

T.C.  
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**ÇOK-GİRİŞLİ ÇOK-ÇIKIŞLI SİSTEMLERİN  
FREKANS BOYUTUNDAKİ ANALİZİNE YÖNELİK  
POLİHARMONİK DENGİ DENKLEMLERİNİN KULLANILDIĞI  
YENİ BİR ALGORİTMA TASARIMI**

**DOKTORA TEZİ**

**Devrim AKGÜN**

**Enstitü Anabilim Dalı : ELEKTRİK ELEKTRONİK MÜH.**

**Enstitü Bilim Dalı : ELEKTRİK**

**Tez Danışmanı : Yrd. Doç. Dr. İlyas ÇANKAYA**

**Haziran 2008**

T.C.  
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ÇOK-GİRİŞLİ ÇOK-ÇIKIŞLI SİSTEMLERİN  
FREKANS BOYUTUNDAKİ ANALİZİNE YÖNELİK  
POLİHARMONİK DENGE DENKLEMLERİNİN KULLANILDIĞI  
YENİ BİR ALGORİTMA TASARIMI

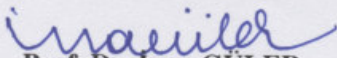
DOKTORA TEZİ


Devrim AKGÜN

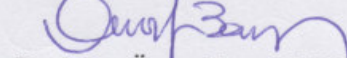
Enstitü Anabilim Dalı : ELEKTRİK ELEKTRONİK MÜH.

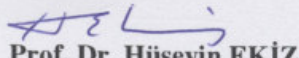
Enstitü Bilim Dalı : ELEKTRİK

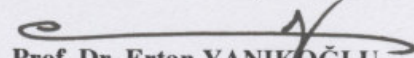
Bu tez 03/06/2008 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Oybirliği ile kabul edilmiştir.

  
Prof. Dr. Inan GÜLER  
Jüri Başkanı

  
Yrd. Doç Dr. İlyas ÇANKAYA  
Üye

  
Prof. Dr. Ömer Faruk BAY  
Üye

  
Prof. Dr. Hüseyin EKİZ  
Üye

  
Prof. Dr. Ertan YANIKOĞLU  
Üye

## **TEŞEKKÜR**

Bu doktora çalışmasında danıőmanlıęımı yapan hocam Yrd. Doç. Dr. İlyas ÇANKAYA'ya, aileme, tım çalışma arkadaşlarıma ve her zaman bana maddi veya manevi anlamda destek olmuş kiőilere teşekkür etmeyi bir borç bilirim.

## İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR.....	ii
İÇİNDEKİLER.....	iii
SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ .....	vi
ŞEKİLLER LİSTESİ.....	vii
TABLolar LİSTESİ.....	x
ÖZET .....	xi
SUMMARY .....	xii

### BÖLÜM 1.

GİRİŞ.....	1
1.1. Doğrusal Olmayan Sistemlerde Harmonik üretimi .....	4
1.2. Doğrusal Olmayan Sistemlerde Atlama Olayı .....	5
1.3. Harmonik Denge Metodu.....	6
1.4. Tezin Amacı, Katkıları ve İzlenilen Çalışma Yöntemi.....	8
1.5. Tezin Bölümlerinin Organizasyonu.....	9

### BÖLÜM 2.

DOĞRUSAL OLMAYAN SİSTEMLERİN HARMONİK DENGE ANALİZİ VE SİMÜLASYONU .....	11
2.1. Giriş .....	11
2.2. Doğrusal Olmayan Sistemlerin Zaman Boyutunda Sunumu .....	12
2.3. Harmonik Denge Denklemlerinin Klasik Yöntemle Hesaplanması.....	15
2.4. Genelleştirilmiş Harmonik Denge Metodu .....	19
2.4.1. Örnek uygulama .....	21
2.4.2. Doğrusal olmayan denklem takımlarının çözdürülmesi .....	23
2.4.3. Sayısal integrasyonlar ile simülasyon.....	27
2.4.4. Simülasyon yöntemi ile frekans cevabının elde edilmesi.....	29

2.5. Sonuçlar .....	37
<b>BÖLÜM 3.</b>	
<b>HARMONİK DENGİ YÖNTEMİNİN SEMBOLİK ALGORİTMA İLE</b>	
<b>UYGULAMASI .....</b>	<b>38</b>
3.1. Giriş .....	38
3.2. Giriş ve Çıkış Sinyal Formları.....	39
3.3. Doğrusal Olmayan Fonksiyon.....	40
3.3.1. Giriş ve çıkışın çarpım halinde olduğu doğrusal olmayan terimler.....	45
3.4. Kombinasyonların Üretilmesi .....	47
3.5. Permütasyonların Üretilmesi.....	51
3.6. Örnek Uygulama .....	51
3.6.1. Doğrusal (birinci dereceden) terimler.....	53
3.6.2. Kübik (üçüncü dereceden) terimler .....	54
3.7. Sonuçlar .....	66
<b>BÖLÜM 4.</b>	
<b>ÇOK-TONLU HARMONİK DENGİ YÖNTEMİ İÇİN SEMBOLİK</b>	
<b>ALGORİTMA TASARIMI .....</b>	<b>68</b>
4.1. Giriş .....	68
4.2. Çok-Tonlu Giriş İçin Analizde Kullanılan Sinyal Formu.....	69
4.3. Frekans Bileşenlerinin Belirlenmesi.....	75
4.4. Çok-Tonlu Sinyal Formu İçin Genelleştirilmiş Açılımlar .....	77
4.4.1. Giriş veya çıkış sinyalleri için genelleştirilmiş açılımlar .....	77
4.4.2. Giriş-çıkış çarpım terimlerini kapsayan doğrusal olmayan fonksiyon .....	80
4.5. Çok-Tonlu Harmonik Denge Algoritması .....	81
4.6. Çok-Tonlu Durum İçin Kombinasyonların Üretilmesi.....	84
4.7. Çok-Tonlu Durum İçin Permütasyonların Üretilmesi .....	89
4.8. Örnek Uygulama .....	90
4.8.1. Doğrusal terimler için simetrik fonksiyonlar .....	93
4.8.2. Kübik terimler için simetrik fonksiyonlar .....	94
4.8.3. Harmonik denge denkleminin oluşturulması .....	97

4.8.4. Giriş frekans bileşenlerinin genliklerinin çıkış bileşenleri üzerindeki etkileri.....	102
4.9. Sonuçlar .....	108
<b>BÖLÜM 5.</b>	
MIMO SİSTEMLER İÇİN HARMONİK DENGE ANALİZİ.....	110
5.1. Giriş .....	110
5.2. MIMO Doğrusal Olmayan Sistemlerin Zaman Boyutunda Sunumu .....	111
5.3. MIMO Sistemler İçin Harmonik Denge Denklemleri .....	114
5.4. Örnek Uygulama: İki-Girişli İki-Çıkışlı Birleşik Duffing Sistemi.....	118
5.4.1. Girişlerde harmonik olarak ilişkili bileşenlerin bulunması durumu.....	124
5.5. Sonuçlar .....	129
<b>BÖLÜM 6.</b>	
ÇOK-TONLU SİNYALLER İÇİN FREKANS CEVABI ANALİZİ .....	130
6.1. Giriş .....	130
6.2. Çok-Tonlu Sinyaller İçin Sayısal İntegrasyonlar İle Simülasyonlar .....	131
6.3. Çok-Tonlu HBM İle Frekans Cevabı Analizi .....	135
6.3.1. Giriş genliğindeki değişimin etkisi.....	136
6.3.2. Giriş frekans bileşenlerinin etkisi.....	139
6.4. Sonuçlar .....	142
<b>BÖLÜM 7.</b>	
SONUÇLAR VE ÖNERİLER .....	144
KAYNAKLAR.....	149
EKLER.....	156
ÖZGEÇMİŞ .....	161

## SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

$u(t)$	: Giriş sinyali
$y(t)$	: Çıkış sinyali
$\omega$	: Frekans değişkeni
$\boldsymbol{\omega}$	: Çok tonlu sinyal için frekans vektörü, $[\omega_1, \dots, \omega_\sigma]$
DOS	: Doğrusal olmayan sistem
HBM	: Harmonik denge metodu (Harmonic Balance Method )
SISO	: Tek-giriş tek-çıkış (Single-Input Single-Output)
MIMO	: Çok-giriş çok-çıkış (Multi-Input Multi-Output)
$c_{p,q}(\cdot)$	: Doğrusal olmayan sistemi tanımlayan katsayı
$M$	: Doğrusal olmayan sistemin derecesi
$N(\cdot)$	: Tanımlama fonksiyonu
$L(\cdot)$	: Doğrusal fonksiyon
$a_{x_r}$	: $r$ 'inci harmonik bileşen için genlik katsayısı değeri
$a_{x_{r_1 \dots r_\sigma}}$	: Çok tonlu sinyal bileşeni için genlik katsayısı değeri
$A_{x_r}$	: $r$ 'inci harmonik bileşen için karmaşık genlik katsayısı
$A_{x_{r_1 \dots r_\sigma}}$	: Çok tonlu sinyal bileşeni için karmaşık genlik katsayısı değeri
$R_{x_i}$	: Harmonik adedi
$f_x^{sym}(\cdot)$	: Simetrik fonksiyon
$\alpha$	: MIMO sistemin giriş adedi
$\beta$	: MIMO sistemin çıkış adedi

## ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 1.1. Doğrusal sistem için örnek giriş ve çıkış formu .....	4
Şekil 1.2. (a) Doğrusal (b) Doğrusal olmayan sistemlerinin “-” $A_u=1$ ve “...” $A_u=2$ giriş sinyallerine karşı çıkışlarında gözlenen $y(t)$ sinyalleri .....	5
Şekil 1.3. Tipik atlama rezonansı davranışları .....	6
Şekil 1.4. $\alpha$ -Giriş $\beta$ -Çıkışlı MIMO sistem .....	9
Şekil 2.1. Saturasyon ve kübik fonksiyon ile yaklaşım .....	12
Şekil 2.2. Harmonik analizi için kullanılan sistem formuna ait blok diyagram.....	15
Şekil 2.3. Sistemin maksimum genliklerine ait frekans cevabı .....	25
Şekil 2.4. Temel harmoniğe ait maksimum genlik ve faz cevapları .....	26
Şekil 2.5. Üçüncü harmoniğe ait maksimum genlik ve faz cevapları .....	26
Şekil 2.6. Üçüncü harmoniğe ait düzenlenmiş faz cevabı .....	27
Şekil 2.7. Denklem 2.2 ile verilen sisteme ait faz değişimi blok diyagramı.....	28
Şekil 2.8. $\omega=0,4$ rad/s için sistemin simülasyonu.....	29
Şekil 2.9. $\omega=0,4$ rad/s için zaman boyutunda harmonik denge ve simülasyon sonuçları .....	30
Şekil 2.10. %1 hata ile kararlı durumların elde edilmesi.....	31
Şekil 2.11. İleri ve geri yönde sayısal simülasyonlar ile elde edilen frekans cevabı .	32
Şekil 2.12. Atlama frekansları için zaman boyutunda cevaplar ve faz portreleri .....	33
Şekil 2.13. Atlama frekansları için kararlı duruma ait zaman boyutunda cevaplar ve faz portreleri .....	34
Şekil 2.14. Analitik (-) ve sayısal simülasyonlar (* ileri, o geri) için sonuçlar .....	35
Şekil 2.15. Temel harmoniğe ait analitik ve simülasyon sonuçları.....	36
Şekil 2.16. Üçüncü harmoniğe ait analitik ve sayısal simülasyon sonuçları .....	36
Şekil 3.1. Giriş ve çıkış terimlerinin çarpım halini içeren blok gösterim.....	45
Şekil 3.2. $r=1$ için kombinasyonlar .....	50
Şekil 3.3. a) $\{-3,1,3\}$ ve b) $\{-1,1,1\}$ dizilerine ait farklı permütasyonlar .....	51



Şekil 3.4. Maksimum genlikler için analitik (-) ve simülasyon (*) sonuçlarının karşılaştırılması .....	62
Şekil 3.5. Sinyal formunu oluşturan harmoniklere ait frekans cevapları .....	62
Şekil 3.6. İki (...) ve üç (-) harmonik kullanılarak elde edilen frekans cevapları...	63
Şekil 3.7. $u(t) \times 1,2$ için iki (...) ve üç (-) harmonik kullanılarak gerçekleştirilen analizler .....	64
Şekil 3.8. $u(t) \times 1,2$ için iki (...) ve üç (-) harmonik kullanılan analizlerde tepe noktasındaki farklar.....	65
Şekil 3.9. $u(t) \times 1,2$ için iki (...) ve üç (-) harmonik kullanılan analizler için sırtlarda oluşan farklar.....	65
Şekil 3.10. Giriş genliğinin $u(t) \times 0,4 \dots u(t) \times 1,4$ aralığı için frekans cevabına etkisi	66
Şekil 4.1. İki-tonlu giriş uygulanmış bir DOS için tipik çıkış frekans spektrumu bileşenleri .....	71
Şekil 4.2. $\ddot{y}(t) + \mu \dot{y}(t) + \omega_n^2 y(t) + \alpha_3 y(t)^3 = u(t)$ denkleminde ait faz değişimi diyagramı ....	72
Şekil 4.3. Frekans düzleminde çıkışı temsil eden bileşenlere ait örnek çarpanlar ....	74
Şekil 4.4. İki harmonik olarak ilişkisiz frekansa sahip çıkış frekans bileşenlerinin seçimi: a) Kutu, b) Elmas sınırlama teknikleri .....	76
Şekil 4.5. Harmonik denge algoritma akış diyagramı .....	83
Şekil 4.6. Harmonik çarpanlar matrisinin elde edilmiş aşamaları.....	85
Şekil 4.7. Analitik (—) ve sayısal simülasyon (*) yoluyla elde edilmiş sonuçlar .....	99
Şekil 4.8. Çıkış sinyali formundaki frekans bileşenlerine ait genlikler .....	99
Şekil 4.9. a) $R_{x_1} = R_{x_2} = 2$ , b) $R_{x_1} = R_{x_2} = 3$ , c) $R_{x_1} = R_{x_2} = 4$ sınırlama değerleri için harmonik denge (--) ve sayısal simülasyon (—) sonuçları .....	101
Şekil 4.10. Giriş sabit bileşeninin, çıkış frekans bileşenleri üzerindeki etkisi.....	102
Şekil 4.11. a) $R_{x_1} = 3$ $R_{x_2} = 3$ ve b) $R_{x_1} = 3$ $R_{x_2} = 2$ , c) $R_{x_1} = 2$ $R_{x_2} = 3$ , d) $R_{x_1} = 2$ $R_{x_2} = 2$ , için zaman boyutunda cevaplar.....	104
Şekil 4.12. a) $R_{x_1} = R_{x_2} = 3$ ve b) $R_{x_1} = 2$ , $R_{x_2} = 3$ , c) $R_{x_1} = 2$ , $R_{x_2} = 3$ ve d) $R_{x_1} = 3$ , $R_{x_2} = 3$ durumları için bileşenlere ait genlikler.....	105
Şekil 4.13. Temel bileşenlerin harmonik sayısının hataya etkisi .....	107
Şekil 4.14. $R_{x_1}$ ve $R_{x_2}$ değerlerinin farklı frekanslar için hata seviyesine etkileri....	108
Şekil 5.1. MIMO yapıdaki sistemlere örnekler.....	110
Şekil 5.2. Çok girişli çok çıkışlı sisteme ait temel yapının blok diyagram formu ...	112

