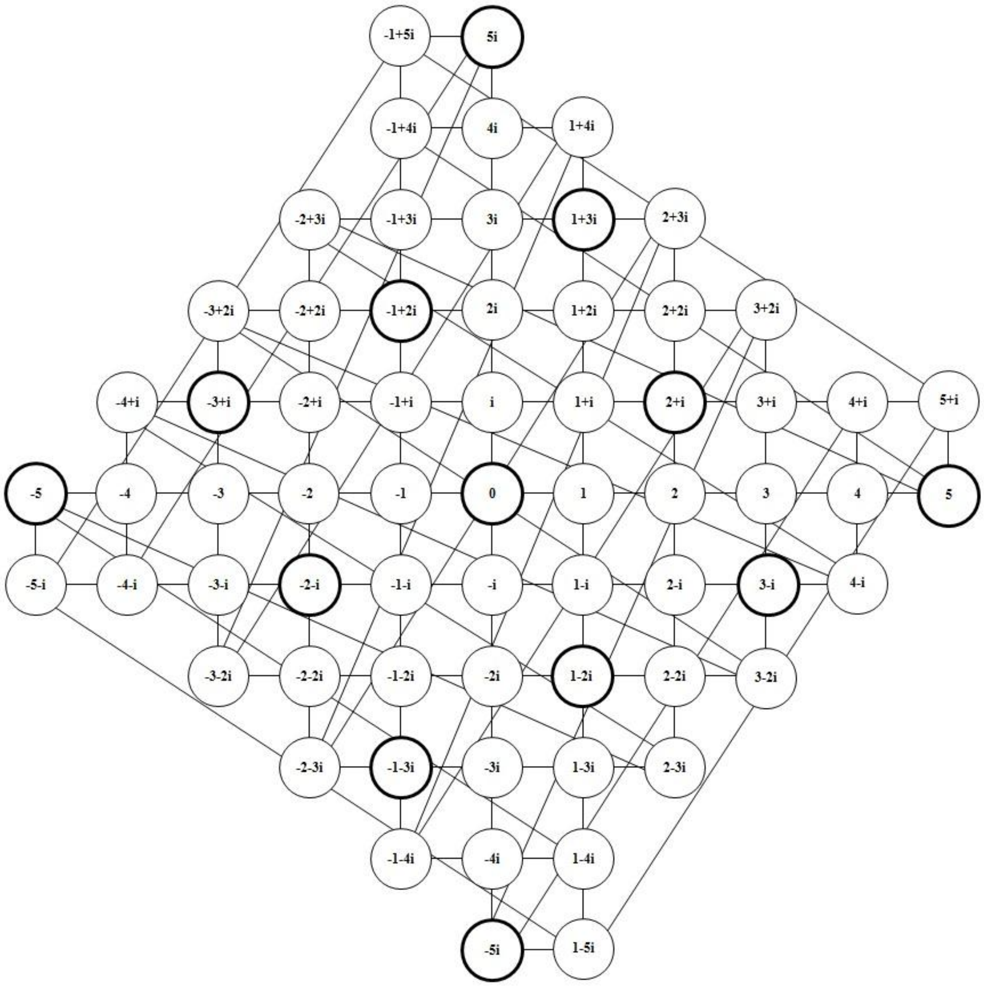
$5 \in S$ için $B_1(5)=\{5,-1+4i,4,5+i,-2+3i\}$,

$-1+2i \in S$ için $B_1(-1+2i)=\{-1+2i,2i,-2+2i,-1+3i,-1+i\}$

dir.

Böylece birleşimleri $\mathbb{Z}[i]_{4+7i}$ kümesini veren 1 yarıçaplı ve 5 elemanlı olan $B_1(0), B_1(1-2i), B_1(-5), B_1(5i), B_1(1+3i), B_1(2+i), B_1(3-i), B_1(-3+i), B_1(-2-i)$, $B_1(-1-3i), B_1(-5i), B_1(5)$ ve $B_1(-1+2i)$ ayrık yuvarları bulunmuş olur.

Ayrıca $S=\langle \beta^* \rangle$ kümesinin mükemmel $1-$baskın küme olduğu açıkça görülmektedir. Aşağıdaki şekil G_{4+7i} çizgesini ve üzerindeki $1-$baskın kümeyi vermektedir. Koyu renkli noktalar $t=1$ için $\langle \beta^* \rangle = \langle 1-2i \rangle$ kümesinin elemanlarıdır.



Şekil 2.5. G_{4+7i} çizgesinde $1-$baskın küme

Örnek 2.3.5. $\alpha = 4+7i$ olmak üzere G_{4+7i} de mükemmel $2-$baskın küme aşağıdaki gibi bulunur.

$t=2$ olduğundan Teorem 2.3.1.' e göre $2 \mp 3i$ elemanları kontrol edilir.

$\beta = (2+3i) \nmid (4+7i)$ fakat $\beta^* = (2-3i) \mid (4+7i)$ olduğundan β^* üreteçtir.

$$S = \langle \beta^* \rangle = \{ x+yi : k(2-3i) \equiv x+yi \ (\text{mod } 4+7i),\ k \in \mathbb{Z} \}$$
$$= \{ 0, 2-3i, -3-2i, 3+2i, -2+3i \}$$

dir.

Gerçekten $|S| = |\langle \bar{\beta} \rangle| = \dfrac{N(4+7i)}{N(2-3i)} = \dfrac{65}{13} = 5$ olur.

$S = \{0, 2-3i, -3-2i, 3+2i, -2+3i\}$ kümesinin elemanlarına ağırlığı 0, 1 ve 2 olan elemanlar eklenerek $\alpha = 4+7i$ ye göre mod işlemi yapıldığında oluşan 2 yarıçaplı yuvarlar aşağıda verilmiştir.

$0 \in S$ için

$$B_2(0) = \{\eta \in \mathbb{Z}[i]_{4+7i} : D_{4+7i}(\eta, 0) \leq 2\}$$
$$= \{0, 1, -1, 2, -2, i, -i, 2i, -2i, 1+i, 1-i, -1+i, -1-i\}$$

dir.

$2-3i \in S$ için

$$B_2(2-3i) = \{\eta \in \mathbb{Z}[i]_{4+7i} : D_{4+7i}(\eta, 2-3i) \leq 2\}$$
$$= \{2-3i, -4+i, 1-3i, 2-2i, -5, -3+i, -3i, 2-i, -5-i, 3-2i, 1-4i, -4, 1-2i\}$$

dir.

$-3-2i \in S$ için

$$B_2(-3-2i) = \{\eta \in \mathbb{Z}[i]_{4+7i} : D_{4+7i}(\eta, -3-2i) \leq 2\}$$
$$= \{-3-2i, -2-2i, 5i, -3-i, 1-4i, -1-2i, -1+5i, -3, 1+3i, -2-i, 4i, -2-3i, -4-i\}$$

dir.

$-2+3i \in S$ için

$$B_2(-2+3i) = \{\eta \in \mathbb{Z}[i]_{4+7i} : D_{4+7i}(\eta, -2+3i) \leq 2\}$$
$$= \{-2+3i, 4-i, -1+3i, -2+2i, 5, 3-i, 3i, -2+i, 5+i, -3+2i, -1+4i, 4, -1+2i\}$$

dir.

$3+2i \in S$ için

$$B_2(3+2i)=\{\eta \in \mathbb{Z}[i]_{4+7i} : D_{4+7i}(\eta, 3+2i) \le 2\}$$
$$=\{3+2i, 2+2i, -5i, 3+i, -1+4i, 1+2i, 1-5i, 3, -1-3i, 2+i, -4i, 2+3i, 4+i\}$$

dir.

Burada $B_2(0), B_2(2-3i), B_2(-3-2i), B_2(3+2i)$ ve $B_2(-2+3i)$ ayrık kümelerinin birleşimleri $\mathbb{Z}[i]_{4+7i}$ kümesine eşittir ve $\langle \beta^* \rangle = \{0,\ 2-3i,\ -3-2i,\ 3+2i,\ -2+3i\}$ kümesi $2-$baskın kümedir.

Örnek 2.3.4.' de $t=1$ için bulunan S kümesi bir kod kümesi olsun ve S nin herhangi bir η elemanı iletişime sokulsun. İletişim esnasında η hatasız iletildiğinde yada η da 1 bozulma meydana geldiğinde bu η elemanı $B_1(\eta)=\{\beta \in \mathbb{Z}[i]_{4+7i} : D_{4+7i}(\beta, \eta) \le 1\}$ kümesinin elemanlarından biri olarak iletilir. Dolayısıyla tekrar η olarak dekodlanır. Yani $1-$baskın küme, 1 hata düzelten mükemmel kod gibi düşünülebilir.

BÖLÜM 3. HURWITZ SAYILARINDA $t-$MÜKEMMEL KÜMELER VE MÜKEMMEL KODLAR

Son yıllarda birçok araştırmacı Gauss, Lipschitz ve Hurwitz sayıları üzerinde yeni kodlar inşa etmişlerdir. Bu kümeler üzerinde kod inşaa etmeye çalışılmasının temel nedeni, bu kodların dördül genlik modülüne (Quadrature Amplitude Modulatin, kısaca QAM) göre Hamming metriğine ve Lee metriğine göre yazılmış kodlardan daha iyi performans sağlamasıdır. 1996 yılında Huber Gauss tamsayılar kümesi üzerinde Mannheim metriğini tanımlayarak bu küme üzerinde bir hata düzeltebilen mükemmel kodlar elde etti [8]. Bu çalışmadan esinlenerek, Huberin bu çalışması Lipschitz sayıları üzerine aktarıldı [5, 9]. Lipschitz sayılarına aktarılan bu kodların QAM için ortalama enerji, bant genişliği ve kod hızı açısından Huber' in kodlarından daha iyi olduğu gösterildi. Daha sonra Lipshitz sayıları üzerinde mükemmel kod bulmak için [10]’ da Cayley Çizge kullanıldı ve $t=1$ için mükemmel kodlar tanımlandı.

