T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ÇOK DEĞİŞKENLİ KATLI PARÇALANMIŞ LİNEER MODEL ALTINDA TAHMİN

DOKTORA TEZİ

Nesrin GÜLER

Enstitü Anabilim Dalı	**:**	**MATEMATİK**
Tez Danışmanı	**:**	**Doç. Dr. Halim ÖZDEMİR**

Mayıs 2009

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ÇOK DEĞİŞKENLİ KATLI PARÇALANMIŞ LİNEER MODEL ALTINDA TAHMİN

DOKTORA TEZİ

Nesrin GÜLER

Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK

Bu tez 10 / 04 / 2009 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından ~~Oyçokluğu~~ / Oybirliği ile kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Halis Aygün
Jüri Başkanı

Doç. Dr. Halim Özdemir
Üye

Doç. Dr. Ahmet Küçük
Üye

Yrd. Doç. Dr. Ömer F. Gözükızıl
Üye

Prof. Dr. İbrahim Okur
Üye

ÖNSÖZ

Çalışmada, çok değişkenli katlı lineer modeller ve ilişkili bazı indirgenmiş lineer modeller altında, bazı tahminler ve hipotez testleri konu edilmektedir.

Konunun seçiminde ve çalışmamın her safhasında büyük bir özveri ile bana yardımcı olan danışman hocam Sayın Doç. Dr. Halim Özdemir'e teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca çalışmalarım sırasında yakın desteğini gördüğüm diğer danışman hocam Sayın Prof. Dr. Müjgan Tez'e ve benden yardım ve desteklerini esirgemeyen sevgili aileme teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}^{n,1}$	: n boyutlu reel vektörler kümesi
$\mathbb{R}^{m,n}$	: $m \times n$ boyutlu reel matrisler kümesi
$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \ldots$	: Matrisler
$(\mathbf{A} : \mathbf{B})$	: Parçalanmış matris
(a_{ij})	: Elemanları a_{ij} olan matris
$\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \ldots$	: Vektörler; $\mathbf{x} = (x_i) \in \mathbb{R}^{n,1}$
$a, b, c \ldots$	: Skalerler
$\mathbf{A}'$	: $\mathbf{A}$ matrisinin devriği
$\mathbf{A}^{-1}$	: $\mathbf{A}$ matrisinin tersi
$\mathbf{A}^{-}$	: $\mathbf{A}$ matrisinin genelleştirilmiş tersi
$\mathbf{A}^{+}$	: $\mathbf{A}$ matrisinin Moore-Penrose tersi
$iz(\mathbf{A})$	: $\mathbf{A}$ matrisinin izi
$\lvert\mathbf{A}\rvert$	: $\mathbf{A}$ matrisinin determinantı
$vec(\mathbf{A})$	: $\mathbf{A}$ matrisinin sütunlarının alt alta yazılması ile elde edilen sütun vektörü
$r(\mathbf{A})$	: $\mathbf{A}$ matrisinin rankı
$\Re(\mathbf{A})$	: $\mathbf{A}$ matrisinin sütun uzayı
$\Re^{\perp}(\mathbf{A})$	: $\Re(\mathbf{A})$ sütun uzayının dik tümleyeni
$\mathcal{N}(\mathbf{A})$	: $\mathbf{A}$ matrisinin sıfır uzayı
$\mathbf{P}_{\mathbf{A}}$	: $\Re(\mathbf{A})$ sütun uzayının dik izdüşüm matrisi
$\mathbf{M}_{\mathbf{A}}$	: $\Re(\mathbf{A}^{\perp})$ sütun uzayının dik izdüşüm matrisi
$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$	: $\mathbf{A}$ ve $\mathbf{B}$ matrislerinin Kronecker çarpımı

$\mathbf{A} \oplus \mathbf{B}$	: $\mathbf{A}$ ve $\mathbf{B}$ matrislerinin Kronecker toplamı
$\mathcal{U} \dotplus \mathcal{V}$	: $\mathcal{U}$ ve $\mathcal{V}$ vektör uzaylarının dik toplamı
$\mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$	: $\mathcal{U}$ ve $\mathcal{V}$ vektör uzaylarının direkt toplamı
$\mathcal{U}^{\perp}$	: $\mathcal{U}$ vektör uzayının dik tümleyeni
$boy(\mathcal{U})$	: $\mathcal{U}$ vektör uzayının boyutu
$\mathbf{0}$	: Sıfır matris veya sıfır vektör
$\mathbf{I}$	: Birim matris
$\in$	: Elemanıdır
$\notin$	: Elemanı değildir
$\cap$	: Kesişim
$\cup$	: Birleşim
$\subseteq$	: Alt küme/kapsama
$\not\subset$	: Alt küme değildir
$=$	: Eşittir
$\neq$	: Eşit değildir
$\Leftrightarrow$	: Ancak ve ancak
$\Vert \cdot \Vert$	: Norm
$\sum$	: Toplam sembolü
min	: Minimum
$E(.)$	: Beklenen değer operatörü
$D(.)$	: Varyans-kovaryans (dağılım) matrisi operatörü

TABLOLAR LİSTESİ

ÖZET

Anahtar kelimeler: Parçalanmış lineer model, çok değişkenli katlı lineer model, en iyi lineer yansız tahmin (BLUE), kabul edilebilir tahmin, dik izdüşümler, hipotez testleri, olabilirlik oran testleri.

Lineer modeller teorisi çok değişkenli istatistiksel analizde geniş kullanım alanına sahiptir. En önemli kullanım alanlarından biri bağımlı (açıklanan) değişken ile bağımsız (açıklayıcı) değişkenler arasındaki ilişkiyi tahmin etme ile ilgilidir. Bu çalışmada çok değişkenli katlı lineer modeller ele alınarak, bazı tahmin ve hipotez testleri üzerinde durulmaktadır.

Çalışmanın ilk üç bölümünde, sonraki bölümlerde kullanılacak olan bazı temel kavram ve teoremler verilmektedir.

Dördüncü bölümde, öncelikle çok değişkenli lineer modellerden elde edilen çok değişkenli katlı lineer model tanıtılmaktadır. Daha sonra çok değişkenli katlı lineer model ve ilişkili indirgenmiş lineer modeller ele alınmaktadır. Katlı indirgenmiş lineer modeller altında, gözlenebilir rasgele değişkenler matrisinin BLUE değerinin katlı parçalanmış lineer model altında BLUE kalması ile ilgili bazı sonuçlar verilmektedir. Ayrıca daha zayıf bir koşul ele alınarak, indirgenmiş model altında BLUE olan bir tahmin edicinin, parçalanmış model altında kabul edilebilir bir tahmin edici olacağı ile ilgili bir sonuç elde edilmektedir. Daha sonra alternatif bir tahmin edici ve bu tahmin edicinin katlı parçalanmış model altında BLUE ile çakışması durumu ele alınmaktadır. Son olarak ele alınan konu ile ilgili bir sayısal örnek verilmektedir.

Beşinci bölümde, normal dağılımlı olma varsayımı altında çok değişkenli katlı lineer modeller ile ilgili bazı hipotez testleri ele alınmaktadır. Önce $F-$testi ile ilgili bazı sonuçlar verilmektedir. Sonra maksimum olabilirlik fonksiyonu ele alınarak, olabilirlik oran testi ile ilgili bazı sonuçlar elde edilmektedir.

ESTIMATION UNDER MULTIVARIATE MULTIPLE PARTITIONED LINEAR MODEL

SUMMARY

Keywords: Partitioned linear model, multivariate multiple linear model, best linear unbiased estimation (BLUE), admissible estimation, orthogonal projector, hypothesis tests, likelihood ratio test.

The theory of linear models has wide application areas in multivariate statistical analysis. An important application of the linear model is concerned with predicting relationship between dependent (response) variable and independent (predictor) variables. In this study, considering multivariate multiple linear models, we emphasize some estimations and hypothesis tests.

In the first three chapters, some concepts and theorems that will be the fundamental tools for latter chapters are given.

In Chapter 4, firstly a multivariate multiple linear model which is obtained from multivariate linear models is explained. Secondly, multivariate multiple linear model and associated reduced models are considered. Some results for the case where the BLUE for the expectation of the observable random matrix under the multivariate multiple reduced linear models remains BLUE in the multiple partitioned model are given. Also considering a mild condition, the result related to the case where the estimator which is BLUE under the reduced model is always an admissible estimator under partitioned model is obtained. Moreover, we consider an alternative linear estimator and the case where this estimator is in coincidence with the BLUE under the partitioned model. Finally, a numerical example related to subject of this chapter is given.

In Chapter 5, some hypothesis tests related to multivariate multiple linear models under the assumption of normal distributions are considered. Firstly, some results related to the $F-$test are given. Finally, some results regarding to likelihood ratio test considering maximum likelihood function are obtained.

BÖLÜM 1. GİRİŞ

1.1. Bazı Gösterimler

m ve n pozitif tam sayılar olmak üzere $\mathbb{R}^{n,1}$, $\mathbb{R}^{m,n}$ ve $\mathbb{R}^{n,n}_{\geq}$ sembolleri sırasıyla, $n\times 1$ boyutlu reel sütun vektörlerin, $m\times n$ boyutlu reel matrislerin ve $n\times n$ boyutlu pozitif kararsız simetrik matrislerin kümelerini göstersin. Çalışma boyunca, skalerler k gibi küçük ve italik harflerle, vektörler $\mathbf{k}$ gibi koyu ve küçük harflerle, matrisler ise $\mathbf{K}$ gibi koyu ve büyük harflerle gösterilecektir. Ayrıca alışılageldiği gibi birim matris ve sıfır matris sırasıyla $\mathbf{I}$ ve $\mathbf{0}$ ile gösterilecektir.

1.2. Bazı Hatırlatmalar ve Çalışmanın İçeriği

$\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_p$ sabitler ve ε_i hata terimleri olmak üzere, y_i bağımlı (açıklanan) değişkenleri

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \ldots + \beta_p x_{ip} + \varepsilon_i,\ i = 1, 2, \ldots, n, \tag{1.1}$$

biçiminde $x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{ip}$ bağımsız (açıklayıcı) değişkenlerinin lineer kombinasyonları olarak yazılabilir. Bu şekildeki n tane denklem

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon} \tag{1.2}$$

biçiminde bir lineer model olarak ifade edilebilir. (1.2) biçimindeki bir lineer model için $\boldsymbol{\varepsilon}$ hata vektörü üzerinde bazı varsayımlar kabul edilir. Bu çalışmada ele alınan çok değişkenli lineer modeller için $\boldsymbol{\varepsilon}$ hata vektörünün beklenen değerinin $\mathbf{0}$ ve varyans-kovaryans matrisinin $\sigma^2\mathbf{V}$ şeklinde olduğu kabul edilmektedir. Burada σ^2

bilinmeyen bir parametre ve $\mathbf{V}$ bilinen bir matristir. (1.2) modeli parçalanmış lineer model olarak

$$\{\mathbf{y}, \mathbf{X}_1\boldsymbol{\beta}_1 + \mathbf{X}_2\boldsymbol{\beta}_2, \sigma^2\mathbf{V}\} \tag{1.3}$$

biçiminde de ifade edilebilir. (1.2) veya denk olarak (1.3) modelinde $\boldsymbol{\varepsilon}$ hata vektörü üzerindeki farklı varsayımlar göz önünde bulundurularak ve $\boldsymbol{\beta}$ vektörü üzerinde bazı kısıtlamalar ele alınarak, $\boldsymbol{\beta}$ vektörünün lineer fonksiyonlarının tahmini ile ilgili bazı çalışmalar yapılmıştır [1, 4, 5, 12, 22-25, 35-37, 39]. Konu ile ilgili yapılan çalışmaların bazılarında ise, (1.3) modeli ve bu modelden elde edilen bazı indirgenmiş lineer modeller altında, $\boldsymbol{\beta}$ vektörünün lineer fonksiyonlarının tahmini ile ilgili bazı özellikler ve karşılaştırmalar ele alınmıştır [1, 4, 5, 12, 22, 24, 25, 35, 39]. (1.3) modelinden, uygun izdüşüm matrisleri kullanılarak,

$$\{\mathbf{M}_1\mathbf{y}, \mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\boldsymbol{\beta}_2, \sigma^2\mathbf{M}_1\mathbf{V}\mathbf{M}_1\} \tag{1.4}$$

düzgün indirgenmiş lineer modeli ve

$$\{\mathbf{y}, \mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\boldsymbol{\beta}_2, \sigma^2\mathbf{V}\} \tag{1.5}$$

indirgenmiş lineer modeli elde edilir. $\sigma^2 = 1$ olmak üzere $\mathbf{X}$ matrisinin tam ranklı ve $\mathbf{V}$ matrisinin pozitif kararlı olduğu durumda, (1.3) ve (1.4) modelleri altında $\boldsymbol{\beta}$ vektörünün lineer fonksiyonlarının tahmini ile ilgili bazı sonuçlar, [1] ve [22] çalışmalarında verilmiştir. $\mathbf{X}$ matrisinin tam ranklı olmadığı durumda ise, benzer sonuçlar Bhimasankaram ve Ray tarafından verilmiştir [4]. $\mathbf{X}$ matrisinin tam ranklı olmadığı ve $\mathbf{V}$ matrisinin pozitif kararsız olduğu durumlarda ise, (1.4) ve (1.5) indirgenmiş modelleri ele alınarak, bu modeller ve (1.3) modeli altında $\boldsymbol{\beta}$ vektörünün lineer fonksiyonlarının tahmini ve bu tahminlerin karşılaştırılmaları ile ilgili bazı çalışmalar yapılmıştır [12, 24, 25, 35, 39]. Üçüncü bölümde özellikle [12] ve [25] çalışmalarındaki sonuçlarla ilgili bazı hatırlatmalar yapılmaktadır.

Son zamanlarda, çok değişkenli lineer modeller için elde edilen sonuçların bazıları,

$$\mathbf{Y} = \mathbf{XB} + \mathbf{E} \tag{1.6}$$

biçimindeki çok değişkenli katlı lineer model dikkate alınarak daha genel durumlar için ortaya konulmaktadır [9, 18, 19, 33, 38]. Dördüncü bölümde $\mathbf{V} = \mathbf{I}$ alınarak, öncelikle (1.2) biçimindeki çok değişkenli lineer modellerden elde edilen (1.6) biçimindeki çok değişkenli katlı lineer model tanıtılmaktadır. Daha sonra (1.6) biçimindeki çok değişkenli katlı lineer model ve bu modelden elde edilen çok değişkenli katlı indirgenmiş lineer modeller ele alınarak, bu modeller altında üçüncü bölümde verilen sonuçların katlı duruma genişletilmeleri durumu incelenmektedir.

(1.2) modelinde $\boldsymbol{\varepsilon}$ hata vektörünün normal dağılıma sahip olduğu durumda, $\boldsymbol{\beta}$ vektörü için $\mathbf{A}\boldsymbol{\beta} = \mathbf{c}$ kısıtlaması altında hipotez testleri ve olabilirlik oran testleri ile ilgili bazı çalışmalar bulunmaktadır [19, 32]. Beşinci bölümde benzer konu, (1.6) biçimindeki çok değişkenli katlı lineer model ele alınarak, genel duruma genişletilmektedir.

1.3. Çalışmanın Düzeni

Çalışmanın daha sonraki bölümlerine temel teşkil edecek olan bazı tanım ve teoremler ikinci bölümde verilmektedir. Üçüncü bölümde, çok değişkenli lineer model ve bu modelden elde edilen çok değişkenli indirgenmiş lineer modeller altında $\boldsymbol{\beta}$ vektörünün tahmin edilebilir lineer fonksiyonlarının BLUE değerleri ile ilgili bazı sonuçlar hatırlatılmaktadır. Dördüncü bölümde ise, üçüncü bölümde ele alınan sonuçlar çok değişkenli katlı lineer modele uyarlanarak daha genel durumlar için detaylı olarak incelenmektedir. Beşinci bölümde çok değişkenli katlı lineer model için hata matrisinin normal dağılıma sahip olduğu kabul edilerek, $\mathbf{B}$ matrisi ile ilgili bir kısıtlama altında hipotez testleri ve olabilirlik oran testi ile ilgili bazı sonuçlar verilmektedir.

BÖLÜM 2. ÖN BİLGİLER

İstatistiğin teorik ve uygulama alanlarında matrisler geniş bir kullanıma sahiptir. Özellikle bu çalışmada ele alınan problem, lineer modeller kapsamında olduğundan, elde edilecek olan istatistiksel sonuçlar için matrislerle ilgili bazı tanım ve özelliklere ihtiyaç duyulmaktadır. Bu nedenle, aşağıda öncelikle matris cebiri ile ilgili bazı tanım, teorem ve özellikler, daha sonra bazı istatistiksel kavramlar başlıklar altında verilecektir. Verilen özelliklerden bazıları çalışmada doğrudan olmasa da, dolaylı olarak kullanılmaktadır. Bu nedenle, konunun bütünlüğü açısından bazı özellikler detaylandırılacaktır.

2.1. Bir Matrisin Rankı

Tanım 2.1.1. $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n \in \mathbb{R}^{n,1}$ vektörleri için $\sum a_i \mathbf{x}_i = \mathbf{0}$ olacak şekilde, hepsi birden sıfır olmayan $a_1, a_2, \ldots, a_n$ skalerleri bulunamıyorsa, $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ vektörlerine lineer bağımsızdır; aksi takdirde lineer bağımlıdır denir [20].

Tanım 2.1.2. $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m,n}$ olsun. $\mathbf{A}$ matrisinin sütun rankı, bu matrisin içerdiği lineer bağımsız sütunların sayısıdır, satır rankı ise içerdiği lineer bağımsız satırların sayısıdır [20].

Teorem 2.1.1. $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m,n}$ olsun. $\mathbf{A}$ matrisinin satır rankı, sütun rankına eşittir. Bu değere $\mathbf{A}$ matrisinin rankı denir ve $r(\mathbf{A})$ ile gösterilir [20].

Tanım 2.1.3. $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$ olsun. Eğer $r(\mathbf{A}) = n$ ise, $\mathbf{A}$ matrisine tersinir (nonsingüler), eğer $r(\mathbf{A}) < n$ ise, $\mathbf{A}$ matrisine tersinir olmayan (singüler) matris denir [20].

Özellik 2.1.1. Ranklarla ilgili iyi bilinen bazı özellikler aşağıda verilmiştir:

(a) $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m,n}$ için $r(\mathbf{A}) \leq \min\{m,n\}$,

(b) Bir matrisin bazı satır ya da sütunlarının silinmesiyle elde edilen alt matrisinin rankı, orijinal matrisin rankını geçemez,

(c) $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m,k}$ ve $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{k,n}$ ise, $r(\mathbf{A}) + r(\mathbf{B}) - k \leq r(\mathbf{AB}) \leq \min\{r(\mathbf{A}), r(\mathbf{B})\}$,

(d) $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m,n}$ ise, $r(\mathbf{A}+\mathbf{B}) \leq r(\mathbf{A}) + r(\mathbf{B})$,

(e) $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m,k}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{k,p}$ ve $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{p,n}$ ise, $r(\mathbf{AB}) + r(\mathbf{BC}) \leq r(\mathbf{B}) + r(\mathbf{ABC})$,

(f) $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m,n}$ ise, $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A}') = r(\mathbf{A}'\mathbf{A}) = r(\mathbf{AA}')$,

(g) $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m,m}$ ve $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{n,n}$ matrisleri tersinir matrisler ve $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m,n}$ ise, $r(\mathbf{AB}) = r(\mathbf{B}) = r(\mathbf{BC}) = r(\mathbf{ABC})$,

(h) $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m,n}$ ve $r(\mathbf{A}) = k$ ise bu durumda, $\mathbf{A} = \mathbf{XBY}$ olacak şekilde $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{m,k}$ ve $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{k,n}$ matrisleri ile $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{k,k}$ tersinir matrisi vardır. Özel olarak $r(\mathbf{A}) = 1$ ise, $\mathbf{A} = \mathbf{xy}'$ olacak şekilde $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{m,1}$ ve $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{n,1}$ vektörleri vardır [11, 20].

2.2. Genelleştirilmiş Ters ve Moore-Penrose Ters

Tanım 2.2.1. $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m,n}$ olsun. $\mathbf{AA}^{-}\mathbf{A} = \mathbf{A}$ koşulunu sağlayan $\mathbf{A}^{-} \in \mathbb{R}^{n,m}$ matrisine, $\mathbf{A}$ matrisinin bir genelleştirilmiş tersi denir.

Teorem 2.2.1. Her matris için bir genelleştirilmiş ters vardır, fakat tek değildir.

Teorem 2.2.2. Bir $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m,n}$ matrisinin herhangi bir $\mathbf{A}^{-}$ genelleştirilmiş tersi için aşağıdakiler doğrudur:

(a) $\mathbf{A}^{-}\mathbf{A}$ ve $\mathbf{AA}^{-}$ matrisleri idempotenttir,

(b) $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A}^{-}\mathbf{A}) = r(\mathbf{AA}^{-}) \leq r(\mathbf{A}^{-})$.

Tanım 2.2.2. $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m,n}$ olsun. $\mathbf{AA}^{+} = (\mathbf{AA}^{+})'$, $\mathbf{A}^{+}\mathbf{A} = (\mathbf{A}^{+}\mathbf{A})'$, $\mathbf{AA}^{+}\mathbf{A} = \mathbf{A}$ ve $\mathbf{A}^{+}\mathbf{AA}^{+} = \mathbf{A}^{+}$ koşullarını sağlayan bir $\mathbf{A}^{+}$ matrisi varsa, bu matrise $\mathbf{A}$ matrisinin bir Moore-Penrose tersi denir.

Teorem 2.2.3. $m \times n$ boyutlu her matrisin bir tek Moore-Penrose tersi vardır.

Teorem 2.2.4. $\mathbf{A}$ ve $\mathbf{B}$ matrisleri için aşağıdakiler doğrudur:

(a) $\mathbf{A}$ tersinir matrisi için $\mathbf{A}^{+} = \mathbf{A}^{-1}$,

(b) $(\mathbf{A}^{+})^{+} = \mathbf{A}$ ve $(\mathbf{A}')^{+} = (\mathbf{A}^{+})'$,

(c) $\mathbf{A}$ simetrik idempotent matris ise $\mathbf{A}^{+} = \mathbf{A}$,

(d) $\mathbf{AA}^{+}$ ve $\mathbf{A}^{+}\mathbf{A}$ idempotenttir,

(e) $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A}^{+}) = r(\mathbf{AA}^{+}) = r(\mathbf{A}^{+}\mathbf{A})$,

(f) $\mathbf{A}'\mathbf{AA}^{+} = \mathbf{A}' = \mathbf{A}^{+}\mathbf{AA}'$ ve $\mathbf{A}'(\mathbf{A}^{+})'\mathbf{A}^{+} = \mathbf{A}^{+} = \mathbf{A}^{+}(\mathbf{A}^{+})'\mathbf{A}'$,

(g) $\mathbf{A} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{A}^{+} = \mathbf{0}$, $\mathbf{AB} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{B}^{+}\mathbf{A}^{+} = \mathbf{0}$ ve $\mathbf{A}^{+}\mathbf{B} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{A}'\mathbf{B} = \mathbf{0}$.

Yukarıdaki tanım ve teoremler ile ilgili detaylı bilgi için, örneğin, [11, 20, 33] kaynaklarına bakılabilir.

2.3. Parçalanmış Matris

Bir kümenin parçalanmasına benzer olarak bir matrisin parçalanması, orijinal matrisin her bir elemanının, parçalanışın yalnız ve yalnız bir alt matrisine düşecek şekilde karşılıklı ayrık alt matrislere ayrışmış halidir. Örneğin $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m,n}$ matrisi için

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{pmatrix}$$

yazılışı, $\mathbf{A}$ matrisinin bir parçalanışıdır. Burada $m_1 + m_2 = m$ ve $n_1 + n_2 = n$ olmak üzere, $\mathbf{A}_{11} \in \mathbb{R}^{m_1,n_1}$, $\mathbf{A}_{12} \in \mathbb{R}^{m_1,n_2}$, $\mathbf{A}_{21} \in \mathbb{R}^{m_2,n_1}$ ve $\mathbf{A}_{22} \in \mathbb{R}^{m_2,n_2}$ 'dir. Yukarıda verilen $\mathbf{A}$ parçalanmış matrisinin devriği

$$\mathbf{A}' = \begin{pmatrix} \mathbf{A}'_{11} & \mathbf{A}'_{21} \\ \mathbf{A}'_{12} & \mathbf{A}'_{22} \end{pmatrix}$$

olur. $\mathbf{A}_{12}$ ve $\mathbf{A}_{21}$ matrisleri sıfır matris, $\mathbf{A}_{11}$ ve $\mathbf{A}_{22}$ matrisleri tersinir kare matrisler ise, $\mathbf{A}$ matrisinin tersi

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{22}^{-1} \end{pmatrix}$$

şeklindedir. Benzer şekilde, eğer $\mathbf{A}_{12}$ ve $\mathbf{A}_{21}$ matrisleri sıfır matris ise, $\mathbf{A}$ parçalanmış matrisinin genelleştirilmiş tersi ve Moore-Penrose tersi sırasıyla

$$\mathbf{A}^{-} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11}^{-} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{22}^{-} \end{pmatrix} \text{ ve } \mathbf{A}^{+} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11}^{+} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{22}^{+} \end{pmatrix}$$

şeklinde olur. Burada $\mathbf{A}_{ij}^{-}$ ve $\mathbf{A}_{ij}^{+}$ sırasıyla $\mathbf{A}_{ij}$ matrisinin genelleştirilmiş ve Moore-Penrose tersleridir [11, 20].

2.4. Kronecker Çarpım ve Kronecker Toplam

Tanım 2.4.1. $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m,n}$ ve $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{p,q}$ olmak üzere, $mp \times nq$ boyutlu

$$\begin{pmatrix} a_{11}\mathbf{B} & \cdots & a_{1n}\mathbf{B} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}\mathbf{B} & \cdots & a_{mn}\mathbf{B} \end{pmatrix}$$

matrisine $\mathbf{A}$ ve $\mathbf{B}$ matrislerinin Kronecker çarpımı denir ve bu $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$ ile gösterilir.

Teorem 2.4.1. $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ ve $\mathbf{D}$ matrisleri için aşağıdakiler doğrudur:

(a) $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} \otimes \mathbf{C} = (\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) \otimes \mathbf{C} = \mathbf{A} \otimes (\mathbf{B} \otimes \mathbf{C})$,

(b) $(\mathbf{A}+\mathbf{B})$ ve $(\mathbf{C}+\mathbf{D})$ varsa $(\mathbf{A}+\mathbf{B}) \otimes (\mathbf{C}+\mathbf{D}) = \mathbf{A} \otimes \mathbf{C} + \mathbf{A} \otimes \mathbf{D} + \mathbf{B} \otimes \mathbf{C} + \mathbf{B} \otimes \mathbf{D}$,

(c) $\mathbf{AC}$ ve $\mathbf{BD}$ matrisleri varsa $(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})(\mathbf{C} \otimes \mathbf{D}) = \mathbf{AC} \otimes \mathbf{BD}$,

(d) $(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})' = \mathbf{A}' \otimes \mathbf{B}'$,

(e) $\mathbf{A}$ ve $\mathbf{B}$ kare matrisleri için $iz(\mathbf{A}\otimes\mathbf{B}) = iz(\mathbf{A})iz(\mathbf{B})$,

(f) $r(\mathbf{A}\otimes\mathbf{B}) = r(\mathbf{A})r(\mathbf{B})$,

(g) $\mathbf{A}$ ve $\mathbf{B}$ tersinir matrisleri için $(\mathbf{A}\otimes\mathbf{B})^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\otimes\mathbf{B}^{-1}$,

(h) $(\mathbf{A}\otimes\mathbf{B})^{-} = \mathbf{A}^{-}\otimes\mathbf{B}^{-}$ ve $(\mathbf{A}\otimes\mathbf{B})^{+} = \mathbf{A}^{+}\otimes\mathbf{B}^{+}$.

Tanım 2.4.2. $\mathbf{A}_i \in \mathbb{R}^{m_i,n_i}$, $i = 1,2,\ldots,k$, matrisleri için,

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{0} & \ldots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_2 & \ldots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ldots & \mathbf{A}_k \end{pmatrix}$$

matrisine $\mathbf{A}_i$ matrislerinin Kronecker toplamı denir ve bu $\mathbf{A}_1 \oplus \mathbf{A}_2 \oplus \ldots \oplus \mathbf{A}_k$ ile gösterilir.

Yukarıdaki kavramlar ile ilgili detaylı bilgi için [20] ve [33] kaynaklarına bakılabilir.

2.5. Kuadratik Formlar ve Pozitif Kararlı Matrisler

Tanım 2.5.1. $\mathbf{a},\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{n,1}$ olsun. $\mathbf{a}'\mathbf{y}$ ifadesine, $\mathbf{y}$ vektörünün lineer formu denir [20].

Tanım 2.5.2. $\mathbf{y} = (y_i) \in \mathbb{R}^{n,1}$ vektörü ve simetrik bir $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n,n}$ matrisi için,

$$Q(\mathbf{y}) = \mathbf{y}'\mathbf{A}\mathbf{y} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} y_i y_j a_{ij}$$

ifadesine, y_i elemanlarının bir kuadratik formu ve $\mathbf{A}$ matrisine de bu kuadratik formun matrisi denir [11].

Tanım 2.5.3. Sıfırdan farklı her $\mathbf{y}$ vektörü için $\mathbf{y}'\mathbf{A}\mathbf{y} > 0$ ise, $\mathbf{y}'\mathbf{A}\mathbf{y}$ ifadesine pozitif kararlı kuadratik form ve $\mathbf{A}$ matrisine (simetrik) pozitif kararlı matris denir [32].

Tanım 2.5.4. Sıfırdan farklı her $\mathbf{y}$ vektörü için $\mathbf{y}'\mathbf{A}\mathbf{y} \geq 0$ ise, $\mathbf{y}'\mathbf{A}\mathbf{y}$ ifadesine pozitif kararsız (nonnegatif kararlı) kuadratik form ve $\mathbf{A}$ matrisine pozitif kararsız matris denir [32].

Teorem 2.5.1. $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$ matrisinin pozitif kararlı bir matris olmasının gerek ve yeter koşulu $\mathbf{A} = \mathbf{K}\mathbf{K}'$ olacak şekilde, bir $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{n,n}$ tersinir matrisinin var olmasıdır [32].

Teorem 2.5.2. $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$ pozitif kararsız matrisi için $r(\mathbf{A}) = r$ olmasının gerek ve yeter koşulu $\mathbf{A} = \mathbf{K}\mathbf{K}'$ olacak şekilde $r(\mathbf{K}) = r$ olan bir $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{n,n}$ matrisinin var olmasıdır [32].

Tanım 2.5.5. $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$ olsun. Eğer $\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ olacak şekilde sıfırdan farklı bir $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n,1}$ vektörü varsa, $\lambda \in \mathbb{R}$ skalerine $\mathbf{A}$ matrisinin bir özdeğeri ve $\mathbf{x}$ vektörüne ise, $\mathbf{A}$ matrisinin λ özdeğeri ile ilişkili bir özvektörü denir [20].

Özellik 2.5.1. $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{k,k}$ simetrik bir matris olsun. Bu durumda, $\mathbf{A}$ matrisi

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i' = \lambda_1 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1' + \lambda_2 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2' + \ldots + \lambda_k \mathbf{e}_k \mathbf{e}_k'$$

şeklinde yazılabilir. Burada $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ değerleri $\mathbf{A}$ matrisinin özdeğerleri ve $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_k$ vektörleri $\mathbf{A}$ matrisinin bu özdeğerlere karşılık gelen normalleştirilmiş özvektörleridir. Bu yazılışa $\mathbf{A}$ matrisinin spektral ayrışımı denir [19].

Teorem 2.5.3. Pozitif kararlı bir matrisin özdeğerleri pozitiftir. Pozitif kararsız bir matrisin özdeğerleri ise negatif değildir [32].

Tanım 2.5.6. $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$ matrisi için $\mathbf{B}^2 = \mathbf{A}$ koşulunu sağlayan $\mathbf{B}$ matrisine, $\mathbf{A}$ matrisinin karekök matrisi denir ve $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{1/2}$ ile gösterilir [20].

Özellik 2.5.2. $\mathbf{A}$ spektral ayrışımı $\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\mathbf{e}_i\mathbf{e}_i'$ olan $k\times k$ boyutlu pozitif kararlı bir matris olsun. Bu durumda, $\mathbf{P}=(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\ldots,\mathbf{e}_k)$ ve

$$\mathbf{\Lambda}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_k\end{pmatrix},\ \lambda_i>0,\ i=1,2,\ldots,k,$$

olmak üzere, $\mathbf{A}^{1/2}=\sum_{i=1}^{k}\sqrt{\lambda_i}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_i'=\mathbf{P}\mathbf{\Lambda}^{1/2}\mathbf{P}'$ şeklinde ifade edilir [19].

2.6. Vektör Uzayları ve İzdüşüm

$\mathcal{S}\in\mathbb{R}^{n,1}$ olsun. Her $\mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathcal{S}$ ve $a,b\in\mathbb{R}$ için $a\mathbf{u}+b\mathbf{v}\in\mathcal{S}$ oluyorsa, $\mathcal{S}$ kümesi bir vektör uzayıdır. $\mathbb{R}^{n,1}$ vektör uzayının her alt vektör uzayı $\mathbf{0}$ vektörünü içerir. Eğer $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2\in\mathbb{R}^{n,1}$ vektör uzayları için, $\mathcal{S}_1\cap\mathcal{S}_2=\{\mathbf{0}\}$ ise $\mathcal{S}_1$ ve $\mathcal{S}_2$ vektör uzaylarına hemen hemen ayrık (virtually disjoint) vektör uzayları denir. $\mathcal{S}_1\cap\mathcal{S}_2$ bir vektör uzayıdır, fakat $\mathcal{S}_1\cup\mathcal{S}_2$ bir vektör uzayı olmak zorunda değildir. $\mathcal{S}_1\cup\mathcal{S}_2$ kümesini içeren en küçük vektör uzayına iki uzayın toplamı denir ve $\mathcal{S}_1+\mathcal{S}_2$ ile gösterilir. $\mathcal{S}_1+\mathcal{S}_2$, $\mathbf{u}\in\mathcal{S}_1$ ve $\mathbf{v}\in\mathcal{S}_2$ olmak üzere, $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ biçimindeki tüm vektörleri içerir. Aynı boyuttan $\mathbf{u}$ ve $\mathbf{v}$ vektörleri için, eğer $\mathbf{u}'\mathbf{v}=\mathbf{0}$ ise, $\mathbf{u}$ vektörü, $\mathbf{v}$ vektörüne diktir denir. Eğer bir vektör, $\mathcal{S}$ vektör uzayındaki tüm vektörlere dik ise, bu vektör $\mathcal{S}$ vektör uzayına diktir denir. Eğer $\mathcal{S}_1$ ve $\mathcal{S}_2$ vektör uzayları için $\mathcal{S}_1$ vektör uzayındaki her vektör $\mathcal{S}_2$ vektör uzayındaki tüm vektörlere dikse, $\mathcal{S}_1$ ve $\mathcal{S}_2$ vektör uzayları birbirine diktir denir ve bu $\mathcal{S}_1\perp\mathcal{S}_2$ ile gösterilir. Birbirine dik olan iki vektör uzayının toplamına bu vektör uzaylarının direkt toplamı denir ve bu durumda, $\mathcal{S}_1+\mathcal{S}_2$ ile gösterilen toplam $\mathcal{S}_1\oplus\mathcal{S}_2$ şeklinde ifade edilir. Eğer $\mathcal{S}_1\oplus\mathcal{S}_2=\mathbb{R}^{n,1}$ ise,

$\mathcal{S}_1$ ve $\mathcal{S}_2$ alt uzaylarına birbirinin dik tümleyenleri denir ve $\mathcal{S}_1 = \mathcal{S}_2^{\perp}$ (veya $\mathcal{S}_2 = \mathcal{S}_1^{\perp}$) şeklinde gösterilir. Açıkça bir $\mathcal{S}$ vektör uzayı için $(\mathcal{S}^{\perp})^{\perp} = \mathcal{S}$ olur.

$\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k\}$ vektörlerinin kümesi aşağıda verilen koşulları sağlıyorsa, $\mathcal{S}$ vektör uzayı için bir bazdır:

(a) $\mathbf{u}_i \in \mathcal{S},\ i = 1, 2, \ldots, k$,

(b) $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k\}$ lineer bağımsızdır,

(c) $\mathcal{S}$ vektör uzayının her elemanı $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k$ vektörlerinin lineer kombinasyonu olarak yazılır.

Her sıfırdan farklı sonlu boyutlu vektör uzayının bazı vardır, ancak bu baz tek olmayabilir. Fakat, verilen herhangi bir sonlu vektör uzayının farklı bazlarındaki vektörlerin sayısı aynıdır. Bu sayıya vektör uzayının boyutu denir ve bir $\mathcal{S}$ vektör uzayı için $\mathcal{S}$ vektör uzayının boyutu $boy(\mathcal{S})$ ile gösterilir.

$n \times 1$ boyutlu vektörleri içeren herhangi bir $\mathcal{S}$ vektör uzayı için $\mathcal{S} \oplus \mathcal{S}^{\perp} = \mathbb{R}^{n,1}$ olur. Böylece, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{n,1}$ vektörü, $\mathbf{u} \in \mathcal{S}$ ve $\mathbf{v} \in \mathcal{S}^{\perp}$ olmak üzere, $\mathbf{y} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$ olarak tek türlü yazılabilir. Bu ifadeye, $\mathbf{y}$ vektörünün dik ayrışımı denir. Burada $\mathbf{u}$ vektörüne, $\mathcal{S}$ vektör uzayı üzerinde $\mathbf{y}$ vektörünün izdüşümü denir ve bir izdüşüm tek olarak belirlenir.

Yukarıda verilen kavramlar ile ilgili detaylı bilgi için [33] kaynağına bakılabilir.

Tanım 2.6.1. Her $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{n,1}$ için $\mathbf{Pu} \in \mathcal{S}$ ve her $\mathbf{u} \in \mathcal{S}$ için $\mathbf{Pu} = \mathbf{u}$ ise, $\mathcal{S}$ vektör uzayı için $\mathbf{P}$ matrisine izdüşüm matrisi denir [33].

Teorem 2.6.1. $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{m,n}$ matrisinin izdüşüm matrisi olmasının gerek ve yeter koşulu

$\mathbf{P}$ matrisinin simetrik ve idempotent olmasıdır [32].

Teorem 2.6.2. Eğer $\mathbf{P}$ simetrik idempotent bir matris ise, $iz(\mathbf{P}) = r(\mathbf{P})$ olur [32].

Teorem 2.6.3. Eğer $\mathbf{P}$ idempotent bir matris ise, bu durumda $\mathbf{I} - \mathbf{P}$ matrisi de idempotenttir [32].

Teorem 2.6.4. $\mathbf{P}_i$, $i = 1, 2$, izdüşüm matrisleri ve $\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_2$ pozitif kararsız bir matris ise,

(a) $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 = \mathbf{P}_2\mathbf{P}_1 = \mathbf{P}_2$ olur,

(b) $\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_2$ matrisi bir izdüşüm matrisidir [32].

Tanım 2.6.2. $\mathbf{y} = \mathbf{Px}$ dönüşümünün, $\mathbb{R}^{n,1}$ uzayının bir $\mathcal{S}$ vektör uzayı üzerine bir dik izdüşüm olarak tanımlanmasının gerek ve yeter koşulu aşağıdaki iki koşulun sağlanmasıdır:

(a) $\mathbb{R}^{n,1}$ vektör uzayındaki her $\mathbf{x}$ vektörü için $\mathbf{Px}$ ve $\mathbf{x} - \mathbf{Px}$ diktir,

(b) $\mathcal{S}$ vektör uzayındaki her $\mathbf{x}$ vektörü için $\mathbf{Px} = \mathbf{x}$ olur [11].

Tanım 2.6.3. $\mathbf{P}$ matrisi, $\mathcal{S}$ vektör uzayının bir izdüşüm matrisi olmak üzere $\mathbf{I} - \mathbf{P}$ matrisi $\mathcal{S}^{\perp}$ vektör uzayının bir izdüşüm matrisi ise, bu durumda $\mathbf{P}$ matrisine $\mathcal{S}$ vektör uzayının bir dik izdüşüm matrisi denir [33].