Şekil 5.3. İki-girişli iki-çıkışlı sistem için örnek giriş-çıkış frekans bileşenleri .....	115
Şekil 5.4. Analizde kullanılan çıkış bileşenlerine ait katsayılar.....	119
Şekil 5.5. $y_1(t)$ ve $y_2(t)$ çıkışlarına ait $\omega_1=0.7$ ve $\omega_2=1.3$ rad/s ve $a_{u_{10}}^1 = a_{u_{10}}^2 = 1$ için analitik (-) ve sayısal simülasyon (*) sonuçları .....	122
Şekil 5.6. $y_1(t)$ ve $y_2(t)$ çıkışlarına ait frekans bileşenleri.....	123
Şekil 5.7. $a_{u_{0,1}}^1 \times 2$ ve $a_{u_{0,1}}^2 \times 2$ için $y_1(t)$ ve $y_2(t)$ çıkışlarına ait frekans bileşenleri .....	124
Şekil 5.8. İki-giriş iki-çıkışlı bir sistem için harmonik olarak ilişkili (Tek-tonlu) durumda frekans bileşenleri.....	124
Şekil 5.9. $\omega_1 = \omega_2 = 1$ rad/s için analitik (-) ve sayısal simülasyon (*) sonuçları .....	125
Şekil 5.10. $\omega_1 = 0.1$ ve $\omega_2 = 1$ rad/s için çok-tonlu analiz ile (-) ve sayısal simülasyon (...) ile elde edilen sinyal formları .....	127
Şekil 5.11. $\omega_1 = 0.1$ ve $\omega_2 = 1$ rad/s için (a) tek-tonlu ve (b) çok-tonlu frekans bileşenleri .....	128
Şekil 6.1. Başlangıç durumlarıyla birlikte analiz (-) ve sayısal simülasyon (...) sonuçları .....	132
Şekil 6.2. $\omega_1 = 0,4$ ve $\omega_2 = 2$ rad/s için periyodik dilimler .....	132
Şekil 6.3. $\omega_1 = 0,9$ , $\omega_2 = 1$ rad/s ve $T_p = 2\pi/0,4$ için periyodik olmayan dilimler .....	133
Şekil 6.4. $\omega_1 = 0,9$ , $\omega_2 = 1$ rad/s ve $T_p = 2\pi/0,1$ için periyodik dilimler .....	133
Şekil 6.5. $\omega_1 = \sqrt{2}$ , $\omega_2 = 1$ rad/s ve $T_p = 2\pi/0,1$ için zamana bağlı çıkış .....	134
Şekil 6.6. Harmonik denge (-) ve sayısal simülasyon (*) sonuçları.....	135
Şekil 6.7. $\omega_1 = 0,49$ ve $\omega_1 = 0.5$ rad/sn frekanslarında sayısal simülasyona ait sonuçlar .....	136
Şekil 6.8. $a_{u_1} = 1$ ve $a_{u_2} = 0$ , (-); $a_{u_2} = 1$ , (-); $a_{u_2} = 2$ , (---); $a_{u_2} = 3$ , (···) genlik değerleri için $y_1(t)$ çıkışına ait frekans cevapları .....	136
Şekil 6.9. $a_{u_2} = 0$ , (-); $a_{u_2} = 1$ , (-); $a_{u_2} = 2$ , (---); $a_{u_2} = 3$ , (···) için frekans bileşenleri..	138
Şekil 6.10. $y_1(t)$ çıkışına ait temel harmonikte genlik değişimine bağlı olarak atlama noktaları.....	139
Şekil 6.11. $\omega_2 = \{ 0,6 (—); 1,5 (···); 2,4 (-); 3,3 (—) \}$ rad/s için frekans cevapları.....	140
Şekil 6.12. $\omega_2 = 0.6 (—); 1,5 (···); 2,4 (-); 3,3 (—)$ rad/s için frekans cevapları.....	141

## TABLolar LİSTESİ

Tablo 2.1. Üçüncü harmonik için katsayılar .....	22
Tablo 3.1. Modele ait katsayılar .....	52
Tablo 3.2. Doğrusal terimler için simetrik fonksiyonlar .....	54
Tablo 3.3. $\omega_1 = 0$ için üçlü kombinasyonlar .....	55
Tablo 3.4. $\dot{y}(t)^3$ terimi için simetrik fonksiyonlar.....	56
Tablo 3.5. $y(t)^3$ terimi için kombinasyonlar .....	57
Tablo 3.6. $f_{\omega_1}^{sym}(-3,0,3)$ fonksiyonuna ait permütasyonlar .....	58
Tablo 3.7. Giriş ve çıkışın çarpım halinde olduğu terime ait simetrik fonksiyonlar..	59
Tablo 4.1. İki frekanslı uyartım için frekans bileşenleri.....	92
Tablo 4.2. Devam .....	93
Tablo 4.3. $\omega_o = \omega_1$ çıkış frekansında doğrusal terimler için simetrik fonksiyonlar ....	94
Tablo 4.4. Denklem 4.63 ile verilen simetrik fonksiyona ait permütasyonlar.....	96
Tablo 4.5. Kübik terimler için simetrik fonksiyonlar.....	97
Tablo 4.6. $R_{x_1}$ ve $R_{x_2}$ değerlerine bağlı hata değerleri.....	106

## ÖZET

Anahtar Kelimeler: Doğrusal olmayan sistem, Harmonik denge metodu, Çok-tonlu sinyal, Frekans Cevabı

Harmonik denge metodu doğrusal olmayan sistemlerin frekans cevabı karakteristiklerinin analizinde yaygın olarak kullanılan pratik bir araçtır. Klasik uygulamasında sinyal formuna ait harmonik sayısı veya sistemin derecesi yükseldikçe, açılımda elde edilen terim sayısındaki artış nedeniyle işlemler karmaşık bir hale gelmektedir. Bu probleme çözüm olarak hesaplamaları otomatik gerçekleştiren sembolik algoritmalar tanımlanmıştır. Bu çalışmalarda poliharmonik sinyal formu kullanılmasına karşın harmoniklerin temel harmoniğin tam sayı katları şeklinde ilişkili olduğu tek-tonlu durumlar düşünülmüştür. Bununla birlikte, doğrusal olmayan sistemlerin frekans cevabı karakteristiklerinin giriş sinyalinin frekans bileşenleri ile ilişkili olması bazen analizin harmonik olarak ilişkisiz frekans bileşenleri içerecek şekilde çok-tonlu olarak adlandırılan sinyal için gerçekleştirilmesine ihtiyaç duyulur. Gerçekleştirilen çalışmada, polinom tip doğrusal olmayan terimler içeren sistemlerin harmonik denge analizi için çok-tonlu giriş sinyallerini kapsayan yeni bir sembolik algoritma sunulmuştur. Bu amaçla analizde kullanılan poliharmonik sinyal formu için çok-tonlu etkileşimleri kapsayan yeni bir tanımlama yapılmıştır. Kullanılan sistemin genel yapısı için analizde kabul edilen çok-tonlu sinyal formuna ait genelleştirilmiş açılımlar gerçekleştirildikten sonra denge denklemlerini veren sembolik algoritma sunulmuştur. Elde edilen sonuçlar zaman boyutunda sayısal simülasyonlar ile doğrulanmış ve giriş bileşenlerinin genliklerinin çıkış spektrumundaki etkileri örneklerle sunulmuştur. Ayrıca yöntemin çok-girişli çok-çıkışlı (MIMO) sistemlere genişletilerek algoritmanın uygulama alanı artırılmıştır. Bu amaçla MIMO sistemlerin sunumu için bir ifade tanımlandıktan sonra SISO için geliştirilen algoritma yapısı genişletilmiştir. Yöntem iki-giriş iki-çıkışlı Duffing modeli olarak tanımlanmış bir elektriksel sistem üzerinde sunulmuştur. Zaman boyutundaki sonuçlara ek olarak frekans cevabı karakteristikleri sunulmuş, bunlar simülasyonlar ile elde edilen sonuçlar kullanılarak doğrulanmıştır. Bunun yanında uygulanan giriş sinyalinin genlik ve frekans gibi parametrelerinin frekans cevabı üzerindeki etkileri incelenmiştir.

# **A NEW ALGORITHM FOR THE FREQUENCY RESPONSE ANALYSIS OF MULTI-INPUT MULTI-OUTPUT SYSTEMS BY USING POLIHARMONIC BALANCE EQUATIONS**

## **SUMMARY**

**Keywords:** Nonlinear systems, Harmonic Balance, Multifrequency Input, Frequency Response

Harmonic balance method is a practical tool which is used widely for the analysis of frequency response characteristics. In the classical application, the method becomes complex because of the increase in the number of terms as the number of harmonics or the degree of nonlinear terms are increased. As a solution to this problem symbolic algorithms are developed which perform automated computations for systems with polynomial nonlinearities. Though the algorithms have polyharmonic waveform, commensurate type signal forms where the harmonics are selected as integer multiples of the main harmonic are considered. However, the dependence of the frequency response of nonlinear systems to the frequency content of the input sometimes requires the analysis to be realized for incommensurate frequency components which are called multitone signals. In this study a new algorithm including multitone signal forms is presented for the harmonic balance analysis of nonlinear systems with polynomial nonlinearities. For this purpose a polyharmonic signal form which includes multitone interactions is defined. Generalized expressions are derived for the assumed system structure and signal forms and the symbolic algorithm for obtaining the balance equations is presented. The method is validated using time domain simulations and the effect of the amplitudes of the input components on the output spectrum is illustrated by examples. In addition, the application area of the method is extended to include multi-input multi-output (MIMO) systems. For this purpose after an expression is defined for the representation of MIMO systems, the algorithm structure for SISO is adapted to include MIMO systems. The method is illustrated on an electrical system described by a two-input two-output Duffing model. In addition to time domain results, frequency domain characteristics are investigated and the results are validated by numerical simulations. The effects of the parameters of the input such as amplitude and frequency on the frequency response characteristics are also investigated.