2013 yılında [11]’ de, Hurwitz sayıları üzerinde ilk lineer kodlar tanımlandı ve bu kodların ortalama enerji, bant genişliği ve kod hızı açısından literatürdeki kodlardan daha iyi olduğu gösterildi. Daha sonra Lipschitz ve Hurwitz üzerinde bir çok mükemmel kod bulma yöntemi [10, 12, 13, 14]’ de verilmiştir.

Bu çalışmada [5]’ de verilmiş olan çizge kuramı kullanılarak Hurwitz sayıları üzerinde $t-$hata düzeltebilen mükemmel kodlar elde edilmiştir. [12, 14]’ de Hurwitz sayıları üzerinde bir hata düzeltebilen mükemmel kodlar karakterize edilmiştir.

Ayrıca [11, 12, 14]’ de, α asal Hurwitz sayısı olarak alınmasına karşın bu çalışmada α asal değildir. Üstelik bu çalışmada sadece bir hata düzeltebilen mükemmel kodlar değil, aynı zamanda $t-$hata düzeltebilen mükemmel kodlar karakterize edilmiştir.

3.1. $\mathcal{H}_\alpha$ Kümesi ve Özellikleri

Tanım 3.1.1. $\mathbb{H}=\{a_0+a_1i+a_2j+a_3k : a_0,a_1,a_2,a_3\in\mathbb{R}\}$ ile gösterilen Hamilton Kuaterniyonlar kümesi; $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi üzerinde bir serbest modüldür. Bu modülün bazları $1,i,j,k$ dır ve bu bazlar aşağıdaki gibi tanımlanır.

1, $\mathbb{R}$ nin birim elemanı olmak üzere;

1) $i^2=j^2=k^2=-1$,

2) $ij=-ji=k;\ jk=-kj=i;\ ki=-ik=j$

dir.

Ayrıca $q=a_0+a_1i+a_2j+a_3k\in H$ Kuaterniyonunun eşleniği q^* ile gösterilir ve

$$q^*=a_0-a_1i-a_2j-a_3k$$

olarak tanımlanır.

$\mathbb{H}$ üzerinde $q=a_0+a_1i+a_2j+a_3k\in H$ sayısının normu

$$N(q)=qq^*=a_0^2+a_1^2+a_2^2+a_3^2$$

dir.

Bu norm çarpımsal normdur. Yani

$$N(q_1q_2)=N(q_1)N(q_2)$$

dir [10].

Tanım 3.1.2. Lipschitz tamsayıları

$$\mathbb{H}[\mathbb{Z}]=\{a_0+a_1i+a_2j+a_3k : a_0,a_1,a_2,a_3\in\mathbb{Z}\}$$

olarak tanımlanır [10].

Tanım 3.1.3. Hurwitz sayıları $\mathcal{H}$ ile gösterilir ve

$$\mathcal{H} = \mathbb{H}[\mathbb{Z}] \cup \mathbb{H}\left[\mathbb{Z} + \frac{1}{2}\right]$$
$$= \left\{ \frac{a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k}{2} : a_0 \equiv a_1 \equiv a_2 \equiv a_3 \,(\mathrm{mod}\, 2), a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{Z} \right\}$$

şeklinde tanımlanır [15].

Hamilton Quaternionları üzerinde yukarıda tanımlanan $N(q)$ norm fonksiyonu ve özellikleri Hurwitz sayıları için de geçerlidir.

Tanım 3.1.4. Eğer bir Hurwitz sayısının normu tek tamsayı ise bu sayıya tek Hurwitz sayısı, eğer normu çift tamsayı ise çift Hurwitz sayısı denir.

Bu bölümde yalnızca tek Hurwitz sayıları kullanılacaktır.

Örnek 3.1.1.

$2 + i = 2 + i + 0j + 0k \in \mathcal{H}$ dır.

$\frac{3}{2} + \frac{k}{2} = \frac{3}{2} + 0.\frac{i}{2} + 0.\frac{j}{2} + \frac{k}{2} \notin \mathcal{H}$ dır.

$\frac{11}{2} + i + \frac{3j}{2} + \frac{k}{2} \notin \mathcal{H}$ dır.

$\frac{1}{2} - \frac{3i}{2} + \frac{7j}{2} - \frac{k}{2} \in \mathcal{H}$ dır.

Tanım 3.1.5. $q_1, q_2 \in \mathcal{H}$ olsun. $q_1 - q_2 = \alpha\delta$ olacak şekilde $\exists\, \delta \in \mathcal{H}$ var ise α modülüne göre q_1, q_2 ye soldan denktir denir ve $q_1 \equiv_\ell q_2 \,(\mathrm{mod}\ \alpha)$ şeklinde gösterilir.

Not 3.1.1. Bu çalışmada sol denklik kullanılacaktır. Benzer sonuçlar sağ denklik kullanılarak da elde edilebilir.

Tanım 3.1.6. $0 \neq \alpha \in \mathcal{H}$ bir tek Hurwitz sayısı olsun. α nın ürettiği sağ ideal $\langle \alpha \rangle = \{\alpha.\lambda : \lambda \in \mathcal{H}\}$ olarak tanımlanır. Bu ideale göre kalan sınıflarının oluşturduğu küme $\mathcal{H}_\alpha$ ile gösterilir.

Teorem 3.1.1. $\mathcal{H}_\alpha$ bir değişmeli gruptur ve $\mathcal{H}_\alpha$, $\mathcal{H}$ üzerinde bir sağ modüldür [12].

Teorem 3.1.2. $0 \neq \alpha \in \mathcal{H}$ ise $\mathcal{H}_\alpha$, $N(\alpha)^2$ elemana sahiptir [12].

Örnek 3.1.2. $\alpha = 1+2j$ için $N(\alpha)^2 = \left(1^2+2^2\right)^2 = 5^2 = 25$ dir. Bu yüzden $\mathcal{H}_\alpha$ 25 elemanlıdır ve

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{1+2j} = \{&0,1,-1,i,-i,j,-j,k,-k,\frac{1}{2}+\frac{i}{2}+\frac{j}{2}+\frac{k}{2},-\frac{1}{2}+\frac{i}{2}+\frac{j}{2}+\frac{k}{2},\frac{1}{2}-\frac{i}{2}+\frac{j}{2}+\frac{k}{2},\\ &\frac{1}{2}+\frac{i}{2}-\frac{j}{2}+\frac{k}{2},\frac{1}{2}+\frac{i}{2}+\frac{j}{2}-\frac{k}{2},-\frac{1}{2}-\frac{i}{2}+\frac{j}{2}+\frac{k}{2},-\frac{1}{2}+\frac{i}{2}-\frac{j}{2}+\frac{k}{2},-\frac{1}{2}+\frac{i}{2}+\frac{j}{2}-\frac{k}{2},\\ &\frac{1}{2}-\frac{i}{2}-\frac{j}{2}+\frac{k}{2},\frac{1}{2}-\frac{i}{2}+\frac{j}{2}-\frac{k}{2},\frac{1}{2}+\frac{i}{2}-\frac{j}{2}-\frac{k}{2},-\frac{1}{2}-\frac{i}{2}-\frac{j}{2}+\frac{k}{2},-\frac{1}{2}-\frac{i}{2}+\frac{j}{2}-\frac{k}{2},\\ &-\frac{1}{2}+\frac{i}{2}-\frac{j}{2}-\frac{k}{2},\frac{1}{2}-\frac{i}{2}-\frac{j}{2}-\frac{k}{2},-\frac{1}{2}-\frac{i}{2}-\frac{j}{2}-\frac{k}{2}\}\end{aligned}$$

olur.

