T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BAZI ÖZEL TİPLİ MATRİSLERİN LİNEER KOMBİNASYONLARI ÜZERİNE

DOKTORA TEZİ

Murat SARDUVAN

Enstitü Anabilim Dalı	**:**	**MATEMATİK**
Tez Danışmanı	**:**	**Doç. Dr. Halim ÖZDEMİR**

Nisan 2009

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BAZI ÖZEL TİPLİ MATRİSLERİN LİNEER KOMBİNASYONLARI ÜZERİNE

DOKTORA TEZİ

Murat SARDUVAN

Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK

Bu tez 10 / 04 /2009 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından ~~Oyçokluğu~~ / Oybirliği ile kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Müjgan Tez Jüri Başkanı	Doç. Dr. Halim Özdemir Üye	Doç. Dr. Ahmet Yaşar Özban Üye
Prof. Dr. Ali Ekber Kuliev Üye		Prof. Dr. Refik Keskin Üye

ÖNSÖZ

Bu konunun seçiminde ve çalışmamın her safhasında büyük bir özveri ile bana yardımcı olan, bilgi ve tecrübelerinden yararlandığım, çok değerli hocam Doç. Dr. Halim Özdemir'e şükranlarımı sunarım.

Ayrıca, değerli tavsiye ve yardımlarından dolayı Doç. Dr. Ahmet Yaşar Özban'a ve benden her zaman yardım ve desteklerini esirgemeyen aileme teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

$\mathbb{C}$	: Kompleks sayılar kümesi
$\mathbb{C}^{*}$	: Sıfırdan farklı kompleks sayılar kümesi
$\mathbb{C}^{*,1}$	: Sıfır ve bir sayılarından farklı kompleks sayılar kümesi
$\mathbb{C}_{m,n}$	: $m\times n$ boyutlu kompleks matrisler kümesi
$\mathbb{C}_{n}$	: $n\times n$ boyutlu kompleks matrisler kümesi
$\mathbb{C}_{n}^{P}$	: $n\times n$ boyutlu kompleks idempotent matrisler kümesi
$\mathbb{C}_{n}^{T}$	: $n\times n$ boyutlu kompleks tripotent matrisler kümesi
$\mathbb{C}_{n}^{ET}$	: $n\times n$ boyutlu kompleks esas tripotent matrisler kümesi
$\mathbb{C}_{n}^{A}$	: $n\times n$ boyutlu kompleks involutif matrisler kümesi
$\mathbb{C}_{n}^{Q}$	: $n\times n$ boyutlu kompleks kuadripotent matrisler kümesi
$\mathbb{C}_{n}^{HGP}$	: $n\times n$ boyutlu kompleks hipergenelleştirilmiş projektörler kümesi
$\mathbb{C}_{n}^{EP}$	: $n\times n$ boyutlu kompleks EP matrisler kümesi
$\overline{c}$	: c kompleks sayısının eşleniği
$\in$	: Elemanıdır
$\mathrm{U}\cup\mathrm{V}$	: U bileşim V kümesi
$\mathrm{U}\setminus\mathrm{V}$	: U fark V kümesi
$\sqrt[n]{c}$	: $x^{n}=c$ denklemini sağlayan x kompleks sayılarının kümesi
$\Rightarrow$	: İse
$\mathbf{I}$	: Birim matris
$\mathbf{0}$	: Sıfır matris
$\mathbf{M}^{-1}$	: $\mathbf{M}$ matrisinin tersi
$\mathbf{M}^{-}$	: $\mathbf{M}$ matrisinin genelleştirilmiş tersi
$\mathbf{M}^{\#}$	: $\mathbf{M}$ matrisinin grup tersi
$\mathbf{M}^{\dagger}$	: $\mathbf{M}$ matrisinin Moore–Penrose tersi

$\mathbf{M}^*$	: $\mathbf{M}$ matrisinin eşlenik transpozesi
$\sigma(\mathbf{M})$	: $\mathbf{M}$ matrisinin spektrumu
$\mathcal{R}(\mathbf{M})$	: $\mathbf{M}$ matrisinin sütun uzayı
$\mathcal{N}(\mathbf{M})$	: $\mathbf{M}$ matrisinin sıfır uzayı
$\mathbf{M}_1 \oplus \mathbf{M}_2$	: $\mathbf{M}_1$ ile $\mathbf{M}_2$ matrislerinin direkt toplamı
vs.	: Vesaire
bkz.	: Bakınız
sf.	: Sayfa numarası
$\operatorname{diag}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$	: Köşegen elemanları $a_1, a_2, \ldots, a_2$ olan $n \times n$ boyutlu köşegen matris

TABLOLAR LİSTESİ

ÖZET

Anahtar kelimeler: İdempotent matris, tripotent matris, kuadripotent matris, involutif matris, benzer matris, köşegenleştirme, lineer kombinasyon, değişmelilik

Çalışmanın ilk iki bölümünde bazı gösterimler, kısa bir literatür bilgisi ve bazı ön bilgiler verilmektedir. Çalışmanın sonraki bölümlerinde c_1, c_2 sıfırdan farklı kompleks sayılar ve $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2$ $n \times n$ boyutlu sıfırdan farklı kompleks matrisler olmak üzere, $c_1\mathbf{M}_1 + c_2\mathbf{M}_2$ biçimindeki lineer kombinasyon matrisleri ele alınmaktadır.

Literatürde, $\mathbf{M}_i$, $i = 1,2$, matrisleri idempotent, değişmeli tripotent ve değişmeli hipergenelleştirilmiş projektör olduğunda lineer kombinasyon matrisinin, sırasıyla, tripotent veya idempotent, tripotent ve hipergenelleştirilmiş projektör olduğu tüm durumlar karakterize edilmiştir. Bu sonuçlar çalışmanın ilerleyen bölümlerinde yeri geldikçe verilmektedir. Bunların yanı sıra, lineer kombinasyonda içerilen matrislerin birbirinden farklı tipli olması durumunda da benzer bazı çalışmalar vardır.

Çalışmada, önce, $\mathbf{M}_i$, $i = 1,2$, matrisleri idempotent olduklarında, lineer kombinasyon matrisinin involutif olduğu tüm durumlar karakterize edilmektedir. Sonra, lineer kombinasyondaki matrisler değişmeli tripotent olduklarında, ilk olarak $c_1\mathbf{M}_1 + c_2\mathbf{M}_2$ matrisinin tripotentliğine ilişkin mevcut teoremin yeni bir ispatı ve ikinci olarak lineer kombinasyon matrisinin idempotent veya involutif olduğu tüm durumların karakterizasyonları verilmektedir. Ayrıca, bazı özel koşullar altında, $\mathbf{M}_i$, $i = 1,2$, matrisleri kuadripotent olduklarında $c_1\mathbf{M}_1 + c_2\mathbf{M}_2$ matrisinin kuadripotent, tripotent ve idempotent olduğu tüm durumlar karakterize edilmektedir. Son olarak, lineer kombinasyonda içerilen matrisler değişmeli involutif ve involutif olduklarında lineer kombinasyon matrisinin, sırasıyla, tripotent ve idempotent veya involutif olduğu durumlar ortaya konulmaktadır.

ON LINEAR COMBINATIONS OF SOME SPECIAL TYPES OF MATRICES

SUMMARY

Key Words: Idempotent matrix, tripotent matrix, quadripotent matrix, involutive matrix, similar matrix, diagonalization, linear combination, commutativity

It has been given some notations, a short literature information, and some preliminaries in the first two chapters of the work. The linear combination matrices of the form $c_1\mathbf{M}_1 + c_2\mathbf{M}_2$ have been considered in the sequel chapters of the work, where c_1, c_2 are nonzero complex numbers and $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2$ are $n \times n$ nonzero complex matrices.

In the literature, all situations where the linear combination matrix is tripotent or idempotent, tripotent, and hypergeneralized projector were characterized when the matrices $\mathbf{M}_i$, $i = 1, 2$, are idempotent, commuting tripotent, and commuting hypergeneralized projectors, respectively. In the sequel chapters of this work, these results have been given in due course. Besides, there are also some similar studies when the types of matrices involved in the linear combination are different from each other.

In the work, first, all situations where the linear combination matrix is involutive have been characterized when $\mathbf{M}_i$, $i = 1, 2$, are idempotent matrices. Then, when the matrices involved in the linear combination are commuting tripotent, firstly a new proof of the available theorem related to the tripotency of the matrix $c_1\mathbf{M}_1 + c_2\mathbf{M}_2$, and secondly the characterizations of all situations where the linear combination matrix is idempotent or involutive have been given. Furthermore, under some particular conditions, all situations where the matrix $c_1\mathbf{M}_1 + c_2\mathbf{M}_2$ is quadripotent, tripotent, and idempotent have been characterized when $\mathbf{M}_i$, $i = 1, 2$, are quadripotent matrices. Finally, when the matrices included in the linear combination are commuting involutive and involutive, all situations where the linear combination matrix is tripotent and idempotent or involutive have been established, respectively.

BÖLÜM 1. GİRİŞ

1.1. Bazı Gösterimler

m ve n pozitif tam sayılar olmak üzere $\mathbb{C}$, $\mathbb{C}^*$, $\mathbb{C}^{*,1}$, $\mathbb{C}_{m,n}$ ve $\mathbb{C}_n$ sembolleri, sırasıyla, kompleks sayıların, sıfırdan farklı kompleks sayıların, sıfır ve bir sayılarından farklı kompleks sayıların, $m \times n$ boyutlu kompleks matrislerin ve $n \times n$ boyutlu kompleks matrislerin kümelerini göstersin. Çalışma boyunca skalerler c gibi küçük ve italik, matrisler $\mathbf{M}$ gibi koyu ve büyük, kümeler ise U gibi büyük harfler ile gösterilecektir. Ayrıca alışılageldiği gibi, idempotent matris, tripotent matris, involutif matris, kuadripotent matris, hipergenelleştirilmiş projektör, birim matris ve sıfır matris, sırasıyla, $\mathbf{P}$, $\mathbf{T}$, $\mathbf{A}$ (bazen $\mathbf{B}$), $\mathbf{Q}$, $\mathbf{H}$, $\mathbf{I}$ ve $\mathbf{0}$ ile gösterilecektir.

1.2. Çalışmanın İçeriği

c_1, c_2 sıfırdan farklı kompleks sayılar ve $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2$ $n \times n$ boyutlu sıfırdan farklı kompleks matrisler olmak üzere,

$$\mathbf{M} = c_1\mathbf{M}_1 + c_2\mathbf{M}_2 \tag{1.1}$$

olsun. $\mathbf{M}_1$ ve $\mathbf{M}_2$ matrisleri idempotent olduklarında, (1.1) biçimli $\mathbf{M}$ lineer kombinasyon matrisinin idempotent ve tripotent olduğu durumları karakterize etme problemleri, sırasıyla, [2, 24] ve [4, 5] çalışmalarında ele alınmıştır. Bölüm 3 te, öncelikle bu sonuçlar verilmekte ve sonra $\mathbf{M}_1$ ve $\mathbf{M}_2$ matrisleri idempotent olduklarında, $\mathbf{M}$ matrisinin involutif olduğu tüm durumlar karakterize edilmektedir.

$\mathbf{M}_1$ ve $\mathbf{M}_2$ matrisleri tripotent olduklarında, $\mathbf{M}$ matrisinin tripotent olduğu durumları karakterize etme problemi Baksalary, Baksalary ve Özdemir tarafından ele alınmıştır [4]. Bölüm 4, bu sonucun ifadesini ve farklı bir yöntem ile ispatını içermektedir. Bununla birlikte, $\mathbf{M}_1$ ve $\mathbf{M}_2$ matrisleri tripotent olduklarında, $\mathbf{M}$ matrisinin idempotent veya involutif olduğu tüm durumlar da bu bölümde karakterize edilmektedir.

$\mathbf{M}_1$ ve $\mathbf{M}_2$ matrisleri hipergenelleştirilmiş projektör olduklarında, $\mathbf{M}$ matrisinin yine bir hipergenelleştirilmiş projektör olduğu durumları karakterize etme problemi, $\mathbf{M}_1$ ve $\mathbf{M}_2$ matrisleri üzerine koyulan ek koşullar ile birlikte Baksalary, Baksalay ve Groß tarafından ele alınmıştır [6]. Daha sonra Baksalary ve Benítez $\mathbf{M}_1$ ve $\mathbf{M}_2$ matrisleri üzerine koyulan ek koşulları yalnızca değişmelilik koşuluna indirgeyip bu sonuçları genelleştirmiştir [9]. Söz konusu sonuçların ifadeleri Bölüm 5 te verilmektedir. Ayrıca, $\mathbf{M}_1$ ve $\mathbf{M}_2$ matrisleri kuadripotent olduklarında [6] çalışmasındaki koşullara benzer koşullar altında, $\mathbf{M}$ matrisinin kuadripotent, tripotent ve idempotent olduğu durumlar da yine bu bölümde karakterize edilmektedir.

Son olarak, $\mathbf{M}_1$ ve $\mathbf{M}_2$ matrisleri involutif olduklarında, $\mathbf{M}$ matrisinin ne zaman tripotent, idempotent ve involutif olacağı problemlerinin çözümleri ise Bölüm 6 da içerilmektedir.

Dikkat edilirse yukarıdakilerin hepsi iki matrisin (1.1) biçimli lineer kombinasyonu ile ilgilidir. Oysa literatürde üç matrisin lineer kombinasyonu ile ilgili çalışmalar da vardır. Örneğin, c_1, c_2, c_3 sıfırdan farklı kompleks sayılar ve $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3$ $n \times n$ boyutlu sıfırdan farklı kompleks idempotent matrisler olmak üzere,

$$\mathbf{P} = c_1\mathbf{P}_1 + c_2\mathbf{P}_2 + c_3\mathbf{P}_3$$

biçimindeki lineer kombinasyonun idempotent olduğu durumları karakterize etme problemi, $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3 \in \mathbb{C}_n$ matrisleri üzerine koyulan çeşitli koşullar altında, ele alınmıştır [7, 8, 24]. Bu çalışmada üç idempotent matrisin lineer kombinasyonu ile ilgili herhangi bir sonuç ortaya konulmamıştır. Ancak iki matristen oluşan lineer kombinasyonlar ile ilgili ortaya konulan bazı sonuçların ispatlarında, üç idempotent matrisin lineer kombinasyonu ile ilgili sonuçlar kullanıldığından, bu sonuçlar Bölüm 3 te verilmektedir.

1.3. Çalışmanın Düzeni

Çalışmanın daha sonraki bölümlerine temel teşkil edecek tanım ve teoremler Bölüm 2 de verilmektedir. Daha sonraki bölümler sıralanırken (1.1) biçimli lineer kombinasyon matrisleri ile ilgili problemlerin literatürde ele alınma sırasına uyulmuştur. (1.1) biçimli lineer kombinasyon matrisinin ait olduğu özel matris kümelerinin bölümler içindeki sıralamasında ise, genel matris kümelerinden özel matris kümelerine doğru bir yol izlenmiştir. Böyle yapılmasının nedeni çalışmanın kolay izlenebilmesi ve sonuçların ispatları yapılırken genel anlamda bir bütünlük sağlanmasıdır.

BÖLÜM 2. ÖN BİLGİLER

2.1. Matrisler İçin Bazı Ters Çeşitleri

$\mathbf{M} \in \mathbb{C}_n$ olsun. Eğer $\mathbf{M}\mathbf{M}^{-1} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{M} = \mathbf{I}$ olacak şekilde bir $\mathbf{M}^{-1} \in \mathbb{C}_n$ matrisi varsa $\mathbf{M}$ matrisine tersinir (veya nonsinguler) matris ve $\mathbf{M}^{-1}$ matrisine $\mathbf{M}$ matrisinin tersi denir. Aksi takdirde, $\mathbf{M}$ matrisine tersinir olmayan (veya singuler) matris denir. Bununla birlikte, ters kavramı 1920'li yıllardan bu yana tüm matrislere genişletilmektedir. Aşağıda bu tip terslerden birkaçına değinilmektedir.

Tanım 2.1. $\mathbf{M}\mathbf{M}^{-}\mathbf{M} = \mathbf{M}$ denklemini sağlayan bir $\mathbf{M}^{-} \in \mathbb{C}_{n,m}$ matrisine $\mathbf{M} \in \mathbb{C}_{m,n}$ matrisinin genelleştirilmiş tersi denir [11].

Tanım 2.2. $\mathbf{M}\mathbf{M}^{\#}\mathbf{M} = \mathbf{M}$, $\mathbf{M}^{\#}\mathbf{M}\mathbf{M}^{\#} = \mathbf{M}^{\#}$, $\mathbf{M}\mathbf{M}^{\#} = \mathbf{M}^{\#}\mathbf{M}$ denklemlerini sağlayan bir $\mathbf{M}^{\#} \in \mathbb{C}_n$ matrisine $\mathbf{M} \in \mathbb{C}_n$ matrisinin grup tersi denir [11].

Tanım 2.3. $\mathbf{M} \in \mathbb{C}_{m,n}$ matrisi için Penrose denklemleri olarak bilinen $\mathbf{M}\mathbf{M}^{\dagger}\mathbf{M} = \mathbf{M}$, $\mathbf{M}^{\dagger}\mathbf{M}\mathbf{M}^{\dagger} = \mathbf{M}^{\dagger}$, $\left(\mathbf{M}\mathbf{M}^{\dagger}\right)^{*} = \mathbf{M}\mathbf{M}^{\dagger}$, $\left(\mathbf{M}^{\dagger}\mathbf{M}\right)^{*} = \mathbf{M}^{\dagger}\mathbf{M}$ denklemlerini sağlayan $\mathbf{M}^{\dagger} \in \mathbb{C}_{n,m}$ matrisine $\mathbf{M}$ matrisinin Moore–Penrose tersi denir. Burada $(\cdot)^{*}$, kompleks bir matrisin eşlenik transpozesini işaret etmektedir [11].

Herhangi bir matris için, grup tersin her zaman mevcut olmadığı, ancak genelleştirilmiş ve Moore–Penrose terslerin her zaman mevcut olduğu ve hatta Moore–Penrose tersin tek türlü olduğu bilgileri ve yukarıdaki kavramlara ilişkin ayrıntılı bilgi için, [16, 22, 27] kaynaklarına da bakılabilir.

Çalışma boyunca, $\mathbf{M}^{-}$, $\mathbf{M}^{\#}$ ve $\mathbf{M}^{\dagger}$ sembolleri, sırasıyla, $\mathbf{M}$ kompleks matrisinin genelleştirilmiş tersini, grup tersini ve Moore–Penrose tersini gösterecektir.

2.2. Bazı Özel Matris Tipleri ve Özellikleri

Tanım 2.4. $\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}$ özelliğine sahip bir $\mathbf{P} \in \mathbb{C}_n$ matrisine idempotent matris denir [16].

Tanım 2.5. $\mathbf{T}^3 = \mathbf{T}$ özelliğine sahip bir $\mathbf{T} \in \mathbb{C}_n$ matrisine tripotent matris denir [16].

Tanım 2.6. $\mathbf{M}^3 = \mathbf{M}$ ile birlikte $\mathbf{M}^2 \neq \mathbf{M}$ ve $\mathbf{M}^2 \neq -\mathbf{M}$ özelliklerine sahip bir $\mathbf{M} \in \mathbb{C}_n$ matrisine esas tripotent matris denir [3].

Tanım 2.7. $\mathbf{A}^2 = \mathbf{I}$ özelliğine sahip bir $\mathbf{A} \in \mathbb{C}_n$ matrisine involutif matris denir [31].

Tanım 2.8. $\mathbf{Q}^4 = \mathbf{Q}$ özelliğine sahip bir $\mathbf{Q} \in \mathbb{C}_n$ matrisine kuadripotent matris denir [18].

Tanım 2.9. t pozitif tamsayı olmak üzere, $\mathbf{M}^t = \mathbf{M}$ özelliğine sahip bir $\mathbf{M} \in \mathbb{C}_n$ matrisine t-potent matris denir [12].

Tanım 2.10. $\mathbf{H}^2 = \mathbf{H}^{\dagger}$ özelliğine sahip bir $\mathbf{H} \in \mathbb{C}_n$ matrisine hipergenelleştirilmiş projektör denir [18].

Tanım 2.11. $\mathcal{R}(\mathbf{M}) = \mathcal{R}(\mathbf{M}^*)$ (veya denk olarak $\mathbf{M}^{\dagger}\mathbf{M} = \mathbf{M}\mathbf{M}^{\dagger}$) özelliğine sahip bir $\mathbf{M} \in \mathbb{C}_n$ matrisine EP matris denir [18].

Tanım 2.12. $\mathbf{M} = \mathbf{M}^{\#}$ özelliğine sahip (yani kendi grup tersine eşitse) bir $\mathbf{M} \in \mathbb{C}_n$ matrisine grup involutif matris denir [15].

Tanım 2.13. $\mathbf{MM}^* = \mathbf{M}^*\mathbf{M}$ özelliğine sahip bir $\mathbf{M} \in \mathbb{C}_n$ matrisine normal matris denir [11].

Çalışma boyunca $\mathbb{C}_n^P$, $\mathbb{C}_n^T$, $\mathbb{C}_n^{ET}$, $\mathbb{C}_n^A$, $\mathbb{C}_n^Q$, $\mathbb{C}_n^{HGP}$ ve $\mathbb{C}_n^{EP}$ sembolleri, sırasıyla, idempotent matris, tripotent matris, esas tripotent matris, involutif matris, kuadripotent matris, hipergenelleştirilmiş projektör ve EP matris kümelerini gösterecektir. Yukarıdaki tanımlar incelendiğinde $\mathbb{C}_n^P, \mathbb{C}_n^A \subset \mathbb{C}_n^T$ ve $\mathbb{C}_n^P, \mathbb{C}_n^T \subset \mathbb{C}_n^Q$ özelliklerinin varlığı kolayca görülür. Ancak bu özeliklerin terslerinin genel olarak doğru olmadığını vurgulamakta yarar vardır.

Şimdi, yukarıdaki kavramlarla ilgili bazı özel sonuçlar ispatsız olarak verilecektir.

Teorem 2.14. $\mathbb{C}_n^P = \mathbb{C}_n^Q \cap \mathbb{C}_n^T$ ve $\mathbb{C}_n^{HGP} = \mathbb{C}_n^{EP} \cap \mathbb{C}_n^Q$ dir [18].

Teorem 2.15. $\mathbf{M} \in \mathbb{C}_n$ olsun. Bu durumda aşağıdaki koşullar denktir:

(a) $\mathbf{M}$ bir grup involutif matristir,

(b) $\mathbf{M}^3 = \mathbf{M}$,

(c) $\mathbf{D}$ matrisi, köşegen elemanları 0, 1 veya -1 sayılarından oluşan bir köşegen matris olmak üzere $\mathbf{M} = \mathbf{LDL}^{-1}$ olacak şekilde bir $\mathbf{L}$ matrisi vardır [15].

2.3. Özdeğer, Özvektör, Benzer Matris ve Köşegenleştirme

Tanım 2.16. $\mathbf{M} \in \mathbb{C}_n$ olsun. Eğer $\mathbf{Mx} = \lambda\mathbf{x}$ olacak şekilde sıfırdan farklı bir $\mathbf{x} \in \mathbb{C}_{n,1}$ vektörü varsa, $\lambda \in \mathbb{C}$ skalerine $\mathbf{M}$ matrisinin bir özdeğeri ve $\mathbf{x}$ vektörüne $\mathbf{M}$ matrisinin λ özdeğeri ile ilişkili bir özvektörü denir. $\mathbf{M}$ matrisinin bütün özdeğerlerinin kümesine $\mathbf{M}$ matrisinin spektrumu denir ve $\sigma(\mathbf{M})$ ile gösterilir [21].

Tanım 2.17. $\mathbf{M} \in \mathbb{C}_n$ olsun. Kökleri $\mathbf{M}$ matrisinin özdeğerleri olarak bilinen $\det(t\mathbf{I} - \mathbf{M}) = 0$ denklemine $\mathbf{M}$ matrisinin karakteristik denklemi denir. *n*.

dereceden $\det(t\mathbf{I}-\mathbf{M})$ polinomuna da $\mathbf{M}$ matrisinin karakteristik polinomu denir ve $p_{\mathbf{M}}(t)$ ile gösterilir [31].

Tanım 2.18. $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2 \in \mathbb{C}_n$ matrisleri verilsin. Eğer $\mathbf{M}_2 = \mathbf{S}\mathbf{M}_1\mathbf{S}^{-1}$ olacak şekilde bir $\mathbf{S}$ tersinir matrisi varsa, $\mathbf{M}_2$ matrisi $\mathbf{M}_1$ matrisine benzerdir denir [19].

Tanım 2.19. Bir $\mathbf{M} \in \mathbb{C}_n$ matrisine, bir köşegen matrise benzer ise köşegenleştirilebilir matris denir [19].

Teorem 2.20. $\mathbf{M} \in \mathbb{C}_n$ verilsin. $\mathbf{M}$ matrisi yerine yazıldığında sıfıra eşit olan minumum dereceli bir tek $q_{\mathbf{M}}(t)$ monik (en yüksek dereceli teriminin katsayısı 1 olan) polinomu vardır. Bu polinomun derecesi en fazla n olabilir. Eğer $p(t)$; $p(\mathbf{M}) = \mathbf{0}$ olacak şekildeki herhangi bir polinom ise, $q_{\mathbf{M}}(t)$ polinomu $p(t)$ polinomunu böler [19].

Tanım 2.21. $\mathbf{M} \in \mathbb{C}_n$ verilsin. $\mathbf{M}$ matrisi yerine yazıldığında sıfıra eşit olan minumum dereceli yegane $q_{\mathbf{M}}(t)$ monik polinomuna $\mathbf{M}$ matrisinin minimal polinomu denir [19].

Teorem 2.22. Her $\mathbf{M} \in \mathbb{C}_n$ matrisi için, $q_{\mathbf{M}}(t)$ minimal polinomu $p_{\mathbf{M}}(t)$ karakteristik polinomunu böler. Ayrıca $q_{\mathbf{M}}(\lambda) = 0$ olmasının gerekli ve yeterli koşulu λ skalerinin $\mathbf{M}$ matrisinin bir özdeğeri olmasıdır. Dolayısıyla $p_{\mathbf{M}}(t) = 0$ denkleminin her kökü $q_{\mathbf{M}}(t) = 0$ denkleminin de bir köküdür [19].

Teorem 2.23. Aşağıdaki koşulların her biri, $\mathbf{M} \in \mathbb{C}_n$ matrisinin köşegenleştirilebilir olmasının gerekli ve yeterli koşuludur:

(a) $q_{\mathbf{M}}(t)$ minimal polinomu farklı lineer çarpanlara sahiptir.

(b) $q_{\mathbf{M}}(t) = 0$ denkleminin her bir kökü tek katlıdır.

(c) $q_{\mathbf{M}}(t)=0$ olacak şekildeki her bir t değeri için $q_{\mathbf{M}}(t)$ polinomunun türevi sıfırdan farklıdır [19].

Tanım 2.24. $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2 \in \mathbb{C}_n$ köşegenleştirilebilir matrisler olsun. Eğer $\mathbf{S}^{-1}\mathbf{M}_1\mathbf{S}$ ve $\mathbf{S}^{-1}\mathbf{M}_2\mathbf{S}$ matrisleri köşegen matris olacak şekilde bir $\mathbf{S}$ tersinir matrisi varsa, $\mathbf{M}_1$ ve $\mathbf{M}_2$ matrislerine eşanlı (birlikte) köşegenleştirilebilir matrisler denir [19].

Teorem 2.25. $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2 \in \mathbb{C}_n$ köşegenleştirilebilir matrisler olsun. $\mathbf{M}_1$ ve $\mathbf{M}_2$ matrislerinin eşanlı köşegenleştirilebilir olması için gerekli ve yeterli bir koşul $\mathbf{M}_1$ ve $\mathbf{M}_2$ matrislerinin değişmeli olmasıdır [19].

BÖLÜM 3. İDEMPOTENT MATRİSLERİN LİNEER KOMBİNASYONLARI

3.1. Giriş

c_1, c_2 sıfırdan farklı kompleks sayılar ve $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2$ $n \times n$ boyutlu sıfırdan farklı kompleks idempotent matrisler olmak üzere,

$$\mathbf{X} = c_1\mathbf{P}_1 + c_2\mathbf{P}_2 \tag{3.1}$$

olsun. (3.1) biçimli $\mathbf{X}$ lineer kombinasyon matrisinin tripotent ve idempotent olduğu durumları karakterize etme problemleri, sırasıyla, [4, 5] ve [2, 24] çalışmalarında ele alınmıştır. İlgili sonuçlar bu bölümün, sırasıyla, ikinci ve üçüncü kısımlarında verilmektedir.

