T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

# KUVVETLİ $k-$UZAYLARIN ANTİ-UZAYLARI VE İLGİLİ DÖNÜŞÜMLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Ayşenur TÜRKOĞLU

| | | |
|---|---|---|
| **Enstitü Anabilim Dalı** | **:** | **MATEMATİK** |
| **Enstitü Bilim Dalı** | **:** | **TOPOLOJİ** |
| **Tez Danışmanı** | **:** | **Doç. Dr. Soley ERSOY** |

Mayıs 2017

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

# KUVVETLİ $k$–UZAYLARIN ANTİ-UZAYLARI VE İLGİLİ DÖNÜŞÜMLER

## YÜKSEK LİSANS TEZİ

**Ayşenur TÜRKOĞLU**

| | | |
|---|---|---|
| **Enstitü Anabilim Dalı** | **:** | **MATEMATİK** |
| **Enstitü Bilim Dalı** | **:** | **TOPOLOJİ** |

**Bu tez 05/05/2017 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği ile kabul edilmiştir.**

| | | |
|---|---|---|
| **Doç. Dr. İsmet ALTINTAŞ**<br>**Başkan** | **Doç. Dr. Emrah Evren KARA**<br>**Üye** | **Doç. Dr. Soley ERSOY**<br>**Üye** |

**BEYAN**

Tez içindeki tüm verilerin akademik kurallar çerçevesinde tarafımdan elde edildiğini, görsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçların akademik ve etik kurallara uygun şekilde sunulduğunu, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezde yer alan verilerin bu üniversite veya başka bir üniversitede herhangi bir tez çalışmasında kullanılmadığını beyan ederim.

Ayşenur TÜRKOĞLU

05.05.2017

# TEŞEKKÜR

Yüksek lisans danışmanlığımı üstlenip, bilgi ve tecrübesiyle destek veren, çalışmamın her safhasında yardımını esirgemeyen sayın hocam Doç. Dr. Soley ERSOY'a şükran ve saygılarımı sunarım.

Desteğini her zaman yanımda hissettiğim değerli aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

# İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR........................................................................................................ i
İÇİNDEKİLER.................................................................................................... ii
SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ.................................................... iii
ÖZET.................................................................................................................. v
SUMMARY........................................................................................................ vi

BÖLÜM 1.
GİRİŞ................................................................................................................... 1

BÖLÜM 2.
ÖN -TOPOLOJİK UZAYLARDA TEMEL KAVRAMLAR………………… 5

BÖLÜM 3.
$k-$ UZAYLAR VE ANTİ-UZAYLARI……………………………………… 16

BÖLÜM 4.
KUVVETLİ $k-$ UZAYLAR VE ANTİ-UZAYLARI………………………… 33

BÖLÜM 5.
SONUÇLAR VE ÖNERİLER........................................................................... 44

KAYNAKLAR.................................................................................................... 45
ÖZGEÇMİŞ........................................................................................................ 48

## SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

| | |
|---|---|
| $A^*$ | : $A$ alt uzayının anti-uzayı |
| $\hat{A}$ | : $X$ topolojik uzayının $X^*$ anti uzayının alt uzayı |
| $\mathrm{cl}(A)$ | : $A$ kümesinin $X$ topolojik uzayındaki kapanışı |
| $\mathrm{cl}_*(A)$ | : $A$ kümesinin $X^*$ anti uzayındaki kapanışı |
| $\mathrm{cl}_{p\tau}(A)$ | : $A$ kümesinin ön-kapanışı |
| $D(A)$ | : $A$ kümesinin türev kümesi |
| $D_{p\tau}(A)$ | : $A$ kümesinin ön türev kümesi |
| $P(A)$ | : $A$ kümesinin kuvvet kümesi |
| GT | : Genelleştirilmiş topoloji |
| GTS | : Genelleştirilmiş topolojik uzay |
| $\mathrm{int}(A)$ | : $A$ kümesinin $X$ topolojik uzayındaki içi |
| $\mathrm{int}_{p\tau}(A)$ | : $A$ kümesinin ön-içi |
| $\mathrm{int}_* A$ | : $A$ kümesinin $X^*$ anti uzayındaki içi |
| $p\kappa$ | : Ön kapalı kümelerin ailesi |
| $p\tau$ | : Ön açık kümelerin ailesi |

| | |
|---|---|
| $pKC$ | : Ön $KC$ uzayı |
| $\mathbb{R}$ | : Reel sayılar kümesi |
| $\mathbb{Q}$ | : Rasyonel sayılar kümesi |
| $(X,\tau)$ | : Topolojik uzayı |
| $X^*$ | : $X$ topolojik uzayının anti uzayı |
| $\partial A$ | : $A$ kümesinin $X$ topolojik uzayındaki sınırı |
| $\partial_* A$ | : $A$ kümesinin $X^*$ anti uzayındaki sınırı |

# ÖZET


Anahtar kelimeler: Kuvvetli $k$-uzay, $pKC$ uzayı, kuvvetli kompakt dönüşüm, kuvvetli has dönüşüm, ön-kararsız dönüşüm, ön-kapalı dönüşüm, kuvvetli mükemmel dönüşüm.

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm tez konusuna ilişkin ayrıntılı literatür bilgisi içermiştir. İkinci bölümde ön-açık (ön-kapalı) küme, supratopolojik uzay, bir kümenin ön-içi, ön-kapanışı, ön-limit noktası, ön-komşuluğu ve ön-kararsız, ön-sürekli, ön-kararlı, kuvvetli ön-sürekli fonksiyonlar, kuvvetli kompakt küme ve kuvvetli kompakt uzay tanımları verilmiştir. Üçüncü bölümde $k$-uzay ve anti-uzay kavramları tanıtılmış, anti-uzaylarla ilgili teoremler ifade ve ispat edilmiştir. Akabinde bu teoremlerle ilgili sonuçlar verilmiştir. Daha sonra bir uzayın $k$-uzay olabilmesi için gerek ve yeter koşullar belirtilmiştir. Ayrıca $KC$ uzayı tanımı yapılmıştır. $X$ ile $Y$ topolojik uzaylar ve $X^*$ ile $Y^*$ sırasıyla onların anti uzayları olmak üzere $f : X \to Y$ fonksiyonuna karşılık gelen $f^* : X^* \to Y^*$ fonksiyonu tanıtılmıştır. Bunlara ek olarak bu dönüşümler arasındaki ilişkiler irdelenmiştir.

Dördüncü bölüm bu çalışmanın orijinal kısmını oluşturmaktadır. Bu bölümün giriş kısmında ön-açık kümelerin ailesi olan supratopoloji ile birlikte verilen uzayın anti uzayı tanıtılmıştır. $pKC$ uzayının tanımı yapılmış ve kuvvetli $k$-uzay olan $pKC$ uzaylarında kuvvetli kompakt kümeler ile ön-kapalı kümelerin birbirlerine nasıl karşılık geldikleri belirlenmiştir. Ön-açık kümelerin ailesi olan supratopoloji ile verilen uzaylar arasındaki dönüşümler tanımlanmıştır. $pKC$ uzayları ve kuvvetli $k$-uzaylar arasındaki dönüşümler ile bu uzayların anti uzayları arasında karşılık gelen dönüşümler araştırılarak ilgili teoremler ifade ve ispat edilmiştir. Bu dönüşümler arasındaki ilişkiler irdelenerek elde edilen sonuçlar bir tablo yardımıyla özetlenmiştir.

Beşinci bölümde tüm çalışmanın kısa bir özeti yapılmış ve bundan sonra yapılacak yeni araştırmalara yönelik öneride bulunulmuştur.

# ANTI-SPACES OF STRONGLY $k-$SPACES AND RELATED MAPS


## SUMMARY

Keywords: Strongly $k-$space, $pKC$ space, strongly compact map, strongly proper map, pre-irresolute map, pre-closed map, strongly perfect map.

This thesis consists of five chapters. The first chapter is devoted to detailed literature knowledge related to subject of the thesis. In the second chapter, the definitions of pre-open (pre-closed) set, supratopological space, pre-interior, pre-clousure, pre-accumulation point, pre-neighborhood of a set and pre-irresolute, pre-continuous, pre-resolute, strongly pre-continuous functions, strongly compact set and strongly compact space are introduced. In the third chapter, the concepts of $k$-space and anti-space are introduced and the theorems about anti-spaces are stated and proved. Subsequently the results of these theorems are given. Later, the necessary and sufficient conditions for a space to be a $k$-space are explained. Also, the definition of $KC$ space is given. The function $f^*: X^* \to Y^*$, which is corresponding to the function $f: X \to Y$, is introduced where $X$ and $Y$ are topological spaces and $X^*$ and $Y^*$ are, respectively, anti-spaces of them. Moreover, the relationships between these maps are discussed.

The fourth chapter is the original part of this study. At the beginning of this chapter the anti-space of a space given with a supratopology constituted by pre-open sets is introduced. The definition of $pKC$ space is given and the relationships between the strongly compact sets and pre-closed sets in $pKC$ spaces which are strongly $k$-spaces are examined. The functions between the spaces given with supratopologies constituted by pre-open sets are defined. By studying the functions between $pKC$ spaces which are strongly $k$-spaces and the corresponding functions between the anti-spaces of them the related theorems are expressed and proved. By investigating the relations between these functions the obtained results are summarized by the aid of a table.

In the fifth chapter of this thesis, a brief summary of this study is given and some suggestions are proposed for new investigations.

# BÖLÜM 1. GİRİŞ

Anti-uzay kavramının literatüre girişi J. de Groot'un [1] çalışması ile 1967'de gerçekleşmiştir. J. de Groot bu çalışmasında metriklenebilir ve yerel kompakt Hausdorff uzayları içeren bir $T$ topolojik uzayının tüm kompakt kümeleri ile kapalı kümelerini değiştirerek $T$ uzayının anti-uzayını tanımlamış ve $T^*$ ile göstermiştir. Aslında bu çalışmanın temelleri 1966 yılında Groot, Strecker ve Wattle tarafından yapılan [2]'de atılmıştır. Bu makalede $X$ bir küme ve $X$ uzayının alt kümelerinin bir ailesi $F$ olmak üzere $\varepsilon$ ile gösterilen bir operatör, $F$ ailesini $F$'nin elemanlarının keyfi kesişimlerinin ve sonlu birleşimlerinin ailesi olan $\varepsilon(F)$ ailesine götürecek şekilde tanımlamıştır. $\varnothing$ ve $X$ kümelerini içermek zorunda olmayan bu $\varepsilon(F)$ ailesi $X$ kümesi üzerinde minus topoloji olarak adlandırılmıştır. Ayrıca $\rho$ kompaktlık operatörü olarak adlandırılan operatör $F$ ailesini $\left(X,\varepsilon(F)\right)$ uzayında $\rho(F)$ kompakt kümeler ailesine karşılık getirecek şekilde tanımlamıştır. Bu iki operatörün özellikleri incelemiş ve bileşkeleri araştırmıştır. Daha sonra kompaktlık operatörü kullanılarak pek çok çalışma yapılmıştır. 1968'de Wattle, [3] makalesinde kompaktlık operatörünü kullanarak kuvvetlendirilmiş Alexander alt taban teoremini ispatlamış, ayrıca $C-$uzayı, $C^*-$uzayı, minus-uzay ve anti-uzay kavramları üzerinde çalışmıştır. Daha sonra anti-altuzayların karakterizasyonlarını veren gösterimlerle ilgilenmiştir.

1973'de Liden [4] doktora tezinde bir $X$ topolojik uzayının, tüm kompakt kümeleri ile birlikte $X$ kümesinin kendisini de kapalı küme alarak $X$ üzerindeki orijinal topolojiden daha kaba bir topoloji oluşturmak suretiyle $X$ uzayının anti-uzayını tanımlamıştır. Buradan yola çıkarak 1975 yılında Liden [5] makalesinde $X$ ve $Y$ topolojik uzaylarının anti-uzaylarını $X^*$ ve $Y^*$ ile göstererek (sürekli olmak zorunda olmayan) $f: X \to Y$ örten fonksiyonuna karşılık gelen $f^*: X^* \to Y^*$ örten fonksiyonunun özelliklerini incelemiştir. Ayrıca $k-$uzayların anti uzaylarını incelemiş ve bu uzaylar arasında ki dönüşümleri tanımlayarak pek çok yeni sonuç elde etmiştir.

$k-$uzay kavramının tanımlanmasını ise ilk kez 1939'da [6]'da Whitehead tarafından gerçekleştirilmiştir. Daha sonra Arens [7]'de kompakt kümelerin bir ailesi tarafından üretilen topolojiyi $k-$topoloji olarak adlandırmıştır. Spanier [8]'de kompakt üretilmiş Hausdorff uzayını $k-$uzay olarak isimlendirmiştir. Gale başta olmak üzere birçok bilim adamı çalışmalarında ele aldıkları bütün $k-$uzayları Hausdorff uzay olarak kabul etmiştir [9]. Bununla birlikte ayırma aksiyomlarını kullanmayan çok sayıda aksi örnekler de mevcuttur.

Bagley ve Yang [10], Bagley ve Weddington [11], Brown [12], Mrowka [13], Poppe [14] ve Weston [15] çalışmaları $k-$uzayların özelliklerini araştıran önemli çalışmalardır. 1967'ye kadar bulunmuş olan $k-$uzaylara ilişkin sonuçların pek çoğu Noble tarafından [16]'da genişletilmiştir.

Diğer taraftan 1963 yılında Levine [17], yarı açık kümeleri tanımlamıştır. Levine tarafından ortaya koyulan bu yarı açık küme kavramı sonraki yıllarda birçok bilim insanının yarı açık benzeri kümeleri tanımlayıp topolojik kavramları genelleştirmesine yardımcı olmuştur.

Bu açık benzeri kümelerin en önemli örneklerinden biri ön-açık kümelerdir. Bir $(X,\tau)$ topolojik uzayının $A$ alt kümesi için $A\subseteq \operatorname{int}(\operatorname{cl}(A))$ şartının sağlanması durumunda $A$ kümesine "ön-açık" küme denilmektedir. "Ön-açık" küme kavramı ilk olarak [18]'de Mashhour, Abd El-Monsef ve El-Deeb tarafından kullanılmıştır. Eğer bir $K$ kümesinin tümleyeni ön-açık küme ise veya bu tanıma denk olarak $\operatorname{cl}(\operatorname{int}(K))\subseteq K$ ise $K$ kümesine ön-kapalı küme denilmektedir. Ön-açık kümelerin keyfi birleşimleri ön-açık küme olmasına rağmen genellikle sonlu sayıda ön-açık kümenin arakesitinin ön-açık olması gerekmez. Bir $X$ kümesi ve $\sigma\subset \mathrm{P}(X)$ ailesi verildiğinde eğer $\sigma$ ailesi $X$ ve $\varnothing$ 'yi içeriyor ve keyfi birleşimleri altında kapalıysa $\sigma$, $X$ üzerinde supratopoloji olarak adlandırılmıştır [19]. Dolayısıyla $(X,\tau)$ bir topolojik uzayında $\tau$ tarafından üretilen ön-açık kümelerin ailesi olan $p\tau(X)=\left\{A\subseteq X : A\subset \operatorname{int}\left(\operatorname{cl}\left(A\right)\right)\right\}$ bir supratopolojidir. Bunun yanı sıra iki ön-açık kümenin arakesitinin ön-açık olabilmesi için bazı gerekli koşullar da Andrijević tarafından [20]'de verilmiştir. Andrijević bir başka çalışmasında da ön-topolojinin kapanış operatörünün özellikleri ile ilgilenmiştir [21]. Mashhour, Abd El-Monsef ve El-Deeb, [18] çalışmasında birkaç soru ortaya koymuştur. Bu sorulardan ilki her ön-açık küme hangi gerekli ve yeterli koşullar altında açık kümedir? İkincisi, kendi içinde yoğun her küme hangi koşullar altında ön-açıktır? Üçüncüsü ise herhangi iki ön-açık kümenin arakesiti hangi koşullar altında ön-açıktır? Dördüncüsü de ön-açık kümeler tarafından oluşturulan topoloji hangi koşullar altında ayrık topolojidir? Reilly ve Vamanamurthy [22]'de her ön-açık kümenin açık küme olması için gerek ve yeter koşulun her yoğun kümenin açık küme olmasıdır, şeklinde ilk soruyu cevaplamıştır. Buna ek olarak her alt kümesi ya açık ya da kapalı olan kapı uzaylar için kısmi bir çözüm ortaya koymuştur. Bir uzayda her alt kümenin ön-açık olması için gerek ve yeter şartın her ön-açık kümenin kapalı olması olduğunu göstermiştir. Daha sonra [22]'de iki ayrık yoğun kümeye ayrılabilen herhangi bir uzayın ön-açık kümeleri ile oluşturulan topolojinin ayrık topoloji olduğu gösterilerek dördüncü soru kısmen çözülmüştür.