## BÖLÜM 1. GİRİŞ

Dinamik sistemlerin analizi ve tasarımı istendiğinde sergiledikleri davranışların bilinmesi gerekir. Sistem davranışlarını incelemek için direkt olarak sistem veya onu tanımlayan bir fiziksel model üzerinde çalışmalar yapılabilir. Buna karşın yüksek maliyet gerektiren, uzun zaman alan veya tehlike arz eden durumlarda pek tercih edilmezler. Bundan dolayı, genelde sistemi tanımlayan bir matematiksel model kullanılarak amaca uygun analiz tekniklerine başvurulur. Gelişen bilgisayar teknolojisi ile birlikte artan hesaplama gücü ve gelişmiş yazılım olanakları, matematiksel modellerin analizi için gerek maliyet gerekse uygulama kolaylığı bakımından uygun çalışma ortamları sunar. Matematiksel modeller ile gerçekleştirilen analizlerden elde edilecek sonuçların doğruluğu kullanılan modelin geçerliliğine bağlıdır. Uygulamada, eğer sistem doğrusal kabul edilebilecek çalışma noktalarında kullanılıyorsa doğrusal bir model yapısıyla tanımlanabilir. Böylece süperpozisyon ve homojenlik gibi kuralları sağlayan modeller üzerinde doğrusal matematik kuralları kullanılarak gerçekleştirilen analizler uygulama bakımından oldukça kolay hale gelir. Yaygın olarak kullanılan doğrusal modeller günümüzde kontrol sistemi sentezi, fiziksel sistemlerin analizi, tasarımı ve sinyal işleme yöntemleri gibi uygulamalarda temel oluşturur. Bununla birlikte birçok doğrusal olmayan sistem (DOS) basit bir doğrusal modelle tanımlanamayan bazı bileşenlere sahiptir. Sertlikte veya sönüm katsayısında üstel veya ani değişikliklere sebep olan elemanlar sistem davranışının önemli bir kısmına etki ederler. Bunlar, elektriksel sistemlerde doğrusal olmayan rezistif, kapasitif, ve endüktif etkiye sahip elemanlar [1-3], diyot, opamp, ota gibi yarı iletken elektronik bileşenler [4-6], mekanik sistemlerde ortaya çıkan boşluk içeren titreşim bileşenleri [7,8], hareketi sınırlayıcılar [9,10], yorulma hasarlı titreşim bileşenleri [11,12], ve örnekleri artırılabilir benzer yapıdaki elemanlar olabilir. Bu tür etkilerin ihmal edilemez olduğu sistemlerin tanımlanmasında doğrusal yapıdaki matematiksel modeller yetersiz kalır ve bu modellerden elde edilen sonuçlar gerçek sistemin davranışını yansıtmaz. Bundan

dolayı sistemin sunumu için doğrusal olmayan özellikleri de tanımlayan modeller kullanılır. Doğrusal olmayan yapıdaki sistemlerin sergilediği dinamik davranışlar, sisteme uygulanan giriş sinyallerinin yanında başlangıç koşulları ve sistem parametrelerine de dayanır. Doğrusal olmayan modeller ile tanımlanan sistemleri doğrusal sistemlerden ayıran bazı önemli karakteristikler kısaca aşağıdaki gibi özetlenebilir [13,14],

- Sonlu zamanda sonsuza gitme: Kararsız bir doğrusal sistemin, zaman sonsuza doğru yaklaşırken çıkışı da sonsuza doğru yaklaşır. Doğrusal olmayan bir sistemde ise sonlu bir zamanda çıkış sinyali sonsuza gidebilir.
- Sınır periyotlar: Doğrusal bir sistemin osilasyon yapabilmesi için sanal eksen üzerinde bir çift kökünün olması gerekir. Bu osilasyonun genliği sistemin başlangıç koşullarının genliği ile orantılıdır. Doğrusal olmayan sistemlerde ise böyle bir durum söz konusu olmayabilir. Bir çok doğrusal olmayan sistem başlangıç koşullarına bağlı olmadan sabit bir genlik ve periyot ile osilasyon yapabilir.
- Harmonik üretimi: Doğrusal sistemler periyodik bir giriş için çıkışlarında aynı periyoda sahip sinyal üretirler. Doğrusal olmayan sistemlerde çıkış sinyali sistemdeki doğrusal olmayan elemanların etkisiyle giriş periyodunun katları veya bazı sistemler için yaklaşık periyodik sinyallerin üretilmesi de söz konusudur.
- Çok modlu davranış: Bir doğrusal olmayan sistem birden fazla davranış şekli sergileyebilir. Giriş sinyali uygulanmamış bir sistemin çıkışı başlangıç koşullarına bağlı olarak bir veya birden fazla kararlı duruma veya sınırlı tip osilasyona girebilir.
- Atlama olayı: Bazı doğrusal olmayan sistemlere periyodik bir uyarım uygulandığında, frekans veya genliğin değiştirilmesiyle çıkış genliğinde bazen atlama olayı olarak adlandırılan ani değişimler oluşabilir.

Doğrusal olmayan sistemlerin davranışları incelenirken genel de zaman boyutunda tanımlanan diferansiyel denklem modelleri kullanılır. Uygulanan giriş sinyalleri veya başlangıç durumları için çözümlenerek elde edilen cevaplar yine zaman boyutunda elde edilir. Sistemlerin belli bir frekansta uygulanan girişler için elde edilen zaman boyutundaki sinyallerin yanında, farklı frekanslarda sergiledikleri davranışların ortaya konması için frekans düzleminde analizlere de ihtiyaç duyulur. Frekans cevabı, analizi sistemin uygun çalışma koşullarını saptamak ve arzu edilen davranışı sergilemesini sağlamak için önemlidir. Bunun yanında doğrusal olmayan sistemlerde karşılaşılan örneğin ara modülasyonlar, harmonik üretimi, atlama olayı gibi doğrusal modellerin göstermediği bazı bilinen niteliksel davranışlar frekans düzleminde daha iyi tanımlanabilen olgulardır [15]. DOS'ların frekans boyutu karakteristiklerinin matematiksel olarak tanımlanması, hesaplanması ve yorumlanması, yerleşmiş kurallara sahip doğrusal sistemlerdeki kadar açık değildir. Bu amaçla kullanılan yöntemlerden birisi girişteki ve çıkıştaki bileşenler arasındaki ilişkiyi sunan tanımlama fonksiyonlarıdır. Bu yöntem doğrusal frekans cevabı metotlarının doğrusal olmayan durumlara taşınması için pratik bir araç olmuştur [16]. Tanımlama fonksiyonları, atlama olayı veya özerk olaylar (autonomous phenomena) ve doğrusal olmayan kontrolörlerin dizaynında yaygın olarak kullanılmaktadır [17-19]. Bununla birlikte, bu tekniğin doğruluğu kritik olarak temel alınan kabullerin doğruluğuna bağlıdır ve genelde analizin doğruluğu artırıldığında işlemler karmaşıklaşır [20]. Tanımlama fonksiyonlarının hesabında temel yaklaşımlar olarak, Volterra transfer fonksiyonlarını temel alan seri tabanlı metot ve HBM kullanılmaktadır.

Seri tabanlı metodun kullanımındaki genel bir zorluk, eğer sistem modeli çıkışa ait doğrusal olmayan terimler içeriyorsa orta çıkar. Düşük giriş genlikleri için serileri kesmek mümkündür, fakat yüksek dereceli terimlerin giriş genliğinin artması ile yüksek dereceli terimler artan bir şekilde baskın olur ve o zaman kesmek uygun değildir. Volterra transfer fonksiyonları çok boyutlu yapılarından dolayı elde edilen sonuçlarını yorumlamak güçtür. Uygulama bakımından daha pratik olan harmonik denge analizi Volterra serileri gibi genel bir yaklaşım sunmamasına karşın yapı olarak tek boyutludur. Harmonik denge analizi özellikle harmonik sayısının arttığı durumlarda uygulaması güçleşir. Volterra serilerinin kapsamı bağımsız (autonomous) osilasyonlar veya atlama rezonansı göstermeyen sistemlerle,

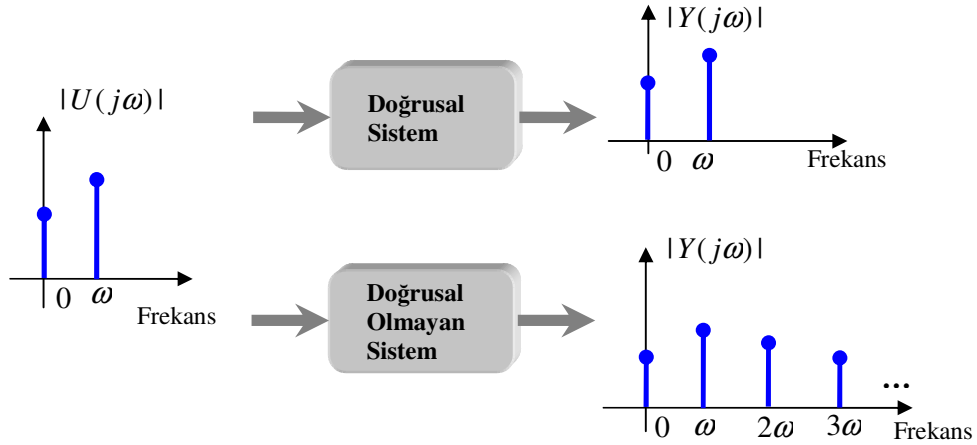


birincisinde giriş olmadığı için, ikincisinde tanımlama fonksiyonu birden fazla değere sahip olabildiği için sınırlıdır. Buna karşın, harmonik denge yöntemi böyle davranışların incelenmesi açısından çözüm sunar.