Teorem 2.6.5. $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^{n,1}$ olmak üzere, $\mathbf{P}_\mathrm{S}$, $\mathbb{R}^{n,1}$ uzayındaki vektörleri $\mathcal{S}$ uzayı üzerine dik izdüşüren bir dik izdüşüm matrisi olsun. Bu durumda $\Re(\mathbf{P}_\mathrm{S}) = \mathcal{S}$ ve $\mathbf{I} - \mathbf{P}_\mathrm{S}$ matrisi de $\mathcal{S}^{\perp}$ üzerine bir dik izdüşüm matrisi olur [32].

Teorem 2.6.6. $\mathbf{P}_\mathrm{S}$, $\mathcal{S}$ vektör uzayının bir dik izdüşüm matrisi olmak üzere, $\mathcal{S} = \Re(\mathbf{X})$

ise, $(\mathbf{I}-\mathbf{P}_{\mathrm{S}})\mathbf{X}=\mathbf{0}$ olur [32].

Teorem 2.6.7. $\mathbf{P}_{\mathrm{S}_1}$ ve $\mathbf{P}_{\mathrm{S}_2}$ sırasıyla, $\mathcal{S}_1$ ve $\mathcal{S}_2$ vektör uzaylarının dik izdüşüm matrisleri olsun. $\mathcal{S}_1 \subset \mathcal{S}_2$ ise, $\mathbf{P}_{\mathrm{S}_1}\mathbf{P}_{\mathrm{S}_2}=\mathbf{P}_{\mathrm{S}_2}\mathbf{P}_{\mathrm{S}_1}=\mathbf{P}_{\mathrm{S}_1}$ ve $\mathbf{P}_{\mathrm{S}_2}-\mathbf{P}_{\mathrm{S}_1}=\mathbf{P}_{\mathrm{S}_1^{\perp}\cap \mathrm{S}_2}$ olur [32].

Özellik 2.6.1. $\mathbf{P}_{\mathbf{A}}$, $\mathbf{P}_{\mathbf{B}}$ ve $\mathbf{P}_{\mathbf{A}\otimes\mathbf{B}}$ matrisleri dik izdüşüm matrisleri olmak üzere, $\mathbf{P}_{\mathbf{A}\otimes\mathbf{B}}=\mathbf{P}_{\mathbf{A}}\otimes\mathbf{P}_{\mathbf{B}}$ olur [33, sf. 54, Alıştırma 2.25].

2.7. Bir Matrisin Sütun Uzayı ve Sıfır Uzayı

Tanım 2.7.1. $\mathbf{A}\in\mathbb{R}^{n,m}$ olsun. $\mathbf{A}$ matrisinin sütunları tarafından üretilen vektör uzayına $\mathbf{A}$ matrisinin sütun uzayı denir ve bu $\Re(\mathbf{A})$ ile gösterilir.

$$\Re(\mathbf{A})=\{\mathbf{y}:\mathbf{y}=\mathbf{Ab},\mathbf{b}\in\mathbb{R}^{m}\}$$

olur. $\mathbf{A}$ matrisinin satır uzayı ise, $\Re(\mathbf{A}')$ ile gösterilir [11].

Teorem 2.7.1. $\mathbf{A}\in\mathbb{R}^{n,n}$ tersinir bir matris olsun. Bu durumda, $\mathbf{A}$ matrisinin sütun uzayı $\mathbb{R}^{n}$ olur [11].

Tanım 2.7.2. $\mathbf{A}\in\mathbb{R}^{n,m}$ olsun. $\mathbf{A}$ matrisinin sıfır uzayı $S=\{\mathbf{y}:\mathbf{Ay}=\mathbf{0},\mathbf{y}\in\mathbb{R}^{m}\}$ şeklinde tanımlanır ve bu $\mathcal{N}(\mathbf{A})$ ile gösterilir [11].

Teorem 2.7.2. $\mathbf{A}\in\mathbb{R}^{n,m}$ matrisinin sıfır uzayı, $\mathbb{R}^{m,1}$ vektör uzayının bir alt vektör uzayıdır [11].

Teorem 2.7.3. Uygun boyutlu $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ ve $\mathbf{C}$ matrisleri için aşağıdakiler doğrudur:

(a) $\Re(\mathbf{AB})\subseteq\Re(\mathbf{A})$ ve $\Re(\mathbf{AA}')\subseteq\Re(\mathbf{A})$,

(b) $\mathbf{C}=\mathbf{AB}$ ise, $\Re(\mathbf{C})\subseteq\Re(\mathbf{A})$ olur. Eğer $\mathbf{B}$ matrisi tersinir ise, $\Re(\mathbf{C})=\Re(\mathbf{A})$ olur,

(c) Eğer $\Re(\mathbf{B}) \subseteq \Re(\mathbf{A})$ ise, $\mathbf{A}$ matrisinin genelleştirilmiş tersi olan $\mathbf{A}^-$ matrisinin herhangi bir seçimi için $\mathbf{AA}^-\mathbf{B} = \mathbf{B}$ olur. Eğer $\Re(\mathbf{B}') \subseteq \Re(\mathbf{A}')$ ise, $\mathbf{BA}^-\mathbf{A} = \mathbf{B}$ olur,

(d) $\mathbf{A}^-$ matrisinin seçiminden bağımsız olarak, $\mathbf{BA}^-\mathbf{C}$ ifadesinin değişmez olmasının gerek ve yeter koşulu $\Re(\mathbf{B}') \subseteq \Re(\mathbf{A}')$ ve $\Re(\mathbf{C}) \subseteq \Re(\mathbf{A})$ olmasıdır,

(e) $\mathbf{B}'\mathbf{A} = \mathbf{0}$ olmasının gerek ve yeter koşulu $\Re(\mathbf{B}) \subseteq \Re^{\perp}(\mathbf{A})$ olmasıdır,

(f) $boy(\Re(\mathbf{A})) = r(\mathbf{A})$ olur. Eğer $\mathbf{A}$ matrisinin n satırı varsa, bu durumda $boy(\Re^{\perp}(\mathbf{A})) = n - r(\mathbf{A})$ olur,

(g) Eğer $\Re(\mathbf{A}) \subseteq \Re(\mathbf{B})$ ve $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{B})$ ise, bu durumda, $\Re(\mathbf{A}) = \Re(\mathbf{B})$ olur. Ayrıca $n \times n$ boyutlu birim matris için $\Re(\mathbf{I}) = \mathbb{R}^n$ olur,

(h) $\mathcal{N}(\mathbf{A}) = \Re^{\perp}(\mathbf{A}')$ [33].

Teorem 2.7.4. Herhangi bir $\mathbf{A}$ matrisi için, $\mathbf{AA}^-$ matrisi, $\Re(\mathbf{A})$ üzerine bir izdüşüm matrisidir. Ayrıca, $\mathbf{P}_{\Re(\mathbf{A})} = \mathbf{A}(\mathbf{A}'\mathbf{A})^-\mathbf{A}'$ matrisi, $\Re(\mathbf{A})$ için bir dik izdüşüm matrisi olur [33].

Teorem 2.7.5. $\mathbf{A}$ ve $\mathbf{B}$ matrislerinin satır sayıları aynı olmak üzere, $\mathbf{P}_{\mathbf{A}}$, $\mathbf{P}_{(\mathbf{A}:\mathbf{B})}$ ve $\mathbf{P}_{(\mathbf{I}-\mathbf{P}_{\mathbf{A}})\mathbf{B}}$ matrisleri sırasıyla $\Re(\mathbf{A})$, $\Re(\mathbf{A}:\mathbf{B})$ ve $\Re((\mathbf{I}-\mathbf{P}_{\mathbf{A}})\mathbf{B})$ üzerine dik izdüşüm matrisleri olsun. Bu durumda,

(a) $\Re(\mathbf{A}:\mathbf{B}) = \Re(\mathbf{A}) \oplus \Re((\mathbf{I}-\mathbf{P}_{\mathbf{A}})\mathbf{B})$,

(b) $\mathbf{P}_{(\mathbf{A}:\mathbf{B})} = \mathbf{P}_{\mathbf{A}} + \mathbf{P}_{(\mathbf{I}-\mathbf{P}_{\mathbf{A}})\mathbf{B}}$ olur [33].

2.8. Lineer Denklem Sistemleri

$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m,n}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{k,t}$ ve $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{m,t}$ bilinen matrisler olmak üzere, $\mathbf{AXB} = \mathbf{C}$ matris denklem sistemini sağlayan en az bir $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n,k}$ matrisi varsa, sistem tutarlıdır denir. Aksi durumda, sistem tutarsızdır denir.

Teorem 2.8.1. $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m,n}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{k,t}$ ve $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{m,t}$ olsun. $\mathbf{AXB} = \mathbf{C}$ matris denklemini sağlayan bir $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n,k}$ matrisinin var olmasının, yani sistemin tutarlı olmasının gerek ve yeter koşulu

$$\mathbf{AA}^{-}\mathbf{CB}^{-}\mathbf{B} = \mathbf{C}$$

olmasıdır. Eğer sistem tutarlı ise, $\mathbf{H} \in \mathbb{R}^{n,k}$ herhangi bir matris olmak üzere,

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-}\mathbf{CB}^{-} + \mathbf{H} - \mathbf{A}^{-}\mathbf{AHBB}^{-}$$

ile verilen $\mathbf{X}$ matrisi $\mathbf{AXB} = \mathbf{C}$ matris denkleminin bir çözümüdür [11].

$\mathbf{AXB} = \mathbf{C}$ matris denkleminde $\mathbf{X}$ matrisi yerine $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n,1}$ vektörü, $\mathbf{B} = \mathbf{I}$ ve $\mathbf{C}$ matrisi yerine $\mathbf{g} \in \mathbb{R}^{m,1}$ vektörü alındığında, $\mathbf{Ax} = \mathbf{g}$ lineer denklem sistemi elde edilir. Böylece Teorem 2.8.1'in daha özel bir durumu olarak aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 2.8.2. $\mathbf{Ax} = \mathbf{g}$ lineer denklem sisteminin tutarlı olabilmesi için gerek ve yeter koşul

$$\mathbf{AA}^{-}\mathbf{g} = \mathbf{g}$$

olmasıdır. Eğer sistem tutarlı ise, bu durumda herhangi bir $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^{n,1}$ vektörü için

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-}\mathbf{g} + (\mathbf{I} - \mathbf{A}^{-}\mathbf{A})\mathbf{h}$$

ile verilen $\mathbf{x}$ vektörü $\mathbf{Ax} = \mathbf{g}$ lineer denklem sisteminin bir çözümüdür [11].

2.9. Rasgele Vektörler ve Bazı İstatistiksel Kavramlar

Rasgele vektör, elemanları rasgele değişkenler olan bir vektör ve benzer şekilde rasgele matris ise, elemanları rasgele değişkenler olan bir matristir. Rasgele vektör ve matrislerle ilgili bazı temel kavram ve teoremler aşağıda verilmektedir. Bu tanım ve teoremler ile ilgili detaylı bilgi için, örneğin, [19] ve [32] kaynaklarına bakılabilir.

Tanım 2.9.1. $\mathbf{Z} = (z_{ij}) \in \mathbb{R}^{p,n}$ rasgele matrisinin beklenen değeri (eğer bütün i, j 'ler için $E(z_{ij})$ varsa)

$$E(\mathbf{Z}) = \begin{pmatrix} E(z_{11}) & E(z_{12}) & \dots & E(z_{1n}) \\ E(z_{21}) & E(z_{22}) & \dots & E(z_{2n}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ E(z_{p1}) & E(z_{p2}) & \dots & E(z_{pn}) \end{pmatrix}$$

matrisi ile tanımlanır. Burada matrisin her bir $E(z_{ij})$ elemanı, z_{ij} elemanının beklenen değeri olup

$$E(z_{ij}) = \begin{cases} \int\limits_{-\infty}^{\infty} z_{ij} f_{ij}(z_{ij}) dz_{ij}, & z_{ij}, f_{ij}(z) \text{ olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip sürekli} \\ & \text{bir rasgele değişken ise,} \\ \sum\limits_{ij} z_{ij} P_{ij}(z_{ij}) \quad , & z_{ij}, P_{ij}(z) \text{ olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip kesikli} \\ & \text{bir rasgele değişken ise,} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 2.9.1. $\mathbf{Z}$ rasgele bir matris, $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ ve $\mathbf{C}$ bilinen uygun boyutlu matrisler olmak üzere, $E(\mathbf{AZB} + \mathbf{C}) = \mathbf{A}E(\mathbf{Z})\mathbf{B} + \mathbf{C}$ olur.

Sonuç 2.9.1. $\mathbf{A}$ ve $\mathbf{B}$ bilinen uygun boyutlu matrisler, $\mathbf{x}$ ve $\mathbf{y}$ ise uygun boyutlu rasgele vektörler olmak üzere, $E(\mathbf{Ax} + \mathbf{By}) = \mathbf{A}E(\mathbf{x}) + \mathbf{B}E(\mathbf{y})$ olur.

Benzer şekilde, vektörler için kovaryans ve varyans gösterimleri genelleştirilebilir. $\mathbf{x}$

ve $\mathbf{y}$ rasgele vektörleri için genelleştirilmiş kovaryans ve varyans-kovaryans operatörleri C ve D aşağıdaki gibi tanımlanır.

Tanım 2.9.2. $\mathbf{x} = (x_i) \in \mathbb{R}^{m,1}$ ve $\mathbf{y} = (y_j) \in \mathbb{R}^{n,1}$ rasgele vektörler olmak üzere, $C(\mathbf{x},\mathbf{y}) = [\mathrm{cov}(x_i, y_j)]$ ve $D(\mathbf{y}) = [\mathrm{cov}(y_i, y_j)]$ olur.

Teorem 2.9.2. $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{k,m}$ ve $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{p,n}$ bilinen matrisler, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{m,1}$ ve $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{n,1}$ rasgele vektörler olsun. Bu durumda aşağıdaki eşitlikler verilebilir:

(a) $C(\mathbf{x},\mathbf{y}) = E[(\mathbf{x} - E(\mathbf{x}))(\mathbf{y} - E(\mathbf{y}))']$,

(b) $C(\mathbf{Ax},\mathbf{By}) = \mathbf{A}C(\mathbf{x},\mathbf{y})\mathbf{B}'$,

(c) $C(\mathbf{Ax},\mathbf{y}) = \mathbf{A}C(\mathbf{x},\mathbf{y})$ ve $C(\mathbf{x},\mathbf{By}) = C(\mathbf{x},\mathbf{y})\mathbf{B}'$,

(d) $D(\mathbf{x}) = C(\mathbf{x},\mathbf{x})$ ve $D(\mathbf{x}) = E(\mathbf{xx}') - [E(\mathbf{x})][E(\mathbf{x})]'$,

(e) $D(\mathbf{Ax}) = C(\mathbf{Ax},\mathbf{Ax}) = \mathbf{A}C(\mathbf{x},\mathbf{x})\mathbf{A}' = \mathbf{A}D(\mathbf{x})\mathbf{A}'$.

2.10. Bazı Temel Dağılımlar ve Kuadratik Formların Dağılımları ile İlgili Bazı Özellikler

Tanım 2.10.1. x rasgele değişkeni için μ ortalamalı ve σ^2 varyanslı, tek değişkenli normal dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, \quad -\infty < x < \infty,$$

şeklinde tanımlanır. Eğer $\mathbf{x}$ rasgele değişkenler vektörü için $E(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\mu}$ ve $D(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\Sigma}$ ise, $\mathbf{x} \sim N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ gösterimi, $\boldsymbol{\mu}$ ortalamalı ve $\boldsymbol{\Sigma}$ dağılım matrisli $\mathbf{x}$ vektörünün çok değişkenli normal dağılıma sahip olduğunu gösterir. n bileşenli bir $\mathbf{x}$ rasgele vektörü için çok değişkenli normal dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} |\boldsymbol{\Sigma}|^{1/2}} e^{-\frac{1}{2}\left((\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})\right)}, \quad -\infty < x_i < \infty, \; i = 1, 2, \ldots, n,$$

olarak verilir [19].

Tanım 2.10.2. $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n,1}$ olmak üzere, $\mathbf{x} \sim N_n(\mathbf{0}, \mathbf{I})$ için $z = \mathbf{x}'\mathbf{x}$ olarak yazılabilen z rasgele değişkenine n serbestlik dereceli ki-kare (chi-square) dağılımına sahiptir denir ve bu $z \sim \chi_n^2$ ile gösterilir [33].

Tanım 2.10.3. $z_1 \sim \chi_{n_1}^2$ ve $z_2 \sim \chi_{n_2}^2$ bağımsız rasgele değişkenleri için bir q rasgele değişkeni $q = \dfrac{z_1/n_1}{z_2/n_2}$ şeklinde yazılabiliyorsa, q rasgele değişkenine n_1 ve n_2 serbestlik dereceli F dağılımına sahiptir denir ve bu $q \sim F_{n_1,n_2}$ ile gösterilir [33].

Teorem 2.10.1. $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n,1}$ rasgele değişkenler vektörü ve $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$ simetrik bir matris olsun. Eğer $E(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\theta}$ ve $D(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\Sigma}$ ise, $E(\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x}) = iz(\mathbf{A}\boldsymbol{\Sigma}) + \boldsymbol{\theta}'\mathbf{A}\boldsymbol{\theta}$ olur [32].

Teorem 2.10.2. $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)'$ rasgele değişkenler vektörü, $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{p,n}$ ve $r(\mathbf{C}) = p$ olsun. Eğer $\mathbf{y} \sim N_n(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\Sigma})$ ise, $\mathbf{C}\mathbf{y} \sim N_p(\mathbf{C}\boldsymbol{\theta}, \mathbf{C}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{C}')$ olur [32].

Teorem 2.10.3. $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)'$ rasgele değişkenler vektörü, $\boldsymbol{\Sigma} \in \mathbb{R}^{n,n}$ pozitif kararlı bir matris olmak üzere, $N_n(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\Sigma})$ dağılımına sahip olsun. Bu durumda, $Q = (\mathbf{y} - \boldsymbol{\theta})'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{y} - \boldsymbol{\theta}) \sim \chi_n^2$ olur [32].

Teorem 2.10.4. $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)'$ rasgele değişkenler vektörü $N_n(\boldsymbol{\theta}, \sigma^2\mathbf{I})$ dağılımına sahip, $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n,n}$ simetrik bir matris ve $r(\mathbf{P}) = r$ olsun. Bu durumda, $Q = (\mathbf{y} - \boldsymbol{\theta})'\mathbf{P}(\mathbf{y} - \boldsymbol{\theta})/\sigma^2 \sim \chi_r^2$ olmasının gerek ve yeter koşulu $\mathbf{P}$ matrisinin idempotent olmasıdır [32].

Teorem 2.10.5. $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)'$ rasgele değişkenler vektörü $N_n(\boldsymbol{\theta}, \sigma^2\mathbf{I})$ dağılımına sahip ve $Q_i = (\mathbf{y} - \boldsymbol{\theta})'\mathbf{P}_i(\mathbf{y} - \boldsymbol{\theta})/\sigma^2$, $i = 1, 2$, olsun. Eğer $Q_i \sim \chi_{r_i}^2$ ve

$Q_1 - Q_2 \geq 0$ ise, bu durumda $Q_1 - Q_2$ ve Q_2 bağımsızdır ve sırasıyla $\chi^2_{r_1-r_2}$ ve $\chi^2_{r_2}$ olarak dağılır [16, 17].

2.11. Lineer Modellerde Tahmin

Bir tek parametreyi tahmin etmek için bir tek istatistik kullanılıyorsa, bu durumda parametrenin nokta tahmin edicisi kullanılıyor denir. Yani nokta tahmin edicisi, bir kitle parametresini tahmin etmek için kullanılan tek bir istatistiktir. Genel olarak bir istatistikten bahsediliyorsa, buna bir tahmin edici ve eğer istatistik belirtilen bir değeri almışsa buna tahmin denir. θ bir parametre olmak üzere $E(T) = \theta$ ise, T istatistiğine θ parametresinin yansız tahmin edicisi, $E(T) = \theta +$ (bir terim) ise, buna yanlı tahmin edici denir. Yanlı ve yansız tahmin ediciler arasında seçim söz konusu olduğunda yansız tahmin edicinin seçilmesi doğaldır. Ancak iki yansız tahmin arasında seçim söz konusu olduğunda yeni bir ölçü kullanmak gerekir. Bu durumda da parametreye yakın olması olasılığı yüksek olan tercih edilir. Bir parametrenin bir yansız tahmin edicisi, diğer herhangi bir yansız tahmin edicisinden daha küçük varyansa sahip ise, bu istatistiğe parametrenin minimum varyanslı tahmin edicisi denir. Parametrelerin bir lineer fonksiyonu, gözlemler vektörünün beklenen değerinin bir lineer fonksiyonuna denk ise, bu durumda parametrelerin lineer fonksiyonuna tahmin edilebilirdir denir.

Genel olarak bir lineer model

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$$

biçiminde tanımlanır. Burada $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{n,1}$ gözlenebilir rasgele değişkenler vektörü, $r(\mathbf{X}) = q, (q \leq p < n)$ olmak üzere, $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n,p}$ bilinenler matrisi, $\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^{p,1}$ bilinmeyen parametrelerin vektörü ve $\boldsymbol{\varepsilon} \in \mathbb{R}^{n,1}$ ise gözlenebilir olmayan hataların bir vektörüdür.

$\boldsymbol{\beta}$ parametre vektörünü tahmin etmenin değişik metotları vardır. Bu metotlardan en çok kullanılan en küçük kareler tahmini (least square estimation-LSE) ile maksimum olabilirlik tahmini (maksimum likelihood estimation-MLE) aşağıda özetlenmiştir:

LSE metodu, $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_i)$ olmak üzere, $\sum \varepsilon_i^2$ ifadesinin $\boldsymbol{\beta}$ parametresine göre minimumlaştırılması işlemlerini içerir. $E(\boldsymbol{\varepsilon}) = \mathbf{0}$ ve $D(\boldsymbol{\varepsilon}) = \sigma^2\mathbf{I}$ olmak üzere, bu işlemler sonucunda elde edilen $\mathbf{X}'\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{X}'\mathbf{y}$ denklemine normal denklem denir. $\mathbf{X}$ tam ranklı kabul edildiğinde sistemin tek bir çözümü vardır ve bu çözüm $\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y}$ 'dir. Bu durumda $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ tahminine, alışılagelmiş en küçük kareler tahmini (ordinary least square estimation-OLSE) denir. Bilinen bir $\mathbf{V}$ pozitif kararlı matrisi için $E(\boldsymbol{\varepsilon}) = \mathbf{0}$ ve $D(\boldsymbol{\varepsilon}) = \sigma^2\mathbf{V}$ olarak alındığında elde edilen $\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{y}$ tahmini genelleştirilmiş en küçük kareler tahmini (generalized least square estimation-GLSE) olarak bilinir.

MLE metodu, $\boldsymbol{\varepsilon} \sim N(\boldsymbol{\mu}, \sigma^2\mathbf{V})$ olduğunda, gözlemlerin sabit bir kümesi için $\boldsymbol{\mu}$ vektörünün ve $\mathbf{V}$ matrisinin bir fonksiyonu olarak ele alınan

$$L = (2\pi)^{-(1/2)n} \left|\mathbf{V}\right|^{-1/2} e^{\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(\mathbf{y}-\mathbf{X}\boldsymbol{\beta})'\mathbf{V}^{-1}(\mathbf{y}-\mathbf{X}\boldsymbol{\beta})\right\}}$$

olabilirlik fonksiyonun maksimumlaştırılması işlemlerini içerir. En küçük kareler tahmininde hesaplandığı gibi, $\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{y}$ olur. $\mathbf{X}$ matrisi tam ranklı ve $\mathbf{V} = \sigma^2\mathbf{I}$ olduğunda,

$$L = (2\pi\sigma^2)^{-(1/2)n} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(\mathbf{y}-\mathbf{X}\boldsymbol{\beta})'(\mathbf{y}-\mathbf{X}\boldsymbol{\beta})}$$

olabilirlik fonksiyonu için $\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y}$ olur. Benzer şekilde, σ^2 için MLE

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}(\mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}})'(\mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}})$$

olarak elde edilir.

Teorem 2.11.1. $\mathbf{y} = \mathbf{X\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$ lineer modelinde, $E(\boldsymbol{\varepsilon}) = \mathbf{0}$ ve $D(\boldsymbol{\varepsilon}) = \sigma^2\mathbf{I}$ olmak üzere, $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ ve $\hat{\sigma}^2$ yukarıdaki gibi olsun. Bu durumda $E(\hat{\boldsymbol{\beta}}) = \boldsymbol{\beta}$ ve $\mathrm{cov}(\hat{\boldsymbol{\beta}}) = \sigma^2(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$ olur.

Yukarıda verilen kavramlar ile ilgili detaylı bilgi için [19] ve [32] kaynaklarına bakılabilir.

Bir lineer modelde verilen bir parametrenin tahmini mümkün olduğunda, bu tahminin en iyi tahmin olup olmadığı sorusu, en iyi lineer yansız tahmin (best linear unbiased estimation-BLUE) teorisini ortaya koyar. Bu teori ile ilgili olan bazı kavramlar aşağıda verilmiştir. Detaylı bilgi için [33] kaynağına bakılabilir.

Tanım 2.11.1. $\boldsymbol{\beta}$ ile çarpılabilir $\mathbf{p}'$ satır vektörü için $\mathbf{p}'\boldsymbol{\beta}$ skalerine, $\boldsymbol{\beta}$ parametre vektörünün elemanlarının bir lineer parametrik fonksiyonudur (linear parametric function-LPF) denir.

Tanım 2.11.2. $\boldsymbol{\beta}$ vektörünün tüm mümkün değerleri için $E(\mathbf{l}'\mathbf{y}) = \mathbf{p}'\boldsymbol{\beta}$ ise, $\mathbf{l}'\mathbf{y}$ istatistiği, $\mathbf{p}'\boldsymbol{\beta}$ ifadesinin bir lineer yansız tahminidir (least unbiased estimation-LUE).

Tanım 2.11.3. Bir tahmin edilebilir lineer parametrik fonksiyon için BLUE, en küçük dağılım matrisine sahip lineer yansız tahmin olarak tanımlanır.

Teorem 2.11.2. Her tahmin edilebilir lineer parametrik fonksiyon için bir tek BLUE vardır.

Not: Hata vektörü normal dağılıma sahip olduğunda, $\boldsymbol{\beta}$ için MLE, aynı zamanda bir LSE olur. Ayrıca, bir tahmin edilebilir lineer parametrik fonksiyon için MLE tektir ve bu tahmin aynı zamanda BLUE olur (ya da LSE olur).

BÖLÜM 3. ÇOK DEĞİŞKENLİ LİNEER MODELLER ALTINDA TAHMİN

3.1. Giriş

Bu bölümde, bir genel parçalanmış lineer model ve ilişkili bazı indirgenmiş lineer modeller ele alınarak, bu indirgenmiş modeller altında gözlenebilir rasgele değişkenler vektörünün beklenen değeri için BLUE değerinin, parçalanmış model altında da BLUE kalması ile ilgili koşulları içeren bazı sonuçlar verilecektir. Daha sonra, kabul edilebilir ve alternatif lineer tahmin ediciler ele alınacak ve son olarak, Frisch-Waugh tahmini olarak bilinen tahmin ile ilgili bir sonuç verilecektir.

3.2. Çok Değişkenli Lineer Model

$E(\mathbf{y}) = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}$ ve $D(\mathbf{y}) = \sigma^2\mathbf{V}$ olmak üzere,

$$\{\mathbf{y}, \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}, \sigma^2\mathbf{V}\} \tag{3.1}$$

ile gösterilen genel Gauss-Markov modeli göz önüne alınsın. Burada $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{n,1}$ gözlenebilir rasgele vektör, $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n,p}$ tam ranklı olması gerekmeyen bilinenler matrisi, $\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^{p,1}$ bilinmeyen parametrelerin vektörü, $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{n,n}_{\geq}$ bilinen pozitif kararsız varyans-kovaryans matrisi ve $\sigma^2 > 0$ bir bilinmeyen skalerdir. $\mathbf{X}$ matrisi, $p = p_1 + p_2$, $\mathbf{X}_1 \in \mathbb{R}^{n,p_1}$ ve $\mathbf{X}_2 \in \mathbb{R}^{n,p_2}$ olmak üzere, $\mathbf{X} = (\mathbf{X}_1 : \mathbf{X}_2)$ olacak şekilde parçalanmış bir matris ve $\boldsymbol{\beta}$ vektörü de bu matrise karşılık gelecek şekilde bir parçalanmış vektör olarak $\boldsymbol{\beta} = (\boldsymbol{\beta}_1' : \boldsymbol{\beta}_2')'$ biçiminde yazılabilir. Böylece (3.1) modeli

$$\{\mathbf{y}, \mathbf{X}_1\boldsymbol{\beta}_1 + \mathbf{X}_2\boldsymbol{\beta}_2, \sigma^2\mathbf{V}\} \tag{3.2}$$

şeklinde çok değişkenli parçalanmış lineer model olarak ifade edilebilir. Burada (3.1) veya denk olarak (3.2) modelinin tutarlı, yani “1 olasılıkla”,

$$\mathbf{y} \in \Re(\mathbf{X} : \mathbf{V}) \tag{3.3}$$

olduğu kabul edilmektedir [7, 26, 27].

$\mathbf{X}^{\perp}$, $\Re(\mathbf{X}^{\perp}) = \mathcal{N}(\mathbf{X}')$ koşulunu sağlayan bir matris olmak üzere, $\mathbf{P}_{\mathbf{X}}$, $\Re(\mathbf{X})$ üzerine ve $\mathbf{M}_{\mathbf{X}} = \mathbf{I} - \mathbf{P}_{\mathbf{X}}$, $\Re(\mathbf{X}^{\perp})$ üzerine (standart iç çarpıma göre) dik izdüşüm matrisleridir. Özellikle, bu kısımda $\mathbf{P}_i = \mathbf{P}_{\mathbf{X}_i}$ ve $\mathbf{M}_i = \mathbf{I} - \mathbf{P}_i$, $i = 1, 2$, olarak gösterilecektir. Ayrıca $\mathbf{P}_{\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2}$, $\Re(\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2)$ üzerine bir dik izdüşüm matrisi olmak üzere, $\mathbf{I} - \mathbf{P}_{\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2}$ yerine $\mathbf{Z}$ gösterimi kullanılacaktır.

(3.1) modeli altında $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{k,p}$ olmak üzere, $\mathbf{K\beta}$ parametrik fonksiyonlar vektörünün tahmin edilebilir olmasının gerek ve yeter koşulu $\mathbf{K} = \mathbf{CX}$ olacak şekilde bir $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{k,n}$ matrisinin var olmasıdır [12].

Genellikle, modellerde $\boldsymbol{\beta}_1$ kısıtlanacak parametre olarak göz önüne alınır ve $\mathbf{K}_2\boldsymbol{\beta}_2$ parametrik fonksiyonlar vektörünün tahmin edilebilir fonksiyonlarının tahmini ile ilgilenilir. Aşağıdaki önermede bu şekildeki fonksiyonlar vektörü için tahmin edilebilirlik koşulu verilmektedir.

Önerme 3.2.1. (3.2) modeli altında $\mathbf{K}_2 \in \mathbb{R}^{k,p_2}$ olmak üzere, $\mathbf{K}_2\boldsymbol{\beta}_2$ parametrik fonksiyonlar vektörünün tahmin edilebilir olmasının gerek ve yeter koşulu

$$\mathbf{K}_2 = \mathbf{C}_2\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2 \tag{3.4}$$

olacak şekilde bir $\mathbf{C}_2 \in \mathbb{R}^{k,n}$ matrisinin var olmasıdır [12]. ■

Bir genel Gauss-Markov modeli altında, gözlenebilir rasgele değişkenler vektörünün beklenen değeri için BLUE ile ilgili özellikler de aşağıdaki önermede verilmektedir.

Önerme 3.2.2. $\{\mathbf{y}, \mathbf{X\beta}, \sigma^2\mathbf{V}\}$ genel Gauss-Markov modeli ele alınsın. Bu durumda,

(i) $\boldsymbol{\eta} = \mathbf{Cy}$ tahmin edicisinin, $\{\mathbf{y}, \mathbf{X\beta}, \sigma^2\mathbf{V}\}$ modeli altında $\mathbf{X\beta}$ vektörünün BLUE değerleri için bir gösterim (representation) olmasının gerek ve yeter koşulu $\mathbf{C}(\mathbf{X} : \mathbf{VM_X}) = (\mathbf{X} : \mathbf{0})$ olmasıdır.

(ii) $\boldsymbol{\eta}_1 = \mathbf{Cy}$ ve $\boldsymbol{\eta}_2 = \mathbf{Dy}$ tahmin edicileri, $\{\mathbf{y}, \mathbf{X\beta}, \sigma^2\mathbf{V}\}$ modeli altında $\mathbf{X\beta}$ için BLUE değerlerinin herhangi iki gösterimi olsun. Bu durumda, “1 olasılıkla”, $\boldsymbol{\eta}_1 = \boldsymbol{\eta}_2$ olur [28, 34, 36, 37]. ■

(3.1) modeli altında, $\mathbf{CX\beta}$ tahmin edilebilir parametrik fonksiyonlar vektörü ele alındığında, $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^{k,n}$ matrisi

$$\mathbf{F}(\mathbf{X} : \mathbf{VX}^{\perp}) = \mathbf{C}(\mathbf{X} : \mathbf{0}) \tag{3.5}$$

denkleminin herhangi bir çözümü olmak üzere, $\mathbf{CX\beta}$ için BLUE değerinin, $\mathbf{Fy}$ ile verildiği iyi bilinmektedir [28, 29, 39]. Böylece Önerme 3.2.2 (i) koşulundaki $\mathbf{M_X}$ matrisinin $\mathbf{X}^{\perp}$ için özel bir seçim olduğu da dikkate alındığında, eğer $\mathbf{Gy}$ tahmin edicisi, $\mathbf{X\beta}$ için BLUE, yani $\mathbf{G} \in \mathbb{R}^{n,n}$ matrisi

$$\mathbf{G}(\mathbf{X} : \mathbf{VX}^{\perp}) = (\mathbf{X} : \mathbf{0}) \tag{3.6}$$

denkleminin herhangi bir çözümü ise, $\mathbf{CG}$ matrisinin (3.5) için bir çözüm ve dolayısıyla $\mathbf{CGy}$ ifadesinin, $\mathbf{CX\beta}$ için BLUE olduğu sonucu kolaylıkla elde edilir.

3.3. İndirgenmiş Modeller

Daha önceden de bahsedildiği gibi, modellerde genellikle $\boldsymbol{\beta}_1$ kısıtlanacak parametre olarak göz önüne alınır ve $\boldsymbol{\beta}_2$ parametresinin tahmin edilebilir fonksiyonları ile ilgilenilir. Bu nedenle, $\boldsymbol{\beta}_1$ parametresinin etkilerini ortadan kaldırmak için $\Re(\mathbf{X}_1^{\perp})$ üzerine uygun izdüşüm veya izdüşümler alınır. Bu çalışmada $\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\boldsymbol{\beta}_2$, Önerme 3.2.1'de ifade edilen $\mathbf{K}_2\boldsymbol{\beta}_2$ parametrik fonksiyonlar vektörü olarak ele alınacak ve $\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\boldsymbol{\beta}_2$ parametrik fonksiyonlar vektörünün tahmini ile ilgilenilecektir.

(3.2) modelinde tahmin ve hata uzaylarının $\Re(\mathbf{X}_1^{\perp})$ üzerine dik izdüşümü ele alındığında, düzgün indirgenmiş

$$\{\mathbf{M}_1\mathbf{y}, \mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\boldsymbol{\beta}_2, \sigma^2\mathbf{M}_1\mathbf{V}\mathbf{M}_1\} \tag{3.7}$$

lineer modeli elde edilir. Burada (3.2) modeli altında $\mathbf{M}_1\mathbf{y}$ lineer dönüşümü ele alınmaktadır. $E(\mathbf{M}_1\mathbf{y}) = \mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\boldsymbol{\beta}_2$ ve $D(\mathbf{M}_1\mathbf{y}) = \sigma^2\mathbf{M}_1\mathbf{V}\mathbf{M}_1$ olduğundan, (3.7) modeli (3.2) modeli ile uyumludur. Yani, (3.7) modeli $\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\boldsymbol{\beta}_2$ hakkında sonuç çıkarmak için uygundur. (3.7) biçimindeki bir düzgün indirgenmiş model bazı çalışmalarda ele alınmıştır [1, 3-5, 12, 22, 24, 25, 39].

(3.7) modelinde varyans-kovaryans matrisi $\sigma^2\mathbf{V}$ şeklinde kabul edildiğinde,

$$\{\mathbf{M}_1\mathbf{y}, \mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\boldsymbol{\beta}_2, \sigma^2\mathbf{V}\} \tag{3.8}$$

lineer modeli elde edilir. Fakat (3.8) geçerli bir model değildir. Çünkü $\mathbf{M}_1$ tersinir olmayan bir matris olduğunda, $D(\mathbf{M}_1\mathbf{y})$ matrisinin pozitif kararlı olamayacağı Bhimasankaram ve Ray tarafından vurgulanmıştır [4]. Ancak (3.8) modeli altında $\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\boldsymbol{\beta}_2$ için BLUE, (3.2) modeli altında $\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\boldsymbol{\beta}_2$ için bir tahmin edici olarak ele alınabilir [39]. (3.8) biçimindeki bir model [1, 4, 22, 35, 39] çalışmalarında ele alınmıştır.

(3.8) modelinde $\mathbf{M}_1\mathbf{y}$ vektörü yerine, $\mathbf{y}$ gözlenebilir rasgele değişkenler vektörü, yani (3.2) modelinde yalnızca tahmin uzayının $\Re(\mathbf{X}_1^{\perp})$ üzerine dik izdüşümü ele alındığında,

$$\{\mathbf{y}, \mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\boldsymbol{\beta}_2, \sigma^2\mathbf{V}\} \tag{3.9}$$

indirgenmiş lineer modeli elde edilir. (3.9) modeli, $\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\boldsymbol{\beta}_2$ parametrik fonksiyonlar vektörünün tahminleri için ihtiyaç duyulan tüm bilgileri içerir. (3.9) biçimindeki bir model [4, 5, 12, 39] çalışmalarında ele alınmıştır. Bu modeli ele almak anlamlıdır. $\mathbf{V} = \mathbf{I}$ olduğunda, (3.2) modelinde $\boldsymbol{\beta}_2$ vektörünün ele alınan tahmin edilebilir lineer fonksiyonlarını içeren BLUE değerleri ve onların dağılımlarının, (3.9) modelindekiler ile aynı kaldığı ve $\mathbf{V} \neq \mathbf{I}$ olsa bile, ilk birkaç tahmin edicinin etkisini ortadan kaldırdıktan sonra, $\mathbf{y}$ bağımlı değişkenini açıklamak için (3.9) modelinin kullanılabileceği [4] çalışmasında vurgulanmıştır. Ayrıca (3.2) ve (3.9) modellerinin uyumları arasındaki bir karşılaştırma deneysel hatalara göre, bağımlı değişkenin belli bir alt uzayda (yani $\Re(\mathbf{M}_1\mathbf{X})$ uzayında) kalacağı kuşkusunu doğrular veya reddeder [4]. Ancak uygulama amaçları için (3.9) modelini ele almanın biraz karmaşıklık yaratacağı ve bu nedenle, (3.7) modelini ele almanın çoğu zaman daha iyi bir seçim olacağı Groβ ve Puntanen tarafından vurgulanmıştır [12].