Ön-açık küme kavramı ilk olarak verilişinden bu zamana kadar literatürde geniş bir şekilde ele alınmasının yanı sıra [23]'te ön-açık küme kavramı kullanılarak bir kümenin ön-limit noktası, ön-türev kümesi, ön-içi, ön-kapanışı, ön-iç noktaları, ön-sınırı ve ön-dışı kavramları tanımlanarak onların topolojik özellikleri araştırılmıştır.

Görüntü uzayındaki her açık kümenin ters görüntüsünü tanım uzayında ön-açık küme yapan bir fonksiyon ön-sürekli olarak adlandırılmıştır. Bu ön-süreklilik kavramı Pták [24] tarafından "neredeyse süreklilik" olarak literatüre kazandırılmıştır. Neredeyse süreklilik veya ön-süreklilik aynı zamanda hemen hemen süreklilik olarak da bilinmektedir. Öklidyen uzaylardaki reel değerli fonksiyonlar için ön-süreklilik 1922'de Blumberg tarafından çalışılmıştır [25]. Ön-süreklilik dönüşümü tanımından farklı olarak ön-kararsız dönüşümü [19]'da tanımlanmıştır. Görüntü uzayındaki her ön-açık kümenin ters görüntüsü tanım uzayında ön-açık bir küme yapan dönüşüm ön-kararsız fonksiyon olarak adlandırılmıştır.

Kar ve Bhattacharyya ön-açık kümeleri göz önüne alarak zayıf ayırma aksiyomlarını tanıtmış ve her uzayın bir $pT_{1/2}-$uzayı olduğunu Maki, Umehara ve Noiri'nin ispatladıklarını ifade etmiştir [26].

Kuvvetli $k$-uzay tanımı ilk olarak [27]'de yapılmış ve bu uzayda verilen yeni tanımlara dayandırılarak ilgili teoremler ifade ve ispat edilmiştir.

Bu tezde topolojik uzaylarda ön-açık kümelerin ailesi olan supratopolojiye göre kuvvetli $k$-uzayın anti-uzayı tanımlanarak kuvvetli $k$-uzaylar ve anti uzayları arasındaki dönüşümlerin koruduğu özellikler araştırılmış, ilgili teoremler ifade ve ispat edilmiştir.

# BÖLÜM 2. ÖN-TOPOLOJİK UZAYDA TEMEL KAVRAMLAR

**Tanım 2.1.** $X$ boş olmayan bir küme ve $\tau$ ailesi de $\mathrm{P}(X)$ kuvvet kümesinin herhangi bir alt ailesi olsun.

T1) $X$ ve $\varnothing$ kümeleri $\tau$ ailesine aittir.

T2) $\tau$ ailesine ait sonlu ya da sonsuz çokluktaki elemanların birleşimi yine $\tau$ ailesine aittir.

T3) $\tau$ ailesine ait sonlu elemanların kesişimi yine $\tau$ ailesine aittir.

özellikleri sağlanıyorsa $\tau$'ya $X$ üzerinde bir topolojik yapı veya kısaca topoloji denir. Eğer $\tau$ ailesi $X$ üzerinde bir topoloji ise $(X,\tau)$ sıralı ikilisine topolojik uzay ve $\tau$ ailesinin her bir elemanına $X$ kümesinde bir açık küme denir [28].

**Tanım 2.2.** $(X,\tau)$ topolojik uzayı ve bir $x_0 \in X$ noktası verilsin. $x_0$ noktasını içeren her $A \subset X$ açık alt kümesine $x_0$ noktasının bir açık komşuluğu ve $x_0$ noktasının bir açık komşuluğunu kapsayan her $V \subset X$ alt kümesine $x_0$ noktasının bir komşuluğu denir ve $x_0$ noktasının komşuluklar ailesi $\nu(x_0)$ ile gösterilir [28].

**Tanım 2.3.** $(X,\tau)$ topolojik uzayı, $A \subset X$ alt kümesi ve bir $x_0 \in A$ noktası verilsin. Eğer $A$ kümesi $x_0$ noktasının bir komşuluğu ise $x_0$ noktasına, $A$ kümesinin bir iç noktası denir. $A$ kümesinin bütün iç noktalarının oluşturduğu kümeye $A$ kümesinin içi denir ve $\mathrm{int}(A)$ ile gösterilir [28].

**Tanım 2.4.** $(X,\tau)$ topolojik uzayı, $A \subset X$ alt kümesi ve bir $x_0 \in A$ noktası verilsin. $x_0$ noktasının her komşuluğunda, $A$ kümesinin en az bir elemanı varsa, $x_0$ noktasına $A$ kümesinin bir kapanış noktası (değme noktası) denir ve $A$ kümesinin bütün kapanış noktalarının kümesi $\text{cl}(A)$ ile gösterilir [28].

**Tanım 2.5.** $(X,\tau)$ topolojik uzay ve $S \subseteq X$ olsun. Eğer $S \subseteq \text{int}(\text{cl}(S))$ ise $S$ kümesine ön-açıktır denir [29]. $X$ uzayındaki tüm ön-açık kümelerin ailesini $p\tau$ ile gösterilir.

**Örnek 2.6**. $\mathbb{R}$ üzerinde sonlu tümleyenler topolojisi ve boştan farklı bir $S \subset \mathbb{R}$ kümesi verilsin. Eğer $S$ kümesi sonlu ise $S$ ön-açık küme değildir çünkü

$$S \not\subset \text{int}(\text{cl}(S)) = \text{int}(S) = \varnothing$$

olur. Diğer taraftan $S$ kümesi sonsuz ise $S$ ön-açık kümedir çünkü

$$S \subset \text{int}(\text{cl}(S)) = \text{int}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$$

sağlanır.

**Örnek 2.7.** Bir $(X,\tau)$ topolojik uzayının her açık alt kümesi ön-açıktır. Ancak her ön-açık küme açık küme olmayabilir. Gerçekten $X = \{a,b,c\}$ kümesi üzerinde $\tau = \{\varnothing,\ X,\ \{a,b\}\}$ topolojisi verilsin. $\{a\} \subset \text{int}(\text{cl}(\{a\})) = X$ olduğundan $\{a\}$ kümesi ön-açık bir kümedir, fakat açık bir küme değildir.

**Teorem 2.8.** $(X,\tau)$ bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. Eğer $A$ ön-açık bir küme ve $(\text{cl}(\text{int}(A)) - A)$ kapalı küme ise o zaman $A$ kümesi açıktır [19].

**İspat.** Kabul edelim ki $x \in A$ olsun. O zaman $x \notin \left(\mathrm{cl}(\mathrm{int}(A)) - A\right) = W$ olur. Dolayısıyla $N_x = X - W$, $x$ noktasının bir açık komşuluğudur. Bu ise $N_x \cap \mathrm{cl}(\mathrm{int}(A)) \subset A$ olduğunu ifade eder. Dolayısıyla $A$ kümesi açık kümedir.

**Teorem 2.9.** $(X, \tau)$ topolojik uzayı için aşağıdakiler denktir:

i. $X$ uzayının her alt kümesi ön-açıktır.
ii. $X$ uzayındaki her tek nokta kümesi ön-açıktır.
iii. $X$ uzayının her kapalı alt kümesi ön-açıktır [30].

**Tanım 2.10.** Aşağıdaki tanımlar birbirine denktir:

i. Ön-açık bir kümenin tümleyenine ön-kapalıdır denir.
ii. $F \subseteq X$ olsun. Eğer $\mathrm{int}\left(\mathrm{cl}\left(F\right)\right) \subseteq F$ ise $F$ kümesine ön-kapalıdır denir [18].

**Örnek 2.11.** $(X, \tau)$ topolojik uzayının her yoğun alt kümesi ön-açıktır. $S \subseteq X$ kümesi yoğun bir alt küme olsun. Öyleyse

$$\mathrm{cl}(S) = X \Rightarrow \mathrm{int}\left(\mathrm{cl}(S)\right) = \mathrm{int}(X) \Rightarrow \mathrm{int}\left(\mathrm{cl}(S)\right) = X$$

olduğundan $S \subseteq \mathrm{int}\left(\mathrm{cl}(S)\right)$ olur yani $S$ ön-açık kümedir.

**Lemma 2.12.** Herhangi sayıda ön-açık kümenin bileşimi ön-açıktır [18].

**İspat:** Her $k \in I$ için $S_k$ kümeleri ön-açık olsun. Tanım 2.5'e göre her $k \in I$ için $S_k \subseteq \mathrm{int}\left(\mathrm{cl}(S_k)\right)$ dır. O halde

$$\bigcup_{k \in I} S_k \subseteq \bigcup_{k \in I} \mathrm{int}\left(\mathrm{cl}(S_k)\right) \subseteq \mathrm{int}\left(\bigcup_{k \in I} \mathrm{cl}(S_k)\right) = \mathrm{int}\left(\mathrm{cl}\left(\bigcup_{k \in I} S_k\right)\right)$$

bulunur. Böylece $\bigcup_{k \in I} S_k$ ön-açıktır.

**Teorem 2.13.** Eğer sonlu kesişimleri altında kapanış korunursa iki ön-açık kümenin kesişimi de ön-açık kümedir.

**İspat.** $S_1$ ve $S_2$ iki ön-açık küme olsun. Bu durumda $S_1 \subset \operatorname{int}(\operatorname{cl}(S_1))$ ve $S_2 \subset \operatorname{int}(\operatorname{cl}(S_2))$ olur. Böylece

$$S_1 \cap S_2 \subset \operatorname{int}(\operatorname{cl}(S_1)) \cap \operatorname{int}(\operatorname{cl}(S_2)) = \operatorname{int}(\operatorname{cl}(S_1) \cap \operatorname{cl}(S_2))$$

sağlanır. Diğer taraftan sonlu kesişimleri altında kapanış korunduğundan yani $\operatorname{cl}(S_1) \cap \operatorname{cl}(S_2) = \operatorname{cl}(S_1 \cap S_2)$ olduğundan

$$S_1 \cap S_2 \subset \operatorname{int}(\operatorname{cl}(S_1 \cap S_2))$$

olur. Böylece $S_1 \cap S_2$ kümesi de ön-açıktır.

Ancak herhangi iki ön-açık kümenin arakesitinin genelde bir ön-açık küme olması gerekmediğini aşağıdaki örnekle gösterelim

**Örnek 2.14.** $X = \{a,b,c,d,e\}$ kümesi üzerindeki topoloji

$$\tau = \{\varnothing, X, \{a\}, \{c,d\}, \{a,c,d\}\}$$

ve

$$\begin{aligned} p\tau = \tau \cup \{&\{c\},\{d\},\{a,c\},\{a,d\},\{a,b,c\},\{a,b,d\},\{a,c,e\},\\ &\{a,d,e\},\{a,b,c,d\},\{a,b,c,e\},\{a,b,d,e\},\{a,c,d,e\}\} \end{aligned}$$

olsun. Burada $\{a,b,c,e\}\cap\{a,b,d,e\}=\{a,b,e\}\notin p\tau$ olup iki ön-açık kümenin arakesitinin daima ön-açık olmadığı görülür. Dolayısıyla ön-açık kümelerin ailesi $X$ üzerinde her zaman bir topoloji oluşturmaz.

$X$ kümesini içeren ve keyfi birleşimleri altında kapalı olan fakat keyfi kesişimleri altında kapalı olmak zorunda olmayan bir $X$ kümesinin alt kümelerinin ailesi aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır.

**Tanım 2.15.** Bir $X$ kümesi ve $\sigma\subset \mathrm{P}(X)$ ailesi verilsin. Eğer $\sigma$ ailesi $\varnothing$ ve $X$ kümesini içeriyor ve keyfi birleşimleri altında kapalı olursa $\sigma$, $X$ üzerinde supratopoloji olarak adlandırılır. $\sigma$ supratopolojinin elemanlarına supra-açık küme denir [19].

O halde $(X,\tau)$ bir topolojik uzayında $\tau$ tarafından üretilen ön-açık kümelerin ailesi olan $p\tau(X)=\{A\subseteq X : A\subset \mathrm{int}(\mathrm{cl}(A))\}$ bir supratopolojidir ve ön-açık kümeler birer supra-açık kümedir [19].

**Teorem 2.16.** Kabul edelim ki $(X,\tau)$ bir topolojik uzay olsun.

i. $X$ uzayının tüm ön-açık alt kümelerinin ailesi $p\tau$, $X$ üzerinde supratopolojidir.
ii. Her $A,B\in p\tau$ için $\mathrm{cl}(A)\cap\mathrm{cl}(B)=\mathrm{cl}(A\cap B)$ olursa o zaman $p\tau$, $X$ üzerinde bir topolojidir.
iii. $X$ üzerindeki tüm ön-açık kümelerin ailesi ile üretilen bir topoloji $\tau^*$ ise $\tau\subset p\tau\subset\tau^*$ olur [19].

Supratopoloji tanımının bir benzeri genelleştirilmiş topoloji olarak aşağıdaki şekilde verilmiş ve literatürde yoğun bir şekilde çalışılmıştır.

**Tanım 2.17.** $X$ boştan farklı bir küme ve $g \subset P(X)$ olmak üzere

i. $\emptyset \in g$,

ii. $g$ ailesinin herhangi sayıda elemanının birleşimi $g$ ailesine aittir,

şartlarını sağlayan $g$ ailesine $X$ üzerinde bir genelleştirilmiş topoloji ve $(X, g)$ ikilisine genelleştirilmiş topolojik uzay denir. Ayrıca, $X \in g$ ise $g$ kuvvetli genelleştirilmiş topoloji olarak adlandırılır [31].

Dolayısıyla $p\tau$ ailesi bir kuvvetli genelleştirilmiş topoloji ve $(X, p\tau)$ bir kuvvetli genelleştirilmiş topolojik uzaydır.

**Tanım 2.18.** $(X, \tau)$ topolojik uzayında bir $x \in X$ noktası ve $U \subset X$ için $x \in S \subset U$ olacak şekilde $S \in p\tau$ varsa $U$ kümesine $x \in X$ noktasının bir ön-komşuluğu denir [19].

