T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ZAMAN SKALASININ DE GROOT DUALİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Hilal POLAT

Enstitü Anabilim Dalı	**:**	**MATEMATİK**
Enstitü Bilim Dalı	**:**	**TOPOLOJİ**
Tez Danışmanı	**:**	**Doç. Dr. Soley ERSOY**

Mayıs 2017

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ZAMAN SKALASININ DE GROOT DUALİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Hilal POLAT

Enstitü Anabilim Dalı	:	**MATEMATİK**
Enstitü Bilim Dalı	:	**TOPOLOJİ**

Bu tez 05/05/2017 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği ile kabul edilmiştir.

Doç. Dr. Soley ERSOY	**Doç. Dr. Emrah Evren KARA**	**Doç. Dr. Mahpeyker ÖZTÜRK**
Başkan	**Üye**	**Üye**

BEYAN

Tez içindeki tüm verilerin akademik kurallar çerçevesinde tarafımdan elde edildiğini, görsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçların akademik ve etik kurallara uygun şekilde sunulduğunu, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezde yer alan verilerin bu üniversite veya başka bir üniversitede herhangi bir tez çalışmasında kullanılmadığını beyan ederim.

Hilal POLAT

05.05.2017

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans çalışmam süresince danışmanlığımı yapan, bilgi ve tecrübesiyle destek veren, çalışmamı hazırlamamda yardımını esirgemeyen ve her zaman kendime örnek edindiğim saygıdeğer hocam Doç. Dr. Soley ERSOY'a teşekkürlerimi sunarım.

Destekleriyle her zaman yanımda olan ve bana güvenen değerli aileme sonsuz teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

A^*	: X 'in A alt uzayının de Groot duali
$\hat{A}$	: X 'in de Groot dual uzayı olan X^*'dan A'ya indirgenmiş alt uzay
$\mathrm{cl}(\mathbb{T})$	: $\mathbb{T}$ 'nin $\mathbb{R}$ 'deki kapanışı
$\mathrm{CL}(\mathbb{R})$	: $\mathbb{R}$ 'nin kapalı alt kümelerinin hiperuzayı
$\mathrm{cl}_*(\mathbb{T})$	: $\mathbb{T}$ 'nin $\mathbb{R}^*$'daki kapanışı
$P(X)$	: X kümesinin kuvvet kümesi
f^Δ	: f fonksiyonunun Hilger $\Delta-$türevi
$\mathrm{int}(\mathbb{T})$	: $\mathbb{T}$ 'nin $\mathbb{R}$ 'deki içi
$\mathrm{int}_*(\mathbb{T})$	: $\mathbb{T}$ 'nin $\mathbb{R}^*$'daki içi
$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{Q}$	: Rasyonel sayılar kümesi
$\mathbb{R}_\varepsilon$	: $\mathbb{R}$ 'deki $\varepsilon-$komşuluk
$\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$	: İrrasyonel sayılar kümesi
$\mathbb{R}^*$	: $\mathbb{R}$ 'nin de Groot duali
$\mathbb{R}$	: Gerçek sayılar kümesi

$\mathbb{T}$	: Zaman skalası
$\mathbb{T}_{\varepsilon}$	: $\mathbb{T}$ ’deki $\varepsilon -$komşuluk
$\mathbb{T}^{k}$	: Zaman skalasının türevi
$\mathbb{T}^{*}$	: $\mathbb{T}$ ’nin de Groot duali
$\hat{\mathbb{T}}$	: $\mathbb{T}$ ’nin relatif topolojisi
X^{*}	: X ’in de Groot duali
$\mathbb{Z}$	: Tamsayılar kümesi
$\sigma(t)$	: İleri sıçrama operatörü
$\rho(t)$	: Geri sıçrama operatörü
$\partial\mathbb{T}$	: $\mathbb{T}$ ’nin $\mathbb{R}$ ’deki sınırı
$\partial_{*}\mathbb{T}$	: $\mathbb{T}$ ’nin $\mathbb{R}^{*}$’daki sınırı
$\mu^{*}(t)$	: Taneli fonksiyon

ÖZET

Anahtar Kelimeler: Zaman skalası, zaman skalasının topolojisi, de Groot dual topolojisi, zaman skalasının de Groot duali.

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmıştır. İkinci bölümde zaman skalasının tanımı, ileri sıçrama operatörü, geri sıçrama operatörü ve zaman skalasındaki süreklilik kavramları verilmiştir. Üçüncü bölümde zaman skalasının topolojik yapısı incelenmiştir. Zaman skalası ile ilgili komşuluk tanımı, $\mathbb{T}-$ açıklık ve kapalılık kavramları verilmiştir.

Dördüncü bölümde de Groot dual topolojisinin yapısı incelenmiştir. De Groot dual topolojisine göre bir kümenin içi, kapanışı ve sınırı ile ilgili teoremler ve ispatları verilmiştir.

Beşinci bölüm bu çalışmanın orijinal kısmını oluşturmaktadır. Bu bölümde $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesinin de Groot dualine göre zaman skalasının topolojik yapısı incelenmiş ve zaman skalasının dual uzaydaki kapanışı, içi, sınırı ve bağlantılılığı ile ilgili teoremler ifade ve ispat edilmiştir. Ayrıca bir zaman skalasının de Groot duali ile reel sayıların alışılmış uzayının de Groot dualinden bu zaman skalası üzerine indirgenmiş alt topolojik uzay karşılaştırılmıştır. Daha sonra elde edilen tüm sonuçlar bilinen ayrık ve sürekli zaman skalaları ile örneklendirilmiştir.

Altıncı bölümde tüm çalışmanın kısa bir özeti yapılmış ve bundan sonra yapılacak yeni araştırmalara yönelik öneride bulunulmuştur.

THE DE GROOT DUAL OF TIME SCALE

SUMMARY

Keywords: Time scale, topology of time scale, the de Groot dual topology, the de Groot's dual of time scale.

This thesis consists of five chapters. The first chapter is devoted to the introduction. In the second chapter, the basic definitions of time scale, the forward jump operator, the backward jump operator and the concept of continuity on time scale are given. In the third chapter, topological structure of time scales is investigated. The definition of neighborhood in terms of a time scale, the notions of $\mathbb{T}-$openness and the closedness are given.

In the fourth chapter de Groot dual of topology is studied. The theorems and proofs related to the closure, interior, and boundary of a set with respect to the de Groot dual topology are given.

The fifth chapter is the original part of this study. In this chapter, the topological properties of a time scale with respect to the de Groot dual of usual topology of set of the real numbers $\mathbb{R}$ are studied and the theorems related to the closure, interior, boundary and connectedness of a time scale in dual space are stated and proved. Also, the de Groot dual of a time scale and a time scale with subspace topology induced from the de Groot dual of usual topological space of the real numbers are compared. All obtained results are exemplified by well-known examples of discrete and continuous time scales.

In the sixth chapter of this thesis, a brief summary of this study is given and some suggestions are proposed for new investigations.

BÖLÜM 1. GİRİŞ

Zaman skalası teorisi ilk olarak 1988 yılında Stefan Hilger tarafından [1] doktora tezinde sürekli ve ayrık analizi birleştirmek amacıyla tanıtılmıştır. Ölçüm zinciri olarak da adlandırılan zaman skalası gerçek sayıların boştan farklı kapalı bir alt kümesi olarak tanımlanmış ve $\mathbb{T}$ ile gösterilmiştir. Zaman skalasının en iyi bilinen örnekleri gerçek sayılar kümesi $\mathbb{R}$, tam sayılar kümesi $\mathbb{Z}$, kapalı aralıklar kümesi $\mathbb{P}$ ve Cantor kümesidir. Zaman skalası kavramı özellikle uygulamalı matematik alanında çalışılmış olmasının yanı sıra analiz, geometri, cebir ve topoloji gibi matematiğin diğer dallarında da incelenmiş ve geliştirilmiştir. Hilger [2]'de zaman skalası için türev kavramı, diferansiyel hesaplamalar, topolojik özellikler ile dinamik eşitliklerden bahsetmiştir. Ayrıca, Aulbach ve Hilger [3]'te zaman skalası üzerinde dinamik sistemleri çalışmıştır. Bohner ve Peterson tarafından yazılan [4,5] kitaplarında zaman skalası ile ilgili tanımlar verilerek Cauchy integralleri tanıtılmış ve integrallenebilme koşulları verilmiştir. Gray [6]'da bazı temel Opial tür dinamik eşitsizlikleri vermiştir. Bunun için zaman skalasının temel özelliklerini göz önüne alarak eşitsizlikleri içeren sonuçları birleştirmenin yanı sıra zaman skalasını topolojik açıdan da irdelemiştir. Guseinov [7]'deki makalesinde Riemann ve Lebesque integrallerinin zaman skalası üzerindeki işlemlerini çalışmış ve bu integrallerle ilgili bağlantıları incelemiştir. Kaymakçalan ve Leela [8]'deki makalesinde diferansiyel eşitlikleri ve farkı birleştiren bir yaklaşım olarak zaman skalasındaki dinamik sistemleri çalışmışlardır. Zaman skalası için Taylor formülü, L'Hospital kuralı ve Kneser teoremi de Agarwal ve Bohner tarafından [9]'da yorumlanmıştır. Bu teoremlerin uygulamaları olarak zaman skalalarında yüksek mertebeden denklemlerin çözümlerinin asimptotik ve titreşimli davranışlarını araştırmışlardır. Zaman skalaları üzerinde Abel-Gontscharoff interpolasyon polinomu ile Taylor formülünün uygulaması bu çalışmada karşımıza çıkmaktadır. Sürekli ve ayrık dinamik sistemlerin teorisi olarak isimlendirilen iki farklı teorinin karşılıklı etkileşimi Lakshmikantham, Sivasundaram ve Kaymakçalan'ın "Ölçüm Zincirinde Dinamik Sistemler" kitabında ele alınmış ve verilen sonuçlara göre bir teori geliştirilmiştir [10, 11].

Zaman skalası kavramının topoloji alanındaki gelişimi de dikkate değerdir. Oberste-Vorth [12]'de zaman skalaları uzayı olarak

$$\mathrm{CL}(\mathbb{R}) = \{\mathbb{T} \subset \mathbb{R} \mid \mathbb{T} \neq \varnothing \text{ ve } \mathbb{T},\ \mathbb{R}\text{'nin kapalı alt kümesi}\}$$

kümesini almış ve bu küme üzerindeki standart topolojileri incelemiştir. Burada herhangi bir $\mathbb{T} \in \mathrm{CL}(\mathbb{R})$ alt kümesi bir zaman skalası (veya ölçüm zinciri) olarak tanıtılmıştır. Çünkü $\mathbb{R}$ gerçek sayılar kümesinin boştan farklı keyfi kapalı alt kümeleri zaman skalası olarak bilinmektedir. Hiperuzay teorisinde iyi bilinen topolojiler Hausdorff metrik topolojisi [13], Vietoris topolojisi [14] ve Fell topolojisi [15] olmakla birlikte Oberste-Vorth bu topolojiler içinde Fell topolojisinin zaman skalaları için uygun olduğunu ifade etmiştir. Fell topolojisi ile birlikte verilen $\mathrm{CL}(\mathbb{R})$ zaman skalaları uzayında yakınsaklığı araştırmıştır.

Esty ve Hilger, [16]'da hiperuzaylar üzerinde pek çok topolojiyi incelemiş ve özellikle zaman skalalarını içeren hiperuzay için kullanışlı olan topolojileri araştırmıştır. Bu çalışmada da Fell topolojisinin zaman skalaları için uygun olduğu ifade edilmiştir. Fell topolojisi altında Hausdorff metrik uzayların hiperuzaylarındaki yakınsaklık hakkında pek çok teorem incelenmiş ve hiperuzayın $\mathrm{CL}(\mathbb{R})$ olması durumda zaman skalaları için ilgili teoremlerin ispatları verilmiştir.

Lawrence ve Oberste-Vorth [17]'de zaman skalaları üzerinde verilen dinamik eşitlikler için çözüm uzayını çalışmış ve bu uzay üzerindeki topolojiyi Hausdorff-Fell topolojisi olarak adlandırılmıştır. Hausdorff-Fell topolojisi ile verilen tüm zaman skalalarının uzayında, sonlu zaman skalası uzayının yoğun olduğu ifade edilmiştir.