Not 3.1.2. $a \in \mathcal{H}_\alpha$ olsun. a nın sınıfındaki bazı elemanların normu ile a nın normu eşit çıkabilir. Bu sebeple a nın sınıfındaki normu en küçük olan elemanlardan herhangi biri tam temsilci olarak seçilebilir. Örneğin $\alpha = 1+3i+2j+k$ alınırsa $a = \frac{3}{2}+\frac{1}{2}i+\frac{3}{2}j+\frac{1}{2}k$ elemanının sınıfında $-2+k$ elemanı da bulunmaktadır. Yani $\overline{\frac{3}{2}+\frac{1}{2}i+\frac{3}{2}j+\frac{1}{2}k} = \overline{-2+k}$ dır. Bu sınıfta normu 5 olan yalnız bu iki eleman vardır. Bu sınıftaki diğer elemanların normu 5 ten büyüktür. Dolayısı ile tam temsilci olarak $\frac{3}{2}+\frac{1}{2}i+\frac{3}{2}j+\frac{1}{2}k$ veya $-2+k$ elemanlarından herhangi biri seçilebilir. Denk olan bu elemanlar matematiksel olarak $\phi \in \mathcal{H}$ olmak üzere $a+\alpha.\phi \equiv -2+k \pmod{\alpha}$

şeklinde kontrol edilebilir. Bu kontrol Mathematica programı kullanılarak aşağıdaki gibi yapılır.

```
<< Quaternions`
Mod[Quaternion[3/2, 1/2, 3/2, 1/2], Quaternion[1, 3, 2, 1]]
Mod[Quaternion[3/2, 1/2, 3/2, 1/2] + Quaternion[1, 3, 2, 1] ** Quaternion[1/2, 1/2, 1/2, 1/2], Quaternion[1, 3, 2, 1]]
Mod[Quaternion[3/2, 1/2, 3/2, 1/2] + Quaternion[1, 3, 2, 1] ** Quaternion[-1/2, 1/2, 1/2, 1/2], Quaternion[1, 3, 2, 1]
Mod[Quaternion[3/2, 1/2, 3/2, 1/2] + Quaternion[1, 3, 2, 1] ** Quaternion[1, 0, 0, 0], Quaternion[1, 3, 2, 1]]
Mod[Quaternion[3/2, 1/2, 3/2, 1/2] + Quaternion[1, 3, 2, 1] ** Quaternion[-1, 1, 0, 0], Quaternion[1, 3, 2, 1]]

Quaternion[3/2, 1/2, 3/2, 1/2]
Quaternion[-2, 0, 0, 1]
Quaternion[-2, 0, 0, 1]
Quaternion[3/2, 1/2, 3/2, 1/2]
Quaternion[3/2, 1/2, 3/2, 1/2]
```

Teorem 3.1.3. $0 \neq \alpha \in \mathcal{H}$, $\beta \in \mathcal{H}_\alpha$ ve β, α nın sol böleni olsun.

Buna göre $\langle \beta \rangle$ ile gösterilen β elemanının ürettiği alt grubun eleman sayısı

$$|\langle \beta \rangle| = \frac{N(\alpha)^2}{N(\beta)^2}$$

dir.

İspat: $\mathcal{H}_\alpha$ nın eleman sayısı $N(\alpha)^2$ ve $\mathcal{H}_\beta$ nın eleman sayısı $N(\beta)^2$ dir. $\beta | \alpha$ seçildiğinden Lagrange teoremine göre β nın $\mathcal{H}_\alpha$ içinde ürettiği alt grubun eleman sayısı

$$|\langle \beta \rangle| = \frac{|\mathcal{H}_\alpha|}{|\mathcal{H}_\beta|} = \frac{N(\alpha)^2}{N(\beta)^2}$$

dir.

Örnek 3.1.3. $\alpha = (2+i)(1+i+j) = 1+3i+2j+k$ olsun. $\beta = 2+i$, α nın sol böleni olup $\langle \beta \rangle = \{0, 2+i, -2-i, -1+2i, 1-2i, 2j+k, -2j-k, -j+2k, j-2k\}$

dır.

$$|\langle\beta\rangle| = 9 = \frac{N(\alpha)^2}{N(\alpha)^2} = \frac{\left(1^2+3^2+2^2+1^2\right)^2}{\left(2^2+1^2\right)^2} = \frac{15^2}{5^2} = 3^2$$

dir.

Tanım 3.1.7. $\beta,\gamma \in \mathcal{H}_\alpha$ olsun. μ elemanı $\beta-\gamma$ nın denklik sınıfındaki normu en küçük eleman olsun. β ile γ arasındaki mesafe $d_\alpha(\beta,\gamma) = N(\mu)$ olarak tanımlanır.

Örnek 3.1.4. $\alpha = 1+3i+2j-k$, $\beta = 2+i+j$ ve $\gamma = \frac{1}{2}+\frac{i}{2}+\frac{j}{2}-\frac{k}{2}$ için

$\beta-\gamma = \mu = \frac{3}{2}+\frac{i}{2}+\frac{j}{2}+\frac{k}{2} = \frac{3}{2}+\frac{i}{2}+\frac{j}{2}+\frac{k}{2} \ (\text{mod } \alpha)$ olduğundan

$d_\alpha(\beta,\gamma) = \left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 3$ dür.

Örnek 3.1.5. $\alpha = 1+3i+2j-k$, $\beta = 1+i+j$, $\gamma = 2+j$ için

$\beta-\gamma = -1+i \equiv -1+i \ (\text{mod } \alpha)$ olup $d_\alpha(1+i+j, 2+j) = (-1)^2+(1)^2 = 2$ dir.

Örnek 3.1.6. $\alpha = 1+3i+2j-k$, $\beta = 2-i$, $\gamma = -2i-k$ için

$\beta-\gamma = 2+i+k \equiv -2+i \ (\text{mod } \alpha)$ olduğundan $d_\alpha(2-i, -2i-k) = (-2)^2+(1)^2 = 5$ olarak bulunur.

Örnek 3.1.7. $\sigma,\tau \in \mathcal{H}_{1+2i}$, $\sigma = -\frac{1}{2}+\frac{i}{2}-\frac{j}{2}+\frac{k}{2}$, $\tau = -i$ için

$\sigma-\tau = -\frac{1}{2}+\frac{3i}{2}-\frac{j}{2}+\frac{k}{2} \equiv -\frac{1}{2}-\frac{i}{2}-\frac{j}{2}-\frac{k}{2} \ (\text{mod } (1+2j))$ dir. Buna göre

$d_{1+2j}(\sigma,\tau) = \left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{4}{4} = 1$ dir.

Tanım 3.1.8. $\beta \in \mathcal{H}_\alpha$ nın ağırlığı $w_\alpha(\beta)$ ile gösterilir ve $w_\alpha(\beta) = d_\alpha(\beta,0)$ olarak tanımlanır.

Bu tanıma göre $a \equiv b \equiv c \equiv d \pmod 2$ olmak üzere $\lambda = \frac{a}{2} + \frac{b}{2}i + \frac{c}{2}j + \frac{d}{2}k \in \mathcal{H}_\alpha$ elemanının ağırlığının 1 ve 2 olması durumunda λ değerleri aşağıdaki gibi bulunur.

$w_\alpha(\lambda) = d_\alpha(\lambda, 0) = 1$ ise $N(\lambda) = \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} + \frac{c^2}{4} + \frac{d^2}{4} = 1$ dir. Buna göre $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 4$ olup iki farklı durum söz konusudur. Ya a, b, c ve d sayılarından herhangi biri ∓ 2 ve diğerleri 0 ya da a, b, c ve d sayılarının herbiri ∓ 1 olur.

Bu durumda ağırlığı 1 olan 24 elemanın 8 tanesi $\mp 1, \mp i, \mp j, \mp k$ ve 16 tanesi $\mp \frac{1}{2} \mp \frac{i}{2} \mp \frac{j}{2} \mp \frac{k}{2}$ dir.

$w_\alpha(\lambda) = d_\alpha(\lambda, 0) = 2$ ise $N(\lambda) = \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} + \frac{c^2}{4} + \frac{d^2}{4} = 2$ dir. Buradan $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 8$ olur. Buna göre a, b, c ve d sayılarından herhangi ikisi ∓ 2 ve diğerleri 0 olmalıdır.

Örneğin $a = b = \mp 2$ için λ, $1+i, 1-i, -1+i,$ veya $-1-i$ den biri olur. Buna göre ağırlığı 2 olan 24 eleman $\mp 1 \mp i,\ \mp 1 \mp j,\ \mp 1 \mp k,\ \mp i \mp j,\ \mp i \mp k,\ \mp j \mp k$ dır.

Not 3.1.3. d_α bazı durumlarda üçgen eşitsizliğini sağlamaz. Fakat bu durumda α ya göre sol denklik sınıfından yararlanılabilir.

Örneğin $\alpha = 7 + 12i$, $\beta = 2 - 6i$, $\gamma = 3 + 2i$ ve $\lambda = 2 - 5i$ için $d_\alpha(\beta, \gamma) \le d_\alpha(\beta, \lambda) + d_\alpha(\lambda, \gamma)$ eşitsizliğinde $\beta - \lambda = -i$, $\lambda - \gamma = -1 - 7i$ ve $\beta - \gamma = -1 - 8i \equiv_\ell 6 + 4i \pmod{\alpha}$ dır. $6^2 + 4^2 \le (-1)^2 + \left((-1)^2 + (-7)^2\right)$ olduğundan $52 \le 51$ çelişkisi oluşur. Ancak sağ denklik sınıfındaki $6 + 4i$ sayısına sol denklik sınıfında $-\frac{7}{2}+\frac{3i}{2}-\frac{5j}{2}+\frac{9k}{2}$ sayısı karşılık gelir ve bu sayının normu da $\frac{49+9+25+81}{4}=\frac{164}{4}=41$ olup $41<51$ elde edilir.

Bu durum her $\alpha \in \mathcal{H}$ için meydana gelmemektedir. Bu problemden kaçınmak için uygun elemanlar seçilmelidir.

3.2. Hurwitz Sayıları Üzerinde Mükemmel Kümeler ve Mükemmel Kodlar

Tanım 3.2.1. $0 \neq \alpha \in \mathcal{H}$ tek Hurwitz sayısı olsun.

1) $V=\mathcal{H}_\alpha$ köşelerin kümesi ve

2) $E=\{(\lambda,\gamma)\in V\times V : d_\alpha(\lambda,\gamma)=1\}$ kümesi kenarların kümesi olarak alınırsa $G_\alpha(V,E)$ bir çizge tanımlar.

$\gamma \in \mathcal{H}_\alpha$ olmak üzere γ ya 1 birim uzaklıkta olan elemanlar, ağırlığı 1 olan 24 elemanın teker teker γ ya eklenmesi ile bulunur.