Şimdi, c_1, c_2, c_3 sıfırdan farklı kompleks sayılar ve $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3$ $n \times n$ boyutlu sıfırdan farklı kompleks idempotent matrisler olmak üzere,

$$\mathbf{P} = c_1\mathbf{P}_1 + c_2\mathbf{P}_2 + c_3\mathbf{P}_3 \tag{3.2}$$

olsun. (3.2) biçimli $\mathbf{P}$ lineer kombinasyon matrisinin idempotent olduğu bazı durumları karakterize etme problemleri [7, 8, 24] çalışmalarında ele alınmıştır. Bu sonuçlar bu bölümün dördüncü kısmında verilmektedir.

Ayrıca, (3.1) biçimli $\mathbf{X}$ matrisinin involutif olduğu tüm durumlar bu bölümün beşinci kısmında karakterize edilmektedir.

3.2. İki İdempotent Matrisin Lineer Kombinasyonunun Tripotentliği

$\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2 \in \mathbb{C}_n^P$ matrislerinin değişmeli oldukları özel durumda, (3.1) biçimli $\mathbf{X}$ lineer kombinasyon matrisinin tripotent olduğu durumlar ilk olarak Baksalary, Baksalary ve Özdemir tarafından verilmiştir. Bu sonuç aşağıda verilmektedir.

Teorem 3.1. [4, Corollary 2] $c_1, c_2 \in \mathbb{C}^*$, $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2 \in \mathbb{C}_n^P \backslash \{\mathbf{0}\}$, $\mathbf{P}_1 \neq \mathbf{P}_2$ ve $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 = \mathbf{P}_2\mathbf{P}_1$ olmak üzere $\mathbf{T} = c_1\mathbf{P}_1 + c_2\mathbf{P}_2$ olsun. $\mathbf{T}$ matrisinin tripotent olması için gerekli ve yeterli koşul aşağıdaki durumlardan birinin sağlanmasıdır:

(a) $(c_1, c_2) \in \{(-1,1),(1,-1)\}$;

(b) $(c_1, c_2) \in \{(-1,2),(1,-2)\}$ ve $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 = \mathbf{P}_2$;

(c) $(c_1, c_2) \in \{(-2,1),(2,-1)\}$ ve $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 = \mathbf{P}_1$;

(d) $(c_1, c_2) \in \{(-1,-1),(1,1)\}$ ve $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 = \mathbf{0}$. ■

Teorem 2.15 göz önüne alınırsa, $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2 \in \mathbb{C}_n^P$ matrislerinin üzerindeki değişmeli olma koşulu olmaksızın Baksalary ve Baksalary tarafından ortaya konulan aşağıdaki teoremin, yine Teorem 3.1 gibi, iki idempotent matrisin lineer kombinasyonunun ne zaman bir tripotent matris olacağı sorusuna cevap verdiği görülür.

Teorem 3.2. [5, Theorem] $c_1, c_2 \in \mathbb{C}^*$ ve $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2 \in \mathbb{C}_n^P \backslash \{\mathbf{0}\}$ olmak üzere $\mathbf{T} = c_1\mathbf{P}_1 + c_2\mathbf{P}_2$ olsun. $\mathbf{T}$ matrisinin grup involutif olması için gerekli ve yeterli koşul aşağıdaki durumlardan birinin sağlanmasıdır:

(a) $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 = \mathbf{P}_2\mathbf{P}_1$ olmak üzere aşağıda $(\mathrm{a}_1)-(\mathrm{a}_9)$ ile belirtilen koşullardan herhangi biri sağlanır:

(a_1) $(c_1, c_2) = (2,-1)$ ve $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 = \mathbf{P}_1$;

(a_2) $(c_1, c_2) = (1,1)$ ve $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 = \mathbf{0}$;

(a_3) $(c_1, c_2) = (1,-1)$;

(a_4) $(c_1, c_2) = (1,-2)$ ve $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 = \mathbf{P}_2$;

(a_5) $(c_1, c_2) = (-1,2)$ ve $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 = \mathbf{P}_2$;

(a_6) $(c_1,c_2)=(-1,1)$;

(a_7) $(c_1,c_2)=(-1,-1)$ ve $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2=\mathbf{0}$;

(a_8) $(c_1,c_2)=(-2,1)$ ve $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2=\mathbf{P}_1$;

(a_9) $c_1+c_2\in\{-1,0,1\}$ ve $\mathbf{P}_1=\mathbf{P}_2$,

(b) $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\neq\mathbf{P}_2\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{P}_1=\mathbf{P}_2\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2$ olmak üzere aşağıda $(\mathrm{b}_1)-(\mathrm{b}_2)$ ile belirtilen koşullardan herhangi biri sağlanır:

(b_1) $(c_1,c_2)=(1,-1)$;

(b_2) $(c_1,c_2)=(-1,1)$,

(c) $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\neq\mathbf{P}_2\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{P}_1\neq\mathbf{P}_2\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2$ olmak üzere aşağıda $(\mathrm{c}_1)-(\mathrm{c}_2)$ ile belirtilen koşullardan herhangi biri sağlanır:

$(\mathbf{c}_1)$ $(c_1,c_2)\neq(1,-1)$ olmak üzere,

$c_1+c_2=0$ ve $c_1^2(\mathbf{P}_1-\mathbf{P}_2-\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{P}_1+\mathbf{P}_2\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2)=\mathbf{P}_1-\mathbf{P}_2$;

$(\mathbf{c}_2)$ $c_1+c_2\in\{-1,1\}$ ve

$$c_1(c_1^2-1)\mathbf{P}_1+c_1c_2(c_1+c_2)(\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2+\mathbf{P}_2\mathbf{P}_1)+c_1c_2(c_1\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{P}_1+c_2\mathbf{P}_2\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2)+c_2(c_2^2-1)\mathbf{P}_2=\mathbf{0}$$

■

3.3. İki İdempotent Matrisin Lineer Kombinasyonunun İdempotentliği

İki idempotent matrisin lineer kombinasyonunun idempotentliği problemi ilk defa 2000 yılında Baksalary ve Baksalary tarafından ele alınmıştır. Söz konusu çalışmadaki ana sonuç aşağıda verilmektedir.

Teorem 3.3. [2, Theorem] $c_1,c_2\in\mathbb{C}^*$, $\mathbf{P}_1,\mathbf{P}_2\in\mathbb{C}_n^P\backslash\{\mathbf{0}\}$ ve $\mathbf{P}_1\neq\mathbf{P}_2$ olmak üzere $\mathbf{P}=c_1\mathbf{P}_1+c_2\mathbf{P}_2$ olsun. $\mathbf{P}$ matrisinin idempotent olması için gerekli ve yeterli koşul aşağıdaki durumlardan birinin sağlanmasıdır:

(a) $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2=\mathbf{P}_2\mathbf{P}_1$ olmak üzere aşağıda $(\mathrm{a}_1)-(\mathrm{a}_3)$ ile belirtilen koşullardan herhangi biri sağlanır:

(a_1) $(c_1,c_2)=(1,1)$, $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2=\mathbf{0}$;

(a_2) $(c_1,c_2)=(1,-1)$, $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2=\mathbf{P}_2$;

(a_3) $(c_1,c_2)=(-1,1)$, $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2=\mathbf{P}_1$,

(b) $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 \neq \mathbf{P}_2\mathbf{P}_1$ olmak üzere $c_1 \in \mathbb{C}^{*,1}$, $c_2=1-c_1$ ve $(\mathbf{P}_1-\mathbf{P}_2)^2=\mathbf{0}$ koşulları da sağlanır. ■

Ayrıca, bu sonucun (a) şıkkının farklı bir ispatı Özdemir ve Özban tarafından verilmiştir [24, Theorem 3.1].

3.4. Üç İdempotent Matrisin Lineer Kombinasyonunun İdempotentliği

İkisi ayrık olmak üzere, üç idempotent matrisin (3.2) biçimli lineer kombinasyonunun ne zaman idempotent matris olacağı problemi Baksalary tarafından ele alınmış ve çözülmüştür. Bu, aşağıda verilmektedir.

Teorem 3.4. [7, Theorem 1] $c_1,c_2,c_3 \in \mathbb{C}^*$, $\mathbf{P}_1,\mathbf{P}_2,\mathbf{P}_3 \in \mathbb{C}_n^P \setminus \{\mathbf{0}\}$ ve $\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3=\mathbf{0}=\mathbf{P}_3\mathbf{P}_2$ olmak üzere $\mathbf{P}=c_1\mathbf{P}_1+c_2\mathbf{P}_2+c_3\mathbf{P}_3$ ve $\gamma=(c_1,c_2,c_3)$ olsun. $\mathbf{P}$ matrisinin idempotent olması için gerekli ve yeterli koşul aşağıdaki durumlardan birinin sağlanmasıdır:

(a) $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2=\mathbf{P}_2\mathbf{P}_1$ ve $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_3=\mathbf{P}_3\mathbf{P}_1$ olmak üzere aşağıda $(\mathrm{a}_1)-(\mathrm{a}_{10})$ ile belirtilen koşullardan herhangi biri sağlanır:

(a_1) $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2=\mathbf{0}$, $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_3=\mathbf{0}$ ve $\gamma=(1,1,1)$;

(a_2) $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2=\mathbf{P}_2$, $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_3=\mathbf{0}$ ve $\gamma=(1,-1,1)$;

(a_3) $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2=\mathbf{0}$, $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_3=\mathbf{P}_3$ ve $\gamma=(1,1,-1)$;

(a_4) $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2=\mathbf{P}_2$, $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_3=\mathbf{P}_3$ ve $\gamma=(1,-1,-1)$;

(a_5) $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2+\mathbf{P}_1\mathbf{P}_3=\mathbf{P}_1$ ve $\gamma=(-1,1,1)$;

(a_6) $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2=\mathbf{P}_1-\mathbf{P}_3$ ve $\gamma \in \{(-1,1,1),(-1,1,2)\}$;

(a_7) $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_3=\mathbf{P}_1-\mathbf{P}_2$ ve $\gamma \in \{(-1,1,1),(-1,2,1)\}$;

(a_8) $\mathbf{P}_1=\mathbf{P}_2$ ile birlikte $c_1 \in \mathbb{C}^*$ olmak üzere, $\gamma=(c_1,-c_1,1)$ veya $c_1 \in \mathbb{C}^{*,1}$ olmak üzere, $\gamma=(c_1,1-c_1,1)$;

(a_9) $\mathbf{P}_1 = \mathbf{P}_3$ ile birlikte $c_1 \in \mathbb{C}^*$ olmak üzere, $\gamma = (c_1, 1, -c_1)$ veya $c_1 \in \mathbb{C}^{*,1}$ olmak üzere, $\gamma = (c_1, 1, 1-c_1)$;

(a_{10}) $\mathbf{P}_2 + \mathbf{P}_3 = \mathbf{P}_1$ ile birlikte $c_1 \in \mathbb{C}^*$ olmak üzere, $\gamma = (c_1, -c_1, -c_1)$ veya $c_1 \in \mathbb{C}^{*,1}$ olmak üzere, $\gamma = (c_1, -c_1, 1-c_1)$ veya $c_1 \in \mathbb{C}^{*,1}$ olmak üzere, $\gamma = (c_1, 1-c_1, -c_1)$ veya $c_1 \in \mathbb{C}^{*,1}$ olmak üzere, $\gamma = (c_1, 1-c_1, 1-c_1)$,

(b) $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 = \mathbf{P}_2\mathbf{P}_1$ ve $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_3 \neq \mathbf{P}_3\mathbf{P}_1$ olmak üzere aşağıda $(\mathrm{b}_1)-(\mathrm{b}_3)$ ile belirtilen koşullardan herhangi biri sağlanır:

(b_1) $(\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_3)^2 = \mathbf{P}_1\mathbf{P}_2$ ve $\gamma = (-1, 1, 2)$;

(b_2) $c_1 \in \mathbb{C}^{*,1}$ olmak üzere, $(\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_3)^2 = \mathbf{0}$ ve $\gamma = (c_1, 1, 1-c_1)$;

(b_3) $c_1 \in \mathbb{C}^{*,1}$ olmak üzere, $(\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_3)^2 = \mathbf{P}_2$ ile birlikte $\gamma = (c_1, 1-c_1, 1-c_1)$ veya $\gamma = (c_1, -c_1, 1-c_1)$,

(c) $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 \neq \mathbf{P}_2\mathbf{P}_1$ ve $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_3 = \mathbf{P}_3\mathbf{P}_1$ olmak üzere aşağıda $(\mathrm{c}_1)-(\mathrm{c}_3)$ ile belirtilen koşullardan herhangi biri sağlanır:

(c_1) $(\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_2)^2 = \mathbf{P}_1\mathbf{P}_3$ ve $\gamma = (-1, 2, 1)$;

(c_2) $c_1 \in \mathbb{C}^{*,1}$ olmak üzere, $(\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_2)^2 = \mathbf{0}$ ve $\gamma = (c_1, 1-c_1, 1)$;

(c_3) $c_1 \in \mathbb{C}^{*,1}$ olmak üzere, $(\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_2)^2 = \mathbf{P}_3$ ile birlikte $\gamma = (c_1, 1-c_1, -c_1)$ veya $\gamma = (c_1, 1-c_1, 1-c_1)$,

(d) $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 \neq \mathbf{P}_2\mathbf{P}_1$ ve $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_3 \neq \mathbf{P}_3\mathbf{P}_1$ olmak üzere aşağıda $(\mathrm{d}_1)-(\mathrm{d}_2)$ ile belirtilen koşullardan herhangi biri sağlanır:

(d_1) $c_1 \in \mathbb{C}^{*,1}$ olmak üzere, $(\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_2)^2 + (\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_3)^2 = \mathbf{P}_1$ ve $\gamma = (c_1, 1-c_1, 1-c_1)$;

(d_2) $c_1c_2(\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_2)^2 + c_1c_3(\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_3)^2 + c_2c_3(\mathbf{P}_2 + \mathbf{P}_3)^2 = \mathbf{0}$ ve $c_1 + c_2 + c_3 = 1$. ■

Teorem 3.4, $\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3 = \mathbf{0} = \mathbf{P}_3\mathbf{P}_2$ koşulu altında verilmiştir. Bununla birlikte, bu koşulda indislerin herhangi bir önemi yoktur. Yani 2 ve 3 indislerinin, sırasıyla, 1 ve 2 indisleriyle değiştirilmesi suretiyle Teorem 3.4, $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 = \mathbf{0} = \mathbf{P}_2\mathbf{P}_1$ (veya 1 ve 3 indisleriyle değiştirilirse $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_3 = \mathbf{0} = \mathbf{P}_3\mathbf{P}_1$) koşulu altında da benzer şekilde verilebilir.

Teorem 3.4 ten bağımsız olarak, Özdemir ve Özban bu üç matrisin karşılıklı olarak değişmeli olduğu durumda, lineer kombinasyon matrisinin idempotent olduğu bazı durumları, farklı bir yöntem ile karakterize etmiştir. Buna ilişkin sonuç aşağıdadır.

Teorem 3.5. [24, Theorem 3.2] $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{C}^*$, $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3 \in \mathbb{C}_n^P \backslash \{\mathbf{0}\}$, $\mathbf{P}_i \neq \mathbf{P}_j$ ve $\mathbf{P}_i\mathbf{P}_j = \mathbf{P}_j\mathbf{P}_i$, $i \neq j$, $i, j = 1,2,3$ olmak üzere $\mathbf{P} = c_1\mathbf{P}_1 + c_2\mathbf{P}_2 + c_3\mathbf{P}_3$ olsun. $\mathbf{P}$ matrisinin idempotent olduğu aşağıdaki durumlar elde edilir:

(a) $(c_1, c_2, c_3) = (1,1,1)$, $\mathbf{P}_i\mathbf{P}_j = \mathbf{0}$, $i \neq j$, $i, j = 1,2,3$;

(b) $(c_1, c_2, c_3) = (1,1,-1)$, $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 = \mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_3 = \mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3 = \mathbf{P}_3$ (denk olarak $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 = \mathbf{P}_2$, $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_3 = \mathbf{P}_3$, $\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3 = \mathbf{P}_2$);

(c) $(c_1, c_2, c_3) = (-1,1,1)$, $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 = \mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_3 = \mathbf{P}_3$, $\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3 = \mathbf{P}_3$ (denk olarak $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 = \mathbf{P}_2$, $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_3 = \mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3 = \mathbf{P}_2$);

(d) $(c_1, c_2, c_3) = (1,-1,1)$, $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 = \mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_3 = \mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3 = \mathbf{P}_2$ (denk olarak $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 = \mathbf{P}_2$, $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_3 = \mathbf{P}_3$, $\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3 = \mathbf{P}_3$).

Bunlardan başka, $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 = \mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_3 = \mathbf{P}_3$ ve $\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3 = \mathbf{P}_2$ (denk olarak $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 = \mathbf{P}_2$, $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_3 = \mathbf{P}_1$ ve $\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3 = \mathbf{P}_3$) olacak şekilde sıfırdan farklı $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3 \in \mathbb{C}_n^P$ matrisleri yoktur. ■

Yukarıda belirtildiği gibi Teorem 3.4, $\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3 = \mathbf{0} = \mathbf{P}_3\mathbf{P}_2$ koşulu altında ve Teorem 3.5 ise $\mathbf{P}_i\mathbf{P}_j = \mathbf{P}_j\mathbf{P}_i$, $i \neq j$, $i, j = 1,2,3$, koşulları altında verilmiştir. Baksalary ve Benítez bu koşulları $\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3 = \mathbf{P}_3\mathbf{P}_2$ koşuluna indirgeyip probleme daha genel bir çözüm ortaya koymuşlardır. Bunu yaparken önceki ispatlardan farklı olarak, blok matrisler ve direkt toplamı kullandılar. Söz konusu sonuçlar aşağıda verilmektedir.

Teorem 3.6. [8, Theorem 1] $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{C}^*$, $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3 \in \mathbb{C}_n^P \backslash \{\mathbf{0}\}$, $\mathbf{P}_i \neq \mathbf{P}_j$ ve $\mathbf{P}_i\mathbf{P}_j = \mathbf{P}_j\mathbf{P}_i$, $i \neq j$, $i, j = 1,2,3$ olmak üzere $\mathbf{P} = c_1\mathbf{P}_1 + c_2\mathbf{P}_2 + c_3\mathbf{P}_3$ olsun. $\mathbf{P}$ matrisinin idempotent olması için gerekli ve yeterli koşul aşağıdaki durumlardan birinin sağlanmasıdır:

(a) $\mathbf{P}_i + \mathbf{P}_j\mathbf{P}_k = \mathbf{P}_i\mathbf{P}_j + \mathbf{P}_i\mathbf{P}_k$ olmak üzere, $c_i = -1$, $c_j = 1$, $c_k = 1$;

(b) $\mathbf{P}_i = \mathbf{P}_i\mathbf{P}_k + \mathbf{P}_j$, $\mathbf{P}_j\mathbf{P}_k = \mathbf{0}$ olmak üzere, $c_i = -1$, $c_j = 2$, $c_k = 1$;

(c) $\mathbf{P}_i + 2\mathbf{P}_j\mathbf{P}_k = \mathbf{P}_j + \mathbf{P}_k$, $c_j = \frac{1}{2}$, $c_k = \frac{1}{2}$ olmak üzere, $c_i = -\frac{1}{2}$ veya $c_i = \frac{1}{2}$;

(d) $\mathbf{P}_i\mathbf{P}_j = \mathbf{P}_j$, $\mathbf{P}_i\mathbf{P}_k = \mathbf{P}_k$, $\mathbf{P}_j\mathbf{P}_k = \mathbf{0}$ olmak üzere, $c_i = 1$, $c_j = -1$, $c_k = -1$;

(e) $\mathbf{P}_i\mathbf{P}_k = \mathbf{P}_j$ olmak üzere, $c_i = 1$, $c_j = -2$, $c_k = 1$;

(f) $\mathbf{P}_i + \mathbf{P}_j\mathbf{P}_k = \mathbf{P}_j + \mathbf{P}_k$ olmak üzere, $c_i = 2$, $c_j = -1$, $c_k = -1$;

(g) $\mathbf{P}_j = \mathbf{P}_k$, $\mathbf{P}_i\mathbf{P}_j = \mathbf{P}_j$ olmak üzere, $c_j + c_k = -1$, $c_i = 1$;

(h) $\mathbf{P}_i = \mathbf{P}_k$ olmak üzere, $c_i + c_k = 0$, $c_j = 1$;

(i) $\mathbf{P}_i = \mathbf{P}_k$, $\mathbf{P}_i\mathbf{P}_j = \mathbf{P}_j$ olmak üzere, $c_i + c_k = 1$, $c_j = -1$;

(j) $\mathbf{P}_j = \mathbf{P}_k$, $\mathbf{P}_i\mathbf{P}_j = \mathbf{0}$ olmak üzere, $c_j + c_k = 1$, $c_i = 1$;

(k) $\mathbf{P}_i = \mathbf{P}_j + \mathbf{P}_k$, $\mathbf{P}_j\mathbf{P}_k = \mathbf{0}$ olmak üzere, $c_i + c_j = 0$, $c_i + c_k = 0$ veya $c_i + c_j = 0$, $c_i + c_k = 1$ veya $c_i + c_j = 1$, $c_i + c_k = 1$;

(l) $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 = \mathbf{0}$, $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_3 = \mathbf{0}$, $\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3 = \mathbf{0}$ olmak üzere, $c_1 = 1$, $c_2 = 1$, $c_3 = 1$;

(m) $\mathbf{P}_1 = \mathbf{P}_2 = \mathbf{P}_3$ olmak üzere, $c_1 + c_2 + c_3 \in \{0,1\}$.

Burada (a)–(k) durumlarında $i \neq j$, $i \neq k$, $j \neq k$, $i, j, k = 1,2,3$ dir. ■

Teorem 3.6, Teorem 3.4 (a) nın ve Teorem 3.5 in genelleştirilmesidir. Yine Baksalary ve Benítez tarafından verilip aşağıda ifade edilen sonuç ise Teorem 3.4 ün (b) ve (c) şıklarını genelleştirmektedir.

Teorem 3.7. [8, Theorem 2] $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{C}^*$, $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3 \in \mathbb{C}_n^P \setminus \{\mathbf{0}\}$, $\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3 \neq \mathbf{P}_3\mathbf{P}_2$ ve $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_i = \mathbf{P}_i\mathbf{P}_1$, $i = 2,3$, olmak üzere $\mathbf{P} = c_1\mathbf{P}_1 + c_2\mathbf{P}_2 + c_3\mathbf{P}_3$ ve $\alpha = \dfrac{c_1(c_1 - 1)}{c_2 c_3}$ olsun. $\mathbf{P}$ matrisinin idempotent olması için gerekli ve yeterli koşul aşağıdaki durumlardan birinin sağlanmasıdır:

(a) $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_j = \mathbf{P}_1$, $(\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_3)^2 = \mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_1\mathbf{P}_k$ olmak üzere, $c_1 = -1$, $c_j = 2$, $c_k = -1$;

(b) $\frac{1}{4}\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2\mathbf{P}_3 + \mathbf{P}_3\mathbf{P}_2 = 2\mathbf{P}_k + \mathbf{P}_1\mathbf{P}_j - \mathbf{P}_1\mathbf{P}_k$ olmak üzere, $c_1 = \frac{1}{2}$, $c_j = 1$, $c_k = -1$;

(c) $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_j = \mathbf{0}$, $(\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_3)^2 = \mathbf{P}_1\mathbf{P}_k$ olmak üzere, $c_1 = 1$, $c_j = 2$, $c_k = -1$;

(d) $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_j = \mathbf{0}$, $(\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_3)^2 = \mathbf{P}_1$, $c_2 + c_3 = 1$ olmak üzere, $c_1 + c_k = 0$ veya $c_1 + c_k = 1$;

(e) $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_j = \mathbf{P}_j$, $(\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_3)^2 = \alpha\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_k - \mathbf{P}_1\mathbf{P}_k$ olmak üzere, $2c_1 + c_j = 0$, $c_k = 1$;

(f) $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 = \mathbf{P}_2$, $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_3 = \mathbf{P}_3$, $(\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_3)^2 = \alpha\mathbf{P}_1$ olmak üzere, $2c_1 + c_2 + c_3 = 1$;

(g) $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 + \mathbf{P}_1\mathbf{P}_3 = \mathbf{P}_1$, $(\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_3)^2 = \mathbf{P}_1$, $c_2 = \frac{1}{2}$, $c_3 = \frac{1}{2}$ olmak üzere, $c_1 = -\frac{1}{2}$ veya $c_1 = \frac{1}{2}$;

(h) $\frac{3}{4}\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2\mathbf{P}_3 + \mathbf{P}_3\mathbf{P}_2 = \mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 + \mathbf{P}_1\mathbf{P}_3$ olmak üzere, $c_1 = -\frac{1}{2}$, $c_2 = 1$, $c_3 = 1$;

(i) $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 = \mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_3 = \mathbf{P}_1$, $(\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_3)^2 = \mathbf{0}$ olmak üzere, $c_1 = -1$, $c_2 + c_3 = 1$;

(j) $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1\mathbf{P}_3 = \mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_3$, $4c_2^2(\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_3)^2 = \mathbf{P}_1$ olmak üzere, $c_1 = \frac{1}{2}$, $c_2 + c_3 = 0$;

(k) $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 = \mathbf{0}$, $(\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_3)^2 = \mathbf{0}$ olmak üzere, $c_1 = 1$, $c_2 + c_3 = 1$,

burada (a)–(e) durumlarında $j \neq k$, $j,k = 2,3$, dir. ■

Aşağıdaki teoremde ise Teorem 3.4 ün (d) şıkkı genelleştirilmektedir.

Teorem 3.8. [8, Theorem 3] $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{C}^*$, $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3 \in \mathbb{C}_n^P \backslash \{\mathbf{0}\}$, $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 = \mathbf{P}_2\mathbf{P}_1$ ve $\mathbf{P}_i\mathbf{P}_3 \neq \mathbf{P}_3\mathbf{P}_i$, $i = 1,2$, olmak üzere $\mathbf{P} = c_1\mathbf{P}_1 + c_2\mathbf{P}_2 + c_3\mathbf{P}_3$ olsun. $\mathbf{P}$ matrisinin idempotent olması için gerekli ve yeterli koşul aşağıdaki durumlardan birinin sağlanmasıdır:

(a) $\frac{2c_j}{c_3}(\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_j) = \mathbf{P}_3 - (\mathbf{P}_j - \mathbf{P}_3)^2 + (\mathbf{P}_k - \mathbf{P}_3)^2$ olmak üzere, $c_1 + c_2 = 0$, $c_k + c_3 = 1$, $j \neq k$ ve $j,k = 1,2$;

(b) $\frac{2c_1}{c_3}(\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_2) = \mathbf{P}_3 + (\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_3)^2 + (\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_3)^2$ olmak üzere, $c_1 = c_2$, $3c_1 + c_3 = 1$;

(c) $\frac{2c_1}{c_3}\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 = (\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_3)^2 + (\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_3)^2 - \mathbf{P}_3$ olmak üzere, $c_1 = c_2$, $c_1 + c_3 = 1$;

(d) $c_1c_2(\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_2)^2 + c_1c_3(\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_3)^2 + c_2c_3(\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_3)^2 = \mathbf{0}$ olmak üzere, $c_1 + c_2 + c_3 = 1$.■

Yukarıda idempotent matrislerin lineer kombinasyonları ile ilgili literatürde var olan bazı sonuçlara yer verilmiştir. Aşağıdaki kısımda, (3.1) biçimli $\mathbf{X}$ lineer kombinasyon matrisinin ne zaman involutif olacağı problemi ele alınmaktadır.

3.5. İki İdempotent Matrisin Lineer Kombinasyonunun İnvolutifliği

Esas sonucu vermeden önce, bu sonucun ispatında kullanılacak olan yardımcı bir sonuç aşağıda verilmektedir.

Lemma 3.9. $\mathbf{M} \in \mathbb{C}_n$ matrisinin involutif olması için gerekli ve yeterli koşul $\frac{1}{2}(\mathbf{M} + \mathbf{I})$ matrisinin idempotent olmasıdır.

İspat. $\mathbf{M} \in \mathbb{C}_n$ involutif olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned}\mathbf{M}^2 = \mathbf{I} &\Leftrightarrow \mathbf{M}^2 + 2\mathbf{M} + \mathbf{I} = 2\mathbf{M} + \mathbf{I} + \mathbf{I}\\ &\Leftrightarrow \frac{1}{4}\left(\mathbf{M}^2 + \mathbf{M} + \mathbf{M} + \mathbf{I}\right) = \frac{1}{2}(\mathbf{M} + \mathbf{I})\\ &\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}(\mathbf{M} + \mathbf{I})\right)^2 = \frac{1}{2}(\mathbf{M} + \mathbf{I})\end{aligned}$$

olduğu için $\frac{1}{2}(\mathbf{M} + \mathbf{I})$ idempotenttir. ■

Teorem 3.10. $c_1, c_2 \in \mathbb{C}^*$ ve $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2 \in \mathbb{C}_n^P \backslash \{\mathbf{0}\}$ olmak üzere $\mathbf{A} = c_1\mathbf{P}_1 + c_2\mathbf{P}_2$ olsun.