Diğer taraftan 1960'lı yılların sonunda J. de Groot ve meslektaşları, Aarts, Herrlich, Strecker ve Wattel ko-kompaktlık kavramını ilk kez tanıtmış ve kavram üzerine sistemli bir şekilde çalışmışlardır [18]-[22]. Aslında J. de Groot 1967'de [19] çalışmasında ko-kompakt uzay yerine anti-uzay terimini kullanmıştır. J. de Groot tanımladığı anti-uzayın topolojisinin orijinal topolojiden daha kaba olmasının yanı sıra anti-uzayın kompakt, süper bağlantılı bir T_1-uzayı olduğunu ancak Hausdorff uzayı olmadığını ifade etmiştir. Ayrıca gerçek sayılar kümesi $\mathbb{R}$'nin anti-uzayı olarak tanımladığı $\mathbb{R}^*$'ın tüm kapalı sınırlı alt kümeleri üzerinde aynı topolojiye sahip olduğunu ve $\mathbb{R}$'nin kompakt olmamasına rağmen $\mathbb{R}^*$'ın kompakt olduğunu ifade etmiştir. Buradan yola çıkarak $\mathbb{R}$ zaman olarak düşünüldüğünde zamanın sonsuz olduğunu fakat $\mathbb{R}^*$'ın kompaktlık bakımından sonlu olduğunu söyleyerek potansiyelimiz var olmasına rağmen gerçek anlamda sonsuzluk yoktur, şeklinde felsefik açıdan yorumlamıştır.

1968'de Wattle [23]'de kompaktlık operatörünün tanımını vermiş ve Alexander alt taban teoreminin kuvvetli bir şeklini elde etmiştir. Minus uzay ve anti-uzay kavramlarını tanıtmıştır ve daha sonra kompaktlık operatörünün karakterizasyonlarını vermiştir.

1973'de Liden [24] tezinde X'in anti-uzayını tanımlamış ve X^* ile göstermiştir. X üzerindeki asıl topoloji ile ürettiği bu yeni topolojiyi şu şekilde açıklamıştır: X'deki tüm kompakt kümelerinin ailesi herhangi sayıdaki kesişimler ve sonlu birleşimler altında kapalı olsun. Böylece X'in tüm kompakt alt kümeleri ve X'in kendisi de kapalı alınarak X üzerinde üretilen yeni daha kaba topolojisi ile birlikte X^* anti-uzayı oluşmaktadır. Açık bir şekilde her $x \in X$ noktası için $\{x\}$ kümesi X'de kompakt küme olup X^*'da kapalı olacağından X^* anti-uzayı daima T_1-uzayıdır. X'in tüm kompakt alt kümeleri ve X'in kendisinin X^*'da kapalı küme olması X'in X^*'da kapalı olan öz alt kümelerinin X'de kompakt olmasını gerektirir. Liden anti-uzayının yapısını ortaya koyduktan sonra [24]'de ve 1975'de yayınladığı [25] makalesinde X ve Y uzaylarının anti-uzayları arasındaki dönüşümleri kıyaslayarak X ve Y uzayları arasındaki dönüşümlerin çeşitli özelliklerini incelemeyi amaçlamıştır.

Ko-kompakt topoloji ya da anti-uzay kavramı J. de Groot'un ilk tanımlamasından yaklaşık 20 yıl sonra alan teorisindeki araştırmalar ile tekrar topolojicilerin ve teorik bilgisayar mühendislerinin ilgi odağı olmuştur. Zaman içerisinde de Groot'un orijinal ko-kompakt uzay tanımına birleşimleri kapalı olan kompakt kümelerin doymuş olma koşulu da eklenmiş ve artık de Groot duali olarak da anılmaya başlanmıştır [26]-[29]. Bir küme, açık kümelerin bir kesişimi ise o küme doymuş olarak adlandırılır. Bu yüzden T_1-uzayında her küme doymuştur. Bir (X,τ) topolojik uzayındaki tüm kompakt doymuş kümelerin ailesi, kapalılar ailesinin bir tabanı alınarak üretilen topoloji, orijinal topolojinin de Groot duali veya ko-kompakt topoloji olarak adlandırılmıştır ve genellikle τ^d ile gösterilmiştir.

Literatürde de Groot dual topolojisi üzerine Lawson and Mislove [30], Kopperman [26], Kovár [27,28], Yokoyama [31], Liden [24] tarafından yapılmış olan araştırmalar bu kavrama farklı yönlerden yaklaşmışlardır.

Kovár, [29]'da Minkowski uzayının kompakt, süper bağlantılı, T_1 ve Hausdorff olmayan bir yapıya sahip olduğunu belirterek üzerindeki yapının Öklid topolojisinin de Groot dual topolojisi olduğunu ifade etmiştir. Minkowski uzayındaki de Groot dual topolojisinin tüm kompakt kümeler üzerindeki Öklid topolojisi ile çakıştığını ifade etmiştir. Evreni tanımlamak için de Groot dual topolojinin Öklid topolojisinden daha uygun olduğu belirtilmiştir.

Tüm bu çalışmalar göz önüne alınarak bu tezde de zaman skalasının topolojisi üzerine çalışılmış ve $\mathbb{R}$'den zaman skalası üzerine indirgenen Öklid (alışılmış) topolojisi yerine de Groot dual topolojisi alınarak zaman skalasının topolojik özellikleri incelenmiş, ilgili teoremler ifade ve ispat edilmiştir.

BÖLÜM 2. ZAMAN SKALASI

Son zamanlarda matematikçiler arasında ilgi odağı olan zaman skalası, 1988 yılında Stefan Hilger tarafından [1]'de ortaya atılmıştır. Stefan Hilger, ayrık analiz ile sürekli analizi bir çatı altında birleştirmek amacıyla bu teoriyi ortaya atmıştır. Bunun için de her ikisini kapsayan bir küme almış ve bu kümeye zaman skalası adını vermiştir [1].

Zaman skalası, reel sayıların boştan farklı kapalı bir alt kümesine denir ve genellikle $\mathbb{T}$ ile gösterilir [1]. Örneğin, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$ ve $\mathbb{N}$ kümeleri $\mathbb{R}$'nin kapalı alt kümeleri olup birer zaman skalasıdır. Fakat $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ ve $(0,1)$ gibi $\mathbb{R}$'nin kapalı olmayan alt kümeleri birer zaman skalası değildir. Zaman skalalarının $\mathbb{R}$'nin kapalı alt kümeleri olarak seçilmesinin nedeni reel sayıların kapalı olmayan alt kümelerinin yığılma noktalarının hepsini içermemesidir. Bir $\mathbb{T}$ zaman skalası, reel sayıların standart topolojisine sahiptir.

Tanım 2.1. $\mathbb{T}$ bir zaman skalası olsun. Herhangi $t \in \mathbb{T}$ için $t \leq \max\mathbb{T}$ olmak üzere

$$\sigma(t) = \inf\{s \in \mathbb{T} : s > t\} \text{ ve } \rho(t) = \sup\{s \in \mathbb{T} : s < t\}$$

şeklinde tanımlanan $\sigma, \rho : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ fonksiyonları sıçrama operatörleri olarak adlandırılır [2,6,9].

σ, ileri sıçrama operatörü ve ρ, geri sıçrama operatörüdür [2,9].

$\mathbb{T}$, üstten sınırlı ise $\sigma(\max\mathbb{T}) := \max\mathbb{T}$ veya $\mathbb{T}$, alttan sınırlı ise $\rho(\min\mathbb{T}) := \min\mathbb{T}$ şeklinde tanımlanır [6].

Eğer $\sigma(t)>t$ ise t'nin sağ-saçıldığı söylenir. $\rho(t)<t$ iken t'nin sol-saçıldığı söylenir [2,6,9].

Hem sağ-saçılan hem de sol-saçılan noktalar ayrıktır [9].

Eğer $t<\sup\mathbb{T}$ ve $\sigma(t)=t$ ise t sağ yoğun olarak adlandırılır. $t>\inf\mathbb{T}$ ve $\rho(t)=t$ ise t sol yoğun olarak adlandırılır. Hem sağ yoğun hem de sol yoğun noktalar aynı zamanda yoğun olarak adlandırılır [2,6,9].

Bu sıçrama operatörleri herhangi $t\in\mathbb{T}$ için sırasıyla $\sigma(t)=t$, $\sigma(t)>t$, $\rho(t)=t$ ve $\rho(t)<t$ olup olmadığına bağlı olan sağ yoğun, sağ-saçılan, sol yoğun ve sol-saçılan noktalar gibi bir zaman skalasının $\{t\}$ noktalarının sınıflandırılmasına imkan verir [6]. Bu sınıflandırma aşağıdaki tabloda verilmiştir.

t sağ-saçılan nokta	$\sigma(t)>t$
t sol-saçılan nokta	$\rho(t)<t$
t sağ yoğun nokta	$\sigma(t)=t$
t sol yoğun nokta	$\rho(t)=t$
t ayrık nokta	$\rho(t)<t<\sigma(t)$
t yoğun nokta	$\rho(t)=t=\sigma(t)$

Tablo 2.1. Noktaların sınıflandırması

Örnek 2.2. Bir zaman skalası

$$\mathbb{T}:=\{x\in\mathbb{R}:-2\le x\le 0\}\cup\left\{\frac{1}{n}:\ n\in\mathbb{N}\right\}\cup\{x\in\mathbb{R}:2\le x\le 3\}\cup\{4\}$$

olarak verildiğinde

sağ yoğun ve sol yoğun noktalar kümesi: $[-2,0]\cup(2,3)$, sağ yoğun ve sol-saçılan noktalar kümesi: $\{2,4\}$,

sağ-saçılan ve sol yoğun noktalar kümesi: $\{3\}$,

sağ-saçılan ve sol-saçılan noktalar kümesi: $\left\{\frac{1}{n}\,\middle|\, n\in\mathbb{N}\right\}$

olur. Burada sırasıyla -2'nin minimal nokta ve 4'ün maksimal nokta olduğu görülmektedir. Bu yüzden $\rho(-2)=-2$ olup -2 bir sol yoğun noktadır ve $\sigma(4)=4$ olup 4 bir sağ yoğun noktadır [6].

Bir $f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ fonksiyon verildiğinde $f^{\sigma}:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu her $t\in\mathbb{T}$ için $f^{\sigma}(t)=f(\sigma(t))$ olarak tanımlanır [9].

Tanım 2.3. $\mu:\mathbb{T}\to[0,\infty)$ fonksiyonu $\mu(t):=\sigma(t)-t$ olacak şekilde taneli fonksiyonu olarak adlandırılır [9].

Örnek 2.4. $\mathbb{T}=\mathbb{R}$ ve $\mathbb{T}=\mathbb{Z}$ zaman skalaları verilsin.

i. Eğer $\mathbb{T}=\mathbb{R}$ ise herhangi $t\in\mathbb{R}$ için

$$\sigma(t)=\inf\{s\in\mathbb{R}:s>t\}=\inf(t,\infty)=t$$

olur ve benzer şekilde $\rho(t)=t$ dir.

μ taneli fonksiyonu, her $t\in\mathbb{T}$ için $\mu(t)=0$ olacak şekilde sonuçlanır.

ii. Eğer $\mathbb{T}=\mathbb{Z}$ ise herhangi $t\in\mathbb{Z}$ için

$$\sigma(t)=\inf\{s\in\mathbb{Z}:s>t\}=\inf\{t+1,t+2,...\}=t+1$$

sağlanır ve benzer şekilde $\rho(t)=t-1$ dir. Bu yüzden her bir $\mathbb{T}=\mathbb{Z}$ noktası ayrıktır.

μ taneli fonksiyonu, her $t\in\mathbb{T}$ için $\mu(t)=1$ olacak şekilde sonuçlanır [9].