Harmonik denge yönteminde, sisteme uygulanan sinüzoidaller formundaki giriş sinyaline bağlı olarak çıkışta kabul edilen sinyal yine sinüzoidaller formundadır. Çıkış sinyali girişin istenilen sayıda harmonikleri içerecek şekilde kabul edilir ve yöntem bu sinyale ait bilinmeyenlerin bulunması temeline dayanır. Harmonik denge denklemleri olarak adlandırılan denklemler için çözümler gerçekleştirilerek atlama olayını da tanımlayacak şekilde frekans cevabı elde edilebilir. Bu amaçla takip eden başlıklarda harmonik üretimi ve atlama olayı kısaca ifade edilecektir. Tez çalışmasının temelini oluşturan harmonik denge analizine ait literatürdeki çalışmalar ve devamında tez çalışmasının amacı ve kapsamı ifade edilecektir.

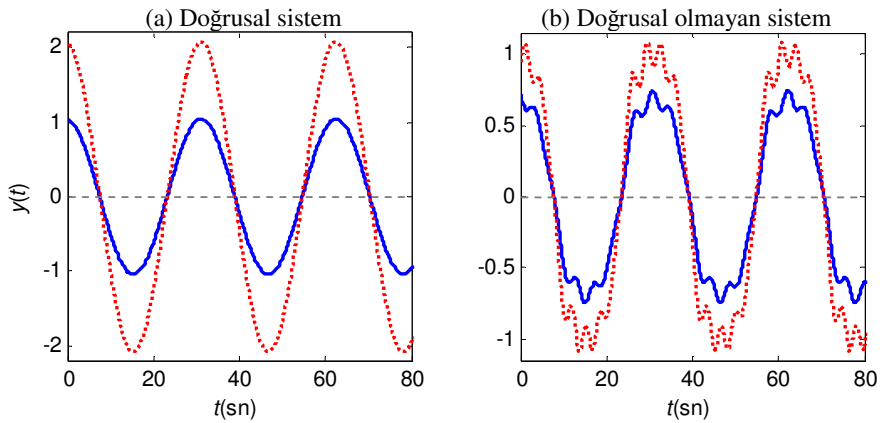
### 1.1. Doğrusal Olmayan Sistemlerde Harmonik Üretimi

Doğrusal bir sistem süperpozisyon ve homojenlik gibi kuralları sağladığı için Şekil 1.1 de görüldüğü gibi girişine uygulanan tek harmonikli ve sabit bir bileşen içeren bir sinyal için çıkış frekans cevabı spektrumunda aynı bileşenler elde edilir. Aynı sinyal doğrusal olmayan bir sisteme uygulandığında elde edilen cevap, ara modülasyon etkilerinden dolayı girişin harmonikleri şeklinde frekans bileşenleri içerir.



Şekil 1.1. Doğrusal sistem için örnek giriş ve çıkış formu

Örneğin doğrusal bir sistemi temsil eden,  $\ddot{y}(t) + 0.1\dot{y}(t) + y(t) = u(t)$  denklemi ve doğrusal olmayan forma sahip,  $\ddot{y}(t) + 0.1\dot{y}(t) + y(t) + y(t)^3 = u(t)$ , şeklinde duffing denklemi tanımlansın. Bu sistemlere  $u(t) = A_u \sin(0.2t)$  sinyali uygulandığında  $A_u=1$  için çıkışlarında elde edilen sinyaller Şekil 1.2’de düz çizgi ile belirtilen çıkış sinyalleri elde edilmiştir. DOS’un cevabında oluşan dalgalanmalar çıkıştaki harmoniklerin etkisini açıkça göstermektedir.



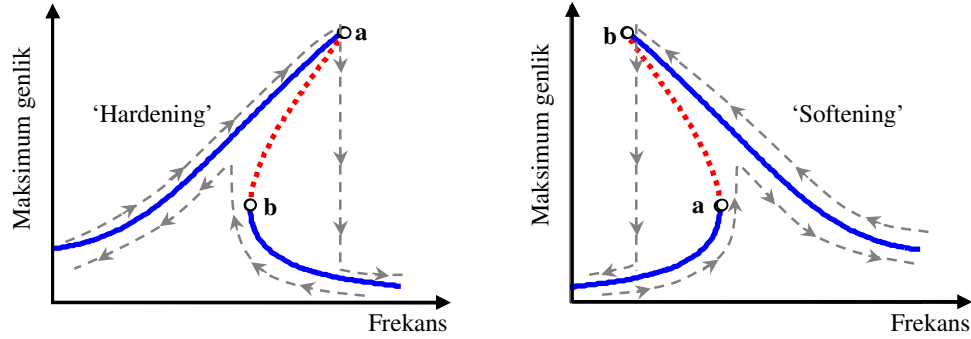
Şekil 1.2. (a) Doğrusal (b) Doğrusal olmayan sistemlerinin “-”  $A_u=1$  ve “...”  $A_u=2$  giriş sinyallerine karşı çıkışlarında gözlenen  $y(t)$  sinyalleri

Giriş sinyalinin genliği  $A_u=2$  olarak artırıldığında, doğrusal sisteme ait sinyalin genliği giriş ile benzer şekilde iki kat artmış, diğerinde ise genlik aynı oranda değişim göstermemiştir. Bunun yanında sinüzoidal yapıdaki bozulmaların artması, üretilen harmoniklerin etkisini artırdığını gösterir.

## 1.2. Doğrusal Olmayan Sistemlerde Atlama Olayı

Dinamik bir sistemi tanımlayan diferansiyel denklemin, iki veya daha fazla üs derecesine sahip terimler içermesi uygulanan frekans bileşenlerinin ara modülasyonlarını oluşturur. Bundan dolayı çıkış frekans spektrumunda, giriş bileşenlerine ek olarak farklı bileşenler elde edilir. Dinamik sistemlerin geri beslemeli yapısından dolayı teorik olarak çıkışı temsil eden sonsuz adet harmonik bileşen mevcuttur. Problemi doğrusallaştırmak amacıyla bu bileşenleri ihmal etmek bir çözüm oluştursa da, birçok fiziksel sistem örneğin mekanik veya elektriksel devre

formundaki doğrusal kabul edilebilecek bir yapıya sahip değildir. Bu tür sistemlerin frekans cevabı karakteristiklerinde atlama rezonansı (jump resonance) olarak adlandırılan davranışlar ortaya çıkabilir.



Şekil 1.3. Tipik atlama rezonansı davranışları

Atlama rezonansı diğer sistem parametreleri sabit tutulurken, uygulanan sinüzoidal girişe ait frekans değeri belirli aralıklarla değiştirilerek Şekil 1.3'de görüldüğü gibi 'hardening' ve 'softening' formlarda elde edilir. Dinamik sistemlerin kritik çalışma noktalarının belirlenmesi açısından önem arz eden bu karakteristik davranış, kontrol sistemlerinde [21], LC devresinin ota ile sayısal simülasyonunda [22], filtre devrelerinde [23-25], ses transdüserlerinde [26], kristalli osilatörlerde [27], artan bir şekilde ilgi gören nano elektromekanik sistemlerin karakteristiklerinde [28], elektrokimyasal sistemlerde [29] gibi örnekleri artırılabilir birçok disiplinde ortaya çıkar. Tez çalışmada temel alınan harmonik denge yöntemi böyle davranışların incelenmesinde yaygın olarak kullanılır.

### 1.3. Harmonik Denge Metodu

DOS'a uygulanan bir periyodik giriş sinyali için elde edilen çıkış bileşenleri Şekil 1.1'de ifade edildiği gibi giriş frekans bileşenleri ile birlikte harmoniklerini de içerir. Çıkış sinyali teorik olarak sonsuz sayıda harmonikler içerdiği için çıkış sinyaline etkisinin ihmal edilebilir bir noktada kesilerek belirtilen sayıda harmonik ile çıkış temsil edilir. Giriş ve çıkışa ait sinüzoidaller formundaki sinyallerin doğrusal olmayan diferansiyel denklemde yerine konularak, çıkış sinyal formuna ait bilinmeyenlerin tespit edilmesi işlemi harmonik denge metodu (Harmonic Balance

Method-HBM) olarak adlandırılır [20]. HBM'nin uygulamasında denge denklemleri olarak adlandırılan denklem takımları, elde edilen açılımdan benzer frekansların seçilmesiyle çıkışta kabul edilen her bir frekans bileşeni için olmak üzere elde edilir. Pratik bir yaklaşım sunan HBM ile gerçekleştirilen klasik uygulamalarda kabul edilen sinyal formlarındaki harmonik sayısı veya doğrusal olmayan terimlere ait dereceler artırıldığında, açılımları elde etmek karmaşıklaşır ve denge denklemlerinin bu açılımlardan oluşturulması güçleşir. Bundan dolayı el ile gerçekleştirilen uygulamalarda işlemleri basitleştirmek için genelde analizde kabul edilen frekans bileşeni olarak tek sinüzoidal sinyal kullanılmış, etkisi analiz açısından önemli seviyede olabilecek yüksek dereceli harmonikler ve sabit bileşen ihmal edilmiştir. Diğer bir problem ise analizi gerçekleştirilecek farklı bir sistem için açılımların yeniden gerçekleştirilmesinin gerekmesidir. Bundan dolayı uygulamaların birçoğunda tek bir sinüzoidal düşünülür ve gerçekte analizde etkili olabilecek sabit bileşen ve yüksek dereceli harmonikler ihmal edilir.