**Tanım 2.19.** $A$ bir $(X, \tau)$ topolojik uzayının bir alt kümesi ve $x \in X$ olsun. Eğer $x$ noktasını içeren her $S$ ön-açık kümesi için $S \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset$ ise $x$ noktasına $A$ kümesinin bir ön-yığılma noktası denir [23].

**Tanım 2.20.** $(X, \tau)$ topolojik uzayında bir $A$ kümesinin bütün ön-yığılma noktalarının kümesine $A$ kümesinin ön-türev kümesi denir ve $D_{p\tau}(A)$ ile gösterilir. $(X, \tau)$ topolojik uzayında $A$ kümesinin türev kümesi $D(A)$ ile gösterilir [23].

**Tanım 2.21.** $(X, \tau)$ topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. $A$ kümesinin kapsadığı bütün ön-açıkların bileşimine yani $A$ kümesinin kapsadığı en büyük ön-açık kümeye $A$ kümesinin ön-içi denir ve $\text{int}_{p\tau}(A)$ ile gösterilir [31].

**Tanım 2.22.** $(X,\tau)$ topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. $A$ kümesini kapsayan bütün ön-kapalıların kesişimi olan en küçük ön-kapalı kümeye $A$ kümesinin ön-kapanışı denir ve $\mathrm{cl}_{p\tau}(A)$ ile gösterilir [31].

**Örnek 2.23.** $X=\{a,b,c,d\}$ kümesi üzerindeki topoloji $\tau=\{\varnothing, X,\{a,c\}\}$ ve ön-topoloji $p\tau=\{\varnothing, X,\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\}\}$ olsun. O halde

i. $A=\{c\}$ ise $D(A)=\{a,b,d\}$ ve $D_{p\tau}(A)=\{a,b,d\}$ kümesi olur.

ii. $B=\{a\}$ ve $C=\{b\}$ ise $D_{p\tau}(B)=\{d\}$, $D_{p\tau}(C)=\{d\}$ ve $D_{p\tau}(B\cup C)=\{c,d\}$'dir [23].

**Örnek 2.24.** $X=\{a,b,c,d\}$ üzerindeki topoloji $\tau=\{\varnothing, X,\{b,d\}\}$ ve ön-topoloji

$$p\tau=\{\varnothing, X,\{b\},\{b,d\},\{a,d\},\{a,b,d\}\}$$

olsun. $X$ uzayının $A=\{a,b\}$ ve $B=\{c,d\}$ kümeleri verilirse,

$D(A)=\{a,c,d\}$, $\quad D(B)=\{a,b,c\}$,

$D_{p\tau}(A)=\{c,d\}$, $\quad D_{p\tau}(B)=\{a,c\}$,

$\mathrm{int}(A)=\varnothing$, $\quad \mathrm{int}(B)=\varnothing$,

$\mathrm{int}_{p\tau}(A)=\{b\}$, $\quad \mathrm{int}_{p\tau}(B)=\varnothing$,

$\mathrm{cl}(A)=X$, $\quad \mathrm{cl}(B)=X$,

$\mathrm{cl}_{p\tau}(A)=\{a,b,d\}$, $\quad \mathrm{cl}_{p\tau}(B)=\{a,c,d\}$

olduğu görülür.

**Örnek 2.25**. $X=\{a,b,c,d\}$ ve üzerindeki topoloji $\tau=\{\varnothing,X,\{b\},\{d\},\{b,d\}\}$ ve ön-topoloji $p\tau=\{\varnothing,X,\{b\},\{d\},\{b,d\},\{a,b,d\},\{b,c,d\}\}$ olsun. $X$ kümesinin $A=\{a,b,d\}$ ve $B=\{a,b\}$ alt kümeleri verilsin. $\operatorname{int}_{p\tau}(A)=\{a,b,d\}$, $\operatorname{int}_{p\tau}(B)=\{b\}$ ve $\operatorname{int}_{p\tau}(A\setminus B)=\operatorname{int}_{p\tau}(\{d\})=\{d\}$. Dolayısıyla $\operatorname{int}_{p\tau}(A\setminus B)\neq\operatorname{int}_{p\tau}(A)\setminus\operatorname{int}_{p\tau}(B)$ olur [14].

**Tanım 2.26.** $(X,\tau)$ ve $(Y,\tau')$ iki topolojik uzay ve $f:(X,\tau)\to(Y,\tau')$ bir fonksiyon olsun.

i. $Y$ uzayındaki her $S$ açık kümesi için $f^{-1}(S)$, $X$ uzayında açık küme ise $f$ fonksiyonuna süreklidir denir.

ii. $Y$ uzayındaki her $S$ açık kümesi için $f^{-1}(S)$, $X$ uzayında ön-açık küme ise $f$ fonksiyonuna ön-süreklidir denir [18].

iii. $Y$ uzayındaki her $S$ ön-açık kümesi için $f^{-1}(S)$, $X$ uzayında açık küme ise $f$ fonksiyonuna kuvvetli ön-süreklidir denir [22].

iv. $Y$ uzayındaki her $S$ ön-açık kümesi için $f^{-1}(S)$, $X$ uzayında ön-açık küme ise $f$ fonksiyonuna ön-kararsızdır denir [18].

v. $X$ uzayındaki her $A$ ön-açık kümesi için $f(A)$, $Y$ uzayında ön-açık küme ise $f$ fonksiyonuna ön-kararlıdır denir [18].

vi. $X$ uzayındaki her $A$ açık kümesi için $f(A)$, $Y$ uzayında ön-açık küme ise $f$ fonksiyonuna ön-açık fonksiyondur denir [18].

vii. $X$ uzayındaki her $K$ kapalı kümesi için $f(K)$, $Y$ uzayında ön-kapalı küme ise $f$ fonksiyonuna ön-kapalı fonksiyondur denir [18].

**Önerme 2.27.**

i. $f:(X,\tau)\to(Y,\tau')$ fonksiyonu kuvvetli ön-süreklidir ancak ve ancak $f:(X,\tau)\to(Y,p\tau')$ süreklidir.

ii. $f:(X,\tau)\rightarrow(Y,\tau')$ fonksiyonu kuvvetli ön-sürekli ise $f:(X,\tau)\rightarrow(Y,\tau')$ süreklidir [22].

Önerme 2.27. (ii)'nin tersinin genel olarak doğru olmadığını görmek için $X$ ve $Y$ reel sayılar kümesi, $\tau$ ve $\tau'$ alışılmış topoloji ve $I:X\rightarrow Y$ özdeşlik dönüşümü olsun. O halde $I$ süreklidir. Ancak $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesi ön-açık küme iken açık küme değildir. $I^{-1}(\mathbb{Q})=\mathbb{Q}$ olduğundan $I$ fonksiyonu kuvvetli ön-sürekli değildir [22].

**Teorem 2.28.** $(Y,\tau')$ topolojik uzayı için aşağıdakiler denktir:

i. $Y$'nin her ön-açık kümesi açıktır.

ii. $(X,\tau)$ herhangi topolojik uzay olduğunda her sürekli $f:(X,\tau)\rightarrow(Y,\tau')$ fonksiyonu kuvvetli ön-süreklidir [22].

**İspat.** i.$\Rightarrow$ii. Ön açık küme tanımından her sürekli fonksiyonların kuvvetli ön sürekli olduğu açıkça görülür.

ii.$\Rightarrow$i. $(X,\tau)$ herhangi bir topolojik uzay olmak üzere her $f:(X,\tau)\rightarrow(Y,\tau')$ sürekli fonksiyonu, kuvvetli ön-sürekli iken $f:(Y,\tau)\rightarrow(Y,\tau)$ özdeşlik dönüşümü alalım. Bu durumda $S$ kümesi $Y$ uzayında ön-açık ise $S=f^{-1}(S)$ açıktır.

**Tanım 2.29.** $X$ uzayının her ön-açık örtüsünün sonlu bir ön-açık alt örtüsü varsa $X$ uzayına kuvvetli kompakttır denir [32, 33, 34].

**Tanım 2.30.** $X$ uzayına $x\in X$ noktasında yerel kuvvetli kompakttır denir ancak ve ancak $x$ noktası $X$ uzayında kuvvetli kompakt olan bir ön-komşuluğa sahiptir [35].

**Tanım 2.31.** $X$ uzayı her noktada yerel kuvvetli kompakt ise $X$ uzayına yerel kuvvetli kompakt uzay denir [35].

**Teorem 2.32.** $(X,\tau)$ sonlu bir topolojik uzay ise $X$ kuvvetli kompakttır [36].

**İspat.** $X=\{x_1,x_2,...,x_n\}$ olsun. $X$ uzayının herhangi bir ön-açık örtüsü $\{S_i\}_{i\in I}$, yani $X=\underset{i\in I}{\cup}S_i$ olsun. $\{S_i\}_{i\in I}$ ailesindeki her bir kümenin $X$ uzayının elemanlarından en az birini eleman olarak kabul edeceği açıktır. Varsayalım ki $x_1\in S_1, x_2\in S_2,..., x_n\in S_n$ olsun. O halde $\{S_1,S_2,...,S_n\}$ ailesi $X$ uzayının sonlu bir alt ön-açık örtüsüdür. Bu yüzden $X$ kuvvetli kompakttır.

**Teorem 2.33.** $(X,\tau)$ topolojik uzay olsun. Kuvvetli kompakt kümelerin sonlu birleşimi kuvvetli kompakttır [36].

**İspat.** $X$ uzayının herhangi iki kuvvetli kompakt alt kümesi $U$ ve $V$ olsun. $U\cup V$ kümesinin bir ön-açık örtüsü $\{S_i\}_{i\in I}$ olsun. Kabulden dolayı $\{S_i\}_{i\in I}$ ön-açık örtüsü hem $U$ hem de $V$ kümesinin bir ön-açık örtüsüdür. $U$ ve $V$ kümeleri kuvvetli kompakt olduklarından $U=S_1\cup S_2\cup...\cup S_n$ ve $V=S_{n+1}\cup S_{n+2}\cup...\cup S_{n+m}$ olacak şekilde sonlu alt ön-açık $S_1,S_2,...,S_n,S_{n+1},S_{n+2},...,S_{n+m}$ kümeleri vardır. $U\cup V=\overset{n+m}{\underset{i=1}{\cup}}S_i$ olduğu aşikardır. Dolayısıyla $U\cup V$ kümesi kuvvetli kompakttır.

**Teorem 2.34.** Kuvvetli kompakt uzayın ön-kapalı her alt kümesi kuvvetli kompakttır [36].

**İspat.** $(X,\tau)$ kuvvetli kompakt uzayının ön-kapalı alt kümesi $A$ olsun. $X$ uzayının ön-açık alt kümelerinden oluşan $\{S_i\}_{i\in I}$ ailesi $A$ kümesinin bir ön-açık örtüsü olsun. $A$ kümesi ön-kapalı olduğundan $X\setminus A$ kümesi ön-açıktır ve $X=(X\setminus A)\cup A$ yazılabilir. $A=\underset{i\in I}{\cup}S_i$ olduğu için $(X\setminus A)\cup\{S_i\}_{i\in I}$ ailesi $X$ uzayının bir ön-açık örtüsüdür. Hipotezden $(X,\tau)$ uzayı kuvvetli kompakt uzay olduğundan $X$ uzayının sonlu bir alt ön-açık örtüsü $(X\setminus A)\cup\{S_1,S_2,...,S_n\}$ olacak şekilde vardır. Bu yüzden

$\{S_1, S_2, ..., S_n\}$ ailesi $A$ kümesinin sonlu bir alt ön-açık örtüsü olur. O halde $A$ kümesi kuvvetli kompakttır.

**Teorem 2.35.** Kuvvetli kompakt uzayın ön-kararsız görüntüsü kuvvetli kompakttır [36].

**İspat.** $(X,\tau)$ ve $(Y,\tau')$ iki topolojik uzay olmak üzere $f:(X,\tau)\to(Y,\tau')$ fonksiyonu $X$ uzayından $Y$ uzayına ön-kararsız bir fonksiyon olsun. Ayrıca $X$ uzayı kuvvetli kompakt uzay ve $Y$ uzayının ön-açık örtüsü $\{S_i\}_{i\in I}$ ailesi olsun. Bu durumda her $i \in I$ için $S_i \in \tau'$ ise $f^{-1}(S_i) \in \tau$ olur. $\{f^{-1}(S_i)\}_{i\in I}$ ailesi $X$ uzayının ön-açık bir örtüsüdür. $X$ kuvvetli kompakt olduğundan $X = \bigcup_{i=1}^{n} f^{-1}(S_i)$ olur. Böylece $f$ fonksiyonu $X$ uzayından $Y$ uzayına bir fonksiyon olduğundan dolayı $\{S_1, S_2, ..., S_n\}$ ailesi $Y$ uzayının sonlu bir alt ön-açık örtüsüdür. O halde $Y$ uzayı kuvvetli kompakttır.

**Teorem 2.36.** $X$ ön-topolojik uzayında $S$ alt kümesi kuvvetli kompakt ve $F$ bir ön-kapalı küme ise $S \cap F$ kümesi $S$ alt uzayında kuvvetli kompakttır [36].

**İspat.** $F$ kümesi $X$ uzayında ön-kapalı olduğundan $S \cap F$ kümesi $S$ alt uzayında ön-kapalıdır. Kuvvetli kompakt bir uzayın ön-kapalı alt kümesi kuvvetli kompakt olduğundan $S \cap F$ kümesi $S$ alt uzayında kuvvetli kompakttır.

# BÖLÜM 3. $k$ –UZAYLAR VE ANTİ-UZAYLAR

$(X,\tau)$ bir topolojik uzay olsun. $X$ topolojik uzayının $X^*$ ile gösterilen anti-uzayı J. de Groot tarafından [1]'de şu şekilde tanımlanmıştır; $X$ uzayındaki tüm kompakt kümelerinin ailesi herhangi sayıdaki kesişimler ve sonlu birleşimler altında kapalı olsun. Böylece $X$ uzayının kendisi ve tüm kompakt alt kümeleri kapalı alınarak $X$ üzerinde üretilen yeni daha kaba topolojisi ile birlikte $X^*$ anti-uzayı oluşmaktadır. Açık bir şekilde her $x \in X$ noktası için $\{x\}$ kümesi $X$ uzayında kompakt küme olup $X^*$ anti-uzayında kapalı olacağından $X^*$ anti-uzayı daima $T_1$-uzayıdır. $X$ uzayının kendisinin ve tüm kompakt alt kümelerinin $X^*$ anti-uzayında kapalı küme olması $X$ uzayının $X^*$ anti-uzayında kapalı olan öz alt kümelerinin $X$ uzayında kompakt olmasını gerektirir.

$A$ kümesi $X^*$'da kapalı $\xrightleftharpoons[A \text{ öz alt küme ise}]{}$ $A$ kümesi $X$'de kompakt

$X$ uzayının kompakt alt kümelerinin $X^*$ anti-uzayının kapalı alt kümeler olmasının yanı sıra aşağıda verilen Teorem 3.1 göstermektedir ki $X$ uzayının kapalı alt kümeleri de $X^*$ anti-uzayının kompakt alt kümeleridir.

$A$ kümesi $X$'de kapalı $\longrightarrow$ $A$ kümesi $X^*$'da kompakt

Dolayısıyla $X$ uzayından $X^*$ anti-uzayına tanımlanacak bir özdeşlik dönüşümü, $X$ uzayının kapalı (kompakt) alt kümelerini $X^*$ anti-uzayının kompakt (kapalı) alt kümelerine resmeder.