(a) $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 = \mathbf{P}_2\mathbf{P}_1$ ise, $\mathbf{A}$ matrisinin involutif olması için gerekli ve yeterli koşul aşağıda $(\mathrm{a}_1)-(\mathrm{a}_3)$ ile belirtilen koşullardan herhangi birinin sağlanmasıdır:

(a_1) $c_1, c_2 \in \{-1, 1\}$ ve $\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 = \mathbf{I}$;

(a_2) $(c_1, c_2) \in \{(-1, 2), (1, -2)\}$ ve $\mathbf{P}_1 = \mathbf{I}$;

(a_3) $(c_1, c_2) \in \{(-2,1),(2,-1)\}$ ve $\mathbf{P}_2 = \mathbf{I}$,

(b) $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 \neq \mathbf{P}_2\mathbf{P}_1$ ise, $\mathbf{A}$ matrisinin involutif olması için gerekli ve yeterli koşul $c_1 + c_2 = 0$ ve $\frac{1}{c_1^2}\mathbf{I} + \mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 + \mathbf{P}_2\mathbf{P}_1 = \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2$ olmasıdır.

İspat. Öncelikle $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 = \mathbf{P}_2\mathbf{P}_1$ olsun. Ayrıca, $\mathbf{A}$ lineer kombinasyon matrisinin involutif olması için gerekli ve yeterli koşul

$$c_1^2\mathbf{P}_1 + 2c_1c_2\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 + c_2^2\mathbf{P}_2 = \mathbf{I} \tag{3.3}$$

olmasıdır. $\mathbf{A}$ matrisi involutif olsun. Bir involutif matris aynı zamanda tripotent matris olacağından (3.3) denklemini sağlayan (c_1, c_2) ikililerinin kümesi Teorem 3.1 deki (c_1, c_2) ikililerinin kümesinden daha geniş değildir. Yani, (c_1, c_2) ikililerinin en geniş kümesi $\{(-1,-1),(1,1),(-1,1),(1,-1),(-1,2),(1,-2),(2,-1),(-2,1)\}$ olabilir. $c_1, c_2 \in \{-1,1\}$ olması durumunda (3.3) denklemi c_1 ve c_2 sayılarının işaretleri aynı olduğunda $\mathbf{P}_1 + 2\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 + \mathbf{P}_2 = \mathbf{I}$ ve farklı olduğunda $\mathbf{P}_1 - 2\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 + \mathbf{P}_2 = \mathbf{I}$ eşitliklerine döner. Bu iki eşitliğin de $\mathbf{P}_1$ ile çarpılması durumunda $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 = \mathbf{0}$ elde edilir. $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 = \mathbf{0}$ eşitliği (3.3) ile birleştirilirse $\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 = \mathbf{I}$ elde edilir. Yani (a_1) şıkkının ispatı tamamlanır. $(c_1, c_2) = (-1,2)$ veya $(c_1, c_2) = (1,-2)$ için Teorem 3.1 deki $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 = \mathbf{P}_2$ koşulu ile (3.3) koşulu birleştirilirse $\mathbf{P}_1 = \mathbf{I}$ elde edilir. Bu ise (a_2) şıkkının ispatını tamamlar. $(c_1, c_2) = (-2,1)$ veya $(c_1, c_2) = (2,-1)$ için Teorem 3.1 deki $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 = \mathbf{P}_1$ koşulu ile (3.3) koşulu birleştirilirse $\mathbf{P}_2 = \mathbf{I}$ elde edilir. Tersine olarak $(\mathrm{a}_1)-(\mathrm{a}_3)$ şıklarındaki koşullar sağlansın. Bu şıklardaki koşullar (3.3) denkleminde yerine yazılırsa, (3.3) denkleminin sağlandığı dolayısıyla $\mathbf{A}$ lineer kombinasyon matrisinin involutif olduğu görülür. Böylece (a) şıkkının ispatı tamamlanır.

Şimdi $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 \neq \mathbf{P}_2\mathbf{P}_1$ olsun. $\mathbf{A} = c_1\mathbf{P}_1 + c_2\mathbf{P}_2$ lineer kombinasyonunda her iki tarafa $\mathbf{I}$ eklenir ve sonra denklem $\frac{1}{2}$ ile çarpılırsa,

$$\frac{1}{2}(\mathbf{A}+\mathbf{I})=\frac{1}{2}\mathbf{I}+\frac{c_1}{2}\mathbf{P}_1+\frac{c_2}{2}\mathbf{P}_2 \tag{3.4}$$

elde edilir. Lemma 3.9 dan, $\mathbf{A}$ matrisinin involutif olması için gerekli ve yeterli koşul (3.4) ifadesindeki $\frac{1}{2}(\mathbf{A}+\mathbf{I})$ matrisinin idempotent olmasıdır. Ayrıca, (3.4) ifadesinin sağ tarafı üç idempotent matrisin lineer kombinasyonu olup bu üç matristen ikinci ve üçüncüsünün değişmeli değil ancak birincinin hem ikinci, hem üçüncü ile değişmeli olduğu görülmektedir. Dolayısıyla $\frac{1}{2}(\mathbf{A}+\mathbf{I})$ matrisinin idempotent olduğu durumları karakterize etmek için (3.4) biçimli lineer kombinasyon matrisinin Teorem 3.7 deki koşulları sağlayıp sağlamayacağını incelemek, ispat için yeterli olacaktır.

Teorem 3.7 (a), (c), (h), (i) ve (k) şıklarındaki koşullardan (3.4) biçimli lineer kombinasyonda, birim matrisin önündeki skalerin $\frac{1}{2}$ den farklı olması gerektiği görülür. Dolayısıyla bu şıklardan çözüm elde edilemez.

Teorem 3.7 (d) şıkkından $(j,k)=(2,3)$ için $\mathbf{I}\,\mathbf{P}_1=\mathbf{P}_1=\mathbf{0}$ veya $(j,k)=(3,2)$ için $\mathbf{I}\,\mathbf{P}_2=\mathbf{P}_2=\mathbf{0}$ olması gerektiği görülür. Bu durum $\mathbf{P}_1$ ve $\mathbf{P}_2$ matrislerinin sıfırdan farklı olma kabulleri ile çelişir. Böylece, (d) şıkkından da çözüm elde edilmez.

Teorem 3.7 (g) şıkkından $(c_1,c_2)=(1,1)$ ile birlikte $\mathbf{P}_1+\mathbf{P}_2=\mathbf{I}$ ve $(\mathbf{P}_1-\mathbf{P}_2)^2=\mathbf{I}$ bulunur. $\mathbf{P}_1$ ve $\mathbf{P}_2$ idempotent olduklarından, bu iki eşitlikten

$$\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2=-\mathbf{P}_2\mathbf{P}_1$$

elde edilir. Bu eşitlikle birlikte $\mathbf{P}_1$ ve $\mathbf{P}_2$ matrislerinin idempotent olması özelliği $(\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2)^2=\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2$ özdeşliğinde kullanılırsa

$$(\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2)^2=\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2=-\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{P}_2\mathbf{P}_1=-\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{P}_1=\mathbf{P}_1\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2=\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2$$

veya aynı zamanda

$$\left(\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\right)^2 = \mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 = -\mathbf{P}_2\mathbf{P}_1\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 = -\mathbf{P}_2\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 = \mathbf{P}_2\mathbf{P}_2\mathbf{P}_1 = \mathbf{P}_2\mathbf{P}_1$$

bulunur. Dolayısıyla $\left(\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\right)^2 = \mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 = \mathbf{P}_2\mathbf{P}_1$ olur. Bu ise $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 \neq \mathbf{P}_2\mathbf{P}_1$ kabulü ile çelişir. Böylece, (g) şıkkından da çözüm elde edilemez. Teorem 3.7 (b) şıkkından $\frac{1}{4}\mathbf{I} + \mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 + \mathbf{P}_2\mathbf{P}_1 = \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2$ koşulunun yanında $(j,k) = (2,3)$ ve $(j,k) = (3,2)$ için, sırasıyla, $(c_1, c_2) = (2,-2)$ ve $(c_1, c_2) = (-2,2)$ elde edilir. Teorem 3.7 (e) şıkkından $\left(\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_2\right)^2 = \frac{-1}{c_1c_2}\mathbf{I}$ koşulunun yanında $(j,k) = (2,3)$ ve $(j,k) = (3,2)$ için, sırasıyla, $(c_1, c_2) = (-2,2)$ ve $(c_1, c_2) = (2,-2)$ bulunur. Teorem 3.7 (f) şıkkından $c_1 + c_2 = 0$ ve $\left(\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_2\right)^2 = \frac{-1}{c_1c_2}\mathbf{I}$ ve son olarak Teorem 3.7 (j) şıkkından $c_1 + c_2 = 0$ ve $\left(\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_2\right)^2 = \frac{1}{c_1^2}\mathbf{I}$ elde edilir. (f) (veya denk olarak (j) şıkkından) ortaya çıkan koşulların $c_1 + c_2 = 0$ ve $\frac{1}{c_1^2}\mathbf{I} + \mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 + \mathbf{P}_2\mathbf{P}_1 = \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2$ olarak yazılabildiğine dikkat edilirse, bu koşulların (b) ve (e) şıklarında bulunan koşulları kapsadığı görülür. Böylece ispat tamamlanır. ■

BÖLÜM 4. İKİ DEĞİŞMELİ TRİPOTENT MATRİSİN LİNEER KOMBİNASYONLARI

4.1. Giriş

c_1, c_2 sıfırdan farklı kompleks sayılar ve $\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2$ $n \times n$ boyutlu sıfırdan farklı değişmeli kompleks tripotent matrisler olmak üzere,

$$\mathbf{X} = c_1 \mathbf{T}_1 + c_2 \mathbf{T}_2 \tag{4.1}$$

olsun. (4.1) biçimli $\mathbf{X}$ lineer kombinasyon matrisinin tripotent olduğu durumları karakterize etme problemi ilk olarak Baksalary, Baksalary ve Özdemir tarafından ele alınmıştır [4]. Bu bölümün ikinci kısmında buna ilişkin bir sonuç verilmekte ve farklı bir ispatı yapılmaktadır. Ayrıca, üçüncü ve dördüncü kısımda (4.1) biçimli $\mathbf{X}$ matrisinin, sırasıyla, idempotent ve involutif olduğu tüm durumlar karakterize edilmektedir.

4.2. İki Değişmeli Tripotent Matrisin Lineer Kombinasyonunun Tripotentliği

Baksalary, Baksalary ve Özdemir, $\mathbf{T}_1$ matrisi $\mathbf{T}_2$ matrisinin bir skaler katı olduğu durumda, (4.1) biçimli $\mathbf{X}$ lineer kombinasyon matrisinin ne zaman tripotent olacağı probleminin basit bir hal alacağını belirtmiştir [4]. Bu durum aşağıdaki yardımcı sonuçta açıklanmaktadır.

Lemma 4.1. $\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2 \in \mathbb{C}_n^T$ sıfırdan farklı tripotent matrisler olsun. Bu durumda aşağıdakiler doğrudur.

(a) $\mathbf{T}_1$ matrisi $\mathbf{T}_2$ matrisinin skaler katı ise, $\mathbf{T}_1 = \mathbf{T}_2$ ya da $\mathbf{T}_1 = -\mathbf{T}_2$ dir.

(b) $\alpha \in \{-1,1\}$ olmak üzere $\mathbf{T}_1 = \alpha \mathbf{T}_2$ olsun. (4.1) biçimli $\mathbf{X}$ lineer kombinasyon matrisinin tripotent olması için gerekli ve yeterli koşul $(\alpha c_1 + c_2) \in \{-1,0,1\}$ olmasıdır.

İspat.

(a) $\alpha \in \mathbb{C}^*$ olmak üzere $\mathbf{T}_1 = \alpha \mathbf{T}_2$ olsun. $\mathbf{T}_1$ ve $\mathbf{T}_2$ matrislerinin tripotentliğinden $\mathbf{T}_1 = \mathbf{T}_1^3 = (\alpha \mathbf{T}_2)^3 = \alpha^3 \mathbf{T}_2^3 = \alpha^3 \mathbf{T}_2 = \alpha^2 \alpha \mathbf{T}_2 = \alpha^2 \mathbf{T}_1$ yazılabilir. $\mathbf{T}_1 \neq \mathbf{0}$ olduğundan $\alpha^2 = 1$, yani $\mathbf{T}_1 = \mathbf{T}_2$ veya $\mathbf{T}_1 = -\mathbf{T}_2$ elde edilir.

(b) $\alpha \in \{-1,1\}$ olmak üzere, $\mathbf{T}_1 = \alpha \mathbf{T}_2$ olsun. $\mathbf{T}_2$ matrisinin sıfırdan farklı tripotent matris olması göz önüne alınarak lineer kombinasyon matrisinin tripotentliğinden,

$$
\begin{aligned}
(c_1\mathbf{T}_1 + c_2\mathbf{T}_2)^3 - (c_1\mathbf{T}_1 + c_2\mathbf{T}_2) = \mathbf{0} &\Leftrightarrow \left((\alpha c_1 + c_2)\mathbf{T}_2\right)^3 - \left((\alpha c_1 + c_2)\mathbf{T}_2\right) = \mathbf{0} \\
&\Leftrightarrow \left((\alpha c_1 + c_2)^3 - (\alpha c_1 + c_2)\right)\mathbf{T}_2 = \mathbf{0} \\
&\Leftrightarrow (\alpha c_1 + c_2)^3 - (\alpha c_1 + c_2) = 0 \\
&\Leftrightarrow (\alpha c_1 + c_2) \in \{-1,0,1\}
\end{aligned}
$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. ■

Baksalary, Baksalary ve Özdemir, $\mathbf{T}_1$ matrisinin $\mathbf{T}_2$ matrisinin skaler katı olması basit durumlarını hariç tutarak (4.1) biçimli $\mathbf{X}$ lineer kombinasyon matrisinin tripotent olduğu durumları karakterize etmişlerdir. Bu sonucun ifadesi aşağıdadır.

Teorem 4.2. [4, Theorem] $c_1, c_2 \in \mathbb{C}^*$, $\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2 \in \mathbb{C}_n^T \setminus \{\mathbf{0}\}$, $\mathbf{T}_1 \neq \pm \mathbf{T}_2$ ve $\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2 = \mathbf{T}_2\mathbf{T}_1$ olmak üzere $\mathbf{T} = c_1\mathbf{T}_1 + c_2\mathbf{T}_2$ olsun. $\mathbf{T}$ matrisinin tripotent olması için gerekli ve yeterli koşul aşağıdaki durumlardan birinin sağlanmasıdır:

(a) $(c_1, c_2) \in \{(-1,1),(1,-1)\}$ ve $\mathbf{T}_1^2\mathbf{T}_2 = \mathbf{T}_1\mathbf{T}_2^2$;

(b) $(c_1, c_2) \in \{(-1,2),(1,-2)\}$ ve $\mathbf{T}_1^2\mathbf{T}_2 = \mathbf{T}_2 = \mathbf{T}_1\mathbf{T}_2^2$;

(c) $(c_1, c_2) \in \{(-2,1),(2,-1)\}$ ve $\mathbf{T}_1^2\mathbf{T}_2 = \mathbf{T}_1 = \mathbf{T}_1\mathbf{T}_2^2$;

(d) $(c_1, c_2) \in \{(-1,-1),(1,1)\}$ ve $\mathbf{T}_1^2\mathbf{T}_2 = -\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2^2$;

(e) $(c_1, c_2) \in \{(-1,-2),(1,2)\}$ ve $\mathbf{T}_1^2\mathbf{T}_2 = \mathbf{T}_2 = -\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2^2$;

(f) $(c_1,c_2)\in\{(-2,-1),(2,1)\}$ ve $\mathbf{T}_1^2\mathbf{T}_2=-\mathbf{T}_1=-\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2^2$;

(g) $(c_1,c_2)\in\left\{\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right),\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)\right\}$ ve $\mathbf{T}_1^2\mathbf{T}_2=-\mathbf{T}_1=-\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2^2$. ■

Bir tripotent matrisin minimal polinomu $\lambda^3-\lambda$ polinomunun bir bölenidir. $\lambda^3-\lambda$ polinomu farklı lineer çarpanlara sahip olduğundan bir tripotent matrisin minimal polinomu da farklı lineer çarpanlara sahip olacaktır. Dolayısıyla, Teorem 2.23 ten $\mathbf{T}_1$ ve $\mathbf{T}_2$ matrisleri tripotent olduklarından köşegenleştirilebilirdirler. Ayrıca, $\mathbf{T}_1$ ve $\mathbf{T}_2$ matrisleri değişmeli olduklarından Teorem 2.25 e göre her ikisini birden eşanlı köşegenleştiren bir $\mathbf{S}$ tersinir matrisi vardır. Bu durumda genelliği bozmaksızın $\mathbf{T}_1$ ve $\mathbf{T}_2$ matrisleri

$$\mathbf{T}_1=\mathbf{S}(\mathbf{A}_1\oplus\mathbf{B}_1\oplus\mathbf{0}\oplus\mathbf{0})\mathbf{S}^{-1} \text{ ve } \mathbf{T}_2=\mathbf{S}(\mathbf{A}_2\oplus\mathbf{0}\oplus\mathbf{B}_2\oplus\mathbf{0})\mathbf{S}^{-1} \tag{4.2}$$

biçiminde yazılabilir. Burada, $\mathbf{T}_1$ ve $\mathbf{T}_2$ matrislerindeki karşılıklı bloklar arasında toplama ve çarpma işlemlerinin tanımlı olduğu ve $\mathbf{A}_i,\mathbf{B}_i$, $i=1,2$, matrisleri involutif matrisler olmak üzere, $\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2=\mathbf{A}_2\mathbf{A}_1$ koşulunun sağlandığı kabul edilmektedir. $(\mathbf{A}_1,\mathbf{A}_2)$, $(\mathbf{B}_1,\mathbf{0})$, $(\mathbf{0},\mathbf{B}_2)$ ve $(\mathbf{0},\mathbf{0})$ blok ikililerinden bazıları $\mathbf{T}_1$ ve $\mathbf{T}_2$ matrislerinin (4.2) biçimli gösteriminde ortaya çıkmayabilir. Ayrıca, "$\oplus$" simgesi ile direkt toplam gösterilmektedir. Şöyle ki, $m_i\times m_i$ boyutlu $\mathbf{M}_{ii}$, $i=1,2,\ldots,k$, matrislerinin direkt toplamı $\mathbf{M}=\mathbf{M}_{11}\oplus\mathbf{M}_{22}\oplus\ldots\oplus\mathbf{M}_{kk}$ ile belirtilip, bu matris

$$\mathbf{M}=\begin{bmatrix}\mathbf{M}_{11} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_{22} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ddots & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{M}_{kk}\end{bmatrix}$$

biçimindedir. Burada "$\mathbf{0}$" ile işaret edilen tüm blok matrisler uygun boyutlu sıfır matrislerini göstermektedir.

Aşağıda, bu bilgiler göz önüne alınarak Baksalary, Baksalary ve Özdemir tarafından verilen yukarıdaki sonuç yeniden ifade edilecek ve farklı bir ispatı yapılacaktır.

Teorem 4.3. $c_1, c_2 \in \mathbb{C}^*$, $\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2 \in \mathbb{C}_n^T \setminus \{\mathbf{0}\}$, $\mathbf{T}_1 \neq \pm\mathbf{T}_2$ ve $\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2 = \mathbf{T}_2\mathbf{T}_1$ olmak üzere $\mathbf{T} = c_1\mathbf{T}_1 + c_2\mathbf{T}_2$ olsun. $\mathbf{T}$ matrisinin tripotent olması için gerekli ve yeterli koşul aşağıdaki durumlardan birinin sağlanmasıdır:

(a) $(c_1, c_2) \in \left\{\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)\right\}$ ve $\mathbf{T}_1^2 = \mathbf{T}_2^2$;

(b) $(c_1, c_2) \in \{(-1,1), (1,-1)\}$ ve $\mathbf{T}_1^2\mathbf{T}_2 = \mathbf{T}_1\mathbf{T}_2^2$;

(c) $(c_1, c_2) \in \{(-1,-1), (1,1)\}$ ve $\mathbf{T}_1^2\mathbf{T}_2 = -\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2^2$;

(d) $(c_1, c_2) \in \{(-1,2), (1,-2)\}$ ve $\mathbf{T}_1^2\mathbf{T}_2 = \mathbf{T}_2 = \mathbf{T}_1\mathbf{T}_2^2$;

(e) $(c_1, c_2) \in \{(-1,-2), (1,2)\}$ ve $\mathbf{T}_1^2\mathbf{T}_2 = \mathbf{T}_2 = -\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2^2$;

(f) $(c_1, c_2) \in \{(-2,1), (2,-1)\}$ ve $\mathbf{T}_1^2\mathbf{T}_2 = \mathbf{T}_1 = \mathbf{T}_1\mathbf{T}_2^2$;

(g) $(c_1, c_2) \in \{(-2,-1), (2,1)\}$ ve $\mathbf{T}_1^2\mathbf{T}_2 = -\mathbf{T}_1 = -\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2^2$.

İspat. (4.2) gösteriminden $\mathbf{T}$ lineer kombinasyon matrisi

$$\mathbf{T} = \mathbf{S}\left((c_1\mathbf{A}_1 + c_2\mathbf{A}_2) \oplus c_1\mathbf{B}_1 \oplus c_2\mathbf{B}_2 \oplus \mathbf{0}\right)\mathbf{S}^{-1} \tag{4.3}$$

biçiminde yazılabilir. $\mathbf{T}$ matrisi tripotent olsun. Bu durumda $c_1\mathbf{A}_1 + c_2\mathbf{A}_2$, $c_1\mathbf{B}_1$ ve $c_2\mathbf{B}_2$ matrisleri tripotent olmalıdır. İlk olarak $c_1\mathbf{A}_1 + c_2\mathbf{A}_2$ matrisinin tripotentliğinden $(c_1\mathbf{A}_1 + c_2\mathbf{A}_2)^3 - (c_1\mathbf{A}_1 + c_2\mathbf{A}_2) = \mathbf{0}$, yani

$$c_1\left(c_1^2 + 3c_2^2 - 1\right)\mathbf{A}_1 + c_2\left(c_2^2 + 3c_1^2 - 1\right)\mathbf{A}_2 = \mathbf{0} \tag{4.4}$$

elde edilir. $\mathbf{B}_i \in \mathbb{C}_n^A$ ve $c_i \in \mathbb{C}^*$, $i = 1,2$, kabulleri göz önüne alınırsa, $c_1\mathbf{B}_1$ ve $c_2\mathbf{B}_2$ matrislerinin tripotentliğinden

$$(c_i\mathbf{B}_i)^3 = c_i\mathbf{B}_i \Rightarrow \left(c_i^3 - c_i\right)\mathbf{B}_i = \mathbf{0} \Rightarrow c_i^3 - c_i = 0 \Rightarrow c_i^2 = 1,$$

yani, sırasıyla,

$$c_1^2 = 1 \tag{4.5}$$

ve

$$c_2^2 = 1 \tag{4.6}$$

bulunur.

(4.2) biçimli $\mathbf{T}_1$ ve $\mathbf{T}_2$ matrislerinde ortaya çıkan ve çıkmayan bloklara bağlı olarak aşağıdaki durumlar oluşur:

(i) Birinci bloğun ortaya çıkması, ikinci ve üçüncü blokların görünmemesi: Bu durumda (4.2) ifadeleri, genelliği bozmaksızın,

$$\mathbf{T}_1 = \mathbf{S}\left(\mathbf{A}_1 \oplus \mathbf{0}\right)\mathbf{S}^{-1} \text{ ve } \mathbf{T}_2 = \mathbf{S}\left(\mathbf{A}_2 \oplus \mathbf{0}\right)\mathbf{S}^{-1} \tag{4.7}$$

ifadelerine indirgenir. Dolayısıyla $\mathbf{T} = \mathbf{S}\left(\left(c_1\mathbf{A}_1 + c_2\mathbf{A}_2\right) \oplus \mathbf{0}\right)\mathbf{S}^{-1}$ olur. O halde $\mathbf{T}$ matrisi tripotent ise $c_1\mathbf{A}_1 + c_2\mathbf{A}_2$ lineer kombinasyonu da tripotent olmalıdır. Ayrıca, teoremin kabulleri gereği $\mathbf{T}_1$ ve $\mathbf{T}_2$ matrisleri birbirlerinin skaler katı olamayacağı için (4.7) gösteriminden $\mathbf{A}_1$ ve $\mathbf{A}_2$ matrislerinin de birbirlerinin skaler katı olamayacağı görülür. Dolayısıyla (4.4) denkleminden

$$\begin{cases} c_1^2 + 3c_2^2 - 1 = 0 \\ c_2^2 + 3c_1^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

elde edilir. Bu denklem sistemi çözülürse $c_1, c_2 \in \left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$ bulunur. Ayrıca, $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2 \in \mathbb{C}_n^A$ olduğundan (4.7) göz önüne alındığında $\mathbf{T}_1$ ve $\mathbf{T}_2$ matrislerinin $\mathbf{T}_1^2 = \mathbf{T}_2^2$ eşitliğini sağladığı açıktır. Dolayısıyla (a) şıkkının ispatı tamamlanır.

(ii) Birinci, ikinci ve üçüncü blokların ortaya çıkması: Bu, genelliği bozmaksızın, (4.2) biçimli $\mathbf{T}_1$ ve $\mathbf{T}_2$ matrislerinin ortaya çıkması anlamına gelir. Yani, $\mathbf{T}$ matrisi (4.3) biçimli olur. O halde (4.5) ve (4.6), (4.4) ile birleştirilirse $c_1(1+3-1)\mathbf{A}_1 + c_2(1+3-1)\mathbf{A}_2 = \mathbf{0}$, yani

$$c_1\mathbf{A}_1 + c_2\mathbf{A}_2 = \mathbf{0} \tag{4.8}$$

elde edilir. Eğer (4.3) biçimli $\mathbf{T}$ matrisi $\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2$ ile çarpılıp (4.2) ve (4.8) ifadeleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}(c_1\mathbf{T}_1 + c_2\mathbf{T}_2)\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2 &= \mathbf{S}\big((c_1\mathbf{A}_1 + c_2\mathbf{A}_2)\oplus c_1\mathbf{B}_1 \oplus c_2\mathbf{B}_2 \oplus \mathbf{0}\big)\mathbf{S}^{-1}\mathbf{S}\big((\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2)\oplus\mathbf{0}\oplus\mathbf{0}\oplus\mathbf{0}\big)\mathbf{S}^{-1}\\ &= \mathbf{S}(\mathbf{0}\oplus\mathbf{0}\oplus\mathbf{0}\oplus\mathbf{0})\mathbf{S}^{-1}\\ &= \mathbf{0}\end{aligned}$$

bulunur. Dolayısıyla $c_1\mathbf{T}_1^2\mathbf{T}_2 + c_2\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2^2 = \mathbf{0}$ elde edilir. Böylece (b) ve (c) şıklarının ispatları tamamlanır.