HBM uygulamasında karşılaşılan problemleri azaltmak amacıyla yöntem çeşitli şekillerde geliştirilmiştir. I. Senjanovic yöntemi poliharmonik uyartım için genişletmiş [30], J.C.P. Jones ve İ. Çankaya tanımlama fonksiyonlarının hesabında HBM uygulamasını genelleştirerek kullanmıştır [31]. Yine J. C. P. Jones ve İ. Çankaya deniz dalgaları uygulanan bir gemi modeli için maksimum osilasyon genliklerinin hesabını HBM ile gerçekleştirmiştir [32]. Diğer bir uygulamada A. Chatterjee, HBM'yi kullanarak, zayıf doğrusal olmayan davranışlara sahip sistemleri analiz etmede kullanılan ortalama (averaging) yöntemindeki hesaplamaları gerçekleştirmiştir [33]. Benzer bir uygulamada S. L. Das ve A. Chatterjee tarafından çok zamanlı ölçkleme (multiple scales) yöntemi HBM kullanılarak iyileştirilmiştir [34]. HBM uygulamasında yüksek sayıda harmonik için işlemleri kolaylaştırma amacıyla J.F.Dunne ve P.Hayward, sinyal formunu alçak ve yüksek frekans bileşenleri şeklinde tanımlandığı farklı bir algoritma geliştirmiştir [35]. Bu algoritma formunda da, tipik olarak 3 ile 13 arası bileşenden oluşan alçak frekans sinyali klasik HBM kullanılarak hesaplanmıştır.

HBM uygulamasının klasik hesabına sistematik bir yapı kazandırmak için J.C.P. Jones, M. Zhuang ve İ. Çankaya tarafından sembolik algoritma tanımlaması

yapılmıştır [36]. Burada genel formda belirtilen kesilmiş Fourier serileri formunda sinyaller ve polinom tip doğrusal olmayan terimleri kapsayan bir DOS yapısı kullanılmıştır. Bu çalışmanın devamı niteliğinde JCP Jones tarafından direkt olarak sistemin katsayıları ve genel harmonik sinyal formunun karmaşık sayı formundaki genlikleri ve fazları cinsinden yazılmasını sağlayan ve bir öncekine göre daha geniş bir sınıfa uygulanabilecek yeni bir algoritma geliştirilmiştir [37]. Analizde kabul edilen sinyal formu ise önceki gibi temel bir harmonikle ilişkili frekans bileşenlerinden oluşan (tek-tonlu) yapıya sahiptir. Yine J. C. P Jones tarafından aynı algoritma ayırık zamanlı ve zaman gecikmeli sistemlere uygulanmıştır [38].

#### 1.4. Tezin Amacı, Katkıları ve İzlenilen Çalışma Yöntemi

Harmonik denge denklemlerinin otomatikleştirilmiş sembolik hesabına yönelik yukarıda ifade edilen algoritmalar yapı olarak SISO sistemleri kapsar ve tek-tonlu giriş sinyallerine yönelik analizlerde etkili bir yöntem sağlar. Bununla birlikte harmonik olarak ilişkisiz bileşenlerin düşünüldüğü çok-tonlu (multi-tone) sinyaller doğrusal olmayan sistem dinamiklerinin incelenmesinde sıklıkla başvurulan bir analiz sinyal formudur [59-69]. DOS'ların girişinde iki veya daha fazla harmonik olarak ilişkisiz sinüzoidlerden oluşan sinyal kullanılıyorsa çıkış, harmonikler ve harmonik olarak ilişkisiz frekans bileşenlerinin ara modülasyonlarıyla oluşan  $\omega = r_1\omega_1 + \dots + r_\sigma\omega_\sigma$  şeklinde temel frekansların karışımından oluşan bileşenlerini de içerir [39]. Bundan dolayı, tek-tonlu analizi kapsayan algoritma kullanılarak çok-tonlu durumda ortaya çıkan farklı frekans cevabı etkileşimlerini tanımlamak mümkün değildir. Ayrıca, SISO sistemlerin yanında DOS'ların birden fazla giriş ve çıkış içerdiği çok-girişli çok-çıkışlı (MIMO) sistemler çeşitli disiplinlerde ortaya çıkar [40-48]. MIMO sistemler yapı olarak birden fazla girişe sahip olduğu için girişlerine uygulanan sinyallere ait bileşenlerin harmonik olarak ilişkisiz veya çok tonlu olduğu durumlarda çıkış frekans bileşenleri yukarıda ifade edildiği gibi temel bir harmoniğin katsayıları şeklinde düşünülemez.



Şekil 1.4.  $\alpha$  -Giriş  $\beta$  -Çıkışlı MIMO sistem

Dolayısıyla çok-tonlu sinyalleri temel alan bir yaklaşım için benzer tanımlamaların MIMO sistemlerin çok-tonlu analizine yönelik yapılması gerekir. Bu amaçla, gerçekleştirilen tez çalışmasında MIMO sistemlerin çok-tonlu analizine yönelik yeni bir sembolik HBM algoritması sunulacaktır. Öncelikle, en temel alt sınıf olan SISO model yapısı kullanılarak çok-tonlu giriş için HBM uygulamasına yönelik yeni bir sembolik algoritma sunulduktan sonra bir örnek üzerinde elde edilen sonuçlar zaman boyutunda gerçekleştirilen sayısal simülasyonlarla doğrulanacaktır. Bunun yanında, girişteki bir sabit bileşenin ve giriş frekans bileşenlerine ait genliklerinin çıkış frekans bileşenlerinin belirlenmesindeki etkileri örnekler üzerinde sunulacaktır. Analizin çeşitliliğini artırmanın yanında, DOS'ların frekans cevabı etkileşimlerini daha kapsamlı bir şekilde ortaya koymayı hedefleyen algoritma yapısı temel alınarak, kullanılan sinyal bakımından aynı forma sahip olan algoritmanın uygulama alanı Şekil 1.4'de verildiği gibi  $\alpha$  -Giriş  $\beta$  -Çıkışlı genel formda verilen MIMO sistemleri kapsayacak şekilde genişletilecektir. Yeni algoritma yapısı kullanılarak frekans cevabı karakteristikleri giriş sinyallerine ait genlik ve frekans parametreleri için incelenecektir.

### 1.5. Tezin Bölümlerinin Organizasyonu

İfade edilen amaçlar kapsamında tezin bölümleri aşağıdaki gibi organize edilmiştir:

Bölüm 2 : Harmonik denge yönteminin klasik uygulaması tanıtıldıktan sonra genelleştirilmiş uygulaması açıklanacaktır. Denge denklemlerinin çözümünden elde

edilen analitik sonuçların doğruluğunun gösterilmesi amacıyla kullanılan simülasyon yöntemleri açıklanmıştır.

Bölüm 3 : Genelleştirilmiş yöntemin eksikliklerini gidererek uygulama bakımından iyileştirmek için algoritma yapısında kullanılan hesaplama teknikleri oldukça farklı, otomatikleştirilmiş yapıda bir sembolik algoritma yapısı ve uygulaması tanıtılmıştır.

Bölüm 4 : SISO sistemler için giriş sinyalinin çok-tonlu formunun kullanıldığı yeni bir sembolik HBM algoritması geliştirilmiştir. Bu amaçla analizde kullanılan çok tonlu sinyal formu tanımlanarak, çıkış frekans düzleminden analizde kullanılacak frekans bileşenlerinin seçimi için sınırlama işleminde dikkat edilen hususlar tanıtılmıştır. Belirlenen frekans bileşenlerini kullanarak istenilen kombinasyonların üretilmesi ve her bir kombinasyona ait permütasyonların elde edilebildiği tekrarlı algoritma yapıları geliştirilmiştir. Geliştirilen yöntemin temel algoritma yapısı sunularak, uygulaması örnek bir model üzerinde açıklanmıştır.