Teorem 2.5. (Matematiksel Tümevarım)
$t_0\in\mathbb{T}$ ve $\{S(t):t\in[t_0,\infty)\}$ aşağıdaki ifadeleri sağlayan önermeler ailesi olsun.

i. $S(t_0)$ önermesi doğrudur.

ii. $t\in[t_0,\infty)$ sağ-saçılmış ve $S(t)$ doğru ise $S(\sigma(t))$ doğrudur.

iii. $t\in[t_0,\infty)$ sağ yoğun ve $S(t)$ doğru ise t'nin bir U komşuluğu vardır öyle ki her $s\in U\cap(t,\infty)$ için $S(s)$ önermesi doğrudur.

iv. $t\in(t_0,\infty)$ sol yoğun ve her $s\in[t_0,t)$ için $S(s)$ doğru ise $S(t)$ doğrudur.

O halde $S(t)$ her $t\in[t_0,\infty)$ için doğrudur [4].

Uyarı 2.6.

$\mathbb{T}=\mathbb{N}$ için iii. ve iv. koşulları gereksizdir ve teorem doğal sayılar için matematiksel tümevarımın genel prensibine indirgenir [6].

Matematiksel tümevarımın bir uygulaması olan Teorem 2.5'in bir sonucu olarak zaman skalasında ara değer teoremi aşağıdaki şekilde verilmiştir [6].

Sonuç 2.7. $\mathbb{T}$ bir zaman skalası olmak üzere $t_1,t_2\in\mathbb{T}$, $[t_1,t_2]=\{t\in\mathbb{T}:t_1\le t\le t_2\}$ kapalı aralığında tanımlı f, gerçek değerli sürekli fonksiyon için $f(t_2).f(t_1)<0$ olsun. O halde

$$f(t)\,f(\sigma(t))\le 0$$

olacak şekilde bir $t \in [t_1, t_2]$ elemanı vardır.

Böyle bir t noktası düğüm (node) noktası olarak adlandırılır ve bu durumda f, t ve $\sigma(t)$ arasında sıfırlanır [6].

Tanım 2.8. $f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ fonksiyonunun $\mathbb{T}$'deki her sağ yoğun noktada sağ taraflı limiti ve $\mathbb{T}$'deki her sol yoğun noktada sol taraflı limiti mevcutsa f fonksiyonu düzenli olarak adlandırılır [9].

Tanım 2.9. $f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu $\mathbb{T}$'deki sağ yoğun noktalarda sürekli ve $\mathbb{T}$'deki sol yoğun noktalarda f fonksiyonunun sol taraflı limitleri mevcutsa fonksiyon sağ yoğun sürekli olarak adlandırılır ($rd-$sürekli olarak gösterilir) [9].

$f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$, $rd-$sürekli fonksiyonların kümesi

$$C_{rd}=C_{rd}(\mathbb{T})=C_{rd}(\mathbb{T},\mathbb{R})$$

ile gösterilir [9].

Tanım 2.10. $f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu $\mathbb{T}$'deki sağ yoğun noktalarda parçalı sürekli ve $\mathbb{T}$'deki sol yoğun noktalarda f fonksiyonunun sol taraflı limitleri mevcutsa parçalı sağ yoğun sürekli olarak adlandırılır ($prd-$sürekli olarak adlandırılır) [9].

$f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$, $prd-$sürekli fonksiyonların kümesi

$$C_{prd}=C_{prd}(\mathbb{T})=C_{prd}(\mathbb{T},\mathbb{R})$$

ile gösterilir [9].

Tanım 2.11. $f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu ve $t_0\in\mathbb{T}$ olsun. Verilen her $\varepsilon>0$ için $\left|f(t)-f(t_0)\right|<\varepsilon$ olacak şekilde her $t\in U(t_0)$ için bir $U(t_0)$ komşuluğu varsa f fonksiyonu t_0 'da süreklidir denir [6].

$rd-$sürekli ve düzenli fonksiyonlar ile ilgili olan bazı sonuçlar aşağıdaki teoremde verilmektedir.

Teorem 2.12. $f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin.

i. Eğer f sürekli ise f, $rd-$süreklidir.
ii. Eğer f $rd-$sürekli f, düzenlidir.
iii. İleri sıçrama operatörü σ, $rd-$süreklidir.
iv. Eğer f düzenli veya $rd-$sürekli ise f, f^{σ} fonksiyonudur.
v. Eğer f sürekli, $g:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu düzenli ($rd-$sürekli) ise $f\circ g$ düzenlidir ($rd-$süreklidir) [2].

Sonuç olarak, bir f fonksiyonu

$$\text{sürekli}\Rightarrow rd-\text{sürekli}\Rightarrow\text{düzenli}$$

şeklindedir [2].

Ancak $rd-$sürekli her fonksiyon sürekli olmayabilir. Örneğin $\mu:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu $\mathbb{T}:=[0,1]\cup\mathbb{N}$ durumunda $rd-$süreklidir fakat 1 noktasında sürekli değildir [6].

Zaman skalasında delta (Hilger) türevi kavramını açıklamak üzere $\mathbb{T}$ 'den elde edilen delta türevlenebilirlik bölgesi $\mathbb{T}^{k}$ aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır.

Eğer $\mathbb{T}$ bir sol-saçılan maksimum m'ye sahipse o zaman $\mathbb{T}^k = \mathbb{T} - \{m\}$ dir. Diğer durumda $\mathbb{T}^k = \mathbb{T}$ dir. Özet olarak

$$\mathbb{T}^k = \begin{cases} \mathbb{T} \setminus (\rho(\max \mathbb{T}), \max \mathbb{T}) & , \quad \mathbb{T} \text{ üstten sınırlı ise} \\ \mathbb{T} & , \quad \mathbb{T} \text{ üstten sınırlı değilse} \end{cases}$$

şeklindedir [9].

Tanım 2.13. $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $t \in \mathbb{T}^k$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ için t'nin bir U komşuluğundaki her $s \in U$ için

$$\left| f(\sigma(t)) - f(s) - f^{\Delta}(t)(\sigma(t) - s) \right| \le \varepsilon \left| \sigma(t) - s \right|$$

olacak şekilde bir $f^{\Delta}(t)$ sayısı varsa bu sayıya f fonksiyonunun t noktasındaki delta türevi veya Hilger türevi denir. Bununla birlikte her $t \in \mathbb{T}^k$ için $f^{\Delta}(t)$ varsa f fonksiyonuna $\mathbb{T}^k$'da delta diferensiyellenebilirdir denir [9].

Örnek 2.14. i. α sabit olmak üzere $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu, $f(t) = \alpha$ olarak tanımlansın. O halde herhangi bir $\varepsilon > 0$ sayısı verildiğinde her $s \in \mathbb{T}$ için

$$\left| f(\sigma(t)) - f(s) - 0.(\sigma(t) - s) \right| = \left| \alpha - \alpha \right| = 0 \le \varepsilon \left| \sigma(t) - s \right|$$

olup $f^{\Delta}(t) = 0$ dır.

ii. Her $t \in \mathbb{T}$ için $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $f(t) = t$ olarak tanımlansın. Herhangi $\varepsilon > 0$ sayısı verildiğinde her $s \in \mathbb{T}$ için

$$\left| f(\sigma(t)) - f(s) - 1.(\sigma(t) - s) \right| = \left| \sigma(t) - s - (\sigma(t) - s) \right| = 0 \le \varepsilon \left| \sigma(t) - s \right|$$

olur ve $f^{\Delta}(t)=1$ dir.

Teorem 2.15. $f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $t\in\mathbb{T}^{k}$ olsun. O halde aşağıdaki özellikler sağlanır.

i. f fonksiyonu t noktasında türevlenebilir ise f fonksiyonu t noktasında süreklidir.

ii. f fonksiyonu t noktasında sürekli ve t noktası sağ-saçılmış ise f fonksiyonu t noktasında türevlenebilirdir ve

$$f^{\Delta}(t)=\frac{f(\sigma(t))-f(t)}{\mu(t)}$$

olur.

iii. t noktası sağ yoğun ise f fonksiyonu t noktasında türevlenebilirdir ancak ve ancak

$$\lim_{s\to t}\frac{f(t)-f(s)}{t-s}$$

değeri vardır ve sonludur. Bu durumda

$$f^{\Delta}(t)=\lim_{s\to t}\frac{f(t)-f(s)}{t-s}$$

şeklindedir.

iv. f fonksiyonu t noktasında türevlenebilir ise

$$f(\sigma(t))=f(t)+\mu(t)f^{\Delta}(t)$$

dır [4].

Örnek 2.16. $\mathbb{T}=\mathbb{R}$ ve $\mathbb{T}=\mathbb{Z}$ olarak verilsin.

i. $\mathbb{T}=\mathbb{R}$ olması durumunda Teorem 2.15 iii.'den $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu $t\in\mathbb{R}$ noktasında $\Delta-$türevlenebilirdir ancak ve ancak

$$f'(t)=\lim_{s\to t}\frac{f(t)-f(s)}{t-s}$$

limiti vardır. Diğer bir ifadeyle f fonksiyonu fonksiyonu $t\in\mathbb{R}$ noktasında türevlenebilirdir. Bu durumda

$$f^{\Delta}(t)=\lim_{s\to t}\frac{f(t)-f(s)}{t-s}=f'(t)$$

olur.

ii. $\mathbb{T}=\mathbb{Z}$ ise Teorem 2.15 ii.'den $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu ve Δ fark denklemlerinde kullanılan ileri fark operatörü olmak üzere

$$f^{\Delta}(t)=\frac{f(\sigma(t))-f(t)}{\mu(t)}=\frac{f(t+1)-f(t)}{1}=f(t+1)-f(t)=\Delta f(t)$$

$\Delta-$türevlenebilirdir [4].

BÖLÜM 3. ZAMAN SKALASININ TOPOLOJİSİ

Bu bölümde zaman skalasının topolojik yapısı incelenmektedir. Bir $\mathbb{T}$ zaman skalasının $\mathbb{R}$ gerçek sayılar kümesinin kapalı alt kümesi olarak tanımlanmasından dolayı $\mathbb{T}$'nin topolojik yapısı özellikle açıklık bakımından farklı özelliklere sahiptir. $\mathbb{T}$'nin herhangi bir A alt kümesi $\mathbb{R}$'de açık ise aynı zamanda $\mathbb{T}$'de de açıktır. Ancak bununla birlikte tersi genelde doğru değildir. $\mathbb{R}$'nin herhangi bir alt kümesi indirgenmiş topolojiye göre $\mathbb{T}$ alt uzayında açık olan fakat $\mathbb{R}$'de açık olmayan basit örnek olarak $\mathbb{T}=\mathbb{Z}$ gösterilir. Bu sebeple $\mathbb{R}-$açıklık, $\mathbb{T}-$açıklık, $\mathbb{R}-$komşuluk ve $\mathbb{T}-$komşuluk kavramlarının farklılığına dikkat etmek gerekir. Öncelikle topolojik uzaylara ilişkin kavramları tanımlayalım.

Tanım 3.1. X boş olmayan bir küme ve τ ailesi de $P(X)$ kuvvet kümesinin herhangi bir alt ailesi olsun.

T1) X ve $\varnothing$ kümeleri τ ailesine aittir.

T2) τ ailesine ait sonlu ya da sonsuz çokluktaki elemanların birleşimi yine τ ailesine aittir.

T3) τ ailesine ait sonlu elemanların kesişimi yine τ ailesine aittir.

özellikleri sağlanıyorsa τ'ya X üzerinde bir topolojik yapı veya kısaca topoloji denir. Eğer τ ailesi X üzerinde bir topoloji ise (X,τ) sıralı ikilisine topolojik uzay ve τ ailesinin her bir elemanına X kümesinde bir açık küme denir [32].

Tanım 3.2. Herhangi $A \subset \mathbb{R}$ kümesi verilsin. Eğer her $x \in A$ için $x \in (a,b) \subset A$ olacak şekilde en az bir $(a,b) \subset \mathbb{R}$ açık aralığı varsa A kümesine (p) özelliğine sahiptir denir [32].

$\mathbb{R}$ gerçek sayılar kümesinin (p) özelliğine sahip olan bütün alt kümelerinin ailesi $\mathcal{U} = \{A_i\}_{i \in I}$ ile gösterilmek üzere $\mathcal{U}$ ailesi T1), T2) ve T3) açıklar aksiyomunu sağlar.