(iii) Birinci, ikinci blokların ortaya çıkması ve üçüncü bloğun görünmemesi: Bu durumda (4.2) ifadeleri, genelliği bozmaksızın,

$$\mathbf{T}_1 = \mathbf{S}(\mathbf{A}_1 \oplus \mathbf{B}_1 \oplus \mathbf{0})\mathbf{S}^{-1} \text{ ve } \mathbf{T}_2 = \mathbf{S}(\mathbf{A}_2 \oplus \mathbf{0} \oplus \mathbf{0})\mathbf{S}^{-1} \tag{4.9}$$

ifadelerine indirgenir. Dolayısıyla $\mathbf{T} = \mathbf{S}(c_1\mathbf{A}_1 + c_2\mathbf{A}_2 \oplus c_1\mathbf{B}_1 \oplus \mathbf{0})\mathbf{S}^{-1}$ olur. $\mathbf{T}$ matrisi tripotent ise $c_1\mathbf{A}_1 + c_2\mathbf{A}_2$ ve $c_1\mathbf{B}_1$ matrisleri de tripotent olmalıdır. (4.5) ifadesi (4.4) denkleminde yerine yazılırsa $c_1\left(1+3c_2^2-1\right)\mathbf{A}_1+c_2\left(c_2^2+3-1\right)\mathbf{A}_2=\mathbf{0}$ veya $3c_1c_2^2\mathbf{A}_1+\left(c_2^3+2c_2\right)\mathbf{A}_2=\mathbf{0}$ bulunur. $c_2\in\mathbb{C}^*$ olduğundan

$$3c_1c_2\mathbf{A}_1=-\left(c_2^2+2\right)\mathbf{A}_2 \tag{4.10}$$

elde edilir. $\mathbf{A}_1,\mathbf{A}_2\in\mathbb{C}_n^A$ olduğu göz önüne alınarak (4.10) denkleminde her iki tarafın karesi alınırsa $\left(9c_1^2c_2^2-\left(c_2^2+2\right)^2\right)\mathbf{I}=\mathbf{0}$ bulunur. $c_1^2=1$ olduğu için $9c_2^2-\left(c_2^2+2\right)^2=0$ olur. Buradan $c_2\in\{-2,-1,1,2\}$ olduğu görülür. Sonuç olarak

$$\left(c_1,c_2\right)\in\left\{(-1,1),(1,-1),(-1,2),(1,-2)\right\} \tag{4.11}$$

veya

$$\left(c_1,c_2\right)\in\left\{(-1,-1),(1,1),(-1,-2),(1,2)\right\} \tag{4.12}$$

elde edilir. (4.11) ifadesindeki ikililerin (4.10) denkleminde yerine yazılması $\mathbf{A}_1=\mathbf{A}_2$ eşitliğine götürür. Böylece (4.9) kullanılarak

$$\mathbf{T}_1^2\mathbf{T}_2=\mathbf{S}\left(\mathbf{I}\oplus\mathbf{I}\oplus\mathbf{0}\right)\mathbf{S}^{-1}\mathbf{S}\left(\mathbf{A}_2\oplus\mathbf{0}\oplus\mathbf{0}\right)\mathbf{S}^{-1}=\mathbf{S}\left(\mathbf{A}_2\oplus\mathbf{0}\oplus\mathbf{0}\right)\mathbf{S}^{-1}=\mathbf{T}_2 \tag{4.13}$$

ve

$$\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2^2=\mathbf{S}\left(\mathbf{A}_2\oplus\mathbf{B}_1\oplus\mathbf{0}\right)\mathbf{S}^{-1}\mathbf{S}\left(\mathbf{I}\oplus\mathbf{0}\oplus\mathbf{0}\right)\mathbf{S}^{-1}=\mathbf{S}\left(\mathbf{A}_2\oplus\mathbf{0}\oplus\mathbf{0}\right)\mathbf{S}^{-1}=\mathbf{T}_2 \tag{4.14}$$

elde edilir. Böylece $\left(c_1,c_2\right)\in\left\{(-1,1),(1,-1),(-1,2),(1,-2)\right\}$ için (4.13) ve (4.14) eşitliklerinden $\mathbf{T}_1^2\mathbf{T}_2=\mathbf{T}_2=\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2^2$ bulunur. Bu ise, $\mathbf{T}_1^2\mathbf{T}_2=\mathbf{T}_2=\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2^2$ koşulu $\mathbf{T}_1^2\mathbf{T}_2=\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2^2$ koşulunun özel bir hali olduğundan, (b) şıkkının özel bir durumudur ve (d) şıkkının ispatını tamamlar.

Benzer şekilde (4.12) ifadesindeki ikililerin (4.10) denkleminde yerine yazılması $\mathbf{A}_1 = -\mathbf{A}_2$ eşitliğine götürür ve yine (4.9) kullanılarak

$$\mathbf{T}_1^2\mathbf{T}_2 = \mathbf{S}\left(\mathbf{I} \oplus \mathbf{I} \oplus \mathbf{0}\right)\mathbf{S}^{-1}\mathbf{S}\left(\mathbf{A}_2 \oplus \mathbf{0} \oplus \mathbf{0}\right)\mathbf{S}^{-1} = \mathbf{S}\left(\mathbf{A}_2 \oplus \mathbf{0} \oplus \mathbf{0}\right)\mathbf{S}^{-1} = \mathbf{T}_2 \tag{4.15}$$

ve

$$\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2^2 = \mathbf{S}\left(-\mathbf{A}_2 \oplus \mathbf{B}_1 \oplus \mathbf{0}\right)\mathbf{S}^{-1}\mathbf{S}\left(\mathbf{I} \oplus \mathbf{0} \oplus \mathbf{0}\right)\mathbf{S}^{-1} = \mathbf{S}\left(-\mathbf{A}_2 \oplus \mathbf{0} \oplus \mathbf{0}\right)\mathbf{S}^{-1} = -\mathbf{T}_2 \tag{4.16}$$

elde edilir. Dolayısıyla $\left(c_1, c_2\right) \in \left\{\left(-1,-1\right),\left(1,1\right),\left(-1,-2\right),\left(1,2\right)\right\}$ için (4.15) ve (4.16) eşitliklerinden $\mathbf{T}_1^2\mathbf{T}_2 = \mathbf{T}_2 = -\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2^2$ bulunur. Bu ise, $\mathbf{T}_1^2\mathbf{T}_2 = \mathbf{T}_2 = -\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2^2$ koşulu $\mathbf{T}_1^2\mathbf{T}_2 = -\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2^2$ koşulunun özel bir hali olduğundan, (c) şıkkının özel bir durumudur ve (e) şıkkının ispatını tamamlar.

(iv) Birinci ve üçüncü blokların ortaya çıkması, ikinci bloğun görünmemesi: Bu durumda (4.2) ifadeleri, genelliği bozmaksızın,

$$\mathbf{T}_1 = \mathbf{S}\left(\mathbf{A}_1 \oplus \mathbf{0} \oplus \mathbf{0}\right)\mathbf{S}^{-1} \text{ ve } \mathbf{T}_2 = \mathbf{S}\left(\mathbf{A}_2 \oplus \mathbf{B}_2 \oplus \mathbf{0}\right)\mathbf{S}^{-1} \tag{4.17}$$

ifadelerine indirgenir. Böylece $\mathbf{T} = \mathbf{S}\left(\left(c_1\mathbf{A}_1 + c_2\mathbf{A}_2\right) \oplus c_2\mathbf{B}_2 \oplus \mathbf{0}\right)\mathbf{S}^{-1}$ olur. O halde $\mathbf{T}$ matrisi tripotent ise $c_1\mathbf{A}_1 + c_2\mathbf{A}_2$ ve $c_2\mathbf{B}_2$ matrisleri de tripotent olmalıdır. (4.6) ifadesi (4.4) denkleminde yerine yazılırsa $c_1\left(c_1^2 + 3 - 1\right)\mathbf{A}_1 + c_2\left(1 + 3c_1^2 - 1\right)\mathbf{A}_2 = \mathbf{0}$ veya $\left(c_1^3 + 2c_1\right)\mathbf{A}_1 + 3c_1^2c_2\mathbf{A}_2 = \mathbf{0}$ bulunur. $c_1 \in \mathbb{C}^*$ olduğundan

$$\left(c_1^2 + 2\right)\mathbf{A}_1 = -3c_1c_2\mathbf{A}_2 \tag{4.18}$$

elde edilir. $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2 \in \mathbb{C}_n^A$ olması göz önüne alınarak (4.18) denkleminde her iki tarafın karesi alınırsa $\left(9c_1^2c_2^2 - \left(c_1^2 + 2\right)^2\right)\mathbf{I} = \mathbf{0}$ bulunur. $c_2^2 = 1$ olduğu için $9c_1^2 - \left(c_1^2 + 2\right)^2 = 0$ olur. Buradan $c_1 \in \{-2, -1, 1, 2\}$ olduğu görülür. Sonuç olarak

$$(c_1, c_2) \in \{(-1,1), (1,-1), (-2,1), (2,-1)\} \tag{4.19}$$

veya

$$(c_1, c_2) \in \{(-1,-1), (1,1), (-2,-1), (2,1)\} \tag{4.20}$$

elde edilir. (4.19) ifadesindeki ikililerin (4.18) denkleminde yerine yazılması ise $\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_2$ eşitliğine götürür. Buradan (4.17) ifadesi kullanılarak

$$\mathbf{T}_1^2\mathbf{T}_2 = \mathbf{S}\left(\mathbf{I} \oplus \mathbf{0} \oplus \mathbf{0}\right)\mathbf{S}^{-1}\mathbf{S}\left(\mathbf{A}_1 \oplus \mathbf{B}_2 \oplus \mathbf{0}\right)\mathbf{S}^{-1} = \mathbf{S}\left(\mathbf{A}_1 \oplus \mathbf{0} \oplus \mathbf{0}\right)\mathbf{S}^{-1} = \mathbf{T}_1 \tag{4.21}$$

ve

$$\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2^2 = \mathbf{S}\left(\mathbf{A}_1 \oplus \mathbf{0} \oplus \mathbf{0}\right)\mathbf{S}^{-1}\mathbf{S}\left(\mathbf{I} \oplus \mathbf{I} \oplus \mathbf{0}\right)\mathbf{S}^{-1} = \mathbf{S}\left(\mathbf{A}_1 \oplus \mathbf{0} \oplus \mathbf{0}\right)\mathbf{S}^{-1} = \mathbf{T}_1 \tag{4.22}$$

eşitlikleri elde edilir. Dolayısıyla $(c_1, c_2) \in \{(-1,1), (1,-1), (-2,1), (2,-1)\}$ için (4.21) ve (4.22) eşitliklerinden $\mathbf{T}_1^2\mathbf{T}_2 = \mathbf{T}_1 = \mathbf{T}_1\mathbf{T}_2^2$ bulunur. Bu ise, $\mathbf{T}_1^2\mathbf{T}_2 = \mathbf{T}_1 = \mathbf{T}_1\mathbf{T}_2^2$ koşulu $\mathbf{T}_1^2\mathbf{T}_2 = \mathbf{T}_1\mathbf{T}_2^2$ koşulunun özel bir hali olduğundan, (b) şıkkının özel bir durumudur ve (f) şıkkının ispatını tamamlar.

Benzer şekilde (4.20) ifadesindeki ikililer (4.18) denkleminde yerine yazıldığında $\mathbf{A}_1 = -\mathbf{A}_2$ bulunur ve buradan (4.17) ifadesi kullanılarak

$$\mathbf{T}_1^2\mathbf{T}_2 = \mathbf{S}\left(\mathbf{I} \oplus \mathbf{0} \oplus \mathbf{0}\right)\mathbf{S}^{-1}\mathbf{S}\left(\mathbf{A}_2 \oplus \mathbf{B}_2 \oplus \mathbf{0}\right)\mathbf{S}^{-1} = \mathbf{S}\left(-\mathbf{A}_1 \oplus \mathbf{0} \oplus \mathbf{0}\right)\mathbf{S}^{-1} = -\mathbf{T}_1 \tag{4.23}$$

ve

$$\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2^2 = \mathbf{S}\left(\mathbf{A}_1 \oplus \mathbf{0} \oplus \mathbf{0}\right)\mathbf{S}^{-1}\mathbf{S}\left(\mathbf{I} \oplus \mathbf{I} \oplus \mathbf{0}\right)\mathbf{S}^{-1} = \mathbf{S}\left(\mathbf{A}_1 \oplus \mathbf{0} \oplus \mathbf{0}\right)\mathbf{S}^{-1} = \mathbf{T}_1 \tag{4.24}$$

eşitlikleri elde edilir. Yani $(c_1, c_2) \in \{(-1,-1),(1,1),(-2,-1),(2,1)\}$ için (4.23) ve (4.24) eşitliklerinden $\mathbf{T}_1^2\mathbf{T}_2 = -\mathbf{T}_1 = -\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2^2$ elde edilir. Bu ise, $\mathbf{T}_1^2\mathbf{T}_2 = -\mathbf{T}_1 = -\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2^2$ koşulu $\mathbf{T}_1^2\mathbf{T}_2 = -\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2^2$ koşulunun özel bir hali olduğundan, (c) şıkkının özel bir durumudur ve (g) şıkkının ispatını tamamlar.

(v) İkinci ve üçüncü blokların ortaya çıkması, birinci bloğun görünmemesi: Bu durumda (4.2) ifadeleri, genelliği bozmaksızın,

$$\mathbf{T}_1 = \mathbf{S}\left(\mathbf{B}_1 \oplus \mathbf{0} \oplus \mathbf{0}\right)\mathbf{S}^{-1} \text{ ve } \mathbf{T}_2 = \mathbf{S}\left(\mathbf{0} \oplus \mathbf{B}_2 \oplus \mathbf{0}\right)\mathbf{S}^{-1} \tag{4.25}$$

ifadelerine indirgenir. Böylece (4.5), (4.6) denklemleri ve (4.25) ifadeleri birlikte göz önüne alındığında $c_1, c_2 \in \{-1,1\}$ ve $\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2 = \mathbf{0}$ elde edilir. Dolayısıyla bu durum (b) ve (c) şıklarının özel durumu olur.

Tersine olarak (a)–(g) şıklarındaki koşullar sağlansın. Bu durumda $c_1\mathbf{T}_1 + c_2\mathbf{T}_2$ lineer kombinasyonunun tripotent olmasının yeterli koşulu olan

$$c_1^3\mathbf{T}_1 + c_2^3\mathbf{T}_2 + 3c_1^2c_2\mathbf{T}_1^2\mathbf{T}_2 + 3c_1c_2^2\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2^2 - c_1\mathbf{T}_1 - c_2\mathbf{T}_2 = \mathbf{0}$$

denkleminin sağlanacağı açıktır. Böylece ispat tamamlanır. ■

$\mathbf{T}_1$ ve $\mathbf{T}_2$ matrisleri üzerindeki tripotent olma koşulu esas tripotent olma koşuluna dönüştürülürse Teorem 4.3 yine sağlanır. Ayrıca, bu durumda Teorem 4.3 (d)–(g) şıklarındaki koşullar için $\mathbf{T} = c_1\mathbf{T}_1 + c_2\mathbf{T}_2$ lineer kombinasyon matrisinin kendisi de esas tripotent matris olur. Aşağıdaki sonuç, bu konuyu ele almaktadır.

Sonuç 4.4. $c_1, c_2 \in \mathbb{C}^*$, $\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2 \in \mathbb{C}_n^{ET} \setminus \{\mathbf{0}\}$, $\mathbf{T}_1 \neq \pm\mathbf{T}_2$ ve $\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2 = \mathbf{T}_2\mathbf{T}_1$ olmak üzere $\mathbf{T} = c_1\mathbf{T}_1 + c_2\mathbf{T}_2$ olsun. $\mathbf{T}$ matrisinin tripotent olması için gerekli ve yeterli koşul aşağıdaki durumlardan birinin sağlanmasıdır:

(a) $(c_1, c_2) \in \left\{\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)\right\}$ ve $\mathbf{T}_1^2 = \mathbf{T}_2^2$;

(b) $(c_1, c_2) \in \{(-1,1), (1,-1)\}$ ve $\mathbf{T}_1^2\mathbf{T}_2 = \mathbf{T}_1\mathbf{T}_2^2$;

(c) $(c_1, c_2) \in \{(-1,-1), (1,1)\}$ ve $\mathbf{T}_1^2\mathbf{T}_2 = -\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2^2$;

(d) $(c_1, c_2) \in \{(-1,2), (1,-2)\}$ ve $\mathbf{T}_1^2\mathbf{T}_2 = \mathbf{T}_2 = \mathbf{T}_1\mathbf{T}_2^2$;

(e) $(c_1, c_2) \in \{(-1,-2), (1,2)\}$ ve $\mathbf{T}_1^2\mathbf{T}_2 = \mathbf{T}_2 = -\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2^2$;

(f) $(c_1, c_2) \in \{(-2,1), (2,-1)\}$ ve $\mathbf{T}_1^2\mathbf{T}_2 = \mathbf{T}_1 = \mathbf{T}_1\mathbf{T}_2^2$;

(g) $(c_1, c_2) \in \{(-2,-1), (2,1)\}$ ve $\mathbf{T}_1^2\mathbf{T}_2 = -\mathbf{T}_1 = -\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2^2$.

Ayrıca, (d)–(g) şıkları için $\mathbf{T}$ esas tripotent matristir.

İspat. $\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2 \in \mathbb{C}_n^{ET}$ olduğundan bu matrislerin (4.2) biçiminde yazılabilecekleri açıktır. Ayrıca yukarıdaki teoremin ispatı incelenirse $\mathbf{T}_1$ ve $\mathbf{T}_2$ matrislerinin, genelliği bozmaksızın, (4.2), (4.7), (4.9), (4.17) veya (4.25) biçimlerinden herhangi biri şeklinde olacağı görülür. Yine ispat incelendiğinde her bir durum için $\mathbf{T}_1$ ve $\mathbf{T}_2$ matrislerinin esas tripotent olması ile çelişen herhangi bir durumun ortaya çıkmadığı kolayca görülür.

Geriye ispatın ikinci kısmı, yani (d)–(g) şıkları için $\mathbf{T}$ matrisinin esas tripotent olacağını göstermek kalır. Örneğin, (d) şıkkındaki $(c_1, c_2) = (-1, 2)$ ikilisi için (4.10) denkleminden $\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_2$ elde edilir. Dolayısıyla (4.9) ifadesi,

$$\mathbf{T}_1 = \mathbf{S}(\mathbf{A}_1 \oplus \mathbf{B}_1 \oplus \mathbf{0})\mathbf{S}^{-1} \text{ ve } \mathbf{T}_2 = \mathbf{S}(\mathbf{A}_1 \oplus \mathbf{0} \oplus \mathbf{0})\mathbf{S}^{-1} \tag{4.26}$$

biçimine dönüşür. Böylece $\mathbf{T}$ matrisi

$$\mathbf{T} = \mathbf{S}\left(\mathbf{A}_1 \oplus -\mathbf{B}_1 \oplus \mathbf{0}\right)\mathbf{S}^{-1} \tag{4.27}$$

biçimini alır. (4.26) deki $\mathbf{T}_2$ matrisi esas tripotent kabul edildiği için $\mathbf{A}_1 \neq \pm\mathbf{I}$ olmak zorundadır. Dolayısıyla (4.27) göz önüne alındığında $\mathbf{T}$ matrisi esas tripotent olmak zorundadır. Aynı düşünce tarzı kullanılarak, (d) şıkkındaki $(c_1, c_2) = (1, -2)$ ikilisi ve diğer şıklardaki ikilileri için de $\mathbf{T}$ matrisinin esas tripotent olmak zorunda olduğu görülür. ■

Uyarı 4.5. Sonuç 4.4 ün koşullarını sağlayan 2×2 boyutlu hiçbir matris yoktur.

İspat. $\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2 = \mathbf{T}_2\mathbf{T}_1$ olduğundan, Teorem 2.25 göz önüne alındığında, $\mathbf{T}_1 = \mathbf{S}\mathrm{diag}(\lambda_1, \gamma_1)\mathbf{S}^{-1}$ ve $\mathbf{T}_2 = \mathbf{S}\mathrm{diag}(\lambda_2, \gamma_2)\mathbf{S}^{-1}$ olacak şekilde bir $\mathbf{S} \in \mathbb{C}_n$ tersinir matrisi vardır. Burada λ_1 ile γ_1, $\mathbf{T}_1$ matrisinin ve λ_2 ile γ_2, $\mathbf{T}_2$ matrisinin özdeğerlerini göstermek üzere $\lambda_i, \gamma_i \in \{-1, 0, 1\}$, $i = 1, 2$, dir. $\mathbf{T}_1$ matrisi göz önüne alınsın. Eğer $\lambda_1 = 0$ ise, bu durumda $\gamma_1 = \pm 1$ olmalıdır (eğer $\gamma_1 = 0$ olsaydı, $\mathbf{T}_1 = \mathbf{0}$ olurdu). Buradan $\mathbf{T}_1 = \pm\mathbf{S}\mathrm{diag}(0, 1)\mathbf{S}^{-1}$ olur, yani $\mathbf{T}_1$ esas tripotent olamaz. Böylece $\lambda_1 = \pm 1$ dir. Aynı nedenle $\gamma_1 = \pm 1$ olmalıdır (eğer $\gamma_1 = 0$ olsaydı $\mathbf{T}_1 = \pm\mathbf{S}\mathrm{diag}(1, 0)\mathbf{S}^{-1}$ olurdu). $\lambda_1 \neq \gamma_1$ olması gerektiğinden (aksi takdirde $\mathbf{T}_1 = \pm\mathbf{I}$ olurdu), yalnızca iki olası durum ortaya çıkar: $\mathbf{T}_1 = \mathbf{S}\mathrm{diag}(-1, 1)\mathbf{S}^{-1}$ veya $\mathbf{T}_1 = \mathbf{S}\mathrm{diag}(1, -1)\mathbf{S}^{-1}$. Aynı düşünce ile ilerlenirse, $\mathbf{T}_2$ matrisi için, $\mathbf{T}_2 = \mathbf{S}\mathrm{diag}(-1, 1)\mathbf{S}^{-1}$ veya $\mathbf{T}_2 = \mathbf{S}\mathrm{diag}(1, -1)\mathbf{S}^{-1}$ biçiminde iki olası durum ortaya çıkar. Sonuç olarak $\mathbf{T}_1 = \pm\mathbf{T}_2$ elde edilir. Bu ise $\mathbf{T}_1$ matrisinin $\mathbf{T}_2$ matrisinin skaler katı olmaması varsayımı ile çelişir. Böylece ispat tamamlanır. ■

4.3. İki Değişmeli Tripotent Matrisin Lineer Kombinasyonunun İdempotentliği

Önceki kısımda, (4.1) biçimli lineer kombinasyon matrisinin ne zaman tripotent olacağı konusu incelenmişti. Herhangi bir idempotent matris zaten tripotent olacağı için lineer kombinasyon matrisinin tripotentliği problemi idempotentlik problemine indirgenirse, (c_1,c_2) çözüm ikililerinin artmayacağı açıktır. Ancak (c_1,c_2) çözüm ikililerinin azalıp azalmayacağını incelemek ilginç olabilir. Bu konu aşağıdaki teoremde ele alınmaktadır.

Teorem 4.6. $c_1,c_2 \in \mathbb{C}^*$, $\mathbf{T}_1,\mathbf{T}_2 \in \mathbb{C}_n^T \setminus \{\mathbf{0}\}$, $\mathbf{T}_1 \neq \pm\mathbf{T}_2$ ve $\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2 = \mathbf{T}_2\mathbf{T}_1$ olmak üzere $\mathbf{P} = c_1\mathbf{T}_1 + c_2\mathbf{T}_2$ olsun. $\mathbf{P}$ matrisinin idempotent olması için gerekli ve yeterli koşul aşağıdaki durumlardan birinin sağlanmasıdır:

(a) $(c_1,c_2) \in \left\{\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right),\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)\right\}$ ve

$2c_1\mathbf{T}_1 + 2c_2\mathbf{T}_2 - 4c_1c_2\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2 = \mathbf{T}_1^2 = \mathbf{T}_2^2$;

(b) $(c_1,c_2) \in \{(-1,-1),(1,1),(-1,1),(1,-1)\}$ ve $c_1\mathbf{T}_1 + c_2\mathbf{T}_2 - 2c_1c_2\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2 = \mathbf{T}_1^2 + \mathbf{T}_2^2$;

(c) $(c_1,c_2) \in \{(-1,-2),(1,2),(-1,2),(1,-2)\}$ ve $c_1\mathbf{T}_1 + c_2\mathbf{T}_2 = \mathbf{T}_1^2$;

(d) $(c_1,c_2) \in \{(-2,-1),(2,1),(-2,1),(2,-1)\}$ ve $c_1\mathbf{T}_1 + c_2\mathbf{T}_2 = \mathbf{T}_2^2$.

İspat. (4.2) gösterimi kullanılarak, $\mathbf{P}$ lineer kombinasyon matrisi

$$\mathbf{P} = \mathbf{S}\big((c_1\mathbf{A}_1 + c_2\mathbf{A}_2) \oplus c_1\mathbf{B}_1 \oplus c_2\mathbf{B}_2 \oplus \mathbf{0}\big)\mathbf{S}^{-1}$$

biçiminde yazılabilir. $\mathbf{P}$ matrisi idempotent olsun. Bu durumda $c_1\mathbf{A}_1 + c_2\mathbf{A}_2$, $c_1\mathbf{B}_1$ ve $c_2\mathbf{B}_2$ matrisleri de idempotent olmalıdır. $c_1\mathbf{A}_1 + c_2\mathbf{A}_2$ matrisinin idempotent olması için $(c_1\mathbf{A}_1 + c_2\mathbf{A}_2)^2 - (c_1\mathbf{A}_1 + c_2\mathbf{A}_2) = \mathbf{0}$ veya

$$\left(c_1^2 + c_2^2\right)\mathbf{I} + 2c_1c_2\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2 - c_1\mathbf{A}_1 - c_2\mathbf{A}_2 = \mathbf{0} \tag{4.28}$$

olmalıdır. $\mathbf{B}_1,\mathbf{B}_2 \in \mathbb{C}_n^A$ ve $c_1,c_2 \in \mathbb{C}^*$ olması göz önüne alınarak, $c_1\mathbf{B}_1$ ve $c_2\mathbf{B}_2$ matrislerinin idempotentliğinden

$$(c_i\mathbf{B}_i)^2 = c_i\mathbf{B}_i \Rightarrow \mathbf{B}_i = c_i\mathbf{I},\ \ c_i^2 = 1,\ \ i = 1,2,$$

ve buradan da

$$\mathbf{B}_1 = c_1\mathbf{I}\,,\ c_1^2 = 1 \tag{4.29}$$

ve

$$\mathbf{B}_2 = c_2\mathbf{I}\,,\ c_2^2 = 1 \tag{4.30}$$

elde edilir. Herhangi bir idempotent matris zaten tripotenttir. Dolayısıyla $\mathbf{P}$ matrisi tripotent olacağı için Teorem 4.3 ün ispatına benzer şekilde ilerlenirse (4.2) biçimli $\mathbf{T}_1$ ve $\mathbf{T}_2$ matrislerinin ortaya çıkan ve çıkmayan bloklarına bağlı olarak aşağıdaki durumlar elde edilir:

(i) Birinci bloğun ortaya çıkması, ikinci ve üçüncü blokların görünmemesi: Bu durumda $\mathbf{T}_1$ ve $\mathbf{T}_2$ matrisleri (4.7) biçiminde olduğundan $\mathbf{P} = \mathbf{S}\big((c_1\mathbf{A}_1 + c_2\mathbf{A}_2)\oplus\mathbf{0}\big)\mathbf{S}^{-1}$ olur. O halde $\mathbf{P}$ matrisi idempotent ise $c_1\mathbf{A}_1 + c_2\mathbf{A}_2$ lineer kombinasyon matrisi de idempotent olmalıdır. Teorem 4.3 ün ispatından $c_1^2 = c_2^2 = \dfrac{1}{4}$ ve $\mathbf{T}_1^2 = \mathbf{T}_2^2 = \mathbf{S}\big(\mathbf{I}\oplus\mathbf{0}\big)\mathbf{S}^{-1}$ olduğu biliniyor. $c_1^2 = c_2^2 = \dfrac{1}{4}$ değerleri (4.28) denkleminde yerine yazıldığında $2c_1\mathbf{A}_1 + 2c_2\mathbf{A}_2 - 4c_1c_2\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2 = \mathbf{I}$ olur. Böylece $2c_1\mathbf{T}_1 + 2c_2\mathbf{T}_2 - 4c_1c_2\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2 = \mathbf{S}\big((2c_1\mathbf{A}_1 + 2c_2\mathbf{A}_2 - 4c_1c_2\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2)\oplus\mathbf{0}\big)\mathbf{S}^{-1}$, yani

$$2c_1\mathbf{T}_1 + 2c_2\mathbf{T}_2 - 4c_1c_2\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2 = \mathbf{S}\big(\mathbf{I}\oplus\mathbf{0}\big)\mathbf{S}^{-1} = \mathbf{T}_1^2 = \mathbf{T}_2^2$$

elde edilir. Dolayısıyla (a) şıkkının ispatı tamamlanır.

(ii) Birinci, ikinci ve üçüncü blokların ortaya çıkması: Bu durumda $\mathbf{T}_1$ ve $\mathbf{T}_2$ matrisleri (4.2) biçiminde olduğundan $\mathbf{P} = \mathbf{S}\big(c_1\mathbf{A}_1 + c_2\mathbf{A}_2 \oplus c_1\mathbf{B}_1 \oplus c_2\mathbf{B}_2 \oplus \mathbf{0}\big)\mathbf{S}^{-1}$ olur. O halde $\mathbf{P}$ matrisi idempotent ise $c_1\mathbf{A}_1 + c_2\mathbf{A}_2$, $c_1\mathbf{B}_1$ ve $c_2\mathbf{B}_2$ matrisleri de idempotent olmalıdır. Teorem 4.3 ün ispatından $c_1^2 = c_2^2 = 1$ ve

$\mathbf{T}_1^2 + \mathbf{T}_2^2 = \mathbf{S}(2\mathbf{I} \oplus \mathbf{I} \oplus \mathbf{I} \oplus \mathbf{0})\mathbf{S}^{-1}$ yazılabilir. $c_1^2 = c_2^2 = 1$ değerleri (4.28) denkleminde yerine yazılırsa,

$$c_1\mathbf{A}_1 + c_2\mathbf{A}_2 - 2c_1c_2\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2 = 2\mathbf{I} \tag{4.31}$$

bulunur. (4.29), (4.30) ve (4.31) denklemleri (4.2) ifadeleriyle birlikte göz önüne alınırsa

$$c_1\mathbf{T}_1 + c_2\mathbf{T}_2 - 2c_1c_2\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2 = \mathbf{S}\big((c_1\mathbf{A}_1 + c_2\mathbf{A}_2 - 2c_1c_2\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2) \oplus c_1\mathbf{B}_1 \oplus c_2\mathbf{B}_2 \oplus \mathbf{0}\big)\mathbf{S}^{-1} = \mathbf{T}_1^2 + \mathbf{T}_2^2$$

elde edilir. Bu ise (b) şıkkının ispatını tamamlar.