Bölüm 5 : Polinom tip doğrusal olmayan terimler içeren MIMO sistemlere ait diferansiyel denklemlerin sunumu için yeni bir tanımlama yapılmıştır. Bölüm 4’de gerçekleştirilen algoritma temel alınarak MIMO sistemleri kapsayacak şekilde genişletilmiştir.

Bölüm 6: İki-giriş iki-çıkışlı bir doğrusal olmayan model üzerinde MIMO formlar için tanımlanan algoritma uygulanıp, genlik ve frekans bileşenlerine bağlı frekans cevabı karakteristikleri incelenmiştir.

Bölüm 7: Tez çalışması değerlendirilerek, gerçekleştirilen katkılar özetlenmiştir. Çalışmanın devamı niteliğinde olabilecek öneriler sunulmuştur.

## **BÖLÜM 2. DOĞRUSAL OLMAYAN SİSTEMLERİN HARMONİK DENGE ANALİZİ VE SİMÜLASYONU**

### **2.1. Giriş**

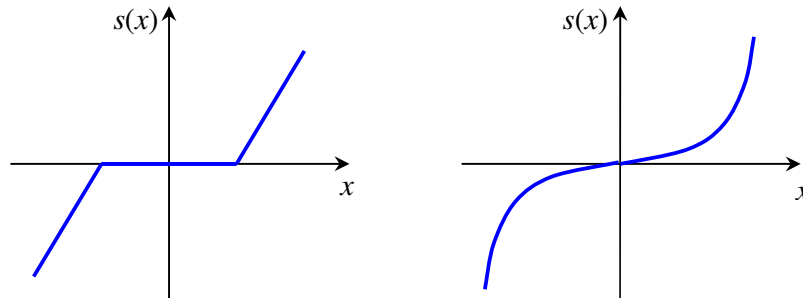
Harmonik denge denklemlerinin klasik hesabı, giriş ve çıkış için kabul edilen sinyal formlarının sistemin denkleminde yerine konularak gerçekleştirilen açılımda benzer frekansların denklemin diğer tarafına eşitlenerek bulunması temeline dayanır [20]. Analizde istenilen sayıda harmonik kullanılabilmesine rağmen, harmonik sayısı veya sistemin derecesi yükseldikçe açılımda elde edilen terim sayısındaki artış nedeniyle karmaşık bir hale gelir. Yöntemin klasik uygulamasında işlemleri basitleştirmek için analizde düşünülen harmonik sayısını azaltmak çözüm olsa da, doğrusal olmayan etkilerin tanımlanmasında etkisi yüksek harmoniklerin ihmalinin analiz doğruluğunu etkiler. Diğer bir problem ise analizi gerçekleştirilecek farklı bir sistem için açılımların yeniden gerçekleştirilip istenilen denge denklemlerinin yine uygun bileşenler seçilerek oluşturulması gerekir. Sistemin genel formdaki bir modeli ve yine genel formdaki sinyaller için tanımlanması, yöntemin sistematik bir form kazanması bu sınırlamaların azaltılması bakımından önem taşır. Bu amaca yönelik olarak geliştirilen sembolik formdaki bir yöntem ile harmonik denklemlerinin elde edilmesi için algoritma geliştirilerek daha pratik hale getirilmiştir [32,35,49]. Analizi gerçekleştirilen doğrusal olmayan sistemler genel olarak polinom tip doğrusal olmayan terimler içerecek yapıda olup kullanılan giriş ve çıkış sinyalleri poliharmonik formdadır. Böylece uygulamada kabul edilen sinyalin frekans bileşenleri istenilen sayıda harmonik olarak ilişkili bileşenden oluşabilir. Denklemlerin elde edilmesi sırasında yalnızca ilgilenilen frekanstaki terimler üretilerek açılımın karmaşıklığı azaltılmış, uygulamanın pratikliği artırılmıştır.



Bu bölümde öncelikle harmonik denge yönteminin geliştirilmesinde temel alınan doğrusal olmayan sistemlere ait zaman boyutunda genel bir formun sunumu yapılacaktır. Yöntemin klasik uygulaması seçilen bir örnek üzerinde açılımlar halinde sunulacaktır. Ardından geliştirilmiş yöntemin yapısı tanıtarak, avantajları klasik uygulama ile kıyaslama yapılarak gösterilecektir. Analiz amacıyla elde edilen denge denklemleri doğrusal olmayan forma sahip denklem takımlarını ifade eder. Bu denklemlerin çözülmesi için kullanılan temel yöntemler hakkında bilgi verildikten sonra örnek çözümler gerçekleştirilecektir. Buna ek olarak denklemler verilen bir frekans aralığı için çözümlenerek maksimum genlikler ve harmonik bileşenlere ait frekans cevapları elde edilecektir. Daha sonraki kısımda ise sayısal integrasyon yöntemleri ile dinamik sistemlerin sayısal simülasyonu açıklandıktan sonra harmonik denge analizinden elde edilen sonuçların doğruluğunu göstermek amacıyla kullanılacaktır. Son kısımda ise simülasyon yöntemi kullanılarak frekans cevabının elde edilmesine yönelik yaklaşımlar incelenerek, harmonik denge analizine ait sonuçlar ile kıyaslamalar yapılacaktır.

## 2.2. Doğrusal Olmayan Sistemlerin Zaman Boyutunda Sunumu

Dinamik sistemler genelde zaman boyutunda diferansiyel denklemler kullanılarak ifade edilir. Zaman boyutunda sunulan modeller sistemin sergilediği davranışın özünü yansıtır ve doğrusal olmayan ters tepki, sönüm veya doğrusal olmayan ölçülendirme dinamikleri gibi fiziksel davranışlar hakkında bilgi verir.



Şekil 2.1. Saturasyon ve kübik fonksiyon ile yaklaşım

Polinom tip doğrusal olmayan terimler içeren diferansiyel denklemler uygulamada doğrusal olmayan sistemlerin tanımlanması için yaygın olarak kullanılır [50].

Örneğin Şekil 2.1 de görüldüğü gibi saturasyon tip karşı koyma gücü polinom tip terimler ile modellenabilir. Harmonik denge denklemleri, analizde kullanılan frekans bileşenlerinin yanında sistem parametreleriyle de ilişkilidir. Yöntemin genelleştirilmesi açısından analizde düşünülen sistemin de genel bir yapıda ifade edilmesi gerekir. Uygulamada geniş bir alanı kapsayan böyle bir sunum polinom tip doğrusal olmayan terimler içeren diferansiyel denklemler ile tanımlanan sistemler için aşağıdaki gibi genel bir formda ifade edilir.

$$\sum_{m=1}^M \sum_{p=0}^m \sum_{l_1, l_{p+q}=0}^L c_{p,q}(l_1, \dots, l_{p+q}) \prod_{i=1}^p D^{l_i} y(t) \prod_{i=p+1}^{p+q} D^{l_i} u(t) = 0 \quad (2.1)$$

Burada,  $D$  türev alma operatörünü,  $l_i$  türevin derecesini,  $u(t)/y(t)$  değişkenleri ise giriş/çıkış sinyallerini belirtir. Her bir terim ilgili katsayısı  $c_{p,q}(l_1, \dots, l_{p+q})$  ile çarpılarak  $D^{l_i} y(t)$  içindeki  $p$ 'inci derece çarpan veya  $D^{l_i} u(t)$  içindeki  $q$ 'uncu derece çarpan ile oluşturulur. Çarpım halindeki toplamlar, bütün bu tip terimleri maksimum  $M$ 'inci derece doğrusal olmama seviyesine kadar üretir. Örneğin bir geminin düzenli deniz dalgaları karşısındaki sallanma hareketini tanımlayan ve yapı olarak Van der Pol sistemi ile benzer bir doğrusal olmayan diferansiyel denklem aşağıdaki gibi tanımlanmıştır [35],

$$\ddot{y}(t) + \mu \dot{y}(t) + d_2 y(t)^2 \dot{y}(t) + \omega_n^2 y(t) + \alpha_3 y(t)^3 = u(t) \quad (2.2)$$

Diferansiyel denklemin örneğin doğrusal ve çıkışa ait  $\dot{y}(t)$  terimi incelendiğinde, üs değeri '1' ve yalnızca çıkışa ait olduğu için  $p=1$  ve  $q=0$ , türev derecesi ise  $l_1=1$  olarak alınır.

$$\begin{aligned} \mu \dot{y}(t) &= \mu D^1 y(t) \\ &= c_{1,0}(1) \prod_{i=1}^1 D^{l_i} y(t) \prod_{i=1+1}^{1+0} D^{l_i} u(t) \end{aligned} \quad (2.3)$$