Doğal olarak modellerin tutarlı oldukları kabul edilmektedir. Yani (3.7) modeli ele alınırsa, bu durumda "1 olasılıkla"

$$\mathbf{y} \in \Re(\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2 : \mathbf{M}_1\mathbf{V}\mathbf{M}_1)$$

ve (3.9) modeli ele alınırsa, "1 olasılıkla"

$$\mathbf{y} \in \Re(\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2 : \mathbf{V}) \tag{3.10}$$

olduğu kabul edilmek zorundadır. Diğer taraftan, eğer $\mathbf{y} \in \Re(\mathbf{X}_1 : \mathbf{X}_2 : \mathbf{V})$ fakat $\mathbf{y} \notin \Re(\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2 : \mathbf{V})$ ise, bu durum (3.2) modeli altında oluşan sonuçlarla çelişki oluşturmayacaktır. Başka bir deyişle, (3.9) modelinin tutarsızlığı, yani $\mathbf{y} \notin \Re(\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2 : \mathbf{V})$ olması, (3.2) modelinin tutarsızlığını vurgulamaz. (3.9) indirgenmiş modelinden ortaya çıkan zorlukların üstesinden gelmek için, $\mathbf{y}$

vektörünün gerçeklendiği alt uzayın her iki modelde de hemen hemen kesin olarak aynı, yani,

$$\Re(\mathbf{X}_1 : \mathbf{X}_2 : \mathbf{V}) = \Re(\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2 : \mathbf{V}) \tag{3.11}$$

olduğu kabul edilir. (3.11) koşulu gerçeklendiğinde, (3.2) modeli, (3.9) modeli ile çelişmez denir [12]. Eğer (3.2) modeli, (3.9) modeli ile çelişmiyorsa, $\Re(\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2 : \mathbf{V}) \subseteq \Re(\mathbf{X}_1 : \mathbf{X}_2 : \mathbf{V})$ her zaman olduğundan, (3.2) modelinin tutarlılığı açıkça (3.9) modelinin tutarlılığını gösterir. Eğer (3.2) modeli yalnızca zayıf singüler (weakly singular), yani

$$\Re(\mathbf{X}_1 : \mathbf{X}_2) \subseteq \Re(\mathbf{V}) \tag{3.12}$$

ise, bu durumda (3.2) modeli hiçbir zaman (3.9) modeli ile çelişmez [12].

(3.11) koşuluna bağlı olan bazı özellikler aşağıdaki önermede verilmektedir.

Önerme 3.3.1. $\mathbf{X}_1 \in \mathbb{R}^{n,p_1}$, $\mathbf{X}_2 \in \mathbb{R}^{n,p_2}$ ve $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{n,n}_{\geq}$ olsun.

(i) Aşağıdaki üç koşul denktir:

(a1) $\Re(\mathbf{X}_1 : \mathbf{X}_2 : \mathbf{V}) = \Re(\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2 : \mathbf{V})$,

(a2) $\Re(\mathbf{X}_1) \subseteq \Re(\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2 : \mathbf{V})$,

(a3) $r(\mathbf{X}_1) + boy[\Re(\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2) \cap \Re(\mathbf{V})] = boy[\Re(\mathbf{X}_1 : \mathbf{X}_2) \cap \Re(\mathbf{V})]$.

(ii) (a1) koşulu, ilk üç tanesi denk olmak üzere, aşağıdaki dört koşulu gösterir:

(b1) $\Re(\mathbf{X}_1) = \Re(\mathbf{P}_1\mathbf{V})$,

(b2) $r(\mathbf{X}_1) = r(\mathbf{V}\mathbf{X}_1)$,

(b3) $\Re(\mathbf{X}_1) \cap \Re(\mathbf{V}^{\perp}) = \{\mathbf{0}\}$,

(b4) $\Re(\mathbf{X}_1) \subseteq \Re(\mathbf{Z}\mathbf{V})$.

(iii) Aşağıdaki iki koşul denktir:

(c1) $\Re(\mathbf{X}_1) \subseteq \Re(\mathbf{V})$,

(c2) $\Re(\mathbf{X}_1) \oplus [\Re(\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2) \cap \Re(\mathbf{V})] = \Re(\mathbf{X}_1 : \mathbf{X}_2) \cap \Re(\mathbf{V})$.

(iv) (c1) koşulu, (a1) koşulunu vurgular, fakat (a1) koşulu her zaman (c1) koşulunu vurgulamaz [12]. ∎

Önerme 3.3.1 (iv) koşulunun [5, Bölüm 1] ile çelişkili bir durum oluşturduğu Groβ ve Puntanen tarafından vurgulanmıştır [12]. [5, Bölüm 1]'de (a1) koşulunun, (c1) koşuluna denk olduğu kabul edilmiştir. Fakat

$$(\mathbf{X}_1 : \mathbf{X}_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ ve } \mathbf{V} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.13}$$

matrisleri göz önüne alındığında, (a1) koşulunun sağlandığı fakat $\Re(\mathbf{X}_1) \subseteq \Re(\mathbf{V})$ ifadesinin, yani (c1) koşulunun sağlanmadığı görülür [12].

3.4. En İyi Lineer Yansız Tahmin (BLUE)

Bu kısımda, (3.2) ve (3.9) modelleri altında, tahmin edilebilir parametrik fonksiyonlar vektörü için BLUE ile ilgili bazı özellikler verilecektir. (3.2) modelinin (3.9) modeli ile çelişmediği kabul edildiğinden, Önerme 3.2.2 (ii) koşuluna göre (3.9) indirgenmiş modeli altında $\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\boldsymbol{\beta}_2$ için BLUE değerinin her iki $\mathbf{F}_1\mathbf{y}$ ve $\mathbf{F}_2\mathbf{y}$ gösterimi ile ilgili

$$\mathbf{F}_1\mathbf{y} = \mathbf{F}_2\mathbf{y}, \tag{3.14}$$

eşitliği ($\mathbf{F}_1 \neq \mathbf{F}_2$ olabilir) her $\mathbf{y} \in \Re(\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2 : \mathbf{V}) = \Re(\mathbf{X}_1 : \mathbf{X}_2 : \mathbf{V})$ için her zaman doğrudur. Bu durum, (3.9) modeli altındaki $\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\boldsymbol{\beta}_2$ için BLUE değerinin farklı gösterimlerinin kümesi, (3.2) modeli altında $\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\boldsymbol{\beta}_2$ için lineer tahmin edicilerinin bir kümesi olarak ele alındığında, (3.2) modelinin (3.9) modeli ile çelişmemesi koşuluyla, tüm bu tahmin edicilerin (3.2) modeli altında hemen hemen kesin olarak çakıştığı anlamına gelir. Bu (3.9) modeli altındaki $\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\boldsymbol{\beta}_2$ için BLUE, (3.2) modeli altında BLUE olmasa bile doğrudur.

Aşağıdaki iki önerme sırasıyla, (3.2) ve (3.9) modelleri altında $\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\boldsymbol{\beta}_2$ parametrik fonksiyonlar vektörünün BLUE değerlerinin karakterizasyonunu ortaya koymaktadır.

Önerme 3.4.1. $\mathbf{V}_* = \mathbf{M}_1\mathbf{V}\mathbf{M}_1$ olsun. Aşağıdaki dört durum denktir:

(i) $\mathbf{Fy}$, (3.2) modeli altında $\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\boldsymbol{\beta}_2$ için BLUE olur.

(ii) $\mathbf{F}$, $\mathbf{F}(\mathbf{X}_1 : \mathbf{X}_2) = (\mathbf{0} : \mathbf{M}_1\mathbf{X}_2)$ ve $\mathbf{FVM}_1\mathbf{Z} = \mathbf{0}$ denklemlerini sağlar.

(iii) $\mathbf{N}$, $\mathbf{NM}_1\mathbf{X}_2 = \mathbf{M}_1\mathbf{X}_2$ ve $\mathbf{NV}_*\mathbf{Z} = \mathbf{0}$ denklemlerini sağlayan bir matris olmak üzere, $\mathbf{F} = \mathbf{NM}_1$ biçimindedir.

(iv) $\mathbf{F}$ matrisi, en az bir $\mathbf{A}$ matrisi için aşağıdaki gibidir:

$$\mathbf{F} = [\mathbf{I} - \mathbf{V}_*\mathbf{Z}(\mathbf{Z}\mathbf{V}_*\mathbf{Z})^+\mathbf{Z}]\mathbf{M}_1 + \mathbf{A}[\mathbf{I} - \mathbf{Z}\mathbf{V}_*\mathbf{Z}(\mathbf{Z}\mathbf{V}_*\mathbf{Z})^+]\mathbf{Z}\mathbf{M}_1 \text{ [12].} \qquad \blacksquare$$

Önerme 3.4.2. Aşağıdaki üç durum denktir:

(i) $\mathbf{Fy}$, (3.9) modeli altında $\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\boldsymbol{\beta}_2$ için BLUE olur.

(ii) $\mathbf{F}$, $\mathbf{FM}_1\mathbf{X}_2 = \mathbf{M}_1\mathbf{X}_2$ ve $\mathbf{FVZ} = \mathbf{0}$ denklemlerini sağlar.

(iii) $\mathbf{F}$ matrisi, en az bir $\mathbf{B}$ matrisi için aşağıdaki gibidir:

$$\mathbf{F} = [\mathbf{I} - \mathbf{VZ}(\mathbf{ZVZ})^+\mathbf{Z}] + \mathbf{B}[\mathbf{I} - \mathbf{ZVZ}(\mathbf{ZVZ})^+]\mathbf{Z} \text{ [12].} \qquad \blacksquare$$

3.5. Çok Değişkenli Lineer Model ve İndirgenmiş Modeller Altında Tahmin

(3.2) modelinin (3.9) modeli ile çelişmediği kabul edilerek, (3.9) indirgenmiş modeli altında $\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\boldsymbol{\beta}_2$ için BLUE değerinin, (3.2) parçalanmış modeli altındaki BLUE ile aynı kaldığı durumlar ile ilgili bazı sonuçlar aşağıda verilmektedir.

Teorem 3.5.1. (3.2) parçalanmış modeli (3.9) indirgenmiş modeli ile çelişmesin. Bu durumda (3.9) indirgenmiş modeli altında $\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\boldsymbol{\beta}_2$ için her BLUE değerinin, (3.2) parçalanmış modeli altında $\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\boldsymbol{\beta}_2$ için BLUE kalmasının gerek ve yeter koşulu

$$\Re(\mathbf{X}_1) \subseteq \Re(\mathbf{VZ}) \tag{3.15}$$

olmasıdır [12]. ■

Uyarı 3.5.1. Teorem 3.5.1'in ispatından iddianın doğru olduğu, "(3.2) modeli altında $\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\boldsymbol{\beta}_2$ için BLUE kalır" ifadesi ile "(3.2) modeli altında $\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\boldsymbol{\beta}_2$ için yansız" ifadesi yer değiştirdiğinde de görülür [12].

(3.2) modelinin zayıf singüler olduğu durumla ilgili aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.5.2. $r(\mathbf{X}_1 : \mathbf{X}_2) = r(\mathbf{X}_1) + r(\mathbf{X}_2)$ ve $\Re(\mathbf{X}_1 : \mathbf{X}_2) \subseteq \Re(\mathbf{V})$ olsun. Bu durumda (3.9) indirgenmiş modeli altında $\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\boldsymbol{\beta}_2$ için her BLUE değerinin, (3.2) modeli altında $\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\boldsymbol{\beta}_2$ için BLUE kalmasının gerek ve yeter koşulu

$$\mathbf{X}_2'\mathbf{M}_1\mathbf{V}^+\mathbf{X}_1 = \mathbf{0}$$

olmasıdır [25]. ■

Şimdi (3.2) zayıf singüler modeli ve Teorem 3.5.2 ile uyumlu olan bir sonuç ortaya konulabilir.

Sonuç 3.5.1. (3.2) parçalanmış modeli zayıf singüler olsun. Bu durumda, (3.9) indirgenmiş modeli altında $\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\boldsymbol{\beta}_2$ için her BLUE değerinin, (3.2) parçalanmış modeli altında $\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\boldsymbol{\beta}_2$ için BLUE kalmasının gerek ve yeter koşulu $\mathbf{V}$ matrisinin herhangi bir genelleştirilmiş tersi olan $\mathbf{V}^{-}$ matrisi için

$$\mathbf{X}_2'\mathbf{M}_1\mathbf{V}^{-}\mathbf{X}_1 = \mathbf{0} \tag{3.16}$$

olmasıdır [12]. ■

$\Re(\mathbf{X}_1) \not\subset \Re(\mathbf{V})$ olduğunda, (3.9) modeli altında $\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\boldsymbol{\beta}_2$ için BLUE değerinin, (3.2) modeli altında BLUE kalmasının hiçbir zaman beklenemeyeceği açıktır. Çünkü $\Re(\mathbf{X}_1 : \mathbf{X}_2 : \mathbf{V}) \neq \Re(\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2 : \mathbf{V})$ durumu, bu modellerin çeliştiğini gösterir. Öte yandan, $\Re(\mathbf{X}_1) = \Re(\mathbf{V}\mathbf{X}_1)$ olduğunda, (3.15) koşulu; $\mathbf{X}_1 = \mathbf{Z}\mathbf{X}_1$ olduğundan dolayı daima sağlanır. (3.2) modeli (3.9) modeli ile çelişmediği zaman, $\Re(\mathbf{X}_1) = \Re(\mathbf{V}\mathbf{X}_1)$ koşulunun $\Re(\mathbf{V}\mathbf{X}_1) \subseteq \Re(\mathbf{X}_1)$ koşuluna denkliği dikkate alındığında, aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 3.5.2. (3.2) parçalanmış modeli (3.9) indirgenmiş modeli ile çelişmesin. Bu durumda

$$\Re(\mathbf{V}\mathbf{X}_1) \subseteq \Re(\mathbf{X}_1) \tag{3.17}$$

ise, (3.9) modeli altında $\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\boldsymbol{\beta}_2$ için her BLUE, (3.2) modeli altında $\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\boldsymbol{\beta}_2$ için BLUE kalır [12]. ■

$\Re(\mathbf{V}\mathbf{X}_1) \subseteq \Re(\mathbf{X}_1)$ koşulu ile (3.2) modeli altında $\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\boldsymbol{\beta}_2$ için her BLUE değerinin (3.9) modeli altında $\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\boldsymbol{\beta}_2$ için BLUE kaldığı Önerme 3.4.1 (ii) ve Önerme 3.4.2 (ii) koşullarından kolayca görülür. Diğer bir deyişle, $\Re(\mathbf{V}\mathbf{X}_1) \subseteq \Re(\mathbf{X}_1)$ ise, sırasıyla (3.2) ve (3.9) modelleri altındaki BLUE değerlerinin kümesi çakışır.

$\Re(\mathbf{V}\mathbf{X}_1) \subseteq \Re(\mathbf{X}_1)$ koşulunun, $\{\mathbf{y}, \mathbf{X}_1\boldsymbol{\beta}_1, \sigma^2\mathbf{V}\}$ lineer modeli altında $\mathbf{X}_1\boldsymbol{\beta}_1$ vektörünün BLUE ve OLSE değerlerinin eşitliği için gerek ve yeter koşul olduğuna dikkat etmek gerekir [23]. Sonuç 3.5.2 daha kısıtlayıcı varsayımlar altında [4, Teorem 2.4] ve [5, Teorem 3.1]'de ele alınmıştır.

$\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\boldsymbol{\beta}_2$ için $\mathbf{P}_{\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2}\mathbf{y}$ tahmin edicisi OLSE olarak ele alınsın. Eğer bu tahmin edici (3.9) modeli altında BLUE ise, aşağıdaki sonuçta açıklandığı gibi (3.2) modeli altında da BLUE kalır.

Sonuç 3.5.3. (3.2) parçalanmış modeli (3.9) indirgenmiş modeli ile çelişmesin. Eğer $\mathbf{P}_{\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2}\mathbf{y}$, (3.9) indirgenmiş modeli altında $\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\boldsymbol{\beta}_2$ için BLUE ise, bu durumda (3.2) modeli altında da BLUE kalır [12]. ■

3.6. Çok Değişkenli Lineer Model Altında Kabul Edilebilir Tahmin

Burada (3.9) modeli altında $\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\boldsymbol{\beta}_2$ için BLUE değerinin, (3.2) modeli altında BLUE kalmadığı zaman, nasıl bir anlam ifade edeceği ile ilgili bazı sonuçlar verilmektedir. Ancak önce kabul edilebilirlik kavramını vurgulamakta yarar vardır. θ, (3.2) modeline karşılık gelen parametreler uzayı olmak üzere, her $(\boldsymbol{\beta},\sigma^2)\in\theta$ ikilisi için sağlanan ve en az bir $(\boldsymbol{\beta},\sigma^2)\in\theta$ ikilisi için kesin olan

$$Q(\mathbf{Ly}+\boldsymbol{\lambda}:\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\boldsymbol{\beta}_2)\leq Q(\mathbf{Ay}+\mathbf{a}:\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\boldsymbol{\beta}_2)$$

eşitsizliği için $\mathbf{Ly}+\boldsymbol{\lambda}\in\Phi_n(\mathbf{y})$ olacak şekilde $\mathbf{Ly}+\boldsymbol{\lambda}$ mevcut değilse, $\mathbf{Ay}+\mathbf{a}$ lineer tahmin edicisine, (3.2) modeli altında $\Phi_n(\mathbf{y})$ üzerinde kabul edilebilir denir [2]. Burada

$$\Phi_n(\mathbf{y})=\{\mathbf{Ly}+\boldsymbol{\lambda}:\mathbf{L}\in\mathbb{R}^{n,n},\boldsymbol{\lambda}\in\mathbb{R}^{n,1}\}, \tag{3.18}$$

$\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\boldsymbol{\beta}_2$ için tüm lineer tahmin edicilerin kümesini göstermektedir ve

$$Q(\mathbf{Ly}+\boldsymbol{\lambda}:\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\boldsymbol{\beta}_2)=E[(\mathbf{Ly}+\boldsymbol{\lambda}-\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\boldsymbol{\beta}_2)'(\mathbf{Ly}+\boldsymbol{\lambda}-\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\boldsymbol{\beta}_2)], \tag{3.19}$$

(3.2) modeli altında $\mathbf{Ly}+\boldsymbol{\lambda}\in\Phi_n(\mathbf{y})$ ifadesinin kuadratik riskidir.

Her şeyden önce (3.9) modeli altında $\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\boldsymbol{\beta}_2$ için BLUE değerinin, (3.2) modeli altında BLUE olmadığı zaman $\Re(\mathbf{X}_1)\subseteq\Re(\mathbf{V})$ olması koşuluyla, (3.2) modeli altında, $\Phi_n(\mathbf{y})$ lineer tahmin edicileri kümesi üzerinde, $\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\boldsymbol{\beta}_2$ için bir kabul edilebilir tahmin edici olduğunu vurgulamakta yarar vardır [12].

Aşağıdaki önerme, (3.2) modeli altında $\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\boldsymbol{\beta}_2$ için homojen lineer kabul edilebilir tahmin edicilerin karakterizasyonunu göstermekte olup [2] çalışmasındaki ana sonuçtan görülebilir. ($\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\boldsymbol{\beta}_2$ için homojen lineer tahmin edicilerin kümesi $\{\mathbf{Ly}:\mathbf{L}\in\mathbb{R}^{n,n}\}$ olarak gösterilir.)

Önerme 3.6.1. Bir $\mathbf{Ay}$ tahmin edicisinin, (3.2) parçalanmış modeli altında $\Phi_n(\mathbf{y})$ üzerinde $\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\boldsymbol{\beta}_2$ için kabul edilebilir olmasının gerek ve yeter koşulu $\mathbf{A}\in\mathbb{R}^{n,n}$ matrisi için aşağıdaki dört koşulun sağlanmasıdır:

(i) $\Re(\mathbf{VA}')\subseteq\Re(\mathbf{X}_1:\mathbf{X}_2)$,

(ii) $\mathbf{AVM}_1$ simetriktir,

(iii) $\mathbf{AV}(\mathbf{M}_1-\mathbf{A}')$ pozitif kararsızdır,

(iv) $\mathbf{W}$ matrisi, $\Re(\mathbf{W})=\Re(\mathbf{X}_1:\mathbf{X}_2)\cap\Re(\mathbf{V})$ koşulunu sağlayan herhangi bir matris olmak üzere, $\Re[(\mathbf{A}-\mathbf{M}_1)(\mathbf{X}_1:\mathbf{X}_2)]=\Re[(\mathbf{A}-\mathbf{M}_1)\mathbf{W}]$ olur [12]. ■

Aşağıdaki teorem, (3.9) indirgenmiş modeli altında $\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\boldsymbol{\beta}_2$ için BLUE değerinin, $\Re(\mathbf{X}_1)\subseteq\Re(\mathbf{V})$ koşuluyla (3.2) modeli altındaki tahmin edici için yerinde bir seçim olarak göz önüne alınabileceğini gösterir. Çünkü, (3.9) modeli altında $\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\boldsymbol{\beta}_2$ için BLUE, farklı bir lineer tahmin edici vasıtasıyla ortaya konulamaz [12].

Teorem 3.6.1. (3.2) parçalanmış modeli, (3.9) indirgenmiş modeli ile çelişmesin.

$$\Re(\mathbf{X}_1) \subseteq \Re(\mathbf{V}) \tag{3.20}$$

ise, (3.9) indirgenmiş modeli altında $\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\boldsymbol{\beta}_2$ için her BLUE, (3.2) modeli altında (3.18) ile verilen $\Phi_n(\mathbf{y})$ lineer tahmin edicileri kümesi üzerinde $\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\boldsymbol{\beta}_2$ için kabul edilebilirdir [12]. ■

3.7. Çok Değişkenli Lineer Model Altında Alternatif Tahmin

Bu kısımda, $\mathbf{Fy}$, (3.9) indirgenmiş modeli altında $\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\boldsymbol{\beta}_2$ için BLUE olmak üzere, $\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\boldsymbol{\beta}_2$ parametrik fonksiyonlar vektörünün $\mathbf{FM}_1\mathbf{y}$ biçimindeki tahmin edicileri ile ilgili bazı sonuçlar ele alınmaktadır. Bu şekildeki tahmin ediciler bazı çalışmalarda da ele alınmıştır [1, 12, 35]. $\mathbf{FM}_1\mathbf{y}$ tahmin edicisi,

$$\mathbf{FM}_1(\mathbf{X}_1 : \mathbf{X}_2) = (\mathbf{0} : \mathbf{M}_1\mathbf{X}_2)$$

olduğundan, (3.2) modeli altında $\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\boldsymbol{\beta}_2$ için bir yansız tahmin edicidir. Bu nedenle $\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\boldsymbol{\beta}_2$ için BLUE, tahmin edicilerin kuadratik riskine göre $\mathbf{FM}_1\mathbf{y}$ tahmin edicisinden daha kötü değildir. Böylece $\mathbf{FM}_1\mathbf{y}$, eğer (3.2) modeli altında $\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\boldsymbol{\beta}_2$ parametrik fonksiyonlar vektörünün BLUE değeri ile çakışırsa, (3.2) modeli altında $\Phi_n(\mathbf{y})$ üzerinde $\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\boldsymbol{\beta}_2$ için kabul edilebilir tahmin edici olur.

Aşağıdaki teorem bu çakışma durumu için gerek ve yeter bir koşul ortaya koymaktadır.

Teorem 3.7.1. (3.2) parçalanmış modeli, (3.9) indirgenmiş modeli ile çelişmesin ve $\mathbf{Fy}$, (3.9) indirgenmiş modeli altında $\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\boldsymbol{\beta}_2$ için BLUE olsun. Bu durumda her $\mathbf{FM}_1\mathbf{y}$ tahmin edicisinin, (3.2) modeli altında $\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\boldsymbol{\beta}_2$ için BLUE olmasının gerek ve yeter koşulu

$$\Re(\mathbf{P}_1\mathbf{V}\mathbf{M}_1\mathbf{Z}) \subseteq \Re(\mathbf{VZ}) \tag{3.21}$$

olmasıdır [12]. ■

Uyarı 3.7.1. Teorem 3.7.1'de verilen (3.21) koşulu farklı bir biçimde, $\Re(\mathbf{P}_1\mathbf{V}\mathbf{M}_\mathbf{X}) \subseteq \Re(\mathbf{V}\mathbf{Z})$ şeklinde de ifade edilebilir. Burada $\mathbf{P}_1 = \mathbf{X}_1\mathbf{X}_1^+$ 'dır [12].

Teorem 3.7.1'deki (3.21) koşulunun Teorem 3.5.1'deki (3.15) koşulundan daha zayıf bir koşul olduğu açıktır. Çünkü (3.15), (3.21) koşulunu vurgular. Tersinin doğru olmadığı, örneğin,

$$\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ ve } \mathbf{V} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \tag{3.22}$$

matrisleri ele alındığında görülebilir [12]. (3.22) ile verilen matrislere göre gerçekten $\Re(\mathbf{P}_1\mathbf{V}\mathbf{M}_1\mathbf{Z}) \subseteq \Re(\mathbf{V}\mathbf{Z})$ olmasına karşılık $\Re(\mathbf{X}_1) \not\subset \Re(\mathbf{V}\mathbf{Z})$ olur. Aynı matrislerin, [8, Teorem 1]'in yanlış olduğunu göstermek için kullanılabileceği, Groβ ve Puntanen tarafından vurgulanmıştır [12]. $\mathbf{V}$ matrisinin pozitif kararlı ve $(\mathbf{X}_1 : \mathbf{X}_2)$ matrisinin tam sütun ranklı olduğu durumda, (3.2) parçalanmış modeli altında Fiebig, Bartels ve Krämer, genelleştirilmiş en küçük kareler (generalized least square-GLS) tahmin edicisi ve $\boldsymbol{\beta}_2$ (yansız tahmin edilebilir vektörü) için Pseudo-GLS tahmin edicisi adını verdikleri tahmin edicinin eşitliği için gerek ve yeter koşulun $\mathbf{X}_2'\mathbf{M}_1\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X}_1 = \mathbf{0}$ olduğunu ileri sürmektedirler [8]. Fakat bu koşul sağlanmaksızın (3.22) matrislerine göre, konu olan bu tahmin edicilerin çakıştığı kolayca görülebilir. Doğru koşulun $\mathbf{X}_2'\mathbf{M}_1\mathbf{V}^+\mathbf{P}_1\mathbf{V}\mathbf{M}_1\mathbf{Z} = \mathbf{0}$ olduğu bilinmektedir [25, Teorem 1]. Bu ifade, aşağıdaki sonuçta ifade edildiği gibi Teorem 3.7.1 ile ilişkilidir.

Sonuç 3.7.1. (3.2) parçalanmış modeli zayıf singüler ve $\mathbf{F}\mathbf{y}$, (3.9) indirgenmiş modeli altında $\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\boldsymbol{\beta}_2$ için BLUE olsun. Bu durumda her $\mathbf{F}\mathbf{M}_1\mathbf{y}$ tahmin edicisinin, (3.2) modeli altında $\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\boldsymbol{\beta}_2$ için BLUE olmasının gerek ve yeter koşulu $\mathbf{V}$ matrisinin herhangi bir genelleştirilmiş tersi olan $\mathbf{V}^-$ matrisi için

$$\mathbf{X}_2'\mathbf{M}_1\mathbf{V}^{-}\mathbf{P}_1\mathbf{V}\mathbf{M}_1\mathbf{Z} = \mathbf{0} \tag{3.23}$$

koşulunun sağlanmasıdır [12]. ■

3.8. Frisch-Waugh Tahmini

Bu bölüm, (3.2) parçalanmış modeli ile (3.7) düzgün indirgenmiş lineer modeli ele alındığında, Önerme 3.4.1'in bir sonucu olarak değerlendirilebilecek bir teorem ve yararlı olacağı düşünülen bazı kısa değerlendirmeler ile bitirilecektir. (3.2) ve (3.7) modellerinde $\mathbf{V} = \mathbf{I}$ olduğunda, bu modeller altında $\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\boldsymbol{\beta}_2$ için BLUE değerlerinin çakışması durumu ilk olarak Frisch ve Waugh tarafından ispatlanmıştır [10]. Burada verilen teorem ise, onun bir genelleştirilmesidir. Bu nedenle bu tür tahminler Frisch-Waugh tahmini olarak bilinir.

Teorem 3.8.1. (3.7) düzgün indirgenmiş modeli altında $\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\boldsymbol{\beta}_2$ için her BLUE, (3.2) modeli altında $\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\boldsymbol{\beta}_2$ için BLUE kalır [12]. ■

Ayrıca ifadenin terside doğrudur. Yani, (3.2) modeli altında $\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\boldsymbol{\beta}_2$ için her BLUE, (3.7) modeli altında da $\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\boldsymbol{\beta}_2$ için BLUE kalır. Diğer bir deyişle, (3.2) ve (3.7) modelleri altında BLUE değerlerinin kümeleri çakışır. Benzer problem, $\mathbf{V}$ matrisinin pozitif kararlı olduğu durumda [4, Teorem 2.3]'te ve $\Re(\mathbf{X}_1) \cap \Re(\mathbf{X}_2) = \{\mathbf{0}\}$, $\Re(\mathbf{X}) \subseteq \Re(\mathbf{V})$ ile birlikte $\mathbf{V}$ matrisinin tersinir olmayan bir matris olduğu durumda [35] çalışmasında ele alınmıştır. Ayrıca Teorem 3.8.1, (3.7) düzgün indirgenmiş modeli altındaki tahminin, $\mathbf{V}$ matrisinin tersinir ve $\boldsymbol{\beta}_2$ vektörünün tahmin edilemez olası durumlarında [10] çalışmasında ele alınan ve iyi bilinen yöntemin bir genelleştirilmesi olarak düşünülebilir [12].

BÖLÜM 4. ÇOK DEĞİŞKENLİ KATLI LİNEER MODELLER ALTINDA TAHMİN

4.1. Giriş

Bu bölümde, çok değişkenli katlı lineer model ve bu modelle ilişkili bazı çok değişkenli katlı indirgenmiş lineer modeller tanıtılacak ve bu modeller altında gözlenebilir rasgele değişkenler matrisinin beklenen değerinin BLUE değerlerinin çakışma durumları ile ilgili bazı sonuçlar verilecektir. Başka bir deyişle, üçüncü bölümde ele alınan problemin çok değişkenli katlı lineer modellere genişletilmesi ile ilgili sonuçlar verilecektir.

4.2. Çok Değişkenli Katlı Lineer Model ve İlişkili Bazı İndirgenmiş Lineer Modeller

Konu ile ilgili yapılan çalışmaların bir çoğunda genel anlamda açıklayıcı bir değişken grubuyla, bir değişkeni açıklayacak şekilde problemler ele alınmıştır [1, 4, 5, 12, 22-25, 35-37, 39]. Gerçek hayatta, herhangi bir açıklayıcı değişken grubuyla aynı anda açıklanabilecek şekilde birden fazla bağımlı değişkeni içeren bir model ile ilgili problemlere rastlamak mümkündür. Bu nedenle, son zamanlarda yapılan bazı çalışmalarda artık konuya genel bir problem olarak da yaklaşılmaya başlanmıştır [9, 18, 19, 33, 38]. Dolayısıyla, genel durum için çok değişkenli katlı lineer modellere ihtiyaç duyulur. Bu tip modelleri elde etmek için, öncelikle (3.1) ve (3.2) modellerine benzer şekilde

$$\{\mathbf{y}_{(i)}, \mathbf{Z}\boldsymbol{\beta}_{(i)}, \sigma_i^2\mathbf{I}\},\ i = 1, 2, \ldots, m\,, \tag{4.1}$$

biçimindeki m tane klasik çok değişkenli lineer modeller kümesi ile bu modellerin parçalanmış biçimleri olan

$$\{\mathbf{y}_{(i)}, \mathbf{Z}_1\boldsymbol{\beta}_{(i1)} + \mathbf{Z}_2\boldsymbol{\beta}_{(i2)}, \sigma_i^2\mathbf{I}\}, i = 1, 2, \ldots, m, \tag{4.2}$$

şeklindeki m tane çok değişkenli parçalanmış lineer modeller kümesi göz önüne alınsın. Burada $E(\mathbf{y}_{(i)}) = \mathbf{Z}\boldsymbol{\beta}_{(i)}$ ve $D(\mathbf{y}_{(i)}) = \sigma_i^2\mathbf{I}$ kabul edilmektedir. (4.1) ve (4.2) modelleri için $\mathbf{y}_{(i)} \in \mathbb{R}^{n,1}$, $p = p_1 + p_2$, $\mathbf{Z}_1 \in \mathbb{R}^{n,p_1}$ ve $\mathbf{Z}_2 \in \mathbb{R}^{n,p_2}$ olmak üzere, $\mathbf{Z} = (\mathbf{Z}_1 : \mathbf{Z}_2) \in \mathbb{R}^{n,p}$ tam ranklı olması gerekmeyen bilinenler matrisi ve $\boldsymbol{\beta}_{(i)} = (\boldsymbol{\beta}'_{(i1)} : \boldsymbol{\beta}'_{(i2)})' \in \mathbb{R}^{p,1}$ 'dir. (4.1) ve (4.2) modelleri, $\boldsymbol{\varepsilon}_{(i)}$ hata vektörü olmak üzere,

$$\mathbf{y}_{(i)} = \mathbf{Z}\boldsymbol{\beta}_{(i)} + \boldsymbol{\varepsilon}_{(i)} = \mathbf{Z}_1\boldsymbol{\beta}_{(i1)} + \mathbf{Z}_2\boldsymbol{\beta}_{(i2)} + \boldsymbol{\varepsilon}_{(i)}$$

biçiminde de ifade edilebilir.

Sütunları $\mathbf{y}_{(i)}$ gözlenebilir rasgele vektörlerinden oluşan $\mathbf{Y}$ matrisi ve bu matrise karşılık gelecek şekilde oluşturulan $\mathbf{B} = (\boldsymbol{\beta}_{(1)} : \boldsymbol{\beta}_{(2)} : \ldots : \boldsymbol{\beta}_{(m)})$ bilinmeyen parametreler matrisi için, klasik lineer regresyon modellerin yapısına uygun,

$$\{\mathbf{Y}, \mathbf{ZB}, \boldsymbol{\Sigma} \otimes \mathbf{I}\} \tag{4.3}$$

biçimindeki çok değişkenli katlı lineer modeli yazılabilir. Benzer şekilde, (4.3) modeli $\mathbf{B}_1 = (\boldsymbol{\beta}_{(11)} : \boldsymbol{\beta}_{(21)} : \ldots : \boldsymbol{\beta}_{(m1)})$ ve $\mathbf{B}_2 = (\boldsymbol{\beta}_{(12)} : \boldsymbol{\beta}_{(22)} : \ldots : \boldsymbol{\beta}_{(m2)})$ olmak üzere, çok değişkenli katlı parçalanmış lineer model olarak,

$$\{\mathbf{Y}, \mathbf{Z}_1\mathbf{B}_1 + \mathbf{Z}_2\mathbf{B}_2, \boldsymbol{\Sigma} \otimes \mathbf{I}\} \tag{4.4}$$

şeklinde ifade edilebilir. (4.3) ve (4.4) modelleri için $E(\mathbf{Y}) = \mathbf{ZB}$ ve $D(\mathbf{Y}) = \boldsymbol{\Sigma} \otimes \mathbf{I}$ olur. Burada $\boldsymbol{\Sigma}$ köşegen elemanları σ_i^2 olan bir köşegen matristir. $\mathbf{E}$ hata matrisi $\mathbf{E} = (\boldsymbol{\varepsilon}_{(1)} : \boldsymbol{\varepsilon}_{(2)} : \ldots : \boldsymbol{\varepsilon}_{(m)})$ olmak üzere, (4.3) ve (4.4) modelleri

$$\mathbf{Y} = \mathbf{ZB} + \mathbf{E} = \mathbf{Z}_1\mathbf{B}_1 + \mathbf{Z}_2\mathbf{B}_2 + \mathbf{E}$$

biçiminde de ifade edilebilir.

Bir $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m,n}$ matrisinin j. sütunu $\mathbf{a}_j$, $j = 1, 2, \ldots, n$, olmak üzere, $vec\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{mn,1}$ vektörü,

$$vec\mathbf{A} = (\mathbf{a}_1', \mathbf{a}_2', \ldots, \mathbf{a}_n')'$$

olarak tanımlanır. Kısalık olsun diye, çalışma boyunca $vec\mathbf{A}$ gösterimi yerine $\mathbf{A}^s$ gösterimi kullanılacaktır.

$\mathbf{X} = \mathbf{I} \otimes \mathbf{Z}$, $\mathbf{X}_1 = \mathbf{I} \otimes \mathbf{Z}_1$ ve $\mathbf{X}_2 = \mathbf{I} \otimes \mathbf{Z}_2$ olmak üzere, (4.3) ve (4.4) modelleri sırasıyla

$$\{\mathbf{Y}^s, \mathbf{XB}^s, \mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{I}\} \tag{4.5}$$

ve

$$\{\mathbf{Y}^s, \mathbf{X}_1\mathbf{B}_1^s + \mathbf{X}_2\mathbf{B}_2^s, \mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{I}\} \tag{4.6}$$

şeklinde yazılabilir. (4.5) ve (4.6) modelleri

$$\mathbf{Y}^s = \mathbf{XB}^s + \mathbf{E}^s = \mathbf{X}_1\mathbf{B}_1^s + \mathbf{X}_2\mathbf{B}_2^s + \mathbf{E}^s$$

biçiminde de ifade edilebilir. Burada

$$\mathbf{X} \neq (\mathbf{X}_1 : \mathbf{X}_2) \text{ ve } \mathbf{B}^s = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \end{pmatrix}^s \neq \begin{pmatrix} \mathbf{B}_1^s \\ \mathbf{B}_2^s \end{pmatrix}$$

olduğuna dikkat edilmelidir. $\mathbf{Q}$ matrisi uygun bir permütasyon matris, yani satırları farklı şekilde düzenlenmiş olan birim matris olmak üzere, $\mathbf{B}^s$, $\mathbf{Q}$ ile soldan ve $\mathbf{X}$, $\mathbf{Q}'$ ile sağdan çarpılarak, $\mathbf{B}^s$ vektörünün satırları ve $\mathbf{X}$ matrisinin sütunları tekrar düzenlenebilir. Yani,

$$\mathbf{B}_*^s = \mathbf{QB}^s = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_1^s \\ \mathbf{B}_2^s \end{pmatrix} \text{ ve } \mathbf{X}_* = \mathbf{XQ}' = (\mathbf{X}_1 : \mathbf{X}_2)$$

şeklinde ifade edilebilir. Buradan

$$\mathbf{X}_*\mathbf{B}_*^s = \mathbf{XQ}'\mathbf{QB}^s = (\mathbf{X}_1 : \mathbf{X}_2)\begin{pmatrix} \mathbf{B}_1^s \\ \mathbf{B}_2^s \end{pmatrix} = \mathbf{XB}^s$$

elde edilir. Böylece, (4.5) modelinin (4.6) modeline denk olduğu görülür.

Çalışma boyunca kullanılacak olan bazı gösterimleri eklemekte yarar vardır. $\mathbf{Z}^{\perp}$ matrisi, $\Re(\mathbf{Z}^{\perp}) = \mathcal{N}(\mathbf{Z}')$ koşulunu sağlayan bir matris olmak üzere, $\mathbf{P}_{\mathbf{Z}}$ matrisi $\Re(\mathbf{Z})$ üzerine ve $\mathbf{M}_{\mathbf{Z}} = \mathbf{I} - \mathbf{P}_{\mathbf{Z}}$ matrisi $\Re(\mathbf{Z}^{\perp})$ üzerine dik izdüşüm matrisleridir. Bu bölümde kullanılan gösterimler çerçevesinde, $\mathbf{P}_{\mathbf{X}} = \mathbf{I} \otimes \mathbf{P}_{\mathbf{Z}}$ ve $\mathbf{M}_{\mathbf{X}} = \mathbf{I} - \mathbf{P}_{\mathbf{X}} = \mathbf{I} \otimes \mathbf{M}_{\mathbf{Z}}$ olarak gösterilecektir. Özellikle, $\mathbf{P}_i = \mathbf{P}_{\mathbf{X}_i} = \mathbf{I} \otimes \mathbf{P}_{\mathbf{Z}_i}$, $\mathbf{M}_i = \mathbf{I} - \mathbf{P}_i = \mathbf{I} \otimes \mathbf{M}_{\mathbf{Z}_i}$, $i = 1, 2$, ve $\mathbf{P}_{\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2} = \mathbf{I} \otimes \mathbf{P}_{\mathbf{M}_1\mathbf{Z}_2}$ olmak üzere, $\mathbf{H}$ matrisi $\mathbf{I} - \mathbf{P}_{\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2}$ matrisini gösterecektir.

Üçüncü bölümde izlenen yola benzer şekilde, bu bölümde de (4.4) modelinde $\mathbf{B}_1$ kısıtlanacak parametre matrisi olarak göz önüne alınarak, $\mathbf{B}_2$ matrisinin tahmin edilebilir parametrik fonksiyonlar matrisinin tahmini ile ilgilenilecektir. Özellikle, çok değişkenli parçalanmış lineer modellerle ilgili üçüncü bölümde elde edilen sonuçların bazıları çok değişkenli katlı lineer modellere genişletilecektir.