Bu tezde Tanım 2.1.10.' da verilen düzenli çizge $C_{N(\alpha)^2}(j_1, j_2, \dots, j_{12})$ dir. Bu durumda $N(\alpha)=a_0^2+a_1^2+a_2^2+a_3^2=2m+1,\ m\in\mathbb{Z}$ olarak alınacaktır.

Teorem 3.2.1. $e_1\in\{i,j,k\}$ ve $\alpha=a_0+a_1i+a_2j+a_3k=(a_0+a_1i)+(a_2+a_3i)e_1\in\mathcal{H}$ olmak üzere α bir tek Hurwitz sayısı olsun. Bu durumda $C_{N(\alpha)^2}(j_1, j_2, \dots, j_{12})$ ile G_α izomorf çizgelerdir ve çizge izomorfizması; $x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{Z}_{N(\alpha)}$ ve $q_1=a_0x_1+a_1y_1 \pmod{N(\alpha)}$, $q_2=a_2x_2+a_3y_2 \pmod{N(\alpha)}$ olmak üzere

$$\begin{aligned}\psi : \mathbb{Z}_{N(\alpha)}\times\mathbb{Z}_{N(\alpha)} &\to \mathcal{H}_\alpha\\ (q_1,q_2) &\mapsto (x_1+y_1i)+(x_2+y_2i)e_1 \pmod{\alpha}\end{aligned}$$

olarak tanımlanır.

İspat: G_α çizgesinin köşeleri $\mathcal{H}_\alpha$ kümesinden ve $C_{N(\alpha)^2}\left(j_1, j_2, \ldots, j_{12}\right)$ köşeleri ise $\mathbb{Z}_{N(\alpha)} \times \mathbb{Z}_{N(\alpha)}$ kümesinden seçileceğinden ispat için $\mathcal{H}_\alpha$'nın $\mathbb{Z}_{N(\alpha)} \times \mathbb{Z}_{N(\alpha)}$'ya izomorf olduğunu göstermek yeterlidir. $\mathcal{H}_\alpha$ ve $\mathbb{Z}_{N(\alpha)} \times \mathbb{Z}_{N(\alpha)}$ toplamsal değişmeli grup olup bu grupların bazları sırası ile $e_1, e_2 \in \{1, i, j, k\}$ ve $(1,0),(0,1)$ olarak seçilebilir.

$$
\begin{aligned}
\psi : \mathbb{Z}_{N(\alpha)} \times \mathbb{Z}_{N(\alpha)} &\to \mathcal{H}_\alpha \\
(1,0) &\mapsto e_1 \\
(0,1) &\mapsto e_2
\end{aligned}
$$

fonksiyonunu göz önüne alalım. Bu fonksiyonun birebir ve örten bir grup izomorfizması olduğu açıktır. Şöyle ki; $(a_1, b_1),(a_2, b_2) \in \mathbb{Z}_{N(\alpha)} \times \mathbb{Z}_{N(\alpha)}$ olmak üzere;

$$
\begin{aligned}
\psi\left((a_1, b_1) + (a_2, b_2)\right) &= \psi\left((a_1 + a_2, b_1 + b_2)\right) \\
&= (a_1 + a_2)e_1 + (b_1 + b_2)e_2 \\
&= \psi\left((a_1, b_1)\right) + \psi\left((a_2, b_2)\right)
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
&\psi\left((a_1, b_1)\right) = \psi\left((a_2, b_2)\right) \\
&\Rightarrow a_1 e_1 + b_1 e_2 = a_2 e_1 + b_2 e_2 \\
&\Rightarrow (a_1, b_1) \equiv (a_2, b_2) \left(\bmod\ N(\alpha)\right)
\end{aligned}
$$

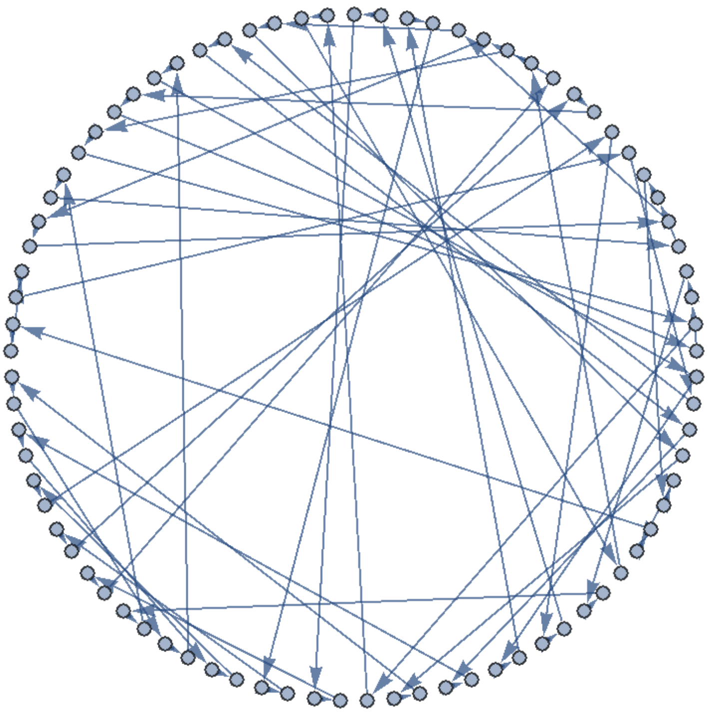
dir.

O halde $\mathcal{H}_\alpha$ ve $\mathbb{Z}_{N(\alpha)} \times \mathbb{Z}_{N(\alpha)}$ izomorf gruplardır.

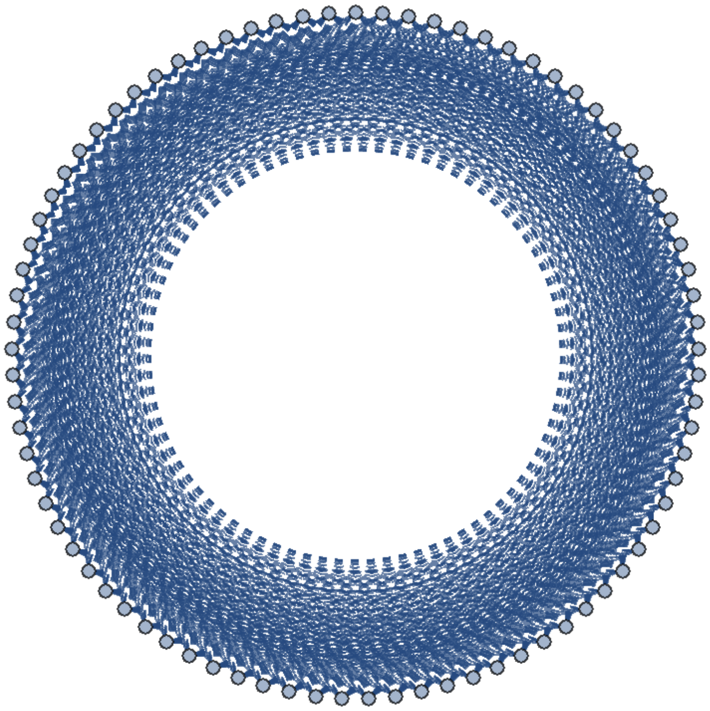
Bu fonksiyonun iyi tanımlı olduğu [15]' de gösterilmiştir.

Örnek 3.2.1. Aşağıda Wolfram Mathematica programı kullanılarak sırası ile $G_{-1+2i+2j}$ ve $C_{81}(13,14,\ldots,24)$ çizgeleri oluşturulmuştur.

```
<< Quaternions`
α = Quaternion [-1, 2, 2, 0]; k = Norm [α]; A = Table [1, {k}]; Do [ A [[n]] = n, {n, 1, k}]
B = Quaternion [0, 0, 1, 0] * A; GG = Table [1, {k ^ 2}];
Do [Do [GG [[n + k * (m - 1)]] = A [[n]] + B [[m]], {n, 1, k}], {m, 1, k}];
Hα = Table [1, {k ^ 2}]; (*Hα denotes the Hα*)
Do [Hα [[tt]] = Mod [GG [[tt]], α], {tt, 1, k ^ 2}];
MatrixForm [Hα];
BB = Table [1, {k ^ 2}, {4}];
Do [BB [[t, 1]] = Hα [[t, 1]]; BB [[t, 2]] = Hα [[t, 2]]; BB [[t, 3]] = Hα [[t, 3]]; BB [[t, 4]] = Hα [[t, 4]];
  , {t, 1, k ^ 2}];
KK = Table [1, {k ^ 2 - 1}];
Do [KK [[t]] = BB [[t]] → BB [[t + 1]], {t, 1, k ^ 2 - 1}];
KKK = Union [KK, {{0, 0, 0, 0} → {1, 0, 1, 0}}];
G = Graph [KKK, VertexLabelStyle → Directive [Red, Italic, 11], VertexSize → 0.5]
(*The graph G shows G-1+2i+2j.*)
G = CirculantGraph [81, {13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24}, VertexSize → 0.5, EdgeStyle → Dashed ]
EdgeCount [G]
GraphDiameter [G]
```



Şekil 3.1. $G_{-1+2i+2j}$ çizgesi



Şekil 3.2. $C_{81}(13,14,\ldots,24)$ çizgesi

$\varepsilon=\left\{\mp 1,\mp i,\mp j,\mp k,\mp\frac{1}{2}\mp\frac{i}{2}\mp\frac{j}{2}\mp\frac{k}{2}\right\}$ kümesi çarpma işlemine göre bir değişmeli olmayan gruptur.