Eğer $X$ topolojik uzayı kompakt uzay ise $X$ uzayı $X^*$ anti-uzayı ile çakışır. $X$ topolojik uzayı kompakt olmasa dahi $X^*$ anti-uzayı daima kompakttır.

**Teorem 3.1.** $(X,\tau)$ bir topolojik uzay olsun. $X$ uzayının her kapalı alt kümesi $X^*$ anti-uzayında kompakttır [4].

**İspat.** $A$ kümesi $X$ uzayının kapalı alt kümesi olsun. $(X-C_\alpha)_{\alpha\in I}$ ailesi $X^*$ anti uzayında $A$'nın herhangi bir açık örtüsü olacak şekilde $X^*$ anti-uzayında $\{C_\alpha\}_{\alpha\in I}$ kapalılar ailesi verilsin. Yani $A\subset\bigcup\limits_{\alpha\in I}(X-C_\alpha)$ olsun. O zaman $\bigcap\limits_{\alpha\in I}(A\cap C_\alpha)=\varnothing$ sağlanır. Eğer $A=\varnothing$ ise $A$ kompakt küme olduğu açıktır. $A\neq\varnothing$ ise en az bir $\alpha_0\in I$ için $C_{\alpha_0}\cap A=\varnothing$ dır. Dolayısıyla $C_{\alpha_0}\neq X$ olup $C_{\alpha_0}$, $X^*$'ın kapalı bir öz alt kümesidir. $X^*$'ın kapalı olan öz alt kümelerinin $X$'de kompakt olması gerektiğinden $C_{\alpha_0}$ $X$'de kompakt kümedir. $\bigcap\limits_{\alpha\in I\setminus\{\alpha_0\}}\left(C_\alpha\cap A\cap C_{\alpha_0}\right)=\varnothing$ olduğuna göre

$$C_{\alpha_0}\subset X-\bigcap_{\alpha\in I\setminus\{\alpha_0\}}(C_\alpha\cap A)=\bigcup_{\alpha\in I\setminus\{\alpha_0\}}\left(X-(C_\alpha\cap A)\right)$$

olur ve $\{X-(C_\alpha\cap A)\}_{\alpha\in I\setminus\{\alpha_0\}}$ ailesi $C_{\alpha_0}$ kümesinin bir açık örtüsü olup $C_{\alpha_0}$ kompakt küme olduğundan $C_{\alpha_0}\subset\bigcup\limits_{k=1}^{n}\left(X-\left(C_{\alpha_k}\cap A\right)\right)$ olacak şekilde bir sonlu alt açık örtüsü vardır. Buradan $\bigcap\limits_{k=0}^{n}\left(A\cap C_{\alpha_k}\right)=\varnothing$ sağlanır. Dolayısıyla, $A\neq\varnothing$ olması durumunda da $A$ kümesi $X^*$ anti-uzayında kompakt bir kümedir.

Teorem 3.1'in tersinin doğru olması yani $X^*$ anti-uzayının her kompakt alt kümesinin $X$ uzayında kapalı olması için $X$ uzayının $KC$ uzay ve $k-$uzay olması gerekir.

$$A \text{ kümesi } X^* \text{'da kompakt} \xrightarrow{X,\ KC\text{-uzay ve } k\text{-uzay}} A \text{ kümesi } X \text{'de kapalı}$$

O halde şimdi $KC$ uzay ve $k-$uzay kavramları açıklayalım.

Genel topolojide bir küme üzerinde verilen bir topolojiye dayandırılarak yeni bir topoloji tanımlamanın birçok örneği vardır. Örneğin $X$ üzerinde bir $\tau$ topolojisi verilsin ve $\sum$, $X$ uzayının bir örtüsü olsun. Her bir $S \in \sum$ ile arakesiti $S-$açık (yani $\tau$'dan indirgenmiş topoloji ile $S$ kümesinde açık) olan $X$ uzayının tüm alt kümelerinin ailesi $\sum(S)$, $X$ üzerinde bir topolojidir. $\tau$ topolojisinden daha ince olan bu $\sum(\tau)$ topolojisi zayıf topoloji olarak adlandırılmaktadır. Bu durumda bir $C \subset X$, $\sum$ zayıf topolojisinde kapalıdır (açıktır) ancak ve ancak her $S \in \sum$ için $C \cap S$, $S$ uzayında kapalıdır (açıktır).

Zayıf topolojilerin önemli örneklerinden biri $k$-uzaydır. Bu uzay kompakt alt uzayların bir ailesine göre zayıf topolojiye sahiptir. Zayıf topolojinin tanımına göre kompakt üretilmiş açık kümeler ailesi aynı küme üzerinde verilen asıl topolojiden daha ince bir topoloji oluştururlar.

Bu şekilde kompakt olarak üretilmiş topolojisi ile asıl topolojisi çakışan uzayların tanımı aşağıda verilmiştir.

**Tanım 3.2.** $(X,\tau)$ bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olmak üzere her $K \subset X$ kompakt kümesi için $A \cap K$ kümesi $K$ kümesinde kapalı olduğunda $A$ kapalı ise $X$ topolojik uzayına $k-$uzay denir [4, 7, 29, 37, 38, 39].

**Teorem 3.3.** Her $A \subset X$ için $\mathrm{cl}(A)$ kümesindeki her nokta, $A$ kümesindeki herhangi bir dizinin limit noktası ise $X$ bir $k-$uzaydır [38].

**İspat.** $X$ uzayının her $K$ kompakt alt kümesiyle bir $A$ kümesinin kesişimi $K$ kümesinde kapalı olsun. Kabul edelim ki $A$ kapalı olmasın. O halde en az bir $x \in \mathrm{cl}(A) \setminus A$ vardır. Hipoteze göre herhangi $x_n \in A$ dizisi için $x = \lim x_n$ olsun. Böylece $F = \{x\} \cup \{x_n : 1, 2, ...\}$ kümesi kompakttır fakat $A \cap F = \{x_n : n = 1, 2, ...\}$ kümesi $F$ kümesinde kapalı küme değildir. Bu çelişkiden dolayı $\mathrm{cl}(A) \setminus A = \varnothing$ ve $A$ kapalıdır. Böylece ispat tamamlanır.

**Teorem 3.4.** Bir $X$ uzayının her noktası kapanışı $k-$uzay olan bir komşuluğa sahiptir ancak ve ancak $X$ bir $k-$uzaydır [4].

**İspat.** Kabul edelim ki $X$ uzayının herhangi bir $x$ noktasındaki bir komşuluğunun kapanışı $k-$uzay olsun. $X$ uzayının $k-$uzay olduğunu gösterelim yani $X$ uzayının her $K$ kompakt alt kümesi için $B \cap K$ kapalı iken $B$ kümesinin kapalı olduğunu gösterelim. $x \in \mathrm{cl}(B)$ olsun. O zaman $x \in B$ olduğunu gösterelim. Hipotezden $\mathrm{cl}(U)$ bir $k-$uzay olacak şekilde $x$ noktasının bir $U$ komşuluğu vardır. Her $L \subset \mathrm{cl}(U)$ kompakt alt kümesi için $B \cap \mathrm{cl}(U) \cap L = B \cap L$ kümesi de kompakttır. Bu yüzden $B \cap \mathrm{cl}(U) = B \cap L$ kümesi $\mathrm{cl}(U)$ kümesinde kapalıdır, dolayısıyla $X$ uzayında da kapalıdır. O halde $\mathrm{cl}(B \cap \mathrm{cl}(U)) = B \cap \mathrm{cl}(U)$ sağlanır. Ayrıca $x \in \mathrm{cl}(B \cap \mathrm{cl}(U))$ dır. Aksi halde $(B \cap \mathrm{cl}(U)) \cap V = \varnothing$ olacak şekilde $x$ noktasının bir $V$ komşuluğu vardır. Bu ise $B \cap U \cap V = \varnothing$ olmasını gerektirir. Bu durum $x \in \mathrm{cl}(B)$ olması ile çelişir. Öyleyse $x \in \mathrm{cl}(B \cap \mathrm{cl}(U))$ dır yani $x \in B \cap \mathrm{cl}(U)$ olur. O zaman $x \in B$ dir. Böylece $\mathrm{cl}(B) = B$ olur ve $B$ kapalı kümedir. Bu ise $X$ uzayının bir $k-$uzay olduğunu gösterir.

**Teorem 3.5.** $X$ bir topolojik uzay olsun. Her $A \subset X$ ve $x \in \mathrm{cl}(A)$ için $x \in \mathrm{cl}(A \cap K)$ olacak şekilde kompakt bir $K$ kümesi varsa $X$ uzayı bir $k-$uzaydır [4].

**İspat.** $X$ uzayının bir $k-$uzay olduğunu gösterebilmek için her $F$ kompakt kümesi ile arakesiti $F$ kümesinde kapalı olan $A \subset X$ kümesinin kapalı olduğunu gösterelim. $x \in \mathrm{cl}(A)$ alarak $x \in A$ olduğunu gösterelim. $x \in \mathrm{cl}(A \cap K)$ olacak şekilde $K \subset X$ kompakt alt kümesi var olsun. Kabulden $A \cap K$ kapalıdır. Dolayısıyla $A \cap K = \mathrm{cl}(A \cap K)$ dır. Böylece $x \in A \cap K$, yani $x \in A$ olur. Sonuç olarak $A$ kümesi kapalıdır.

**Teorem 3.6.** $X$ yerel kompakt bir uzay ise $X$ uzayı bir $k-$uzaydır [28].

**İspat.** $X$ yerel kompakt bir uzay olsun. $X$ uzayının kapalı olmayan bir alt kümesini $B$ alalım. Bazı $C$ kompakt kümeleri için $B \cap C$ kümesinin kapalı olmadığını gösterelim. Kabul edelim ki $B$ kümesine ait olmayan $B$ kümesinin bir yığılma noktası $x$ olsun. $X$ yerel kompakt olduğundan $x$ noktasının bir kompakt $U$ komşuluğu vardır ve $x$ bir yığılma noktası olmasına rağmen $x \notin B \cap U$ olduğundan $B \cap U$ kapalı bir küme değildir.

**Teorem 3.7.** $X$ topolojik uzayında $S$ alt kümesi kompakt ve $F$ bir kapalı küme ise $S \cap F$ kümesi $S$ alt uzayında kompakttır [28].

**İspat.** $F$ kümesi $X$ uzayında kapalı olduğundan $S \cap F$ kümesi $S$ alt uzayında kapalıdır. Kompakt bir uzayın kapalı alt kümesi kompakt olduğundan $S \cap F$ kümesi $S$ uzayında kompakttır.

**Tanım 3.8.** Her kompakt kümenin kapalı olduğu bir topolojik uzaya $KC$ uzayı denir [15, 40, 41, 42, 43, 44].

**Teorem 3.9.** Bir $KC$ uzayı $k-$uzaydır ancak ve ancak $X^*$ anti-uzayının her kompakt alt kümesi $X$ uzayında kapalı kümedir [4].

**İspat.** $X$, $KC$ uzayı $k-$uzay olsun. $A$ kümesi $X^*$ anti-uzayında kompakt küme ise $A$ kümesinin $X$ uzayında kapalı küme olduğunu göstermek istiyoruz. Olmayana ergi metodu yardımıyla kabul edelim ki $A$, $X$ uzayında kapalı küme olmasın. $X$ uzayı da $k-$uzay olduğu için $A \cap C$ kompakt olmayacak şekilde en az bir $C$ kompakt kümesi vardır. O halde $A \cap C$ kümesinin sonlu arakesit özelliğine sahip kapalı alt kümelerinin $\{B_\alpha\}$ ailesi vardır öyle ki $\alpha \in I$ için $\bigcap_\alpha B_\alpha = \varnothing$ olur. $B_\alpha$ kapalı olduğuna göre $B_\alpha = K_\alpha \cap A \cap C$ olacak şekilde $X$'de $K_\alpha$ kapalı kümeleri vardır. $K_\alpha \cap C$ kümesi $C$ kümesinde kapalı kümedir. Dolayısıyla kompakt kümenin kapalı alt kümesi kompakt olduğundan $K_\alpha \cap C$ kümesi $X$ uzayında kompakt kümedir. O halde $K_\alpha \cap C$ kümesi $X^*$ anti-uzayında kapalı kümedir. $B_\alpha = K_\alpha \cap A \cap C$ olduğundan $B_\alpha \subset K_\alpha \cap C$ olur. $K_\alpha \cap C$ kümesi $X^*$ anti-uzayında kapalı olduğundan $\mathrm{cl}_*(B_\alpha) \subset (K_\alpha \cap C)$ sağlanır öyle ki burada $\mathrm{cl}_*(B_\alpha)$, $B_\alpha$ kümesinin $X^*$ anti-uzayındaki kapanışını göstermektedir. Böylece

$$A \cap \mathrm{cl}_*(B_\alpha) \subset A \cap K_\alpha \cap C = B_\alpha \tag{3.1}$$

sağlanır. Diğer taraftan $B_\alpha \subset A$ ve $B_\alpha \subset \mathrm{cl}_*(B_\alpha)$ olduğundan

$$B_\alpha \subset A \cap \mathrm{cl}_*(B_\alpha) \tag{3.2}$$

sağlanır. O zaman (3.1) ve (3.2)'den $B_\alpha = A \cap \mathrm{cl}_*(B_\alpha)$ olduğu görülür. Her bir $B_\alpha$ kümesi $X^*$ anti-uzayında $A$ kümesinin kapalı alt kümeleridir. $\{B_\alpha\}$ ailesi $X^*$ anti-uzayında sonlu arakesit özelliğine sahip kapalı alt kümeler olmakla birlikte $\bigcap B_\alpha = \varnothing$ olduğundan $A$, $X^*$ anti-uzayında kompakt küme değildir.

Kabul edelim ki $X^*$ anti-uzayının her kompakt alt kümesi $X$ uzayında kapalı küme olsun. $X$, $KC$ uzayının $k-$uzay olduğunu gösterelim. Varsayalım ki bir $A$ kümesinin $X$ uzayındaki her $K$ kompakt kümesiyle arakesiti $A \cap K$ $X$ uzayında kompakt küme olsun. $X$, $KC$ uzayı olduğundan $A \cap K$ kompakt kümesi $X$ uzayında kapalı kümedir. O halde $A$ kümesinin $X$ uzayında kapalı küme olduğunu yani hipotez gereği $X^*$ anti-uzayında kompakt olduğunu göstermek yeterlidir. Kabul edelim ki $\{A \cap C_\alpha\}$ sonlu arakesit özelliğine sahip olacak şekilde $X^*$ anti-uzayında kapalı kümelerin ailesi $\{C_\alpha\}$ olsun. Eğer her $C_\alpha = X^*$ olursa sonuç aşikârdır. En az bir $C_{\alpha_0} \neq X^*$ olsun. $X^*$ anti-uzayının kapalı olan öz alt kümeleri $X$ uzayında kompakt olduğundan $C_{\alpha_0}$, $X$ uzayında kompakt kümedir. Kabulden dolayı $A \cap C_{\alpha_0}$ kümesi $X$ uzayında kompakttır. Dahası $X$, $KC$ uzayı olduğundan her $C_\alpha$, $X$ uzayında kapalı kümedir. $A \cap C_{\alpha_0}$ kümesi $X$ uzayında kompakt ve $X$ uzayında kapalı kümelerin ailesi $\{C_\alpha\}$ verildiğinde sonlu arakesit özelliğine sahip herhangi $\{A \cap C_{\alpha_0} \cap C_\alpha\}$ ailesi için $\bigcap_\alpha (A \cap C_{\alpha_0} \cap C_\alpha) \neq \varnothing$ olur. Böylece $A$ kümesi $X^*$ anti-uzayında kompakt kümedir.