(iii) Birinci ve ikinci blokların ortaya çıkması, üçüncü bloğun görünmemesi: Bu durumda $\mathbf{T}_1$ ve $\mathbf{T}_2$ matrisleri (4.9) biçiminde olduğundan $\mathbf{P} = \mathbf{S}\big((c_1\mathbf{A}_1 + c_2\mathbf{A}_2) \oplus c_1\mathbf{B}_1 \oplus \mathbf{0}\big)\mathbf{S}^{-1}$ olur. O halde $\mathbf{P}$ matrisi idempotent ise $c_1\mathbf{A}_1 + c_2\mathbf{A}_2$ ve $c_1\mathbf{B}_1$ matrisleri de idempotent olmalıdır. Teorem 4.3 ün ispatına benzer şekilde

$$(c_1, c_2) \in \{(-1,1), (1,-1), (-1,2), (1,-2)\}, \ \mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_2$$

ve

$$(c_1, c_2) \in \{(-1,-1), (1,1), (-1,-2), (1,2)\}, \ \mathbf{A}_1 = -\mathbf{A}_2$$

bulunur. Dolayısıyla (4.9) ifadeleri

$$\mathbf{T}_1 = \mathbf{S}(\mathbf{A}_1 \oplus c_1\mathbf{I} \oplus \mathbf{0})\mathbf{S}^{-1} \text{ ve } \mathbf{T}_2 = \mathbf{S}(\pm\mathbf{A}_1 \oplus \mathbf{0} \oplus \mathbf{0})\mathbf{S}^{-1}$$

biçiminde yazılabilir. $\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_2$ ise, bu durumda (4.28), (4.29) ve (4.30) denklemlerinden $(c_1, c_2) = (-1,1)$, $\mathbf{B}_1 = -\mathbf{I}$ veya $(c_1, c_2) = (1,-1)$, $\mathbf{B}_1 = \mathbf{I}$ veya

$(c_1,c_2)=(-1,2)$, $\mathbf{A}_1=\mathbf{I}$, $\mathbf{B}_1=-\mathbf{I}$ veya $(c_1,c_2)=(1,-2)$, $\mathbf{A}_1=-\mathbf{I}$, $\mathbf{B}_1=\mathbf{I}$ elde edilir. $(c_1,c_2)=(-1,1)$ ve $(c_1,c_2)=(1,-1)$ durumları ile ilişkili ispat zaten (ii) durumunda yapıldı. $(c_1,c_2)=(-1,2)$ için

$$\mathbf{T}_1=\mathbf{S}(\mathbf{I}\oplus-\mathbf{I}\oplus\mathbf{0})\mathbf{S}^{-1} \text{ ve } \mathbf{T}_2=\mathbf{S}(\mathbf{I}\oplus\mathbf{0}\oplus\mathbf{0})\mathbf{S}^{-1} \tag{4.32}$$

olduğundan $-\mathbf{T}_1+2\mathbf{T}_2=\mathbf{T}_1^2$ elde edilir. Benzer şekilde $(c_1,c_2)=(1,-2)$ için

$$\mathbf{T}_1=\mathbf{S}(-\mathbf{I}\oplus\mathbf{I}\oplus\mathbf{0})\mathbf{S}^{-1} \text{ ve } \mathbf{T}_2=\mathbf{S}(-\mathbf{I}\oplus\mathbf{0}\oplus\mathbf{0})\mathbf{S}^{-1} \tag{4.33}$$

olduğundan $\mathbf{T}_1-2\mathbf{T}_2=\mathbf{T}_1^2$ bulunur. Diğer taraftan $\mathbf{A}_1=-\mathbf{A}_2$ ise bu durumda (4.28), (4.29) ve (4.30) denklemlerinden $(c_1,c_2)=(-1,-1)$, $\mathbf{B}_1=-\mathbf{I}$ veya $(c_1,c_2)=(1,1)$, $\mathbf{B}_1=\mathbf{I}$ veya $(c_1,c_2)=(-1,-2)$, $\mathbf{A}_1=\mathbf{I}$, $\mathbf{B}_1=-\mathbf{I}$ veya $(c_1,c_2)=(1,2)$, $\mathbf{A}_1=-\mathbf{I}$, $\mathbf{B}_1=\mathbf{I}$ elde edilir. $(c_1,c_2)=(-1,-1)$ ve $(c_1,c_2)=(1,1)$ durumları ile ilişkili ispat zaten (ii) durumunda yapıldı. $(c_1,c_2)=(-1,-2)$ için

$$\mathbf{T}_1=\mathbf{S}(\mathbf{I}\oplus-\mathbf{I}\oplus\mathbf{0})\mathbf{S}^{-1} \text{ ve } \mathbf{T}_2=\mathbf{S}(-\mathbf{I}\oplus\mathbf{0}\oplus\mathbf{0})\mathbf{S}^{-1} \tag{4.34}$$

olduğundan $-\mathbf{T}_1-2\mathbf{T}_2=\mathbf{T}_1^2$ elde edilir. Benzer şekilde $(c_1,c_2)=(1,2)$ için

$$\mathbf{T}_1=\mathbf{S}(-\mathbf{I}\oplus\mathbf{I}\oplus\mathbf{0})\mathbf{S}^{-1} \text{ ve } \mathbf{T}_2=\mathbf{S}(\mathbf{I}\oplus\mathbf{0}\oplus\mathbf{0})\mathbf{S}^{-1} \tag{4.35}$$

olduğundan $\mathbf{T}_1+2\mathbf{T}_2=\mathbf{T}_1^2$ bulunur. Bu bulunanlar (c) şıkkının ispatını tamamlar.

(iv) Birinci ve üçüncü blokların ortaya çıkması, ikinci bloğun görünmemesi: **(**iii) durumuna benzer şekilde ilerleyerek, $(c_1,c_2)\in\{(-1,-1),(1,1),(-1,1),(1,-1)\}$ ve $c_1\mathbf{T}_1+c_2\mathbf{T}_2-2c_1c_2\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2=\mathbf{T}_1^2+\mathbf{T}_2^2$ ya da $(c_1,c_2)\in\{(-2,-1),(2,1),(-2,1),(2,-1)\}$ ve

$c_1\mathbf{T}_1 + c_2\mathbf{T}_2 = \mathbf{T}_2^2$ elde edilir. Bunlardan birincisi zaten (ii) durumunda elde edildi, ikincisi ise (d) şıkkını ortaya koyar.

(v) İkinci ve üçüncü blokların ortaya çıkması, birinci bloğun görünmemesi: Bu durumda $\mathbf{T}_1$ ve $\mathbf{T}_2$ matrisleri (4.25) biçiminde olduğundan $\mathbf{P} = \mathbf{S}(c_1\mathbf{B}_1 \oplus c_2\mathbf{B}_2 \oplus \mathbf{0})\mathbf{S}^{-1}$ olur. O halde $\mathbf{P}$ matrisi idempotent ise $c_1\mathbf{B}_1$ ve $c_2\mathbf{B}_2$ matrisleri de idempotent olmalıdır. Böylece (4.29) ve (4.30) denklemleri ve (4.25) ifadeleri birlikte göz önüne alındığında, $c_1, c_2 \in \{-1, 1\}$ ve

$$\mathbf{T}_1 = \mathbf{S}(c_1\mathbf{I} \oplus \mathbf{0} \oplus \mathbf{0})\mathbf{S}^{-1} \text{ ve } \mathbf{T}_2 = \mathbf{S}(\mathbf{0} \oplus c_2\mathbf{I} \oplus \mathbf{0})\mathbf{S}^{-1} \tag{4.36}$$

olduğundan $\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2 = \mathbf{0}$ elde edilir. Bu durum (b) şıkkının özel durumudur.

Tersine olarak (a)–(d) şıklarındaki koşullar sağlansın. Bu durumda, $c_1\mathbf{T}_1 + c_2\mathbf{T}_2$ lineer kombinasyon matrisinin idempotent olması için yeterli koşul olan

$$c_1^2\mathbf{T}_1^2 + c_2^2\mathbf{T}_2^2 + 2c_1c_2\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2 = \mathbf{0}$$

denkleminin sağlanacağı açıktır. Dolayısıyla ispat tamamlanır. ■

$\mathbf{T}_1$ ve $\mathbf{T}_2$ matrisleri üzerindeki tripotent olma koşulu esas tripotent olma koşuluna dönüştürülürse, Teorem 4.6 nın (a) ve (b) şıkları yine sağlanır. Ancak (c) ve (d) şıkları sağlanmaz. Bu durum aşağıdaki sonuçta verilmektedir.

Sonuç 4.7. $c_1, c_2 \in \mathbb{C}^*$, $\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2 \in \mathbb{C}_n^T \setminus \{\mathbf{0}\}$, $\mathbf{T}_1 \neq \pm\mathbf{T}_2$ ve $\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2 = \mathbf{T}_2\mathbf{T}_1$ olmak üzere $\mathbf{P} = c_1\mathbf{T}_1 + c_2\mathbf{T}_2$ olsun. $\mathbf{P}$ matrisinin idempotent olması için gerekli ve yeterli koşul aşağıdaki durumlardan birinin sağlanmasıdır:

(a) $(c_1, c_2) \in \left\{\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)\right\}$ ve

$2c_1\mathbf{T}_1 + 2c_2\mathbf{T}_2 - 4c_1c_2\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2 = \mathbf{T}_1^2 = \mathbf{T}_2^2$;

(b) $(c_1, c_2) \in \{(-1,-1),(1,1),(-1,1),(1,-1)\}$ ve $c_1\mathbf{T}_1 + c_2\mathbf{T}_2 - 2c_1c_2\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2 = \mathbf{T}_1^2 + \mathbf{T}_2^2$.

İspat. Teorem 4.6 nın ispatında (iii) durumundaki $\mathbf{T}_1$ ve $\mathbf{T}_2$ matrislerinin (4.32), (4.33), (4.34) ve (4.35) biçimlerine dikkat edilirse, $\mathbf{T}_2$ matrisinin esas tripotent olmadığı görülür. Aynı şekilde (iv) durumunda da $\mathbf{T}_1$ esas tripotent olmayacaktır. Dolayısıyla Teorem 4.3 ün (c) ve (d) şıklarından çözüm elde edilemez.

(i), (ii) ve (v) durumları ile ilişkili olarak, sırasıyla, (4.7), (4.2) ve (4.36) ifadelerindeki matris biçimleri incelenirse yalnızca (4.36) biçimli matrislerin esas tripotent olma koşuluna uymadığı görülür. Diğerlerinde koşulu bozan bir durum yoktur. Ayrıca (v) durumu yalnızca (b) şıkkının özel bir durumu olduğu için, (a) ve (b) şıklarındaki koşullarda $\mathbf{P}$ lineer kombinasyon matrisi idempotenttir. Böylece ispat tamamlanır. ■

Uyarı 4.8. Sonuç 4.7 nin koşullarını sağlayan 2×2 boyutlu matrisler yoktur. ■

Bu uyarının ispatı Uyarı 4.5 ile aynıdır.

4.4. İki Değişmeli Tripotent Matrisin Lineer Kombinasyonunun İnvolutifliği

Teorem 4.3 ile Teorem 4.6 karşılaştırıldığında, (4.1) biçimli $\mathbf{X}$ lineer kombinasyon matrisinin tripotentliği problemini idempotentlik problemine kısıtlamanın çözüm sayısını azaltmadığı açık olarak görülmektedir. Bununla birlikte Sonuç 4.7 ye dikkat edildiğinde, eğer $\mathbf{T}_1$ ve $\mathbf{T}_2$ matrisleri de tripotent olma durumundan esas tripotent olma durumuna kısıtlanırsa çözüm sayısının azaldığı görülmektedir. (4.1) biçimli $\mathbf{X}$ lineer kombinasyon matrisinin tripotentliği problemi involutiflik problemine kısıtlanırsa çözüm sayısının azalıp azalmayacağı sorusu ortaya çıkar. Aşağıdaki teoremde bu durum ele alınmaktadır.

Teorem 4.9. $c_1, c_2 \in \mathbb{C}^*$, $\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2 \in \mathbb{C}_n^T \backslash \{\mathbf{0}\}$, $\mathbf{T}_1 \neq \pm\mathbf{T}_2$ ve $\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2 = \mathbf{T}_2\mathbf{T}_1$ olmak üzere $\mathbf{A} = c_1\mathbf{T}_1 + c_2\mathbf{T}_2$ olsun. $\mathbf{A}$ matrisinin involutif olması için gerekli ve yeterli koşul aşağıdaki durumlardan birinin sağlanmasıdır:

(a) $(c_1,c_2)\in\{(-1,-1),(1,1)\}$, $\mathbf{T}_1^2+2\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2+\mathbf{T}_2^2=\mathbf{I}$ ve $\mathbf{T}_1$ ile $\mathbf{T}_2$ involutif değil;

(b) $(c_1,c_2)\in\{(-1,1),(1,-1)\}$, $\mathbf{T}_1^2-2\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2+\mathbf{T}_2^2=\mathbf{I}$ ve $\mathbf{T}_1$ ile $\mathbf{T}_2$ involutif değil;

(c) $(c_1,c_2)\in\{(-2,-1),(2,1)\}$, $4\mathbf{T}_1^2+4\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2+\mathbf{T}_2^2=\mathbf{I}$ ve $\mathbf{T}_1$ involutif değil;

(d) $(c_1,c_2)\in\{(-2,1),(2,-1)\}$, $4\mathbf{T}_1^2-4\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2+\mathbf{T}_2^2=\mathbf{I}$ ve $\mathbf{T}_1$ involutif değil;

(e) $(c_1,c_2)\in\{(-1,-2),(1,2)\}$, $\mathbf{T}_1^2+4\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2+4\mathbf{T}_2^2=\mathbf{I}$ ve $\mathbf{T}_2$ involutif değil;

(f) $(c_1,c_2)\in\{(-1,2),(1,-2)\}$, $\mathbf{T}_1^2-4\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2+4\mathbf{T}_2^2=\mathbf{I}$ ve $\mathbf{T}_2$ involutif değil.

İspat. $\mathbf{A}$ bir involutif matris olsun. Bu durumda $\mathbf{A}$ aynı zamanda tripotenttir. O halde Teorem 4.3 e göre olabilecek (c_1,c_2) ikililerinin kümesi olarak $\left\{(\pm1,\pm1),(\pm2,\pm1),(\pm1,\pm2),\left(\pm\frac{1}{2},\pm\frac{1}{2}\right)\right\}$ elde edilir. Burada $\{(\pm a,\pm b)\}$ ifadesi $\{(-a,-b),(a,b),(-a,b),(a,-b)\}$ anlamındadır. Diğer taraftan $\mathbf{A}=c_1\mathbf{T}_1+c_2\mathbf{T}_2$ lineer kombinasyon matrisinin involutif olması için gerekli ve yeterli koşul $\mathbf{A}^2=\mathbf{I}$, yani

$$c_1^2\mathbf{T}_1^2+2c_1c_2\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2+c_2^2\mathbf{T}_2^2=\mathbf{I} \tag{4.37}$$

olmasıdır. (4.37) denkleminde $(c_1,c_2)=(-1,-1)$ veya $(c_1,c_2)=(1,1)$ ve $(c_1,c_2)=(-1,1)$ veya $(c_1,c_2)=(1,-1)$ değerleri yerine yazıldığında, sırasıyla,

$$\mathbf{T}_1^2+2\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2+\mathbf{T}_2^2=\mathbf{I} \tag{4.38}$$

ve

$$\mathbf{T}_1^2-2\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2+\mathbf{T}_2^2=\mathbf{I} \tag{4.39}$$

bulunur. (4.38) eşitliği $\mathbf{T}_1$ ve $\mathbf{T}_2$ ile ayrı ayrı çarpılırsa, sırasıyla,

$$2\mathbf{T}_1^2\mathbf{T}_2+\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2^2=\mathbf{0} \tag{4.40}$$

ve

$$\mathbf{T}_1^2\mathbf{T}_2 + 2\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2^2 = \mathbf{0} \tag{4.41}$$

elde edilir. Aynı şekilde (4.39) eşitliği de $\mathbf{T}_1$ ve $\mathbf{T}_2$ ile ayrı ayrı çarpılırsa, sırasıyla,

$$-2\mathbf{T}_1^2\mathbf{T}_2 + \mathbf{T}_1\mathbf{T}_2^2 = \mathbf{0} \tag{4.42}$$

ve

$$\mathbf{T}_1^2\mathbf{T}_2 - 2\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2^2 = \mathbf{0} \tag{4.43}$$

bulunur. (4.40) ve (4.41) eşitlikleri veya (4.42) ve (4.43) eşitlikleri birleştirildiğinde, $\mathbf{T}_1^2\mathbf{T}_2 = \mathbf{0}$ elde edilir. Bu eşitlik tekrar $\mathbf{T}_1$ ile çarpılırsa $\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2 = \mathbf{0}$ bulunur. Böylece $\mathbf{T}_1$ ve $\mathbf{T}_2$ involutif matris olamaz. Çünkü $\mathbf{T}_1$ veya $\mathbf{T}_2$ matrislerinden biri involutif olsa diğeri sıfır matrisi olurdu. Bu ise teoremin kabulleri ile çelişir. Bu gözlemler (a) ve (b) şıklarının ispatlarını tamamlar.

(4.37) kriterinde $(c_1,c_2)=(-2,-1)$ veya $(c_1,c_2)=(2,1)$, $(c_1,c_2)=(-2,1)$ veya $(c_1,c_2)=(2,-1)$, $(c_1,c_2)=(-1,-2)$ veya $(c_1,c_2)=(1,2)$ ve $(c_1,c_2)=(-1,2)$ veya $(c_1,c_2)=(1,-2)$ değerleri yerine yazıldığında, sırasıyla,

$$4\mathbf{T}_1^2 + 4\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2 + \mathbf{T}_2^2 = \mathbf{I}, \tag{4.44}$$

$$4\mathbf{T}_1^2 - 4\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2 + \mathbf{T}_2^2 = \mathbf{I}, \tag{4.45}$$

$$\mathbf{T}_1^2 + 4\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2 + 4\mathbf{T}_2^2 = \mathbf{I} \tag{4.46}$$

ve

$$\mathbf{T}_1^2 - 4\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2 + 4\mathbf{T}_2^2 = \mathbf{I} \tag{4.47}$$

elde edilir. $\mathbf{T}_1$ ve $\mathbf{T}_2$ matrisleriyle (4.44) eşitliği çarpılırsa, sırasıyla,

$$3\mathbf{T}_1 + 4\mathbf{T}_1^2\mathbf{T}_2 + \mathbf{T}_1\mathbf{T}_2^2 = \mathbf{0} \text{ ve } \mathbf{T}_1^2\mathbf{T}_2 + \mathbf{T}_1\mathbf{T}_2^2 = \mathbf{0} \tag{4.48}$$

ve (4.45) eşitliği çarpılırsa, sırasıyla,

$$3\mathbf{T}_1 - 4\mathbf{T}_1^2\mathbf{T}_2 + \mathbf{T}_1\mathbf{T}_2^2 = \mathbf{0} \text{ ve } \mathbf{T}_1^2\mathbf{T}_2 - \mathbf{T}_1\mathbf{T}_2^2 = \mathbf{0} \tag{4.49}$$

bulunur. (4.48) ve (4.49) ifadelerinden, sırasıyla,

$$\mathbf{T}_1 = -\mathbf{T}_1^2\mathbf{T}_2 \text{ ve } \mathbf{T}_1 = \mathbf{T}_1^2\mathbf{T}_2$$

yazılabilir. Son ifadedeki her iki eşitlikten de $\mathbf{T}_1$ matrisinin involutif olamayacağı görülür. Çünkü, $\mathbf{T}_1$ involutif olsa $\mathbf{T}_1 = -\mathbf{T}_2$ veya $\mathbf{T}_1 = \mathbf{T}_2$ elde edilir. Bu ise teoremin varsayımları ile çelişir. Bu gözlemler (c) ve (d) şıklarının ispatlarını tamamlar.

Benzer şekilde $\mathbf{T}_1$ ve $\mathbf{T}_2$ matrisleriyle (4.46) eşitliği çarpılırsa, sırasıyla,

$$\mathbf{T}_1^2\mathbf{T}_2 + \mathbf{T}_1\mathbf{T}_2^2 = \mathbf{0} \text{ ve } \mathbf{T}_1^2\mathbf{T}_2 + 4\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2^2 + 3\mathbf{T}_2 = \mathbf{0} \tag{4.50}$$

ve (4.47) eşitliği çarpılırsa, sırasıyla,

$$-\mathbf{T}_1^2\mathbf{T}_2 + \mathbf{T}_1\mathbf{T}_2^2 = \mathbf{0} \text{ ve } \mathbf{T}_1^2\mathbf{T}_2 - 4\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2^2 + 3\mathbf{T}_2 = \mathbf{0} \tag{4.51}$$

bulunur. (4.50) ve (4.51) ifadelerinden, sırasıyla,

$$\mathbf{T}_2 = -\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2^2 \text{ ve } \mathbf{T}_2 = \mathbf{T}_1\mathbf{T}_2^2$$

elde edilir. Son ifadedeki her iki eşitlikten de $\mathbf{T}_2$ matrisinin involutif olamayacağı görülür. Çünkü, $\mathbf{T}_2$ involutif olursa, $\mathbf{T}_1 = -\mathbf{T}_2$ veya $\mathbf{T}_1 = \mathbf{T}_2$ elde edilir. Bu ise teoremin varsayımları ile çelişir. Bu gözlemler de (e) ve (f) şıklarının ispatlarını tamamlar. Böylece teoremin ispatı tamamlanır. ■

Teorem 4.9 ile Teorem 4.3 ve Teorem 4.6 karşılaştırıldığında, (4.1) biçimli $\mathbf{X}$ lineer kombinasyon matrisinin tripotentliği problemini idempotentlik problemine kısıtlamanın çözüm sayısını azaltmadığı ancak involutiflik problemine kısıtlamanın çözüm sayısını azalttığı açık olarak görülmektedir.

BÖLÜM 5. İKİ KUADRİPOTENT MATRİSİN BAZI LİNEER KOMBİNASYONLARI

5.1. Giriş

c_1, c_2 sıfırdan farklı kompleks sayılar ve $\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2$ $n \times n$ boyutlu sıfırdan farklı kompleks hipergenelleştirilmiş projektörler olmak üzere,

$$\mathbf{H} = c_1\mathbf{H}_1 + c_2\mathbf{H}_2 \tag{5.1}$$

olsun. Bazı $\eta_1, \eta_2 \in \mathbb{C}$ sayıları için

$$\mathbf{H}_1\mathbf{H}_2 = \eta_1\mathbf{H}_1^2 + \eta_2\mathbf{H}_2^2 = \mathbf{H}_2\mathbf{H}_1 \tag{5.2}$$

koşulu altında, (5.1) biçimli $\mathbf{H}$ lineer kombinasyon matrisinin hipergenelleştirilmiş projektör olduğu durumları karakterize etme problemi Baksalary, Baksalary ve Groß tarafından ele alınmıştır [6]. Bu karakterizasyonun (5.2) koşulu altında yapılmasının nedeni genel durumda problemin zor oluşudur. Bununla birlikte, (5.2) koşulunu, daha zayıf bir koşul olan $\mathbf{H}_1$ ve $\mathbf{H}_2$ matrislerinin değişmeli olması, yani $\mathbf{H}_1\mathbf{H}_2 = \mathbf{H}_2\mathbf{H}_1$, ile değiştirerek yine (5.1) biçimli $\mathbf{H}$ lineer kombinasyon matrisinin hipergenelleştirilmiş projektör olduğu durumları karakterize etme probleminin çözümü Baksalary ve Benítez tarafından ortaya konulmuştur [9]. Bu çalışmalardaki sonuçlar, aşağıdaki kısımda verilmektedir.

c_1, c_2 sıfırdan farklı kompleks sayılar ve $\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2$ $n \times n$ boyutlu sıfırdan farklı kompleks kuadripotent matrisler olmak üzere,

$$\mathbf{X} = c_1\mathbf{Q}_1 + c_2\mathbf{Q}_2 \tag{5.3}$$

olsun. Bu bölümün üçüncü kısmında, [6] çalışmasından esinlenerek (5.2) koşulundaki $\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2 \in \mathbb{C}_n^{HGP}$ yerine $\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2 \in \mathbb{C}_n^{Q}$ alınarak oluşturulan

$$\mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_2 = \eta_1\mathbf{Q}_1^2 + \eta_2\mathbf{Q}_2^2 = \mathbf{Q}_2\mathbf{Q}_1 \tag{5.4}$$

koşulu altında, (5.3) biçimli $\mathbf{X}$ lineer kombinasyon matrisinin kuadripotent, tripotent ve idempotent olduğu durumlar karakterize edilmektedir.

5.2. İki Hipergenelleştirilmiş Projektörün Bazı Lineer Kombinasyonlarının Hipergenelleştirilmişliği

Yukarıda da bahsedildiği gibi bu kısımda [6] ve [9] çalışmalarındaki sonuçlar verilmektedir. İlk üç teorem [6] da ve sonuncusu da [9] da verilen ana sonuçları içermektedir.