Sonuç 3.3. $\mathcal{U}$ topolojik yapısına $\mathbb{R}$ gerçek sayılar kümesi üzerinde alışılmış topolojik yapı, $(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ uzayına $\mathbb{R}$ kümesinin alışılmış uzayı ve $\mathcal{U}$ ailesinin her elemanına da $\mathbb{R}$ kümesinin açık bir alt kümesi denir [32].

Teorem 3.4. (X, τ) topolojik uzayı ve bir $A \subset X$ alt kümesi verilsin. Bu takdirde $\tau_A = \{A \cap U \mid U \in \tau\}$ ailesi A kümesi üzerinde bir topolojidir [32].

Tanım 3.5. (X, τ) topolojik uzayı ve bir $A \subset X$ alt kümesi verilsin. Bu takdirde $\tau_A = \{A \cap U \mid U \in \tau\}$ topolojisine A kümesi üzerine indirgenen alt uzay topolojisi, (A, τ_A) topolojik uzayına da (X, τ) uzayının alt uzayı denir [32].

Tanım 3.6. (X, τ) topolojik uzayı ve bir $x_0 \in X$ noktası verilsin. x_0 noktasını içeren her $A \subset X$ açık alt kümesine x_0 noktasının bir açık komşuluğu ve x_0 noktasının bir açık komşuluğunu kapsayan her $V \subset X$ alt kümesine x_0 noktasının bir komşuluğu denir ve x_0 noktasının komşuluklar ailesi $\nu(x_0)$ ile gösterilir [32].

Topolojinin bu temel kavramları ışığında zaman skalasında açıklık kavramının detaylarını incelemek üzere $\mathbb{R}-$açıklık ve $\mathbb{T}-$açıklık arasındaki farkı belirten $\mathbb{R}-$komşuluk ve $\mathbb{T}-$komşuluk olmak üzere iki farklı gösterim kullanılmıştır.

$\mathbb{T}$ bir zaman skalası olmak üzere $t \in \mathbb{T}$ ve $\varepsilon > 0$ için t'nin $\mathbb{R}$ ve $\mathbb{T}$'deki $\varepsilon-$komşuluğu sırasıyla

$$\mathbb{R}_{\varepsilon}(t) := \{x \in \mathbb{R} : t - \varepsilon < x < t + \varepsilon\}$$

ve

$$\mathbb{T}_{\varepsilon}(t) := \{x \in \mathbb{T} : t - \varepsilon < x < t + \varepsilon\}$$

ile gösterilmiştir [6].

Zaman skalası içindeki bir aralık denildiğinde verilen zaman skalası ile gerçek bir aralığın daima kesişimi olarak anlaşılır.

Sonuç olarak $\mathbb{T}-$açık küme kavramını vermek üzere $\mathbb{T}-$komşuluk aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır.

Tanım 3.7. $\mathbb{T}$ bir zaman skalası ve $t \in \mathbb{T}$ olsun. $U \subseteq \mathbb{R}$ kümesi için $\mathbb{R}_{\varepsilon}(t) \subseteq U$ olacak şekilde bir $\varepsilon > 0$ sayısının var olması durumda U kümesi t noktasının bir $\mathbb{R}-$komşuluğu olarak adlandırılır. Diğer taraftan $\mathbb{T}_{\varepsilon}(t) \subseteq V$ olacak şekilde bir $\varepsilon > 0$ sayısı varsa $V \subset \mathbb{T}$ kümesine t'nin $\mathbb{T}-$komşuluğu adı verilir [6].

Komşuluk kavramı ileri topolojik kavramların açıklanmasını sağlar.

Tanım 3.8. A bir $\mathbb{T}$ zaman skalasının alt kümesi olsun. Her $t \in A$ için $\mathbb{T}_{\varepsilon}(t) \subseteq A$ olacak şekilde bir $\varepsilon > 0$ varsa A kümesi $\mathbb{T}$'de açıktır denir [6].

Uyarı 3.9. Herhangi bir $\mathbb{T}$ zaman skalası verildiğinde $\varnothing$ ve $\mathbb{T}$, $\mathbb{T}$'de açıktır [6].

Örnek 3.10. $\mathbb{T} := \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq x \leq 0\} \cup \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$ zaman skalası, $a > 0$ olacak şekilde herhangi bir $a \in \mathbb{T}$ ve bir $n \in \mathbb{N}$ için $a = \frac{1}{n}$ şeklinde verilsin.

$$\mathbb{T}_{\varepsilon}(a) = \{x \in \mathbb{T} : a - \varepsilon < x < a + \varepsilon\} = \{a\} \subseteq \{a\},$$

$a > 0$ olduğu için $\{a\}$ kümesi bir $\mathbb{T}-$açık kümedir. Benzer şekilde $-1 \leq b \leq c \leq 0$ için (b, c) bir $\mathbb{T}-$açık kümedir. $d < 0$ olmak üzere

$$\mathbb{T}_{\varepsilon}(-1) = \{x \in \mathbb{T} : -1 - \varepsilon < x < -1 + \varepsilon\} \subseteq [-1, d]$$

ve

$$\mathbb{T}_{\varepsilon}(d) = \{x \in \mathbb{T} : d - \varepsilon < x < d + \varepsilon\} = \{d\} \subseteq [-1, d]$$

olduğu için $[-1, d]$ aralığının bir $\mathbb{T}-$açık küme olduğu görülür. Diğer taraftan $e > 0$ olmak üzere her $e \in \mathbb{T}$ için $\mathbb{T} \setminus \{e\}$ kümesi $\mathbb{T}-$açıktır. Çünkü herhangi bir $t \in \mathbb{T} \setminus \{e\}$ yani $t \neq e$ için

$$\mathbb{T}_{\varepsilon}(t) = \{x \in \mathbb{T} : t - \varepsilon < x < t + \varepsilon\} \subseteq \mathbb{T} \setminus \{e\}$$

şeklindedir. Diğer bir yandan $a \in \mathbb{T}$ için $a \leq 0$, $\{a\}$ kümesi $\mathbb{T}-$açık değildir. Çünkü

$$\mathbb{T}_{\varepsilon}(a) = \{x \in \mathbb{T} : a - \varepsilon < x < a + \varepsilon\} \not\subseteq \{a\}$$

sağlanmaktadır [6].

Örnek 3.11. Bir $\mathbb{T} := \{x \in \mathbb{R} : -1 \le x \le 0\} \cup \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$ zaman skalası için $A = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$ kümesi $\mathbb{T}$ 'de açıktır. Bu Örnek 3.10'da her bir $n \in \mathbb{N}$ için A'nın $\mathbb{T}-$ açık olacağını gösteren $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ formundaki kümelerin keyfi bir birleşimi alınarak kolayca görülebilir. Böylece A kümesi de $\mathbb{T}-$ açık kümedir [6].

Aşağıdaki teorem $\mathbb{T}-$ açıklık ve $\mathbb{R}-$ açıklık kavramları arasında bir bağlantıyı incelemek için verilmiştir [6].

Teorem 3.12. $A \subseteq \mathbb{T}$ kümesi $\mathbb{R}$ 'de açık kümedir ancak ve ancak $A = B \cap \mathbb{T}$ olacak şekilde $\mathbb{R}$ 'de açık küme olan bir $B \subseteq \mathbb{R}$ kümesi vardır [6].

Örnek 3.13. $\mathbb{T} := \{x \in \mathbb{R} : -1 \le x \le 0\} \cup \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$ zaman skalası için Örnek 3.11'de $A = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$ kümesinin $\mathbb{T}-$açık olduğu gösterilmiştir. O halde Teorem 3.12'den $A = B \cap \mathbb{T}$ olacak şekilde $\mathbb{R}$ 'de bir B açık kümesi var olmalıdır. Örneğin her bir $n \in \mathbb{N}$ için $I_n = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{1}{2n} < x < \frac{3}{2n}\right\}$ açık kümeleri verildiğinde keyfi sayıda açık kümenin birleşimi açık küme olduğundan $B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n$ kümesi de $\mathbb{R}$ 'de açık kümedir. Ayrıca $B \cap \mathbb{T} = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} = A$ sağlanmaktadır [6].

Örnek 3.13 göz önüne alınarak tersinin doğru olmadığına tekrar vurgulanan ve daha önceden bahsedilen aşağıdaki sonuç verilmiştir.

Teorem 3.14. A, $\mathbb{T}$ 'nin bir alt kümesi olmak üzere A, $\mathbb{R}$ 'de açık küme ise o zaman $\mathbb{T}$ 'de de açıktır [6].

$\mathbb{T}$ 'nin kapalılığından dolayı $\mathbb{T}$ 'deki kapalılık kavramı $\mathbb{R}$ 'deki kapalılık kavramı ile çakışmasına rağmen $\mathbb{T}-$açıklığın tanımı aşağıdaki kapalılık kavramına doğal bir biçimde yön vermektedir [6].

Tanım 3.15. Bir $\mathbb{T}$ zaman skalasının bir A alt kümesi için $\mathbb{T} \setminus A$ kümesi $\mathbb{T}$ 'de açık küme ise A $\mathbb{T}$ 'de kapalı kümedir denir [6].

Herhangi bir $\mathbb{T}$ zaman skalası $\mathbb{R}$ gerçek sayılar kümesinin alt kümesi olduğundan alttan veya üstten sınırlandırılabilir. Sınır, en küçük üst sınır, en büyük alt sınır ve komşuluk gibi bütün teorik kavramlar $\mathbb{R}$ 'de olduğu gibi $\mathbb{T}$ 'de de mevcuttur. $\mathbb{R}-$sınırlılık, $\mathbb{T}-$sınırlılık, $\mathbb{R}-$supremum, $\mathbb{T}-$supremumun vb. yerine sınır, sınırlılık veya supremum kavramları kullanılabilir. Diğer taraftan zaman skalaları için kapalılık ve açıklık kavramlarından bahsedilerek kompaktlık, bağlantılılık ve bu kavramların zaman skalasındaki özellikleri de incelenebilir [6].

Tanım 3.16. $\mathbb{T}$ zaman skalasının bir A alt kümesi $\mathbb{T}$ 'de kapalı ve sınırlı ise $\mathbb{T}$ 'de kompakttır denir [6].

Ayrıca bir $\mathbb{T}$ zaman skalasının kompakt olması için gerek ve yeter şart $\sigma(\max \mathbb{T}) := \max \mathbb{T}$ ve $\rho(\min \mathbb{T}) := \min \mathbb{T}$ olmasıdır. Çünkü $\mathbb{T}$ 'nin üstten sınırlı olması durumu $\sigma(\max \mathbb{T}) := \max \mathbb{T}$ ve $\mathbb{T}$ 'nin alttan sınırlı olması durumu $\rho(\min \mathbb{T}) := \min \mathbb{T}$ olarak tanımlıdır.

Zaman skalalarının bağlantılılık durumunu tartışmak üzere aşağıdaki örnek incelenmiştir [6].

Örnek 3.17. Örnek 3.10 ile Örnek 3.13'te verilen

$$\mathbb{T} := \{x \in \mathbb{R} : -1 \le x \le 0\} \cup \left\{\frac{1}{n} :\ n \in \mathbb{N}\right\}$$

zaman skalasını göz önüne alalım. $\{1\}$ kümesi $\mathbb{T}$ ’de hem açık hem de kapalı kümedir. Bu yüzden bu özel $\mathbb{T}$ zaman skalası boştan farklı $\mathbb{T}-$açık kümelerin ayrık birleşimi olarak yazılabildiğinden bağlantısızdır. Diğer bir yandan $\mathbb{T}:=\mathbb{R}$ gibi bağlantılı zaman skalaları da vardır [6].

Sonuç olarak bağlantılılık açısından tüm zaman skalaları için geçerli olan bir tek kavram yoktur ve bir $\mathbb{T}$ zaman skalası bağlantılı olabilir ya da olamayabilir. Bağlantısızlık söz konusu olduğunda bu topolojik eksikliğin üstesinden gelmek için sıçrama operatörleri kullanılmaktadır [6].