Böylece bir $X$, $KC$ uzayı $k-$uzay ise $X^*$ anti-uzayının her kompakt alt kümesi $X$ uzayında kapalı küme olur.

Sonuç olarak $X$ ve $X^*$ anti-uzaylarının kompakt ve kapalı kümeleri arasındaki ilişkiyi aşağıdaki diyagram ile verilebilir.

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=huge]
\begin{array}{c} X \\ \text{kompakt} \end{array} \arrow[r, shift right] \arrow[d, "KC \text{ uzayı ise}"'] & \begin{array}{c} X^* \\ \text{kapalı} \end{array} \arrow[l, shift right, "\text{Öz alt küme ise}"'] \arrow[d] \\
\text{kapalı} \arrow[r, shift right] & \text{kompakt} \arrow[l, shift right, "k\text{-uzay ve } KC \text{ uzayı ise}"']
\end{tikzcd}$$

Diyagram 3.1. $X$ topolojik uzayının ve $X^*$ anti-uzayının alt kümeleri arasındaki ilişki

Bir $(X,\tau)$ topolojik uzayında bir $A$ alt kümesinin kapanışı, içi ve sınırı, sırasıyla $\mathrm{cl}(A)$, $\mathrm{int}(A)$ ve $\partial(A)$ ile gösterilmek üzere $A$ alt kümesinin $X^*$ anti-uzayındaki kapanışı, içi ve sınırı ile ilgili teoremler aşağıda verilmektedir.

**Teorem 3.10.** $(X,\tau)$ bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. $A$ kümesinin $X^*$ anti uzayındaki kapanışı $\mathrm{cl}_*(A)$ olmak üzere

$$\mathrm{cl}_*(A) = \begin{cases} \mathrm{cl}(A) & , \ \mathrm{cl}(A) \text{ kümesi } X\text{'de kompakt ise} \\ X^* & , \ \mathrm{cl}(A) \text{ kümesi } X\text{'de kompakt değilse} \end{cases}$$

dır. Burada $\mathrm{cl}(A)$, $A$ kümesinin $X$ uzayındaki kapanışıdır [4].

**İspat.** Eğer $\mathrm{cl}(A)$ kümesi $X$ uzayında kompakt küme ise o zaman $\mathrm{cl}(A)$ kümesi $X^*$ anti-uzayında kapalıdır ve $A$ kümesini içerir. O halde $\mathrm{cl}_*(A) \subset \mathrm{cl}_*\left(\mathrm{cl}(A)\right) = \mathrm{cl}(A)$ olur Ayrıca $\mathrm{cl}(A) \subset \mathrm{cl}_*(A)$ olduğundan $\mathrm{cl}(A) = \mathrm{cl}_*(A)$ dir. Diğer yandan kabul edelim ki $\mathrm{cl}(A)$ kümesi $X$ uzayında kompakt olmasın ancak $\mathrm{cl}_*(A) \neq X^*$ olsun. Bu yüzden $A$ kümesi $X^*$ anti-uzayında yoğun değildir ve $A \cap U = \varnothing$ olacak şekilde boştan farklı bir $U$ açık kümesi vardır. Yani $(X - U)$ kümesi $X^*$ anti-uzayında kapalı kümedir. Dolayısıyla $(X - U)$ kümesi $X$ uzayında kompakttır. Ayrıca $A \subset (X - U)$ olup $\mathrm{cl}(A) \subset (X - U)$ olduğu görülür. O halde $\mathrm{cl}(A)$ kümesi $X$ uzayında kompakt olur ki bu bir çelişkidir.

**Sonuç 3.11.** Eğer $\mathrm{cl}(A)$ kümesi $X$ uzayında kompakt küme ise $X^*$ anti-uzayında kapalı kümedir [4].

**Sonuç 3.12.** $A$ kümesi $X^*$ anti-uzayında yoğun kümedir ancak ve ancak $A$ kümesi $X$ uzayında kompakt değildir [4].

**Sonuç 3.13.** $X^*$ anti-uzayı ayrılabilir uzaydır ancak ve ancak $X$ uzayında kapanışı kompakt olmayan sayılabilir bir küme içerir [4].

**Teorem 3.14.** $(X, \tau)$ bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. $A$ kümesinin $X^*$ anti-uzayındaki içi $\mathrm{int}_*(A)$ olmak üzere

$$\mathrm{int}_* A = \begin{cases} \mathrm{int}(A) \ , & \mathrm{cl}(X - A) \text{ kümesi } X \text{'de kompakt ise} \\ \varnothing \ , & \mathrm{cl}(X - A) \text{ kümesi } X \text{'de kompakt değilse} \end{cases}$$

dir. Burada $\mathrm{int}(A)$, $A$ kümesinin $X$ uzayındaki içini göstermektedir [4].

**İspat.** $\mathrm{cl}(X - A)$, $X$ uzayında kompakt küme ise $\mathrm{cl}(X - A)$ kümesi $X^*$ anti-uzayında kapalı küme olur. O zaman $\mathrm{int}(A) = (X - \mathrm{cl}(X - A))$ kümesi de $X^*$ anti-uzayında açık kümedir. Bu yüzden $\mathrm{int}(A) \subset \mathrm{int}_*(A)$dır. Diğer taraftan $\mathrm{int}_*(A) \subset \mathrm{int}(A)$ sağlandığından $\mathrm{int}_*(A) = \mathrm{int}(A)$ olduğu görülür. Kabul edelim ki

$\mathrm{cl}(X-A)$ kompakt olmasın ancak $\mathrm{int}_*(A)\neq\varnothing$ olsun. O zaman $\mathrm{int}_*(A)\subset A$ olur ve $(X-\mathrm{int}_*(A))$ kümesi $X^*$ anti-uzayında kapalı küme olup $(X-\mathrm{int}_*(A))$, $X$ uzayında kompakt kümedir. O halde $(X-A)\subset(X-\mathrm{int}_*(A))$ olur ki bu $\mathrm{cl}(X-A)\subset(X-\mathrm{int}_*(A))$ olmasını gerektirir. Yani $\mathrm{cl}(X-A)$ kümesi kompakt kümedir. Bu ise bir çelişkidir.

**Sonuç 3.15.** $\mathrm{cl}(X-A)$ kümesi $X$ uzayında kompakt ise $\mathrm{int}(A)$ kümesi $X^*$ anti-uzayında açıktır [4].

**Teorem 3.16.** $(X,\tau)$ bir topolojik uzay ve $A\subset X$ olsun. $A$ kümesinin $X^*$anti-uzayındaki sınırı $\partial_*(A)$ olmak üzere

$$\partial_*(A)=\begin{cases}\mathrm{cl}(A) & , \ \mathrm{cl}(A) \text{ kümesi } X\text{'de kompakt ise}\\ \mathrm{cl}(X-A) & , \ \mathrm{cl}(X-A) \text{ kümesi } X\text{'de kompakt ise}\\ X^* & , \ \text{diğer durumlarda}\end{cases}$$

dir [4].

**İspat.** Teorem 3.10'dan ispat görülmektedir ve $\partial_*(A)=\mathrm{cl}_*(A)\cap\mathrm{cl}_*(X-A)$ dır.

**Sonuç 3.17.** $(X,\tau)$ bir topolojik uzay ve $A\subset X$ olsun. $\partial A=\partial_*(A)$ ise

i. $\mathrm{cl}(A)$ kümesi $X$ uzayında kompakttır ve $X-A$ kümesi $X$ uzayında yoğun kümedir.
ii. $\mathrm{cl}(X-A)$ kümesi $X$ uzayında kompakttır ve $A$ kümesi $X$ uzayında yoğundur.
iii. $A$ ve $X-A$ kümeleri $X$ uzayında yoğun kümelerdir [4].

Kabul edelim ki $X$ uzayının bir alt kümesi $A$ olmak üzere $X^*$ anti-uzayından $A$ kümesine indirgenmiş alt uzay topolojisi ile birlikte $A$ kümesi $\hat{A}$ ile gösterilsin. Diğer taraftan $A$ uzayının anti-uzayı da $A^*$ ile gösterilsin. Anti-uzay tanımının bir sonucu olarak $A^* = \hat{A} = A$ olması için gerek ve yeter şart $A$ kümesinin $X$ uzayının kompakt bir alt kümesi olmasıdır. Diğer taraftan $A$ kümesi $X$ uzayının kompakt bir alt kümesi olmasa dahi aşağıdaki durum sağlanır.

**Teorem 3.18.** $A$ üzerindeki topoloji $\hat{A}$ uzayının topolojisinden daha incedir ve dolayısıyla $A^*$ üzerindeki topolojiden de daha incedir [4].

**İspat.** Kabul edelim ki $C$ kümesi $A$ uzayının öz alt kümesi olsun. $C$ kümesi $A^*$ anti-uzayında kapalı kümedir ancak ve ancak $C$ kümesi $X$ uzayında kompakttır. Diğer taraftan $C$ kümesi $\hat{A}$ uzayında kapalı kümedir ancak ve ancak $C = A \cap B$ olacak şekilde $X$ uzayında $B$ kompakt kümesi vardır. Sonuç olarak $C$ kümesi $A^*$ anti-uzayında kapalı küme ise o zaman $C$ kümesi $\hat{A}$ uzayında kapalı kümedir ve $C$ kümesi $\hat{A}$ uzayında kapalı küme ise o zaman $C$ kümesi $A$ uzayında kapalı kümedir.

**Teorem 3.19.** $A \subset X$ olmak üzere $A^* = \hat{A}$ ise $A$ kümesi $X$ uzayında kapalı kümedir [4].

**İspat.** Kabul edelim ki $C$ kümesi $\hat{A}$ uzayının kapalı öz alt kümesi olsun. $C = A \cap B$ olacak şekilde $X^*$ anti-uzayında $B$ kapalı öz alt kümesi vardır. $A$ ve $B$ kümelerinin ikisi de $X$ uzayında kapalı küme olduğundan ve $B$ kümesi $X$ uzayında kompakt olduğundan $C = A \cap B$ kümesi $X$ uzayında kompakt kümedir ve dolayısıyla $A^*$ anti-uzayında kapalı kümedir. Diğer taraftan $\hat{A}$ üzerindeki topoloji $A^*$ anti-uzayının topolojisinden daha incedir.

**Teorem 3.20.** $X$ bir $k-$uzay ve $A \subset X$ olsun. Eğer $\text{cl}(A)$ kümesi $X$ uzayında kompakt küme ise $A = \hat{A}$ dir [4].

**İspat.** $\text{cl}(A)$ kümesi $X$ uzayında kompakt küme olsun. $A$ uzayının bir $V$ açık alt kümesini alalım. O zaman $V = A \cap U = A \cap \left(U \cup \left(X - \text{cl}(A)\right)\right)$ olacak şekilde $X$ uzayında bir $U$ açık kümesi vardır. Şimdi $X - \left(U \cup \left(X - \text{cl}(A)\right)\right) = \left(X - U\right) \cap \text{cl}(A)$ kümesi kompakt kümenin kapalı alt kümesi de kompakt olacağından $X$ uzayında kompakt kümedir. Öyleyse $X - \left(U \cup \left(X - \text{cl}(A)\right)\right)$ kümesi $X^*$anti-uzayında kapalı kümedir. Dolayısıyla $U \cup \left(X - \text{cl}(A)\right)$ kümesi, $X^*$ anti-uzayında açık kümedir ve sonuç olarak $V$ kümesi $\hat{A}$ uzayının açık altkümesidir.

**Teorem 3.21.** $A$ kümesi $X^*$ anti-uzayında bağlantılıdır ancak ve ancak $A$ kümesi $X$ uzayında bağlantılıdır veya $\text{cl}(A)$, $X$ uzayında kompakt değildir [4].

**İspat.** $X$ uzayının topolojisi $X^*$ anti-uzayından daha ince olduğu için $A$ kümesi $X$ uzayında bağlantılı ise $X^*$ anti-uzayında bağlantılıdır. Varsayalım $\text{cl}(A)$, $X$ uzayının topolojisinde kompakt küme olmasın ancak $A$ kümesi $X^*$ anti-uzayında bağlantılı olmasın. O zaman $A = \left(A \cap B\right) \cup \left(A \cap C\right)$, $A \cap B \neq \varnothing$, $A \cap C \neq \varnothing$ ve $A \cap B \cap C = \varnothing$ olacak şekilde $X^*$ anti-uzayında $B$ ve $C$ kapalı kümeleri vardır ve hem $B \neq X^*$ hem de $C \neq X^*$ dır. O halde $B$ ve $C$ kümeleri $X$ uzayında kompakt kümeler olup Teorem 3.10'dan $B = \text{cl}_*\left(B\right) = \text{cl}\left(B\right)$ ve $C = \text{cl}_*\left(C\right) = \text{cl}\left(C\right)$ olur. Böylece $\text{cl}\left(A\right) \subset \left(\left(\text{cl}\left(A\right) \cap B\right) \cup \left(\text{cl}\left(A\right) \cap C\right)\right)$ dir. Buradan $\text{cl}\left(A\right)$, $X$ uzayında kompakt küme olur. Ancak bu bir çelişkidir. O halde $A$ kümesi $X^*$ anti-uzayında bağlantılıdır.

Kabul edelim ki $A$ kümesi $X^*$anti-uzayında bağlantılı olsun. Ancak $\text{cl}\left(A\right)$ kümesi $X$ uzayında kompakt küme olsun ve $A$ kümesi $X$ uzayında bağlantılı olmasın.

O zaman $A=(A\cap B)\cup(A\cap C)$, $A\cap B\neq\varnothing$, $A\cap C\neq\varnothing$ ve $A\cap B\cap C=\varnothing$ olacak şekilde $X$ uzayında $B$ ve $C$ açık kümeleri vardır. Teorem 2.18'den $A\cap B$ ve $A\cap C$ kümeleri $\hat{A}$ uzayında açık kümeler olur. Bu durumda $\hat{A}$ $X^*$ anti-uzayından $A$ kümesi üzerine indirgenmiş alt uzay topolojisine sahiptir. $\mathrm{cl}(A)$ kümesi $X$ uzayında kompakt olmadığında $\mathrm{cl}_*(A)\neq X^*$ olur. Böylece $A$ kümesi $X^*$ anti-uzayında bağlantılı olmaz. Bu ise bir çelişkidir.

$(X,\tau)$ ve $(Y,\tau)$ topolojik uzay olsun. Bir $f:X\to Y$ fonksiyonu için aşağıdaki tanımları verelim.

**Tanım 3.22.** Her $K\subset X$ kompakt kümesi için $f(K)\subset Y$ kompakt küme ise $f$ fonksiyonuna kompakt fonksiyon denir [4].

**Tanım 3.23.** Her $K\subset Y$ kompakt kümesi için $f^{-1}(K)\subset X$ kompakt küme ise $f$ fonksiyonuna has fonksiyon denir [4].

**Tanım 3.24.** Her $K\subset X$ kompakt kümesi için $f^{-1}(f(K))\subset X$ kompakt küme ise $f$ fonksiyonuna yansımalı kompakt fonksiyon denir [4].

**Tanım 3.25.** Her $K\subset Y$ kompakt kümesi için $f(L)=K$ olacak şekilde $X$ uzayında bir $L$ kompakt kümesi varsa $f$ fonksiyonuna kompakt iz özellikli (with compact trace property) fonksiyon denir [4].