Teorem 5.1. [6, Theorem 1] $c_1, c_2 \in \mathbb{C}^*$ ve $\eta \in \left\{0, 1, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$ olmak üzere $\mathbf{H}_1\mathbf{H}_2 = \eta\mathbf{H}_1^2 = \mathbf{H}_2\mathbf{H}_1$ olacak şekilde sıfırdan farklı ve birbirinin skaler katı olmayan $\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2 \in \mathbb{C}_n^{HGP}$ matrisleri için, $\mathbf{H} = c_1\mathbf{H}_1 + c_2\mathbf{H}_2$ olsun. $\mathbf{H}$ matrisinin hipergenelleştirilmiş projektör olması için gerekli ve yeterli koşul $c_2^3 = 1$ ile birlikte $c_1 + c_2\eta = 0$ ve $(c_1 + c_2\eta)^3 = 1$ koşullarından birinin sağlanmasıdır. ■

Teorem 5.2. [6, Theorem 2] $c_1, c_2 \in \mathbb{C}^*$ ve $\eta \in \left\{-1, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$ olmak üzere $\mathbf{H}_1\mathbf{H}_2 = \overline{\eta}\mathbf{H}_1^2 + \eta\mathbf{H}_2^2 = \mathbf{H}_2\mathbf{H}_1$ olacak şekilde sıfırdan farklı ve birbirinin skaler katı olmayan $\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2 \in \mathbb{C}_n^{HGP}$ matrisleri için, $\mathbf{H} = c_1\mathbf{H}_1 + c_2\mathbf{H}_2$ olsun. $\mathbf{H}$ matrisinin kuadripotent olması için gerekli ve yeterli koşul $c_1^3 + 6c_1c_2^2\eta + 4c_2^3 = 1$ ve $c_2^3 + 6c_1^2c_2\overline{\eta} + 4c_1^3 = 1$ denklemlerinin sağlanmasıdır. ■

Teorem 5.3. [6, Theorem 3] $c_1, c_2 \in \mathbb{C}^*$ ve $\eta \in \left\{-1, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$ olmak üzere $\mathbf{H}_1\mathbf{H}_2 = \overline{\eta}\mathbf{H}_1^2 + \eta\mathbf{H}_2^2 = \mathbf{H}_2\mathbf{H}_1$ olacak şekilde sıfırdan farklı ve birbirinin skaler katı olmayan $\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2 \in \mathbb{C}_n^{HGP}$ matrisleri için, $\mathbf{H} = c_1\mathbf{H}_1 + c_2\mathbf{H}_2$ olsun. $\mathbf{H}$ matrisinin olabilecek en büyük ranka sahip ve ayrıca hipergenelleştirilmiş projektör olması için gerekli ve yeterli koşul $c_1^3 = -1$ ve $c_1\eta + c_2 = 0$ veya denk olarak $c_2^3 = -1$ ve $c_1 + c_2\overline{\eta} = 0$ denklemlerinin sağlanmasıdır. ■

Teorem 5.4. [9, Theorem 3] $c_1, c_2 \in \mathbb{C}^*$ ve $\mathbf{H}_1\mathbf{H}_2 = \mathbf{H}_2\mathbf{H}_1$ olacak şekilde sıfırdan farklı ve birbirinin skaler katı olmayan $\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2 \in \mathbb{C}_n^{HGP}$ matrisleri için, $\mathbf{H} = c_1\mathbf{H}_1 + c_2\mathbf{H}_2$ olsun. $\mathbf{H}$ matrisinin hipergenelleştirilmiş projektör olması için gerekli ve yeterli koşul aşağıdaki durumlardan birinin sağlanmasıdır:

(a) $c_1 \in \sqrt[3]{1}$, $c_2 \in \sqrt[3]{1}$, $\mathbf{H}_1\mathbf{H}_2 = \mathbf{0}$;

(b) $c_1 \in \sqrt[3]{1}$, $c_2 \in \sqrt[3]{-1}$, $(c_1\mathbf{H}_1 + c_2\mathbf{H}_2)\mathbf{H}_2 = \mathbf{0}$;

(c) $c_1 \in \sqrt[3]{-1}$, $c_2 \in \sqrt[3]{1}$, $(c_1\mathbf{H}_1 + c_2\mathbf{H}_2)\mathbf{H}_1 = \mathbf{0}$;

(d) $c_1 \in \sqrt[3]{1}$, $c_2 \in \sqrt[6]{-27}$ ve $c_1 + \lambda c_2 \in \sqrt[3]{1}$ ile birlikte $\mathbf{H}_2^2 = \lambda\mathbf{H}_1\mathbf{H}_2$ olacak şekilde bir $\lambda \in \sqrt[3]{1}$ sayısının var olması;

(e) $c_1 \in \sqrt[6]{-27}$, $c_2 \in \sqrt[3]{1}$ ve $\mu c_1 + c_2 \in \sqrt[3]{1}$ ile birlikte $\mathbf{H}_1^2 = \mu\mathbf{H}_1\mathbf{H}_2$ olacak şekilde bir $\mu \in \sqrt[3]{1}$ sayısının var olması;

(f) $c_1 + \lambda c_2 \in \sqrt[3]{1}$, $c_1 + \mu c_2 \in \{0\} \cup \sqrt[3]{1}$ ile birlikte $\lambda\mu\mathbf{H}_1^2 + \mathbf{H}_2^2 = (\lambda + \mu)\mathbf{H}_1\mathbf{H}_2$ ve $\mathbf{H}_1^2\mathbf{H}_2$ normal matris olacak şekilde $\lambda, \mu \in \sqrt[3]{1}$, $\lambda \neq \mu$ sayılarının var olması. ■

5.3. İki Kuadripotent Matrisin Bazı Lineer Kombinasyonlarının Kuadripotentliği, Tripotentliği ve İdempotentliği

Bu kısımda (5.3) biçimli $\mathbf{X}$ lineer kombinasyon matrisinin kuadripotent, tripotent ve idempotent olma problemleri ele alınacaktır. Bu problemler bazı durumlarda basit bir hal alır. Örneğin, $\mathbf{Q}_1$ ve $\mathbf{Q}_2$ ikisi birden sıfır matrisi olduğunda (5.3) biçimli $\mathbf{X}$ lineer kombinasyon matrisi açık olarak kuadripotent, tripotent ve idempotent olacaktır. Bundan başka basit durumlar da vardır. Bunlardan da söz edilecektir. Ancak önce aşağıdaki yardımcı sonuç verilecektir.

Lemma 5.5. $c \in \mathbb{C}$ ve $\mathbf{Q} \in \mathbb{C}_n^Q \setminus \{\mathbf{0}\}$ olsun. Bu durumda

(a) $c\mathbf{Q} \in \mathbb{C}_n^Q$ ise $c = 0$ veya $c^3 = 1$ dir,

(b) $c\mathbf{Q} \in \mathbb{C}_n^T$ ise $c = 0$ veya $c^3 = 1$ veya $c^3 = -1$ dir,

(c) $c\mathbf{Q} \in \mathbb{C}_n^P$ ise $c = 0$ veya $c^3 = 1$ dir.

İspat.

(a) $c\mathbf{Q} \in \mathbb{C}_n^Q$ ise $(c\mathbf{Q})^4 = c\mathbf{Q}$ eşitliğinden $c\left(c^3 - 1\right) = 0$ elde edilir. Dolayısıyla $c = 0$ veya $c^3 = 1$ bulunur.

(b) $c\mathbf{Q} \in \mathbb{C}_n^T$ ise $(c\mathbf{Q})^3 = c\mathbf{Q}$ eşitliğinin her iki yanının dördüncü kuvveti alınırsa $c^{12}\mathbf{Q}^3 = c^3 c\mathbf{Q} = c^3 c^3 \mathbf{Q}^3$, yani $c^6\left(c^6 - 1\right) = 0$ elde edilir. Dolayısıyla $c = 0$ veya $c^3 = 1$ veya $c^3 = -1$ bulunur.

(c) $c\mathbf{Q} \in \mathbb{C}_n^P$ ise $(c\mathbf{Q})^2 = c\mathbf{Q}$ eşitliğinin her iki yanının dördüncü kuvveti alınırsa $c^8\mathbf{Q}^2 = c^3 c\mathbf{Q} = c^3 c^2 \mathbf{Q}^2$, yani $c^5\left(c^3 - 1\right) = 0$ elde edilir. Dolayısıyla $c = 0$ veya $c^3 = 1$ bulunur. Böylece ispat tamamlanır. ■

Lemma 5.5 göz önüne alındığında, $\mathbf{Q}_1$ ve $\mathbf{Q}_2$ matrislerinden herhangi birisinin sıfır matrisi olması durumunda, (5.3) biçimli $\mathbf{X}$ lineer kombinasyon matrisinin ne zaman kuadripotent, tripotent ve idempotent olacağı problemlerinin basit bir hal alacağı kolaylıkla görülebilir. Örneğin, $\mathbf{Q}_1 \neq \mathbf{0} = \mathbf{Q}_2$ olsun. (5.3) biçimli $\mathbf{X}$ matrisi, $\mathbf{X} = c_1\mathbf{Q}_1$ biçiminde olacağı için:

(a) $\mathbf{X} \in \mathbb{C}_n^Q$ ise $c_1 = 0$ veya $c_1^3 = 1$ dir,

(b) $\mathbf{X} \in \mathbb{C}_n^T$ ise $c_1^3 = 0$ veya $c_1^3 = 1$ veya $c_1^3 = -1$ dir,

(c) $\mathbf{X} \in \mathbb{C}_n^P$ ise $c_1 = 0$ veya $c_1^3 = 1$ dir.

Diğer taraftan $\mathbf{Q}_1 = \mathbf{0} \neq \mathbf{Q}_2$ olduğunda (5.3) biçimli $\mathbf{X}$ matrisi, $\mathbf{X} = c_2\mathbf{Q}_2$ biçiminde olacağı için de benzer durum oluşur. Ayrıca, matrislerden biri diğerinin skaler katı, örneğin $\mathbf{Q}_1 = \alpha\mathbf{Q}_2$, olduğunda $\mathbf{X} = (\alpha c_1 + c_2)\mathbf{Q}_2$ biçimini alır. Bu durum, yine Lemma 5.5 tarafından içerilir. Bu durumda, $\mathbf{Q}_1$ ve $\mathbf{Q}_2$ matrisleri sıfırdan farklı olması halinde $\alpha \in \sqrt[3]{1}$ olduğunda dikkat edilmelidir. Bu şekildeki basit durumları hariç tutmak amacıyla bundan sonra $\mathbf{Q}_1$ ve $\mathbf{Q}_2$ matrisleri sıfırdan farklı ve birbirlerinin skaler katı olmayan matrisler olarak kabul edilecektir.

Lemma 5.6. $c_1, c_2 \in \mathbb{C}^*$ ve $\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2 \in \mathbb{C}_n^Q \backslash \{\mathbf{0}\}$, $\mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_2 = \mathbf{Q}_2\mathbf{Q}_1$ koşulunu sağlayan iki matris olsun. Ayrıca, $\mathbf{\Lambda}$ ve $\mathbf{\Gamma}$ matrisleri, sırasıyla, $\mathbf{Q}_1$ ve $\mathbf{Q}_2$ matrislerinin özdeğerlerini ana köşegen elemanları olarak kabul eden köşegen matrisler olsun. Bu durumda (5.3) biçimli $\mathbf{X}$ lineer kombinasyon matrisi için

$$\mathbf{X} = \mathbf{S}(c_1\mathbf{\Lambda} + c_2\mathbf{\Gamma})\mathbf{S}^{-1} \tag{5.5}$$

olacak şekilde bir $\mathbf{S}$ tersinir matrisi vardır.

İspat. Herhangi bir kuadripotent matrisin minimal polinomunun, $\mu^4 - \mu$ polinomunun bir bölenidir. Bununla birlikte, $\mu^4 - \mu$ polinomu farklı lineer çarpanlara sahiptir. Dolayısıyla Teorem 2.23 den $\mathbf{Q}_1$ ve $\mathbf{Q}_2$ matrisleri köşegenleştirilebilirdir. Ayrıca, $\mathbf{Q}_1$ ve $\mathbf{Q}_2$ değişmeli oldukları için Teorem 2.25 den $\mathbf{S}^{-1}\mathbf{Q}_1\mathbf{S} = \mathbf{\Lambda}$ ve $\mathbf{S}^{-1}\mathbf{Q}_2\mathbf{S} = \mathbf{\Gamma}$ olacak şekilde bir $\mathbf{S}$ tersinir matrisinin var olduğu açıktır. O halde (5.3) lineer kombinasyonu (5.5) biçiminde yazılabilir. ■

Lemma 5.7. $c_1, c_2 \in \mathbb{C}^*$ ve $\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2 \in \mathbb{C}_n^Q \backslash \{\mathbf{0}\}$, $\mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_2 = \mathbf{Q}_2\mathbf{Q}_1$ koşulunu sağlayan iki matris olsun. Ayrıca, $\mathbf{\Lambda}$ ve $\mathbf{\Gamma}$ matrisleri, sırasıyla, $\mathbf{Q}_1$ ve $\mathbf{Q}_2$ matrislerinin özdeğerlerini ana köşegen elemanları olarak kabul eden köşegen matrisler olsun. Bu durumda (5.3) biçimli $\mathbf{X}$ lineer kombinasyon matrisinin

(a) kuadripotent olması için gerekli ve yeterli koşul $(c_1\mathbf{\Lambda} + c_2\mathbf{\Gamma})^4 - (c_1\mathbf{\Lambda} + c_2\mathbf{\Gamma}) = \mathbf{0}$ olmasıdır,

(b) tripotent olması için gerekli ve yeterli koşul $(c_1\mathbf{\Lambda}+c_2\mathbf{\Gamma})^3-(c_1\mathbf{\Lambda}+c_2\mathbf{\Gamma})=\mathbf{0}$ olmasıdır,

(c) idempotent olması için gerekli ve yeterli koşul $(c_1\mathbf{\Lambda}+c_2\mathbf{\Gamma})^2-(c_1\mathbf{\Lambda}+c_2\mathbf{\Gamma})=\mathbf{0}$ olmasıdır.

İspat. Burada yalnızca (a) şıkkının ispatı verilecektir. (b) ve (c) şıklarının ispatı benzer şekilde yapılır.

Lemma 5.6 kullanılarak (5.3) biçimli $\mathbf{X}$ matrisi $\mathbf{X}=\mathbf{S}(c_1\mathbf{\Lambda}+c_2\mathbf{\Gamma})\mathbf{S}^{-1}$ biçiminde yazılabilir. $\mathbf{X}$ matrisi kuadripotent ise, $\left(\mathbf{S}(c_1\mathbf{\Lambda}+c_2\mathbf{\Gamma})\mathbf{S}^{-1}\right)^4=\mathbf{S}(c_1\mathbf{\Lambda}+c_2\mathbf{\Gamma})\mathbf{S}^{-1}$ ve buradan $\mathbf{S}(c_1\mathbf{\Lambda}+c_2\mathbf{\Gamma})^4\mathbf{S}^{-1}=\mathbf{S}(c_1\mathbf{\Lambda}+c_2\mathbf{\Gamma})\mathbf{S}^{-1}$ olur. Son eşitliğin her iki yanı soldan $\mathbf{S}^{-1}$ ve sağdan $\mathbf{S}$ ile çarpılırsa $(c_1\mathbf{\Lambda}+c_2\mathbf{\Gamma})^4=(c_1\mathbf{\Lambda}+c_2\mathbf{\Gamma})$ elde edilir. Tersinin sağlanacağı açıktır. ■

Önceden belirtildiği gibi, bu bölümdeki sonuçlar, (5.4) koşulu altında verilecektir. Ancak, [6] çalışmasında yapılana benzer şekilde, (5.4) koşulu iki ayrı kısma parçalanarak ilerlenecektir. Bunlardan birincisi η_1 ve η_2 kompleks sayılarından (en az) birinin sıfır olması halidir. Örneğin, $\eta_2=0$ olsun. Bu durumda (5.4) ifadesi, bazı $\eta\in\mathbb{C}$ sayıları için

$$\mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_2=\eta\mathbf{Q}_1^2=\mathbf{Q}_2\mathbf{Q}_1 \tag{5.6}$$

biçiminde yazılabilir. Burada indisten kurtulmak amacı ile η_1 yerine η yazılmıştır. (5.6) eşitliğinde $\mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_2$ ve $\mathbf{Q}_1^2$ matrisleri açık olarak kuadripotenttir. Eşitlik nedeniyle $\eta\mathbf{Q}_1^2$ matrisi de kuadripotent olmak durumundadır. Lemma 5.5 ten bunun olabilmesi için $\eta=0$ veya $\eta^3=1$ olması gerektiği hemen görülür. O halde $\eta\in\left\{0,1,-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i,-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$ olmak zorundadır.

(5.4) koşulunun ikinci kısmı ise η_1 ve η_2 kompleks sayılarının her ikisinin de sıfırdan farklı olması halidir. Bu durumda $\mathbf{I} \in \mathbb{C}_n$ birim matris olmak üzere, (5.4) eşitliği $\mathbf{I}-\mathbf{Q}_1^3$ ve $\mathbf{I}-\mathbf{Q}_2^3$ ile çarpılırsa, sırasıyla,

$$\eta_2\mathbf{Q}_2^2\left(\mathbf{I}-\mathbf{Q}_1^3\right)=\mathbf{0} \text{ ve } \eta_1\mathbf{Q}_1^2\left(\mathbf{I}-\mathbf{Q}_2^3\right)=\mathbf{0}$$

olur. $\eta_1, \eta_2 \in \mathbb{C}^*$ olduğundan bu denklemden

$$\mathbf{Q}_2^2=\mathbf{Q}_2^2\mathbf{Q}_1^3 \text{ ve } \mathbf{Q}_1^2=\mathbf{Q}_1^2\mathbf{Q}_2^3 \tag{5.7}$$

elde edilir. Ayrıca (5.4) eşitliği $\mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_2^2$ ile çarpılırsa $\mathbf{Q}_1^2\mathbf{Q}_2^3=\eta_1\mathbf{Q}_1^3\mathbf{Q}_2^2+\eta_2\mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_2$ olur. Bu denklemde (5.4) ve (5.7) eşitlikleri kullanılırsa $\mathbf{Q}_1^2=\eta_1\mathbf{Q}_2^2+\eta_1\eta_2\mathbf{Q}_1^2+\eta_2^2\mathbf{Q}_2^2$ veya $\left(1-\eta_1\eta_2\right)\mathbf{Q}_1^2=\left(\eta_1+\eta_2^2\right)\mathbf{Q}_2^2$ bulunur. Böylece,

$$1-\eta_1\eta_2=0 \text{ ve } \eta_1+\eta_2^2=0 \tag{5.8}$$

olmak zorundadır. Çünkü, (5.8) denklemindeki $1-\eta_1\eta_2$ ve $\eta_1+\eta_2^2$ sayılarından yalnızca biri sıfır olursa, $\mathbf{Q}_1^2=\mathbf{0}$ veya $\mathbf{Q}_2^2=\mathbf{0}$ olur. Buradan, sırasıyla, $\mathbf{Q}_1=\mathbf{0}$ veya $\mathbf{Q}_2=\mathbf{0}$ elde edilir. Dolayısıyla, $\mathbf{Q}_1$ veya $\mathbf{Q}_2$ matrisinin sıfırdan farklı olması varsayımı ile çelişki ortaya çıkar. Diğer taraftan, (5.8) denklemlerindeki $1-\eta_1\eta_2$ ve $\eta_1+\eta_2^2$ sayılarının her ikisi birden sıfırdan farklı olursa, $\alpha=\dfrac{\eta_1+\eta_2^2}{1-\eta_1\eta_2}$ olmak üzere $\mathbf{Q}_1^2=\alpha\mathbf{Q}_2^2$ yazılır. Buradan $\mathbf{Q}_1^2$ ve $\mathbf{Q}_2^2$ matrisleri, sırasıyla, $\mathbf{Q}_1$ ve $\mathbf{Q}_2$ matrislerinin genelleştirilmiş tersleri olduklarından $\mathbf{Q}_1^-=\alpha\mathbf{Q}_2^-$ elde edilir. Her tarafın genelleştirilmiş tersi alınırsa $\mathbf{Q}_1=\alpha^-\mathbf{Q}_2$ olur. Burada $\alpha^-=\dfrac{1}{\alpha}$, ($\alpha\neq 0$) dır. Bu ise $\mathbf{Q}_1$ ve $\mathbf{Q}_2$ matrislerinin birbirlerinin skaler katı olmaması kabulü ile çelişir. Dolayısıyla (5.8) denklemleri sağlanmalıdır. Böylece $\eta_2^3=-1$ ve $\eta_1=\dfrac{1}{\eta_2}=\overline{\eta}_2$

bulunur. Sonuç olarak (5.4) koşulu, η_1 ve η_2 sayılarının her ikisi de sıfırdan farklı ise, $\eta \in \left\{-1, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$ olmak üzere

$$\mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_2 = \bar{\eta}\mathbf{Q}_1^2 + \eta\mathbf{Q}_2^2 = \mathbf{Q}_2\mathbf{Q}_1 \tag{5.9}$$

biçiminde yazılabilir. Aşağıdaki kısımlarda verilen sonuçlar (5.4) koşulunun parçalanışı olan (5.6) ve (5.9) koşulları altında ayrı ayrı verilecektir. Aşağıda verilen yardımcı sonuç ise, (5.6) ve (5.9) koşullarının bu sonuçların ispatlarında kullanılması ile ilgilidir.

Lemma 5.8. $\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2 \in \mathbb{C}_n^Q \setminus \{\mathbf{0}\}$ ve $\mathbf{\Lambda}$ ile $\mathbf{\Gamma}$ matrisleri, sırasıyla, $\mathbf{Q}_1$ ile $\mathbf{Q}_2$ matrislerinin özdeğerlerini ana köşegen elemanları olarak kabul eden köşegen matrisler olsun.

(a) Eğer $\mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_2 = \eta\mathbf{Q}_1^2 = \mathbf{Q}_2\mathbf{Q}_1$ ise $\mathbf{\Lambda\Gamma} = \eta\mathbf{\Lambda}^2$ dir,

(b) Eğer $\mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_2 = \bar{\eta}\mathbf{Q}_1^2 + \eta\mathbf{Q}_2^2 = \mathbf{Q}_2\mathbf{Q}_1$ ise $\mathbf{\Lambda\Gamma} = \bar{\eta}\mathbf{\Lambda}^2 + \eta\mathbf{\Gamma}^2$ dir.

İspat. (5.6) ve (5.9) koşullarından, $\mathbf{Q}_1$ ve $\mathbf{Q}_2$ matrisleri değişmelidir. O halde Teorem 2.25 e göre $\mathbf{Q}_1$ ve $\mathbf{Q}_2$ matrislerini eşanlı köşegenleştiren bir $\mathbf{S}$ tersinir matrisi vardır. Böylece (5.6) ve (5.9) koşullarından, sırasıyla,

$$\mathbf{\Lambda\Gamma} = \eta\mathbf{\Lambda}^2 = \mathbf{\Gamma\Lambda}$$

ve

$$\mathbf{\Lambda\Gamma} = \bar{\eta}\mathbf{\Lambda}^2 + \eta\mathbf{\Gamma}^2 = \mathbf{\Gamma\Lambda}$$

elde edilir. $\mathbf{\Lambda}$ ve $\mathbf{\Gamma}$ köşegen matrisler olduğundan $\mathbf{\Lambda\Gamma} = \mathbf{\Gamma\Lambda}$ dır. Dolayısıyla elde edilen bu üçlü eşitliklerin en sağda bulunanlarına lemmanın ifadesinde yer verilmemiştir. Böylece ispat tamamlanır. ■

5.3.1. İki kuadripotent matrisin bazı lineer kombinasyonlarının kuadripotentliği

Burada (5.3) biçimli $\mathbf{X}$ lineer kombinasyon matrisinin kuadripotent olma problemi, $\mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_2 = \eta\mathbf{Q}_1^2 = \mathbf{Q}_2\mathbf{Q}_1$ ve $\mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_2 = \bar{\eta}\mathbf{Q}_1^2 + \eta\mathbf{Q}_2^2 = \mathbf{Q}_2\mathbf{Q}_1$ koşulları altında ele alınacaktır.

Teorem 5.9. $c_1, c_2 \in \mathbb{C}^*$, $\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2 \in \mathbb{C}_n^Q \setminus \{\mathbf{0}\}$, $\mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_2 = \eta\mathbf{Q}_1^2 = \mathbf{Q}_2\mathbf{Q}_1$ ve $\mathbf{Q}_1 \neq \alpha\mathbf{Q}_2$ olmak üzere $\mathbf{Q} = c_1\mathbf{Q}_1 + c_2\mathbf{Q}_2$ olsun. $\mathbf{Q}$ matrisinin kuadripotent olması için gerekli ve yeterli koşul $c_2^3 = 1$ ile birlikte $c_1 + c_2\eta = 0$ ve $(c_1 + c_2\eta)^3 = 1$ koşullarından birinin sağlanmasıdır. Burada $\alpha \in \sqrt[3]{1}$ ve $\eta \in \{0\} \cup \sqrt[3]{1}$ dir.

İspat. λ_i ve γ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, skalerleri, sırasıyla, $\mathbf{Q}_1$ ve $\mathbf{Q}_2$ matrislerinin özdeğerleri olmak üzere, Lemma 5.7 (a) ya göre $\mathbf{Q}$ matrisinin kuadripotent olması için gerekli ve yeterli koşul $(c_1\lambda_i + c_2\gamma_i)^4 - (c_1\lambda_i + c_2\gamma_i) = 0$, yani, $1 \leq i \leq n$ için,

$$(c_1\lambda_i + c_2\gamma_i)(c_1\lambda_i + c_2\gamma_i - 1)\left(c_1\lambda_i + c_2\gamma_i + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(c_1\lambda_i + c_2\gamma_i + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 0 \quad (5.10)$$

denklemlerinin sağlanmasıdır. $\mathbf{Q}_1$ ve $\mathbf{Q}_2$ kuadripotent olduklarından λ_i ve γ_i değerleri, $\left\{0, 1, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$ kümesinin elemanları olmalıdır. Buradan, çarpım kuralında göre, (λ_i, γ_i) ikilileri için olası 16 durum elde edilir. Böylece (5.10) ifadesi, n denklem içermekle birlikte aslında 16 farklı denklemden oluşur. Ayrıca, Lemma 5.8 (a) göz önüne alındığında, (5.6) koşulunun sağlanması için

$$\lambda_i\gamma_i = \eta\lambda_i^2, \; i = 1, 2, \ldots, n, \quad (5.11)$$

denklemlerinin sağlanması gerektiği görülür. Buradan η sayısının her bir değeri için (5.11) denklemlerini sağlayan yedişer (λ_i, γ_i) ikilisi bulunur. Dolayısıyla, bu (λ_i, γ_i) ikilileri (5.10) denklemlerinde yerine yazılarak, her bir η için farklı yedişer denklemden ve onların alt kombinasyonlarından oluşturulabilen (altı, beş, dört vs. denklemden meydana gelen) denklem sistemlerinin çözümlerinin bulunması ile Tablo 5.1 elde edilir. Tablo 5.1, olabilecek (λ_i, γ_i) ikililerine göre, (5.10) denklemler sistemini sağlayan (c_1, c_2) ikililerine göre düzenlenmiştir. Ayrıca, Tablo 5.1 de verilen (c_1, c_2) ikililerinin $c_2^3 = 1$ ve $c_1 + c_2\eta = 0$ veya $(c_1 + c_2\eta)^3 = 1$ denklemlerinin çözüm kümesi oldukları kolaylıkla görülebilir. Tersine olarak (c_1, c_2) ile ilgili koşulların $\mathbf{Q} = c_1\mathbf{Q}_1 + c_2\mathbf{Q}_2$ matrisinin kuadripotent olmasını garanti ettiğini de sağlamak kolaydır. Böylece ispat tamamlanır. ■

Teorem 5.10. $c_1, c_2 \in \mathbb{C}^*$, $\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2 \in \mathbb{C}_n^Q \setminus \{\mathbf{0}\}$, $\mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_2 = \overline{\eta}\mathbf{Q}_1^2 + \eta\mathbf{Q}_2^2 = \mathbf{Q}_2\mathbf{Q}_1$ ve $\mathbf{Q}_1 \neq \alpha\mathbf{Q}_2$ olmak üzere $\mathbf{Q} = c_1\mathbf{Q}_1 + c_2\mathbf{Q}_2$ olsun. $\mathbf{Q}$ matrisinin kuadripotent olması için gerekli ve yeterli koşul

$$c_1^3 + 6c_1c_2^2\eta + 4c_2^3 = 1 \text{ ve } c_2^3 + 6c_1^2c_2\overline{\eta} + 4c_1^3 = 1 \tag{5.12}$$

denklemlerinin sağlanmasıdır. Burada $\alpha \in \sqrt[3]{1}$ ve $\eta \in \sqrt[3]{-1}$ dir.

İspat. Teorem 5.9 un ispatına benzer şekilde ilerleyerek, yine $\mathbf{Q}$ matrisinin kuadripotent olması için gerekli ve yeterli koşulun (5.10) denklemlerinin sağlanması olduğu görülür. Ayrıca Lemma 5.8 (b) göz önüne alındığında, (5.9) koşulunun sağlanması için

$$\lambda_i\gamma_i = \overline{\eta}\lambda_i^2 + \eta\gamma_i^2, \; i = 1, 2, \ldots, n, \tag{5.13}$$

denklemlerinin sağlanması gerektiği görülür. Buradan η sayısının her bir değeri için (5.13) denklemlerini sağlayan yedişer (λ_i, γ_i) ikilisi bulunur. Dolayısıyla bu (λ_i, γ_i) ikilileri (5.10) denklemlerinde yerine yazılarak, her bir η için farklı yedişer denklemden ve onların alt kombinasyonlarından oluşturulabilen (altı, beş, dört vs. denklemden meydana gelen) denklem sistemlerinin çözümlerinin bulunması ile

Tablo 5.2 elde edilir. Tablo 5.2, olabilecek (λ_i,γ_i) ikililerine göre, (5.10) denklemler sistemini sağlayan (c_1,c_2) ikililerine göre düzenlenmiştir. Ayrıca, Tablo 5.2 de verilen (c_1,c_2) ikililerinin (5.12) denklem sisteminin çözüm kümesi oldukları kolaylıkla gösterilebilir. Tersine olarak (c_1,c_2) ile ilgili koşulların $\mathbf{Q}=c_1\mathbf{Q}_1+c_2\mathbf{Q}_2$ matrisinin kuadripotent olmasını sağladığını göstermek zor değildir. Böylece ispat tamamlanır. ■

5.3.2. İki kuadripotent matrisin bazı lineer kombinasyonlarının tripotentliği

Burada (5.3) biçimli $\mathbf{X}$ lineer kombinasyon matrisinin tripotent olma problemleri, $\mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_2=\eta\mathbf{Q}_1^2=\mathbf{Q}_2\mathbf{Q}_1$ ve $\mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_2=\overline{\eta}\mathbf{Q}_1^2+\eta\mathbf{Q}_2^2=\mathbf{Q}_2\mathbf{Q}_1$ koşulları altında ele alınacaktır.

Teorem 5.11. $c_1,c_2\in\mathbb{C}^*$, $\mathbf{Q}_1,\mathbf{Q}_2\in\mathbb{C}_n^Q\setminus\{\mathbf{0}\}$, $\mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_2=\eta\mathbf{Q}_1^2=\mathbf{Q}_2\mathbf{Q}_1$ ve $\mathbf{Q}_1\neq\alpha\mathbf{Q}_2$ olmak üzere $\mathbf{T}=c_1\mathbf{Q}_1+c_2\mathbf{Q}_2$ olsun. Bu durumda $\mathbf{T}$ matrisi tripotent ise (c_1,c_2) ikilileri U kümesinin elemanlarıdır. Burada $\alpha\in\sqrt[3]{1}$, $\eta\in\{0\}\cup\sqrt[3]{1}$ ve $\mathrm{U}=\left\{(x,y)\in\mathbb{C}^2 \mid \left(x^3,y^3\right)=(-1,1) \text{ veya } \left(x^3,y^3\right)=(1,-1)\right\}$ dir.