BÖLÜM 4. DE GROOT DUAL TOPOLOJİSİ

J. de Groot [18,20]’de bir operatör olarak kompaktlığı incelemek için anti-uzay kavramının alt yapısını ortaya koymasının yanı sıra anti-uzay tanımını ilk olarak [19]’da yapmıştır: X ’deki tüm kompakt kümelerin herhangi sayıdaki kesişimleri ve sonlu birleşimleri kapalı olsun. Böylece X ’in tüm kompakt alt kümeleri ve X ’in kendisi de kapalı alınarak X üzerinde üretilen yeni daha kaba topolojisi ile birlikte X^* anti-uzayı oluşmaktadır. Açık bir şekilde her $x \in X$ noktası için $\{x\}$ kümesi X ’de kompakt küme olup X^*’da kapalı olacağında X^* anti-uzayı daima T_1-uzayıdır. X ’in tüm kompakt alt kümeleri ve X ’in kendisinin X^*’da kapalı küme olması X ’in X^*’da kapalı olan öz alt kümelerinin X ’de kompakt olmasını gerektirir.

$$A \text{ kümesi } X^* \text{’da kapalı} \quad \underset{\text{Öz alt küme ise}}{\overset{\longleftarrow}{\longrightarrow}} \quad A \text{ kümesi } X \text{’de kompakt}$$

X ’in kompakt alt kümelerinin X^*’ın kapalı alt kümeleri olmasının yanı sıra Teorem 4.1 göstermektedir ki X ’in kapalı alt kümeleri de X^*’ın kompakt alt kümeleridir.

$$A \text{ kümesi } X \text{’de kapalı} \quad \longrightarrow \quad A \text{ kümesi } X^* \text{’da kompakt}$$

Dolayısıyla X ’den X^*’a tanımlanacak bir özdeşlik dönüşümü, X ’in kapalı (kompakt) alt kümelerini X^*’ın kompakt (kapalı) alt kümelerine resmeder.

Eğer X topolojik uzayı kompakt uzay ise X ile X^* anti-uzayı çakışır. X topolojik uzayı kompakt olmasa dahi X^* anti-uzayı daima kompakttır.

Anti-uzay aynı zamanda ko-kompakt topolojik uzay olarak da bilinmektedir. J. de Groot'un bu kavramı ilk tanımlamasından yaklaşık 20 yıl sonra alan teorisindeki araştırmalar ile tekrar ele alınarak de Groot'un anti-uzay tanımına doymuş küme kavramı da eklenmiş ve anti-uzay artık de Groot duali olarak da anılmaya başlanmıştır [26-29]. Eğer bir küme açık kümelerin bir kesişimi ise o küme doymuş olarak adlandırılır. Dolayısıyla T_1-uzayında her küme doymuştur.

Bir (X,τ) topolojik uzayındaki tüm kompakt doymuş kümelerin ailesi kapalı kümelerin bir tabanı alınarak üretilen topoloji τ 'nun de Groot dual topolojisi olarak adlandırılmıştır ve genellikle τ^d ile gösterilmiştir.

Şimdi bir uzayın de Groot dualinin topolojik özellikleri ile ilgili teorem ve ispatlar verilecektir.

Teorem 4.1. (X,τ) bir topolojik uzay olsun. X 'in her kapalı alt kümesi X 'in de Groot duali olan X^*'da kompakttır [24].

İspat. A kümesi X uzayında kapalı alt küme olsun. $(X-C_\alpha)_{\alpha\in I}$ ailesi X^* dual uzayda A'nın herhangi bir açık örtüsü olacak şekilde X^* dual uzayından $\{C_\alpha\}_{\alpha\in I}$ kapalılar ailesi verilsin. Yani $A\subset\bigcup_{\alpha\in I}(X-C_\alpha)$ olsun. O zaman $\bigcap_{\alpha\in I}(A\cap C_\alpha)=\varnothing$ sağlanır. Eğer $A=\varnothing$ ise A kompakt kümedir. $A\neq\varnothing$ ise en az bir $\alpha_0\in I$ için $C_{\alpha_0}\cap A=\varnothing$ dır. Dolayısıyla $C_{\alpha_0}\neq X$ olup C_{α_0}, X^*'ın kapalı bir öz alt kümesidir. X^*'ın kapalı olan öz alt kümelerinin X 'de kompakt olması gerektiğinden C_{α_0}, X 'de kompakt kümedir. $\bigcap_{\alpha\in I\setminus\{\alpha_0\}}\left(C_\alpha\cap A\cap C_{\alpha_0}\right)=\varnothing$ olduğuna göre

$$C_{\alpha_0} \subset X - \bigcap_{\alpha \in I \setminus \{\alpha_0\}} \left(C_\alpha \cap A\right) = \bigcup_{\alpha \in I \setminus \{\alpha_0\}} \left(X - \left(C_\alpha \cap A\right)\right)$$

olur ve $\{X - (C_\alpha \cap A)\}_{\alpha \in I \setminus \{\alpha_0\}}$ ailesi C_{α_0} kümesinin bir açık örtüsü olup C_{α_0} kompakt küme olduğundan $C_{\alpha_0} \subset \bigcup_{k=1}^{n} \left(X - \left(C_{\alpha_k} \cap A\right)\right)$ olacak şekilde bir sonlu alt açık örtüsü vardır. Buradan $\bigcap_{k=0}^{n} \left(A \cap C_{\alpha_k}\right) = \varnothing$ sağlanır. Dolayısıyla, $A \neq \varnothing$ olması durumunda da A kümesi X^*'da kompakt bir kümedir.

Teorem 4.1'in tersinin doğru olması yani X^*'ın her kompakt alt kümesinin X'de kapalı olması için X'in T_2 uzayı ve $k-$uzay olması gerekir.

$$A \text{ kümesi } X^* \text{'da kompakt} \xrightarrow{X,\ T_2\text{-uzayı } k\text{-uzay ise}} A \text{ kümesi } X \text{'de kapalı}$$

Tanım 4.2. (X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olmak üzere her $K \subset X$ kompakt kümesi için $A \cap K$ kümesi K'da kapalı olduğunda A kapalı ise X topolojik uzayına $k-$uzay denir [24, 25].

Teorem 4.3. X topolojik uzayında S alt kümesi kompakt ve F bir kapalı küme ise $S \cap F$ kümesi S alt uzayında kompakttır [32].

İspat. F kümesi X'de kapalı olduğundan $S \cap F$ kümesi S alt uzayında kapalıdır. Kompakt bir uzayın kapalı alt kümesi kompakt olduğundan $S \cap F$ kümesi S'de kompakttır.

Teorem 4.4. Bir T_2 uzayı $k-$uzaydır ancak ve ancak X^*'ın her kompakt alt kümesi X'de kapalı kümedir [24, 25].

İspat. X, T_2 uzayı $k-$uzay olsun. A kümesi X^*'da kompakt küme ise A'nın X'de kapalı küme olduğu gösterilmelidir. A, X'de kapalı küme olmasın. X uzayı $k-$uzay olduğu için $A\cap C$ kompakt olmayacak şekilde en az bir C kompakt kümesi vardır. O halde $A\cap C$'nin sonlu arakesit özelliğine sahip kapalı alt kümelerinin $\{B_\alpha\}$ ailesi vardır öyle ki $\alpha\in I$ için $\bigcap_\alpha B_\alpha=\varnothing$ olur. B_α kapalı olduğuna göre $B_\alpha=K_\alpha\cap A\cap C$ olacak şekilde X'de K_α kapalı kümeleri vardır. $K_\alpha\cap C$ kümesi C'de kapalı kümedir. Dolayısıyla kompakt kümenin kapalı alt kümesi kompakt olduğundan $K_\alpha\cap C$ kümesi X'de kompakt kümedir. O halde $K_\alpha\cap C$ kümesi X^*'da kapalı kümedir. $B_\alpha=K_\alpha\cap A\cap C$ olduğundan $B_\alpha\subset K_\alpha\cap C$ olur. $K_\alpha\cap C$ kümesi X^*'da kapalı olduğundan $\mathrm{cl}_*(B_\alpha)\subset(K_\alpha\cap C)$ sağlanır. Burada $\mathrm{cl}_*(B_\alpha)$, B_α'nın X^*'daki kapanışını göstermektedir. Böylece $A\cap\mathrm{cl}_*(B_\alpha)\subset A\cap K_\alpha\cap C=B_\alpha$ sağlanır. Diğer taraftan $B_\alpha\subset A$ ve $B_\alpha\subset\mathrm{cl}_*(B_\alpha)$ olduğundan $B_\alpha\subset A\cap\mathrm{cl}_*(B_\alpha)$ olur. Sonuç olarak $B_\alpha=A\cap\mathrm{cl}_*(B_\alpha)$ olduğu görülür. Her bir B_α kümesi X^*'da A'nın kapalı alt kümeleridir. $\{B_\alpha\}$ ailesi X^*'da sonlu arakesit özelliğine sahip kapalı alt kümeler olmakla birlikte $\bigcap_\alpha B_\alpha=\varnothing$ olduğundan A, X^*'da kompakt küme değildir.

Kabul edelim ki X^*'ın her kompakt alt kümesi X'de kapalı küme olsun. X, T_2 uzayının $k-$uzay olduğunu gösterelim. Varsayalım bir A kümesinin X'deki her K kompakt kümesiyle arakesiti $A\cap K$ kompakt küme olsun. X, T_2 uzayı olduğundan $A\cap K$ kompakt kümesi X'de kapalı kümedir. O halde A'nın X'de kapalı küme yani hipotez gereği X^*'da kompakt olduğunu göstermek yeterlidir. Kabul edelim ki $\{A\cap C_\alpha\}$ sonlu arakesit özelliğine sahip olacak şekilde X^*'da kapalı kümelerin ailesi $\{C_\alpha\}$ olsun. Eğer her $C_\alpha=X^*$ olursa sonuç aşikârdır. Dolayısıyla en az bir $C_{\alpha_0}\neq X^*$ olsun. X^*'ın kapalı olan öz alt kümelerinin X'de kompakt olduğundan C_{α_0}, X'de kompakt kümedir. Kabulden dolayı $A\cap C_{\alpha_0}$ kümesi X'de kompakttır.

Dahası X, T_2 uzayı olduğundan her C_α, X'de kapalı kümedir. $A \cap C_{\alpha_0}$ kümesi X'de kompakt ve X'de kapalı kümelerin ailesi $\{C_\alpha\}$ verildiğinde sonlu arakesit özelliğine sahip herhangi $\{A \cap C_{\alpha_0} \cap C_\alpha\}$ ailesi için $\bigcap_\alpha (A \cap C_{\alpha_0} \cap C_\alpha) \neq \varnothing$ olur. Böylece A kümesi X^*'da kompakt kümedir.

Sonuç olarak bir X, T_2 uzayı $k-$uzay ise X^*'ın her kompakt alt kümesi X'de kapalı küme olur. Böylece aşağıdaki diyagram ile X ve X^*'ın kompakt ve kapalı kümeleri arasındaki ilişkiyi açıkça verilebilir.

$$
\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=huge]
\begin{array}{c} X \\ \text{kompakt} \end{array} \arrow[r, shift right] \arrow[d, "T_2 \text{ uzayı ise}"'] & \begin{array}{c} X^* \\ \text{kapalı} \end{array} \arrow[l, shift right, "\text{Öz alt küme ise}"'] \arrow[d] \\
\text{kapalı} \arrow[r, shift right] & \text{kompakt} \arrow[l, shift right, "k\text{-uzay ve } T_2 \text{ uzayı ise}"']
\end{tikzcd}
$$

Bir (X,τ) topolojik uzayında bir A alt kümesinin kapanışı, içi ve sınırı sırasıyla $\mathrm{cl}(A)$, $\mathrm{int}(A)$ ve $\partial(A)$ ile gösterilmek üzere A alt kümesinin X^*'daki kapanışı, içi ve sınırı ile ilgili teoremler aşağıda verilmektedir.

Teorem 4.5. (X,τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. A'nın X^* anti-uzayındaki kapanışı $\mathrm{cl}_*(A)$ olmak üzere

$$\mathrm{cl}_*(A)=\begin{cases}\mathrm{cl}(A) & , \ \mathrm{cl}(A) \text{ kümesi } X\text{'de kompakt ise}\\ X^* & , \ \mathrm{cl}(A) \text{ kümesi } X\text{'de kompakt değilse}\end{cases}$$

dır. Burada $\mathrm{cl}(A)$, A kümesinin X 'deki kapanışıdır [24].