Çok değişkenli lineer modeller için verilen tahmin edilebilirlik koşulu, (4.5) ve (4.6) modelleri ele alındığında çok değişkenli katlı lineer modeller için de benzer şekilde ifade edilebilir. Yani, $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{mk,mp}$ olmak üzere, $\mathbf{KB}^s$ parametrik fonksiyonlar vektörünün (4.5) modeli altında tahmin edilebilir olmasının gerek ve yeter koşulu

$$\mathbf{K} = \mathbf{CX} \tag{4.7}$$

olacak şekilde bir $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{mk,mn}$ matrisinin var olmasıdır. Çünkü $\mathbf{K}_i \in \mathbb{R}^{k,p}$ olmak üzere, (4.2) modelleri altında $\mathbf{K}_i\boldsymbol{\beta}_{(i)}$ parametrik fonksiyonlar vektörünün tahmin edilebilir olmasının gerek ve yeter koşulu $\mathbf{K}_i = \mathbf{C}_i\mathbf{Z}$ olacak şekilde bir $\mathbf{C}_i \in \mathbb{R}^{k,n}$ matrisinin var olmasıdır. $\mathbf{K} = \mathbf{K}_1 \oplus \mathbf{K}_2 \oplus \ldots \oplus \mathbf{K}_m$ ve $\mathbf{C} = \mathbf{C}_1 \oplus \mathbf{C}_2 \oplus \ldots \oplus \mathbf{C}_m$ seçildiğinde, çok değişkenli katlı modeller için (4.7) ile verilen $\mathbf{K} = \mathbf{CX}$ şeklindeki tahmin edilebilirlik koşulu elde edilir.

Aşağıdaki önermede, $\mathbf{K}_2\mathbf{B}_2^s$ parametrik fonksiyonlar vektörü ile ilgili tahmin edilebilirlik koşulu verilmektedir. Bu önerme, Önerme 3.2.1'in genelleştirilmesi olarak düşünülebilir.

Önerme 4.2.1. (4.6) modeli altında $\mathbf{K}_2 \in \mathbb{R}^{mk,mp_2}$ olmak üzere, $\mathbf{K}_2\mathbf{B}_2^s$ parametrik fonksiyonlar vektörünün tahmin edilebilir olmasının gerek ve yeter koşulu

$$\mathbf{K}_2 = \mathbf{C}_1\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2 \tag{4.8}$$

olacak şekilde bir $\mathbf{C}_1 \in \mathbb{R}^{mk,mn}$ matrisinin var olmasıdır.

İspat. Her şeyden önce $\mathbf{K}_2\mathbf{B}_2^s$ vektörünün (4.6) modeli altında tahmin edilebilir olmasının gerek ve yeter koşulu uygun bir $\mathbf{C}$ matrisi için

$$(\mathbf{0} : \mathbf{K}_2) = \mathbf{C}(\mathbf{X}_1 : \mathbf{X}_2) \tag{4.9}$$

olmasıdır. Eğer (4.8) ifadesi sağlanıyorsa, yani $\mathbf{K}_2 = \mathbf{C}_1\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2$ ise, $\mathbf{C} = \mathbf{C}_1\mathbf{M}_1$ matrisi, (4.9) denklemini sağlar. Yani,

$$\mathbf{C}_1\mathbf{M}_1(\mathbf{X}_1 : \mathbf{X}_2) = (\mathbf{C}_1\mathbf{M}_1\mathbf{X}_1 : \mathbf{C}_1\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2) = (\mathbf{0} : \mathbf{C}_1\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2)$$

olur. Tersine $\mathbf{K}_2\mathbf{B}_2^s$ vektörü (4.6) modeli altında tahmin edilebilir olsun. Bu durumda (4.9) sağlanır. Buradan $\mathbf{C}\mathbf{X}_1 = \mathbf{0}$ olur. Bu ifade bir $\mathbf{C}_1$ matrisi için, $\mathbf{C} = \mathbf{C}_1\mathbf{M}_1$ olduğunu vurgular. Böylece $\mathbf{K}_2 = \mathbf{C}_1\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2$ bulunur. ■

Artık (4.8) ifadesine göre, $\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\mathbf{B}_2^s$ parametrik fonksiyonlar matrisinin tahmin edilmesi durumu ele alınabilir. Dolayısıyla, (3.7) ve (3.8) modellerine benzer şekilde, (4.1) veya denk olarak (4.2) modelleri ile uyumlu olan

$$\{\mathbf{M}_{\mathbf{Z}_1}\mathbf{y}_{(i)}, \mathbf{M}_{\mathbf{Z}_1}\mathbf{Z}_2\boldsymbol{\beta}_{(i2)}, \sigma_i^2\mathbf{M}_{\mathbf{Z}_1}\mathbf{I}\mathbf{M}_{\mathbf{Z}_1}\}, i = 1, 2, \ldots, m \tag{4.10}$$

ve

$$\{\mathbf{y}_{(i)}, \mathbf{M}_{\mathbf{Z}_1}\mathbf{Z}_2\boldsymbol{\beta}_{(i2)}, \sigma_i^2\mathbf{I}\}, i = 1, 2, \ldots, m \tag{4.11}$$

şeklindeki m tane çok değişkenli düzgün indirgenmiş ve indirgenmiş lineer modeller kümeleri ele alınabilir. Bu modeller $\mathbf{M}_{\mathbf{Z}_1}\mathbf{Z}_2\boldsymbol{\beta}_{(i2)}$ parametrik fonksiyonlar vektörünün tahmini için ihtiyaç duyulan bilgileri içerir. Katlı durum için, (4.10) ve (4.11) modellerine karşılık gelecek şekilde, (4.5) veya denk olarak (4.6) modelleriyle uyumlu olan çok değişkenli katlı düzgün indirgenmiş ve indirgenmiş lineer modeller sırasıyla

$$\{\mathbf{M}_1\mathbf{Y}^s, \mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\mathbf{B}_2^s, \mathbf{M}_1(\boldsymbol{\Sigma} \otimes \mathbf{I})\mathbf{M}_1\} \tag{4.12}$$

ve

$$\{\mathbf{Y}^s, \mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\mathbf{B}_2^s, \boldsymbol{\Sigma} \otimes \mathbf{I}\} \tag{4.13}$$

şeklinde yazılabilir.

Çalışma boyunca doğal olarak (4.6) modelinin tutarlı, yani “1 olasılıkla”

$$\mathbf{Y}^{s} \in \Re(\mathbf{X} : \mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{I}) \tag{4.14}$$

ve (4.13) modeli ele alındığında, “1 olasılıkla”

$$\mathbf{Y}^{s} \in \Re(\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2 : \mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{I}) \tag{4.15}$$

olduğu kabul edilmektedir. (4.6) ve (4.13) modelleri için $\mathbf{Y}^{s}$ vektörünün gerçeklendiği alt uzayın her iki model altında hemen hemen kesin olarak aynı, yani

$$\Re(\mathbf{X}_1 : \mathbf{X}_2 : \mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{I}) = \Re(\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2 : \mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{I}) \tag{4.16}$$

olduğu kabul edilir. Bu durumda (4.13) modeli, (4.6) modeli ile çelişmez. Eğer (4.6) modeli yalnızca zayıf singüler, yani

$$\Re(\mathbf{X}_1 : \mathbf{X}_2) \subseteq \Re(\mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{I}) \tag{4.17}$$

ise, bu durumda (4.13) modeli, (4.6) modeli ile hiçbir zaman çelişmeyecektir.

Şimdi (4.16) koşulu ile ilişkili bazı özelliklerin toplandığı ve Önerme 3.3.1'in genel bir durumu olarak dikkate alınabilecek olan aşağıdaki önerme verilebilir.

Önerme 4.2.2. $\mathbf{X}_1$, $\mathbf{X}_2$ ve $\mathbf{H}$ daha önceden tanımlandığı gibi olsun.

(i) Aşağıdaki üç koşul denktir:

(a1) $\Re(\mathbf{X}_1 : \mathbf{X}_2 : \mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{I}) = \Re(\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2 : \mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{I})$,

(a2) $\Re(\mathbf{X}_1) \subseteq \Re(\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2 : \mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{I})$,

(a3) $r(\mathbf{X}_1) + boy[\Re(\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2) \cap \Re(\mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{I})] = boy[\Re(\mathbf{X}_1 : \mathbf{X}_2) \cap \Re(\mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{I})]$.

(ii) (a1) koşulu ilk üçü denk olmak üzere, aşağıdaki dört koşulu gösterir:

(b1) $\Re(\mathbf{X}_1) = \Re(\mathbf{P}_1(\mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{I}))$,

(b2) $r(\mathbf{X}_1) = r((\mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{I})\mathbf{X}_1)$,

(b3) $\Re(\mathbf{X}_1) \cap \Re((\mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{I})^{\perp}) = \{\mathbf{0}\}$,

(b4) $\Re(\mathbf{X}_1) \subseteq \Re(\mathbf{H}(\mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{I}))$.

(iii) Aşağıdaki iki koşul denktir:

(c1) $\Re(\mathbf{X}_1) \subseteq \Re(\mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{I})$,

(c2) $\Re(\mathbf{X}_1) \oplus [\Re(\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2) \cap \Re(\mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{I})] = \Re(\mathbf{X}_1 : \mathbf{X}_2) \cap \Re(\mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{I})$.

(iv) Ayrıca aşağıdakiler doğrudur:

(d1) (c1) koşulu (a1) koşulunu vurgular,
(d2) (a1) koşulu her zaman (c1) koşulunu vurgulamaz.

İspat. (i): (a1) koşulunun sağlandığı, yani $\Re(\mathbf{X}_1 : \mathbf{X}_2 : \mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{I}) = \Re(\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2 : \mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{I})$ olduğu kabul edilsin. Bu durumda [21] çalışmasına göre

$$\Re(\mathbf{X}_1 : \mathbf{X}_2 : \mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{I}) = \Re(\mathbf{X}_1 : \mathbf{X}_2) + \Re(\mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{I}) = \Re(\mathbf{X}_1) + \Re(\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2) + \Re(\mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{I}) \quad (4.18)$$

olduğundan, $\Re(\mathbf{X}_1) \subseteq \Re(\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2 : \mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{I})$ olduğu görülür. Böylece, (a1) koşulunun (a2) koşuluna denk olduğu gösterilmiş olur.

$\Re(\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2 : \mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{I}) \subseteq \Re(\mathbf{X}_1 : \mathbf{X}_2 : \mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{I})$ her zaman gerçeklendiğinden, (a1) koşulu,

$$r(\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2 : \mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{I}) = r(\mathbf{X}_1 : \mathbf{X}_2 : \mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{I}) \quad (4.19)$$

ifadesine denktir.

$$r(\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2 : \mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{I}) = r(\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2) + r(\mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{I}) - boy[\Re(\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2) \cap \Re(\mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{I})],$$

$$r(\mathbf{X}_1 : \mathbf{X}_2 : \mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{I}) = r(\mathbf{X}_1 : \mathbf{X}_2) + r(\mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{I}) - boy[\Re(\mathbf{X}_1 : \mathbf{X}_2) \cap \Re(\mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{I})]$$

ve

$$r(\mathbf{X}_1 : \mathbf{X}_2) = r(\mathbf{X}_1) + r(\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2)$$

olduğundan,

$$\begin{aligned} r(\mathbf{X}_1 : \mathbf{X}_2 : \mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{I}) &= r(\mathbf{X}_1) + r(\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2) + r(\mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{I}) - boy[\Re(\mathbf{X}_1 : \mathbf{X}_2) \cap \Re(\mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{I})] \\ &= r(\mathbf{X}_1) + r(\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2 : \mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{I}) + boy[\Re(\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2) \cap \Re(\mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{I})] \\ &\quad - boy[\Re(\mathbf{X}_1 : \mathbf{X}_2) \cap \Re(\mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{I})] \end{aligned}$$

elde edilir. (4.19) eşitliği bu ifadede kullanıldığında,

$$r(\mathbf{X}_1) + boy[\Re(\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2) \cap \Re(\mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{I})] = boy[\Re(\mathbf{X}_1 : \mathbf{X}_2) \cap \Re(\mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{I})]$$

bulunur, yani (a1) koşulunun (a3) koşuluna denk olduğu görülür. (i) koşulunun ispatı tamamlanır.

(ii): (a1) koşulu (a2) koşuluna denk olduğundan, (a2) koşulunun sağlandığı, yani $\Re(\mathbf{X}_1) \subseteq \Re(\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2 : \mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{I})$ olduğu kabul edilsin. Buradan

$$\mathbf{X}_1 = \mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\mathbf{A} + (\mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{I})\mathbf{C} \tag{4.20}$$

olacak şekilde uygun $\mathbf{A}$ ve $\mathbf{C}$ matrisleri vardır. $\mathbf{P}_1$ matrisi ile (4.20) denklemi soldan çarpıldığında,

$$\mathbf{P}_1\mathbf{X}_1 = \mathbf{P}_1\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\mathbf{A} + \mathbf{P}_1(\mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{I})\mathbf{C} = \mathbf{P}_1(\mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{I})\mathbf{C}$$

elde edilir. Buradan $\mathbf{X}_1 = \mathbf{P}_1(\mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{I})\mathbf{C}$ olduğu görülür. Yani,

$$\Re(\mathbf{X}_1) \subseteq \Re(\mathbf{P}_1(\mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{I})) \tag{4.21}$$

bulunur. Herhangi bir $\mathbf{C}$ matrisi için $\mathbf{P}_1(\mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{I}) = \mathbf{X}_1\mathbf{C}$ olduğundan, $\Re(\mathbf{P}_1(\mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{I})) \subseteq \Re(\mathbf{X}_1)$ olur. Böylece $\Re(\mathbf{X}_1) = \Re(\mathbf{P}_1(\mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{I}))$ elde edilir ve (a1) koşulunun (b1) koşulunu vurguladığı görülür.

$\Re(\mathbf{P}_1(\mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{I})) \subseteq \Re(\mathbf{X}_1)$ olduğundan, (4.21) ifadesi,

$$r(\mathbf{X}_1) = r(\mathbf{P}_1(\mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{I})) = r(\mathbf{X}_1'(\mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{I})) = r((\mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{I})\mathbf{X}_1) \tag{4.22}$$

ifadesine denktir. Buradan (b2) koşulu gösterilmiş olur.

$$r(\mathbf{X}_1) = r(\mathbf{X}_1'(\mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{I})) = r(\mathbf{X}_1) - boy[\Re(\mathbf{X}_1) \cap \Re((\mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{I})^{\perp})]$$

olduğundan, (4.22) koşulunun sağlanması için gerek ve yeter koşulun $\Re(\mathbf{X}_1) \cap \Re((\mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{I})^{\perp}) = \{\mathbf{0}\}$ olduğu görülür [21]. Böylece (b3) koşulu sağlanır.

(b4) koşulunu göstermek için (4.20) denklemi soldan $\mathbf{H} = \mathbf{I} - \mathbf{P}_{\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2}$ ile çarpıldığında,

$$(\mathbf{I} - \mathbf{P}_{\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2})\mathbf{X}_1 = (\mathbf{I} - \mathbf{P}_{\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2})\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\mathbf{A} + (\mathbf{I} - \mathbf{P}_{\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2})(\mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{I})\mathbf{C}$$

elde edilir ve buradan

$$\mathbf{X}_1 - \mathbf{P}_{\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2}\mathbf{X}_1 = \mathbf{H}\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\mathbf{A} + \mathbf{H}(\mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{I})\mathbf{C}$$

bulunur. $\mathbf{P}_{\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2} = \mathbf{P}_{\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2}\mathbf{M}_1$ olduğundan,

$$\mathbf{X}_1 = \mathbf{H}(\mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{I})\mathbf{C}$$

elde edilir. Buradan $\Re(\mathbf{X}_1) \subseteq \Re(\mathbf{H}(\boldsymbol{\Sigma} \otimes \mathbf{I}))$ olduğu görülür. Böylece, (ii) koşulunun ispatı tamamlanır.

(iii): (c1) koşulunun sağlandığı kabul edilsin. Bu koşulun (a1) koşulunu ve dolayısıyla (a3) koşulunu vurguladığı açıktır. Çünkü $\Re(\mathbf{X}_1) \subseteq \Re(\boldsymbol{\Sigma} \otimes \mathbf{I})$ ise,

$$\Re(\mathbf{X}_1 : \mathbf{X}_2 : \boldsymbol{\Sigma} \otimes \mathbf{I}) = \Re(\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2) + \Re(\boldsymbol{\Sigma} \otimes \mathbf{I}) = \Re(\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2 : \boldsymbol{\Sigma} \otimes \mathbf{I})$$

olur. Ayrıca, $\Re(\mathbf{X}_1) \subseteq \Re(\boldsymbol{\Sigma} \otimes \mathbf{I})$ ifadesi ile $\Re(\mathbf{X}_1) = \Re(\mathbf{X}_1) \cap \Re(\boldsymbol{\Sigma} \otimes \mathbf{I})$ eşitliği denk olduğundan ve

$$[\Re(\mathbf{X}_1) \cap \Re(\boldsymbol{\Sigma} \otimes \mathbf{I})] \oplus [\Re(\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2) \cap \Re(\boldsymbol{\Sigma} \otimes \mathbf{I})] \subseteq [\Re(\mathbf{X}_1 : \mathbf{X}_2) \cap \Re(\boldsymbol{\Sigma} \otimes \mathbf{I})] \tag{4.23}$$

her zaman gerçeklendiğinden,

$$\Re(\mathbf{X}_1) \oplus [\Re(\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2) \cap \Re(\boldsymbol{\Sigma} \otimes \mathbf{I})] = \Re(\mathbf{X}_1 : \mathbf{X}_2) \cap \Re(\boldsymbol{\Sigma} \otimes \mathbf{I})$$

elde edilir. Yani, (a3) koşulu, (c2) koşuluna denktir. Buradan, (c1) koşulunun (c2) koşulunu vurguladığı görülür.

Tersine olarak (c2) koşulu sağlansın.

$$\Re(\mathbf{X}_1) \subseteq [\Re(\mathbf{X}_1 : \mathbf{X}_2) \cap \Re(\boldsymbol{\Sigma} \otimes \mathbf{I})] \subseteq \Re(\boldsymbol{\Sigma} \otimes \mathbf{I})$$

elde edilir. Yani, (c1) sağlanır. Böylece (iii) gösterilmiş olur.

(iv): (iii) koşulunun ispatından (c1) koşulunun, (a1) koşulunu vurguladığı görülmektedir. Yani (d1) koşulu sağlanır. (d2) koşulu için (3.13) ile verilen matrisler katlı durum için ele alındığında, (a1) koşulunun sağlandığı, fakat $\Re(\mathbf{X}_1) \not\subset \Re(\boldsymbol{\Sigma} \otimes \mathbf{I})$ olduğu görülür, yani (d2) koşulu gösterilmiş olur. Böylece ispat biter. ■

4.3. Çok Değişkenli Katlı Lineer Model Altında BLUE

Bu kısımda, çok değişkenli katlı lineer model için Kısım 3.4'te elde edilen sonuçlara benzer sonuçlar, detaylı olarak ele alınmaktadır. Üçüncü bölümde ifade edildiği gibi (3.1) modelleri altında $\mathbf{C}_i\mathbf{Z}\boldsymbol{\beta}_{(i)}$ tahmin edilebilir parametrik fonksiyonlar vektörlerinin BLUE değerleri, $\mathbf{F}_i\mathbf{y}_{(i)}$ olarak verilir. Burada $\mathbf{F}_i \in \mathbb{R}^{k,n}$ matrisi, $\mathbf{F}_i(\mathbf{Z}:\mathbf{Z}^{\perp}) = \mathbf{C}_i(\mathbf{Z}:\mathbf{0})$ denkleminin herhangi bir çözümüdür. Bu durum, çok değişkenli katlı lineer modeller için ele alındığında, $\mathbf{CXB}^s$ parametrik fonksiyonlar vektörü için BLUE, $\mathbf{FY}^s$ olarak verilir. Benzer şekilde $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^{mk,mn}$ matrisi,

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}:(\boldsymbol{\Sigma}\otimes\mathbf{I})\mathbf{X}^{\perp}) = \mathbf{C}(\mathbf{X}:\mathbf{0}) \tag{4.24}$$

denkleminin herhangi bir çözümüdür. Burada $\mathbf{F}$ ve $\mathbf{C}$ matrislerinin $\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 \oplus \mathbf{F}_2 \oplus \ldots \oplus \mathbf{F}_m$ ve $\mathbf{C} = \mathbf{C}_1 \oplus \mathbf{C}_2 \oplus \ldots \oplus \mathbf{C}_m$ biçiminde olduğuna dikkat edilmelidir. (4.24) denklemi,

$$\mathbf{FX} = \mathbf{CX} \text{ ve } \mathbf{F}(\boldsymbol{\Sigma}\otimes\mathbf{I})\mathbf{M}_{\mathbf{X}} = \mathbf{0} \tag{4.25}$$

olarak yazılabilir. $\mathbf{CXX}^{-}\mathbf{X} = \mathbf{CX}$ olduğu da dikkate alındığında, (4.25) denklemlerinin tutarlı olduğu kolaylıkla görülür. Bu denklemlerin çözümleri $\mathbf{H}_1$ ve $\mathbf{H}_2$ uygun boyutlu herhangi matrisler olmak üzere,

$$\mathbf{F} = \mathbf{CXX}^{-} + \mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_1\mathbf{XX}^{-} \tag{4.26}$$

ve

$$\mathbf{F} = \mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_2((\boldsymbol{\Sigma}\otimes\mathbf{I})\mathbf{M}_{\mathbf{X}})^{-}((\boldsymbol{\Sigma}\otimes\mathbf{I})\mathbf{M}_{\mathbf{X}}) \tag{4.27}$$

şeklindedir. (4.27) çözümü, $\mathbf{H}_2 = \mathbf{C}$ seçimi ile (4.25) denklemlerinin birincisini sağlar. Yani,

$$\mathbf{H}_2\mathbf{X} - \mathbf{H}_2((\boldsymbol{\Sigma}\otimes\mathbf{I})\mathbf{M}_{\mathbf{X}})^{-}((\boldsymbol{\Sigma}\otimes\mathbf{I})\mathbf{M}_{\mathbf{X}})\mathbf{X} - \mathbf{C}\mathbf{X} = \mathbf{0}$$

olur. Böylece, genel durum göz önüne alındığında, (4.24) denklemi için en az bir çözüm bulunabilir. Benzer şekilde, eğer $\mathbf{GY}^s$, $\mathbf{XB}^s$ için BLUE, yani $\mathbf{G}\in\mathbb{R}^{mn,mn}$ matrisi $\mathbf{G}(\mathbf{X}:(\boldsymbol{\Sigma}\otimes\mathbf{I})\mathbf{X}^{\perp}) = (\mathbf{X}:\mathbf{0})$ denkleminin herhangi bir çözümü ise, bu durumda $\mathbf{CG}$ matrisi de, $\mathbf{F}(\mathbf{X}:(\boldsymbol{\Sigma}\otimes\mathbf{I})\mathbf{X}^{\perp}) = \mathbf{C}(\mathbf{X}:\mathbf{0})$ denkleminin bir çözümüdür. Böylece $\mathbf{CGY}^s$ vektörünün, $\mathbf{CXB}^s$ için BLUE olduğu sonucuna varılabilir.

Aşağıdaki iki önerme sırasıyla (4.6) ve (4.13) modelleri altında $\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\mathbf{B}_2^s$ parametrik fonksiyonlar vektörünün BLUE değerlerinin karakterizasyonunu ortaya koymaktadır. (4.6) ve (4.13) modellerinin çelişmediği kabul edildiğinden, $\mathbf{F}_1 \neq \mathbf{F}_2$ olası durumunda, (4.13) modeli altında $\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\mathbf{B}_2^s$ vektörünün BLUE değerinin herhangi iki $\mathbf{F}_1\mathbf{Y}^s$ ve $\mathbf{F}_2\mathbf{Y}^s$ gösterimi için $\mathbf{F}_1\mathbf{Y}^s = \mathbf{F}_2\mathbf{Y}^s$ olduğu her zaman doğrudur. Bu durum (4.6) modelinin (4.13) modeli ile çelişmemesi koşulu ile (4.13) modeli altındaki $\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\mathbf{B}_2^s$ için BLUE değerinin farklı gösterimlerinin kümesinin, (4.6) modeli altında $\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\mathbf{B}_2^s$ için lineer tahmin edicilerin bir kümesi olarak ele alınması durumunda, tüm bu tahmin edicilerin (4.6) modeli altında hemen hemen kesin olarak çakıştığı anlamına geldiğini ifade eder. Bu, (4.13) modeli altındaki $\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\mathbf{B}_2^s$ için BLUE, (4.6) modeli altında BLUE olmasa bile doğrudur.

Önerme 4.3.1. $(\boldsymbol{\Sigma}\otimes\mathbf{I})_* = \mathbf{M}_1(\boldsymbol{\Sigma}\otimes\mathbf{I})\mathbf{M}_1$ olmak üzere aşağıdaki ifadeler denktir:

(i) $\mathbf{FY}^s$, (4.6) modeli altında $\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\mathbf{B}_2^s$ için BLUE olur.

(ii) $\mathbf{F}$ matrisi, aşağıda verilen denklemleri sağlar:

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}_1:\mathbf{X}_2) = (\mathbf{0}:\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2) \text{ ve } \mathbf{F}(\boldsymbol{\Sigma}\otimes\mathbf{I})\mathbf{M}_1\mathbf{H} = \mathbf{0}.$$

(iii) $\mathbf{N}$ matrisi $\mathbf{NM}_1\mathbf{X}_2 = \mathbf{M}_1\mathbf{X}_2$ ve $\mathbf{N}(\boldsymbol{\Sigma}\otimes\mathbf{I})_*\mathbf{H} = \mathbf{0}$ denklemlerini sağlayan bir matris olmak üzere, $\mathbf{F} = \mathbf{NM}_1$ biçimindedir.

(iv) $\mathbf{F}$ matrisi, en az bir $\mathbf{A}$ matrisi için aşağıdaki gibidir:

$$\mathbf{F} = [\mathbf{I} - (\mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{I})_* \mathbf{H}\left(\mathbf{H}(\mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{I})_* \mathbf{H}\right)^+ \mathbf{H}]\mathbf{M}_1 + \mathbf{A}[\mathbf{I} - \mathbf{H}(\mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{I})_* \mathbf{H}\left(\mathbf{H}(\mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{I})_* \mathbf{H}\right)^+]\mathbf{H}\mathbf{M}_1 .$$

İspat. Bir $\mathbf{FY}^s$ tahmin edicisinin, (4.6) parçalanmış modeli altında $\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\mathbf{B}_2^s$ için BLUE olmasının gerek ve yeter koşulu $\mathbf{F}(\mathbf{X} : (\mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{I})\mathbf{X}^{\perp}) = \mathbf{M}_1(\mathbf{X} : \mathbf{0})$ olmasıdır. Bu koşul $\mathbf{FX} = \mathbf{M}_1\mathbf{X}$ ve $\mathbf{F}(\mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{I})\mathbf{X}^{\perp} = \mathbf{0}$ biçiminde de yazılabilir. Buradan

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}_1 : \mathbf{X}_2) = (\mathbf{0} : \mathbf{M}_1\mathbf{X}_2) \text{ ve } \mathbf{F}(\mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{I})(\mathbf{X}_1 : \mathbf{X}_2)^{\perp} = \mathbf{0}$$

elde edilir. Burada $(\mathbf{X}_1 : \mathbf{X}_2)^{\perp}$ matrisi, $\Re((\mathbf{X}_1 : \mathbf{X}_2)^{\perp}) = \mathcal{N}((\mathbf{X}_1 : \mathbf{X}_2)')$ eşitliğini sağlayan herhangi bir matristir. Ayrıca

$$\mathbf{M}_1\mathbf{H} = \mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_1\mathbf{P}_{\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2} = \mathbf{M}_1 - \mathbf{P}_{\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2} + \mathbf{P}_{\mathbf{X}_1}\mathbf{P}_{\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2} = \mathbf{I} - \mathbf{P}_{\mathbf{X}_1} - \mathbf{P}_{\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2} = \mathbf{I} - \mathbf{P}_{\mathbf{X}} = \mathbf{M}_{\mathbf{X}}$$

olduğundan, $\mathbf{F}(\mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{I})\mathbf{M}_1\mathbf{H} = \mathbf{0}$ olur. Böylece (i) ve (ii) arasındaki denklik sağlanır.

(ii) ve (iii) koşulları arasındaki denkliği görmek için, (iii) koşulunun sağlandığı, yani $\mathbf{N}$ matrisi, $\mathbf{NM}_1\mathbf{X}_2 = \mathbf{M}_1\mathbf{X}_2$ ve $\mathbf{N}(\mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{I})_*\mathbf{H} = \mathbf{0}$ denklemlerini sağlayan bir matris olmak üzere, $\mathbf{F}$ matrisinin $\mathbf{F} = \mathbf{NM}_1$ biçiminde olduğu kabul edilsin. Buradan

$$\mathbf{NM}_1(\mathbf{X}_1 : \mathbf{X}_2) = (\mathbf{NM}_1\mathbf{X}_1 : \mathbf{NM}_1\mathbf{X}_2) = (\mathbf{0} : \mathbf{NM}_1\mathbf{X}_2) = (\mathbf{0} : \mathbf{M}_1\mathbf{X}_2)$$

ve

$$\mathbf{NM}_1(\mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{I})\mathbf{M}_1\mathbf{H} = \mathbf{N}(\mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{I})_*\mathbf{H} = \mathbf{0}$$

elde edilir. Yani (ii) sağlanır.

Tersine (ii) sağlansın. $\mathbf{FX}_1 = \mathbf{0}$ ifadesi, en az bir $\mathbf{N}$ matrisi için, $\mathbf{F} = \mathbf{NM}_1$ olduğunu vurgular ve (iii) görülür. Böylece (ii) ve (iii) arasındaki denklik sağlanır.

(iv) koşulunu görmek için (iii) koşulu kabul edilsin. $\mathbf{A}$ uygun boyutlu herhangi bir matris olmak üzere,

$$\mathbf{N} = [\mathbf{I} - (\boldsymbol{\Sigma} \otimes \mathbf{I})_* \mathbf{H}\left(\mathbf{H}(\boldsymbol{\Sigma} \otimes \mathbf{I})_* \mathbf{H}\right)^+ \mathbf{H}] + \mathbf{A}[\mathbf{I} - \mathbf{H}(\boldsymbol{\Sigma} \otimes \mathbf{I})_* \mathbf{H}\left(\mathbf{H}(\boldsymbol{\Sigma} \otimes \mathbf{I})_* \mathbf{H}\right)^+]\mathbf{H}$$

ifadesi $\mathbf{N}$ bilinmeyen matrisli $\mathbf{N}\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2 = \mathbf{M}_1\mathbf{X}_2$ ve $\mathbf{N}(\boldsymbol{\Sigma} \otimes \mathbf{I})_* \mathbf{H} = \mathbf{0}$ denklemlerinin bir çözümüdür [30, Teorem 1]. Böylece (iii) koşulundan en az bir $\mathbf{A}$ matrisi için $\mathbf{F}$ matrisinin

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \mathbf{N}\mathbf{M}_1 \\ &= [\mathbf{I} - (\boldsymbol{\Sigma} \otimes \mathbf{I})_* \mathbf{H}\left(\mathbf{H}(\boldsymbol{\Sigma} \otimes \mathbf{I})_* \mathbf{H}\right)^+ \mathbf{H}]\mathbf{M}_1 + \mathbf{A}[\mathbf{I} - \mathbf{H}(\boldsymbol{\Sigma} \otimes \mathbf{I})_* \mathbf{H}\left(\mathbf{H}(\boldsymbol{\Sigma} \otimes \mathbf{I})_* \mathbf{H}\right)^+]\mathbf{H}\mathbf{M}_1 \end{aligned}$$

şeklinde ifade edilebileceği görülür ve (iv) sağlanır.

Tersine olarak (iv) sağlanırsa, en az bir $\mathbf{C}$ matrisi için

$$\mathbf{F} = [\mathbf{I} - (\boldsymbol{\Sigma} \otimes \mathbf{I})_* \mathbf{H}\left(\mathbf{H}(\boldsymbol{\Sigma} \otimes \mathbf{I})_* \mathbf{H}\right)^+ \mathbf{H}]\mathbf{M}_1 + \mathbf{C}[\mathbf{I} - \mathbf{H}(\boldsymbol{\Sigma} \otimes \mathbf{I})_* \mathbf{H}\left(\mathbf{H}(\boldsymbol{\Sigma} \otimes \mathbf{I})_* \mathbf{H}\right)^+]\mathbf{H}\mathbf{M}_1$$

olduğundan, keyfi bir $\mathbf{A}$ matrisi için,

$$\mathbf{N} = [\mathbf{I} - (\boldsymbol{\Sigma} \otimes \mathbf{I})_* \mathbf{H}\left(\mathbf{H}(\boldsymbol{\Sigma} \otimes \mathbf{I})_* \mathbf{H}\right)^+ \mathbf{H}] + \mathbf{A}[\mathbf{I} - \mathbf{H}(\boldsymbol{\Sigma} \otimes \mathbf{I})_* \mathbf{H}\left(\mathbf{H}(\boldsymbol{\Sigma} \otimes \mathbf{I})_* \mathbf{H}\right)^+]\mathbf{H}$$

bulunur. Buradan (iii) koşullarının sağlandığı açıktır. Böylece (iii) ve (iv) koşullarının denk olduğu görülür. ■

Önerme 4.3.2. Aşağıdaki ifadeler denktir:

(i) $\mathbf{F}\mathbf{Y}^s$, (4.13) modeli altında $\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\mathbf{B}_2^s$ için BLUE olur.

(ii) $\mathbf{F}$ matrisi aşağıda verilen denklemleri sağlar:

$\mathbf{F M_1 X_2} = \mathbf{M_1 X_2}$ ve $\mathbf{F}(\mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{I})\mathbf{H} = \mathbf{0}$.

(iii) $\mathbf{F}$ matrisi, en az bir $\mathbf{A}$ matrisi için aşağıdaki gibidir:

$$\mathbf{F} = [\mathbf{I} - (\mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{I})\mathbf{H}\left(\mathbf{H}(\mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{I})\mathbf{H}\right)^{+}\mathbf{H}] + \mathbf{A}[\mathbf{I} - \mathbf{H}(\mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{I})\mathbf{H}\left(\mathbf{H}(\mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{I})\mathbf{H}\right)^{+}]\mathbf{H}.$$

İspat. Bir $\mathbf{F Y}^{s}$ tahmin edicisinin, (4.13) modeli altında $\mathbf{M_1 X_2 B_2^{s}}$ için BLUE olmasının gerek ve yeter koşulu

$$\mathbf{F}(\mathbf{M_1 X_2} : (\mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{I})(\mathbf{M_1 X_2})^{\perp}) = (\mathbf{M_1 X_2} : \mathbf{0})$$

olmasıdır. Buradan $\mathbf{F M_1 X_2} = \mathbf{M_1 X_2}$ ve $\mathbf{F}(\mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{I})(\mathbf{M_1 X_2})^{\perp} = \mathbf{0}$ olur. (i) ve (ii) arasındaki denklik, $\mathbf{H}$ matrisinin $\mathcal{N}(\mathbf{X}_2' \mathbf{M}_1)$ üzerindeki bir dik izdüşüm matrisi ve dolayısı ile $(\mathbf{M_1 X_2})^{\perp}$ için özel bir seçim olduğuna dikkat etmek suretiyle görülür.

(ii) ve (iii) arasındaki denkliği görmek için, (ii) koşulunun sağlandığı kabul edilsin. Uygun bir $\mathbf{A}$ matrisi için

$$\mathbf{F} = [\mathbf{I} - (\mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{I})\mathbf{H}\left(\mathbf{H}(\mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{I})\mathbf{H}\right)^{+}\mathbf{H}] + \mathbf{A}[\mathbf{I} - \mathbf{H}(\mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{I})\mathbf{H}\left(\mathbf{H}(\mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{I})\mathbf{H}\right)^{+}]\mathbf{H}$$

ifadesinin $\mathbf{F}$ matrisine göre $\mathbf{F M_1 X_2} = \mathbf{M_1 X_2}$ ve $\mathbf{F}\left(\mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{I}\right)\mathbf{H} = \mathbf{0}$ denklemlerinin bir çözümü olduğundan (iii) görülür [30, Teorem 1].

Tersine olarak (iii) sağlansın. Yani, böyle bir $\mathbf{F}$ matrisi var olsun. Bu durumda bu matrisin

$$\mathbf{F M_1 X_2} = \mathbf{M_1 X_2} \text{ ve } \mathbf{F}(\mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{I})\mathbf{H} = \mathbf{0}$$

denklemlerini sağlayacağı açıktır. Böylece (ii) ve (iii) arasındaki denklik görülür. ■

4.4. Çok Değişkenli Katlı Parçalanmış Lineer Model ve İlişkili Bazı İndirgenmiş Lineer Modeller Altında Tahmin

Bu kısımda, çok değişkenli katlı lineer model ve bu model ile ilişkili bazı indirgenmiş lineer modeller altında gözlenebilir rasgele değişkenler matrisinin BLUE değerlerinin çakışma durumları ile ilgili sonuçlar verilecektir.

Teorem 4.4.1. (4.6) modeli (4.13) modeli ile çelişmesin. Bu durumda (4.13) modeli altında $\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\mathbf{B}_2^s$ için her BLUE değerinin (4.6) modeli altında $\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\mathbf{B}_2^s$ için BLUE kalmasının gerek ve yeter koşulu

$$\Re(\mathbf{X}_1) \subseteq \Re((\mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{I})\mathbf{H}) \tag{4.28}$$

olmasıdır.