Önerme 3.2.1. α bir tek Hurwitz sayısı, $\rho_1,\rho_2\in\varepsilon$ ve $\beta_1,\beta_2\in\mathcal{H}$ olsun. Eğer

$\beta_1\equiv\beta_2\ (\text{mod}\ \alpha)$

ise

$\rho_1\beta_1\rho_2\equiv\rho_1\beta_2\rho_2\ (\text{mod}\ \rho_1\alpha\rho_2)$

olur.

İspat: Eğer $\beta_1\equiv\beta_2\ (\text{mod}\ \alpha)$ ise $\beta_2=\beta_1+\alpha\delta$ olacak şekilde $\delta\in\mathcal{H}$ vardır. Bu eşitliğin her iki yanı soldan ρ_1 ve sağdan ρ_2 ile çarpılırsa

$$
\begin{aligned}
\rho_1\beta_2\rho_2 &= \rho_1(\beta+\alpha\delta)\rho_2 \\
&= \rho_1(\beta)\rho_2+\rho_1(\alpha\delta)\rho_2 \\
&= \rho_1(\beta)\rho_2+\rho_1\left(\alpha\left(\rho_2\rho_2^{-1}\right)\delta\right)\rho_2 \\
&= \rho_1(\beta)\rho_2+(\rho_1\alpha\rho_2)\left(\rho_2^{-1}\delta\rho_2\right) \\
&= \rho_1(\beta)\rho_2+(\rho_1\alpha\rho_2)\delta_1, \delta_1=\rho_2^{-1}\delta\rho_2\in\varepsilon \\
&= \rho_1(\beta)\rho_2+(\rho_1\alpha)\rho_2\delta_1 \\
&= \rho_1(\beta)\rho_2+(\rho_1\alpha)\rho_3, \rho_3=\rho_2\delta_1\in\varepsilon \\
&= \rho_1(\beta)\rho_2+(\rho_1\alpha\rho_3)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Bu da

$$\rho_1\beta_1\rho_2 \equiv \rho_1\beta_2\rho_2 \pmod{\rho_1\alpha\rho_2}$$

olduğunu gösterir.

Önerme 3.2.2. α bir tek Hurwitz sayısı olsun. Eğer $\{\varepsilon=\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_r\}$ kümesi $\mathcal{H}_\alpha$ nın bir bölüntüsü ise $\{\rho_1\varepsilon\rho_2,\rho_1\varepsilon_2\rho_2,\ldots,\rho_1\varepsilon_r\rho_2\}$ kümesi de $\mathcal{H}_{\rho_1\alpha\rho_2}$ kümesinin bir bölüntüsü olur.

İspat: $\rho_1,\rho_2\in\varepsilon$ olmak üzere, kabul edelim ki $\rho_1\varepsilon\rho_2\cap\rho_1\varepsilon_2\rho_2\neq\varnothing$ olsun. Bu durumda $a\in\rho_1\varepsilon\rho_2$ ve $a\in\rho_1\varepsilon_2\rho_2$ olacak şekilde en az bir $a\in\mathcal{H}_\alpha$ vardır. $a\in\rho_1\varepsilon\rho_2$ ve $a\in\rho_1\varepsilon_2\rho_2$ ise sırası ile $a=\rho_1 b\rho_2$ ve $a=\rho_1 c\rho_2$ olacak şekilde $b\in\varepsilon, c\in\varepsilon_2$ ve $\rho_1,\rho_2\in\varepsilon$ vardır. ε bir çarpımsal grup olduğundan

$$a=\rho_1 c\rho_2 \Rightarrow c=\rho_1^{-1}a\rho_2^{-1}\in\varepsilon$$

bulunur. Buradan $c\in\varepsilon$ ve $c\in\varepsilon_2$ olup $\varepsilon\cap\varepsilon_2\neq\varnothing$ çelişkisi olur.

Aşağıdaki önermenin ispatı Önerme 3.2.1. ve Önerme 3.2.2.' den açıktır.

Önerme 3.2.3. $\alpha_1,\alpha_2\in\mathcal{H}$ olsun. $G_{\alpha_1}\cong G_{\alpha_2}$ olması için gerek ve yeter şart $\alpha_1=\rho_1\alpha_2\rho_2$ olacak şekilde $\rho_1,\rho_2\in\varepsilon$ sayılarının var olmasıdır.

Örnek 3.2.2. $\alpha_1 = 1+3i+2j+k$ olsun. $j\alpha_1 = j(1+3i+2j+k) = -2+i+j-3k = \alpha_2$ olarak seçilirse $G_{\alpha_1} \cong G_{\alpha_2}$ olur.

Tanım 3.2.2. $\alpha \in \mathcal{H}$ olsun. $t \in \mathbb{N}$ için G_α içinde γ merkezli ve t yarıçaplı bir yuvar
$B_t(\gamma) = \{\lambda \in \mathcal{H}_\alpha : d_\alpha(\lambda, \gamma) \leq t\}$
olarak tanımlanır.

Eğer $\lambda \in B_t(\gamma)$ ise γ köşesi λ köşesine $t-$baskındır denir.

Örnek 3.2.3. $\alpha = 1+3i+2j+k$ olmak üzere $G_{1+3i+2j+k}$ içinde $\gamma = -2j-k$ merkezli ve $t=1$ yarıçaplı $B_1(-2j-k)$ yuvarı aşağıdaki şekilde bulunur.

Yukarıdaki tanıma göre $B_1(-2j-k) = \{\lambda \in \mathcal{H}_{1+3i+2j+k} : d_{1+3i+2j+k}(\lambda, -2j-k) \leq 1\}$ dir.

Burada birbiri ile karışmaması için λ değerleri indislenmiştir.

$t=0 \Rightarrow d_\alpha(\lambda, -2j-k) = 0$ olduğundan $\gamma = \lambda_1 = -2j-k$ olup $-2j-k \in B_1(-2j-k)$ dır.

$t=1 \Rightarrow d_\alpha(\lambda, -2j-k) = 1$ olduğundan $-2j-k$ elemanına ağırlığı 1 olan elemanlar eklenerek α modülosuna göre kalan işlemi yapıldığında λ değerleri aşağıdaki gibi bulunur.

$$\lambda_2 = (-2j-k)-1 = -1-2j-k \equiv \frac{1}{2} - \frac{i}{2} + \frac{j}{2} + \frac{3k}{2} \pmod{1+3i+2j+k}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} - \frac{i}{2} + \frac{j}{2} + \frac{3k}{2} \in B_1(-2j-k) \text{ olur.}$$

$$\lambda_3 = (-2j-k)+1 = 1-2j-k \equiv -\frac{1}{2}+\frac{i}{2}+\frac{3j}{2}-\frac{k}{2} \left(\text{mod } (1+3i+2j+k)\right)$$

$\Rightarrow -\frac{1}{2}+\frac{i}{2}+\frac{3j}{2}-\frac{k}{2} \in B_1(-2j-k)$ olup, benzer şekilde işlemler yapıldığında $-2j-k \in \mathcal{H}_\alpha$ nın 1 baskın olduğu küme

$$B_1(\gamma) = \{-2j-k, -\frac{1}{2}+\frac{i}{2}+\frac{3j}{2}-\frac{k}{2}, \frac{1}{2}-\frac{i}{2}+\frac{j}{2}+\frac{3k}{2}, \frac{3}{2}+\frac{i}{2}+\frac{j}{2}+\frac{3k}{2}, 1+2i, -j-k,$$
$$-\frac{3}{2}+\frac{i}{2}+\frac{j}{2}-\frac{k}{2}, -2j, \frac{3}{2}-\frac{i}{2}+\frac{j}{2}+\frac{k}{2}, \frac{1}{2}+\frac{i}{2}-\frac{3j}{2}-\frac{k}{2}, -\frac{1}{2}+\frac{i}{2}-\frac{3j}{2}-\frac{k}{2}, \frac{1}{2}-\frac{i}{2}-\frac{3j}{2}-\frac{k}{2},$$
$$-1+i+j, \frac{1}{2}+\frac{i}{2}-\frac{3j}{2}-\frac{3k}{2}, -\frac{1}{2}-\frac{i}{2}-\frac{3j}{2}-\frac{k}{2}, \frac{1}{2}-\frac{3i}{2}+\frac{j}{2}-\frac{3k}{2}, 1+j+k, -1+j,$$
$$\frac{1}{2}-\frac{i}{2}-\frac{3j}{2}-\frac{3k}{2}, -1+i+j-k, -2+j, 1-i+j+k, 1+k, -1+j-k, 1-i+k\}$$

olarak bulunur.

Burada $-2j-k$ köşesi $B_1(-2j-k)$ kümesindeki elemanlara $1-$baskındır.

Tanım 3.2.3. $S \subset G_\alpha$ ve $t \in \mathbb{Z}^+$ olsun. Eğer G_α nın her köşesi S deki yalnız bir köşe ile $t-$baskılanırsa S ye bir mükemmel $t-$baskın küme denir.

Tanım 3.2.4. Bir ağırlıklı hataları düzeltebilen n uzunluklu bir mükemmel grup kod olan C, $\mathcal{H}_\alpha$ grubunun n defa direkt çarpımı olan $\mathcal{H}_\alpha{}^n$ kümesinin bir alt grubudur. Burada $\mathcal{H}_\alpha{}^n \setminus C$ kümesindeki her elemanın C kümesinde bir ve yalnız bir elemana olan uzaklığı 1 dir [13].