İspat. Eğer $\mathrm{cl}(A)$ kümesi X 'de kompakt küme ise o zaman $\mathrm{cl}(A)$ kümesi X^*'da kapalıdır ve A kümesini içerir. $\mathrm{cl}_*(A)\subset\mathrm{cl}_*(\mathrm{cl}(A))=\mathrm{cl}(A)$ olur Ayrıca $\mathrm{cl}(A)\subset\mathrm{cl}_*(A)$ olduğundan $\mathrm{cl}(A)=\mathrm{cl}_*(A)$ dir. Diğer yandan kabul edelim ki $\mathrm{cl}(A)$ kümesi X 'de kompakt olmasın ancak $\mathrm{cl}_*(A)\neq X^*$ olsun. Bu yüzden A kümesi X^*'da yoğun değildir ve $A\cap U=\varnothing$ olacak şekilde boştan farklı bir U açık kümesi vardır. Yani $(X-U)$ kümesi X^*'da kapalı kümedir. Dolayısıyla $(X-U)$ kümesi X 'de kompakttır. Ayrıca $A\subset(X-U)$ olup $\mathrm{cl}(A)\subset(X-U)$ olduğu görülür. O halde $\mathrm{cl}(A)$ kümesi X 'de kompakt olur ki bu bir çelişkidir.

Sonuç 4.6. Eğer $\mathrm{cl}(A)$ kümesi X 'de kompakt küme ise X^*'da kapalı kümedir [24].

Sonuç 4.7. A kümesi X^*'da yoğun kümedir ancak ve ancak A kümesi X 'de kompakt değildir [24].

Sonuç 4.8. X^* ayrılabilir uzaydır ancak ve ancak X 'deki uzayı kapanışı kompakt olmayan sayılabilir kümeleri içerir [24].

Teorem 4.9. (X,τ) bir topolojik uzay ve $A\subset X$ olsun. A'nın X^*'daki içi $\mathrm{int}_*(A)$ olmak üzere

$$\mathrm{int}_*A=\begin{cases}\mathrm{int}(A) & , \ \mathrm{cl}(X-A) \text{ kümesi } X\text{'de kompakt ise}\\ \varnothing & , \ \mathrm{cl}(X-A) \text{ kümesi } X\text{'de kompakt değilse}\end{cases}$$

dir. Burada $\operatorname{int}(A)$, A kümesinin X 'deki içini göstermektedir [24].

İspat. $\operatorname{cl}(X-A)$, X 'de kompakt küme ise $\operatorname{cl}(X-A)$ kümesi X^*'da kapalı küme olur. O zaman $\operatorname{int}(A)=(X-\operatorname{cl}(X-A))$ kümesi de X^*'da açık kümedir. Bu yüzden $\operatorname{int}(A)\subset\operatorname{int}_*(A)$dır. Diğer taraftan $\operatorname{int}_*(A)\subset\operatorname{int}(A)$ da sağlandığından $\operatorname{int}_*(A)=\operatorname{int}(A)$ olduğu görülür. Kabul edelim ki $\operatorname{cl}(X-A)$ kompakt olmasın ancak $\operatorname{int}_*(A)\neq\varnothing$ olsun. O zaman $\operatorname{int}_*(A)\subset A$ olur ve $(X-\operatorname{int}_*(A))$ kümesi X^*'da kapalı küme olup $(X-\operatorname{int}_*(A))$, X 'de kompakt kümedir. O halde $(X-A)\subset(X-\operatorname{int}_*(A))$ olur ki bu $\operatorname{cl}(X-A)\subset(X-\operatorname{int}_*(A))$ olmasını gerektirir. Yani $\operatorname{cl}(X-A)$'da kompakt kümedir. Bu bir çelişkidir.

Sonuç 4.10. $\operatorname{cl}(X-A)$ kümesi X 'de kompakt ise $\operatorname{int}(A)$ kümesi X^*'da açıktır [24].

Teorem 4.11. (X,τ) bir topolojik uzay ve $A\subset X$ olsun. A'nın X^*'daki sınırı $\partial_*(A)$ olmak üzere

$$\partial_*(A)=\begin{cases}\operatorname{cl}(A) & , \quad \operatorname{cl}(A) \text{ kümesi } X\text{'de kompakt ise}\\ \operatorname{cl}(X-A) & , \quad \operatorname{cl}(X-A) \text{ kümesi } X\text{'de kompakt ise}\\ X^* & , \quad \text{diğer durumlarda ise}\end{cases}$$

olur [24].

İspat. Teorem 4.5'den ispat görülmektedir ve $\partial_*A=\operatorname{cl}_*(A)\cap\operatorname{cl}_*(X-A)$ dır.

Sonuç 4.12. $\partial A=\partial_*A$ olsun. Bu durumda $\operatorname{cl}(A)$ kümesi X 'de kompakttır ve $X-A$ kümesi X 'de yoğun kümedir. $\operatorname{cl}(X-A)$ kümesi X 'de kompakttır ve A kümesi X 'de yoğundur. A ve $X-A$ kümeleri X 'de yoğun kümelerdir [24].

Teorem 4.13. A kümesi X^*'da bağlantılıdır ancak ve ancak A kümesi X'de bağlantılıdır veya $\text{cl}(A)$, X'de kompakt değildir [24].

İspat. X'in topolojisi X^*'dan daha ince olduğu için A kümesi X'de bağlantılı ise X^*'da bağlantılıdır. Varsayalım $\text{cl}(A)$, X'in topolojisinde kompakt küme olmasın ancak A kümesi X^*'da bağlantılı olmasın. O zaman $A=(A\cap B)\cup(A\cap C)$, $A\cap B\neq\varnothing$, $A\cap C\neq\varnothing$ ve $A\cap B\cap C=\varnothing$ olacak şekilde X^*'da B ve C kapalı kümeleri vardır ve hem $B\neq X^*$ hem de $C\neq X^*$ dır. O halde B ve C kümeleri X'de kompakt kümeler olup Teorem 4.5'den $B=\text{cl}_*(B)=\text{cl}(B)$ ve $C=\text{cl}_*(C)=\text{cl}(C)$ olur. Böylece $\text{cl}(A)\subset(\text{cl}(A)\cap B)\cup(\text{cl}(A)\cap C)$'dir. Buradan $\text{cl}(A)$, X'de kompakt küme olur. Ancak bu bir çelişkidir. O halde A kümesi X^*'da bağlantılıdır.

Kabul edelim ki A kümesi X^*'da bağlantılı olsun, ancak $\text{cl}(A)$ kümesi X'de kompakt küme olsun ve A kümesi X'de bağlantılı olmasın. O zaman $A=(A\cap B)\cup(A\cap C)$, $A\cap B\neq\varnothing$, $A\cap C\neq\varnothing$ ve $A\cap B\cap C=\varnothing$ olacak şekilde X'de B ve C açık kümeleri vardır. Teorem 4.14'den $A\cap B$ ve $A\cap C$ kümeleri $\hat{A}$'da açık kümeler olur o halde $\hat{A}$, X^*'dan A kümesi üzerine indirgenmiş alt uzay topolojisine sahiptir. $\text{cl}(A)$ kümesi X'de kompakt olmadığında $\text{cl}_*(A)\neq X^*$ dır. Böylece A kümesi X^*'da bağlantılı olmaz ki bu bir çelişkidir.

Kabul edelim ki X'in bir alt kümesi A olmak üzere X^*'dan A'ya indirgenmiş relatif topoloji ile birlikte A kümesi $\hat{A}$ ile gösterilsin. Diğer taraftan A'nın de Groot duali de A^* ile gösterilsin. de Groot dual topolojisinin tanımının bir sonucu olarak $A^*=\hat{A}=A$ olması için gerek ve yeter şart A kümesi X'in kompakt bir alt kümesi olmasıdır.

Teorem 4.14. A üzerindeki topoloji $\hat{A}$'nın topolojisinden daha incedir ve dolayısıyla A^* üzerindeki topolojiden de daha incedir. [24].

İspat. Kabul edelim ki C kümesi A'nın öz alt kümesi olsun. C kümesi A^*'da kapalı kümedir ancak ve ancak C kümesi X'de kompakttır. Diğer taraftan C kümesi $\hat{A}$'da kapalı kümedir ancak ve ancak $C = A \cap B$ olacak şekilde X'de B kompakt kümesi vardır. Sonuç olarak C kümesi A^*'da kapalı küme ise C kümesi $\hat{A}$'da kapalı kümedir ve C kümesi $\hat{A}$'da kapalı küme ise C kümesi A'da kapalı kümedir.

Teorem 4.15. $A \subset X$ olsun. $A^* = \hat{A}$ ise A kümesi X'de kapalı kümedir [24].

İspat. Kabul edelim ki C kümesi $\hat{A}$'nın kapalı öz alt kümesi olsun. $C = A \cap B$ olacak şekilde X^*'da B kapalı öz alt kümesi vardır. A ve B kümelerinin ikisi de X'de kapalı küme olduğundan ve B kümesi X'de kompakt olduğundan $C = A \cap B$ kümesi X'de kompakt kümedir ve dolayısıyla A^*'da kapalı kümedir. Diğer taraftan $\hat{A}$ üzerindeki topoloji A^*'nın topolojisinden daha incedir

BÖLÜM 5. ZAMAN SKALASININ DE GROOT DUALİ

F, $\mathbb{R}$ gerçek sayısının alışılmış topolojik uzayının kapalı kümelerinin bir tabanı olsun ve F^d, $\mathbb{R}$ 'deki tüm kompakt kümelerin ailesi olsun. Bu yüzden F^d, $\mathbb{R}^*$ ile gösterilen de Groot dual uzayının kapalı kümelerinin bir tabanıdır. $\mathbb{R}$ alışılmış topolojik uzayının kompakt olmadığı ve T_2-uzay olduğu iyi bilinir. Ayrıca birinci sayılabilirlik aksiyomunu sağlayan topolojik uzay bir $k-$uzay olduğundan $\mathbb{R}$ alışılmış topolojik uzayı $k-$uzayıdır. Diğer taraftan $\mathbb{R}^*$, kompakt, Hausdorff olmayan bir T_1-uzayıdır [19].

Bölüm 4'de verilen bir topolojik uzayın ve anti-uzayının kompakt ve kapalı alt kümeleri arasındaki ilişkiyi veren diyagram göz önüne alındığında $\mathbb{R}$ ve $\mathbb{R}^*$'ın kompakt ve kapalı alt kümeleri arasındaki ilişki aşağıda şekildedir.

$$\begin{tikzcd}
\begin{array}{c}\mathbb{R}\text{ 'de}\\ \text{Kompakt alt küme}\end{array} \arrow[r, shift right] \arrow[d] & \begin{array}{c}\mathbb{R}^*\text{ 'da}\\ \text{Kapalı alt küme}\end{array} \arrow[l, shift right, "\text{Öz alt küme ise}"'] \arrow[d] \\
\text{Kapalı alt küme} \arrow[r, shift right] & \text{Kompakt alt küme} \arrow[l, shift right]
\end{tikzcd}$$

$\mathbb{R}$ ’de kapalı alt kümelerin hiperuzayı

$$\mathrm{CL}(\mathbb{R}) = \{\mathbb{T} \subset \mathbb{R} \mid \mathbb{T} \neq \varnothing \text{ ve } \mathbb{T}, \mathbb{R}\text{'nin kapalı alt kümesi}\}$$

olsun. Zaman skalası $\mathbb{R}$ gerçek sayılar kümesinin boştan farklı keyfi kapalı alt kümesi olarak tanımlandığı için herhangi bir $\mathbb{T} \in \mathrm{CL}(\mathbb{R})$ alt kümesi bir zaman skalası (veya ölçüm zinciri) olur [16,20]. Böylece her bir zaman skalası $\mathbb{R}^*$’da kompakttır. Bir zaman skalası $\mathbb{R}$ ’de daima sonlu olması gerekmez. Ancak bununla birlikte $\mathbb{R}^*$’da kompaktlık bakımından sonludur.