İspat. $\mathbf{F}\mathbf{Y}^s$ tahmin edicisinin, (4.13) modeli altında $\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\mathbf{B}_2^s$ için BLUE olduğu kabul edilsin. Bu durumda, $\mathbf{F}$ matrisi Önerme 4.3.2'nin koşullarını sağlar. Önerme 4.3.2 (ii) koşuluna göre $\mathbf{F}(\mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{I})\mathbf{H} = \mathbf{F}(\mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{I})(\mathbf{I} - \mathbf{P}_{\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2}) = \mathbf{0}$ olduğundan,

$$\mathbf{F}(\mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{I}) = \mathbf{F}(\mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{I})\mathbf{P}_{\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2} \tag{4.29}$$

bulunur. (4.29) sağdan $\mathbf{M}_1$ ile çarpılırsa, $\mathbf{P}_{\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2} = \mathbf{P}_{\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2}(\mathbf{I} - \mathbf{P}_{\mathbf{X}_1}) = \mathbf{P}_{\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2}\mathbf{M}_1$ olduğundan,

$$\mathbf{F}(\mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{I})\mathbf{M}_1 = \mathbf{F}(\mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{I})\mathbf{P}_{\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2}\mathbf{M}_1 = \mathbf{F}(\mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{I})\mathbf{P}_{\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2} = \mathbf{F}(\mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{I}) \tag{4.30}$$

elde edilir. (4.30) ifadesindeki $\mathbf{F}(\mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{I})\mathbf{M}_1 = \mathbf{F}(\mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{I})$ eşitliği sağdan $\mathbf{H}$ ile çarpılırsa,

$$\mathbf{F}(\mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{I})\mathbf{H} = \mathbf{F}(\mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{I})\mathbf{M}_1\mathbf{H} = \mathbf{0} \tag{4.31}$$

bulunur. Böylece, Önerme 4.3.1 (ii) koşuluna göre, bir $\mathbf{FY}^s$ tahmin edicisinin (4.6) modeli altında $\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\mathbf{B}_2^s$ için BLUE olmasının gerek ve yeter koşulunun

$$\mathbf{FX}_1 = \mathbf{0} \text{ ve } \mathbf{FX}_2 = \mathbf{M}_1\mathbf{X}_2 \tag{4.32}$$

olduğu görülür. $\mathbf{FX}_1 = \mathbf{0}$ olmasının gerek ve yeter koşulu $\mathbf{FM}_1 = \mathbf{F}$ olmasıdır. Dolayısı ile, $\mathbf{FX}_1 = \mathbf{0}$ eşitliği $\mathbf{FX}_2 = \mathbf{FM}_1\mathbf{X}_2 = \mathbf{M}_1\mathbf{X}_2$ ifadesini vurgular. Burada son eşitlik Önerme 4.3.2 (ii) koşulundan elde edilir. Bu gösterir ki, (4.13) modeli altında BLUE olan herhangi bir $\mathbf{FY}^s$ tahmin edicisinin, (4.6) modeli altında da BLUE olmasının gerek ve yeter koşulu

$$\mathbf{FX}_1 = \mathbf{0} \tag{4.33}$$

olmasıdır. Dolayısı ile, ispatın kalan kısmı için (4.28) koşulunun (4.33) koşuluna denk olduğunu göstermek yeterlidir. Şimdi (4.33) ifadesinin, Önerme 4.3.2 (iii) koşulunu sağlayan bir $\mathbf{F}$ matrisi için sağlandığı kabul edilsin. Bu durumda, en az bir $\mathbf{A}$ matrisi için,

$$\begin{aligned}\mathbf{FX}_1 &= [\mathbf{I} - (\boldsymbol{\Sigma}\otimes\mathbf{I})\mathbf{H}\left(\mathbf{H}(\boldsymbol{\Sigma}\otimes\mathbf{I})\mathbf{H}\right)^+\mathbf{H}]\mathbf{X}_1 + \mathbf{A}[\mathbf{I} - \mathbf{H}(\boldsymbol{\Sigma}\otimes\mathbf{I})\mathbf{H}\left(\mathbf{H}(\boldsymbol{\Sigma}\otimes\mathbf{I})\mathbf{H}\right)^+]\mathbf{HX}_1 \\ &= \mathbf{0}\end{aligned}$$

denkleminin özel bir çözümü

$$[\mathbf{I} - (\boldsymbol{\Sigma}\otimes\mathbf{I})\mathbf{H}\left(\mathbf{H}(\boldsymbol{\Sigma}\otimes\mathbf{I})\mathbf{H}\right)^+\mathbf{H}]\mathbf{X}_1 = \mathbf{0}$$

olarak seçilebilir. Bu ifade, $\mathbf{X}_1 \in \Re((\boldsymbol{\Sigma}\otimes\mathbf{I})\mathbf{H}\left(\mathbf{H}(\boldsymbol{\Sigma}\otimes\mathbf{I})\mathbf{H}\right)^+\mathbf{H})$, yani bir $\mathbf{C}$ matrisi için

$$\mathbf{X}_1 = (\boldsymbol{\Sigma}\otimes\mathbf{I})\mathbf{HC}$$

olduğunu gösterir. Buradan $\Re(\mathbf{X}_1) \subseteq \Re((\mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{I})\mathbf{H})$ elde edilir. Yani (4.28) sağlanır.

Tersine olarak eğer (4.28) sağlanırsa, bu durumda $\Re(\mathbf{H}\mathbf{X}_1) \subseteq \Re(\mathbf{H}(\mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{I})\mathbf{H})$, yani $\mathbf{H}\mathbf{X}_1 = \mathbf{H}(\mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{I})\mathbf{H}\mathbf{A}$ olacak şekilde en az bir $\mathbf{A}$ matrisi vardır. Burada $\mathbf{A} = \left(\mathbf{H}(\mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{I})\mathbf{H}\right)^{+} \mathbf{H}\mathbf{X}_1$ biçimindedir. Böylece

$$\mathbf{H}\mathbf{X}_1 = \left(\mathbf{H}(\mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{I})\mathbf{H}\right)\left(\mathbf{H}(\mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{I})\mathbf{H}\right)^{+} \mathbf{H}\mathbf{X}_1$$

yazılabilir. Önerme 4.3.2 (iii) koşulundan

$$\mathbf{F}\mathbf{X}_1 = [\mathbf{I} - (\mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{I})\mathbf{H}\left(\mathbf{H}(\mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{I})\mathbf{H}\right)^{+} \mathbf{H}]\mathbf{X}_1 \tag{4.34}$$

elde edilir. (4.28) koşuluna göre en az bir $\mathbf{A}$ matrisi için $\mathbf{X}_1 = (\mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{I})\mathbf{H}\mathbf{A}$ olduğundan (4.34), $\mathbf{F}\mathbf{X}_1 = [\mathbf{I} - (\mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{I})\mathbf{H}\left(\mathbf{H}(\mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{I})\mathbf{H}\right)^{+} \mathbf{H}](\mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{I})\mathbf{H}\mathbf{A}$ olarak yazılabilir. [21] çalışmasına göre $(\mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{I})\mathbf{H} = (\mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{I})\mathbf{H}\left(\mathbf{H}(\mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{I})\mathbf{H}\right)^{+}\left(\mathbf{H}(\mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{I})\mathbf{H}\right)$ olduğundan,

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}\mathbf{X}_1 &= [\mathbf{I} - (\mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{I})\mathbf{H}\left(\mathbf{H}(\mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{I})\mathbf{H}\right)^{+} \mathbf{H}](\mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{I})\mathbf{H}\mathbf{A} \\
&= (\mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{I})\mathbf{H}\mathbf{A} - (\mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{I})\mathbf{H}\left(\mathbf{H}(\mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{I})\mathbf{H}\right)^{+} \mathbf{H}(\mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{I})\mathbf{H}\mathbf{A} \\
&= \mathbf{0}
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece ispat biter. ■

Teorem 4.4.2. $r(\mathbf{X}_1 : \mathbf{X}_2) = r(\mathbf{X}_1) + r(\mathbf{X}_2)$ ve (4.6) modeli zayıf singüler olsun. Bu durumda, (4.13) modeli altında $\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\mathbf{B}_2^s$ için her BLUE değerinin (4.6) modeli altında $\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\mathbf{B}_2^s$ için BLUE kalmasının gerek ve yeter koşulu

$$\mathbf{X}_2'\mathbf{M}_1(\mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{I})^{+}\mathbf{X}_1 = \mathbf{0} \tag{4.35}$$

olmasıdır.

İspat. (4.35) sağlansın. Bu durumda en az bir $\mathbf{A}$ matrisi için

$$(\mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{I})^{+} \mathbf{X}_1 = \mathbf{HA} \tag{4.36}$$

olur. Buradaki eşitlik için, $\mathbf{H}$ matrisinin $(\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2)^{\perp}$ üzerine dik izdüşüm için özel bir seçim olduğuna dikkat edilmelidir. (4.36) ifadesi soldan $\mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{I}$ ile çarpıldığında,

$$(\mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{I})(\mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{I})^{+} \mathbf{X}_1 = (\mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{I})\mathbf{HA} \tag{4.37}$$

bulunur. (4.6) modelinin zayıf singüler olma koşuluna göre $\Re(\mathbf{X}_1) \subseteq \Re(\mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{I})$ yazılabilir. Buradan, herhangi bir $\mathbf{A}$ matrisi için $\mathbf{X}_1 = (\mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{I})\mathbf{A}$ olur. Bu denklemin tutarlı olması için $\mathbf{X}_1 = (\mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{I})(\mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{I})^{+}\mathbf{X}_1$ olmalıdır. Bu ifade (4.37) denkleminde yerine yazıldığında $\Re(\mathbf{X}_1) \subseteq \Re((\mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{I})\mathbf{H})$, yani (4.28) elde edilir. Böylece (4.13) modeli altında $\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\mathbf{B}_2^s$ için her BLUE değerinin, (4.6) modeli altında $\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\mathbf{B}_2^s$ için BLUE kaldığı görülür.

Tersine olarak (4.28) koşulu sağlansın. Bu durumda uygun bir $\mathbf{A}_1$ matrisi için $\mathbf{X}_1 = (\mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{I})\mathbf{HA}_1$ olarak yazılabilir. (4.6) modeli zayıf singüler olduğundan, $\Re(\mathbf{X}_1 : \mathbf{X}_2) = \Re(\mathbf{X}_1) + \Re(\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2) \subseteq \Re(\mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{I})$ olur ve buradan uygun bir $\mathbf{A}_2$ matrisi için $\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2 = (\mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{I})\mathbf{A}_2$ yazılabilir. Bu denklemin tutarlı olması için de, $\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2 = (\mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{I})(\mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{I})^{+}\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2$ olmalıdır. Böylece

$$\mathbf{X}_2'\mathbf{M}_1(\mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{I})^{+}\mathbf{X}_1 = \mathbf{X}_2'\mathbf{M}_1(\mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{I})^{+}(\mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{I})\mathbf{HA}_1 = \mathbf{X}_2'\mathbf{M}_1\mathbf{HA}_1 = \mathbf{0}$$

elde edilir ve ispat tamamlanır. ■

Sonuç 4.4.1. (4.6) modeli zayıf singüler olsun. Bu durumda (4.13) modeli altında $\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\mathbf{B}_2^s$ için her BLUE değerinin, (4.6) modeli altında $\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\mathbf{B}_2^s$ için BLUE kalmasının gerek ve yeter koşulu $\mathbf{\Sigma}\otimes\mathbf{I}$ matrisinin herhangi bir genelleştirilmiş tersi için

$$\mathbf{X}_2'\mathbf{M}_1(\mathbf{\Sigma}\otimes\mathbf{I})^-\mathbf{X}_1=\mathbf{0} \tag{4.38}$$

olmasıdır.

İspat. Öncelikle $(\mathbf{\Sigma}\otimes\mathbf{I})^-$ genelleştirilmiş tersin seçimine göre $\mathbf{X}_2'\mathbf{M}_1(\mathbf{\Sigma}\otimes\mathbf{I})^-\mathbf{X}_1$ ifadesinin değişmezliğinin,

$$\Re(\mathbf{X}_1)\subseteq\Re(\mathbf{\Sigma}\otimes\mathbf{I}) \text{ ve } \Re(\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2)\subseteq\Re(\mathbf{\Sigma}\otimes\mathbf{I}) \tag{4.39}$$

koşullarına denk olduğuna dikkat edilmelidir [31, sf. 43]. Burada $\mathbf{X}_1\neq\mathbf{0}$ ve $\mathbf{X}_2'\mathbf{M}_1\neq\mathbf{0}$ kabul edileceği açıktır. (4.39) koşulları, (4.18) koşulundan dolayı, $\Re(\mathbf{X}_1:\mathbf{X}_2)\subseteq\Re(\mathbf{\Sigma}\otimes\mathbf{I})$ ifadesine denktir. Bu ise, (4.6) modelinin zayıf singüler olduğu anlamına gelir. Eğer (4.38) sağlanıyorsa, en az bir $\mathbf{A}$ matrisi için

$$(\mathbf{\Sigma}\otimes\mathbf{I})^-\mathbf{X}_1=\mathbf{HA} \tag{4.40}$$

olacağı açıktır. Çünkü $\mathcal{N}(\mathbf{X}_2'\mathbf{M}_1)=\Re((\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2)^\perp)$ eşitliği, $(\mathbf{\Sigma}\otimes\mathbf{I})^-\mathbf{X}_1\in\Re((\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2)^\perp)$ ifadesini vurgular. Burada $\mathbf{H}$ matrisinin, $(\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2)^\perp$ üzerine dik izdüşüm için özel bir seçim olduğuna dikkat edilmelidir. (4.6) modelinin zayıf singüler olma koşulundan $\Re(\mathbf{X}_1)\subseteq\Re(\mathbf{\Sigma}\otimes\mathbf{I})$ yazılabilir. Bu koşul ise, $\mathbf{X}_1=(\mathbf{\Sigma}\otimes\mathbf{I})\mathbf{A}$ denkleminin sağlandığını ve dolayısıyla $\mathbf{X}_1=(\mathbf{\Sigma}\otimes\mathbf{I})(\mathbf{\Sigma}\otimes\mathbf{I})^-\mathbf{X}_1$ olması gerektiğini vurgular. Bu son eşitlik, (4.40) denkleminin soldan $\mathbf{\Sigma}\otimes\mathbf{I}$ ile çarpılmasıyla elde edilen $(\mathbf{\Sigma}\otimes\mathbf{I})(\mathbf{\Sigma}\otimes\mathbf{I})^-\mathbf{X}_1=(\mathbf{\Sigma}\otimes\mathbf{I})\mathbf{HG}$ ifadesinde yerine yazıldığında, $\mathbf{X}_1=(\mathbf{\Sigma}\otimes\mathbf{I})\mathbf{HG}$ bulunur. Böylece $\Re(\mathbf{X}_1)\subseteq\Re((\mathbf{\Sigma}\otimes\mathbf{I})\mathbf{H})$ olur, yani (4.28) koşulu elde edilir.

Tersine olarak (4.28) koşulu sağlansın. (4.6) modeli zayıf singüler, yani $\Re(\mathbf{X}_1:\mathbf{X}_2)=\Re(\mathbf{X}_1)+\Re(\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2)\subseteq\Re(\mathbf{\Sigma}\otimes\mathbf{I})$ olduğundan, uygun bir $\mathbf{A}_1$ matrisi için

$\mathbf{X}_1 = (\mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{I})\mathbf{H}\mathbf{A}_1$ ve uygun bir $\mathbf{A}_2$ matrisi için $\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2 = (\mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{I})\mathbf{A}_2$ olarak yazılabilir. Son denklem $\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2 = (\mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{I})(\mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{I})^{-}\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2$ olduğunu gösterir. Bu eşitlik $\mathbf{X}_2'\mathbf{M}_1 = \mathbf{X}_2'\mathbf{M}_1(\mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{I})^{-}(\mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{I})$ biçiminde de ifade edilebilir. Böylece $\mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{I}$ matrisinin herhangi bir genelleştirilmiş tersi için

$$\mathbf{X}_2'\mathbf{M}_1(\mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{I})^{-}\mathbf{X}_1 = \mathbf{X}_2'\mathbf{M}_1(\mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{I})^{-}(\mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{I})\mathbf{H}\mathbf{A}_1 = \mathbf{X}_2'\mathbf{M}_1\mathbf{H}\mathbf{A}_1 = \mathbf{0}$$

elde edilir ve ispat tamamlanır. ■

$\Re(\mathbf{X}_1) \not\subset \Re(\mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{I})$ olduğunda, (4.13) modeli altında $\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\mathbf{B}_2^s$ için BLUE değerinin, (4.6) modeli altında BLUE kalması her zaman beklenemez. Çünkü $\Re(\mathbf{X}_1) \not\subset \Re(\mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{I})$ ifadesi $\Re(\mathbf{X}_1 : \mathbf{X}_2 : \mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{I}) \neq \Re(\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2 : \mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{I})$ olduğunu gösterir. Öte yandan $\mathbf{P}_{\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2} = \mathbf{P}_{\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2}\mathbf{M}_1$ eşitliğinden $\mathbf{H} = \mathbf{I} - \mathbf{P}_{\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2} = \mathbf{I} - \mathbf{P}_{\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2}\mathbf{M}_1$ olarak yazılabilir ve buradan

$$\mathbf{H}\mathbf{X}_1 = \mathbf{X}_1 - \mathbf{P}_{\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2}\mathbf{M}_1\mathbf{X}_1 = \mathbf{X}_1$$

elde edilir. Bu ifadeden elde edilen $\mathbf{X}_1 = \mathbf{H}\mathbf{X}_1$ eşitliği dikkate alındığında, $\Re(\mathbf{X}_1) = \Re((\mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{I})\mathbf{X}_1)$ olduğunda (4.28) koşulunun daima sağlandığı görülür. (4.6) modeli (4.13) modeli ile çelişmediği zaman aşağıdaki sonucun ispatında gösterildiği gibi $\Re(\mathbf{X}_1) = \Re((\mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{I})\mathbf{X}_1)$ koşulu, $\Re((\mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{I})\mathbf{X}_1) \subseteq \Re(\mathbf{X}_1)$ koşuluna denktir.

Sonuç 4.4.2. (4.6) modeli, (4.13) modeli ile çelişmesin. Bu durumda

$$\Re((\mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{I})\mathbf{X}_1) \subseteq \Re(\mathbf{X}_1) \tag{4.41}$$

ise, (4.13) modeli altında $\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\mathbf{B}_2^s$ için her BLUE, (4.6) modeli altında $\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\mathbf{B}_2^s$ için BLUE kalır.

İspat. Eğer (4.6) modeli (4.13) modeli ile çelişmiyorsa, Önerme 4.2.2 (b2) koşulu,

$r(\mathbf{X}_1) = r((\mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{I})\mathbf{X}_1)$ ifadesini vurgular. Bu durumda (4.41) ifadesi, $\Re(\mathbf{X}_1) = \Re((\mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{I})\mathbf{X}_1)$ eşitliğine denktir. Önerme 4.2.2 (b4) koşuluna göre $\Re(\mathbf{X}_1) \subseteq \Re(\mathbf{H}(\mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{I})) = \Re((\mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{I})\mathbf{H})$ olduğundan,

$$\Re(\mathbf{X}_1) = \Re((\mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{I})\mathbf{X}_1) = \Re((\mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{I})\mathbf{H}\mathbf{X}_1) \subseteq \Re((\mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{I})\mathbf{H})$$

elde edilir. Bu ifade (4.28) koşulunun, (4.41) ifadesinin doğru olduğu varsayımı altında sağlandığını gösterir. ■

Önerme 4.3.1 (ii) ve Önerme 4.3.2 (ii) koşullarından, $\Re((\mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{I})\mathbf{X}_1) \subseteq \Re(\mathbf{X}_1)$ koşulu ile (4.6) modeli altında $\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\mathbf{B}_2^s$ için her BLUE değerinin, (4.13) modeli altında $\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\mathbf{B}_2^s$ için BLUE kaldığı kolayca görülür. Çünkü $\Re((\mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{I})\mathbf{X}_1) \subseteq \Re(\mathbf{X}_1)$ koşulu sağlanıyorsa, Sonuç 4.4.2'den, (4.13) modeli altında $\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\mathbf{B}_2^s$ için her BLUE, (4.6) modeli altında da $\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\mathbf{B}_2^s$ için BLUE kalır. Bu durumda (4.28) sağlanır. (4.28) sağlanıyorsa, Teorem 4.4.1'in ispatında görüldüğü gibi $\mathbf{F}\mathbf{X}_1 = \mathbf{0}$ olur. Burada $\mathbf{F}$, Önerme 4.3.2 (iii) koşulunda verilen eşitliği sağlayan bir matristir. Böylece Önerme 4.3.1 ve Önerme 4.3.2 kullanılarak ispat yapılır. Diğer bir deyişle, eğer $\Re((\mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{I})\mathbf{X}_1) \subseteq \Re(\mathbf{X}_1)$ ise, bu durumda sırasıyla (4.6) ve (4.13) modelleri altındaki BLUE değerlerinin kümesi çakışır.

$\Re((\mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{I})\mathbf{X}_1) \subseteq \Re(\mathbf{X}_1)$ koşulunun, $\{\mathbf{Y}^s, \mathbf{X}_1\mathbf{B}_1^s, \mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{I}\}$ lineer modelindeki $\mathbf{X}_1\mathbf{B}_1^s$ vektörünün BLUE ve OLSE değerlerinin eşitliği için gerek ve yeter koşul olduğuna dikkat etmek gerekir [23].

Şimdi, $\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\mathbf{B}_2^s$ için $\mathbf{P}_{\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2}\mathbf{Y}^s$ tahmin edicisi OLSE olarak ele alınsın. Eğer bu tahmin edici (4.13) modeli altında BLUE ise, aşağıdaki sonuçta açıklandığı gibi (4.6) modeli altında da BLUE kalır.

Sonuç 4.4.3. (4.6) modeli (4.13) modeli ile çelişmesin. Eğer $\mathbf{P}_{\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2}\mathbf{Y}^s$, (4.13) modeli altında $\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\mathbf{B}_2^s$ için BLUE ise, bu durumda (4.6) modeli altında da $\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\mathbf{B}_2^s$ için BLUE kalır.

İspat. Önerme 4.2.2 (b4) koşulu, $\Re(\mathbf{X}_1) \subseteq \Re(\mathbf{H}(\mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{I}))$ ifadesini vurgular. Eğer $\mathbf{P}_{\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2}\mathbf{Y}^s$, (4.13) indirgenmiş modeli altında $\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\mathbf{B}_2^s$ için BLUE ise, $(\mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{I})\mathbf{H} = \mathbf{H}(\mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{I})$ olur [23]. Buradan $\Re(\mathbf{X}_1) \subseteq \Re((\mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{I})\mathbf{H})$ bulunur. Böylece (4.28) koşulunun sağlandığı görülür ve ispat tamamlanır. ■

Teorem 4.4.3. (4.6) ve (4.12) modelleri altında $\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\mathbf{B}_2^s$ için BLUE değerleri çakışır.

İspat. Bir $\mathbf{FY}^s$ tahmin edicisinin, (4.12) modeli altında $\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\mathbf{B}_2^s$ için BLUE olmasının gerek ve yeter koşulu

$$\mathbf{F}(\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2 : \mathbf{M}_1(\mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{I})\mathbf{M}_1(\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2)^{\perp}) = \mathbf{M}_1(\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2 : \mathbf{0}) \tag{4.42}$$

olmasıdır. (4.42) denkleminden $\mathbf{FM}_1\mathbf{X}_2 = \mathbf{M}_1\mathbf{X}_2$ ve $\mathbf{FM}_1(\mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{I})\mathbf{M}_1\mathbf{H} = \mathbf{0}$ denklemleri elde edilir. Burada $\mathbf{F}$ matrisinin $\mathbf{NM}_1$ biçiminde olduğu açıktır. Diğer bir deyişle $\mathbf{F}$ matrisi, $\mathbf{NM}_1\mathbf{X}_2 = \mathbf{M}_1\mathbf{X}_2$ ve $\mathbf{NM}_1(\mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{I})\mathbf{M}_1\mathbf{H} = \mathbf{0}$ denklemlerini sağlar. Bu durumda, Önerme 4.3.1 (iii) koşulundan $\mathbf{NM}_1\mathbf{Y}^s$, (4.6) modeli altında $\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\mathbf{B}_2^s$ için BLUE olur.

Tersine olarak $\mathbf{FY}^s$ tahmin edicisi (4.6) modeli altında $\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\mathbf{B}_2^s$ için BLUE ise, Önerme 4.3.1 (ii) koşulundan $\mathbf{FX}_1 = \mathbf{0}$, $\mathbf{FX}_2 = \mathbf{M}_1\mathbf{X}_2$ ve $\mathbf{F}(\mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{I})\mathbf{M}_1\mathbf{H} = \mathbf{0}$ olur. $\mathbf{FX}_1 = \mathbf{0}$ olmasının gerek ve yeter koşulu $\mathbf{FM}_1 = \mathbf{F}$ olmasıdır. Dolayısıyla $\mathbf{FX}_1 = \mathbf{0}$ ifadesi,

$$\mathbf{FX}_2 = \mathbf{FM}_1\mathbf{X}_2 = \mathbf{M}_1\mathbf{X}_2 \text{ ve } \mathbf{F}(\mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{I})\mathbf{M}_1\mathbf{H} = \mathbf{FM}_1(\mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{I})\mathbf{M}_1\mathbf{H} = \mathbf{0}$$

ifadelerini vurgular. Böylece (4.42) sağlanır ve ispat biter. ■

4.5. Dağılım Matrisinin $\mathbf{I}\otimes\mathbf{V}$ ve $\mathbf{\Sigma}\otimes\mathbf{V}$ Şeklinde Olması

(4.1) ve (4.2) modellerine benzer şekilde,

$$\{\mathbf{y}_{(i)}, \mathbf{Z}\boldsymbol{\beta}_{(i)}, \sigma^2\mathbf{V}\} = \{\mathbf{y}_{(i)}, \mathbf{Z}_1\boldsymbol{\beta}_{(i1)} + \mathbf{Z}_2\boldsymbol{\beta}_{(i2)}, \sigma^2\mathbf{V}\},\ i = 1,2,\ldots,m, \tag{4.43}$$

m tane çok değişkenli lineer modeller kümesi göz önüne alınsın. (4.43) modelleri $\mathbf{y}_{(i)} = \mathbf{Z}\boldsymbol{\beta}_{(i)} + \boldsymbol{\varepsilon}_{(i)} = \mathbf{Z}_1\boldsymbol{\beta}_{(i1)} + \mathbf{Z}_2\boldsymbol{\beta}_{(i2)} + \boldsymbol{\varepsilon}_{(i)}$ şeklinde de ifade edilebilir. Burada $\mathbf{V}$ matrisi tersinir olmayan bir matris ve σ^2 bilinmeyen parametre olmak üzere, $E(\boldsymbol{\varepsilon}_{(i)}) = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{n,1}$, $\operatorname{cov}(\boldsymbol{\varepsilon}_{(i)}) = \operatorname{cov}(\mathbf{y}_{(i)}) = \sigma^2\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{n,n}_{\geq}$ ve $i \neq k$ olduğunda $\operatorname{cov}(\boldsymbol{\varepsilon}_{(i)}, \boldsymbol{\varepsilon}_{(k)}) = \sigma^2\mathbf{I}$, $i,k = 1,2,\ldots,m$, olduğu kabul edilmektedir. (4.43) modellerinin yapısına uygun

$$\{\mathbf{Y}, \mathbf{ZB}, \sigma^2(\mathbf{I}\otimes\mathbf{V})\} \tag{4.44}$$

şeklindeki çok değişkenli katlı lineer model ele alındığında önceki bölümlerde verilen ifade ve ispatlarda $\mathbf{\Sigma}\otimes\mathbf{I}$ matrisini, $\mathbf{I}\otimes\mathbf{V}$ matrisi ile yer değiştirerek benzer sonuçlar elde edilir.

Şimdi daha genel olarak m tane

$$\{\mathbf{y}_{(i)}, \mathbf{Z}\boldsymbol{\beta}_{(i)}, \sigma_{ii}\mathbf{V}\} = \{\mathbf{y}_{(i)}, \mathbf{Z}_1\boldsymbol{\beta}_{(i1)} + \mathbf{Z}_2\boldsymbol{\beta}_{(i2)}, \sigma_{ii}\mathbf{V}\},\ i = 1,2,\ldots,m, \tag{4.45}$$

veya denk olarak $\mathbf{y}_{(i)} = \mathbf{Z}\boldsymbol{\beta}_{(i)} + \boldsymbol{\varepsilon}_{(i)} = \mathbf{Z}_1\boldsymbol{\beta}_{(i1)} + \mathbf{Z}_2\boldsymbol{\beta}_{(i2)} + \boldsymbol{\varepsilon}_{(i)}$ modelleri göz önüne alınsın. Burada $E(\boldsymbol{\varepsilon}_{(i)}) = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{n,1}$ ve $\operatorname{cov}(\boldsymbol{\varepsilon}_{(i)}) = \operatorname{cov}(\mathbf{y}_{(i)}) = \sigma_{ii}\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{n,n}_{\geq}$ şeklindedir. σ_{ii} ile σ_{ik}, $i,k = 1,2,\ldots,m$, bilinmeyen parametreler ve $\mathbf{V}$ matrisi tersinir olmayan bir matris olmak üzere, $\operatorname{cov}(\boldsymbol{\varepsilon}_{(i)}, \boldsymbol{\varepsilon}_{(k)}) = \sigma_{ik}\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{n,n}_{\geq}$ olduğu kabul edilmektedir. (4.45) modellerinin yapısına uygun, $E(\mathbf{Y}) = \mathbf{ZB}$ ve $D(\mathbf{Y}) = \mathbf{\Sigma}\otimes\mathbf{V}$ olmak üzere,

$$\{\mathbf{Y}, \mathbf{ZB}, \mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{V}\} = \{\mathbf{Y}, \mathbf{Z}_1\mathbf{B}_1 + \mathbf{Z}_2\mathbf{B}_2, \mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{V}\} \tag{4.46}$$

çok değişkenli katlı lineer modeli veya denk olarak $\mathbf{Y} = \mathbf{ZB} + \mathbf{E} = \mathbf{Z}_1\boldsymbol{\beta}_1 + \mathbf{Z}_2\boldsymbol{\beta}_2 + \mathbf{E}$ modeli ele alınabilir. Burada $\mathbf{\Sigma} = (\sigma_{ik})$, $i,k = 1,2,\ldots,m$, tersinir olmayan bir matristir. Benzer şekilde, (4.46) çok değişkenli katlı lineer modeli ele alındığında önceki bölümlerde verilen ifade ve ispatlarda $\mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{I}$ matrisini, $\mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{V}$ matrisi ile yer değiştirerek benzer sonuçlar elde edilir.

4.6. Çok Değişkenli Katlı Lineer Model Altında Kabul Edilebilir Tahmin

(4.13) modeli altında $\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\mathbf{B}_2^s$ için BLUE (4.6) modeli altında $\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\mathbf{B}_2^s$ için BLUE olmasın. $\Re(\mathbf{X}_1) \subseteq \Re(\mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{I})$ olması koşuluyla, (4.13) modeli altında $\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\mathbf{B}_2^s$ için BLUE, (4.6) modeli altında

$$L_{nm}(\mathbf{Y}^s) = \{\mathbf{LY}^s + \boldsymbol{\lambda} : \mathbf{L} \in \mathbb{R}^{nm,nm}, \boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^{nm,1}\} \tag{4.47}$$

ile gösterilen $\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\mathbf{B}_2^s$ ifadesinin lineer tahmin edicilerinin kümesi üzerinde, $\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\mathbf{B}_2^s$ için bir kabul edilebilir tahmin edicidir. Kısım 3.6'daki ifadelere benzer şekilde (4.6) modeli için $\mathbf{LY}^s + \boldsymbol{\lambda} \in L_{nm}(\mathbf{Y}^s)$ ifadesinin kuadratik riski

$$\phi(\mathbf{LY}^s + \boldsymbol{\lambda} : \mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\mathbf{B}_2^s) = E[(\mathbf{LY}^s + \boldsymbol{\lambda} - \mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\mathbf{B}_2^s)'(\mathbf{LY}^s + \boldsymbol{\lambda} - \mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\mathbf{B}_2^s)]$$

olur.

Aşağıdaki önerme, (4.6) modeli altında $\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\mathbf{B}_2^s$ için homojen lineer kabul edilebilir tahmin edicilerin karakterizasyonunu gösterir.

Önerme 4.6.1. Bir $\mathbf{AY}^s$ tahmin edicisinin, (4.6) parçalanmış modeli altında $L_{nm}(\mathbf{Y}^s)$ üzerinde $\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\mathbf{B}_2^s$ için kabul edilebilir olmasının gerek ve yeter koşulu $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{nm,nm}$ matrisi için aşağıdaki dört koşulun sağlanmasıdır:

(i) $\Re((\boldsymbol{\Sigma}\otimes\mathbf{I})\mathbf{A}')\subseteq\Re(\mathbf{X}_1:\mathbf{X}_2)$,

(ii) $\mathbf{A}(\boldsymbol{\Sigma}\otimes\mathbf{I})\mathbf{M}_1$ simetriktir,

(iii) $\mathbf{A}(\boldsymbol{\Sigma}\otimes\mathbf{I})(\mathbf{M}_1-\mathbf{A}')$ pozitif kararsızdır,

(iv) $\Re(\mathbf{W})=\Re(\mathbf{X}_1:\mathbf{X}_2)\cap\Re(\boldsymbol{\Sigma}\otimes\mathbf{I})$ olacak şekilde herhangi bir $\mathbf{W}$ matrisi için, $\Re[(\mathbf{A}-\mathbf{M}_1)(\mathbf{X}_1:\mathbf{X}_2)]=\Re[(\mathbf{A}-\mathbf{M}_1)\mathbf{W}]$ olur [12]. ■

Aşağıdaki teorem, (4.13) indirgenmiş modeli altında $\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\mathbf{B}_2^s$ için BLUE değerinin, $\Re(\mathbf{X}_1)\subseteq\Re(\boldsymbol{\Sigma}\otimes\mathbf{I})$ koşuluyla, (4.6) modeli altında tahmin edici için yerinde bir seçim olarak göz önüne alınabileceğini gösterir. Çünkü (4.13) indirgenmiş modeli altında $\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\mathbf{B}_2^s$ için BLUE, farklı bir lineer tahmin edici vasıtasıyla ortaya konulamaz.

Teorem 4.6.1. (4.6) modeli (4.13) indirgenmiş modeli ile çelişmesin.

$$\Re(\mathbf{X}_1)\subseteq\Re(\boldsymbol{\Sigma}\otimes\mathbf{I}) \tag{4.48}$$

ise, bu durumda (4.13) modeli altında $\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\mathbf{B}_2^s$ için her BLUE, (4.6) modeli altında $L_{nm}(\mathbf{Y}^s)$ üzerinde $\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\mathbf{B}_2^s$ için kabul edilebilir tahmin edicidir.

İspat. $\Re(\mathbf{X}_1)\subseteq\Re(\boldsymbol{\Sigma}\otimes\mathbf{I})$ olduğu kabul edilsin ve $\mathbf{F}$ matrisi, Önerme 4.3.2 koşullarını sağlayan herhangi bir matris olsun. Önerme 4.3.2 (ii) koşulundan

$$\mathbf{H}(\boldsymbol{\Sigma}\otimes\mathbf{I})\mathbf{F}'=\mathbf{0}$$

yazılabilir ve bu ifade $\Re((\boldsymbol{\Sigma}\otimes\mathbf{I})\mathbf{F}')\subseteq\mathcal{N}(\mathbf{H})$ olduğunu gösterir. Burada $\mathcal{N}(\mathbf{H})=\Re(\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2)\subseteq\Re(\mathbf{X}_1:\mathbf{X}_2)$ olduğuna dikkat edilmelidir. Böylece

$$\Re((\boldsymbol{\Sigma}\otimes\mathbf{I})\mathbf{F}')\subseteq\Re(\mathbf{X}_1:\mathbf{X}_2) \tag{4.49}$$

olduğu görülür ve Önerme 4.6.1 (i) koşulu gösterilmiş olur.

Önerme 4.3.2 (ii) koşulunda verilen $\mathbf{F}(\boldsymbol{\Sigma} \otimes \mathbf{I})\mathbf{H} = \mathbf{0}$ ifadesinde, $\mathbf{H} = \mathbf{I} - \mathbf{P}_{\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2}$ yerine yazıldığında, $\mathbf{F}(\boldsymbol{\Sigma} \otimes \mathbf{I})\mathbf{P}_{\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2} = \mathbf{F}(\boldsymbol{\Sigma} \otimes \mathbf{I})$ elde edilir. Bu eşitlik sağdan $\mathbf{M}_1$ ile çarpıldığında, $\mathbf{F}(\boldsymbol{\Sigma} \otimes \mathbf{I})\mathbf{P}_{\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2}\mathbf{M}_1 = \mathbf{F}(\boldsymbol{\Sigma} \otimes \mathbf{I})\mathbf{M}_1$ bulunur ve bu ifadede $\mathbf{P}_{\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2} = \mathbf{P}_{\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2}\mathbf{M}_1$ eşitliği kullanıldığında $\mathbf{F}(\boldsymbol{\Sigma} \otimes \mathbf{I}) = \mathbf{F}(\boldsymbol{\Sigma} \otimes \mathbf{I})\mathbf{M}_1$ elde edilir.

$\Re(\mathbf{H}(\boldsymbol{\Sigma} \otimes \mathbf{I})) \subseteq \Re(\mathbf{H}(\boldsymbol{\Sigma} \otimes \mathbf{I})\mathbf{H})$ olduğundan, en az bir $\mathbf{A}$ matrisi için $\mathbf{H}(\boldsymbol{\Sigma} \otimes \mathbf{I}) = \mathbf{H}(\boldsymbol{\Sigma} \otimes \mathbf{I})\mathbf{H}\mathbf{A}$ olur. Bu denklemin tutarlı olması için

$$\mathbf{H}(\boldsymbol{\Sigma} \otimes \mathbf{I}) = (\mathbf{H}(\boldsymbol{\Sigma} \otimes \mathbf{I})\mathbf{H})(\mathbf{H}(\boldsymbol{\Sigma} \otimes \mathbf{I})\mathbf{H})^{+}\mathbf{H}(\boldsymbol{\Sigma} \otimes \mathbf{I})$$

olmalıdır. Böylece Önerme 4.3.2 (iii) koşulu da kullanılarak,

$$\begin{aligned}\mathbf{F}(\boldsymbol{\Sigma} \otimes \mathbf{I}) &= [\mathbf{I} - (\boldsymbol{\Sigma} \otimes \mathbf{I})\mathbf{H}(\mathbf{H}(\boldsymbol{\Sigma} \otimes \mathbf{I})\mathbf{H})^{+}\mathbf{H}](\boldsymbol{\Sigma} \otimes \mathbf{I}) \\ &\quad + \mathbf{B}[\mathbf{I} - \mathbf{H}(\boldsymbol{\Sigma} \otimes \mathbf{I})\mathbf{H}(\mathbf{H}(\boldsymbol{\Sigma} \otimes \mathbf{I})\mathbf{H})^{+}]\mathbf{H}(\boldsymbol{\Sigma} \otimes \mathbf{I}) \\ &= (\boldsymbol{\Sigma} \otimes \mathbf{I}) - (\boldsymbol{\Sigma} \otimes \mathbf{I})\mathbf{H}(\mathbf{H}(\boldsymbol{\Sigma} \otimes \mathbf{I})\mathbf{H})^{+}\mathbf{H}(\boldsymbol{\Sigma} \otimes \mathbf{I})\end{aligned}$$

elde edilir.

$$\mathbf{F}(\boldsymbol{\Sigma} \otimes \mathbf{I})\mathbf{M}_1 = \mathbf{F}(\boldsymbol{\Sigma} \otimes \mathbf{I}) = (\boldsymbol{\Sigma} \otimes \mathbf{I}) - (\boldsymbol{\Sigma} \otimes \mathbf{I})\mathbf{H}(\mathbf{H}(\boldsymbol{\Sigma} \otimes \mathbf{I})\mathbf{H})^{+}\mathbf{H}(\boldsymbol{\Sigma} \otimes \mathbf{I}) \tag{4.50}$$

olduğundan, $\mathbf{F}(\boldsymbol{\Sigma} \otimes \mathbf{I})\mathbf{M}_1$ ifadesinin simetrik olduğu görülür. Böylece Önerme 4.6.1 (ii) koşulu gösterilmiş olur.

$\mathbf{F}(\boldsymbol{\Sigma} \otimes \mathbf{I}) = \mathbf{F}(\boldsymbol{\Sigma} \otimes \mathbf{I})\mathbf{P}_{\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2}$ olduğundan, $\mathbf{F}(\boldsymbol{\Sigma} \otimes \mathbf{I})\mathbf{F}' = \mathbf{F}(\boldsymbol{\Sigma} \otimes \mathbf{I})\mathbf{P}_{\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2}\mathbf{F}'$ olarak yazılabilir. Önerme 4.3.2 (iii) koşulundan

$$\begin{aligned}\mathbf{F}(\boldsymbol{\Sigma} \otimes \mathbf{I})\mathbf{F}' = \mathbf{F}(\boldsymbol{\Sigma} \otimes \mathbf{I})\mathbf{P}_{\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2}&([\mathbf{I} - (\boldsymbol{\Sigma} \otimes \mathbf{I})\mathbf{H}(\mathbf{H}(\boldsymbol{\Sigma} \otimes \mathbf{I})\mathbf{H})^{+}\mathbf{H}] \\ &+ \mathbf{B}[\mathbf{I} - \mathbf{H}(\boldsymbol{\Sigma} \otimes \mathbf{I})\mathbf{H}(\mathbf{H}(\boldsymbol{\Sigma} \otimes \mathbf{I})\mathbf{H})^{+}]\mathbf{H})'\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= \mathbf{F}(\boldsymbol{\Sigma}\otimes\mathbf{I})\mathbf{P}_{\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2}([\mathbf{I}-\mathbf{H}(\mathbf{H}(\boldsymbol{\Sigma}\otimes\mathbf{I})\mathbf{H})^{+}\mathbf{H}(\boldsymbol{\Sigma}\otimes\mathbf{I})]\\ &\quad+\mathbf{A}[\mathbf{H}-\mathbf{H}(\mathbf{H}(\boldsymbol{\Sigma}\otimes\mathbf{I})\mathbf{H})^{+}\mathbf{H}(\boldsymbol{\Sigma}\otimes\mathbf{I})\mathbf{H}])\\ &= \mathbf{F}(\boldsymbol{\Sigma}\otimes\mathbf{I})\mathbf{P}_{\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2}\\ &= \mathbf{F}(\boldsymbol{\Sigma}\otimes\mathbf{I})\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\mathbf{F}(\boldsymbol{\Sigma}\otimes\mathbf{I})\mathbf{M}_1-\mathbf{F}(\boldsymbol{\Sigma}\otimes\mathbf{I})\mathbf{F}'=\mathbf{F}(\boldsymbol{\Sigma}\otimes\mathbf{I})-\mathbf{F}(\boldsymbol{\Sigma}\otimes\mathbf{I})=\mathbf{0} \qquad (4.51)$$

bulunur ve $\mathbf{F}(\boldsymbol{\Sigma}\otimes\mathbf{I})(\mathbf{M}_1-\mathbf{F}')$ ifadesinin pozitif kararsız olduğu görülür. Böylece Önerme 4.6.1 (iii) koşulu gösterilmiş olur.