Lemma 3.2.1. $\sigma \neq \tau$ ve $\sigma, \tau \in \langle \beta \rangle$ ise $d_\alpha(\sigma, \tau) = d_\alpha(\beta\gamma, 0)$ olacak şekilde sıfırdan farklı bir $\gamma \in \mathcal{H}_\alpha$ vardır.

İspat: $\sigma,\tau \in \langle\beta\rangle$ ise $\sigma=\beta\delta_1$ ve $\tau=\beta\delta_2$ olacak şekilde $\delta_1,\delta_2 \in \mathcal{H}_\alpha$ vardır. Burada $\sigma \neq \tau$ olduğundan $\delta_1-\delta_2 \neq 0 \ (\text{mod } \alpha)$ dır. Bu durumda $\gamma=\delta_1-\delta_2 \ (\text{mod } \alpha)$ alınırsa $\gamma \in \mathcal{H}_\alpha$ olup,

$$d_\alpha(\sigma,\tau)=d_\alpha(\sigma-\tau,0)=d_\alpha(\beta\delta_1-\beta\delta_2,0)=d_\alpha(\beta(\delta_1-\delta_2),0)=d_\alpha(\beta\gamma,0)$$

eşitliği elde edilir.

Teorem 3.2.2.

1) $0 \neq \beta \in \mathcal{H}_\alpha$, $N(\beta)=5$ ve $\beta \mid \alpha$ ise $\mathcal{H}_\alpha$ üzerindeki $\langle\beta\rangle=S$ sağ modülü, G_α kümesinde mükemmel $1-$baskın kümedir.

2) $0 \neq \beta \in \mathcal{H}_\alpha$, $N(\beta)=7$ ve $\beta \mid \alpha$ ise $\mathcal{H}_\alpha$ üzerindeki $\langle\beta\rangle=S$ sağ modülü, G_α kümesinde mükemmel $2-$baskın kümedir.

İspat 1: $0 \neq \beta \in \mathcal{H}_\alpha$, $N(\beta)=5$ ve $\beta \mid \alpha$ olsun.

$S=\langle\beta\rangle$ kümesinin $1-$baskın küme olması için S nin birbirinden farklı herhangi iki elemanı σ ve τ için $d_\alpha(\sigma,\tau)\geq 3$ olmalıdır. Lemma 3.2.1.' e göre en az bir $0 \neq \gamma \in \mathcal{H}_\alpha$ için $d_\alpha(\sigma,\tau)=d_\alpha(\beta\gamma,0)$ olduğundan ispat için $d_\alpha(\beta\gamma,0)\geq 3$ olduğunu göstermek yeterlidir. Kabul edelim ki $0 \neq \gamma \in \mathcal{H}$, $\beta\gamma \not\equiv 0(\text{mod}\,\alpha)$ ve $d_\alpha(\beta\gamma,0)<3$ olsun.

Buna göre en az bir $a=a_0+a_1i+a_2j+a_3k \in \mathcal{H}_\alpha$ için $\beta\gamma \equiv_\ell a=a_0+a_1i+a_2j+a_3k(\text{mod}\,\alpha)$ ve $d_\alpha(\beta\gamma,0)=N(a)=a_0^2+a_1^2+a_2^2+a_3^2<3$ olur. $\beta\gamma \equiv_\ell a(\text{mod}\,\alpha)$ olduğundan $\beta\gamma=a+\alpha\gamma_1$ ve β, α nın sol böleni olduğundan $\alpha=\beta\gamma_2$ olacak şekilde $\exists\ \gamma_1,\gamma_2 \in \mathcal{H}$ elemanları vardır.

Buradan

$$\beta\gamma = a + \alpha\gamma_1 = a + (\beta\gamma_2)\gamma_1 = a + \beta(\gamma_2\gamma_1)$$
$$\Rightarrow a = \beta\gamma - \beta(\gamma_2\gamma_1) = \beta(\gamma - \gamma_2\gamma_1)$$
$$\Rightarrow a = \beta(\gamma - \gamma_2\gamma_1)$$

olur. N nin çarpımsal bir norm olduğu göz önüne alınarak son eşitlikte her iki tarafın normu alınır ise

$$N(\beta(\gamma - \gamma_2\gamma_1)) = N(\beta)N(\gamma - \gamma_2\gamma_1) = N(a)$$
$$\Rightarrow N(\gamma - \gamma_2\gamma_1) = \frac{N(a)}{N(\beta)}$$

bulunur.

$\sigma \neq \tau$ seçildiğinden $N(a) \neq 0$ dır. Dolayısı ile

$N(\beta) = 5$ ve $N(a) < 3$

olduğundan

$$\frac{N(a)}{5} = N(\gamma - \gamma_2\gamma_1) \notin \mathbb{Z}$$

çelişkisi oluşur.

Buna göre $d_\alpha(\beta\gamma, 0) \geq 3$ olur.

Yani S sağ modülü, G_α kümesinde mükemmel $1-$baskın kümedir.

İspat 2: $0 \neq \beta \in \mathcal{H}_\alpha$, $N(\beta) = 7$ ve $\beta \mid \alpha$ olsun.

Bu durumda $S = \langle \beta \rangle$ kümesinin farklı iki elemanının oluşturacağı yuvarların yarıçapı 2 olacağından, her $\gamma \in \mathcal{H}$ için $d_\alpha(\beta\gamma, 0) \geq 5$ olduğunun gösterilmesi gerekir.

Yukarıdaki ispata benzer şekilde en az bir $\gamma \in \mathcal{H}$ için $\beta\gamma \not\equiv 0 \pmod{\alpha}$ ve $d_\alpha(\beta\gamma, 0) < 5$ olduğu kabul edildiğinde, $N(\beta) = 7$ ve $N(a) < 5$ olacağından

$\frac{N(a)}{7} = N(\gamma - \gamma_2\gamma_1) \notin \mathbb{Z}$ çelişkisi oluşur. Buna göre $d_\alpha(\beta\gamma, 0) \geq 5$ olur. Yani S sağ modülü, G_α kümesinde mükemmel $2-$baskın kümedir.

Not 3.2.1. Teorem 3.2.2., uygun şartlar sağlandığında farklı t değerleri için de benzer şekilde ispatlanabilir. Örneğin $t=3$ için ağırlığı 3 ve 3 den küçük olan elemanların sayısı bir asal sayının karesine eşit değildir ve Teorem 3.2.2.' nin şartlarını sağlayacak uygun β ve α değerleri bulunamaz. Fakat $t=4$ olduğunda ağırlığı 4 ve 4 den küçük olan elemanların sayısı $169=13^2$ olup Teorem 3.2.2.' nin şartlarını sağlayan uygun β ve α sayıları seçilerek mükemmel $4-$baskın kümeler oluşturulabilir.

Sonuç 3.2.1. Ağırlığı t ve t den küçük Hurwitz sayılarının sayısı $N(\beta)^2$ olacak şekilde bir β Hurwitz sayısı var olsun. Bu durumda üzerinde bir mükemmel $t-$baskın küme oluşturulabilecek $\mathcal{H}_\alpha$ kümesinin olması için gerek ve yeter şart $N(\beta)=p$ olacak şekilde bir p asal tamsayısının var olmasıdır.

Teorem 3.2.2.' ye göre $0 \neq \beta \in \mathcal{H}_\alpha, N(\beta)=5$ ve $\beta \mid \alpha$ ise $\langle \beta \rangle = S$ sağ modülü G_α kümesinde mükemmel $1-$baskın kümedir. Bu küme $\mathcal{H}_\alpha$ nın bir alt grubudur. Bundan yararlanılarak kod sözleri S nin elemanları olan $\mathcal{H}_\alpha$ üzerinde bir $C=S$ kodu tanımlanabilir. S sağ modülü minimum mesafesi 3 ve uzunluğu 1 olan bir mükemmel grup kod tanımlar.

Benzer şekilde $N(\beta)=7$ olduğunda G_α nın bir $2-$baskın S kümesi vardır. Bu küme $\mathcal{H}_\alpha$ nın bir alt grubu olup $\mathcal{H}_\alpha$ üzerinde bir $C=S$ kodu tanımlanabilir. S minimum mesafesi 5 ve uzunluğu 1 olan bir mükemmel grup kod tanımlar.

Örnek 3.2.4. $\beta = 2+i$ ve $\alpha = (2+i)(1+i+j) = 1+3i+j+k$ olsun.

$\langle\beta\rangle=\{0,2+i,-2-i,-1+2i,1-2i,2j+k,-2j-k,-j+2k,j-2k\}$ olup bu kümedeki 9 elemanın herbiri $\mathcal{H}_{\alpha}$ kümesinde 25 elemanı $1-$baskılar. Yani toplamda 9 yuvar vardır ve bu dokuz yuvarın her birinde 25 eleman bulunur. Dolayısı ile $\langle\beta\rangle$ kümesi $\mathcal{H}_{\alpha}$ üzerinde $1-$baskın küme oluşturur.

$\mathcal{H}_{\alpha}$ üzerinde $C=S=\langle\beta\rangle$ seçilirse C kodu $1-$hata düzeltebilen bir mükemmel kod olur.

Bu örnek aşağıda verilen Wolfram Mathematica programı ile elde edilebilir.