**Tanım 3.26.** $f$ fonksiyonu sürekli, kapalı bir fonksiyon ve her $y\in Y$ için $f^{-1}(\{y\})$ kompakt ise $f$ fonksiyonuna mükemmel fonksiyon denir [4].

$X$ ve $Y$ topolojik uzaylarının anti-uzayları sırasıyla $X^*$ ve $Y^*$ olsun. Bir $f:X\to Y$ fonksiyonuna karşılık gelen $f^*:X^*\to Y^*$ fonksiyonu her $x$ noktası için $f^*(x)=f(x)$ olacak şekilde tanımlansın.

Ayrıca varsayalım $X$ ve $Y$ uzaylarını $KC$ uzay, $f:X\to Y$ örten fonksiyon ve $f$ fonksiyonuna karşılık gelen $f^*:X^*\to Y^*$ örten olsun. Şimdi bu dönüşümler arasındaki ilişkileri irdeleyelim.

**Teorem 3.27.** $X$ ve $Y$ topolojik uzayları ile $f$ ve $f^*$ fonksiyonları için $f$ has dönüşüm ise $f^*$ sürekli dönüşümdür [4].

**İspat.** Kabul edelim ki $f$ has fonksiyon olsun ve $S$, $Y^*$ anti-uzayının kapalı öz alt kümesi olsun. O zaman $S$, $Y$ uzayının kompakt kümedir. Böylece $f^{-1}(S)$, $X$ uzayında kompakt kümedir. Bu yüzden $f^{-1*}(S)$, $X^*$ anti-uzayında kapalıdır. Yani $f^*$ sürekli dönüşümdür.

**Teorem 3.28.** $X$ bir topolojik uzay ve $Y$ bir $T_2-$uzayı olsun. O zaman $f^*$ sabit olmayan bir fonksiyon ve sürekli ise $f$ has dönüşümdür [4].

**İspat.** $S$, $Y$ uzayının kompakt alt kümesi ve $Y$ bir $T_2-$uzayı olan topolojik uzay olsun. İlk olarak varsayalım $S=Y$ yani $Y$ kompakt uzay olsun. Bu durumda $Y=Y^*$ olur. $Y^*$ anti-uzayının herhangi farklı iki $y_1$ ve $y_2$ noktalarını alalım. $Y$ bir $T_2-$ uzayı olduğundan $y_1\in U$ ve $y_2\in V$ ve $U\cap V=\varnothing$ olacak şekilde $U$ ve $V$ açık kümeleri vardır. $f^*$ sabit olmayan bir fonksiyon ve sürekli fonksiyon olduğundan $f^{*-1}(U)$ ve $f^{*-1}(V)$ kümeleri $X^*$ anti-uzayının boştan farklı açık alt kümeleridir. Ayrıca $f^{*-1}(U)\cap f^{*-1}(V)=\varnothing$ sağlanır. $X^*-f^{*-1}(U)$ ve $X^*-f^{*-1}(V)$ kümeleri $X^*$ anti-uzayının kapalı alt kümeleri olup $\left(X^*-f^{*-1}(U)\right)\cup\left(X^*-f^{*-1}(V)\right)=X^*$

olur. Diğer taraftan bu kümeler $X$ uzayında kompakt olacağından ve $\left(X-f^{-1}(U)\right)\cup\left(X-f^{-1}(V)\right)=X$ sağlandığından $f^{-1}(Y)=X$ kompakttır. İkinci olarak da kabul edelim ki $S\neq Y$ olmak üzere $S\subset Y$ kompakt kümesi olsun. $S$, $Y^*$ anti-uzayında kapalı kümedir. $f^*$ sürekli dönüşüm olduğundan $f^{*-1}(S)$, $X^*$ anti-uzayında kapalı kümedir. Ayrıca $f^{*-1}(S)$, $X^*$ anti-uzayının öz alt kümesi olup $f^{-1}(S)$, $X$ uzayında kompakt küme olur. Dolayısıyla $f$ has fonksiyondur.

**Teorem 3.29.** $X$ ve $Y$ iki topolojik uzay, $f$ ve $f^*$ fonksiyonlar olsun. $f$ sürekli dönüşüm ve $Y$, $k-$uzay ise o zaman $f^*$ has dönüşümdür [4].

**İspat.** $f$ sürekli dönüşüm ve $Y$ de $k-$uzay olsun. $f^*$ fonksiyonun has dönüşüm olduğunu göstermeliyiz. $S$ kümesi $Y^*$ anti-uzayında kompakt küme ise $Y$ $k-$uzay olduğundan $S$, $Y$ uzayında kapalı kümedir. $f$ sürekli dönüşüm olduğundan $f^{-1}(S)$, $X$ uzayında kapalıdır. Bu yüzden $f^{*-1}(S)$, $X^*$ anti-uzayında kompakttır. Dolayısıyla $S$ kümesi $Y^*$ anti-uzayında kompakt küme iken $f^{*-1}(S)$, $X^*$ anti-uzayında kompakt olduğundan $f^*$ has dönüşümdür.

**Teorem 3.30.** $X$ ve $Y$ iki topolojik uzay, $f$ ve $f^*$ birer örten fonksiyon olsun. $f^*$ has dönüşüm ve $X$, $k-$uzaysa o zaman $f$ sürekli dönüşümdür [4].

**İspat.** $S$, $Y$ uzayında kapalı küme olsun. O zaman $S$, $Y^*$ anti-uzayında kompakt kümedir. Böylece $f^*$ has dönüşüm olduğundan $f^{*-1}(S)$, $X^*$ anti-uzayında kompakttır. $X$, $k-$uzay olduğundan $f^{-1}(S)$, $X$'de kapalıdır. Dolayısıyla $f:X\rightarrow Y$ dönüşümü sürekli dönüşümdür.

**Teorem 3.31.** $X$ ve $Y$ topolojik uzaylar, $f$ ve $f^*$ birer örten fonksiyon olsun. $f$ bir kapalı fonksiyon ve $X$, $k-$uzay ise o zaman $f^*$ kompakt fonksiyondur [4].

**İspat.** $S$, $X^*$ anti-uzayında kompakt küme olsun. $X$ bir $k-$uzay olduğundan $S$, $X$ uzayında kapalı olur. $f$ kapalı fonksiyon olduğundan $f(S)$, $Y$ uzayında kapalı kümedir. Buradan $f^*(S)$, $Y^*$ anti-uzayında kompakt küme olur. Dolayısıyla $f^*$ kompakt fonksiyondur.

**Teorem 3.32.** $X$ ve $Y$ topolojik uzaylar, $f$ ve $f^*$ birer örten fonksiyon ve $Y^*$, $k-$uzay olsun. $f^*$ kompakt dönüşüm ise $f$ kapalı dönüşümdür [4].

**İspat.** $S$, $X$ uzayında kapalı küme olsun. O zaman $S$, $X^*$ anti-uzayında kompakt kümedir. $f^*$ kompakt bir dönüşüm olduğundan $f^*(S)$, $Y^*$ anti-uzayında kompakttır. $Y^*$, $k-$uzay olduğundan $f(S)$, $Y$ uzayında kapalı kümedir. Böylece $f$ kapalı dönüşümdür.

**Teorem 3.33.** $X$ bir topolojik uzayı ve $Y$ bir $k$-uzay olduğunda $f: X \rightarrow Y$ has dönüşüm varsa o zaman $f$ kapalı fonksiyondur [4].

**İspat.** Teorem 3.27 ve Teorem 3.32'den ispat açıktır.

**Teorem 3.34.** $X$ bir $k-$uzay , $Y$ bir $T_2-$uzayı ve $k-$uzay olmak üzere $f: X \rightarrow Y$ sabit olmayan bir örten fonksiyon olduğunda aşağıdakiler eşdeğerdir [4].

1. $f$ mükemmel dönüşümdür.
2. $f$ ve $f^*$ sürekli dönüşümdür.
3. $f$ ve $f^*$ has dönüşümdür.
4. $f^*$ mükemmel dönüşümdür.

**İspat. $1 \Rightarrow 2$** $f$ mükemmel fonksiyon olsun. O zaman $f$ sürekli ve has dönüşümdür. Aynı zamanda Teorem 3.27'den $f$ has dönüşüm olduğundan $f^*$ sürekli dönüşümdür. Dolayısıyla $f$ mükemmel dönüşüm ise $f$ ve $f^*$'ın sürekli dönüşüm olduğu görülür.

**$2 \Rightarrow 3$** $f$ ve $f^*$ sürekli dönüşüm olsun. Teorem 3.28'den $f^*$ sürekli ve sabit olmayan dönüşüm olduğu için $f$ has dönüşümdür. Teorem 3.29'dan $f$ sürekli dönüşüm olduğundan $f^*$ has dönüşümdür. Dolayısıyla $f$ ve $f^*$ has dönüşümdür.

**$3 \Rightarrow 4$** Teorem 3.27'den $f$ has dönüşüm olduğu için $f^*$ sürekli dönüşümdür. Kabul edelim ki $C$, $X^*$ anti-uzayında kapalı olsun. O zaman $C$, $X$ uzayında kompakttır. Ayrıca $f^*$ has dönüşüm olduğundan Teorem 3.30'dan $f$ sürekli dönüşümdür. Dolayısıyla $f(C)$, $Y$ uzayında kompakttır. Böylece $f^*(C)$ $Y^*$ anti-uzayında kapalı kümedir. Böylece $f^*$ kapalı fonksiyon olur. Sonuç olarak $f^*$ has, sürekli ve kapalı dönüşüm yani mükemmel dönüşümdür.

**$4 \Rightarrow 1$** $f^*$ mükemmel fonksiyon olsun. O halde $f^*$ sürekli, kapalı ve has fonksiyondur. $f^*$ sabit olmayan sürekli fonksiyon olduğundan Teorem 3.28'den $f$ has dönüşümdür. Yani $\forall\ y \in Y$ için $\{y\} \subset Y$ kompakt kümesi $f$ has dönüşüm olduğundan $f^{-1}(\{y\})$ kompakt olur. Ayrıca, Teorem 3.33'ten $f$ kapalı fonksiyondur. $f^*$ has dönüşüm olduğundan Teorem 3.30'dan $f$ sürekli dönüşümdür. Sonuç olarak $f$ mükemmel dönüşümdür.

# BÖLÜM 4. KUVVETLİ $k-$ UZAYLAR VE ANTİ-UZAYLARI

$(X,\tau)$ bir topolojik uzay ve $(X,p\tau)$ ön açık kümelerin ailesi tarafından oluşturulan bir supratopolojik uzay olsun. $X$ uzayı her kuvvetli kompakt kümenin ön-kapalı olduğu uzayı olsun. Bu takdirde $(X,p\tau)$ uzayının $X$ uzayındaki tüm kuvvetli kompakt kümelerin herhangi sayıdaki kesişimleri de ön-kapalı küme olur. Böylece $X$'in tüm kuvvetli kompakt alt kümeleri ve $X$ uzayının kendisi ön-kapalı küme alınarak $X$ üzerinde daha kaba bir supratopoloji oluşturulur. $X$ üzerinde bu supratopoloji ile birlikte $X^*$ ile gösterilen ve $(X,p\tau)$ supratopolojik uzayının anti-uzayı oluşur.

$X$ topolojik uzayının anti uzayı $X^*$ daima $pT_1-$uzayıdır. Çünkü her $x\in X$ noktası için $\{x\}$ tek nokta kümesi kuvvetli kompakttır dolayısıyla $X^*$'da ön-kapalıdır. $X$ uzayının tüm kuvvetli kompakt alt kümeleri ve $X$ uzayının kendisinin $X^*$ anti-uzayında ön-kapalı küme olması $(X,p\tau)$ uzayının $X^*$ anti-uzayında ön-kapalı olan öz alt kümelerinin $X$ uzayında kuvvetli kompakt olmasını gerektirir.

$$S \text{ kümesi } X^*\text{'da ön kapalı} \quad \underset{S \text{ öz alt küme ise}}{\Longleftrightarrow} \quad S \text{ kümesi } X\text{'de kuvvetli kompakt}$$

Ayrıca $X$ uzayının ön-kapalı alt kümelerinin $X^*$ anti-uzayında kuvvetli kompakt alt kümeleri olması aşağıdaki teoremde görülmektedir.

**Teorem 4.1.** $(X,\tau)$ bir topolojik uzay olsun. $X$ uzayının her ön-kapalı alt kümesi $(X,p\tau)$ uzayının anti-uzayı olan $X^*$'da kuvvetli kompakttır.

**İspat.** $A$ kümesi $X$ uzayında ön-kapalı küme olsun. $\{X - C_\alpha\}_{\alpha \in I}$ ailesi $X^*$ anti-uzayında $A$ kümesinin herhangi bir ön-açık ailesi olacak şekilde $\{C_\alpha\}_{\alpha \in I}$ $X^*$ anti-uzayında ön-kapalılar ailesi alalım. Yani $A \subset \bigcup_{\alpha \in I} (X - C_\alpha)$ olsun. O zaman $\bigcap_{\alpha \in I} (A \cap C_\alpha) = \varnothing$ olur. $A = \varnothing$ ise $A$ kümesi kuvvetli kompakttır. $A \neq \varnothing$ ise en az bir $\alpha_0 \in I$ için $C_{\alpha_0} \cap A = \varnothing$ dır. Dolayısıyla bu $C_{\alpha_0} \neq X$ olur. Yani $C_{\alpha_0}$, $X^*$ anti-uzayında ön-kapalı özalt kümesine göre $C_{\alpha_0}$, $X$ uzayında kuvvetli kompakttır. $\bigcap_{\alpha \in I \setminus \{\alpha_0\}} \left( C_\alpha \cap A \cap C_{\alpha_0} \right) = \varnothing$ olduğundan $\{X - (C_\alpha \cap A)\}_{\alpha \in I \setminus \{\alpha_0\}}$ kümeleri $C_{\alpha_0}$ ailesinin bir ön-açık örtüsü olup $C_{\alpha_0}$ kuvvetli kompakt olduğundan $C_{\alpha_0} \subset \bigcup_{k=1}^{n} \left( X - \left( C_{\alpha_k} \cap A \right) \right)$ olacak şekilde bir alt ön-açık örtüsü vardır. Dolayısıyla $X^*$ anti-uzayında kuvvetli kompakttır.

Sonuç olarak $X$ uzayından $X^*$ anti-uzayına bir özdeşlik dönüşümü $X$ uzayının ön-kapalı (kuvvetli kompakt) alt kümelerini $X^*$ anti-uzayının kuvvetli kompakt (ön-kapalı) alt kümelerine resmeder. Böylece eğer $X$ kuvvetli kompakt ise $(X, p\tau)$ ile anti-uzayı $X^*$ ile çakışır. $X$ kuvvetli kompakt olamasa dahi $X^*$ kuvvetli kompakttır.

$S$ kümesi $X$'de ön-kapalı $\longrightarrow$ $S$ kümesi $X^*$'da kuvvetli kompakt

Diğer taraftan $X^*$ anti-uzayının her kuvvetli kompakt alt kümesinin $X$ uzayında ön-kapalı olması için $X$ uzayının $pKC$ uzay ve kuvvetli $k-$uzay olması gerekir.

**Tanım 4.2.** Her $K \subset X$ kuvvetli kompakt kümesi için $A \cap K$ kümesi $K$ da ön-kapalı (ön-açık) iken $A$ ön-kapalı (ön-açık) küme ise $X$ topolojik uzayına kuvvetli $k-$uzay denir [27].