İspat. λ_i ve γ_i, $i=1,2,\ldots,n$, skalerleri, sırasıyla, $\mathbf{Q}_1$ ve $\mathbf{Q}_2$ matrislerinin özdeğerleri olmak üzere, Lemma 5.7 (b) ye göre $\mathbf{T}$ matrisinin tripotent olması için gerekli ve yeterli koşul $\left(c_1\lambda_i+c_2\gamma_i\right)^3-\left(c_1\lambda_i+c_2\gamma_i\right)=0$ olması, yani, $1\le i\le n$ için,

$$\left(c_1\lambda_i+c_2\gamma_i\right)\left(c_1\lambda_i+c_2\gamma_i-1\right)\left(c_1\lambda_i+c_2\gamma_i+1\right)=0, \tag{5.14}$$

denklemlerinin sağlanmasıdır. Lemma 5.8 (a) göz önüne alındığında (5.6) koşulu (5.11) koşuluna dönüşür. Buradan η sayısının her bir değeri için (5.11) denklemlerini sağlayan yedişer (λ_i,γ_i) ikilisi bulunur. Dolayısıyla, bu (λ_i,γ_i) ikilileri (5.14) denklemlerinde yerine yazılarak, her bir η için farklı yedişer denklemden ve onların alt kombinasyonlarından oluşturulabilen (altı, beş, dört vs. denklemden meydana gelen) denklem sistemlerinin çözümlerinin bulunması ile

Tablo 5.3 elde edilir. Tablo 5.3, olabilecek (λ_i, γ_i) ikililerine göre (5.14) denklemler sistemini sağlayan (c_1, c_2) ikililerine göre düzenlenmiştir. Tablo 5.3 te verilen (c_1, c_2) ikililerinin U kümesinin elemanlarının tamamı olduğu açıktır. Böylece ispat tamamlanır. ■

Teorem 5.12. $c_1, c_2 \in \mathbb{C}^*$, $\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2 \in \mathbb{C}_n^Q \setminus \{\mathbf{0}\}$, $\mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_2 = \bar{\eta}\mathbf{Q}_1^2 + \eta\mathbf{Q}_2^2 = \mathbf{Q}_2\mathbf{Q}_1$ ve $\mathbf{Q}_1 \neq \alpha\mathbf{Q}_2$ olmak üzere $\mathbf{T} = c_1\mathbf{Q}_1 + c_2\mathbf{Q}_2$ olsun. $\mathbf{T}$ matrisi tripotent ise (c_1, c_2) ikilileri Tablo 5.4 teki (c_1, c_2) ikililerinden olmak zorundadır. Burada $\alpha \in \sqrt[3]{1}$ ve $\eta \in \sqrt[3]{-1}$ dir.

İspat. Teorem 5.11 in ispatına benzer şekilde ilerleyerek, $\mathbf{T}$ matrisinin tripotent olması için gerekli ve yeterli koşulun (5.14) denklemlerinin sağlanması olduğu görülür. Ayrıca, Lemma 5.8 (b) göz önüne alındığında (5.9) koşulunun sağlanması için (5.13) denklemlerinin sağlanması gerekir. Buradan η sayısının her bir değeri için (5.13) denklemlerini sağlayan yedişer (λ_i, γ_i) ikilisi bulunur. Dolayısıyla bu (λ_i, γ_i) ikilileri, (5.14) denklemlerinde yerine yazılarak, her bir η için farklı yedişer denklemden ve onların alt kombinasyonlarından oluşturulabilen (altı, beş, dört vs. denklemden meydana gelen) denklem sistemlerinin çözümlerinin bulunması ile Tablo 5.4 elde edilir. Tablo 5.4, olabilecek (λ_i, γ_i) ikililerine göre (5.14) denklemler sistemini sağlayan (c_1, c_2) ikililerine göre düzenlenmiştir. Böylece ispat tamamlanır.

■

5.3.3. İki kuadripotent matrisin bazı lineer kombinasyonlarının idempotentliği

Burada (5.3) biçimli $\mathbf{X}$ lineer kombinasyon matrisinin idempotent olma problemleri, $\mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_2 = \eta\mathbf{Q}_1^2 = \mathbf{Q}_2\mathbf{Q}_1$ ve $\mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_2 = \bar{\eta}\mathbf{Q}_1^2 + \eta\mathbf{Q}_2^2 = \mathbf{Q}_2\mathbf{Q}_1$ koşulları altında ele alınacaktır.

Teorem 5.13. $c_1, c_2 \in \mathbb{C}^*$, $\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2 \in \mathbb{C}_n^Q \setminus \{\mathbf{0}\}$, $\mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_2 = \eta\mathbf{Q}_1^2 = \mathbf{Q}_2\mathbf{Q}_1$ ve $\mathbf{Q}_1 \neq \alpha\mathbf{Q}_2$ olmak üzere $\mathbf{P} = c_1\mathbf{Q}_1 + c_2\mathbf{Q}_2$ olsun. $\mathbf{P}$ matrisi idempotent ise (c_1, c_2) ikilileri V kümesinin elemanlarıdır. Burada, $\mathrm{V}=\left\{(x,y)\in\mathbb{C}^2 \mid \left(x^3,y^3\right)=(-1,1)\right\}$, $\alpha\in\sqrt[3]{1}$ ve $\eta\in\{0\}\cup\sqrt[3]{1}$ dir.

İspat. λ_i ve γ_i, $i=1,2,\ldots,n$, skalerleri, sırasıyla, $\mathbf{Q}_1$ ve $\mathbf{Q}_2$ matrislerinin özdeğerleri olmak üzere, Lemma 5.7 (c) ye göre $\mathbf{P}$ matrisinin idempotent olması için gerekli ve yeterli koşul $\left(c_1\lambda_i+c_2\gamma_i\right)^2-\left(c_1\lambda_i+c_2\gamma_i\right)=0$ olması, yani

$$\left(c_1\lambda_i+c_2\gamma_i\right)\left(c_1\lambda_i+c_2\gamma_i-1\right)=0,\ i=1,2,\ldots,n, \tag{5.15}$$

denklemlerinin sağlanmasıdır. Bundan başka Lemma 5.8 (a) göz önüne alınırsa (5.6) koşulu (5.11) koşuluna dönüşür. Buradan η sayısının her bir değeri için (5.11) denklemlerini sağlayan yedişer $\left(\lambda_i,\gamma_i\right)$ ikilisi bulunur. Dolayısıyla $\left(\lambda_i,\gamma_i\right)$ ikilileri (5.14) denklemlerinde yerine yazılarak, her bir η için farklı yedişer denklemden ve onların alt kombinasyonlarından oluşturulabilen (altı, beş, dört vs. denklemden meydana gelen) denklem sistemlerinin çözümlerinin bulunması ile Tablo 5.5 elde edilir. Tablo 5.5, olabilecek $\left(\lambda_i,\gamma_i\right)$ ikililerine göre (5.15) denklemler sistemini sağlayan $\left(c_1,c_2\right)$ ikililerine göre düzenlenmiştir. Ayrıca, Tablo 5.5 te verilen $\left(c_1,c_2\right)$ ikililerinin V kümesinin elemanlarının tamamı oldukları açıktır. Böylece ispat tamamlanır. ■

Teorem 5.14. $c_1,c_2\in\mathbb{C}^*$, $\mathbf{Q}_1,\mathbf{Q}_2\in\mathbb{C}_n^Q\setminus\{\mathbf{0}\}$, $\mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_2=\bar{\eta}\mathbf{Q}_1^2+\eta\mathbf{Q}_2^2=\mathbf{Q}_2\mathbf{Q}_1$ ve $\mathbf{Q}_1\neq\alpha\mathbf{Q}_2$ olmak üzere $\mathbf{P}=c_1\mathbf{Q}_1+c_2\mathbf{Q}_2$ olsun. $\mathbf{P}$ matrisi idempotent ise $\left(c_1,c_2\right)$ ikilileri Tablo 5.6 daki $\left(c_1,c_2\right)$ ikililerinden olmak zorundadır. Burada $\alpha\in\sqrt[3]{1}$ ve $\eta\in\sqrt[3]{-1}$ dir.

İspat. Teorem 5.13 ün ispatına benzer şekilde ilerleyerek, $\mathbf{P}$ matrisinin idempotent olması için gerekli ve yeterli koşulun (5.15) denklemlerinin sağlanması olduğu görülür. Ayrıca, Lemma 5.8 (b) göz önüne alındığında (5.9) koşulunun sağlanması için (5.13) denklemlerinin sağlanması gerekir. Buradan η sayısının her bir değeri için (5.13) denklemlerini sağlayan yedişer (λ_i, γ_i) ikilisi elde edilir. Dolayısıyla (λ_i, γ_i) ikilileri (5.15) denklemlerinde yerine yazılarak, her bir η için farklı yedişer denklemden ve onların alt kombinasyonlarından oluşturulabilen (altı, beş, dört vs. denklemden meydana gelen) denklem sistemlerinin çözümlerinin bulunması ile Tablo 5.6 elde edilir. Tablo 5.6, olabilecek (λ_i, γ_i) ikililerine göre (5.15) denklemler sistemini sağlayan (c_1, c_2) ikililerine göre düzenlenmiştir. Böylece ispat tamamlanır.

■

Not 5.15. Teorem 5.9, Teorem 5.11 ve Teorem 5.13; (5.4) koşulunun $\eta_2 = 0$ özel hali olan (5.6) koşulu altında verilmiştir. Eğer $\eta_1 = 0$ alınsaydı, bu kez indis değişiklikleri ile yine aynı sonuçlar bulunurdu.

Not 5.16. Bu bölümdeki tüm teoremlerin ispatlarında verilen tablolar (λ_i, γ_i) özdeğer ikililerinin en geniş hali ile verilmektedir.

5.3.1–5.3.3 kısımlarında verilen teoremlerin ispatlarında bahsedilen, her bir η için ayrı ayrı olmak üzere, (λ_i, γ_i) ikililerine göre denklem sistemlerinin çözümleri oldukça kalabalık olmakla birlikte sadece aritmetik işlemleri içermektedir. Hacmin artmaması adına bu işlemlere yer verilmemiştir. Bununla birlikte birbirlerine oldukça benzer olmalarına rağmen, tek tek izlenebilir olsun diye, her bir ispat özellikle verilmiştir.

Tablo 5.1. Teorem 5.9 daki (λ_i, γ_i) ikilileri ile ilişkili olan tüm olabilecek (c_1, c_2) ikilileri

Durumlar	(c_1, c_2)	(λ_i, γ_i)
$\eta = 0$	$(1,1), \left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i, 1\right), \left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i, 1\right), \left(1, -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right),$ $\left(1, -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right), \left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right), \left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right),$ $\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$	$(0,0), (0,1), \left(0, -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right), \left(0, -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right),$ $(1,0), \left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i, 0\right), \left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i, 0\right)$
$\eta = 1$	$(-1,1), \left(-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i, 1\right), \left(-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i, 1\right), \left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right),$ $\left(-\sqrt{3}i, -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right), \left(\sqrt{3}i, -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right), \left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right),$ $\left(\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \left(\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$	$(0,0), (0,1), \left(0, -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right), \left(0, -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right), (1,1),$ $\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right), \left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$
$\eta = -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$	$\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i, 1\right), \left(\sqrt{3}i, 1\right), \left(\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i, 1\right),$ $\left(-\sqrt{3}i, -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right), \left(-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right), \left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right),$ $\left(-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right), \left(\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \left(-1, -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$	$(0,0), (0,1), \left(0, -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right), \left(0, -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right),$ $\left(1, -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right), \left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right), \left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i, 1\right)$
$\eta = -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$	$\left(-\sqrt{3}i, 1\right), \left(1, \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right), \left(1, \frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right), \left(-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right),$ $\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right), \left(-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right),$ $\left(\sqrt{3}i, -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right), \left(-1, -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \left(\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$	$(0,0), (0,1), \left(0, -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right), \left(0, -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right),$ $\left(1, -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right), \left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i, 1\right), \left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

Tablo 5.2. Teorem 5.10 daki (λ_i, γ_i) ikilileri ile ilişkili olan tüm olabilecek (c_1, c_2) ikilileri

Durumlar	(c_1, c_2)	(λ_i, γ_i)
$\eta = -1$	$\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{6}i, -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{6}i\right), \left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{6}i, -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{6}i\right), (-1,-1), \left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{6}i, -\frac{\sqrt{3}}{3}i\right)$ $\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{6}i, \frac{\sqrt{3}}{3}i\right), \left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i, \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right), \left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i, \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right),$ $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}i, \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{6}i\right), \left(\frac{\sqrt{3}}{3}i, \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{6}i\right)$	$\left(1, -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right), \left(1, -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right), \left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i, 1\right),$ $\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right), \left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i, 1\right),$ $\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$
$\eta = \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$	$\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{6}i, \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{6}i\right), \left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{6}i, \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{6}i\right), \left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i, -1\right),$ $\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{6}i, -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{6}i\right), \left(\frac{\sqrt{3}}{3}i, -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{6}i\right), \left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{6}i, -\frac{\sqrt{3}}{3}i\right),$ $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}i, \frac{\sqrt{3}}{3}i\right), \left(-1, \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right), \left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i, \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$	$\left(1, -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right), \left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right),$ $\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right),$ $\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i, 1\right), (1,1), \left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$
$\eta = \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$	$\left(\frac{\sqrt{3}}{3}i, -\frac{\sqrt{3}}{3}i\right), \left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{6}i, \frac{\sqrt{3}}{3}i\right), \left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i, -1\right),$ $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}i, -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{6}i\right), \left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{6}i, -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{6}i\right), \left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{6}i, \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{6}i\right),$ $\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{6}i, \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{6}i\right), \left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i, \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right), \left(-1, \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$	$\left(1, -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right), \left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right),$ $\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right),$ $\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i, 1\right), (1,1), \left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

Tablo 5.3. Teorem5.11 deki (λ_i,γ_i) ikilileri ile ilişkili olan tüm olabilecek (c_1,c_2) ikilileri

Durumlar	(c_1,c_2)	(λ_i,γ_i)
$\eta=0$	Çözüm Yok	Çözüm Yok
$\eta=1$	$(-1,1),\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i,-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right),\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right),$ $(1,-1),\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right),\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i,\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$	$(0,0),(0,1),\left(0,-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right),\left(0,-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right),(1,1),$ $\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i,-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right),\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$
$\eta=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$	$\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,1\right),\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i,-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right),\left(-1,-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right),$ $\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i,-1\right),\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right),\left(1,\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$	$(0,0),(0,1),\left(0,-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right),\left(0,-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right),$ $\left(1,-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right),\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i,-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right),\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,1\right)$
$\eta=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$	$\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i,1\right),\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right),\left(-1,-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right),$ $\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i,1\right),\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i,\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right),\left(1,\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$	$(0,0),(0,1),\left(0,-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right),\left(0,-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right),$ $\left(1,-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right),\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i,1\right),\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

Tablo 5.4. Teorem 5.12 deki (λ_i,γ_i) ikilileri ile ilişkili olan tüm olabilecek (c_1,c_2) ikilileri

Durumlar	(c_1,c_2)	(λ_i,γ_i)
$\eta=-1$	$\left(-\frac{\sqrt{3}i}{3},\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{6}i\right),\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{6}i,-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{6}i\right),\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{6}i,-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{6}i\right),\left(\frac{\sqrt{3}i}{3},\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{6}i\right),\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{6}i,-\frac{\sqrt{3}i}{3}\right),$ $\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{6}i,\frac{\sqrt{3}i}{3}\right),\left(\frac{\sqrt{3}i}{3},-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{6}i\right),\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{6}i,\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{6}i\right),\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{6}i,\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{6}i\right),\left(-\frac{\sqrt{3}i}{3},-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{6}i\right),$ $\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{6}i,\frac{\sqrt{3}i}{3}\right),\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{6}i,-\frac{\sqrt{3}i}{3}\right),\left(-\frac{\sqrt{3}i}{3},-\frac{2\sqrt{3}i}{3}\right),\left(\frac{\sqrt{3}i}{3},\frac{2\sqrt{3}i}{3}\right),\left(-\frac{2\sqrt{3}i}{3},-\frac{\sqrt{3}i}{3}\right),\left(\frac{2\sqrt{3}i}{3},\frac{\sqrt{3}i}{3}\right),(1,1)$	$(0,0),\left(1,-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right),\left(1,-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right),$ $\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i,1\right),\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i,-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right),$ $\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,1\right),\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$
$\eta=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$	$\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{6}i,-\frac{\sqrt{3}i}{3}\right),\left(\frac{\sqrt{3}i}{3},-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{6}i\right),\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{6}i,\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{6}i\right),\left(-\frac{\sqrt{3}i}{3},\frac{\sqrt{3}i}{3}\right),\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{6}i,\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{6}i\right),$ $\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{6}i,-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{6}i\right),\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{6}i,\frac{\sqrt{3}i}{3}\right),\left(-\frac{\sqrt{3}i}{3},\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{6}i\right),\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{6}i,-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{6}i\right),$ $\left(\frac{\sqrt{3}i}{3},-\frac{\sqrt{3}i}{3}\right),\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{6}i,-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{6}i\right),\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{6}i,\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{6}i\right)$	$(0,0),(1,1),\left(1,-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right),$ $\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i,1\right),\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i,-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right),$ $\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right),\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$
$\eta=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$	$\left(-\frac{\sqrt{3}i}{3},-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{6}i\right),\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{6}i,\frac{\sqrt{3}i}{3}\right),\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{6}i,\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{6}i\right),\left(\frac{\sqrt{3}i}{3},-\frac{\sqrt{3}i}{3}\right),\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{6}i,\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{6}i\right),$ $\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{6}i,-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{6}i\right),\left(\frac{\sqrt{3}i}{3},\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{6}i\right),\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{6}i,-\frac{\sqrt{3}i}{3}\right),\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{6}i,-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{6}i\right),$ $\left(-\frac{\sqrt{3}i}{3},\frac{\sqrt{3}i}{3}\right),\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{6}i,-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{6}i\right),\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{6}i,\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{6}i\right)$	$(0,0),(1,1),\left(1,-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right),$ $\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i,-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right),\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i,-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right),$ $\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,1\right),\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

Tablo 5.5. Teorem 5.13 teki (λ_i,γ_i) ikilileri ile ilişkili olan tüm olabilecek (c_1,c_2) ikilileri

Durumlar	(c_1,c_2)	(λ_i,γ_i)
$\eta=0$	Çözüm Yok	Çözüm Yok
$\eta=1$	$(-1,1),\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i,-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right),\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$	$(0,0),(0,1),\left(0,-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right),\left(0,-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right),(1,1),$ $\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i,-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right),\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$
$\eta=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$	$\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,1\right),\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i,-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right),\left(-1,-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$	$(0,0),(0,1),\left(0,-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right),\left(0,-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right),$ $\left(1,-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right),\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i,-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right),\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,1\right)$
$\eta=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$	$\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i,1\right),\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right),\left(-1,-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$	$(0,0),(0,1),\left(0,-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right),\left(0,-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right),$ $\left(1,-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right),\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i,1\right),\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

Tablo 5.6. Teorem 5.14 teki (λ_i,γ_i) ikilileri ile ilişkili olan tüm olabilecek (c_1,c_2) ikilileri

Durumlar	(c_1,c_2)	(λ_i,γ_i)
$\eta=-1$	$\left(-\frac{\sqrt{3}i}{3},\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{6}i\right),\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{6}i,-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{6}i\right),\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{6}i,-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{6}i\right),$ $\left(\frac{\sqrt{3}i}{3},\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{6}i\right),\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{6}i,-\frac{\sqrt{3}i}{3}\right),\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{6}i,\frac{\sqrt{3}i}{3}\right)$	$(0,0),\left(1,-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right),\left(1,-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right),$ $\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i,1\right),\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i,-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right),$ $\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,1\right),\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$
$\eta=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$	$\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{6}i,-\frac{\sqrt{3}i}{3}\right),\left(\frac{\sqrt{3}i}{3},-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{6}i\right),\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{6}i,\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{6}i\right),$ $\left(-\frac{\sqrt{3}i}{3},\frac{\sqrt{3}i}{3}\right),\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{6}i,\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{6}i\right),\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{6}i,-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{6}i\right)$	$(0,0),(1,1),\left(1,-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right),$ $\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i,1\right),\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i,-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right),$ $\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right),\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$
$\eta=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$	$\left(-\frac{\sqrt{3}i}{3},-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{6}i\right),\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{6}i,\frac{\sqrt{3}i}{3}\right),\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{6}i,\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{6}i\right),$ $\left(\frac{\sqrt{3}i}{3},-\frac{\sqrt{3}i}{3}\right),\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{6}i,\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{6}i\right),\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{6}i,-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{6}i\right)$	$(0,0),(1,1),\left(1,-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right),$ $\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i,-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right),\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i,-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right),$ $\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,1\right),\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

BÖLÜM 6. İKİ İNVOLUTİF MATRİSİN LİNEER KOMBİNASYONLARI

c_1, c_2 sıfırdan farklı kompleks sayılar ve $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2$ $n \times n$ boyutlu sıfırdan farklı kompleks involutif matrisler olmak üzere,

$$\mathbf{X} = c_1\mathbf{A}_1 + c_2\mathbf{A}_2 \tag{6.1}$$

olsun. $\mathbf{A}_1$ ve $\mathbf{A}_2$ değişmeli olduklarında (6.1) biçimli $\mathbf{X}$ lineer kombinasyon matrisinin tripotent olduğu tüm durumlar bu bölümün ikinci kısmında karakterize edilmektedir. Ayrıca, $\mathbf{A}_1$ ve $\mathbf{A}_2$ üzerinde değişmeli olma koşulu olmaksızın (6.1) biçimli $\mathbf{X}$ matrisinin idempotent ve involutif olduğu tüm durumlar bu bölümün, sırasıyla, ikinci ve üçüncü kısımlarında karakterize edilmektedir.

6.1. İki Değişmeli İnvolutif Matrisin Lineer Kombinasyonunun Tripotentliği

Yukarıda söylendiği gibi, bu kısımda, $\mathbf{A}_1$ ve $\mathbf{A}_2$ değişmeli olmak üzere, (6.1) biçimli lineer kombinasyon matrisinin tripotent olduğu tüm durumlar aşağıdaki teoremle karakterize edilecektir.

Teorem 6.1. $c_1, c_2 \in \mathbb{C}^*$, $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2 \in \mathbb{C}_n^A$, $\mathbf{A}_1 \neq \pm\mathbf{A}_2$ ve $\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2 = \mathbf{A}_2\mathbf{A}_1$ olmak üzere $\mathbf{T} = c_1\mathbf{A}_1 + c_2\mathbf{A}_2$ olsun. $\mathbf{T}$ matrisinin tripotent olması için gerekli ve yeterli koşul $(c_1, c_2) \in \left\{\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)\right\}$ olmasıdır.

İspat. Öncelikle $\mathbf{T}$ bir tripotent matris olsun. $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2 \in \mathbb{C}_n^A$ matrislerinin değişmeli olması göz önüne alındığında $\mathbf{T}^3 = \mathbf{T}$ eşitliğinin sağlanmasının gerekli ve yeterli koşulu

$$c_1^3\mathbf{A}_1 + 3c_1^2c_2\mathbf{A}_2 + 3c_1c_2^2\mathbf{A}_1 + c_2^3\mathbf{A}_2 - c_1\mathbf{A}_1 - c_2\mathbf{A}_2 = \mathbf{0} \tag{6.2}$$

olmasıdır. (6.2) denklemi $\mathbf{A}_1$ matrisi ile çarpılırsa, $\mathbf{T}$ matrisinin tripotent olmasının gerekli ve yeterli koşulu

$$c_1^3\mathbf{I} + 3c_1^2c_2\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2 + 3c_1c_2^2\mathbf{I} + c_2^3\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2 - c_1\mathbf{I} - c_2\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2 = \mathbf{0}$$

olarak elde edilir. Bu denklem

$$c_1^3\mathbf{I} + 3c_1^2c_2\mathbf{I}^2\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2 + 3c_1c_2^2\mathbf{I}\left(\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2\right)^2 + c_2^3\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2\left(\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2\right)^2 - c_1\mathbf{I} - c_2\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2 = \mathbf{0}$$

şeklinde de yazılabilir. Böylece $\left(c_1\mathbf{I} + c_2\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2\right)^3 - \left(c_1\mathbf{I} + c_2\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2\right) = \mathbf{0}$ bulunur. Bu ise $c_1\mathbf{I} + c_2\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2$ matrisinin tripotent olması demektir. $\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2$ matrisi involutif olduğundan onun minimal polinomu $\lambda^2 - 1$ polinomunun bir bölenidir. Dolayısıyla Teorem 2.23 göz önüne alındığında $\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2$ matrisi köşegenleştirilebilirdir. O halde $0 \le n_1, n_2 \le n$ ve $n_1 + n_2 = n$ için $\mathbf{J}_1$ ve $\mathbf{J}_2$, sırasıyla, n_1 ve n_2 boyutlu birim matrisleri göstermek üzere $\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2 = \mathbf{S}\left(\mathbf{J}_1 \oplus -\mathbf{J}_2\right)\mathbf{S}^{-1}$ olacak şekilde bir $\mathbf{S}$ tersinir matrisi vardır. Bu eşitliğin sağ yanındaki $\mathbf{J}_1$ ve $-\mathbf{J}_2$ matrislerinin her ikisi de var olmak zorundadır. Aksi takdirde $\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2 = \pm\mathbf{I}$ olur. Bu eşitlik, her iki taraftan $\mathbf{A}_1$ ile çarpılırsa, $\mathbf{A}_1 \ne \pm\mathbf{A}_2$ olur. Bu ise varsayım ile çelişir. Böylece $c_1\mathbf{I} + c_2\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2$ matrisinin tripotent olmasının gerekli ve yeterli koşulu, $c_1\left(\mathbf{J}_1 \oplus \mathbf{J}_2\right) + c_2\left(\mathbf{J}_1 \oplus -\mathbf{J}_2\right)$ matrisinin veya denk olarak $\left(c_1 + c_2\right)\mathbf{J}_1 \oplus \left(c_1 - c_2\right)\mathbf{J}_2$ matrisinin tripotent olması, yani $\left(c_1 + c_2\right) \in \{-1, 0, 1\}$ ve $\left(c_1 - c_2\right) \in \{-1, 0, 1\}$ olmasıdır. Böylece aşağıdaki dokuz durum elde edilir:

$$c_1+c_2=-1,\quad c_1-c_2=-1 \quad \Rightarrow \quad (c_1,c_2)=(-1,0);$$

$$c_1+c_2=-1,\quad c_1-c_2=0 \quad \Rightarrow \quad (c_1,c_2)=\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right);$$

$$c_1+c_2=-1,\quad c_1-c_2=1 \quad \Rightarrow \quad (c_1,c_2)=(0,-1);$$

$$c_1+c_2=0,\quad c_1-c_2=-1 \quad \Rightarrow \quad (c_1,c_2)=\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right);$$

$$c_1+c_2=0,\quad c_1-c_2=0 \quad \Rightarrow \quad (c_1,c_2)=(0,0);$$

$$c_1+c_2=0,\quad c_1-c_2=1 \quad \Rightarrow \quad (c_1,c_2)=\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right);$$

$$c_1+c_2=1,\quad c_1-c_2=-1 \quad \Rightarrow \quad (c_1,c_2)=(0,1);$$

$$c_1+c_2=1,\quad c_1-c_2=0 \quad \Rightarrow \quad (c_1,c_2)=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right);$$

$$c_1+c_2=1,\quad c_1-c_2=1 \quad \Rightarrow \quad (c_1,c_2)=(1,0).$$

Ancak $c_1,c_2\in\mathbb{C}^*$ kabul edildiğinden, (c_1,c_2) ikilileri için tüm çözümlerin kümesi $\left\{\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right),\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)\right\}$ olarak ortaya çıkar.

Tersine olarak $(c_1,c_2)\in\left\{\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right),\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)\right\}$ olsun. Bu durumda (c_1,c_2) ikilileri (6.2) denkleminde yerine yazılır ve $\mathbf{A}_1,\mathbf{A}_2\in\mathbb{C}_n^A$ matrislerinin değişmeli olması göz önüne alınırsa, $\mathbf{T}=c_1\mathbf{A}_1+c_2\mathbf{A}_2$ lineer kombinasyon matrisinin tripotent olduğu kolayca görülür. ■

6.2. İki İnvolutif Matrisin Lineer Kombinasyonunun İdempotentliği

$\mathbf{A}_1,\mathbf{A}_2\in\mathbb{C}_n^A$ matrisleri değişmeli olduğunda (6.1) biçimli lineer kombinasyon matrisinin tripotentliği problemi idempotentliğe kısıtlanırsa çözüm sayısının artmayacağı açıktır. Ancak azalıp azalmayacağını incelemek ilginç olabilir. Aşağıda verilen teorem, bu durumu ve " $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2 \in \mathbb{C}_n^A$ matrisleri değişmeli olmadığında lineer kombinasyon matrisi idempotent olur mu?" sorusunu konu almaktadır.