Programdaki "K" tablosunun 1. sütunu $\mathcal{H}_{\alpha}$ kümesinin elemanlarını ve 2. sütunu da $B\beta 2=\langle\beta\rangle$ kümesinin elemanlarının baskıladığı 25 elemanı sırasıyla vermektedir.

Programdaki "SW1" kümesi ağırlığı bir olan Hurwitz sayılarını, "B1γ" kümesi ise $\gamma\in\langle\beta\rangle$ elemanına bir uzaklıktaki elemanların kümesini göstermektedir.

"KKKK" tablosunun 2. sütunu $2+i\in\langle\beta\rangle$ elemanın baskıladığı 25 elemanı göstermektedir. Bu tablo "K" tablosunun ilk 25 elemanını göstermektedir.

"G" ise Şekil 3.3.' de gösterilen, köşeleri $\mathcal{H}_{\alpha}$ kümesinden olan döngüsel çizgeyi ve bu çizgede ki işaretli $1,2,\ldots,9$ noktaları ise $\langle\beta\rangle$ kümesinin elemanlarının yerini göstermektedir.

Şekil 3.4. ise $G_{1+3i+2j+k}$ çizgesine izomorf olan $C_{225}(13,14,\ldots,24)$ döngüsel çizgesini göstermektedir. Bu çizgenin çapı 5 tir. Diğer yandan $G_{1+3i+2j+k}$ kümesindeki elemanlar ile sıfır arasındaki maksimum karesel Öklidyen mesafesi de 5 tir.

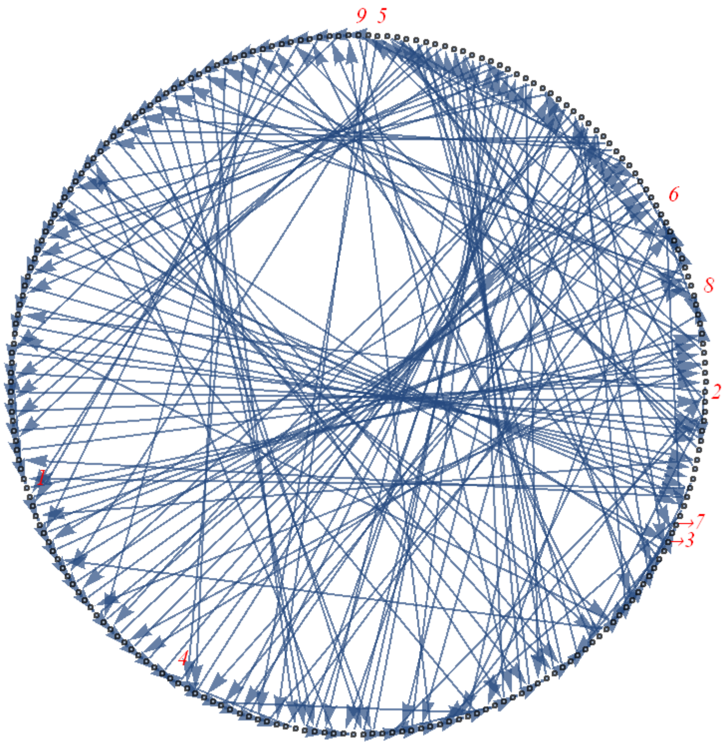
```
In[227]:= << Quaternions`
α = Quaternion[1, 3, 2, 1]; k = Norm[α]; A = Table[1, {k}]; Do[ A[[n]] = n, {n, 1, k}]
B = Quaternion[0, 0, 1, 0] * A; GG = Table[1, {k^2}];
Do[Do[GG[[n + k * (m - 1)]] = A[[n]] + B[[m]], {n, 1, k}], {m, 1, k}];
Hα = Table[1, {k^2}]; (*Hα denotes the Hα*)
Do[Hα[[tt]] = Mod[GG[[tt]], α], {tt, 1, k^2}];
β = Quaternion[2, 1, 0, 0]; Dimensions[Hα];
B = Table[1, {k^2}]; Do[B[[t]] = Mod[β ** Hα[[t]], α],
 {t, 1, k^2}]; Bβ = Union[B]; Dimensions[Bβ];
Bβ1 = Table[0, {Dimensions[Bβ][[1]]}];
Do[Bβ1[[t]] = If[Bβ[[t]] == Mod[Bβ[[t]] + (α ** Quaternion[1/2, 1/2, 1/2, 1/2]), α], Bβ[[t]]],
 {t, 1, Dimensions[Bβ][[1]]}];
MatrixForm[Bβ1];

        ( Quaternion[2, 1, 0, 0]  )
        ( Quaternion[0, 0, -2, -1])
        ( Quaternion[0, 0, -1, 2] )
        ( Quaternion[-1, 2, 0, 0] )
Bβ2 =   ( Quaternion[0, 0, 0, 0]  ); (*Bβ2 shows the set generated by β. To obtain the set Bβ2,
        ( Quaternion[0, 0, 2, 1]  )
        ( Quaternion[1, -2, 0, 0] )
        ( Quaternion[0, 0, 1, -2] )
        ( Quaternion[-2, -1, 0, 0])

firstly Bβ is obtained. secondly Bβ1 is checked. Using the commend
 MemberQ, the equivalent elements  are elected. *)
(*The set SW1 denotes the elements of weight 1. *)
SW1 = Table[1, {25}];
Do[Do[SW1[[m + 5 * (n - 1)]] = Mod[Quaternion[m, 1, 0, 0] +
      Quaternion[1, 0, n, 0], Quaternion[2, 1, 0, 0]],
   {m, 1, 5}], {n, 1, 5}];
B1γ = Table[1, {k^2}];
Do[Do[B1γ[[m + 25 * (n - 1)]] = SW1[[m]] + Bβ2[[n]],
   {m, 1, 25}], {n, 1, Dimensions[Bβ2][[1]]}];
MatrixForm[Hα]; Dimensions[B1γ];
K = Table[1, {225}, {2}];
Do[K[[t, 1]] = Hα[[t]]; K[[t, 2]] = Mod[B1γ[[t]], α],
 {t, 1, 225}]; Dimensions[Union[Hα]]; MatrixForm[K];
(*The first column of the matrix K denotes the elemnts of Hα  and the first 25
 rows of the second column of the matrix K are at distance one from the first elemnt
 of Bβ2. The next elements occurs in the same way.  *)
BB = Table[1, {k^2}, {4}];
Do[BB[[t, 1]] = Hα[[t, 1]]; BB[[t, 2]] = Hα[[t, 2]]; BB[[t, 3]] = Hα[[t, 3]]; BB[[t, 4]] = Hα[[t, 4]];
 , {t, 1, k^2}];
KK = Table[1, {k^2 - 1}];
Do[KK[[t]] = BB[[t]] → BB[[t + 1]], {t, 1, k^2 - 1}];
KKK = Union[KK, {{0, 0, 0, 0} → {1, 0, 1, 0}}];
KKKK = Table[1, {25}];
Do[KKKK[[t]] = K[[t]], {t, 1, 25}];
MatrixForm[KKKK]
G = Graph[KKK, VertexLabels → {{0, 0, 0, 0} → "1", {0, 0, -2, -1} → "2", {0, 0, -1, 2} →
     "→3", {-1, 2, 0, 0} → "4", {2, 1, 0, 0} → "  5 ", {0, 0, 2, 1} → "6", {1, -2, 0, 0} →
     "→7", {0, 0, 1, -2} → "8", {-2, -1, 0, 0} → "9"},
  VertexLabelStyle → Directive[Red, Italic, 11], VertexSize → 0.5]
(*The graph G shows G1+3i+2j+k. The elemnts of the set <β> occurs {1,2,..9} in that graph.*)

G = CirculantGraph[225, {13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24}, VertexSize → 0.5, EdgeStyle → Dashed]
EdgeCount[G]
GraphDiameter[G]
```

Yukarıdaki programın çıktıları şunlardır:

Tablo 3.1. $\mathcal{H}_{1+3i+2j+k}$ kümesi ve $\langle\beta\rangle$ kümesinin baskıladığı elemanlar