Önerme 4.3.2 (ii) koşuluna göre, $\mathbf{F}\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2=\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2$ olduğundan,

$$\mathbf{F}\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2-\mathbf{M}_1\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2=(\mathbf{F}-\mathbf{M}_1)\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2=\mathbf{0}$$

elde edilir. Buradan $\Re(\mathbf{X}_1:\mathbf{X}_2)=\Re(\mathbf{X}_1)\oplus\Re(\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2)$ ve Önerme 4.2.2 (iii) koşuluna göre $\Re(\mathbf{W})=\Re(\mathbf{X}_1)\oplus\left[\Re(\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2)\cap\Re(\boldsymbol{\Sigma}\otimes\mathbf{I})\right]$ olduğundan,

$$\Re\left[(\mathbf{F}-\mathbf{M}_1)(\mathbf{X}_1:\mathbf{X}_2)\right]=\Re(\mathbf{F}\mathbf{X}_1)\oplus\Re\left[(\mathbf{F}-\mathbf{M}_1)\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\right]=\Re(\mathbf{F}\mathbf{X}_1)$$

olur. Öte yandan, $\Re\left[(\mathbf{F}-\mathbf{M}_1)\mathbf{W}\right]=\Re(\mathbf{F}\mathbf{X}_1)$ olduğundan,

$$\Re\left[(\mathbf{F}-\mathbf{M}_1)(\mathbf{X}_1:\mathbf{X}_2)\right]=\Re\left[(\mathbf{F}-\mathbf{M}_1)\mathbf{W}\right]$$

elde edilir. Böylece Önerme 4.6.1 (iv) koşulu gösterilmiş olur ve ispat tamamlanır. ■

4.7. Çok Değişkenli Katlı Lineer Model Altında Alternatif Tahmin

$\mathbf{F}\mathbf{Y}^{s}$ tahmin edicisi, (4.13) modeli altında $\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\mathbf{B}_2^{s}$ için BLUE olsun. $\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\mathbf{B}_2^{s}$ için

$\mathbf{FM}_1\mathbf{Y}^s$ biçimindeki tahmin ediciler ele alındığında, Önerme 4.3.2 (ii) koşuluna göre $\mathbf{FM}_1\mathbf{X}_2 = \mathbf{M}_1\mathbf{X}_2$ olduğundan, $\mathbf{FM}_1\mathbf{Y}^s$ tahmin edicisinin (4.13) modeli altında $\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\mathbf{B}_2^s$ için bir yansız tahmin edici olduğu görülür.

$$\mathbf{FM}_1(\mathbf{X}_1 : \mathbf{X}_2) = (\mathbf{0} : \mathbf{M}_1\mathbf{X}_2) \tag{4.52}$$

olduğundan dolayı $\mathbf{FM}_1\mathbf{Y}^s$ tahmin edicisinin, (4.6) modeli altında da $\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\mathbf{B}_2^s$ için yansız tahmin edici olduğu açıktır. O halde $\mathbf{FM}_1\mathbf{Y}^s$, $\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\mathbf{B}_2^s$ için yansız tahmin edici olduğundan, $\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\mathbf{B}_2^s$ için BLUE, tahmin edicilerin kuadratik riskine göre $\mathbf{FM}_1\mathbf{Y}^s$ den daha kötü olamaz. Böylece $\mathbf{FM}_1\mathbf{Y}^s$ tahmin edicisinin, yalnızca (4.6) modeli altında $\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\mathbf{B}_2^s$ için BLUE ile çakışması durumunda (4.6) modeli altında $L_{nm}(\mathbf{Y}^s)$ üzerinde $\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\mathbf{B}_2^s$ için kabul edilebilir olduğu görülür. Aşağıdaki teorem bu çakışma durumu için gerek ve yeter bir koşul ortaya koyar.

Teorem 4.7.1. (4.6) parçalanmış modeli (4.13) indirgenmiş modeli ile çelişmesin ve $\mathbf{FY}^s$, (4.13) indirgenmiş modeli altında $\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\mathbf{B}_2^s$ için BLUE olsun. Bu durumda, her $\mathbf{FM}_1\mathbf{Y}^s$ tahmin edicisinin, (4.6) modeli altında $\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\mathbf{B}_2^s$ için BLUE olmasının gerek ve yeter koşulu

$$\Re(\mathbf{P}_1(\mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{I})\mathbf{M}_1\mathbf{H}) \subseteq \Re((\mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{I})\mathbf{H}) \tag{4.53}$$

olmasıdır.

İspat. $\mathbf{F}$ matrisi, Önerme 4.3.2 koşullarını sağlayan bir matris olsun. Önerme 4.3.2 (ii) koşulundan

$$\mathbf{F}(\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2 : (\mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{I})(\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2)^{\perp}) = (\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2 : \mathbf{0})$$

yazılır. Yani $\mathbf{FM}_1\mathbf{X}_2 = \mathbf{M}_1\mathbf{X}_2$ bulunur. Böylece (4.52) ifadesi sağlanır. Önerme 4.3.1

koşullarında $\mathbf{F}=\mathbf{F}\mathbf{M}_1$ olarak alındığında, $\mathbf{F}\mathbf{M}_1\mathbf{Y}^s$ ifadesinin (4.6) modeli altında $\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\mathbf{B}_2^s$ için BLUE olmasının gerek ve yeter koşulunun

$$\mathbf{F}\mathbf{M}_1(\boldsymbol{\Sigma}\otimes\mathbf{I})\mathbf{M}_1\mathbf{H}=\mathbf{0} \tag{4.54}$$

olduğu görülür. Şimdi (4.54) denkleminin, Önerme 4.3.2 (iii) koşulundaki her $\mathbf{F}$ matrisi için sağlandığı kabul edilsin. Bu durumda $\mathbf{A}=\mathbf{0}$ olmak üzere,

$$\mathbf{F}\mathbf{M}_1(\boldsymbol{\Sigma}\otimes\mathbf{I})\mathbf{M}_1\mathbf{H}=[\mathbf{I}-(\boldsymbol{\Sigma}\otimes\mathbf{I})\mathbf{H}(\mathbf{H}(\boldsymbol{\Sigma}\otimes\mathbf{I})\mathbf{H})^+\mathbf{H}]\mathbf{M}_1(\boldsymbol{\Sigma}\otimes\mathbf{I})\mathbf{M}_1\mathbf{H}=\mathbf{0} \tag{4.55}$$

elde edilir. (4.55) ifadesi, $\mathbf{M}_1=\mathbf{I}-\mathbf{P}_1$ ve $\mathbf{M}_1\mathbf{H}=\mathbf{H}\mathbf{M}_1$ olduğundan dolayı

$$[\mathbf{I}-(\boldsymbol{\Sigma}\otimes\mathbf{I})\mathbf{H}(\mathbf{H}(\boldsymbol{\Sigma}\otimes\mathbf{I})\mathbf{H})^+\mathbf{H}]((\boldsymbol{\Sigma}\otimes\mathbf{I})\mathbf{H}\mathbf{M}_1-\mathbf{P}_1(\boldsymbol{\Sigma}\otimes\mathbf{I})\mathbf{M}_1\mathbf{H})=\mathbf{0} \tag{4.56}$$

olarak yazılabilir. (4.56) eşitliği

$$\begin{aligned}&[\mathbf{I}-(\boldsymbol{\Sigma}\otimes\mathbf{I})\mathbf{H}(\mathbf{H}(\boldsymbol{\Sigma}\otimes\mathbf{I})\mathbf{H})^+\mathbf{H}](\boldsymbol{\Sigma}\otimes\mathbf{I})\mathbf{H}\mathbf{M}_1\\&-[\mathbf{I}-(\boldsymbol{\Sigma}\otimes\mathbf{I})\mathbf{H}(\mathbf{H}(\boldsymbol{\Sigma}\otimes\mathbf{I})\mathbf{H})^+\mathbf{H}]\mathbf{P}_1(\boldsymbol{\Sigma}\otimes\mathbf{I})\mathbf{M}_1\mathbf{H}=\mathbf{0}\end{aligned}$$

şeklinde de ifade edilebilir. $(\boldsymbol{\Sigma}\otimes\mathbf{I})\mathbf{H}(\mathbf{H}(\boldsymbol{\Sigma}\otimes\mathbf{I})\mathbf{H})^+\mathbf{H}(\boldsymbol{\Sigma}\otimes\mathbf{I})\mathbf{H}=(\boldsymbol{\Sigma}\otimes\mathbf{I})\mathbf{H}$ olduğundan,

$$[\mathbf{I}-(\boldsymbol{\Sigma}\otimes\mathbf{I})\mathbf{H}(\mathbf{H}(\boldsymbol{\Sigma}\otimes\mathbf{I})\mathbf{H})^+\mathbf{H}]\mathbf{P}_1(\boldsymbol{\Sigma}\otimes\mathbf{I})\mathbf{M}_1\mathbf{H}=\mathbf{0} \tag{4.57}$$

elde edilir. $\mathcal{N}(\mathbf{I}-(\boldsymbol{\Sigma}\otimes\mathbf{I})\mathbf{H}(\mathbf{H}(\boldsymbol{\Sigma}\otimes\mathbf{I})\mathbf{H})^+\mathbf{H})=\Re((\boldsymbol{\Sigma}\otimes\mathbf{I})\mathbf{H})$ olduğundan dolayı (4.57) eşitliğinin, (4.53) ifadesine denk olduğu görülür.

Tersine olarak (4.53) sağlansın. Yani $\Re(\mathbf{P}_1(\boldsymbol{\Sigma}\otimes\mathbf{I})\mathbf{M}_1\mathbf{H})\subseteq\Re((\boldsymbol{\Sigma}\otimes\mathbf{I})\mathbf{H})$ olsun. Yukarıda gösterildiği gibi (4.53) ve (4.57) ifadeleri denktir. (4.57) ifadesi ise, (4.55) ifadesine denktir. Ayrıca (4.55) ifadesi

$$[\mathbf{H}-\mathbf{H}(\mathbf{\Sigma}\otimes\mathbf{I})\mathbf{H}(\mathbf{H}(\mathbf{\Sigma}\otimes\mathbf{I})\mathbf{H})^{+}\mathbf{H}]\mathbf{M}_1(\mathbf{\Sigma}\otimes\mathbf{I})\mathbf{M}_1\mathbf{H}=\mathbf{0} \tag{4.58}$$

ifadesini vurgular. Önerme 4.3.2 (iii) koşulunu sağlayan herhangi bir $\mathbf{F}$ matrisi için (4.54) sağlandığından, yani

$$\begin{aligned}\mathbf{F}\mathbf{M}_1(\mathbf{\Sigma}\otimes\mathbf{I})\mathbf{M}_1\mathbf{H}=([\mathbf{I}-(\mathbf{\Sigma}\otimes\mathbf{I})\mathbf{H}(\mathbf{H}(\mathbf{\Sigma}\otimes\mathbf{I})\mathbf{H})^{+}]\mathbf{H}\\ +\mathbf{B}[\mathbf{I}-\mathbf{H}(\mathbf{\Sigma}\otimes\mathbf{I})\mathbf{H}(\mathbf{H}(\mathbf{\Sigma}\otimes\mathbf{I})\mathbf{H})^{+}]\mathbf{H})\mathbf{M}_1(\mathbf{\Sigma}\otimes\mathbf{I})\mathbf{M}_1\mathbf{H}=\mathbf{0}\end{aligned}$$

olduğundan, (4.55) ve (4.58) ifadeleri, $\mathbf{F}\mathbf{M}_1\mathbf{Y}^s$ tahmin edicisinin (4.6) modeli altında $\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\mathbf{B}_2^s$ için BLUE olduğunu vurgular. ■

Sonuç 4.7.1. Teorem 4.7.1'de verilen (4.53) koşulu

$$\Re(\mathbf{P}_1(\mathbf{\Sigma}\otimes\mathbf{I})\mathbf{M}_{\mathbf{X}})\subseteq\Re((\mathbf{\Sigma}\otimes\mathbf{I})\mathbf{H}) \tag{4.59}$$

şeklinde de ifade edilebilir. Burada $\mathbf{P}_1=\mathbf{X}_1\mathbf{X}_1^{+}$'dır.

İspat. (4.53) koşulu $\Re(\mathbf{P}_1(\mathbf{\Sigma}\otimes\mathbf{I})\mathbf{M}_1\mathbf{H})\subseteq\Re((\mathbf{\Sigma}\otimes\mathbf{I})\mathbf{H})$ şeklindedir.

$$\mathbf{M}_1\mathbf{H}=(\mathbf{I}-\mathbf{P}_{\mathbf{X}_1})(\mathbf{I}-\mathbf{P}_{\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2})=\mathbf{I}-\mathbf{P}_{\mathbf{X}_1}-\mathbf{P}_{\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2}=\mathbf{I}-\mathbf{P}_{(\mathbf{X}_1:\mathbf{X}_2)}=\mathbf{M}_{\mathbf{X}}$$

olduğundan, (4.53) koşulu, $\Re(\mathbf{P}_1(\mathbf{\Sigma}\otimes\mathbf{I})\mathbf{M}_{\mathbf{X}})\subseteq\Re((\mathbf{\Sigma}\otimes\mathbf{I})\mathbf{H})$ şeklinde de ifade edilebilir ve ispat tamamlanır. ■

Uyarı 4.7.1. Teorem 4.7.1'de verilen $\Re(\mathbf{P}_1(\mathbf{\Sigma}\otimes\mathbf{I})\mathbf{M}_1\mathbf{H})\subseteq\Re((\mathbf{\Sigma}\otimes\mathbf{I})\mathbf{H})$ koşulunun Teorem 4.4.1'deki $\Re(\mathbf{X}_1)\subseteq\Re((\mathbf{\Sigma}\otimes\mathbf{I})\mathbf{H})$ koşulundan daha zayıf olduğu açıktır. Çünkü Teorem 4.4.1'deki koşul Teorem 4.7.1'deki koşulu vurgular. Tersinin her zaman doğru olmadığı, (3.22) ile verilen matrisler katlı durum için ele alındığında görülebilir. Bu durumda, $\Re(\mathbf{P}_1(\mathbf{\Sigma}\otimes\mathbf{I})\mathbf{M}_1\mathbf{H})\subseteq\Re((\mathbf{\Sigma}\otimes\mathbf{I})\mathbf{H})$ olmasına karşılık $\Re(\mathbf{X}_1)\not\subset\Re((\mathbf{\Sigma}\otimes\mathbf{I})\mathbf{H})$ olur.

Sonuç 4.7.2. (4.6) parçalanmış modeli zayıf singüler ve $\mathbf{FY}^s$, (4.13) modeli altında $\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\mathbf{B}_2^s$ için BLUE olsun. Bu durumda, her $\mathbf{FM}_1\mathbf{Y}^s$ tahmin edicisinin, (4.6) modeli altında $\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\mathbf{B}_2^s$ için BLUE olmasının gerek ve yeter koşulu $\boldsymbol{\Sigma}\otimes\mathbf{I}$ matrisinin herhangi bir genelleştirilmiş tersi için

$$\mathbf{X}_2'\mathbf{M}_1(\boldsymbol{\Sigma}\otimes\mathbf{I})^-\mathbf{P}_1(\boldsymbol{\Sigma}\otimes\mathbf{I})\mathbf{M}_1\mathbf{H}=\mathbf{0} \tag{4.60}$$

olmasıdır.

İspat. (4.6) modelinin zayıf singülerlik koşulu

$$\Re(\mathbf{X}_1)\subseteq\Re(\boldsymbol{\Sigma}\otimes\mathbf{I}) \text{ ve } \Re(\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2)\subseteq\Re(\boldsymbol{\Sigma}\otimes\mathbf{I}) \tag{4.61}$$

ifadelerini vurgular. $(\boldsymbol{\Sigma}\otimes\mathbf{I})^-$ genelleştirilmiş tersin seçimine göre $\mathbf{X}_2'\mathbf{M}_1(\boldsymbol{\Sigma}\otimes\mathbf{I})^-\mathbf{X}_1$ ifadesinin değişmezliğinin (4.61) koşullarına denk olduğuna dikkat edilmelidir [31, sf. 43]. Böylece (4.60) ifadesinin sol tarafının $(\boldsymbol{\Sigma}\otimes\mathbf{I})^-$ matrisinin seçimine bağlı olmadığı görülür. Dolayısıyla gösterilmesi gereken (4.60) ifadesinin Teorem 4.7.1'deki (4.53) ifadesine denk olduğudur. Şimdi (4.53) ifadesinin sağlandığı kabul edilsin, yani $\Re(\mathbf{P}_1(\boldsymbol{\Sigma}\otimes\mathbf{I})\mathbf{M}_1\mathbf{H})\subseteq\Re((\boldsymbol{\Sigma}\otimes\mathbf{I})\mathbf{H})$ olsun. Buradan en az bir $\mathbf{A}$ matrisi için $\mathbf{P}_1(\boldsymbol{\Sigma}\otimes\mathbf{I})\mathbf{M}_1\mathbf{H}=(\boldsymbol{\Sigma}\otimes\mathbf{I})\mathbf{HA}$ yazılabilir. Böylece Sonuç 4.4.1'de dikkate alınarak

$$\mathbf{X}_2'\mathbf{M}_1(\boldsymbol{\Sigma}\otimes\mathbf{I})^-\mathbf{P}_1(\boldsymbol{\Sigma}\otimes\mathbf{I})\mathbf{M}_1\mathbf{H}=\mathbf{X}_2'\mathbf{M}_1(\boldsymbol{\Sigma}\otimes\mathbf{I})^-(\boldsymbol{\Sigma}\otimes\mathbf{I})\mathbf{HA}=\mathbf{0}$$

olduğu görülür. Yani (4.60) sağlanır.

Tersine (4.60) ifadesinin sağlandığı kabul edilsin. Bu durumda, en az bir $\mathbf{A}$ matrisi için

$$(\boldsymbol{\Sigma}\otimes\mathbf{I})^-\mathbf{P}_1(\boldsymbol{\Sigma}\otimes\mathbf{I})\mathbf{M}_1\mathbf{H}=\mathbf{HA} \tag{4.62}$$

yazılır.

$(\mathbf{\Sigma}\otimes\mathbf{I})(\mathbf{\Sigma}\otimes\mathbf{I})^{-}\mathbf{X}_1\mathbf{X}_1^{+}=\mathbf{X}_1\mathbf{X}_1^{+}$ veya denk olarak $(\mathbf{\Sigma}\otimes\mathbf{I})(\mathbf{\Sigma}\otimes\mathbf{I})^{-}\mathbf{P}_1=\mathbf{P}_1$ olduğundan, (4.62) eşitliği soldan $\mathbf{\Sigma}\otimes\mathbf{I}$ ile çarpıldığında,

$$(\mathbf{\Sigma}\otimes\mathbf{I})(\mathbf{\Sigma}\otimes\mathbf{I})^{-}\mathbf{P}_1(\mathbf{\Sigma}\otimes\mathbf{I})\mathbf{M}_1\mathbf{H}=(\mathbf{\Sigma}\otimes\mathbf{I})\mathbf{HA}$$

elde edilir. Buradan $\mathbf{P}_1(\mathbf{\Sigma}\otimes\mathbf{I})\mathbf{M}_1\mathbf{H}=(\mathbf{\Sigma}\otimes\mathbf{I})\mathbf{HA}$ bulunur. Yani

$$\Re\left(\mathbf{P}_1(\mathbf{\Sigma}\otimes\mathbf{I})\mathbf{M}_1\mathbf{H}\right)\subseteq\Re\left((\mathbf{\Sigma}\otimes\mathbf{I})\mathbf{H}\right)$$

olur. Böylece ispat tamamlanır. ■

4.8. Uygulama

Son olarak bu kısımda, elde edilen sonuçlar için bir örnek verilmektedir. Ele alınan bu örnekte, (4.4) modeli ve bu modelin indirgenmiş modelleri altında $\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\mathbf{B}_2^{s}$ için BLUE değerlerinin çakışması durumu gösterilmektedir.

Örnek 4.8.1'de verilen Tablo 4.1, Johnson ve Wichern tarafından ele alınan Örnek 7.6 ve Örnek 7.10'daki veriler dikkate alınarak oluşturulmuştur [19, sf. 312, 332]. Bu iki örnekte, aynı açıklayıcı değişken grubuna karşılık iki farklı bağımlı değişken değerleri verilmektedir. Çalışmada ele alınan modeller çerçevesinde, bu iki örnek birleştirilerek, aynı açıklayıcı değişken grubuyla aynı anda açıklanabilecek şekilde iki bağımlı değişkeni içeren bir model ile ilgili problem elde edilmiştir. Böylece veriler çok değişkenli katlı lineer modellere uygulanabilmektedir.

Tablo 4.1'de verilen z_1 ve z_2 değerlerine göre, Y_1 ve Y_2 için tahmin edilmiş regresyon denklemleri sırasıyla

$$\hat{y}_1=8,82+1,08z_1+0,42z_2 \text{ ve } \hat{y}_2=14,14+2,25z_1+5,67z_2,$$

olarak hesaplanmıştır [19, sf. 312, 332].

Örnek 4.8.1. Bilgisayar alımı planlayan firmalar doğru donanım ekipmanını belirleyebilmek için firmanın gelecekteki ihtiyaçlarını belirlemek durumundadır. Bir bilgisayar uzmanı tarafından, firma envanter yönetim sisteminde kullanılacak olan bilgisayar donanımı ihtiyaçlarına ilişkin tahmin denklemini oluşturabilmek üzere yedi benzer firmadan bilgi toplanmıştır. Bu bilgiler Tablo 4.1'de verilmiştir.

$z_1 =$ müşteri siparişleri (1000 olarak),

$z_2 =$ ekleme-silme parçası sayısı (1000 olarak),

$Y_1 =$ CPU (merkezi işlemci birimi) zamanı (saat olarak),

$Y_2 =$ disk giriş/çıkış kapasitesi.

Tablo 4.1. Firma bilgileri

z_1 (siparişler)	z_2 (ekleme-silme parçası)	Y_1 (CPU zamanı)	Y_2 (disk kapasitesi)
123,5	2,108	141,5	301,8
146,1	9,213	168,9	396,1
133,9	1,905	154,8	328,2
128,5	0,815	146,5	307,4
151,5	1,061	172,8	362,4
136,2	8,603	160,1	369,5
92,0	1,125	108,5	229,1

Kaynak: Örnek 7.6 ve Örnek 7.10 [19, sf. 312, 332].

Tablo 4.1'de verilen veriler (4.4) çok değişkenli katlı lineer modeli ve bu modelin indirgenmiş lineer modelleri için ele alındığında, SPSS bilgisayar programı yardımıyla aşağıdaki tablolarda verilmiş olan sonuçlar elde edilir. Tablo 4.2'de, (4.4) çok değişkenli katlı lineer modeli altında, Tablo 4.3'te, (4.12) çok değişkenli katlı düzgün indirgenmiş lineer model altında ve Tablo 4.4'te ise, (4.13) çok değişkenli katlı indirgenmiş lineer model altında elde edilen sonuçlar verilmektedir.

Tablo 4.2. Çok değişkenli katlı lineer model altında elde edilen sonuçlar

Model		Standartlaştırılmamış katsayılar		Standartlaştırılmış katsayılar	t	Önem Düzeyi
		B	Std. Hata	Beta		
(4.4) modeli	(sabit)	8,424	4,333		1,944	0,088
	$\mathbf{X}.2^{*}$	1,079	0,035	0,739	31,189	0,000
	$\mathbf{X}.3^{*}$	0,420	0,182	0,013	2,309	0,050
	$\mathbf{X}.4^{*}$	5,718	6,128	0,030	0,933	0,378
	$\mathbf{X}.5^{*}$	2,254	0,035	1,544	65,149	0,000
	$\mathbf{X}.6^{*}$	5,665	0,182	0,175	31,161	0,000

* $\mathbf{X}.2$, $\mathbf{X}.3$, $\mathbf{X}.4$, $\mathbf{X}.5$ ve $\mathbf{X}.6$, $\mathbf{X}$ matrisinin sütunlarını göstermektedir.

Tablo 4.3. Çok değişkenli katlı düzgün indirgenmiş lineer model altında elde edilen sonuçlar

Model		Standartlaştırılmamış katsayılar		Standartlaştırılmış katsayılar	t	Önem Düzeyi
		B	Std. Hata	Beta		
(4.12) Modeli	(sabit)	0,000	0,345		0,000	1,000
	$\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2.1^{\#}$	0,420	0,155	0,074	2,708	0,020
	$\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2.2^{\#}$	5,665	0,155	0,993	36,539	0,000

Tablo 4.4. Çok değişkenli katlı indirgenmiş lineer model altında elde edilen sonuçlar

Model		Standartlaştırılmamış katsayılar		Standartlaştırılmış katsayılar	t	Önem Düzeyi
		B	Std. Hata	Beta		
(4.13) Modeli	(sabit)	239,114	28,951		8,259	0,000
	$\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2.1^{\#}$	0,420	12,999	0,010	0,032	0,975
	$\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2.2^{\#}$	5,665	12,999	0,130	0,436	0,671

\# $\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2.1$ ve $\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2.2$ sırasıyla $\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2$ matrisinin 1. ve 2. sütunlarını göstermektedir.

Elde edilen sonuçlardan görüldüğü gibi (4.4) modeli ve bu modelin indirgenmiş modelleri olan (4.12) ve (4.13) modelleri altında gözlenebilir rasgele değişkenler matrisinin beklenen değerinin parametrik fonksiyonlar matrisi için BLUE değerleri çakışmaktadır. Ayrıca modeller tek tek ele alındığında elde edilen sonuçlarla, katlı model olarak ele alındığında elde edilen sonuçların çakıştığı da görülmektedir. Böylece modelleri tek tek ele almak yerine, katlı modeli göz önüne almak işlem zamanını kısalttığı gibi, aynı zamanda hesaplamalarda da kolaylık sağlayacaktır.

BÖLÜM 5. ÇOK DEĞİŞKENLİ KATLI LİNEER MODELLER ALTINDA HİPOTEZ TESTLERİ

5.1. Giriş

Bu bölümde $\mathbf{E}$ hata matrisi $N_{nm}(\mathbf{0},\sigma^2\mathbf{I})$ biçimindeki normal dağılıma sahip olmak üzere, $\mathbf{Y}=\mathbf{ZB}+\mathbf{E}$ çok değişkenli katlı lineer modeli altında $H:\mathbf{AB}=\mathbf{C}$ şeklindeki hipotez testleri ile ilgili bazı sonuçlar verilmektedir. Öncelikli olarak, kullanılacak olan yöntemler ve bazı kavramlar üzerinde durulacaktır.

5.2. Çok Değişkenli Katlı Lineer Model Altında En Küçük Kareler Tahminleri ve Maksimum Olabilirlik Fonksiyonu

$\boldsymbol{\varepsilon}_{(i)} \sim N_n(\mathbf{0},\sigma^2\mathbf{I})$ olmak üzere, (4.1) modellerine benzer şekilde

$$\mathbf{y}_{(i)}=\mathbf{Z}\boldsymbol{\beta}_{(i)}+\boldsymbol{\varepsilon}_{(i)}=\mathbf{Z}_1\boldsymbol{\beta}_{(i1)}+\mathbf{Z}_2\boldsymbol{\beta}_{(i2)}+\boldsymbol{\varepsilon}_{(i)},\ i=1,2,\ldots,m, \tag{5.1}$$

biçiminde m tane klasik çok değişkenli lineer modeller kümesi göz önüne alınsın. Burada $\mathbf{Z}$ matrisi tam sütun ranklı kabul edilmektedir. (5.1) modelleri kullanılarak, $\mathbf{E}=(\boldsymbol{\varepsilon}_{(1)}:\boldsymbol{\varepsilon}_{(2)}:\ldots:\boldsymbol{\varepsilon}_{(m)})$ olmak üzere, (4.3) ve (4.4) modellerine benzer şekilde çok değişkenli katlı lineer modeli

$$\mathbf{Y}=\mathbf{ZB}+\mathbf{E}=\mathbf{Z}_1\mathbf{B}_1+\mathbf{Z}_2\mathbf{B}_2+\mathbf{E} \tag{5.2}$$

şeklinde yazılabilir. Burada $\mathbf{E}\sim N_{nm}(\mathbf{0},\sigma^2\mathbf{I})$, yani

$$\mathrm{cov}(\boldsymbol{\varepsilon}_{(i)},\boldsymbol{\varepsilon}_{(k)}) = \begin{cases} \sigma^2\mathbf{I} & , \quad i=k \\ \mathbf{0} & , \quad i \neq k \end{cases} \quad , i,k = 1,2,\dots,m,$$

olduğu kabul edilmektedir. (5.2) modeli, (4.5) ve (4.6) modellerine benzer şekilde,

$$\mathbf{Y}^s = \mathbf{X}\mathbf{B}^s + \mathbf{E}^s = \mathbf{X}_1\mathbf{B}_1^s + \mathbf{X}_2\mathbf{B}_2^s + \mathbf{E}^s \tag{5.3}$$

olarak da ifade edilebilir.

Bu bölümde, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{q,p}$, $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{q,m}$ bilinen matrisler ve $r(\mathbf{A}) = q$ olmak üzere, $H : \mathbf{AB} = \mathbf{C}$ hipotez testi ele alınarak, (5.1) modelleri için $\mathbf{A}_i\boldsymbol{\beta}_{(i)} = \mathbf{c}_i$ kısıtlaması altında elde edilmiş olan sonuçların bazıları, (5.2) biçimindeki çok değişkenli katlı lineer modele genişletilecektir. (5.3) modeli ele alındığında, $H : \mathbf{AB} = \mathbf{C}$ hipotezi de,

$$H_s : (\mathbf{I} \otimes \mathbf{A})\mathbf{B}^s = \mathbf{C}^s \tag{5.4}$$

şeklinde ifade edilebilir.

(5.3) modelinin normal denklemi $\mathbf{X}'\mathbf{X}\hat{\mathbf{B}}^s = \mathbf{X}'\mathbf{Y}^s$ şeklindedir. Bu denklemden elde edilen $\hat{\mathbf{B}}^s$ çözümü ise,

$$\hat{\mathbf{B}}^s = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}^s \tag{5.5}$$

şeklinde verilir. H_s hipotezi altındaki $\hat{\mathbf{B}}_{H_s}^s$ ile gösterilen çözümün ise,

$$\hat{\mathbf{B}}_{H_s}^s = \hat{\mathbf{B}}^s + (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}(\mathbf{I} \otimes \mathbf{A})'[(\mathbf{I} \otimes \mathbf{A})(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}(\mathbf{I} \otimes \mathbf{A})']^{-1}(\mathbf{C}^s - (\mathbf{I} \otimes \mathbf{A})\hat{\mathbf{B}}^s) \tag{5.6}$$

şeklinde olduğu, örneğin Lagrange çarpanları yöntemiyle, görülür [32].

(5.1) modelleri için $\boldsymbol{\varepsilon}'_{(i)}\boldsymbol{\varepsilon}_{(i)}$ ifadesinin minimum değeri,

$$RSS_i = (\mathbf{y}_{(i)} - \mathbf{Z}\hat{\boldsymbol{\beta}}_{(i)})'(\mathbf{y}_{(i)} - \mathbf{Z}\hat{\boldsymbol{\beta}}_{(i)}) = \mathbf{y}'_{(i)}(\mathbf{I} - \mathbf{P}_{\mathbf{Z}})\mathbf{y}_{(i)}$$

biçimindedir. (5.2) modeli ele alındığında, $\mathbf{E}'\mathbf{E}$ ifadesi,

$$RSS = (\mathbf{Y} - \mathbf{ZB})'(\mathbf{Y} - \mathbf{ZB})$$
$$= \begin{pmatrix} (\mathbf{y}_{(1)} - \mathbf{Z}\boldsymbol{\beta}_{(1)})'(\mathbf{y}_{(1)} - \mathbf{Z}\boldsymbol{\beta}_{(1)}) & \cdots & (\mathbf{y}_{(1)} - \mathbf{Z}\boldsymbol{\beta}_{(1)})'(\mathbf{y}_{(m)} - \mathbf{Z}\boldsymbol{\beta}_{(m)}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (\mathbf{y}_{(m)} - \mathbf{Z}\boldsymbol{\beta}_{(m)})'(\mathbf{y}_{(1)} - \mathbf{Z}\boldsymbol{\beta}_{(1)}) & \cdots & (\mathbf{y}_{(m)} - \mathbf{Z}\boldsymbol{\beta}_{(m)})'(\mathbf{y}_{(m)} - \mathbf{Z}\boldsymbol{\beta}_{(m)}) \end{pmatrix}$$

şeklindedir. $\boldsymbol{\beta}_{(i)} = \hat{\boldsymbol{\beta}}_{(i)}$ alındığında, $iz[(\mathbf{Y} - \mathbf{ZB})'(\mathbf{Y} - \mathbf{ZB})]$ minimum olur. Yani $RSS = \sum_{i=1}^{m} \mathbf{y}'_{(i)}(\mathbf{I} - \mathbf{P}_{\mathbf{Z}})\mathbf{y}_{(i)}$ şeklinde ifade edilebilir. Burada $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{(i)}$, (5.1) modelleri altında $\boldsymbol{\beta}_{(i)}$ için BLUE değeridir. (5.3) modeli ele alındığında ise, $\mathbf{E}^{s\prime}\mathbf{E}^{s}$ ifadesinin minimum değeri, yani rezidü kareler toplamı

$$\begin{aligned} RSS &= (\mathbf{Y}^s - \mathbf{X}\hat{\mathbf{B}}^s)'(\mathbf{Y}^s - \mathbf{X}\hat{\mathbf{B}}^s) \\ &= \mathbf{Y}^{s\prime}\mathbf{Y}^s - \mathbf{Y}^{s\prime}\mathbf{X}\hat{\mathbf{B}}^s - \hat{\mathbf{B}}^{s\prime}\mathbf{X}'\mathbf{Y}^s + \hat{\mathbf{B}}^{s\prime}\mathbf{X}'\mathbf{X}\hat{\mathbf{B}}^s \\ &= \mathbf{Y}^{s\prime}\mathbf{Y}^s - \hat{\mathbf{B}}^{s\prime}\mathbf{X}'\mathbf{Y}^s + \hat{\mathbf{B}}^{s\prime}(\mathbf{X}'\mathbf{X}\hat{\mathbf{B}}^s - \mathbf{Y}^{s\prime}\mathbf{X}) \\ &= \mathbf{Y}^{s\prime}\mathbf{Y}^s - \hat{\mathbf{B}}^{s\prime}\mathbf{X}'\mathbf{Y}^s \qquad (5.7) \\ &= \mathbf{Y}^{s\prime}\mathbf{Y}^s - \mathbf{Y}^{s\prime}\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}^s \\ &= \mathbf{Y}^{s\prime}(\mathbf{I} - \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}')\mathbf{Y}^s \\ &= \mathbf{Y}^{s\prime}(\mathbf{I} \otimes \mathbf{M}_{\mathbf{Z}})\mathbf{Y}^s \end{aligned}$$

olarak bulunur. Burada alışılageldiği gibi $\mathbf{Y}^s - \mathbf{X}\hat{\mathbf{B}}^s$ ifadesine rezidüler vektörü dendiğini vurgulamak gerekir. Bu ifadenin $RSS = \sum_{i=1}^{m} \mathbf{y}'_{(i)}(\mathbf{I} - \mathbf{P}_{\mathbf{Z}})\mathbf{y}_{(i)}$ şeklinde de ifade edilebileceği açıkça görülmektedir. (5.3) modeli altında H_s hipotezi ele alındığında ise, rezidü kareler toplamı

$$RSS_{H_s} = (\mathbf{Y}^s - \mathbf{X}\hat{\mathbf{B}}^s_{H_s})'(\mathbf{Y}^s - \mathbf{X}\hat{\mathbf{B}}^s_{H_s}) \qquad (5.8)$$

biçiminde olur.

(5.1) modelleri için olabilirlik fonksiyonları

$$L(\boldsymbol{\beta}_{(i)},\sigma^2)=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}(\sigma^2)^{n/2}}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(\mathbf{y}_{(i)}-\mathbf{Z}\boldsymbol{\beta}_{(i)})'(\mathbf{y}_{(i)}-\mathbf{Z}\boldsymbol{\beta}_{(i)})}$$

biçiminde verilir. (5.3) modelinin olabilirlik fonksiyonu ise

$$L(\mathbf{B}^s,\sigma^2)=\frac{1}{(2\pi)^{nm/2}(\sigma^2)^{nm/2}}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(\mathbf{Y}^s-\mathbf{X}\mathbf{B}^s)'(\mathbf{Y}^s-\mathbf{X}\mathbf{B}^s)} \tag{5.9}$$

şeklindedir. (5.9) olabilirlik fonksiyonunun $\mathbf{B}^s$ ve σ^2 parametrelerine göre maksimumlaştırılması ile, $\mathbf{B}^s$ için (5.5)'te verilen $\hat{\mathbf{B}}^s=(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}^s$ ve σ^2 için

$$\hat{\sigma}^2=\frac{(\mathbf{Y}^s-\mathbf{X}\hat{\mathbf{B}}^s)'(\mathbf{Y}^s-\mathbf{X}\hat{\mathbf{B}}^s)}{nm}=\frac{\mathbf{Y}^{s\prime}(\mathbf{I}\otimes\mathbf{M}_{\mathbf{Z}})\mathbf{Y}^s}{nm} \tag{5.10}$$

tahminleri elde edilir. (5.3) modeli altında H_s hipotezi ele alındığında, $L(\mathbf{B}^s_{H_s},\sigma^2_{H_s})$ olarak gösterilen olabilirlik fonksiyonunu

$$L(\mathbf{B}^s_{H_s},\sigma^2_{H_s})=\frac{1}{(2\pi)^{nm/2}(\sigma^2_{H_s})^{nm/2}}e^{-\frac{1}{2\sigma^2_{H_s}}(\mathbf{Y}^s-\mathbf{X}\mathbf{B}^s_{H_s})'(\mathbf{Y}^s-\mathbf{X}\mathbf{B}^s_{H_s})} \tag{5.11}$$

şeklindedir. (5.11) olabilirlik fonksiyonunun maksimumlaştırılması ile elde edilen $\hat{\mathbf{B}}^s_{H_s}$ tahmini (5.6)'da verildiği gibi ve $\hat{\sigma}^2_{H_s}$ tahmini ise,

$$\hat{\sigma}^2_{H_s}=\frac{(\mathbf{Y}^s-\mathbf{X}\hat{\mathbf{B}}^s_{H_s})'(\mathbf{Y}^s-\mathbf{X}\hat{\mathbf{B}}^s_{H_s})}{nm} \tag{5.12}$$

şeklindedir.

5.3. Çok Değişkenli Katlı Lineer Model Altında Hipotez Testleri

Bu kısımda regresyon parametreleri ile ilgili olarak (5.3) modeli altında $H_s : (\mathbf{I} \otimes \mathbf{A})\mathbf{B}^s = \mathbf{C}^s$ hipotezi, $F-$testi ve olabilirlik oran testi başlıkları altında detaylı olarak ele alınacaktır.

5.3.1. $F-$testi

Bu kısımda alışılagelmiş $F-$testini kullanmak suretiyle, çok değişkenli lineer modeller ile ilgili ele alınan sonuçlar çok değişkenli katlı lineer modellere genişletilecektir.

Teorem 5.3.1.1. (5.4) ile verilen H_s hipotezini test etmek için $F-$istatistiği, H_s hipotezinin doğru olduğu varsayımı altında

$$F = \frac{\left(RSS_{H_s} - RSS\right)/qm}{RSS/(nm-pm)} \tag{5.13}$$

olup, sırasıyla qm ve $nm-pm$ serbestlik dereceli $F-$dağılımına sahiptir. Yani $F \sim F_{qm,nm-pm}$ olur.