**Tanım 4.3.** Her kuvvetli kompakt kümenin ön-kapalı olduğu bir topolojik uzaya $pKC$ uzayı denir.

**Teorem 4.4.** Bir $pKC$ uzayı kuvvetli $k-$uzaydır ancak ve ancak $X^*$ anti-uzayının her kuvvetli kompakt alt kümesi $X$ 'de ön-kapalı kümedir.

**İspat.** Bir $X$, $pKC$ uzayı kuvvetli $k-$uzay olsun. Herhangi $A$ kümesi $X^*$ anti-uzayında kuvvetli kompakt iken $A$ kümesinin $X$ uzayında ön-kapalı olduğunu göstermek istiyoruz. O yüzden varsayalım $A$, $X$ uzayında ön-kapalı küme olmasın. $X$ kuvvetli $k-$uzay olduğu için $A\cap C$ kümesi $C$ kümesi ön-kapalı yani $X$ uzayında kuvvetli kompakt olmayacak şekilde en az bir $C$ kuvvetli kompakt kümesi vardır. $A\cap C$ kümesinin sonlu arakesit özelliğine sahip ön-kapalı alt kümelerinin $\{B_\alpha\}$ ailesini alalım. Öyle ki $\alpha\in I$ için $\bigcap_\alpha B_\alpha=\varnothing$ olsun. $\alpha\in I$ için $B_\alpha$ kümeleri $A\cap C$ kümesinde ön-kapalı olduğuna göre $B_\alpha=K_\alpha\cap A\cap C$ olacak şekilde $X$ uzayında $K_\alpha$ ön-kapalı kümeleri vardır. $K_\alpha\cap C$ kümesi $C$ kümesinde ön-kapalıdır. Dolayısıyla $X$ uzayında kuvvetli kompakttır. O halde Teorem 4.1'den $K_\alpha\cap C$ kümesi $X^*$ anti-uzayında ön-kapalıdır. $B_\alpha=K_\alpha\cap A\cap C$ olduğundan $B_\alpha\subset K_\alpha\cap C$ olur. $K_\alpha\cap C$ kümesi de $X^*$ anti-uzayında ön-kapalı olduğundan $\mathrm{cl}_*(B_\alpha)\subset K_\alpha\cap C$ olur. Öyle ki $\mathrm{cl}_*(B_\alpha)$ kümesi $B_\alpha$ ailesinin $X^*$ anti-uzayındaki kapanışını göstermektedir. Böylece $A\cap\mathrm{cl}_*(B_\alpha)\subset A\cap K_\alpha\cap C=B_\alpha$ sağlanır. Diğer taraftan $B_\alpha\subset A$ ve $B_\alpha\subset\mathrm{cl}_*(B_\alpha)$ olduğundan $B_\alpha\subset A\cap\mathrm{cl}_*(B_\alpha)$ sağlanır. Böylece $B_\alpha=A\cap\mathrm{cl}_*(B_\alpha)$ olduğu görülür. $B_\alpha$ $A$ kümesinin $X^*$ anti-uzayındaki ön-kapalı alt kümeleri $X^*$ anti-uzayında sonlu arakesit özelliğine sahip olmakla birlikte $\bigcap_\alpha B_\alpha=\varnothing$ olduğundan $A$ kümesi $X^*$ anti-uzayında kuvvetli kompakt değildir.

Kabul edelim ki $X^*$ anti-uzayında her kuvvetli kompakt alt kümesi $X$ uzayında ön-kapalı küme olsun. $X$, $pKC$ uzayının kuvvetli $k-$uzay olduğunu gösterelim. Kabul edelim ki bir $A$ kümesinin $X$ uzayındaki her $K$ kuvvetli kompakt kümesiyle arakesiti $A\cap K$ kümesi $X$ uzayında kuvvetli kompakt küme olsun.

Kabul edelim ki $\{C_\alpha \cap A\}$ sonlu kesişim özelliğine sahip olacak şekilde $X^*$ anti-uzayında ön-kapalı kümelerin ailesi $\{C_\alpha\}$ olsun. Eğer $C_\alpha = X^*$ olursa ispat açıktır. Dolayısıyla $C_\alpha \neq X^*$ olsun. O zaman $C_{\alpha_0}$, $X$ uzayında kuvvetli kompakttır bu yüzden $A \cap C_{\alpha_0}$ $X$ uzayında kuvvetli kompakttır. Ayrıca her $C_\alpha$ kümesi $X$ uzayında ön-kapalıdır. $\{A \cap C_{\alpha_0} \cap C_\alpha\}$ sonlu kesişim özelliğine sahip olduğu için $\bigcap_\alpha \left(A \cap C_{\alpha_0} \cap C_\alpha\right) \neq \varnothing$ dir. Bu yüzden $A$ kümesi $X^*$ anti-uzayında kuvvetli kompakttır.

Sonuç olarak $X$, $pKC$ uzayı kuvvetli $k-$uzay iken $X^*$ anti-uzayının her kuvvetli kompakt alt kümesi $X$ uzayında ön-kapalı olur. Böylece aşağıdaki diyagram $X$ ve $X^*$ anti-uzayının kuvvetli kompakt ve ön-kapalı kümeleri arasındaki ilişkiyi göstermektedir.

$$\begin{tikzcd}
X & & X^* \\
\text{Kuvvetli kompakt} \arrow[d, "pKC \text{ uzayı}"'] & & \text{Ön-kapalı} \arrow[ll, shift right, "X^* \text{ anti-uzayının öz altkümesi}"'] \arrow[d, "\text{Teorem 2.34'den}"] \\
\text{Ön-kapalı} \arrow[rr, shift right] & & \text{Kuvvetli kompakt} \arrow[ll, shift right, "\text{Kuvvetli } k\text{-uzay ve } pKC \text{ uzayı}"']
\end{tikzcd}$$

Diyagram 4.1. $(X,\tau)$ topolojik uzayı ve $(X,p\tau)$ uzayının anti-uzayının alt kümeleri arasındaki ilişki

$(X,\tau)$ ve $(Y,\tau')$ iki topolojik uzay olsun. Bir $f: X \to Y$ bir fonksiyon için aşağıdaki tanımları verelim.

**Tanım 4.5.** Her $K \subset X$ kuvvetli kompakt kümesi için $f\left(K\right) \subset Y$ kuvvetli kompakt ise $f$ fonksiyonuna kuvvetli kompakt fonksiyon denir.

**Tanım 4.6.** Her kuvvetli kompakt kümesi için $f^{-1}\left(K\right) \subset X$ kuvvetli kompakt ise $f$ fonksiyonuna kuvvetli has fonksiyon denir.

**Tanım 4.7.** Her $K \subset Y$ kuvvetli kompakt kümesi için $f^{-1}\left(f\left(K\right)\right) \subset X$ kuvvetli kompakt ise $f$ fonksiyonuna yansımalı kuvvetli kompakt fonksiyon denir.

**Tanım 4.8.** Her $K \subset Y$ kuvvetli kompakt kümesi için $f\left(L\right) = K$ olacak şekilde $X$ ’de bir $L$ kuvvetli kompakt kümesi varsa $f$ fonksiyonuna kuvvetli kompakt iz özellikli fonksiyon denir.

**Tanım 4.9.** $f$ fonksiyonu ön-kararsız, ön-kapalı bir fonksiyon ve her $y \in Y$ için $f^{-1}\left(y\right)$ kuvvetli kompakt ise $f$ fonksiyonuna kuvvetli mükemmel fonksiyon denir.

$X$ ve $Y$ topolojik uzaylar ve sırasıyla anti uzayları $X^*$ ve $Y^*$ olsun. Bir $f : X \to Y$ fonksiyonuna karşılık gelen $f^* : X^* \to Y^*$ fonksiyonu her $x$ için $f^*(x) = f(x)$ ile tanımlansın.

Bunun yanı sıra $X$ ve $Y$, $pKC$ uzaylar ve $f : X \to Y$ örten bir dönüşüm olmak üzere $X$ ve $Y$ uzaylarının anti-uzayları arasında $f^*$ fonksiyonuna karşılık gelen örten dönüşüm $f^* : X^* \to Y^*$ olacak şekilde seçelim. Şimdi bu dönüşümler arasındaki ilişkileri irdeleyelim.

**Teorem 4.10.** $X$ ve $Y$ topolojik uzaylar, $f$ ve $f^*$ örten fonksiyonlar olsun. $f$ kuvvetli has dönüşüm ise $f^*$ ön-kararsız dönüşümdür.

**İspat.** Kabul edelim ki $f$ kuvvetli has fonksiyon olsun. $S$, $Y^*$ anti-uzayının ön-kapalı öz alt kümesi olsun. O zaman $S$, $Y$ uzayında kuvvetli kompakttır. Böylece $f^{-1}(S)$, $X$ uzayında kuvvetli kompakttır. Bu yüzden $f^{*-1}(S)$ dönüşümü $X^*$ anti-uzayında ön-kapalıdır. Yani $f^*$ ön-kararsız dönüşümdür.

**Teorem 4.11.** $X$ bir topolojik uzay ve $Y$ kuvvetli kompakt olmayan bir uzay olsun. $f^*$ kuvvetli ön sürekli ise $f$ kuvvetli has fonksiyondur.

**İspat.** $S$, $Y$ uzayının kuvvetli kompakt alt kümesi ve $Y$ kuvvetli kompakt olmayan bir topolojik uzay olsun. O zaman $S \subset Y$ ve $S \neq Y$ olur. $S$, $Y^*$ anti-uzayında ön-kapalıdır. $f^*$ kuvvetli ön-sürekli olduğundan $f^{*-1}(S)$, $X^*$ anti-uzayında kapalıdır. Her kapalı küme ön-kapalı küme olduğundan $X^*$ anti-uzayında ön-kapalıdır. Buradan $f^{*-1}(S)$, $X^*$ anti-uzayında ön-kapalıdır. Ayrıca $f^{*-1}(S)$, $X^*$ anti-uzayının öz alt kümesi olup $f^{-1}(S)$, $X$ uzayında kuvvetli kompakt küme olur. Dolayısıyla $f$ kuvvetli has fonksiyondur.

**Sonuç 4.12**. $X$ bir topolojik uzay $Y$ kuvvetli kompakt olmayan bir uzay olsun. $f^*$ ön-kararsız dönüşüm ise $f$ kuvvetli has dönüşümdür.

**Teorem 4.13.** $X$ topolojik uzay, $Y$ kuvvetli $k-$uzay, $f$ ve $f^*$ örten fonksiyonlar olsun. $f$ ön-kararsız dönüşüm ise $f^*$ kuvvetli has dönüşümdür.

**İspat.** $f$ ön-kararsız dönüşüm ve $Y$ uzayında kuvvetli $k-$uzay olsun. $f^*$ fonksiyonunun kuvvetli has dönüşüm olduğunu göstermeliyiz. $S$ kümesi $Y^*$ anti-uzayında kuvvetli kompakt ise $Y$ kuvvetli $k-$uzay ve $pKC$ uzayı olduğundan $S$, $Y$ uzayında ön-kapalıdır. $f$ ön kararsız olduğundan $f^{-1}(S)$ kümesi $X$ uzayında ön-kapalıdır. Bu yüzden $f^{*-1}(S)$ kümesi de $X^*$ anti-uzayında kuvvetli kompakttır.

Dolayısıyla $S$ kümesi $Y^*$ anti-uzayında kuvvetli kompakt iken $f^{*-1}(S)$, $X^*$ anti-uzayında kuvvetli kompakt olduğundan $f^*$ kuvvetli has dönüşümdür.

**Teorem 4.14.** $X$ kuvvetli $k-$uzay ve $Y$ topolojik uzay olsun. $f$ ve $f^*$ birer örten fonksiyon olsun. $f^*$ kuvvetli has dönüşüm ise $f$ ön-kararsız dönüşümdür.

**İspat.** $S$, $Y$ uzayında ön-kapalı küme olsun. Bu durumda $S$, $Y^*$ anti-uzayında kuvvetli kompakttır. Böylece $f^*$ kuvvetli has dönüşüm olduğundan $f^{*-1}(S)$, $X^*$ anti-uzayında kuvvetli kompakttır. $X$ kuvvetli $k-$uzay ve $pKC$ uzayı olduğundan $f^{-1}(S)$ kümesi $X$ uzayında ön-kapalıdır. Dolayısıyla $f: X \to Y$ dönüşümü ön-kararsız dönüşümdür.

**Teorem 4.15.** $X$ ve $Y$ topolojik uzaylar $f$ ve $f^*$ birer örten fonksiyon olsun. $f$ bir ön-kapalı fonksiyon ve $X$ kuvvetli $k-$uzay ise o zaman $f^*$ kuvvetli kompakt fonksiyondur.

**İspat.** $S$, $X^*$anti-uzayında kuvvetli kompakt küme olsun. $X$ kuvvetli $k-$uzay ve $pKC$ uzayı olduğundan $S$ kümesi $X$ uzayında ön-kapalı olur. $f$ ön-kapalı fonksiyon olduğundan ve her kapalı küme ön kapalı olduğundan ön kapalı kümenin görüntüsü de ön kapalı olur. Böylece $f(S)$, $Y$ uzayında ön-kapalı olur. Buradan $f^*(S)$ kümesi $Y^*$anti-uzayında kuvvetli kompakt olur. Dolayısıyla $f^*$ kuvvetli kompakt fonksiyondur.

**Teorem 4.16.** $X$ ve $Y$ iki topolojik uzay olsun. $f$ ve $f^*$ birer örten fonksiyon, $Y^*$ kuvvetli $k-$uzay olsun. $f^*$ kuvvetli kompakt dönüşüm ise $f$ ön-kapalı dönüşümdür.

**İspat.** $S$, $X$ uzayında kapalı küme olsun. O halde $S$ $X$ uzayında ön kapalı yani $X^*$'da kuvvetli kompakt olur. $f^*$ kuvvetli kompakt bir dönüşüm olduğundan

$f^*(S)$, $Y^*$ anti-uzayında kuvvetli kompakttır. $Y^*$ kuvvetli $k-$uzay ve $pKC$ uzayı olduğundan $f(S)$ kümesi $Y$ uzayında ön-kapalıdır. Böylece $f$ ön-kapalı dönüşüm olur.

**Sonuç 4.17**. $f$ ve $f^*$ örten fonksiyonlar, $X$ ve $Y^*$ kuvvetli $k-$uzay olsun. $f$ ön-kapalı fonksiyondur ancak ve ancak $f^*$ kuvvetli kompakt fonksiyondur.

**İspat.** Teorem 4.15 ve Teorem 4.16’dan kolayca görülür.

**Sonuç 4.18.** $X$ bir $pKC$ uzayı ve $Y$ kuvvetli $k-$uzay olmak üzere $f$ kuvvetli has dönüşüm ise $f$ ön-kapalı fonksiyondur.