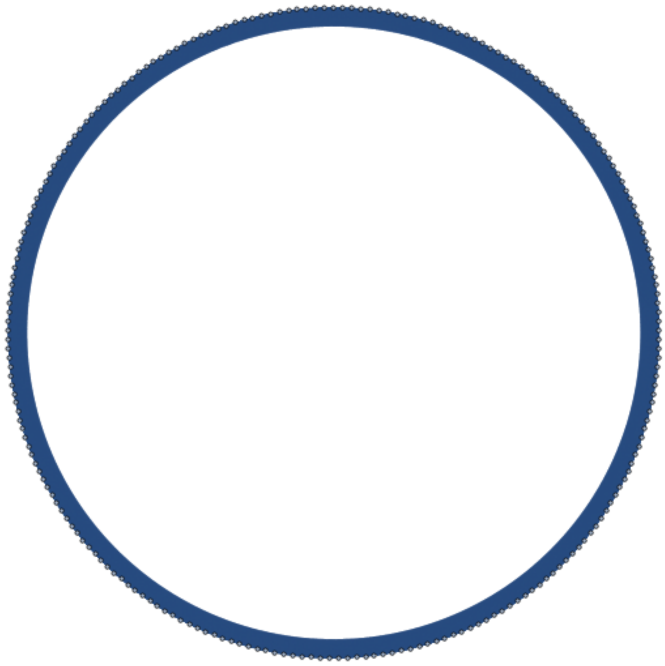
Out[252]//MatrixForm=

Quaternion[1, 0, 1, 0]	Quaternion[$-\frac{3}{2}$, $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$]
Quaternion[$-\frac{3}{2}$, $-\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$]	Quaternion[-1, -1, 1, 0]
Quaternion[$-\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$]	Quaternion[0, -1, 1, 0]
Quaternion[$\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$]	Quaternion[$\frac{3}{2}$, $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$]
Quaternion[$\frac{3}{2}$, $-\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$]	Quaternion[$-\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{1}{2}$, $-\frac{3}{2}$]
Quaternion[$-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, $-\frac{3}{2}$]	Quaternion[0, 0, 1, 2]
Quaternion[$\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, $-\frac{3}{2}$]	Quaternion[$\frac{3}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$]
Quaternion[$\frac{3}{2}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, $-\frac{3}{2}$]	Quaternion[-1, 1, -1, 1]
Quaternion[-1, 0, -1, -1]	Quaternion[$\frac{3}{2}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$]
Quaternion[0, 0, -1, -1]	Quaternion[-1, 0, -1, 1]
Quaternion[1, 0, -1, -1]	Quaternion[$-\frac{1}{2}$, $-\frac{3}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{1}{2}$]
Quaternion[0, -1, 0, 2]	Quaternion[-1, -1, 1, -1]
Quaternion[-2, 0, 1, 0]	Quaternion[0, -1, 1, -1]
Quaternion[-1, 0, 1, 0]	Quaternion[$\frac{3}{2}$, $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$]
Quaternion[0, 0, 1, 0]	Quaternion[-1, 0, -2, 0]
Quaternion[1, 0, 2, 0]	Quaternion[$-\frac{1}{2}$, $-\frac{3}{2}$, $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$]
Quaternion[$-\frac{3}{2}$, $-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$]	Quaternion[$\frac{3}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$]
Quaternion[$-\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$]	Quaternion[-1, 1, -1, 0]
Quaternion[$\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$]	Quaternion[$\frac{3}{2}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$]
Quaternion[$\frac{3}{2}$, $-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$]	Quaternion[-1, 0, -1, 0]
Quaternion[-1, -1, -1, 1]	Quaternion[2, 1, 0, 0]
Quaternion[0, -1, -1, 1]	Quaternion[$-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, $-\frac{3}{2}$, $\frac{1}{2}$]
Quaternion[1, -1, -1, 1]	Quaternion[2, 0, 0, 0]
Quaternion[-1, 0, 0, -1]	Quaternion[$-\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $-\frac{1}{2}$]
Quaternion[0, 0, 0, -1]	Quaternion[1, 1, 0, 0]



Şekil 3.3. $G_{1+3i+2j+k}$ çizgesi

Out[304]=



Out[305]= 2700

Out[306]= 5

Şekil 3.4. $C_{225}(13,14,\ldots,24)$ çizgesi

Not 3.2.2. Tablo 3.1.' de $\mathcal{H}_{1+3i+2j+k}$ kümesi ve $\langle\beta\rangle$ kümesinin baskıladığı elemanların bir bölümü verilmiştir. Program çalıştırılarak bu iki kümedeki 225 elemanın tamamı görüntülendiğinde sol ve sağ sütundaki bazı elemanlar birbirinden farklı gibi gözükebilir. Ancak Not 3.1.2.' de açıklandığı gibi bu elemanlar birbirinin yerine kullanılabilen denk elemanlardır. Dolayısıyla iki sütun da aynı kümeyi ifade etmektedir.

Örnek 3.2.5. $\alpha = 3+4i+3j+k$ için $\beta = 2+i+j+k$ elemanı $\mathcal{H}_{\alpha}$ üzerinde $2-$ baskın küme oluşturur. Bu kümeyi oluşturan Mathematica programı aşağıda verilmiştir.

```
In[73]:= << Quaternions`
α = Quaternion[3, 4, 3, 1]; k = Norm[α]; A = Table[1, {k}];
Do[A[[n]] = n, {n, 1, k}]; B = Quaternion[0, 0, 1, 0] * A;
GG = Table[1, {k^2}, {2}]; t = 0; Do[
 Do[GG[[n + t, 1]] = n + t; GG[[n + t, 2]] = A[[m]] + B[[n]],
  {n, 1, k}]; t = t + k, {m, 1, k}];
Hα = Table[1, {k^2}];
Do[Hα[[tt]] = Mod[GG[[tt, 2]], α], {tt, 1, k^2}];
β = Quaternion[2, 1, 1, 1]; B1 = Table[1, {k^2}];
Do[B1[[t]] = β ** Hα[[t]], {t, 1, k^2}];
Bβ2 = Union[Mod[B1, α]]; SW2 = Table[1, {49}];
Do[Do[SW2[[m + 7 * (n - 1)]] = Mod[Quaternion[m, 1, 0, 0] + Quaternion[1, 0, n, 0],
     Quaternion[2, 1, 1, 1]], {m, 1, 7}], {n, 1, 7}];
Dimensions[Union[SW2]]; B2γ = Table[1, {k^2}];
Do[Do[B2γ[[m + 49 * (n - 1)]] = SW2[[m]] + Bβ2[[n]], {m, 1, 49}], {n, 1, 25}];
K = Table[1, {k^2}, {2}];
Do[K[[t, 1]] = Hα[[t]]; K[[t, 2]] = Mod[B2γ[[t]], α],
  {t, 1, k^2}];
```

Aşağıdaki tabloda bazı $t-$baskın küme örnekleri verilmiştir.

Tablo 3.2. Bazı $t-$baskın küme örnekleri

β **değeri**	α değeri	Kaç baskın küme olduğu
$i-2k$	$1+2i-3j+k$	1
$\frac{3}{2}+\frac{i}{2}+\frac{3j}{2}+\frac{k}{2}$	$-\frac{5}{2}+\frac{5i}{2}+\frac{3j}{2}+\frac{k}{2}$	1
$\frac{1}{2}+\frac{i}{2}+\frac{j}{2}+\frac{5k}{2}$	$-\frac{3}{2}+\frac{i}{2}-\frac{5j}{2}+\frac{7k}{2}$	2
$\frac{3}{2}+\frac{3i}{2}+\frac{3j}{2}+\frac{k}{2}$	$\frac{3}{2}+\frac{5i}{2}+\frac{9j}{2}+\frac{5k}{2}$	2
$2+i+j+k$	$3+4i+3j+k$	2
$1+2i+2j+2k$	$-4+5i+5j+5k$	4

KAYNAKLAR

[1] Çallıalp, F., 2011. Örneklerle Soyut Cebir, Birsen Yayınevi, İstanbul.

[2] Davidoff, G., Sarnak, P, Valette, A, 2003. Elemantary Number Theory, Group Theory, and Ramanujan Graphs, Cambridge University Press.

[3] Çallıalp, F., Tekir, Ü., 2009. Değişmeli Halkalar ve Modüller, Birsen Yayınevi, İstanbul.

[4] Ling, S., Xing, C., 2004. Coding Theory, Cambridge University Press.

[5] Martinez, C., Beivide, R., Gabidulin, E., 2007. Perfect Codes for Metrics Induced by Circulant Graphs , IEEE Trans Inf. Theory, Vol. 53 No:9, 3042-3052.

[6] Ceyhun, Y., Çizge Kuramının Temelleri 1, ÜDK :513.83.

[7] Seker, S. E., 2015. Çizge Teorisi (Graph Theory), YBS Ansiklopedi, Vol. 2, is.2, pp. 17-29.

[8] Huber, K., 1994. Codes over Gaussian integers, IEEE Trans Inf. Theory, Vol. 40 No:1, 207-216.

[9] Özen, M., Güzeltepe, M., 2011. Cyclic codes over some finite quaternion integer rings, Journal of the Franklin Institute 348 (7), 1312-1317.

[10] Martinez, C., Beivide, R., Gabidulin, E. M., 2009. Perfect Codes From Cayley Graphs Over Lipschitz Integers , IEEE Trans Inf. Theory, Vol. 55 No:8, 3552-3562.

[11] Güzeltepe, M., 2013. Codes over Hurwitz integers, Discrete Mathematics 313 (5), 704-714.

[12] Güzeltepe, M., Heden, O., 2014. Perfect Mannheim, Lipschitz and Hurwitz weight codes, Math. Commun. 19 (2), 253-276.

[13] Güzeltepe, M., Heden O., 2016. Perfect 1-error-corecting Lipschitz weight codes, Math. Commun. 21 (1), 23-30.

[14] Güzeltepe, M., Altınel, A., 2017. Perfect 1-error-corecting Hurwitz weight codes, Math. Commun., 265-272.

[15] Coan, B., Perng, C., 2012. Factorization of Hurwitz Quaternions, International Mathematical Forum, Vol. 7, No:43, 2143-2156.

ÖZGEÇMİŞ

Gökhan GÜNER, 19.06.1980 tarihinde Sakarya'da doğdu. İlk, orta ve lise eğitimini İstanbul'da tamamladı. 2004 yılında Karadeniz Teknik Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nden mezun oldu. 2012 yılına kadar çeşitli eğitim öğretim kurumlarında matematik öğretmeni olarak çalıştı. 2012 yılında Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü' nde Cebir ve Sayılar Teorisi alanında yüksek lisans eğitimine başladı. Aynı zamanda 2012 yılından bu yana Sakarya Çalışma ve İş Kurumu' nda İş ve Meslek Danışmanı olarak çalışmaya devam etmektedir.