İspat. Öncelikle $(\mathbf{Y}^s - \mathbf{X}\mathbf{B}^s)'(\mathbf{Y}^s - \mathbf{X}\mathbf{B}^s)$ ifadesinden.

$$\begin{aligned}(\mathbf{Y}^s - \mathbf{X}\mathbf{B}^s)'(\mathbf{Y}^s - \mathbf{X}\mathbf{B}^s) &= (\mathbf{Y}^s - \mathbf{X}\hat{\mathbf{B}}^s + \mathbf{X}\hat{\mathbf{B}}^s - \mathbf{X}\mathbf{B}^s)'(\mathbf{Y}^s - \mathbf{X}\hat{\mathbf{B}}^s + \mathbf{X}\hat{\mathbf{B}}^s - \mathbf{X}\mathbf{B}^s) \\ &= (\mathbf{Y}^s - \mathbf{X}\hat{\mathbf{B}}^s)'(\mathbf{Y}^s - \mathbf{X}\hat{\mathbf{B}}^s) + (\mathbf{Y}^s - \mathbf{X}\hat{\mathbf{B}}^s)'(\mathbf{X}\hat{\mathbf{B}}^s - \mathbf{X}\mathbf{B}^s) \\ &\quad + (\mathbf{X}\hat{\mathbf{B}}^s - \mathbf{X}\mathbf{B}^s)'(\mathbf{Y}^s - \mathbf{X}\hat{\mathbf{B}}^s) + (\mathbf{X}\hat{\mathbf{B}}^s - \mathbf{X}\mathbf{B}^s)'(\mathbf{X}\hat{\mathbf{B}}^s - \mathbf{X}\mathbf{B}^s) \\ &= (\mathbf{Y}^s - \mathbf{X}\hat{\mathbf{B}}^s)'(\mathbf{Y}^s - \mathbf{X}\hat{\mathbf{B}}^s) + 2(\hat{\mathbf{B}}^s - \mathbf{B}^s)'\mathbf{X}'(\mathbf{Y}^s - \mathbf{X}\hat{\mathbf{B}}^s) \\ &\quad + (\hat{\mathbf{B}}^s - \mathbf{B}^s)'\mathbf{X}'\mathbf{X}(\hat{\mathbf{B}}^s - \mathbf{B}^s) \\ &= (\mathbf{Y}^s - \mathbf{X}\hat{\mathbf{B}}^s)'(\mathbf{Y}^s - \mathbf{X}\hat{\mathbf{B}}^s) + (\hat{\mathbf{B}}^s - \mathbf{B}^s)'\mathbf{X}'\mathbf{X}(\hat{\mathbf{B}}^s - \mathbf{B}^s)\end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi eşitliğin sağındaki ikinci terim ele alınsın.

$$
\begin{aligned}
(\hat{\mathbf{B}}^s-\mathbf{B}^s)'\mathbf{X}'\mathbf{X}(\hat{\mathbf{B}}^s-\mathbf{B}^s) &= (\hat{\mathbf{B}}^s-\hat{\mathbf{B}}^s_{H_s}+\hat{\mathbf{B}}^s_{H_s}-\mathbf{B}^s)'\mathbf{X}'\mathbf{X}(\hat{\mathbf{B}}^s-\hat{\mathbf{B}}^s_{H_s}+\hat{\mathbf{B}}^s_{H_s}-\mathbf{B}^s)\\
&= (\hat{\mathbf{B}}^s-\hat{\mathbf{B}}^s_{H_s})'\mathbf{X}'\mathbf{X}(\hat{\mathbf{B}}^s-\hat{\mathbf{B}}^s_{H_s})+(\hat{\mathbf{B}}^s-\hat{\mathbf{B}}^s_{H_s})'\mathbf{X}'\mathbf{X}(\hat{\mathbf{B}}^s_{H_s}-\mathbf{B}^s)\\
&\quad +(\hat{\mathbf{B}}^s_{H_s}-\mathbf{B}^s)'\mathbf{X}'\mathbf{X}(\hat{\mathbf{B}}^s-\hat{\mathbf{B}}^s_{H_s})+(\hat{\mathbf{B}}^s_{H_s}-\mathbf{B}^s)'\mathbf{X}'\mathbf{X}(\hat{\mathbf{B}}^s_{H_s}-\mathbf{B}^s)\\
&= (\hat{\mathbf{B}}^s-\hat{\mathbf{B}}^s_{H_s})'\mathbf{X}'\mathbf{X}(\hat{\mathbf{B}}^s-\hat{\mathbf{B}}^s_{H_s})+2(\hat{\mathbf{B}}^s-\hat{\mathbf{B}}^s_{H_s})'\mathbf{X}'\mathbf{X}(\hat{\mathbf{B}}^s_{H_s}-\mathbf{B}^s)\\
&\quad +(\hat{\mathbf{B}}^s_{H_s}-\mathbf{B}^s)'\mathbf{X}'\mathbf{X}(\hat{\mathbf{B}}^s_{H_s}-\mathbf{B}^s)\\
&= (\hat{\mathbf{B}}^s-\hat{\mathbf{B}}^s_{H_s})'\mathbf{X}'\mathbf{X}(\hat{\mathbf{B}}^s-\hat{\mathbf{B}}^s_{H_s})+(\hat{\mathbf{B}}^s_{H_s}-\mathbf{B}^s)'\mathbf{X}'\mathbf{X}(\hat{\mathbf{B}}^s_{H_s}-\mathbf{B}^s)
\end{aligned}
$$

olur. Buradan

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{Y}^s-\mathbf{X}\mathbf{B}^s)'(\mathbf{Y}^s-\mathbf{X}\mathbf{B}^s) &= (\mathbf{Y}^s-\mathbf{X}\hat{\mathbf{B}}^s)'(\mathbf{Y}^s-\mathbf{X}\hat{\mathbf{B}}^s)+(\hat{\mathbf{B}}^s-\hat{\mathbf{B}}^s_{H_s})'\mathbf{X}'\mathbf{X}(\hat{\mathbf{B}}^s-\hat{\mathbf{B}}^s_{H_s})\\
&\quad +(\hat{\mathbf{B}}^s_{H_s}-\mathbf{B}^s)'\mathbf{X}'\mathbf{X}(\hat{\mathbf{B}}^s_{H_s}-\mathbf{B}^s)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Bu ifadenin $\mathbf{B}^s=\hat{\mathbf{B}}^s_{H_s}$ olduğunda minimum olacağı açıktır. Böylece

$$
(\mathbf{Y}^s-\mathbf{X}\hat{\mathbf{B}}^s_{H_s})'(\mathbf{Y}^s-\mathbf{X}\hat{\mathbf{B}}^s_{H_s}) = (\mathbf{Y}^s-\mathbf{X}\hat{\mathbf{B}}^s)'(\mathbf{Y}^s-\mathbf{X}\hat{\mathbf{B}}^s)+(\hat{\mathbf{B}}^s-\hat{\mathbf{B}}^s_{H_s})'\mathbf{X}'\mathbf{X}(\hat{\mathbf{B}}^s-\hat{\mathbf{B}}^s_{H_s})
$$

olur. Bu eşitlik

$$
\left\|\mathbf{Y}^s-\mathbf{X}\hat{\mathbf{B}}^s_{H_s}\right\|^2=\left\|\mathbf{Y}^s-\mathbf{X}\hat{\mathbf{B}}^s\right\|^2+\left\|\mathbf{X}(\hat{\mathbf{B}}^s-\hat{\mathbf{B}}^s_{H_s})\right\|^2
$$

veya

$$
\left\|\mathbf{Y}^s-\hat{\mathbf{Y}}^s_{H_s}\right\|^2=\left\|\mathbf{Y}^s-\hat{\mathbf{Y}}^s\right\|^2+\left\|\hat{\mathbf{Y}}^s-\hat{\mathbf{Y}}^s_{H_s}\right\|^2
$$

biçiminde de ifade edilebilir. Buradan (5.7) ve (5.8) ile verilen rezidü kareler toplamlarının farkı

$$
\begin{aligned}
RSS_{H_s}-RSS &= (\mathbf{Y}^s-\mathbf{X}\hat{\mathbf{B}}^s_{H_s})'(\mathbf{Y}^s-\mathbf{X}\hat{\mathbf{B}}^s_{H_s})-(\mathbf{Y}^s-\mathbf{X}\hat{\mathbf{B}}^s)'(\mathbf{Y}^s-\mathbf{X}\hat{\mathbf{B}}^s)\\
&= \left\|\mathbf{Y}^s-\mathbf{X}\hat{\mathbf{B}}^s_{H_s}\right\|^2-\left\|\mathbf{Y}^s-\mathbf{X}\hat{\mathbf{B}}^s\right\|^2
\end{aligned}
$$

$$= \left\| \mathbf{X}(\hat{\mathbf{B}}^s - \hat{\mathbf{B}}^s_{H_s}) \right\|^2$$
$$= (\hat{\mathbf{B}}^s - \hat{\mathbf{B}}^s_{H_s})'\mathbf{X}'\mathbf{X}(\hat{\mathbf{B}}^s - \hat{\mathbf{B}}^s_{H_s})$$

bulunur. Buradan da (5.6) ifadesine göre

$$\hat{\mathbf{B}}^s_{H_s} - \hat{\mathbf{B}}^s = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}(\mathbf{I}\otimes\mathbf{A})'[(\mathbf{I}\otimes\mathbf{A})(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}(\mathbf{I}\otimes\mathbf{A})']^{-1}(\mathbf{C}^s - (\mathbf{I}\otimes\mathbf{A})\hat{\mathbf{B}}^s)$$

olduğundan,

$$RSS_{H_s} - RSS = (\mathbf{C}^s - (\mathbf{I}\otimes\mathbf{A})\hat{\mathbf{B}}^s)'[(\mathbf{I}\otimes\mathbf{A})(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}(\mathbf{I}\otimes\mathbf{A})']^{-1}(\mathbf{C}^s - (\mathbf{I}\otimes\mathbf{A})\hat{\mathbf{B}}^s) \quad (5.14)$$

olarak hesaplanır. $\mathbf{A}$ matrisinin satırları lineer bağımsız ve $\hat{\mathbf{B}}^s \sim N_{pm}(\mathbf{B}^s, \sigma^2(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1})$ olduğundan, Teorem 2.10.2'ye göre

$$(\mathbf{I}\otimes\mathbf{A})\hat{\mathbf{B}}^s \sim N_{qm}((\mathbf{I}\otimes\mathbf{A})\mathbf{B}^s, \sigma^2(\mathbf{I}\otimes\mathbf{A})(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}(\mathbf{I}\otimes\mathbf{A})') \quad (5.15)$$

olarak yazılır. Teorem 2.10.1 dikkate alınarak, $RSS_{H_s} - RSS$ farkının beklenen değeri

$$\begin{aligned} E(RSS_{H_s} - RSS) &= E((\mathbf{C}^s - (\mathbf{I}\otimes\mathbf{A})\hat{\mathbf{B}}^s)'[(\mathbf{I}\otimes\mathbf{A})(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}(\mathbf{I}\otimes\mathbf{A})']^{-1}(\mathbf{C}^s - (\mathbf{I}\otimes\mathbf{A})\hat{\mathbf{B}}^s)) \\ &= iz([(\mathbf{I}\otimes\mathbf{A})(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}(\mathbf{I}\otimes\mathbf{A})']^{-1}\sigma^2(\mathbf{I}\otimes\mathbf{A})(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}(\mathbf{I}\otimes\mathbf{A})') \\ &\quad + ((\mathbf{I}\otimes\mathbf{A})\mathbf{B}^s - \mathbf{C}^s)'[(\mathbf{I}\otimes\mathbf{A})(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}(\mathbf{I}\otimes\mathbf{A})']^{-1}((\mathbf{I}\otimes\mathbf{A})\mathbf{B}^s - \mathbf{C}^s) \\ &= \sigma^2 qm + ((\mathbf{I}\otimes\mathbf{A})\mathbf{B}^s - \mathbf{C}^s)'[(\mathbf{I}\otimes\mathbf{A})(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}(\mathbf{I}\otimes\mathbf{A})']^{-1} \\ &\quad ((\mathbf{I}\otimes\mathbf{A})\mathbf{B}^s - \mathbf{C}^s) \end{aligned}$$

olarak bulunur. (5.14) ifadesinin $\hat{\mathbf{B}}^s$ vektörünün sürekli bir fonksiyonu olduğu görülmektedir. Bu durumda $\hat{\mathbf{B}}^s$, RSS ifadesinden bağımsızdır. Gerçekten

$$\begin{aligned} \operatorname{cov}(\hat{\mathbf{B}}^s, \mathbf{Y}^s - \mathbf{X}\hat{\mathbf{B}}^s) &= \operatorname{cov}((\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}^s, \mathbf{Y}^s - \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}^s) \\ &= \operatorname{cov}((\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}^s, (\mathbf{I}\otimes\mathbf{M_Z})\mathbf{Y}^s) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'D(\mathbf{Y}^s)(\mathbf{I}\otimes\mathbf{M}_{\mathbf{Z}}) \\
&= \sigma^2(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'(\mathbf{I}\otimes\mathbf{M}_{\mathbf{Z}}) \\
&= \mathbf{0}
\end{aligned}
$$

olduğundan, $\hat{\mathbf{B}}^s$ ve $(\mathbf{Y}^s-\mathbf{X}\hat{\mathbf{B}}^s)'(\mathbf{Y}^s-\mathbf{X}\hat{\mathbf{B}}^s)$ ifadeleri bağımsızdır [32, Teorem 1.9, Teorem 3.5 (iii)].

H_s doğru olduğunda, $(\mathbf{I}\otimes\mathbf{A})\hat{\mathbf{B}}^s \sim N_{qm}(\mathbf{C}^s,\sigma^2(\mathbf{I}\otimes\mathbf{A})(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}(\mathbf{I}\otimes\mathbf{A})')$ olarak yazılır. Buradan

$$
\frac{RSS_{H_s}-RSS}{\sigma^2} = ((\mathbf{I}\otimes\mathbf{A})\hat{\mathbf{B}}^s-\mathbf{C}^s)'\left[D\left((\mathbf{I}\otimes\mathbf{A})\hat{\mathbf{B}}^s\right)\right]^{-1}((\mathbf{I}\otimes\mathbf{A})\hat{\mathbf{B}}^s-\mathbf{C}^s) \tag{5.16}
$$

bulunur. Teorem 2.10.3 dikkate alındığında $\frac{RSS_{H_s}-RSS}{\sigma^2} \sim \chi^2_{qm}$ elde edilir. Öte yandan $\frac{RSS}{\sigma^2}$ ifadesi,

$$
\begin{aligned}
\frac{RSS}{\sigma^2} &= \frac{\mathbf{Y}^{s\prime}(\mathbf{I}\otimes\mathbf{M}_{\mathbf{Z}})\mathbf{Y}^s}{\sigma^2} \\
&= \frac{(\mathbf{X}\mathbf{B}^s+\mathbf{E}^s)'(\mathbf{I}\otimes\mathbf{M}_{\mathbf{Z}})(\mathbf{X}\mathbf{B}^s+\mathbf{E}^s)}{\sigma^2} \\
&= \frac{\mathbf{B}^{s\prime}\mathbf{X}'(\mathbf{I}\otimes\mathbf{M}_{\mathbf{Z}})\mathbf{X}\mathbf{B}^s+\mathbf{B}^{s\prime}\mathbf{X}'(\mathbf{I}\otimes\mathbf{M}_{\mathbf{Z}})\mathbf{E}^s+\mathbf{E}^{s\prime}(\mathbf{I}\otimes\mathbf{M}_{\mathbf{Z}})\mathbf{X}\mathbf{B}^s+\mathbf{E}^{s\prime}(\mathbf{I}\otimes\mathbf{M}_{\mathbf{Z}})\mathbf{E}^s}{\sigma^2} \\
&= \frac{\mathbf{E}^{s\prime}(\mathbf{I}\otimes\mathbf{M}_{\mathbf{Z}})\mathbf{E}^s}{\sigma^2}
\end{aligned}
$$

olarak bulunur. Buradan Teorem 2.10.4'te dikkate alındığında $\frac{RSS}{\sigma^2}$ ifadesinin χ^2_{nm-pm} dağılımına sahip olduğu görülür. Böylece H_s doğru olduğunda,

$$
F = \frac{\left(RSS_{H_s}-RSS\right)/qm}{RSS/(nm-pm)} \sim F_{qm,nm-pm}
$$

olur. İspat tamamlanır. ■

Sonuç 5.3.1.1. Teorem 5.3.1.1'de $\mathbf{C}^s = \mathbf{0}$ olduğunda, H_s hipotezi için $F-$istatistiği

$$F = \frac{nm - pm}{qm} \frac{\mathbf{Y}^{s\prime}(\mathbf{I} \otimes \mathbf{P}^*)\mathbf{Y}^s}{\mathbf{Y}^{s\prime}(\mathbf{I} \otimes \mathbf{M}_{\mathbf{Z}})\mathbf{Y}^s}$$

şeklini alır. Burada $\mathbf{I} \otimes \mathbf{P}^* = \mathbf{I} \otimes \mathbf{P}_{\mathbf{Z}} - \mathbf{I} \otimes \mathbf{P}_H$, $\mathbf{I} \otimes \mathbf{P}_H$ simetrik idempotent bir matristir ve $(\mathbf{I} \otimes \mathbf{P}_{\mathbf{Z}})(\mathbf{I} \otimes \mathbf{P}_H) = (\mathbf{I} \otimes \mathbf{P}_H)(\mathbf{I} \otimes \mathbf{P}_{\mathbf{Z}}) = \mathbf{I} \otimes \mathbf{P}_H$ olur.

İspat. $\mathbf{C}^s = \mathbf{0}$ olduğunda, (5.6) eşitliği de kullanılarak,

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{Y}}^s_{H_s} &= \mathbf{X}\hat{\mathbf{B}}^s_{H_s} \\
&= \mathbf{X}\hat{\mathbf{B}}^s - \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}(\mathbf{I} \otimes \mathbf{A})'[(\mathbf{I} \otimes \mathbf{A})(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}(\mathbf{I} \otimes \mathbf{A})']^{-1}(\mathbf{I} \otimes \mathbf{A})\hat{\mathbf{B}}^s \\
&= \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}^s - \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}(\mathbf{I} \otimes \mathbf{A})'[(\mathbf{I} \otimes \mathbf{A})(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}(\mathbf{I} \otimes \mathbf{A})']^{-1}(\mathbf{I} \otimes \mathbf{A})(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}^s \\
&= (\mathbf{I} \otimes \mathbf{P}_{\mathbf{Z}})\mathbf{Y}^s - (\mathbf{I} \otimes \mathbf{P}^*)\mathbf{Y}^s \\
&= (\mathbf{I} \otimes \mathbf{P}_{\mathbf{Z}} - \mathbf{I} \otimes \mathbf{P}^*)\mathbf{Y}^s \\
&= (\mathbf{I} \otimes \mathbf{P}_H)\mathbf{Y}^s
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $\mathbf{I} \otimes \mathbf{P}_{\mathbf{Z}}$ ve $\mathbf{I} \otimes \mathbf{P}^*$ simetrik idempotent matrisler olduğundan, $\mathbf{I} \otimes \mathbf{P}_H$ matrisi de simetrik idempotenttir ve ayrıca

$$(\mathbf{I} \otimes \mathbf{P}_{\mathbf{Z}})(\mathbf{I} \otimes \mathbf{P}_H) = (\mathbf{I} \otimes \mathbf{P}_H)(\mathbf{I} \otimes \mathbf{P}_{\mathbf{Z}}) = \mathbf{I} \otimes \mathbf{P}_H$$

olur. $\hat{\mathbf{Y}}^s_{H_s} = \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}^s_{H_s} = (\mathbf{I} \otimes \mathbf{P}_H)\mathbf{Y}^s$ eşitliği, (5.8) ifadesinde yerine yazıldığında,

$$\begin{aligned}
RSS_{H_s} &= (\mathbf{Y}^s - (\mathbf{I} \otimes \mathbf{P}_H)\mathbf{Y}^s)'(\mathbf{Y}^s - (\mathbf{I} \otimes \mathbf{P}_H)\mathbf{Y}^s) \\
&= \mathbf{Y}^{s\prime}(\mathbf{I} - (\mathbf{I} \otimes \mathbf{P}_H))'(\mathbf{I} - (\mathbf{I} \otimes \mathbf{P}_H))\mathbf{Y}^s \qquad (5.17) \\
&= \mathbf{Y}^{s\prime}(\mathbf{I} \otimes \mathbf{M}_H)\mathbf{Y}^s
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece (5.7) ve (5.17) eşitliklerinden

$$
\begin{aligned}
RSS_{H_s} - RSS &= \mathbf{Y}^{s\prime}(\mathbf{I}\otimes\mathbf{M}_H)\mathbf{Y}^s - \mathbf{Y}^{s\prime}(\mathbf{I}\otimes\mathbf{M}_\mathbf{Z})\mathbf{Y}^s \\
&= \mathbf{Y}^{s\prime}(\mathbf{I}\otimes\mathbf{M}_H - \mathbf{I}\otimes\mathbf{M}_\mathbf{Z})\mathbf{Y}^s \\
&= \mathbf{Y}^{s\prime}(\mathbf{I}\otimes(\mathbf{P}_\mathbf{Z} - \mathbf{P}_H))\mathbf{Y}^s \\
&= \mathbf{Y}^{s\prime}(\mathbf{I}\otimes\mathbf{P}^*)\mathbf{Y}^s
\end{aligned}
\tag{5.18}
$$

elde edilir. Ayrıca

$$
\frac{RSS_{H_s} - RSS}{\sigma^2} = \frac{\mathbf{Y}^{s\prime}(\mathbf{I}\otimes\mathbf{P}^*)\mathbf{Y}^s}{\sigma^2} \sim \chi^2_{qm} \text{ ve } \frac{RSS}{\sigma^2} = \frac{\mathbf{Y}^{s\prime}(\mathbf{I}\otimes\mathbf{M}_\mathbf{Z})\mathbf{Y}^s}{\sigma^2} \sim \chi^2_{nm-pm}
$$

olduğundan,

$$
F = \frac{\left(RSS_{H_s} - RSS\right)/qm}{RSS/(nm-pm)} = \frac{\mathbf{Y}^{s\prime}(\mathbf{I}\otimes\mathbf{P}^*)\mathbf{Y}^s \big/ qm}{\mathbf{Y}^{s\prime}(\mathbf{I}\otimes\mathbf{M}_\mathbf{Z})\mathbf{Y}^s \big/ (nm-pm)} = \frac{nm-pm}{qm}\,\frac{\mathbf{Y}^{s\prime}(\mathbf{I}\otimes\mathbf{P}^*)\mathbf{Y}^s}{\mathbf{Y}^{s\prime}(\mathbf{I}\otimes\mathbf{M}_\mathbf{Z})\mathbf{Y}^s}
$$

bulunur ve ispat biter. ■

Tanım 5.3.1.1. Eğer $\mathbf{A}\in\mathbb{R}^{q,p}$ matrisinin satırları, $\mathbf{Z}\in\mathbb{R}^{n,p}$ matrisinin satırları ile lineer bağımlı ise, yani $\mathbf{A}=\mathbf{KZ}$ olacak şekilde bir $\mathbf{K}$ matrisi varsa, $\mathbf{y}=\mathbf{Z}\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\varepsilon}$ modeli altında $H:\mathbf{A}\boldsymbol{\beta}=\mathbf{0}$ hipotezine test edilebilir hipotez denir [32, sf. 121].

Bu tanım, $\mathbf{A}$ matrisinin satırları lineer bağımsız olmadığında ve daha genel bir durum olan $\mathbf{A}\boldsymbol{\beta}=\mathbf{c}$ ($\mathbf{c}\neq\mathbf{0}$ ve $\mathbf{c}\in\Re(\mathbf{A})$) olduğunda da kullanılır [32, sf. 121].

Tanım 5.3.1.1'den $\mathbf{A}$ matrisinin satırlarının lineer bağımsız olmadığı durumda, Teorem 5.3.1.1'e benzer şekilde çok değişkenli katlı lineer model için aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 5.3.1.2. (5.3) modeli altında $(\mathbf{I}\otimes\mathbf{A})\in\mathbb{R}^{km,pm}$ ve $r(\mathbf{I}\otimes\mathbf{A})=qm$ $(qm\leq pm)$ olmak üzere, $H_s:(\mathbf{I}\otimes\mathbf{A})\mathbf{B}^s=\mathbf{C}^s$ test edilebilir bir hipotez olsun. Bu durumda, H_s doğru ise,

$$F=\frac{\left(RSS_{H_s}-RSS\right)/\,qm}{RSS\,/\,(nm-pm)}\sim F_{qm,nm-pm}$$

ve

$$RSS_{H_s}-RSS=((\mathbf{I}\otimes\mathbf{A})\hat{\mathbf{B}}^s-\mathbf{C}^s)'[(\mathbf{I}\otimes\mathbf{A})(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}(\mathbf{I}\otimes\mathbf{A})']^-((\mathbf{I}\otimes\mathbf{A})\hat{\mathbf{B}}^s-\mathbf{C}^s)$$

olur.

İspat. $\mathbf{B}_0^s$, $(\mathbf{I}\otimes\mathbf{A})\mathbf{B}^s=\mathbf{C}^s$ lineer matris denkleminin herhangi bir çözümü, yani $(\mathbf{I}\otimes\mathbf{A})\mathbf{B}_0^s=\mathbf{C}^s$ olsun. (5.3) modelinde eşitliğin her iki tarafından $\mathbf{XB}_0^s$ çıkarılırsa

$$\mathbf{Y}^s-\mathbf{XB}_0^s=\mathbf{XB}^s-\mathbf{XB}_0^s+\mathbf{E}^s=\mathbf{X}(\mathbf{B}^s-\mathbf{B}_0^s)+\mathbf{E}^s$$

elde edilir. Bu model, $\widetilde{\mathbf{Y}}^s=\mathbf{Y}^s-\mathbf{XB}_0^s$ ve $\boldsymbol{\gamma}^s=\mathbf{B}^s-\mathbf{B}_0^s$ olmak üzere,

$$\widetilde{\mathbf{Y}}^s=\mathbf{X}\boldsymbol{\gamma}^s+\mathbf{E}^s \tag{5.19}$$

biçiminde yazılabilir. Bu da, (5.19) modelinde $\boldsymbol{\theta}^s=\mathbf{X}\boldsymbol{\gamma}^s$ olarak alındığında, $\widetilde{\mathbf{Y}}^s=\boldsymbol{\theta}^s+\mathbf{E}^s$ şeklinde ifade edilebilir. Burada $\boldsymbol{\theta}^s\in\Re(\mathbf{X})=\boldsymbol{\Omega}$'dır.

$\mathbf{K}\in\mathbb{R}^{k,n}$ matrisi, Tanım 5.3.1.1'de verilen $\mathbf{A}=\mathbf{KZ}$ eşitliğini sağlayan bir matris olmak üzere,

$$(\mathbf{I}\otimes\mathbf{K})\boldsymbol{\theta}^s=(\mathbf{I}\otimes\mathbf{K})\mathbf{X}\boldsymbol{\gamma}^s=(\mathbf{I}\otimes\mathbf{A})\boldsymbol{\gamma}^s=(\mathbf{I}\otimes\mathbf{A})(\mathbf{B}^s-\mathbf{B}_0^s)=\mathbf{0} \tag{5.20}$$

olduğundan H_s hipotezi $\boldsymbol{\theta}^s\in\boldsymbol{\omega}=\mathcal{N}(\mathbf{I}\otimes\mathbf{K})\cap\boldsymbol{\Omega}$ olarak yazılır. Öte yandan, $\boldsymbol{\omega}^\perp\cap\boldsymbol{\Omega}=\Re(\mathbf{P}_{\boldsymbol{\Omega}}(\mathbf{I}\otimes\mathbf{K})')$, $boy(\boldsymbol{\omega}^\perp\cap\boldsymbol{\Omega})=qm$ ve $\mathbf{P}_{\boldsymbol{\Omega}}-\mathbf{P}_{\boldsymbol{\omega}}=\mathbf{P}_{\boldsymbol{\omega}^\perp\cap\boldsymbol{\Omega}}$ olduğu bilinmektedir [32]. Böylece

$$(\mathbf{I}-\mathbf{P}_{\Omega})\tilde{\mathbf{Y}}^{s}=\mathbf{M}_{\Omega}\tilde{\mathbf{Y}}^{s}=\mathbf{M}_{\Omega}(\mathbf{Y}^{s}-\mathbf{X}\mathbf{B}_{0}^{s})=\mathbf{M}_{\Omega}\mathbf{Y}^{s}=\mathbf{M}_{\Omega}(\mathbf{X}\mathbf{B}^{s}+\mathbf{E}^{s})=\mathbf{M}_{\Omega}\mathbf{E}^{s}$$

olarak yazılabilir. H_s doğru ve

$$(\mathbf{P}_{\Omega}(\mathbf{I}\otimes\mathbf{K})')'\mathbf{X}\boldsymbol{\gamma}^{s}=(\mathbf{I}\otimes\mathbf{K})\mathbf{P}_{\Omega}\mathbf{X}\boldsymbol{\gamma}^{s}=(\mathbf{I}\otimes\mathbf{K})\mathbf{X}\boldsymbol{\gamma}^{s}=(\mathbf{I}\otimes\mathbf{A})\boldsymbol{\gamma}^{s}=\mathbf{0}$$

olduğundan,

$$\mathbf{P}_{\boldsymbol{\omega}^{\perp}\cap\boldsymbol{\Omega}}\tilde{\mathbf{Y}}^{s}=\mathbf{P}_{\boldsymbol{\omega}^{\perp}\cap\boldsymbol{\Omega}}(\mathbf{Y}^{s}-\mathbf{X}\mathbf{B}_{0}^{s})=\mathbf{P}_{\boldsymbol{\omega}^{\perp}\cap\boldsymbol{\Omega}}(\mathbf{Y}^{s}-\mathbf{X}\mathbf{B}^{s}+\mathbf{X}\boldsymbol{\gamma}^{s})=\mathbf{P}_{\boldsymbol{\omega}^{\perp}\cap\boldsymbol{\Omega}}\mathbf{E}^{s}$$

elde edilir. Buradan

$$RSS=\tilde{\mathbf{Y}}^{s\prime}\mathbf{M}_{\Omega}\tilde{\mathbf{Y}}^{s}=\mathbf{E}^{s\prime}\mathbf{M}_{\Omega}\mathbf{E}^{s} \tag{5.21}$$

ve

$$RSS_{H_s}=\tilde{\mathbf{Y}}^{s\prime}\mathbf{M}_{\boldsymbol{\omega}}\tilde{\mathbf{Y}}^{s}=\mathbf{E}^{s\prime}\mathbf{M}_{\boldsymbol{\omega}}\mathbf{E}^{s} \tag{5.22}$$

bulunur. (5.21) ve (5.22) eşitliklerinden

$$RSS_{H_s}-RSS=\mathbf{E}^{s\prime}\mathbf{M}_{\boldsymbol{\omega}}\mathbf{E}^{s}-\mathbf{E}^{s\prime}\mathbf{M}_{\Omega}\mathbf{E}^{s}=\mathbf{E}^{s\prime}(\mathbf{P}_{\Omega}-\mathbf{P}_{\boldsymbol{\omega}})\mathbf{E}^{s}=\mathbf{E}^{s\prime}\mathbf{P}_{\boldsymbol{\omega}^{\perp}\cap\boldsymbol{\Omega}}\mathbf{E}^{s}$$

elde edilir. Böylece, $\dfrac{RSS_{H_s}-RSS}{\sigma^2}\sim\chi^2_{qm}$ ve $\dfrac{RSS}{\sigma^2}\sim\chi^2_{nm-pm}$ olduğundan,

$$F=\frac{\left(RSS_{H_s}-RSS\right)/\,qm}{RSS\,/\,(nm-pm)}\sim F_{qm,nm-pm}$$

olur. Son olarak,

$$
\begin{aligned}
\mathbf{P}_{\boldsymbol{\omega}^{\perp}\cap\boldsymbol{\Omega}} &= \mathbf{P}_{\boldsymbol{\Omega}}(\mathbf{I}\otimes\mathbf{K})'[(\mathbf{I}\otimes\mathbf{K})\mathbf{P}_{\boldsymbol{\Omega}}\mathbf{P}_{\boldsymbol{\Omega}}(\mathbf{I}\otimes\mathbf{K})']^{-}(\mathbf{I}\otimes\mathbf{K})\mathbf{P}_{\boldsymbol{\Omega}} \\
&= \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'(\mathbf{I}\otimes\mathbf{K})'[(\mathbf{I}\otimes\mathbf{K})\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'(\mathbf{I}\otimes\mathbf{K})']^{-}(\mathbf{I}\otimes\mathbf{K})\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}' \\
&= \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}(\mathbf{I}\otimes\mathbf{A})'[(\mathbf{I}\otimes\mathbf{A})(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}(\mathbf{I}\otimes\mathbf{A})']^{-}(\mathbf{I}\otimes\mathbf{A})(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{I}\otimes\mathbf{A})(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\widetilde{\mathbf{Y}}^{s} &= (\mathbf{I}\otimes\mathbf{K})\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'(\mathbf{Y}^{s}-\mathbf{X}\mathbf{B}_0^{s}) \\
&= (\mathbf{I}\otimes\mathbf{K})\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}^{s}-(\mathbf{I}\otimes\mathbf{K})\mathbf{X}\mathbf{B}_0^{s} \\
&= (\mathbf{I}\otimes\mathbf{A})\hat{\mathbf{B}}^{s}-(\mathbf{I}\otimes\mathbf{A})\mathbf{B}_0^{s} \\
&= (\mathbf{I}\otimes\mathbf{A})\hat{\mathbf{B}}^{s}-\mathbf{C}^{s}
\end{aligned}
$$

olduğundan,

$$
\begin{aligned}
RSS_{H_s}-RSS &= \widetilde{\mathbf{Y}}^{s\prime}\left(\mathbf{P}_{\boldsymbol{\Omega}}-\mathbf{P}_{\boldsymbol{\omega}}\right)\widetilde{\mathbf{Y}}^{s} \\
&= \widetilde{\mathbf{Y}}^{s\prime}\mathbf{P}_{\boldsymbol{\omega}^{\perp}\cap\boldsymbol{\Omega}}\widetilde{\mathbf{Y}}^{s} \\
&= \widetilde{\mathbf{Y}}^{s\prime}\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}(\mathbf{I}\otimes\mathbf{A})'[(\mathbf{I}\otimes\mathbf{A})(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}(\mathbf{I}\otimes\mathbf{A})']^{-}(\mathbf{I}\otimes\mathbf{A})(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\widetilde{\mathbf{Y}}^{s} \\
&= ((\mathbf{I}\otimes\mathbf{A})\hat{\mathbf{B}}^{s}-\mathbf{C}^{s})'[(\mathbf{I}\otimes\mathbf{A})(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}(\mathbf{I}\otimes\mathbf{A})']^{-}((\mathbf{I}\otimes\mathbf{A})\hat{\mathbf{B}}^{s}-\mathbf{C}^{s})
\end{aligned}
$$

bulunur ve ispat biter. ■

Uyarı 5.3.1.1. Teorem 5.3.1.1 ve Teorem 5.3.1.2, $\mathbf{X}$ matrisinin tam sütun ranklı olduğu durumlar için verilmiştir. Fakat $\mathbf{X}$ matrisinin tam sütun ranklı olmadığı durumda Teorem 5.3.1.1 ve Teorem 5.3.1.2, $(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$ ve $nm-pm$ sırasıyla $(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-}$ ve $nm-r(\mathbf{X})$ ile yer değiştirdiğinde de doğrudur.

5.3.2. Olabilirlik oran testleri

Bu kısımda çok değişkenli lineer modellerde olabilirlik oran testleri ile ilgili sonuçların bazıları çok değişkenli katlı lineer modellere genişletilecektir.

Teorem 5.3.2.1. (5.3) modeli altında $H_s : (\mathbf{I} \otimes \mathbf{A})\mathbf{B}^s = \mathbf{C}^s$ hipotezi için ML oran istatistiği

$$l = \frac{L(\hat{\mathbf{B}}^s_{H_s}, \hat{\sigma}^2_{H_s})}{L(\hat{\mathbf{B}}^s, \hat{\sigma}^2)} = \left(\frac{\hat{\sigma}^2_{H_s}}{\hat{\sigma}^2} \right)^{-\frac{nm}{2}} \tag{5.23}$$

şeklindedir.

İspat. (5.3) modeli altında (5.9) fonksiyonu için [19, Sonuç 4.1]'den

$$L(\mathbf{B}^s, \sigma^2) = \frac{1}{(2\pi)^{nm/2}(\sigma^2)^{nm/2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(\mathbf{Y}^s - \mathbf{X}\mathbf{B}^s)'(\mathbf{Y}^s - \mathbf{X}\mathbf{B}^s)} \leq \frac{1}{(2\pi)^{nm/2}(\sigma^2)^{nm/2}} e^{-nm/2}$$

yazılır. Böylece (5.9) fonksiyonunun maksimumlaştırılması ile

$$L(\hat{\mathbf{B}}^s, \hat{\sigma}^2) = \frac{1}{(2\pi)^{nm/2}(\hat{\sigma}^2)^{nm/2}} e^{-nm/2} \tag{5.24}$$

maksimum olabilirlik fonksiyonu elde edilir. Benzer şekilde, $H_s : (\mathbf{I} \otimes \mathbf{A})\mathbf{B}^s = \mathbf{C}^s$ kısıtlaması altında (5.11) fonksiyonun maksimum olabilirlik fonksiyonu

$$L(\hat{\mathbf{B}}^s_{H_s}, \hat{\sigma}^2_{H_s}) = \frac{1}{(2\pi)^{nm/2}(\hat{\sigma}^2_{H_s})^{nm/2}} e^{-nm/2} \tag{5.25}$$

olarak elde edilir. (5.24) ve (5.25) fonksiyonları oranlandığında

$$l = \frac{\dfrac{1}{(2\pi)^{nm/2}(\hat{\sigma}^2_{H_s})^{nm/2}} e^{-nm/2}}{\dfrac{1}{(2\pi)^{nm/2}(\hat{\sigma}^2)^{nm/2}} e^{-nm/2}} = \left(\frac{\hat{\sigma}^2_{H_s}}{\hat{\sigma}^2} \right)^{-\frac{nm}{2}}$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanır. ■

Sonuç 5.3.2.1. Teorem 5.3.2.1'deki H_s hipotezi doğru olduğunda l, ML oran istatistiği

$$\left(1+\frac{RSS_{H_s}-RSS}{RSS}\right)^{-\frac{nm}{2}} \tag{5.26}$$

ifadesine denktir.

İspat. (5.3) modeline göre (5.7) ve (5.8) eşitliklerinden, (5.10) ve (5.12) ile verilen $\hat{\sigma}^2$ ve $\hat{\sigma}^2_{H_s}$ tahminleri sırasıyla

$$\hat{\sigma}^2=\frac{RSS}{nm} \text{ ve } \hat{\sigma}^2_{H_s}=\frac{RSS_{H_s}}{nm}$$

şeklinde yazılabilir. (5.23) ile verilen l, ML oran istatistiği

$$l=\left(\frac{\hat{\sigma}^2_{H_s}}{\hat{\sigma}^2}\right)^{-\frac{nm}{2}}=\left(\frac{\frac{RSS_{H_s}}{nm}}{\frac{RSS}{nm}}\right)^{-\frac{nm}{2}}=\left(1+\frac{RSS_{H_s}-RSS}{RSS}\right)^{-\frac{nm}{2}}$$

şeklinde ifade edilir. Böylece ispat tamamlanır. ■

l, ML oran istatistiğinin büyük değerleri için H_s hipotezi kabul edilir. Tersine olarak değer ne kadar küçük ise, H_s hipotezinin reddi yönündeki karar o kadar güçlü olacaktır. Çünkü l, ML oran istatistiği ölçeklendirilmiş değerine göre yazıldığında

$$\frac{nm(\hat{\sigma}^2_{H_s}-\hat{\sigma}^2)/qm}{nm\hat{\sigma}^2/(nm-pm)}=\frac{(RSS_{H_s}-RSS)/qm}{RSS/(nm-pm)} \tag{5.27}$$

şeklindedir. Böylece (5.27) eşitliği kullanılarak Sonuç 5.3.2.1 ve Teorem 5.3.1.1'den

$$F = \frac{nm - pm}{qm}\left(l^{-\frac{2}{nm}} - 1\right) \sim F_{qm,nm-pm}$$

bulunur.