Teorem 6.2. $c_1, c_2 \in \mathbb{C}^*$, $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2 \in \mathbb{C}_n^A$, $\mathbf{A}_1 \neq \pm\mathbf{A}_2$ ve $\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2 = \mathbf{A}_2\mathbf{A}_1$ olmak üzere $\mathbf{P} = c_1\mathbf{A}_1 + c_2\mathbf{A}_2$ olsun.

(a) $\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2 = \mathbf{A}_2\mathbf{A}_1$ ise, $\mathbf{P}$ matrisinin idempotent olması için gerekli ve yeterli koşul aşağıdaki koşullardan herhangi birinin sağlanmasıdır:

(a_1) $(c_1, c_2) = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ ve $-\mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2 = \mathbf{I} + \mathbf{A}_1\mathbf{A}_2$;

(a_2) $(c_1, c_2) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ ve $\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 = \mathbf{I} + \mathbf{A}_1\mathbf{A}_2$;

(a_3) $(c_1, c_2) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ ve $-\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 = \mathbf{I} - \mathbf{A}_1\mathbf{A}_2$;

(a_4) $(c_1, c_2) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ ve $\mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2 = \mathbf{I} - \mathbf{A}_1\mathbf{A}_2$,

(b) $\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2 \neq \mathbf{A}_2\mathbf{A}_1$ ise, $\mathbf{P}$ matrisinin idempotent olduğu hiçbir durum yoktur.

İspat. Öncelikle $\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2 = \mathbf{A}_2\mathbf{A}_1$ olsun. $\mathbf{P}$ matrisinin idempotent olması için gerekli ve yeterli koşul $c_1^2\mathbf{A}_1^2 + 2c_1c_2\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2 + c_2^2\mathbf{A}_2^2 - c_1\mathbf{A}_1 - c_2\mathbf{A}_2 = \mathbf{0}$, yani

$$\left(c_1^2 + c_2^2\right)\mathbf{I} + 2c_1c_2\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2 - c_1\mathbf{A}_1 - c_2\mathbf{A}_2 = \mathbf{0} \tag{6.3}$$

olarak elde edilir.

$\mathbf{P}$ idempotent olsun. Bu durumda $\mathbf{P}$ aynı zamanda tripotent olacağından Teorem 6.1 den (c_1, c_2) ikililerinin $\left\{\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)\right\}$ kümesinin elemanı olmak zorunda olduğu görülür. Olabilecek (c_1, c_2) ikilileri (6.3) denkleminde yerine yazılırsa $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2 \in \mathbb{C}_n^A$ matrislerinin ek olarak sağlaması gereken koşullar;

$$\left(c_1,c_2\right)=\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)\Rightarrow\left(\frac{1}{2}\right)\mathbf{I}+2\left(\frac{1}{4}\right)\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2+\frac{1}{2}\mathbf{A}_1+\frac{1}{2}\mathbf{A}_2=\mathbf{0}\Rightarrow-\mathbf{A}_1-\mathbf{A}_2=\mathbf{I}+\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2,$$

$$\left(c_1,c_2\right)=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\Rightarrow\left(\frac{1}{2}\right)\mathbf{I}+2\left(\frac{1}{4}\right)\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2-\frac{1}{2}\mathbf{A}_1-\frac{1}{2}\mathbf{A}_2=\mathbf{0}\Rightarrow\mathbf{A}_1+\mathbf{A}_2=\mathbf{I}+\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2,$$

$$\left(c_1,c_2\right)=\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\Rightarrow\left(\frac{1}{2}\right)\mathbf{I}+2\left(-\frac{1}{4}\right)\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2+\frac{1}{2}\mathbf{A}_1-\frac{1}{2}\mathbf{A}_2=\mathbf{0}\Rightarrow-\mathbf{A}_1+\mathbf{A}_2=\mathbf{I}-\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2,$$

$$\left(c_1,c_2\right)=\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)\Rightarrow\left(\frac{1}{2}\right)\mathbf{I}+2\left(-\frac{1}{4}\right)\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2-\frac{1}{2}\mathbf{A}_1+\frac{1}{2}\mathbf{A}_2=\mathbf{0}\Rightarrow\mathbf{A}_1-\mathbf{A}_2=\mathbf{I}-\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2$$

olarak elde edilir. Tersine olarak $\left(a_1\right)-\left(a_4\right)$ şıklarındaki koşullar sağlansın. Bu şıklardaki koşullar (6.3) denkleminde yerine yazılırsa (6.3) denkleminin sağlandığı, dolayısıyla $\mathbf{P}=c_1\mathbf{A}_1+c_2\mathbf{A}_2$ lineer kombinasyon matrisinin idempotent olduğu görülür. Böylece (a) şıkkının ispatı tamamlanır.

Şimdi, $\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2\neq\mathbf{A}_2\mathbf{A}_1$ olsun. $\mathbf{P}=c_1\mathbf{A}_1+c_2\mathbf{A}_2$ lineer kombinasyon matrisi aynı zamanda

$$\mathbf{P}=-\left(c_1+c_2\right)\mathbf{I}+2c_1\frac{1}{2}\left(\mathbf{A}_1+\mathbf{I}\right)+2c_2\frac{1}{2}\left(\mathbf{A}_2+\mathbf{I}\right)\tag{6.4}$$

biçiminde de yazılabilir. $\mathbf{I}$, $\frac{1}{2}\left(\mathbf{A}_1+\mathbf{I}\right)$ ve $\frac{1}{2}\left(\mathbf{A}_2+\mathbf{I}\right)$ matrisleri idempotent olduklarından, (6.4) biçimli $\mathbf{P}$ matrisi üç idempotent matrisin lineer kombinasyonu biçiminde yazılmış olur. Ayrıca, burada $\frac{1}{2}\left(\mathbf{A}_1+\mathbf{I}\right)$ ve $\frac{1}{2}\left(\mathbf{A}_2+\mathbf{I}\right)$ matrisleri kendi aralarında değişmeli olmamasına rağmen her ikisi de $\mathbf{I}$ matrisi ile değişmelidir. Dolayısıyla problem; ikisi kendi arasında değişmeli olmayan, ancak diğer matris ile her ikiside değişmeli olan, üç idempotent matrisin lineer kombinasyonunun idempotentliği problemine dönüşür. Bu problem için Baksalary ve Benítez tarafından verilen çözüm, Teorem 3.7 olarak verilmiştir. Dolayısıyla $\mathbf{P}$ matrisinin idempotent olduğu durumları karakterize etmek için Teorem 3.7 şıklarında verilen koşulları, (6.4) biçimli lineer kombinasyon matrisinin sağlayıp sağlamayacağını incelemek ispat için yeterli olacaktır. Teorem 3.7 nin şıkları incelenirse (d) ve (g) şıkları haricinde hiçbir şıkta uygun (c_1, c_2) ikilisi elde edilemeyeceği görülür. (d) şıkkından $(c_1, c_2) \in \left\{\left(-\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)\right\}$ ve $\mathbf{A}_1 = -\mathbf{I} = -\mathbf{A}_2$ veya $(c_1, c_2) \in \left\{\left(\frac{3}{4}, -\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)\right\}$ ve $\mathbf{A}_1 = \mathbf{I} = -\mathbf{A}_2$ çözümleri ve son olarak (g) şıkkından $(c_1, c_2) = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$ ve $\mathbf{A}_1 = \mathbf{I} = -\mathbf{A}_2$ çözümleri elde edilir. Ancak, bunlar $\mathbf{A}_1 \neq \pm\mathbf{A}_2$ veya $\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2 \neq \mathbf{A}_2\mathbf{A}_1$ kabulleri ile çelişir. Dolayısıyla $\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2 \neq \mathbf{A}_2\mathbf{A}_1$ olduğu durumda $\mathbf{P}$ matrisi idempotent olamaz. Böylece ispat tamamlanır. ■

6.3. İki İnvolutif Matrisin Lineer Kombinasyonunun İnvolutifliği

$\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2 \in \mathbb{C}_n^A$ matrisleri değişmeli olduğunda (6.1) biçimli lineer kombinasyon matrisinin tripotentliği probleminin idempotentliğe kısıtlanmasının (c_1, c_2) çözüm ikililerinin sayısını azaltmadığı, ancak $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2 \in \mathbb{C}_n^A$ matrisleri üzerine bazı kısıtlamalar getirdiği yukarıdaki kısımdan görülmektedir. Bu bölümün bu son kısmında da "tripotentlik problemi involutifliğe kısıtlanırsa ne olur?" sorusunun cevabı ile $\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2 \neq \mathbf{A}_2\mathbf{A}_1$ durumunda ne olacağı sorularının cevapları aşağıdaki teoremle verilmektedir.

Teorem 6.3. $c_1, c_2 \in \mathbb{C}^*$, $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2 \in \mathbb{C}_n^A$, $\mathbf{A}_1 \neq \pm\mathbf{A}_2$ ve $\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2 = \mathbf{A}_2\mathbf{A}_1$ olmak üzere $\mathbf{A} = c_1\mathbf{A}_1 + c_2\mathbf{A}_2$ olsun.

(a) $\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2 = \mathbf{A}_2\mathbf{A}_1$ ise, $\mathbf{A}$ matrisinin involutif olduğu hiçbir durum yoktur.

(b) $\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2 \neq \mathbf{A}_2\mathbf{A}_1$ ise, $\mathbf{A}$ matrisinin involutif olması için gerekli ve yeterli koşul $\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_2\mathbf{A}_1 = \dfrac{1-\left(c_1^2 + c_2^2\right)}{c_1c_2}\mathbf{I}$ olmasıdır.

İspat. Öncelikle $\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2 = \mathbf{A}_2\mathbf{A}_1$ olmak üzere, $\mathbf{A}$ involutif olsun. $\mathbf{A}$ matrisinin involutif olması için gerekli ve yeterli koşul $c_1^2\mathbf{A}_1^2 + 2c_1c_2\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2 + c_2^2\mathbf{A}_2^2 - \mathbf{I} = \mathbf{0}$, yani

$$\left(c_1^2 + c_2^2 - 1\right)\mathbf{I} + 2c_1c_2\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2 = \mathbf{0} \tag{6.5}$$

olarak elde edilir. Aynı zamanda $\mathbf{A}$ tripotent olacağı için, Teorem 6.1 göz önüne alındığında (c_1,c_2) ikililerinin $\left\{\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right),\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right),\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\right\}$ kümesinin elemanı olmak zorunda olduğu görülür. Olabilecek (c_1,c_2) ikilileri (6.5) denkleminde yerine yazılırsa, $\mathbf{A}_1,\mathbf{A}_2\in\mathbb{C}_n^A$ matrislerinin ek olarak sağlaması gereken koşullar:

$$(c_1,c_2)\in\left\{\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right),\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\right\}\Rightarrow -\frac{1}{2}\mathbf{I}+\frac{1}{2}\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2=\mathbf{0}\Rightarrow \mathbf{A}_1\mathbf{A}_2=\mathbf{I}$$

ve

$$(c_1,c_2)\in\left\{\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\right\}\Rightarrow -\frac{1}{2}\mathbf{I}-\frac{1}{2}\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2=\mathbf{0}\Rightarrow \mathbf{A}_1\mathbf{A}_2=-\mathbf{I}\,,$$

yani $\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2=\pm\mathbf{I}$ olarak elde edilir. Bu eşitlikler, her iki taraftan $\mathbf{A}_2$ ile çarpılırsa $\mathbf{A}_1=\pm\mathbf{A}_2$ bulunur. Bu ise varsayım ile çelişir. Böylece (a) şıkkının ispatı tamamlanır.

Şimdi, $\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2\neq\mathbf{A}_2\mathbf{A}_1$ olsun. $\mathbf{A}$ lineer kombinasyon matrisi aynı zamanda

$$\frac{1}{2}(\mathbf{A}+\mathbf{I})=\frac{1-(c_1+c_2)}{2}\mathbf{I}+c_1\frac{1}{2}(\mathbf{A}_1+\mathbf{I})+c_2\frac{1}{2}(\mathbf{A}_2+\mathbf{I}) \tag{6.6}$$

biçiminde de yazılabilir. $\mathbf{I}$, $\frac{1}{2}(\mathbf{A}_1+\mathbf{I})$ ve $\frac{1}{2}(\mathbf{A}_2+\mathbf{I})$ matrisleri idempotent olduklarından, (6.6) biçimli $\frac{1}{2}(\mathbf{A}+\mathbf{I})$ matrisi üç idempotent matrisin lineer kombinasyonu biçiminde yazılmış olur. Ayrıca, burada $\frac{1}{2}(\mathbf{A}_1+\mathbf{I})$ ve $\frac{1}{2}(\mathbf{A}_2+\mathbf{I})$ matrisleri kendi aralarında değişmeli olmamasına rağmen her ikisi de $\mathbf{I}$ matrisi ile değişmelidir. Dolayısıyla Lemma 3.9 göz önüne alındığında, problem; ikisi kendi arasında değişmeli olmayan, ancak diğer matris ile her ikiside değişmeli olan, üç idempotent matrisin (6.6) biçimli $\frac{1}{2}(\mathbf{A}+\mathbf{I})$ lineer kombinasyon matrisinin idempotentliğini karakterize etme problemine dönüşür. Bu durumda, Teorem 3.7 tekrar kullanılabilir. Teorem 3.7 (a), (c), (d), (g), (i) ve (k) şıklarından (c_1, c_2) ikilisi için herhangi bir çözüm elde edilemez.

Teorem 3.7 (b) şıkkından $\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_2\mathbf{A}_1 = \mathbf{I}$ ve $(c_1, c_2) = (-1, 1)$ veya $(c_1, c_2) = (1, -1)$; Teorem 3.7 (e) şıkkından $\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_2\mathbf{A}_1 = \frac{1-(c_1^2+c_2^2)}{c_1c_2}\mathbf{I}$ ve $c_1 \in \mathbb{C}$, $c_2 = 1$ veya $c_1 = 1$, $c_2 \in \mathbb{C}$; Teorem 3.7 (f) şıkkından $\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_2\mathbf{A}_1 = \frac{1-(c_1^2+c_2^2)}{c_1c_2}\mathbf{I}$ ve $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$; Teorem 3.7 (h) şıkkından $\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_2\mathbf{A}_1 = -\mathbf{I}$ ve $(c_1, c_2) = (1, 1)$ ve son olarak Teorem 3.7 (j) şıkkından $\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_2\mathbf{A}_1 = \frac{2c_1^2-1}{c_1^2}\mathbf{I}$ ve $c_1 = -c_2$ olduğu görülür. Dikkat edilirse (b), (e), (h) ve (j) şıklarından elde edilen çözümler (f) şıkkından elde edilen çözümlerin özel halleridir. Böylece ispat tamamlanır. ■

Görüldüğü üzere $\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2 = \mathbf{A}_2\mathbf{A}_1$ olması durumunda (6.1) biçimli lineer kombinasyon matrisinin involutif olduğu hiçbir durum yoktur.

BÖLÜM 7. TARTIŞMA VE ÖNERİLER

Bölüm 1 de $c_1, c_2 \in \mathbb{C}^*$ ve $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2 \in \mathbb{C}_n$ olmak üzere (1.1) ifadesi ile oluşturulan $\mathbf{M} = c_1\mathbf{M}_1 + c_2\mathbf{M}_2$ lineer kombinasyonu tekrar göz önüne alınsın. Bu çalışmada ortaya koyulan problemler ve çözümleri şöyle sıralanabilir:

$\mathbf{M}_1$ ve $\mathbf{M}_2$ sıfırdan farklı herhangi idempotent matrisler olduklarında $\mathbf{M}$ matrisinin involutif matris olduğu durumlar Bölüm 3 te karakterize edilmiştir.

$\mathbf{M}_1$ ve $\mathbf{M}_2$ herhangi değişmeli tripotent matrisler olduğunda, $\mathbf{M}$ matrisinin tripotent olduğu durumlar [3, Theorem] de karakterize edilmiş olup bu sonucun yeni bir ispatı Bölüm 4 te yer almaktadır. Ayrıca, $\mathbf{M}_1$ ve $\mathbf{M}_2$ herhangi değişmeli tripotent matrisler olduğunda, $\mathbf{M}$ matrisinin idempotent ve involutif matris olduğu durumlarda, yine Bölüm 4 te karakterize edilmektedir.

$\mathbf{M}_1$ ve $\mathbf{M}_2$ matrisleri (5.6) veya (5.9) koşullarını sağlayan herhangi kuadripotent matrisler olduğunda, $\mathbf{M}$ matrisinin kuadripotent, tripotent ve idempotent olduğu durumlar Bölüm 5 te verilmektedir.

$\mathbf{M}_1$ ve $\mathbf{M}_2$ matrisleri herhangi değişmeli involutif matrisler olduğunda, $\mathbf{M}$ matrisinin tripotent olduğu ve $\mathbf{M}_1$ ve $\mathbf{M}_2$ herhangi involutif matrisler olduğunda, $\mathbf{M}$ matrisinin idempotent ve involutif olduğu durumlar Bölüm 6 da karakterize edilmektedir.

Sonuç olarak çalışma boyunca biri daha önce verilen bir teoremin alternatif ispatı olmak üzere on üç teorem, iki sonuç ve iki uyarı ortaya konulup ispatlanmıştır. Bunlardan bazıları çeşitli sempozyumlarda sunulmuş ve SCI Expanded kapsamındaki bazı uluslararası dergilerde yayınlanmıştır [25, 26, 29].

Çalışma boyunca, $\mathbf{M}_1$ ve $\mathbf{M}_2$ matrislerinin aynı karakterli (iki idempotent, iki tripotent, vs.) olduğu durumlarda $\mathbf{M} = c_1\mathbf{M}_1 + c_2\mathbf{M}_2$ matrisi ile ilgili karakterizasyonlar ele alınmıştır. Bunlardan başka $\mathbf{M}_1$ ve $\mathbf{M}_2$ matrislerinin aynı karakterli olmadığı durumlarda da $\mathbf{M}$ matrisinin karekterizasyonları ile ilgili problemler ve çözümleri literatürde mevcuttur. Örneğin, $\mathbf{M}_1$ idempotent ve $\mathbf{M}_2$ tripotent matris olduğu durumda $\mathbf{M}$ matrisinin ne zaman idempotent olacağı problemi Baksalary, Baksalary ve Styan tarafından ele alınmıştır [3]. Ayrıca $\mathbf{M}_1$ idempotent ve $\mathbf{M}_2$ t–potent matrisleri ile oluşturulan (1.1) biçimli $\mathbf{M}$ lineer kombinasyon matrisinin ne zaman idempotent olacağı problemi Benítez ve Thome tarafından $\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2 = \mathbf{M}_2\mathbf{M}_1$ olduğunda [12] ve $\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2 \neq \mathbf{M}_2\mathbf{M}_1$ olduğunda [13] çalışmalarında ele alınmıştır.

Bu çalışmada ele alınan problemler yalnızca cebirsel açıdan değil aynı zamanda böyle özel tipli matrislerin uygulamalı bilimlerde, özellikle istatistik teorisinde, oynadığı rol açısından da ilgi çekicidir. İdempotent, tripotent ve involutif matrisli kuadratik formlar istatistik teorisinde yaygın olarak kullanılır. Örneğin, $\mathbf{K}$ $n \times n$ boyutlu bir reel simetrik matris ve $\mathbf{x}$ $n \times 1$ boyutlu $\mathrm{N}_n(\mathbf{0}, \mathbf{I})$ çok değişkenli normal dağılımına sahip bir reel rasgele değişkenler vektörü olduğu durumda $\mathbf{x}'\mathbf{K}\mathbf{x}$ kuadratik formunun bir ki–kare değişkeni olarak dağılmasının gerekli ve yeterli koşulu $\mathbf{K}$ matrisinin idempotent olmasıdır (bkz., örneğin, [28, Theorem 2.8]). $\mathbf{K}$ ve $\mathbf{x}$ yukarıdaki gibi tanımlı olmak üzere Baldessari, $\mathbf{x}'\mathbf{K}\mathbf{x}$ kuadratik formunun iki bağımsız ki–kare değişkeninin bir farkı olarak dağılmasının gerekli ve yeterli koşulunun $\mathbf{K}$ matrisinin tripotentliği olduğunu ortaya koymuştur [10]. Bir involutif matris köşegenleştirilebilirdir. Dolayısıyla köşegenleştirilebilir matrisler için spektral ayrışım teoremi [13, sf. 517] dikkate alındığında, eğer $\mathbf{A}$ involutif matris ise $\mathbf{A} = \mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_2$, $\mathbf{I} = \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2$ ve $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 = \mathbf{0}$ olacak şekilde $\mathbf{P}_1$ ve $\mathbf{P}_2$ idempotent matrislerinin varlığından söz edilebilir. Böylece tripotentlikten sonra $\mathbf{x}'\mathbf{K}\mathbf{x}$ kuadratik formunun involutifliği, "iki bağımsız kuadratik formun farkının serbestlik derecelerinin toplamı istatistiksel teori çerçevesinde ana kuadratik form matrisinin boyutuna eşit olmak zorundadır" kısıtlamasına da götürür.

Burada verilen istatistiksel yorumlar ele alınan matrislerin reel ve simetrik olması durumunda verilmiştir. Ancak bu kısıtlama olmaksızın da bu tip matrisler uygulamalı bilimlerin birçok alanında kullanılmaktadır. Örneğin, $\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ matrisi, Pauli spin matrisi olarak bilinen matrisler sınıfının bir üyesidir. Bu matris ve bu matrisi kapsayan Dirac spin matrisleri ne reeldir ne simetrik, ancak bu matrisler involutiftir. Bu matrisler kuantum teorisinde geniş bir şekilde kullanılır (örneğin [14, sf. 47–51] ve [19, sf. 495]). Bunlardan başka da, istatistiksel teorinin yanında uygulamalı bilimlerde involutif matrislerin önemli uygulamaları vardır (örneğin, bkz. [17, 20, 23]).

Konu ile ilgili açık problemler halen mevcuttur. Örneğin, $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2 \in \mathbb{C}_n^P$, $\mathbb{C}_n^T$ ve $\mathbb{C}_n^A$ olduklarında $\mathbf{M}$ lineer kombinasyon matrisinin ne zaman $\mathbb{C}_n^Q$ kümesinin elemanı olacağı soruları halen açık problemlerdir. Ayrıca, $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2 \in \mathbb{C}_n^Q$ olduklarında ne zaman $\mathbf{M} \in \mathbb{C}_n^A$ sorusu ve $\mathbf{M}_1$ ve $\mathbf{M}_2$ matrislerinin aynı karakterli olmadığı durumlarla ilgili birçok problem ele alınabilir.

KAYNAKLAR

[1] ADLER, S.L., Quaternionic Quantum Mechanics and Quantum Fields, Oxford University Press Inc., New York, 1995.

[2] BAKSALARY, J.K., BAKSALARY, O.M., Idempotency of linear combinations of two idempotent matrices, Linear Algebra Appl., 321, 3–7, 2000.

[3] BAKSALARY, J.K., BAKSALARY, O.M., and STYAN, G.P.H., Idempotency of linear combinations of an idempotent matrix and a tripotent matrix, Linear Algebra Appl., 354, 21–34, 2002.

[4] BAKSALARY, J.K., BAKSALARY, O.M., and ÖZDEMİR, H., A note on linear combinations of commuting tripotent matrices, Linear Algebra Appl., 388, 45–51, 2004.

[5] BAKSALARY, J.K., BAKSALARY, O.M., When is a linear combination of two idempotent matrices is the group involutory matrix?, Linear Multilinear Algebra, 54(6), 429–435, 2006.

[6] BAKSALARY, J.K., BAKSALARY, O.M., and GROß, J., On some linear combinations of hypergeneralized projectors, Linear Algebra Appl., 413, 264–273, 2006.

[7] BAKSALARY, O.M., Idempotency of linear combinations of three idempotent matrices, two of which are disjoint, Linear Algebra Appl., 388, 67–78, 2004.

[8] BAKSALARY, O.M., BENÍTEZ, J., Idempotency of linear combinations of three idempotent matrices, two of which are commuting, Linear Algebra Appl., 424, 320–337, 2007.

[9] BAKSALARY, O.M., BENÍTEZ, J., On linear combinations of two commuting hypergeneralized projectors, Comput. Math. Appl., 56(10), 2481–2489, 2008.

[10] BALDESSARI, B., The distribution of a quadratic form of normal random variables, Ann. Math. Statist., 38, 1700–1704, 1967.

[11] BEN–ISRAEL, A., GREVILLE, T.N.E., Generalized Inverses: Theory and Applications, Wiley, New York, 1974.

[12] BENÍTEZ, J., THOME, N., Idempotency of linear combinations of an idempotent matrix and a $t-$potent matrix that commute, Linear Algebra Appl., 403, 414–418, 2005.

[13] BENÍTEZ, J., THOME, N., Idempotency of linear combinations of an idempotent matrix and a $t-$potent matrix that do not commute, Linear Multilinear Algebra, 56(6), 679–687, 2008.

[14] BETHE, H.A., SALPETER, E.E., Quantum Mechanics of One- and Two-electron Atoms, Plenum Pub. Co., New York, 1977.

[15] BRU, R., THOME, N., Group inverse and group involutory matrices, Linear Multilinear Algebra, 45, 207–218, 1998.

[16] GRAYBILL, F. A., Introduction to Matrices with Aplications in Statistics, Wadsworth Publishing Company inc., California, 1969.

[17] GROMOV, N.A., The matrix quantum unitary Cayley–Klein groups, J. Phys., A 26, L5–L8, 1993.

[18] GROß, J., TRENKLER, G., Generalized and hypergeneralized projectors, Linear Algebra Appl., 264, 463–474, 1997.

[19] HORN, R.A., JOHNSON, C.R., Matrix Analysis, Cambridge University Press, Cambridge, 1985.

[20] MESTECHKIN, M.M., Restricted Hartree–Fock method instability, Int. J. Quant. Chem., 13, 469–481, 1978.

[21] MEYER, C.D., Matrix Analysis and Applied Linear Algebra, SIAM, Philadelphia, 2000.

[22] MIRSKY, L., An Introduction to Linear Algebra, Clarendon Press, Oxford, 1955 (Reprint: Dover, New York, 1990).

[23] OVCHINNIKOV, M.A., Properties of Viro–Turaev representations of the mapping class group of a Torus, J. Math. Sci. (NY), 113, 856–867, 2003.

[24] ÖZDEMİR, H., ÖZBAN, A.Y., On idempotency of linear combinations of idempotent matrices, Appl. Math. Comput., 159, 439–448, 2004.

[25] ÖZDEMİR, H., SARDUVAN, M., Notes on linear combinations of two tripotent, idempotent, and involutive matrices, An. Şt. Univ. Ovidius Constanța, 16(2), 83–90, 2008.

[26] ÖZDEMİR, H., SARDUVAN, M., ÖZBAN, A.Y., and GÜLER, N., On idempotency and tripotency of linear combinations of two commuting tripotent matrices, Appl. Math. Comput., 207, 197–201, 2009.

[27] RAO, C.R., MITRA, S.K., Generalized Inverse of Matrices and Its Applications, Wiley, New York, 1971.

[28] SEBER, G.A.F., Linear Regression Analysis, John Wiley, New York, 1977.

[29] SARDUVAN, M., ÖZDEMİR, H., On linear combinations of two tripotent, idempotent, and involutive matrices, Appl. Math. Comput., 159, 401–406, 2008.

[30] STEWART, G.W., A note on generalized and hypergeneralized projectors, Linear Algebra Appl., 412, 408–411, 2006.

[31] VENIT, S., BISHOP, W., Elementary Linear Algebra, PWS Publishers, Massachusetts, 1985.

ÖZGEÇMİŞ

Murat SARDUVAN, 05.06.1980 tarihinde Sakarya'nın Kaynarca ilçesinde doğdu. İlk, orta ve lise eğitimini 1997 yılında Kaynarca'da tamamladı. Aynı yıl Dumlupınar Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde lisans eğitimine başladı ve buradan 2001 yılında mezun oldu. Yine aynı yıl Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik EABD'da yüksek lisans programına kaydoldu ve 2004 yılında buradan mezun oldu. 2004 yılında Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik EABD'da doktora programına kaydoldu. Eylül 2001 Aralık 2002 tarihleri arasında Kaynarca Çok Programlı Lisesi'nde Matematik Öğretmeni olarak çalıştı. Aralık 2002 de Sakarya Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde Araştırma Görevlisi olarak göreve başladı ve halen bu görevini sürdürmektedir. Evli ve bir çocuk babası olan Murat SARDUVAN ingilizce bilmektedir.