**İspat.** Teorem 4.10’dan $f$ kuvvetli has dönüşüm ise $f^*$ ön-kararsız dönüşümdür. Eğer $f^*$ ön-kararsız dönüşüm ise $f^*$ kuvvetli kompakt dönüşüm olur. Ayrıca $Y$ kuvvetli $k-$uzay olduğundan ve anti uzayı olan $Y^*$ daha kaba topolojiye sahip olduğundan $Y^*$ anti-uzayı da kuvvetli $k-$uzaydır. Sonuç olarak Teorem 4.16’dan, $Y^*$ kuvvetli $k-$uzay ve $f^*$ kuvvetli kompakt dönüşüm ise $f$ ön-kapalı dönüşüm olur.

| | $X$ | $\xrightarrow{f}$ | $Y$ |
|---|---|---|---|
| **Teorem 4.10** | $pKC$ uzayı | Kuvvetli has dönüşüm | $pKC$ uzayı |
| **Teorem 4.13** | $pKC$ uzayı | Ön-kararsız dönüşüm | Kuvvetli $k-$uzay ve $pKC$ uzayı |
| **Teorem 4.15** | Kuvvetli $k-$uzay ve $pKC$ uzayı | Ön-kapalı dönüşüm | $pKC$ uzayı |
| **Sonuç 4.17** | Kuvvetli $k-$uzay ve $pKC$ uzayı | Ön-kapalı dönüşüm | $pKC$ uzayı |

$\Downarrow$

| | $X^*$ | $\xrightarrow{f^*}$ | $Y^*$ |
|---|---|---|---|
| **Teorem 4.10** | $(X, p\tau)$ 'nun anti-uzayı | Ön-kararsız dönüşüm | $(Y, p\tau')$ 'nün anti –uzayı |
| **Teorem 4.11** | $(X, p\tau)$ 'nun anti-uzayı | Ön-sürekli dönüşüm | $(Y, p\tau')$ 'nün anti- uzayı |
| **Sonuç 4.12** | $(X, p\tau)$ 'nun anti-uzayı | Ön kararsız dönüşüm | $(Y, p\tau')$ 'nün anti-uzayı |
| **Teorem 4.13** | $(X, p\tau)$ 'nun anti-uzayı | Kuvvetli has dönüşüm | $(Y, p\tau')$ 'nün anti-uzayı |
| **Teorem 4.14** | $(X, p\tau)$ 'nun anti-uzayı | Kuvvetli has dönüşüm | $(Y, p\tau')$ 'nün anti –uzayı |
| **Teorem 4.15** | $(X, p\tau)$ 'nun anti-uzayı | Kuvvetli kompakt dönüşüm | $(Y, p\tau')$ 'nün anti –uzayı |
| **Teorem 4.16** | $(X, p\tau)$ 'nun anti-uzayı | Kuvvetli kompakt dönüşüm | Kuvvetli $k-$uzay ve $pKC$ uzayı |
| **Sonuç 4.17** | $(X, p\tau)$ 'nun anti-uzayı | Kuvvetli kompakt dönüşüm | Kuvvetli $k-$uzay ve $pKC$ uzayı |

$\Downarrow$

| | $X$ | $\xrightarrow{f}$ | $Y$ |
|---|---|---|---|
| **Teorem 4.11** | $pKC$ uzayı | Kuvvetli has dönüşüm | Kuvvetli kompakt olmayan $pKC$ uzayı |
| **Sonuç 4.12** | $pKC$ uzayı | Kuvvetli has dönüşüm | Kuvvetli kompakt olmayan $pKC$ uzayı |
| **Teorem 4.14** | Kuvvetli $k-$uzay ve $pKC$ uzayı | Ön-kararsız dönüşüm | $pKC$ uzayı |
| **Teorem 4.16** | $pKC$ uzayı | Ön-kapalı dönüşüm | $pKC$ uzayı |

Tablo 4.1. Özel dönüşümler arasındaki ilişkiler

**Teorem 4.19.** $X$ ve $Y$ kuvvetli $k-$uzaylar, $Y$ kuvvetli kompakt olmayan bir topolojik uzay olmak üzere aşağıdakiler eşdeğerdir.

1) $f$ kuvvetli mükemmeldir.
2) $f$ ve $f^*$ ön-kararsız dönüşümdür.
3) $f$ ve $f^*$ kuvvetli has dönüşümdür.
4) $f^*$ kuvvetli mükemmeldir.

**İspat. 1$\Rightarrow$2** $f$ kuvvetli mükemmel fonksiyon olsun. O zaman $f$ ön-kararsız ve kuvvetli has dönüşümdür. $f$ kuvvetli has dönüşüm olduğundan Teorem 4.10'dan $f^*$ ön-kararsız dönüşümdür. Dolayısıyla $f$ kuvvetli mükemmel ise $f$ ve $f^*$ dönüşümlerinin ön-kararsız dönüşüm olduğu görülür.

**2$\Rightarrow$3** $f$ ve $f^*$ ön-kararsız dönüşüm olsun. $f$ ön-kararsız dönüşüm olduğundan Teorem 4.13'den $f^*$ kuvvetli has dönüşümdür. Diğer yandan Sonuç 4.12'den $f^*$ ön-kararsız dönüşüm ve $Y$ kuvvetli kompakt olmayan bir topolojik uzay olduğundan $f$ kuvvetli has dönüşümdür. Dolayısıyla $f$ ve $f^*$ kuvvetli has dönüşümdür.

**3$\Rightarrow$4** Teorem 4.10'dan $f$ kuvvetli has dönüşüm olduğu için $f^*$ ön-kararsızdır. Kabul edelim ki $C$ kümesi $X^*$ anti-uzayında ön-kapalı öz alt kümesi olsun. O zaman $C$ kümesi de $X$ uzayının kuvvetli kompakt alt kümesidir. Ayrıca $f^*$ kuvvetli has dönüşüm olduğundan Teorem 4.14'den $f$ ön-karasız dönüşümdür. Dolayısıyla $f$ ön-karasız olması $f$ kuvvetli kompakt dönüşüm olduğu anlamına gelir. Böylece $f(C)$, $Y$ uzayında kuvvetli kompakt kümedir ve buradan $Y^*$ anti-uzayında ön-kapalı kümedir. Yani $f^*$ ön-kapalı bir dönüşümdür.

Ayrıca her $y \in Y^*$ için $\{y\} \subset Y^*$ kümesi kuvvetli kompakt olduğu göz önüne alınarak $f^*$ kuvvetli has dönüşüm olduğu için $f^{*-1}(y)$ kuvvetli kompakt olduğu da görülür. Sonuç olarak $f^*$ kuvvetli mükemmel fonksiyondur.

**$4 \Rightarrow 1$** $f^*$ kuvvetli mükemmel fonksiyon olsun. $f^*$ kuvvetli mükemmel fonksiyon ise $f^*$ ön-kapalı ve $f^*$ ön-kararsız fonksiyondur. $f^*$ ön-kapalı dönüşüm ise $f^{*-1}$ ön-karasız olur. Buradan $f^{*-1}$ kuvvetli kompakt dönüşümdür yani $f^*$ kuvvetli has dönüşümdür. Teorem 4.14’ten $f$ ön-kararsız dönüşümdür. $f^*$ ön-kararsız dönüşüm olduğundan Sonuç 4.12’den $f$ kuvvetli has dönüşümdür. Sonuç 4.18’den $f$ ön-kapalı fonksiyondur. Dolayısıyla $f$ ön-kapalı, ön-kararsız ve kuvvetli has dönüşüm olduğu için $f$ mükemmel dönüşüm olduğu görülür.

# BÖLÜM 5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmadaki orijinal kısım Bölüm 4'te verilmiştir. Bu bölümde önceki bölümlerde verilen tanım ve teoremler yardımıyla ön-açık kümelerin ailesi olan supratopoloji ile birlikte verilen uzayın anti uzayı tanıtılmıştır. $pKC$ uzayının tanımı yapılmış ve kuvvetli $k$-uzay olan $pKC$ uzaylarında kuvvetli kompakt kümeler ile ön-kapalı kümelerin birbirlerine nasıl karşılık geldikleri belirlenmiştir. Ön-açık kümelerin ailesi olan supratopoloji ile verilen uzaylar arasındaki dönüşümler tanımlanmıştır. $pKC$ uzayları ve kuvvetli $k$-uzaylar arasındaki dönüşümler ile bu uzayların anti uzayları arasında karşılık gelen dönüşümler araştırılarak ilgili teoremler ifade ve ispat edilmiştir. Bu dönüşümler arasındaki ilişkiler irdelenerek elde edilen sonuçlar bir tablo yardımıyla özetlenmiştir.

Bu çalışmada kuvvetli $k-$uzayların anti uzayları ve ilgili dönüşümler için elde edilen teorem ve sonuçlar genelleştirilmiş $k-$uzaylar tanımlanarak ön-açık kümeleri de içine alan $\gamma-$açık kümelerin ailesi olan genelleştirilmiş topolojik uzaylarda araştırılabilir. Genelleştirilmiş topolojik uzaylar arasındaki dönüşümler ile bu uzayların anti uzayları arasındaki dönüşümlerin birbirlerine nasıl karşılık gelecekleri daha ileri bir çalışma olarak ele alınabilir.

## KAYNAKLAR


[1] De Groot, J., An Isomorphism Principle in General Topology, Bull. Amer. Math Soc., 73,465-467, 1967.

[2] De Groot J., Strecker G.E., Wattel E., The Compactness Operator in General Topology, General Topology and Its Relations to Modern Analysis and Algebra, Proc. Second Prague Topological Sympos. 161-163, 1966.

[3] Wattle, E., The Compactness Operator in Set Theory and Topology, Math. Centre. Tracts., 1968.

[4] Liden, N., $k-$Spaces, Their Anti-Spaces and Related Maps., Washington Uni., Phd Thesis, 1973.

[5] Liden, N., $k-$Spaces, Their Anti-Spaces and Related Maps, Pasific. J. Math., 2, 505-514, 1975.

[6] Whitehead, J.H.C., Simplicial Spaces, Nuclei and m-Groups, Proc. London Math. Soc., 45 (2), 243-327, 1939.

[7] Arens, R., A Topology for Spaces of Transformations, Ann. of Math., 47 (2), 480–495, 1946.

[8] Spanier, E.H., Algebraic Topology, McGraw-Hill Book Co., New York-Toronto, Ont.-London, 528, 1966.

[9] Gale, D., Compact Sets of Functions and Functions Rings, Proc. Amer. Math. Soc., 1, 303-308, 1950.

[10] Bagley, R.W., Yang, J.S., On $k-$Spaces and Function Spaces, Proc. Amer. Math. Soc., 17, 703–705, 1966.

[11] Bagley, R.W., Weddington, D.D., Products of $k'-$Spaces, Proc. Amer. Math. Soc., 22, 392–394, 1969.

[12] Brown, R., Function Spaces and Product Topologies, Quart. J. Math., Oxford Ser., 15 (2), 238–250, 1964.

[13] Mrówka, S., On Function Spaces, Fund. Math., 45, 273–282, 1958.

[14] Poppe, H., Stetige Konvergenz und der Satz von Ascoli und Arzelà., (German) Math. Nachr., 30, 87–122, 1965.

[15] Weston, J.D., A Generalization of Ascoli's Theorem, Mathematika, 6, 19-24, 1959.

[16] Noble, N., $k-$Spaces and Some Generalizations, Thesis (Ph.D.)–University of Rochester, 113, 1967.

[17] Levine, N., Semi-Open Sets and Semi-Continuity in Topological Spaces, Amer. Math. Soc., 70, 36-41, 1963.

[18] Mashhour, A.S., Abd El-Monsef, M.E., El-Deeb, S.N., On Precontinuous and Weak Precontinuous Mappings, Proc. Math. Phys. Soc. Egypt, 53, 47-53, 1982.

[19] Mashhour, A.S., Abd El-Monsef, M.E., Hasanein, I.A., On Pretopological spaces, Bull. Math. Soc. Sci. Math., R.S.R., 28 (76), 39-45, 1984.

[20] Andrijević, D., A Note on Preopen Sets, Third National Conference On Topology (Italian) (Trieste, 1986), Rend. Circ. Mat. Palermo, (2) 18, 195–201, 1988.

[21] Andrijević, D., On the Topology Generated by Preopen Sets, Mat. Vesnik, 39 (4), 367–376, 1987.

[22] Reilly, I.L., Vamanamurthy M. K., On Some Questions Concerning Preopen Sets, Kyungpook Math. J., 30 (1), 87–93, 1990.

[23] Young, B.J., Seong, W.J., Hyeon, J.L., Joon, W.L., Applications of Pre-Open Sets, Appl. Gen. Topol., 9 (2), 213–228, 2008.

[24] Pták, V., Completeness and Open Mapping Theorem, Bull. Soc. Math. France, 86, 41–74, 1958.

[25] Blumberg, H., New Properties of All Real Functions, Trans. Amer. Math. Soc., 24 (2), 113–128, 1922.

[26] Kar, A., Bhattacharyya, P., Some Weak Separation Axioms, Bull. Cal. Math. Soc., 82, 415-422, 1990.

[27] İnce, İ., Kuvveli $k-$Uzaylar, Sakarya Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, Aralık, 2015.

[28] Kelley, J., General Topology, Van Nostrand, 1955.

[29] Dugundji, J., Topology, Allyn and Bacon, Inc., Boston, Mass., 447, 1966.

Császár, Á., Generalized Topology, Generalized Continuity, Acta Math.

[30] Hungar., 96 (4), 351-357, 2002.

[31] Popa, V., Characterization of H-Almost Continuous Functions, Glasnik Math., 22 (42), 157-161, 1987.

[32] Császár, Á., $\gamma-$Compact Spaces, Acta Math. Hungar., 87 (1-2), 99-107, 2000.

[33] Ganster, M., Some Remarks on Strongly Compact Spaces and Semi-Compact Spaces, Bull. Malaysian Math. Soc., 2 (10), 67–81, 1987.

[34] Mashhour, A.S., Abd El-Monsef, M.E., Hasanein, I.A., Noiri, T., Strongly Compact Spaces, Delta J. Sci., 8, 30–46, 1984.

[35] Ersoy, S., İnce, İ., Bilgin, M., Strongly $k-$Spaces, Bull. Iranian Math. Soc., accepted.

[36] Thomas, J., John, S.J., $\mu-$Compactness in Generalized Topological Spaces, J. Adv. Stud. Topol., 3 (3), 18–22, 2012.

[37] Félix, Y., Halperin, S., Thomas, J.C., Rational Homotopy Theory, II. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, 412, 978-981, 2015.

[38] Steinlage, R.C., On Ascoli Theorems and the Product of $k-$ Spaces, Kyungpook Math. J., 12, 145–151, 1972.

[39] Weddington, D.D., On $k-$Spaces, Proc. Amer. Math. Soc., 22, 635–638, 1969.

[40] A.Garcia-Maynez, On $KC$ and $k-$Spaces, An. Inst. Math. Univ. Nac. Autonoma Mexico. 1, 33-50, 1975.

[41] Angelo, B., Camillo, C., Minimal $KC$ Spaces and Compact, Topology Appl., 13, 1426-1429, 2008.

[42] Angelo, B., Camillo, C., Further Remarks on $KC$ and Related Spaces, Comment. Math. Univ. Carolin., 3, 417-426, 2011.

[43] Chiara, B., Camillo, C., On Some Questions About $KC$ and Related Spaces, Topology Appl., 17, 2692-2703, 2009.

[44] Paul, F., On Low Dimensional $\mathrm{T}_2$-Spaces, Topology Appl., 6, 785-793, 2013.

## ÖZGEÇMİŞ

Ayşenur Türkoğlu, 23.10.1992 tarihinde Sakarya'da doğdu. İlk ve orta öğrenimini Sakarya'da tamamladı. 2010 yılında Sakarya Üniversitesi, Matematik Bölümünde başladığı Lisans öğrenimini 2014 yılında tamamladı. Aynı yılın sonunda Sakarya Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Topoloji Bilim Dalında yüksek lisans eğitimine başladı.