Sonuç 5.3.2.2 ve Sonuç 5.3.2.3, Teorem 5.3.2.1'deki H_s hipotezinin özel durumları ile ilgilidir.

Sonuç 5.3.2.2. $H_s : (\mathbf{I} \otimes \mathbf{A})\mathbf{B}^s = \mathbf{C}^s$ hipotezinde $\mathbf{C}^s = \mathbf{0}$ olmak üzere, H_s doğru olduğunda,

$$F = \frac{nm - pm}{qm}\frac{\mathbf{Y}^{s\prime}(\mathbf{I} \otimes \mathbf{P}^*)\mathbf{Y}^s}{\mathbf{Y}^{s\prime}(\mathbf{I} \otimes \mathbf{M_Z})\mathbf{Y}^s} = \frac{nm - pm}{qm}\left(l^{-\frac{2}{nm}} - 1\right) \sim F_{qm,nm-pm}$$

olur.

İspat. $RSS_{H_s} = nm\hat{\sigma}^2_{H_s}$ olduğundan (5.17) kullanılarak

$$\hat{\sigma}^2_{H_s} = \frac{\mathbf{Y}^{s'}(\mathbf{I} \otimes \mathbf{M}_H)\mathbf{Y}^s}{nm} \tag{5.28}$$

bulunur. Sonuç 5.3.1.1'in ispatına benzer şekilde ilerlenerek iddia kolayca doğrulanır. ■

(5.3) modeli altında $H_s : (\mathbf{I} \otimes \mathbf{A})\mathbf{B}^s = \mathbf{C}^s$ hipotezinin özel bir durumu olarak, $\mathbf{A} = (\mathbf{0} : \mathbf{I})$ ve $\mathbf{C}^s = \mathbf{0}$ alındığında benzer şekilde, $H_{s1} : \mathbf{B}^s_2 = \mathbf{0}$ biçimindeki hipotez test edilebilir. Burada $\hat{\sigma}^2_1$, $L(\hat{\mathbf{B}}^s_{H_s}, \hat{\sigma}^2_{H_s})$ fonksiyonu için $\hat{\sigma}^2_{H_s}$ ifadesinin maksimum olabilirlik tahminidir. Bu durumda l, ML oran istatistiği aşağıdaki sonuçta verilebilir.

Sonuç 5.3.2.3. H_{s1} hipotezi altında l, ML oran istatistiği

$$l = \left(\frac{\hat{\sigma}_1^2}{\hat{\sigma}^2} \right)^{-\frac{nm}{2}}$$

olur.

İspat. H_{s1} hipotezi altında (5.3) modeli $\mathbf{Y}^s = \mathbf{X}_1\mathbf{B}_1^s + \mathbf{E}^s$ ve maksimum olabilirlik fonksiyonu $L(\hat{\mathbf{B}}_{H_s}^s, \hat{\sigma}_{H_s}^2) = \dfrac{1}{(2\pi)^{nm/2}(\hat{\sigma}_1^2)^{nm/2}} e^{-nm/2}$ şeklindedir. Burada $\hat{\mathbf{B}}_{H_s}^s$ ve $\hat{\sigma}_{H_s}^2$ sırasıyla,

$$\hat{\mathbf{B}}_1^s = (\mathbf{X}_1'\mathbf{X}_1)^{-1}\mathbf{X}_1'\mathbf{Y}^s \text{ ve } \hat{\sigma}_1^2 = \frac{(\mathbf{Y}^s - \mathbf{X}_1\mathbf{B}_1^s)'(\mathbf{Y}^s - \mathbf{X}_1\mathbf{B}_1^s)}{nm}$$

şeklinde ifade edilir. Yine Teorem 5.3.2.1'in ispatındaki yol izlendiğinde, $l = \left(\dfrac{\hat{\sigma}_1^2}{\hat{\sigma}^2} \right)^{-\frac{nm}{2}}$ olduğu kolayca görülür. ■

Uyarı 5.3.2.1. $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{n,n}$ bilinen pozitif kararlı bir matris olmak üzere, (5.3) modeli için $E(\mathbf{E}) = \mathbf{0}$ ve $D(\mathbf{E}) = \sigma^2(\mathbf{I} \otimes \mathbf{V})$ olsun. Teorem 2.5.1'e göre $\mathbf{V} = \mathbf{KK}'$ olacak şekilde bir $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{n,n}$ tersinir matrisi vardır. Böylece $\mathbf{L} = (\mathbf{I} \otimes \mathbf{K}^{-1})\mathbf{Y}^s$, $\mathbf{A} = (\mathbf{I} \otimes \mathbf{K}^{-1})\mathbf{X}$ ve $\boldsymbol{\eta} = (\mathbf{I} \otimes \mathbf{K}^{-1})\mathbf{E}^s$ alınarak $\mathbf{L} = \mathbf{AB}^s + \boldsymbol{\eta}$ modeli elde edilir. Burada $r(\mathbf{A}) = mp$, $E(\boldsymbol{\eta}) = \mathbf{0}$ ve $D(\boldsymbol{\eta}) = \sigma^2\mathbf{I}$ olur. Sonuç olarak $D(\mathbf{E}^s) = \sigma^2\mathbf{I}$ olmak üzere, $\mathbf{Y}^s = \mathbf{XB}^s + \mathbf{E}^s$ modeli ele alındığında Kısım 5.3.1 ve Kısım 5.3.2'de elde edilen sonuçların geçerli olduğunu vurgulamakta yarar vardır.

BÖLÜM 6. TARTIŞMA VE ÖNERİLER

Bu çalışmada ele alınan konular çerçevesinde elde edilen sonuçlar, çok değişkenli lineer modeller için elde edilmiş olan bazı sonuçların daha genel durumlara genişletilebileceğini göstermektedir. Konuyu bu şekilde genel bir durum olarak ele almak anlamlıdır. Çünkü gerçek hayatta herhangi bir açıklayıcı değişken grubuyla bir bağımlı (açıklanan) değişkeni açıklayacak şekildeki modelleri içeren problemlerin yanı sıra aynı açıklayıcı değişken grubuyla aynı anda birden fazla bağımlı değişkeni açıklayacak şekildeki modelleri içeren problemlere de rastlamak mümkündür. Yani bazı durumlarda (4.3) ile verilen $\mathbf{Y} = \mathbf{ZB} + \mathbf{E}$ şeklindeki çok değişkenli katlı lineer model, (4.1) ile verilen $\mathbf{y} = \mathbf{Z\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$ şeklindeki klasik çok değişkenli lineer modele göre daha genel bir yaklaşım ortaya koyacaktır. Ayrıca karşılaşılan problemlerin çözümü için oluşturulabilecek modellerle ilgili birden fazla seçimin söz konusu olabileceğini de vurgulamakta yarar vardır. Ancak koşullar uygun olduğunda lineer modeli tercih etmek, lineer modellerin yorumlama ve sonuç çıkarma anlamında diğer modellerden daha kolay ve anlaşılır olmasından dolayı işlem kolaylığı sağlayacaktır.

Çalışmada, $\mathbf{y} = \mathbf{Z\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$ çok değişkenli lineer modeli ve $\mathbf{Y} = \mathbf{ZB} + \mathbf{E}$ çok değişkenli katlı lineer modeli ele alınarak, bazı kısıtlamalar altında $\boldsymbol{\beta}$ vektörünün ve katlı durum için de $\mathbf{B}$ matrisinin tahmin edilebilir parametrik fonksiyonlarının BLUE değerleri ile ilgili bazı sonuçlar verilmiştir. Daha sonra çok değişkenli katlı lineer model için hipotez testleri ele alınmıştır. Bu nedenle, birinci bölümde öncelikle lineer modellerle ilgili genel bazı hatırlatmalar yapılmış ve daha sonra çalışmanın içeriği ile ilgili bilgiler verilmiştir. İkinci bölümde ise, lineer modellerle ilgili ele alınan sonuçların elde edilmesine temel teşkil edecek olan matris cebiri ile ilgili bazı sonuçlar ve bazı istatistiksel kavramlara yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde, $\{\mathbf{y}, \mathbf{X\beta}, \sigma^2\mathbf{V}\}$ (tam model olarak bilinir) üçlüsü ile gösterilen çok değişkenli lineer model ele alınmıştır. Bu model $\{\mathbf{y}, \mathbf{X}_1\boldsymbol{\beta}_1 + \mathbf{X}_2\boldsymbol{\beta}_2, \sigma^2\mathbf{V}\}$ biçiminde parçalanmış lineer model olarak ifade edilebilir. Parçalanmış model altında, $\boldsymbol{\beta}_1$ kısıtlanacak parametre olarak ele alınmış ve $\boldsymbol{\beta}_2$ parametresinin tahmin edilebilir lineer fonksiyonlarının BLUE değerleri ile ilgilenilmiştir.

$\boldsymbol{\beta}_1$ parametresinin etkilerini ortadan kaldırmak için $\Re(\mathbf{X}_1^{\perp})$ üzerine uygun izdüşümler alınır. Bu şekildeki yaklaşımla genel olarak $\{\mathbf{M}_1\mathbf{y}, \mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\boldsymbol{\beta}_2, \sigma^2\mathbf{M}_1\mathbf{V}\mathbf{M}_1\}$ (düzgün indirgenmiş model olarak bilinir), $\{\mathbf{M}_1\mathbf{y}, \mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\boldsymbol{\beta}_2, \sigma^2\mathbf{V}\}$, $\{\mathbf{y}, \mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\boldsymbol{\beta}_2, \sigma^2\mathbf{V}\}$ ve $\{\mathbf{y}, \mathbf{X}_2\boldsymbol{\beta}_2, \sigma^2\mathbf{V}\}$ (bu tür modeller de indirgenmiş model olarak bilinir) lineer modelleri elde edilir. Verilen bu indirgenmiş modeller ve tam model, $\mathbf{V}$ varyans-kovaryans matrisinin pozitif kararlı ve pozitif kararsız olduğu durumlarda birçok çalışmada ele alınmıştır [1, 3-5, 12, 22, 24, 25, 39]. Bu çalışmaların birçoğunda, $\boldsymbol{\beta}_2$ parametresinin tahmin edilebilir lineer fonksiyonu $\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\boldsymbol{\beta}_2$ alınarak, tam model ve indirgenmiş modeller altında $\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\boldsymbol{\beta}_2$ vektörünün BLUE değerleri ile ilgili karşılaştırmalar verilmiştir. Çalışmanın üçüncü bölümünde parçalanmış model, $\{\mathbf{M}_1\mathbf{y}, \mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\boldsymbol{\beta}_2, \sigma^2\mathbf{M}_1\mathbf{V}\mathbf{M}_1\}$ düzgün indirgenmiş lineer modeli ve $\{\mathbf{y}, \mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\boldsymbol{\beta}_2, \sigma^2\mathbf{V}\}$ indirgenmiş lineer modeli ele alınarak, bu modeller altında $\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\boldsymbol{\beta}_2$ vektörünün BLUE değerlerinin çakışma durumları ile ilgili bilinen bazı sonuçlar özetlenmiştir. Ayrıca $\{\mathbf{y}, \mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\boldsymbol{\beta}_2, \sigma^2\mathbf{V}\}$ indirgenmiş lineer modeli altında $\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\boldsymbol{\beta}_2$ için BLUE, tam model altında BLUE olmadığında, bu tahmin edicinin kabul edilebilir bir tahmin edici olması ile ilgili bir sonuç verilmiştir. Daha sonra, $\{\mathbf{y}, \mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\boldsymbol{\beta}_2, \sigma^2\mathbf{V}\}$ indirgenmiş modeli altında $\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\boldsymbol{\beta}_2$ için BLUE değerinin genel gösterimi $\mathbf{F}\mathbf{y}$ olmak üzere, tam model altında $\mathbf{F}\mathbf{M}_1\mathbf{y}$ biçimindeki tahmin edici ele alındığında, bu tahmin edicinin tam model altında BLUE kalması ile ilgili bazı koşullar verilmiştir. Bu bölümde içerilen kavram ve sonuçların, özellikle [12] ve [25] çalışmaları dikkate alınarak derlenmiş olduğunu vurgulamakta yarar vardır.

Dördüncü bölüm çalışmanın ana bölümlerinden ilkidir. Bu bölümde, (4.1) biçimindeki çok değişkenli lineer modeller ile ilgili üçüncü bölümde verilen sonuçların, (4.3) biçimindeki çok değişkenli katlı lineer modellere genişletilmesi yapılmaktadır. Öncelikle $\{\mathbf{y}_{(i)}, \mathbf{Z\beta}_{(i)}, \sigma_i^2\mathbf{I}\}, i=1,2,\ldots,m$, biçimindeki çok değişkenli lineer modeller kümesinin $\{\mathbf{Y}, \mathbf{ZB}, \mathbf{\Sigma}\otimes\mathbf{I}\}$ biçimindeki bir çok değişkenli katlı lineer model olarak ifade edilebileceği vurgulanmıştır. Ayrıca bu modelin de dördüncü bölümde verilen *vec* operatörü yardımıyla $\{\mathbf{Y}^s, \mathbf{XB}^s, \mathbf{\Sigma}\otimes\mathbf{I}\}$ şeklinde de ifade edilebileceği belirtilmiştir. Daha sonra $\{\mathbf{M}_1\mathbf{Y}^s, \mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\mathbf{B}_2^s, \mathbf{M}_1(\mathbf{\Sigma}\otimes\mathbf{I})\mathbf{M}_1\}$ düzgün indirgenmiş modeli ve $\{\mathbf{Y}^s, \mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\mathbf{B}_2^s, \mathbf{\Sigma}\otimes\mathbf{I}\}$ indirgenmiş modeli ele alınarak, $\{\mathbf{Y}^s, \mathbf{XB}^s, \mathbf{\Sigma}\otimes\mathbf{I}\}$ modeli ve indirgenmiş modeller altında $\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\mathbf{B}_2^s$ ifadesinin BLUE değeri ile ilgili üçüncü bölümde verilen sonuçlara benzer sonuçlar verilmiştir. Her şeyden önce $\{\mathbf{y}_{(i)}, \mathbf{Z\beta}_{(i)}, \sigma_i^2\mathbf{I}\}$ modelleri için $\mathbf{C}_i\mathbf{Z\beta}_{(i)}$ tahmin edilebilir parametrik fonksiyonlar vektörlerinin BLUE değerlerinin, $\mathbf{F}_i$ matrisi $\mathbf{F}_i(\mathbf{Z}:\mathbf{Z}^{\perp}) = \mathbf{C}_i(\mathbf{Z}:\mathbf{0})$ denkleminin bir çözümü olmak üzere, $\mathbf{F}_i\mathbf{y}_{(i)}$ olarak verilebileceğini vurgulamakta yarar vardır. Bu durum katlı modeller için ele alındığında, $\mathbf{F}$ matrisi $\mathbf{F}(\mathbf{X}:(\mathbf{\Sigma}\otimes\mathbf{I})\mathbf{X}^{\perp}) = \mathbf{C}(\mathbf{X}:\mathbf{0})$ denkleminin bir çözümü olmak üzere, $\mathbf{CXB}^s$ parametrik fonksiyonlar vektörü için BLUE $\mathbf{FY}^s$ olur. Bu denklem sistemi tutarlı olup $\mathbf{H}_2$ herhangi bir uygun boyutlu matris olmak üzere, $\mathbf{F} = \mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_2((\mathbf{\Sigma}\otimes\mathbf{I})\mathbf{M}_\mathbf{X})^-((\mathbf{\Sigma}\otimes\mathbf{I})\mathbf{M}_\mathbf{X})$ şeklinde tanımlanan $\mathbf{F}$ matrisi, denklem için çözümdür. $\{\mathbf{Y}^s, \mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\mathbf{B}_2^s, \mathbf{\Sigma}\otimes\mathbf{I}\}$ indirgenmiş modeli altında $\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\mathbf{B}_2^s$ için her BLUE değerinin $\{\mathbf{Y}^s, \mathbf{XB}^s, \mathbf{\Sigma}\otimes\mathbf{I}\}$ modeli altında da $\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\mathbf{B}_2^s$ için BLUE kalmasının gerek ve yeter koşulu

$$\Re(\mathbf{X}_1) \subseteq \Re((\mathbf{\Sigma}\otimes\mathbf{I})\mathbf{H})$$

olmasıdır. $\{\mathbf{Y}^s, \mathbf{XB}^s, \mathbf{\Sigma}\otimes\mathbf{I}\}$ modeli zayıf singüler, yani $\Re(\mathbf{X}_1:\mathbf{X}_2) \subseteq \Re(\mathbf{\Sigma}\otimes\mathbf{I})$ ve $r(\mathbf{X}_1:\mathbf{X}_2) = r(\mathbf{X}_1) + r(\mathbf{X}_2)$ olduğunda, aynı durum için

$$\mathbf{X}_2'\mathbf{M}_1(\mathbf{\Sigma}\otimes\mathbf{I})^+\mathbf{X}_1 = \mathbf{0}$$

koşulu geçerlidir. Bu koşul yerine

$$\mathbf{X}_2'\mathbf{M}_1(\mathbf{\Sigma}\otimes\mathbf{I})^-\mathbf{X}_1 = \mathbf{0}$$

koşulu alındığında da, $\{\mathbf{Y}^s, \mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\mathbf{B}_2^s, \mathbf{\Sigma}\otimes\mathbf{I}\}$ indirgenmiş modeli altında $\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\mathbf{B}_2^s$ için her BLUE, $\{\mathbf{Y}^s, \mathbf{X}\mathbf{B}^s, \mathbf{\Sigma}\otimes\mathbf{I}\}$ modeli altında da $\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\mathbf{B}_2^s$ için BLUE kalır. Çünkü $\{\mathbf{Y}^s, \mathbf{X}\mathbf{B}^s, \mathbf{\Sigma}\otimes\mathbf{I}\}$ modelinin zayıf singülerlik koşulu, $\mathbf{\Sigma}\otimes\mathbf{I}$ matrisinin genelleştirilmiş tersinin seçiminden bağımsız olarak $\mathbf{X}_2'\mathbf{M}_1(\mathbf{\Sigma}\otimes\mathbf{I})^-\mathbf{X}_1$ ifadesini değişmez yapar. $\Re(\mathbf{X}_1) \not\subset \Re(\mathbf{\Sigma}\otimes\mathbf{I})$ olması modellerin çelişmesi durumuna karşılık geldiğinden, $\{\mathbf{Y}^s, \mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\mathbf{B}_2^s, \mathbf{\Sigma}\otimes\mathbf{I}\}$ modeli altında $\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\mathbf{B}_2^s$ için BLUE değerinin $\{\mathbf{Y}^s, \mathbf{X}\mathbf{B}^s, \mathbf{\Sigma}\otimes\mathbf{I}\}$ modeli altında $\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\mathbf{B}_2^s$ için BLUE olması beklenemez. Fakat $\Re(\mathbf{X}_1) = \Re((\mathbf{\Sigma}\otimes\mathbf{I})\mathbf{X}_1)$ olduğunda, Teorem 4.4.1'de verilen koşulun daima sağlandığı görülür. Ayrıca $\Re(\mathbf{X}_1) = \Re((\mathbf{\Sigma}\otimes\mathbf{I})\mathbf{X}_1)$ koşulu, $\Re((\mathbf{\Sigma}\otimes\mathbf{I})\mathbf{X}_1) \subseteq \Re(\mathbf{X}_1)$ koşuluna da denktir ve $\Re(\mathbf{X}_1) = \Re((\mathbf{\Sigma}\otimes\mathbf{I})\mathbf{X}_1)$ koşulu $\{\mathbf{Y}^s, \mathbf{X}_1\mathbf{B}_1^s, \mathbf{\Sigma}\otimes\mathbf{I}\}$ modelindeki $\mathbf{X}_1\mathbf{B}_1^s$ vektörünün BLUE ve OLSE değerlerinin eşitliği için gerek ve yeter koşuldur. $\mathbf{P}_{\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2}\mathbf{Y}^s$, $\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\mathbf{B}_2^s$ için $\{\mathbf{Y}^s, \mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\mathbf{B}_2^s, \mathbf{\Sigma}\otimes\mathbf{I}\}$ indirgenmiş modeli altında BLUE ise, $\{\mathbf{Y}^s, \mathbf{X}\mathbf{B}^s, \mathbf{\Sigma}\otimes\mathbf{I}\}$ modeli altında da BLUE kalır. $\{\mathbf{Y}^s, \mathbf{X}\mathbf{B}^s, \mathbf{\Sigma}\otimes\mathbf{I}\}$ modeli ve $\{\mathbf{M}_1\mathbf{Y}^s, \mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\mathbf{B}_2^s, \mathbf{M}_1(\mathbf{\Sigma}\otimes\mathbf{I})\mathbf{M}_1\}$ düzgün indirgenmiş modeli altında BLUE değerlerinin çakıştığı Teorem 4.4.3'te gösterilmiştir.

Kısım 4.4'te elde edilen sonuçlar, dağılım matrisinin farklı durumları için ele alındığında, bazı değişiklikler yapılarak benzer sonuçlar elde edilebilir. $\{\mathbf{y}_{(i)}, \mathbf{Z}\boldsymbol{\beta}_{(i)}, \sigma^2\mathbf{V}\}$ modellerini ele almak, $\{\mathbf{y}_{(i)}, \mathbf{Z}\boldsymbol{\beta}_{(i)}, \sigma_i^2\mathbf{I}\}$ modellerine göre daha genel bir duruma karşılık gelir. $\mathrm{cov}(\boldsymbol{\varepsilon}_{(i)}, \boldsymbol{\varepsilon}_{(k)}) = \sigma^2\mathbf{I}$ olarak kabul edildiğinde, katlı durumda dağılım matrisi $\sigma^2(\mathbf{I}\otimes\mathbf{V})$ biçiminde ifade edilir. $\{\mathbf{y}_{(i)}, \mathbf{Z}\boldsymbol{\beta}_{(i)}, \sigma^2\mathbf{V}\}$ çok değişkenli lineer modelleri için $\mathrm{cov}(\boldsymbol{\varepsilon}_{(i)}, \boldsymbol{\varepsilon}_{(k)}) = \sigma_{ik}\mathbf{V} \in \mathbb{R}_{\geq}^{n,n}$ kabul edildiğinde, $\mathbf{\Sigma}$ ve $\mathbf{V}$ matrislerinin pozitif kararsız matrisler olmaları durumunda, $\{\mathbf{Y}, \mathbf{Z}\mathbf{B}, \mathbf{\Sigma}\otimes\mathbf{V}\}$ modeli katlı durum için daha da genel bir ifade olacaktır. Bu bölümde elde edilen bazı sonuçlar, dağılım matrisinin $\mathbf{\Sigma}\otimes\mathbf{I}$ ve $\sigma^2(\mathbf{I}\otimes\mathbf{V})$ olduğu durumlarda sırasıyla [13] ve [6] çalışmalarında verilmiştir.

$\Re(\mathbf{X}_1) \subseteq \Re(\mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{I})$ olduğunda, $\{\mathbf{Y}^s, \mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\mathbf{B}_2^s, \mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{I}\}$ modeli altında $\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\mathbf{B}_2^s$ için her BLUE, $\{\mathbf{Y}^s, \mathbf{X}\mathbf{B}^s, \mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{I}\}$ modeli altında kabul edilebilirdir. $\mathbf{F}\mathbf{Y}^s$ ifadesi, $\{\mathbf{Y}^s, \mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\mathbf{B}_2^s, \mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{I}\}$ indirgenmiş modeli altında $\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\mathbf{B}_2^s$ için BLUE olduğunda, $\mathbf{F}\mathbf{M}_1\mathbf{Y}^s$ vektörünün, $\{\mathbf{Y}^s, \mathbf{X}\mathbf{B}^s, \mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{I}\}$ modeli altında $\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\mathbf{B}_2^s$ için BLUE olmasının gerek ve yeter koşulu

$$\Re(\mathbf{P}_1(\mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{I})\mathbf{M}_1\mathbf{H}) \subseteq \Re((\mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{I})\mathbf{H})$$

olmasıdır. Bu koşul $\Re(\mathbf{P}_1(\mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{I})\mathbf{M}_{\mathbf{X}}) \subseteq \Re((\mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{I})\mathbf{H})$ olarak da ifade edilebilir. Burada $\Re(\mathbf{P}_1(\mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{I})\mathbf{M}_1\mathbf{H}) \subseteq \Re((\mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{I})\mathbf{H})$ koşulunun Teorem 4.4.1'de verilen $\Re(\mathbf{X}_1) \subseteq \Re((\mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{I})\mathbf{H})$ koşulundan daha zayıf olduğunu vurgulamakta yarar vardır. İkinci koşul birinci koşulu daima vurgular fakat tersinin her zaman doğru olmadığı, [12] çalışmasında verilen

$$\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ ve } \mathbf{V} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

matrisleri katlı durum için de dikkate alındığında görülür. $\{\mathbf{Y}^s, \mathbf{X}\mathbf{B}^s, \mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{I}\}$ modeli zayıf singüler ve $\mathbf{F}\mathbf{Y}^s$ ifadesi, $\{\mathbf{Y}^s, \mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\mathbf{B}_2^s, \mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{I}\}$ indirgenmiş modeli altında $\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\mathbf{B}_2^s$ için BLUE olduğunda, $\mathbf{F}\mathbf{M}_1\mathbf{Y}^s$ tahmin edicisinin, $\{\mathbf{Y}^s, \mathbf{X}\mathbf{B}^s, \mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{I}\}$ modeli altında $\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\mathbf{B}_2^s$ için BLUE olmasının gerek ve yeter koşulu

$$\mathbf{X}_2'\mathbf{M}_1(\mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{I})^- \mathbf{P}_1(\mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{I})\mathbf{M}_1\mathbf{H} = \mathbf{0}$$

olarak da ifade edilebilir. Son olarak dördüncü bölümde elde edilen sonuçlar için bir örnek verilmiştir. Örnekten görüldüğü gibi $\{\mathbf{Y}^s, \mathbf{X}\mathbf{B}^s, \mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{I}\}$ modeli ve bu modelin indirgenmiş modelleri altında $\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\mathbf{B}_2^s$ için BLUE değerleri çakışmaktadır. Ayrıca modeller tek tek ele alındığında elde edilen sonuçlarla, katlı model olarak ele alındığında elde edilen sonuçların çakıştığı da görülmektedir.

Son olarak beşinci bölümde ele alınan konu çalışmanın ana bölümlerinden ikincisidir. Burada katlı modellerde parametreler için bir tahmin ile ilgilenmek yerine, hipotez testleri ile ilgili bazı sonuçlar verilmiş ve hipotez test etme ile ilişkili olarak olabilirlik oran testleri ele alınmıştır. Ele alınan sonuçlar $\mathbf{Y} = \mathbf{ZB} + \mathbf{E}$ çok değişkenli katlı lineer modeli altında $H : \mathbf{AB} = \mathbf{C}$ şeklindeki hipotez testi ve H hipotezinin olabilirlik oran testi için $F-$istatistiği ile ilgilidir. Bu bölümde $\mathbf{E} \sim N_{nm}(\mathbf{0}, \sigma^2\mathbf{I})$ olduğu kabul edilmektedir.

$\mathbf{Y}^s = \mathbf{XB}^s + \mathbf{E}^s$ modeli altında $H_s : (\mathbf{I} \otimes \mathbf{A})\mathbf{B}^s = \mathbf{C}^s$ hipotezi için $F-$istatistiği,

$$F = \frac{\left(RSS_{H_s} - RSS\right)/qm}{RSS/(nm - pm)} \sim F_{qm, nm-pm}$$

olarak elde edilmiştir. Aynı koşulun bu hipotezin daha özel bir durumu olan $\mathbf{C}^s = \mathbf{0}$ için

$$F = \frac{nm - pm}{qm} \frac{\mathbf{Y}^{s\prime}(\mathbf{I} \otimes \mathbf{P}^*)\mathbf{Y}^s}{\mathbf{Y}^{s\prime}(\mathbf{I} \otimes \mathbf{M_Z})\mathbf{Y}^s}$$

biçiminde ifade edilebileceği de vurgulanmıştır. Buraya kadar olan kısımda elde edilen sonuçlarda $\mathbf{A}$ matrisinin satırlarının lineer bağımsız olduğu kabul edilmiştir. Eğer $\mathbf{A}$ matrisinin satırları lineer bağımsız değilse, $H_s : (\mathbf{I} \otimes \mathbf{A})\mathbf{B}^s = \mathbf{C}^s$ hipotezinin test edilebilir bir hipotez olduğu durumda, $F-$istatistiği, yine benzer yolla gerekli yerlerde genelleştirilmiş tersin kullanılması ile yukarıda verildiği gibi ifade edilebilir. $\mathbf{X}$ matrisi tam sütun ranklı olmadığı zaman ise, ele alınan sonuçlarda $(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$ ile $(\mathbf{X}'\mathbf{X})^-$ ve $nm - pm$ ile $nm - r(\mathbf{X})$ yer değiştirdiğinde benzer şekilde ilerlenebilir.

$\mathbf{Y}^s = \mathbf{XB}^s + \mathbf{E}^s$ modeli altında $H_s : (\mathbf{I} \otimes \mathbf{A})\mathbf{B}^s = \mathbf{C}^s$ için l, ML oran istatistiği

$$l = \frac{L(\hat{\mathbf{B}}^s_{H_s}, \hat{\sigma}^2_{H_s})}{L(\hat{\mathbf{B}}^s, \hat{\sigma}^2)} = \left(\frac{\hat{\sigma}^2_{H_s}}{\hat{\sigma}^2} \right)^{-\frac{nm}{2}}$$

şeklindedir. Bu ifade $\left(1 + \frac{RSS_{H_s} - RSS}{RSS}\right)^{-\frac{nm}{2}}$ olarak da yazılabilir. Böylece

$$F = \frac{nm - pm}{qm}\left(l^{-\frac{2}{nm}} - 1 \right) \sim F_{qm, nm-pm}$$

olarak ifade edilebilir. $H_s : (\mathbf{I} \otimes \mathbf{A})\mathbf{B}^s = \mathbf{C}^s$ hipotezinde daha özel olarak $\mathbf{C}^s = \mathbf{0}$ olduğunda,

$$F = \frac{nm - pm}{qm} \frac{\mathbf{Y}^{s\prime}(\mathbf{I} \otimes \mathbf{P}^*)\mathbf{Y}^s}{\mathbf{Y}^{s\prime}(\mathbf{I} \otimes \mathbf{M_Z})\mathbf{Y}^s} = \frac{nm - pm}{qm}\left(l^{-\frac{2}{nm}} - 1 \right) \sim F_{qm, nm-pm}$$

olur. Ayrıca $H_s : (\mathbf{I} \otimes \mathbf{A})\mathbf{B}^s = \mathbf{C}^s$ hipotezinin diğer bir özel bir durumu olarak, $H_{s1} : \mathbf{B}^s_2 = \mathbf{0}$ hipotezi ele alındığında l, ML oran istatistiği, $l = \left(\frac{\hat{\sigma}^2_1}{\hat{\sigma}^2} \right)^{-\frac{nm}{2}}$ şeklindedir.

Bu bölümde $\mathbf{V}$ bilinen pozitif kararlı bir matris olmak üzere, $\mathbf{E} \sim N_{nm}(\mathbf{0}, \sigma^2(\mathbf{I} \otimes \mathbf{V}))$ olarak alındığında, benzer sonuçlar daha genel bir durum için de elde edilebilir. Burada elde edilen sonuçların olabilirlik oran istatistiği ile ilgili olan kısmı yayınlamış [14] ve $F-$testi ile ilgili olan kısmı ise, yayına kabul edilmiştir [15]. Bu bölümde kullanılan en küçük kareler ve maksimum olabilirlik tahminleri ile ilgili bazı avantajların ve dezavantajların bulunduğunu da vurgulamakta yarar vardır. Ancak ele alınan konu çerçevesinde bütünlüğü bozmamak açısından bu konuya girilmemiştir.

Bu çalışmada ele alınan çok değişkenli katlı lineer model ve bu modelin bazı indirgenmiş modelleri altında, $\mathbf{B}$ parametreler matrisi için farklı kısıtlamalar altında, benzer çalışmalar ele alınabilir. Ayrıca hipotez testleri için modellerde dağılım matrisi farklı şekillerde ele alınarak da ilerlenebilir. Elde edilen ve elde edilebilecek sonuçların, tüm sosyal bilimlerde, fen bilimlerinde, sağlık bilimlerinde...vs. yaygın kullanım alanlarına sahip olduğu söylenebilir.

KAYNAKLAR

[1] AIGNER, D.J., BALESTRA, P., Optimal experimental design for error components models, Econometrica, 56, pp. 955-971, 1988.

[2] BAKSALARY, J.K., MARKIEWICZ, A., Admissible linear estimators in the general Gauss-Markov model, J. Statist. Plan. Inf., 19, pp. 349-359, 1988.

[3] BHIMASANKARAM, P., SENGUPTA, D., The linear zero functions approach to linear models, Sankhya Ser., B., 58, pp. 338-351, 1996.

[4] BHIMASANKARAM, P., RAY, R.S., On a partitioned linear model and some associated reduced models, Linear Algebra Appl., 264, pp. 329-339, 1997.

[5] BHIMASANKARAM, P., SHAH, K.R., RAY, R.S., On a singular partitioned linear model and some associated reduced models, J. Combin. İnform. Systems Sci., (to appear).

[6] DEMİRTAŞ, N., ÖZDEMİR, H., TEZ, M., Çok değişkenli katlı parçalanmış lineer model altında tahmin, 5. İstatistik Kongresi, Antalya, 20-24 Mayıs 2007.

[7] FEUERVERGER, A., FRASER, D.A.S., Categorical information and the singular linear model, Canadian J. Statist., 8, pp. 41-45, 1980.

[8] FIEBIG, D.G., BARTELS, R., KRÄMER, W., The Frisch-Waugh theorem and generalized least squares, Econometric Rev., 15, pp. 431-443, 1996.

[9] FORCHINI, G., Similar tests for covariance structures in multivariate linear models, J. Multivariate Anal., 93, pp. 223-237, 2005.

[10] FRISCH, R., WAUGH, F.V., Partial time regressions as compared with individual trends, Econometrica, 1, pp. 387-401, 1933.

[11] GRAYBILL, F.A., Introduction to Matrices with Applications in Statistics, Wadsworth, California, 1969.

[12] GROß, J., PUNTANEN, S., Estimation under a general partitioned linear model, Linear Algebra Appl., 321, pp. 131-144, 2000.

[13] GÜLER, N., ÖZDEMİR, H., TEZ, M., Estimation under a multivariate

multiple linear model and some associated reduced models, The 20th International Conference, Euro Mini Conference, Continuous and Knowledge-Based Technologies, Europt 2008, selected papers, Neringa, Lithuania, pp. 296-300, May 20-23, 2008.

[14] GÜLER, N., ÖZDEMİR, H., SARDUVAN, M., On maximum likelihood ratio tests under multivariate multiple linear model, Bull. Stat. Econ., 3, Number S09, pp. 33-39, 2009.

[15] GÜLER, N., ÖZDEMİR, H., SARDUVAN, M., Some hypothesis tests under multivariate multiple linear model, Bull. Stat. Econ., 3, Number A09, pp. 44-49, 2009.

[16] HOGG, R.V., CRAIG, A.T., On the decomposition of certain chi-square variables., Ann. Math. Stat., 29, pp. 608-610, 1958.

[17] HOGG, R.V., CRAIG, A.T., Introduction to Mathematical Statistics, 3rd ed., McMillan, New York, 1970.

[18] IP, W., WONG, H., LIU, J., Sufficient and admissible estimators in general multivariate linear model, J. Statist. Plan. Inf., 135, pp. 371-383, 2005.

[19] JOHNSON, R.A., WICHERN, D.W., Applied Multivariate Statistical Analysis, Prentice-Hall, New Jersey, 1982.

[20] MAGNUS, J.R., NEUDECKER, H., Matrix Differential Calculus with Applications in Statistics and Econometrics, John Wiley, G.Britain, 1988.

[21] MARSAGLIA, G., STYAN, G.P.H., Equalities and inequalities for ranks of matrices, Linear Multilinear Algebra, 2, pp. 269-292, 1974.

[22] NURHONEN, M., PUNTANEN, S., A property of partitioned generalized regression, Commun. Statist. Theory Meth., 21, pp. 1579-1583, 1992.

[23] PUNTANEN, S., STYAN, G.P.H., The equality of the ordinary least squares estimator and the best linear unbiased estimator with discussion, Amer. Statist., 43, pp. 153-164, 1989.

[24] PUNTANEN, S., Some matrix results related to a partitioned singular linear model, Commun. Statist. Theory Meth., 25, pp. 269-279, 1996.

[25] PUNTANEN, S., Some further results related to reduced singular linear models, Commun. Statist. Theory Meth., 26, pp. 375-385, 1997.

[26] RAO, C.R., Unified theory of linear estimation, Sankhya, Ser., A, 33, pp. 371-394, 1971.

[27] RAO, C.R., Corrigenda, Sankhya, Ser., A, 34, pp. 194, 477, 1972.

[28] RAO, C.R., Linear Statistical Inference and its Applications, 2nd ed., Wiley, New York, 1973a.

[29] RAO, C.R., Representations of best linear unbiased estimators in the Gauss-Markoff model with a singular dispersion matrix, J. Multivariate Anal., 3, pp. 276-292, 1973b.

[30] RAO, C.R., Choice of best linear estimators in the Gauss-Markoff model with a singular dispersion matrix, Commun. Statist. Theory Meth., 7, pp. 1199-1208, 1978.

[31] RAO, C.R., MİTRA, S.K., Generalized Inverse of Matrices and its Applications, Wiley, New York, 1971.

[32] SEBER, G.A.F., Linear Regression Analysis, John Wiley, New York, 1977.

[33] SENGUPTA, D., JAMMALAMADAKA, S.R., Linear Models an Integrated Approach, World Scientific, Singapore, 2003.

[34] WANG, S.G., CHOW, S.C., Advanced Linear Models, Marcel Dekker, New York, 1994.

[35] WERNER, H.J., YAPAR, C., More on partitioned possibly restricted linear regression, in: E.-M. Tiit, T. Kollo, H. Niemi (Eds.), Multivariate Statistics and Matrices in Statistics, VSP, Utrecht, Netherlands, TEV, Vilnius, Lithuania, pp. 57-66, 1995.

[36] WERNER, H.J., YAPAR, C., On equality constrained generalized least squares selections in the general possibly singular Gauss-Markov model: A projector theoretical approach, Linear Algebra Appl., 237/238, pp. 359-393, 1996a.

[37] WERNER, H.J., YAPAR, C., A BLUE decomposition in the general linear regression model, Linear Algebra Appl., 237/238, pp. 395-404, 1996b.

[38] YOUNG, D.M., SEAMAN, J.W.Jr., MEAUX, L.M., Independence distributions preserving covariance structures for the multivariate linear model, J. Multivariate Anal., 68, pp. 165-175, 1999.

[39] ZHANG, B.X., LIU, B.S., YU, C.L., A study of the equivalence of the BLUEs between a partitioned singular linear model and its reduced singular linear models, Acta Mathematica Sinica, English series, 20, 3, pp. 557-568, 2004.

ÖZGEÇMİŞ

Nesrin GÜLER, 13.12.1976 tarihinde Sakarya'da doğdu. İlkokulu Salih Alptekin İlkokulu'nda 1987 yılında, ortaokul ve liseyi Ayrancı Lisesi'nde 1993 yılında tamamladı. Aynı yıl Hacettepe Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nde lisans eğitimine başladı ve buradan 1998 yılında mezun oldu. 1998-2001 yılları arasında Ankara'da özel bir dershanede matematik öğretmeni olarak çalıştı. 2001 yılında resmi bir okulda matematik öğretmeni olarak göreve başladı. 2002 yılında Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik EABD'nda yüksek lisans programına kaydoldu. Buradan 2004 yılında mezun oldu ve aynı yıl Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik EABD'nda doktora programına kaydoldu. Halen resmi bir okulda matematik öğretmeni olarak görevine devam eden Nesrin GÜLER, İngilizce bilmektedir.