$\mathbb{R}^*$ uzayının kompakt alt kümeleri $\mathbb{R}$ ’de kapalı kümeler olduklarından $\mathbb{R}^*$ her bir sınırlı zaman skalası üzerinde $\mathbb{R}$ ’nin alışılmış topolojisine sahiptir. Diğer yandan sınırlı olmayan bir zaman skalasının topolojik özellikleri de Groot dual topolojisine göre farklıdır.

Bu bölümde bir $\mathbb{T}$ zaman skalasının $\mathbb{R}^*$’daki kapanışı, içi, sınırı, bağlantılılığı üzerindeki alt uzay topolojisi incelenerek elde edilen sonuçlar bilinen zaman skalası örnekleri için yorumlanmıştır.

Teorem 5.1. $\mathbb{T}$ bir zaman skalası olsun. O halde

$$\mathrm{cl}_*\mathbb{T} = \begin{cases} \mathbb{T} & \text{, eğer } \sigma(\max\mathbb{T}) = \max\mathbb{T} \text{ ve } \rho(\min\mathbb{T}) = \min\mathbb{T} \text{ ise,} \\ \mathbb{R}^* & \text{, eğer } \sigma(\max\mathbb{T}) \neq \max\mathbb{T} \text{ veya } \rho(\min\mathbb{T}) \neq \min\mathbb{T} \text{ ise} \end{cases}$$

dır. Bundan $\mathrm{cl}_*\mathbb{T}$, $\mathbb{T}$ ’nin $\mathbb{R}^*$’daki kapanışını göstermektedir ve σ, ρ sıçrama operatörleridir.

İspat. Eğer $\sigma(\max\mathbb{T}) = \max\mathbb{T}$ ve $\rho(\min\mathbb{T}) := \min\mathbb{T}$ ise o halde $\mathbb{T}$ zaman skalası sınırlıdır yani $\mathbb{T}$, $\mathbb{R}$ ’de kompakttır. Bu nedenle $\mathbb{T}$, $\mathbb{R}^*$’da kapalıdır. Dolayısıyla

$\mathrm{cl}_*\mathbb{T} = \mathbb{T}$'dir. Kabul edelim ki $\sigma(\max\mathbb{T}) \neq \max\mathbb{T}$ veya $\rho(\min\mathbb{T}) \neq \min\mathbb{T}$ iken $\mathrm{cl}_*\mathbb{T} \neq \mathbb{R}^*$ olsun. O halde $\mathbb{T}$, $\mathbb{R}^*$'da yoğun değildir, yani $\mathbb{T} \cap U = \varnothing$ olacak şekilde $\mathbb{R}^*$'da boştan farklı bir U açık kümesi vardır. Bu yüzden $\mathbb{R} \setminus U$, $\mathbb{R}^*$'ın kapalı bir öz alt kümesi olur. Dolayısıyla $\mathbb{R} \setminus U$, $\mathbb{R}$'de kompakttır. Bu $\mathbb{R} \setminus U$'nun $\mathbb{R}^*$'da sınırlı olduğu anlamına gelir. Hâlbuki $\sigma(\max\mathbb{T}) \neq \max\mathbb{T}$ veya $\rho(\min\mathbb{T}) \neq \min\mathbb{T}$ iken $\mathbb{T}$ zaman skalası sınırlı değildir ve bu $\mathbb{T} \subset \mathbb{R} \setminus U$ olması ile çelişir. Sonuç olarak $\sigma(\max\mathbb{T}) \neq \max\mathbb{T}$ veya $\rho(\min\mathbb{T}) \neq \min\mathbb{T}$ iken $\mathrm{cl}_*\mathbb{T} = \mathbb{R}^*$ olur.

Sonuç 5.2. Eğer bir zaman skalası, $\mathbb{R}$'de sınırlı değilse o halde zaman skalası de Groot dual topolojisine göre yoğundur.

Örnek 5.3. $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesi bir zaman skalası olup $\mathbb{R}$'de hiçbir yerde yoğun değildir ancak $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesi sınırlı olmadığından $\mathbb{R}^*$'da yoğundur. Ayrıca bu $\mathbb{R}^*$'ın ayrılabilir olduğunu gösterir. Bir diğer zaman skalası olan Cantor kümesi $\mathbb{R}$'de sınırlı olduğu için $\mathbb{R}$ ve $\mathbb{R}^*$'da hiçbir yerde yoğun değildir.

Teorem 5.4. $\mathbb{T}$ bir zaman skalası olsun. O halde

$$\mathrm{int}_*\mathbb{T} = \begin{cases} \mathrm{int}\,\mathbb{T}, & \text{eğer } \sigma\big(\max\big(\mathrm{cl}(\mathbb{R}\setminus\mathbb{T})\big)\big) = \max\big(\mathrm{cl}(\mathbb{R}\setminus\mathbb{T})\big) \text{ ve } \rho\big(\min\big(\mathrm{cl}(\mathbb{R}\setminus\mathbb{T})\big)\big) = \min\big(\mathrm{cl}(\mathbb{R}\setminus\mathbb{T})\big) \\ \varnothing, & \text{eğer } \sigma\big(\max(\mathbb{R}\setminus\mathbb{T})\big) \neq \max(\mathbb{R}\setminus\mathbb{T}) \text{ veya } \rho\big(\min(\mathbb{R}\setminus\mathbb{T})\big) \neq \min(\mathbb{R}\setminus\mathbb{T}) \end{cases}$$

dir. Burada $\mathrm{int}_*\mathbb{T}$, $\mathbb{T}$'nin $\mathbb{R}^*$'daki içini göstermektedir ve σ, ρ sıçrama operatörleridir.

İspat. Varsayalım

$$\sigma\big(\max\big(\mathrm{cl}(\mathbb{R}\setminus\mathbb{T})\big)\big) = \max\big(\mathrm{cl}(\mathbb{R}\setminus\mathbb{T})\big) \text{ ve } \rho\big(\min\big(\mathrm{cl}(\mathbb{R}\setminus\mathbb{T})\big)\big) = \min\big(\mathrm{cl}(\mathbb{R}\setminus\mathbb{T})\big)$$

olsun. Bu durumda $\mathrm{cl}(\mathbb{R}\setminus\mathbb{T})$ sınırlıdır. Ayrıca $\mathrm{cl}(\mathbb{R}\setminus\mathbb{T})$ kümesi $\mathbb{R}$'de kapalı küme olduğu için $\mathbb{R}$'de kompakttır. Böylece $\mathbb{R}^*$'da kapalıdır. Bu nedenle

$\mathbb{R}\setminus \mathrm{cl}(\mathbb{R}\setminus\mathbb{T})=\mathrm{int}\,\mathbb{T}$ olup $\mathbb{R}^*$'da açık bir kümedir. Sonuç olarak $\mathrm{int}_*\mathbb{T}=\mathrm{int}\,\mathbb{T}$ sağlanır. Diğer taraftan varsayalım $\sigma\big(\max\big(\mathrm{cl}(\mathbb{R}\setminus\mathbb{T})\big)\big)\neq\max\big(\mathrm{cl}(\mathbb{R}\setminus\mathbb{T})\big)$ veya $\rho\big(\min\big(\mathrm{cl}(\mathbb{R}\setminus\mathbb{T})\big)\big)\neq\min\big(\mathrm{cl}(\mathbb{R}\setminus\mathbb{T})\big)$ iken $\mathrm{int}_*\mathbb{T}$, $\mathbb{R}^*$'ın boştan farklı bir alt kümesi olsun. O halde $\mathbb{R}\setminus\mathrm{int}_*\mathbb{T}\neq\mathbb{R}$ olması $\mathbb{R}\setminus\mathrm{int}_*\mathbb{T}$'nin $\mathbb{R}^*$'ın kapalı bir öz alt kümesi olduğunu gösterir. Dolayısıyla $\mathbb{R}\setminus\mathrm{int}_*\mathbb{T}$, $\mathbb{R}$'de kompakttır yani bu küme $\mathbb{R}$'de sınırlıdır. Ayrıca $\sigma\big(\max(\mathbb{R}\setminus\mathbb{T})\big)\neq\max(\mathbb{R}\setminus\mathbb{T})$ veya $\rho\big(\min(\mathbb{R}\setminus\mathbb{T})\big)\neq\min(\mathbb{R}\setminus\mathbb{T})$ olması $\mathbb{R}\setminus\mathbb{T}$'nin sınırlı olmadığını göstermektedir. Ancak $\mathbb{R}\setminus\mathbb{T}\subset\mathbb{R}\setminus\mathrm{int}_*\mathbb{T}$ iken $\mathbb{R}\setminus\mathrm{int}_*\mathbb{T}$ sınırlı olması bir çelişkidir.

Sonuç 5.5. Eğer zaman skalasının tümleyeninin kapanışı $\mathbb{R}$'de sınırlı değil ise de Groot dual topolojisine göre hiçbir iç noktaya sahip değildir.

Örnek 5.6. $\mathbb{T}=[0,\infty)$ bir zaman skalasıdır. $(-\infty,0]$ kümesi $\mathbb{R}$'de sınırlı olmadığı için $\mathbb{T}$ zaman skalası $\mathbb{R}^*$'da hiçbir iç noktaya sahip değildir.

Teorem 5.7. $\mathbb{T}$ bir zaman skalası olsun. O halde

$$\partial_*\mathbb{T}=\begin{cases}\mathbb{T} & , \quad \mathbb{T},\ \mathbb{R}\text{'de sınırlı ise,}\\ \mathrm{cl}(\mathbb{R}\setminus\mathbb{T}) & , \quad \mathrm{cl}(\mathbb{R}\setminus\mathbb{T}),\ \mathbb{R}\text{'de sınırlı ise,}\\ \mathbb{R}^* & , \quad \text{diğer durumlarda}\end{cases}$$

dir. Burada $\partial_*\mathbb{T}$, $\mathbb{T}$'nin $\mathbb{R}^*$'daki sınırını göstermektedir.

İspat. $\mathbb{T}$ zaman skalası, $\mathbb{R}$'de sınırlı olsun. Teorem 5.1'e göre $\mathrm{cl}_*\mathbb{T}=\mathbb{T}$'dir. Ayrıca $\mathbb{R}\setminus\mathbb{T}$ sınırlı olmadığı için $\mathrm{cl}_*(\mathbb{R}\setminus\mathbb{T})=\mathbb{R}^*$ olur. Bu nedenle $\partial_*\mathbb{T}=\mathrm{cl}_*\mathbb{T}\cap\mathrm{cl}_*(\mathbb{R}\setminus\mathbb{T})=\mathbb{T}$ bulunur. Eğer $\mathrm{cl}(\mathbb{R}\setminus\mathbb{T})=\mathbb{S}$ olarak gösterilirse bu durumda $\mathbb{S}$ kümesi $\mathbb{R}$'de sınırlı bir zaman skalasıdır. Benzer şekilde Teorem 5.1

yardımıyla $\mathbb{S}$, $\mathbb{R}$ 'de sınırlı olduğunda $\mathrm{cl}_*(\mathbb{S})=\mathbb{S}$ ve $\mathrm{cl}_*(\mathbb{R}\setminus\mathbb{S})=\mathbb{R}^*$ dır. $\partial_*\mathbb{T}=\mathbb{S}$ yani $\partial_*\mathbb{T}=\mathrm{cl}(\mathbb{R}\setminus\mathbb{T})$ olduğunu görmek kolaydır. Eğer $\mathbb{T}$ zaman skalası ve onun tümleyeni $\mathbb{R}$ 'de sınırlı olmayan kümelerse o zaman Teorem 5.1 ve Teorem 5.4'ün bir sonucu olarak $\partial_*\mathbb{T}=\mathrm{cl}_*\mathbb{T}\setminus\mathrm{int}_*(\mathbb{T})=\mathbb{R}$ olduğu görülür.

Sonuç 5.8. Eğer $\partial\mathbb{T}=\partial_*\mathbb{T}$ ise o halde $\mathbb{T}$ zaman skalası $\mathbb{R}$ 'de sınırlıdır ve $\mathbb{R}\setminus\mathbb{T}$ kümesi $\mathbb{R}$ 'de yoğundur.

Örnek 5.9. Cantor kümesi sınırlı olan bir zaman skalasıdır ve tümleyeni yoğundur. O halde sınırı $\mathbb{R}$ ve $\mathbb{R}^*$ 'da aynıdır.

Teorem 5.10. Bir zaman skalasının de Groot dual topolojisi gerçek sayıların alışılmış topolojisinin de Groot dual topolojisinden zaman skalasına indirgenmiş de Groot dual topolojisinden daha incedir.

İspat. $\mathbb{T}^*$, $\mathbb{T}$ alt uzayının dual topolojik uzayı olsun öyle ki $\mathbb{T}$ alt uzayı $\mathbb{R}$ üzerindeki alışılmış topolojiden indirgenmiş alt uzay topolojisine sahiptir. $\hat{\mathbb{T}}$ kümesi de $\mathbb{R}^*$ üzerindeki topolojiden indirgenmiş alt uzay topolojisine sahip bir alt uzayı olsun. A, $\hat{\mathbb{T}}$ 'nın kapalı bir öz alt kümesi olsun. O zaman $A=\mathbb{T}\cap F$ olacak şekilde $\mathbb{R}^*$'da kapalı bir F öz alt kümesi vardır. O halde F, $\mathbb{R}$ 'de kompakttır. Böylece $A=\mathbb{T}\cap F$ kümesi $\mathbb{R}$ 'de kompakttır. Bu A 'nın $\mathbb{T}^*$'da kapalı olduğunu gösterir.

Sonuç 5.11. $\mathbb{T}$ zaman skalası sınırlı ise $\mathbb{T}^*=\hat{\mathbb{T}}$ olur.

İspat. $\mathbb{T}$ zaman skalası sınırlı iken kompakt olduğundan $\mathbb{T}^*$ ve $\hat{\mathbb{T}}$ 'nın kapalı alt kümeleri çakışır.

Örnek 5.12. $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ zaman skalasını göz önüne alalım. $\mathbb{Z}$ üzerindeki alt uzay topolojisi ayrık topolojidir. O halde $\mathbb{Z}^*$'ın de Groot dual topolojisi tamsayılar kümesi üzerinde sonlu tümleyenler topolojisidir.

Teorem 5.13. Eğer $\mathbb{R}$'de bir $\mathbb{T}$ zaman skalası için $\sigma(\max \mathbb{T}) \neq \max \mathbb{T}$ veya $\rho(\min \mathbb{T}) \neq \min \mathbb{T}$ ise o halde $\mathbb{T}$, $\mathbb{R}^*$'da bağlantılıdır.

İspat. $\sigma(\max \mathbb{T}) \neq \max \mathbb{T}$ veya $\rho(\min \mathbb{T}) \neq \min \mathbb{T}$ olsun, yani $\mathbb{T}$, $\mathbb{R}$'de sınırlı olmasın. Ancak varsayalım $\mathbb{T}$, $\mathbb{R}^*$'da bağlantılı olmasın. O zaman $(F \cap \mathbb{T}) \cup (K \cap \mathbb{T}) = \mathbb{T}$, $(F \cap \mathbb{T}) \neq \varnothing$ ve $(K \cap \mathbb{T}) \neq \varnothing$ olacak şekilde $\mathbb{R}^*$'da F ve K kapalı kümeleri vardır. F ve K kümeleri $\mathbb{R}^*$'ın kapalı öz alt kümeleri oldukları için $\mathbb{R}$'de kompakt yani sınırlı kümedirler ve $\mathbb{T} \subset F \cup K$ olduğundan bu $\mathbb{T}$'nin sınırsızlığı ile çelişir.

Diğer bir yandan eğer $\mathbb{T}$, $\mathbb{R}$'de bir aralık ise o halde $\mathbb{R}$'de bağlantılıdır. Ayrıca $\mathbb{R}$'nin alışılmış topolojisi de Groot dualinden daha ince olduğu için $\mathbb{T}$ zaman skalası $\mathbb{R}^*$'da da bağlantılıdır.

Sonuç 5.14. Eğer bir $\mathbb{T}$ zaman skalası bir aralık veya $\mathbb{R}$'de sınırlı değilse o zaman $\mathbb{R}^*$'da bağlantılıdır.

BÖLÜM 6. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmanın orijinal kısmı olan Bölüm 5'te zaman skalasının topolojisi üzerine çalışmış ve $\mathbb{R}$'den zaman skalası üzerine indirgenen Öklid (alışılmış) topolojisi yerine de Groot dual topolojisi alınarak zaman skalasının topolojik özellikleri incelenmiştir. J. de Groot tanımladığı dual uzayın topolojisinin orijinal topolojiden daha kaba olmasının yanı sıra anti-uzayın kompakt, süper bağlantılı bir T_1-uzayı olduğunu ancak Hausdorff uzayı olmadığını ifade etmiştir. Ayrıca gerçek sayılar kümesi $\mathbb{R}$'nin anti-uzayı olarak tanımladığı $\mathbb{R}^*$'ın tüm kapalı sınırlı alt kümeleri üzerinde aynı topolojiye sahip olduğunu ve $\mathbb{R}$'nin kompakt olmamasına rağmen $\mathbb{R}^*$'ın kompakt olduğunu ifade etmiştir. $\mathbb{R}$ zaman olarak düşünüldüğünde zamanın sonsuz olduğunu fakat $\mathbb{R}^*$'ın kompaktlık bakımından sonlu olduğunu söyleyerek potansiyelimiz var olmasına rağmen gerçek anlamda sonsuzluk yoktur, şeklinde yorumlamıştır. Buradan yola çıkarak sürekli ve sonsuz zamanı gösteren $\mathbb{R}$ yerine Bölüm 2'de tanımlanmış olan zaman skalası kavramı göz önüne alınmış ve Bölüm 4'de açıklanan de Groot dual topolojisine göre zaman skalası incelenmiştir.

Bu çalışma göz önüne alınarak yapılabilecek daha ileri bir çalışmada $f:\mathbb{T}\rightarrow\mathbb{R}$ olarak verilen fonksiyona karşılık gelecek $f^*:\mathbb{T}^*\rightarrow\mathbb{R}^*$ fonksiyonu tanımlanarak sağ yoğun sürekli ($rd-$sürekli) ve parçalı sağ yoğun sürekli ($prd-$sürekli) fonksiyonların de Groot dual uzayındaki özellikleri incelenip bu dönüşümler arasındaki ilişkiler araştırılabilir.

KAYNAKLAR

[1] Hilger, S., Ein Maßkettenkalkul mit Anwendung auf Zentrumsmannigfaltigkeiten, PhD thesis, Universität Würzburg, Würzburg, 1988.

[2] Hilger, S., Analysis on Measure Chains—a Unified Approach to Continuous and Discrete Calculus, Results Math., 18 (1-2), 18–56, 1990.

[3] Aulbach, B., Hilger S., A Unified Approach to Continuous and Discrete Dynamics, Qualitative Theory of Differential Equations (Szeged, 1988), Colloq. Math. Soc. Janos. Bolyai. North Holland, Amsterdam, 37–56, 1990.

[4] Bohner, M., Peterson, A., Dynamic Equations on Time Scale, An Introduction With Applications, Birkhäuser, Boston, 2001.

[5] Bohner, M., Peterson, A., Advances in dynamic equations on time scales. Birkhäuser, Boston, 2003.

[6] Gray, T.V., Opial's Inequality on Time Scales and an Application, Georgia Southern University, Electronic Theses & Dissertations, Paper 652, 2007.

[7] Guseinov, G.Sh., Integration on Time Scale, J. Math. Anal. Appl., 285, 107-127, 2003.

[8] Kaymakçalan, B., Leela, S., A Survey of Dynamic Systems on Time Scales, Nonlinear Times Digest, (1), 37-60, 1994.

[9] Agarwal, R.P., Bohner, M., Basic Calculus on Time Scale and Some of its Applications, Results Math., 35 (1-2), 3–22, 1999.

[10] Kaymakçalan, B., A Survey of Dynamic Systems on Measure Chains. Funct. Differ. Equ., 6 (1-2), 125–135, 1999.

[11] Lakshmikantham, V., Sivasundaram, S., Kaymakçalan, B., Dynamic Systems on Measure Chains, Mathematics and its Applications, Kluwer Academic Publisher, 370, 1996.

[12] Oberste-Vorth, R., The Fell Topology on the Space of Time Scale for Dynamic Equations, Adv. Dyn. Syst. Appl., 3 (1), 177–184, 2008.

[13] Felix, H., Grundzüge der Mengenlehre, Chelsea Publishing Company, New York, N.Y., 1949.

[14] Vietoris, L., Bereiche zweiter Ordnung, Monatsh. Math. Phys., 32 (1), 258-280, 1922.Palermo, 19 (2), 89–96, 1970.

[15] Fell, J.M.G., A Hausdorff Topology for the Closed Subsets of a Locally Compact Non-Hausdorff Space, Proc. Amer. Math. Soc., 13, 472-476, 1962.

[16] Esty, N., Hilger, S., Convergence of Time Scales Under the Fell Topology, J. Difference Equ. Appl., 15 (10), 1011–1020, 2009.

[17] Lawrence, Bonita A., Oberste-Vorth, R., Topological Structures for Studying Dynamic Equations on Time Scales. Differential and Difference Equations With Applications, Springer, New York, 47, 543–549, 2013.

[18] de Groot, J., Strecker, G.E., Wattel, E., The Compactness Operator in General Topology, General Topology and its Relations to Modern Analysis and Algebra, II (Proc. Second Prague Topological Sympos., 1966) Academia, Prague, 161–163, 1967.

[19] de Groot, J., An Isomorphism Principle in General Topology, Bull. Amer. Math. Soc., 73, 465–467, 1967.

[20] de Groot, J., Herrlich, H., Strecker, G.E., Wattel, E., Compactness as an Operator, Compositio Math., 21 (4), 349–375, 1969.

[21] Aarts, J.M.E., de Groot, J., McDowell, R.H., Cocompactness. Nieuw Arch. Wisk., 18 (3), 2–15, 1970.

[22] Strecker, G.E., Wattel, E., Herrlich, H., de Groot, J., Strengthening Alexander's Subbase Theorem. Duke Math. J., 35, 671–676, 1968.

[23] Wattle, E., The Compactness Operator in Set Theory and Topology, Math. Centre. Tracts., 1968.

[24] Liden, N., $k-$Spaces, Their Anti-Spaces and Related Maps, Washington Uni., Phd Thesis, 1973.

[25] Liden, N., $k-$Spaces, Their Anti-Spaces and Related Maps, Pasific. J. Math., 2, 505-514, 1975.

[26] Kopperman, R., Asymmetry and Duality in Topology, Topology Appl., 66 (1), 1–39, 1995.

[27] Kovár, M.M., At Most 4 Topologies can Arise from Iterating the de Groot Dual, Topology Appl., 130 (2), 175–182, 2003.

[28] Kovár, M.M., On Iterated de Groot Dualizations of Topological Spaces, Topology Appl., 146 (147), 83–89, 2005.

[29] Kovár, M.M., A New Causal Topology and Why the Universe is Co-Compact, arXiv:1112.0817 [math-ph], 2013.

[30] Lawson, J.D., Mislove, M., Problems in Domain Theory and Topology, In: J. Van Mill, G.M. Reed (Eds.), Open Problems in Topology, North-Holland, Amsterdam, 349–372, 1990.

[31] Yokoyama, T., A Counterexample for Some Problem for de Groot Dual iterations. Topology Appl., 156 (13), 2224–2225, 2009.

[32] Yüksel, Ş., Genel Topoloji, Eğitim Yayınevi, 8. Baskı, Temmuz 2015.

ÖZGEÇMİŞ

Hilal Polat, 26.08.1991 tarihinde İstanbul'da doğdu. İlk ve orta öğrenimini İstanbul'da tamamladı. 2010 yılında Sakarya Üniversitesi, Matematik Bölümünde başladığı Lisans öğrenimini 2014 yılında tamamladı. Aynı yılın sonunda Sakarya Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Topoloji Bilim Dalında Yüksek Lisans eğitimine başladı.