Böylece  $\dot{y}(t)$  terimi  $c_{1,0}(1)$  değişkeni ile temsil edilirken  $\mu$  katsayısı da bu değişkene atanır. Girişe ait  $u(t)$  terimi düşünüldüğünde ise yine üs değeri '1' ve bu kez girişi temsil ettiği için  $p=0$  ve  $q=1$ , türev derecesi ise  $l_1=0$  olarak alınır.

$$\begin{aligned}\mu\dot{y}(t) &= c_{1,0}(1)\prod_{i=1}^0 D^i y(t)\prod_{i=0+1}^{0+1} D^i u(t) \\ &= c_{1,0}(1)D^1 u(t) \\ &= c_{1,0}(0) u(t)\end{aligned}\tag{2.4}$$

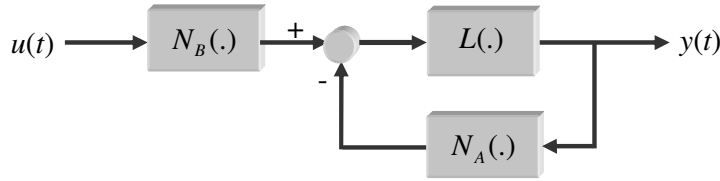
Yapı olarak biraz daha karmaşık olan doğrusal olmayan formdaki  $d_2 y(t)^2 \dot{y}(t)$  teriminin katsayısı belirlenirken, kübik bir terimi ifade ettiği için doğrusal olmama derecesi  $m=p+q=3$  alınır. Çıkışa ait terimlerin derecesi  $p$ , doğrusal olmayan terim  $y(t)y(t)\dot{y}(t)$  şeklinde ifade edildiğinde  $p=3$  olarak belirlenir. Girişe ait bir çarpan içermediği için  $q=0$  alınır. Türevle ilgili katsayılar  $(l_1, l_2, l_3) = (0,0,1)$  olarak hesaplanır. Böylece  $c_{3,0}(0,0,1) = d_2$  olarak elde edilir.

$$\begin{aligned}d_2 y(t)^2 \dot{y}(t) &= c_{3,0}(0,0,1)\prod_{i=1}^3 D^i y(t)\prod_{i=3+1}^{3+0} D^i u(t) \\ &= c_{3,0}(0,0,1)D^0 y(t)D^0 y(t)D^1 y(t)\end{aligned}\tag{2.5}$$

Benzer şekilde denkleme ait diğer terimler genel modele ait sembolik katsayılar cinsinden belirlenir. Burada katsayılar gösterim amaçlı olarak denkleme yerine konulursa aşağıdaki gibi yazılabilir,

$$\begin{aligned}c_{1,0}(2)\ddot{y}(t) + c_{1,0}(1)\dot{y}(t) + c_{3,0}(0,0,1)y(t)^2 \dot{y}(t) + c_{1,0}(0)y(t) \\ + c_{3,0}(0,0,0)y(t)^3 = c_{0,1}(0)u(t)\end{aligned}\tag{2.6}$$

Uygulamada sadece tanımlanan katsayılar sistemi temsil eder. Kullanılan sistemin genel yapısı Şekil 2.2 ile verildiği gibi gösterilebilir.



Şekil 2.2. Harmonik analizi için kullanılan sistem formuna ait blok diyagram

Şekil 2.2’de  $L(j\omega)$  doğrusal transfer fonksiyonunu,  $N_A(.)$  ve  $N_B(.)$  aşağıda verilen formdaki gibi bir doğrusal olmayan fonksiyonu belirtir.

$$\left. \begin{aligned} L(.) &: \ddot{w}(t) + 2\mu\dot{w}(t) + \omega_n^2 w(t) = x(t) \\ N_A(.) &: w(t) = d_1 x(t)^2 \dot{x}(t) + \alpha x(t)^3 \\ N_B(.) &: w(t) = \omega_n^2 x(t) \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

Burada  $x(t)$  ve  $w(t)$  her bir alt bloğa ait giriş ve çıkış sinyalleridir. Bu yöntemde analizde genel olarak düşünülen doğrusal olmayan sistem formu yalnızca giriş ve çıkışa ait doğrusal olmayan terimleri kapsar.

$$w(t) = \sum_{n=1}^N \sum_{l_1, l_n=0}^L c_{0,n}(l_1, \dots, l_n) \prod_{i=1}^n D^{l_i} x(t) \quad (2.8)$$

Bu yaklaşım ile çıkışı tekrarlı doğrusal olmayan modeller, basit doğrusal olmayan terimler içeren geri beslemeli sistem olarak incelenebilir. Böylece sistemlerin frekans cevabı ve tanımlama fonksiyonlarının hesabında kolaylık sağlanmış olur.

### 2.3. Harmonik Denge Denklemlerinin Klasik Yöntemle Hesaplanması

Doğrusal sistemlerin frekans cevabı karakteristikleri uygulanan sinyalin frekans ve genlik bileşenlerinden bağımsızdır. Buna karşın doğrusal olmayan sistemler, hem giriş sinyalinin içerdiği frekans bileşenlerine hem de genliğine bağlı olarak frekans boyutunda farklı davranışlar sergilerler. Bu bağımlılık, frekans bileşenleri arasındaki intermodülasyonlar ve harmonikler arasındaki etkileşimler sonucunda ortaya çıkar. Giriş genliğine bağımlılık sistemi tanımlayan denklemdeki terimlerin homojen

olmamasından kaynaklanır. Giriş sinyalinin bileşenleri tanımlanmış ise frekans etkileşimlerini önceden tanımlamak mümkündür ve bu durumda yalnızca giriş genliğine bağımlılık devam eder. Belirtilen giriş sinyal formu için aynı frekanstaki giriş/çıkış bileşenleri aşağıdaki gibi ifade edilebilir,

$$Y(j\omega) = N(A, j\omega)AU(j\omega) \quad (2.9)$$

Dikkat edilirse, bilinen doğrusal transfer fonksiyonu  $H(j\omega)$  yerine giriş genliğine bağımlı tanımlama fonksiyonu  $N(A, j\omega)$  kullanılmıştır. Tanımlama fonksiyonları girişe ait bir frekans bileşeni ile çıkışa ait bir frekans bileşenini ilişkilendirmek için kullanılır. Doğrusal olmayan sistemler genelde çıkışlarında giriş frekans bileşenlerinden farklı frekanslarda bileşenler üretir. Bundan dolayı genelde  $\omega_r$  frekansındaki giriş bileşeni ile  $\omega_s$  frekansındaki çıkış bileşeni arasındaki ilişkiyi sunan “çapraz spektral tanımlama fonksiyonu” (cross spectral describing function) kullanılır.

$$Y(j\omega_s) = N(A, j\omega_r)AU(j\omega_r) \quad (2.10)$$

Uygulamada giriş bileşenlerinin harmonik olarak ilişkili seçilmesinden dolayı örneğin birinci ve üçüncü harmonik arasında spektral oranı göstermek için  $N_{1,3}(\cdot)$  gibi ifadeler kullanılır. Dikkat edilirse Denklem (2.1) ve Denklem (2.2) ile elde edilen basit yapı, tanımlama fonksiyonunun hesabında yalnızca frekans etkileşimi düşünülerek sağlanır. Bu işlem yalnızca girişe ait doğrusal olmayan terimler içeren sistemler için oldukça açık olmasına karşın, benzer form çıkış için düşünüldüğünde işlemler karmaşıklaşır. Çıkış harmonikleri girişe geri besleneceği için doğrusal olmayan yapıya uygulanan frekans bileşenlerini tanımlamak zordur ve bundan dolayı oldukça artan sayıda frekans bileşeninin düşünülmesi gerekir. Aynı problemler  $N(A, j\omega)$  ifadesinin, her biri  $n$ -yollu etkileşimden oluşan katkıyı tanımlayan  $H_n(\cdot)$  bileşenlerinin serisi şeklinde açılmasıyla görülebilir [51].

$$N_{r,s}(A, j\omega_r) = \sum_{n=1} A^{n-1} H_{n,r,s}(j\omega_r) \quad (2.11)$$

Harmonik denge denklemlerinin klasik hesabında, çıkışı geri beslemeli olan bir sistemin frekans bileşenleri başlangıçtakilere, yani sinyallerde kullanılan frekans bileşenlerine eşitlenir. Bu tip sinyaller belli bir formda kabul edilerek ‘denge’ denklemleri seti oluşturmak için kullanılabilir ve ardından istenilen genlik ve faz değerlerini elde etmek için çözülebilir. Temelde frekans boyutu kavramı olmasına karşın doğrusal olmayan diferansiyel sistemlerin harmonik denge denklemleri zaman düzleminde elde edilir. Bu durumda kabul edilen dalga formu modelde yerine konur ve frekans bileşenleri sistem denkleminin diğer tarafı ile dengelenir.

$$u(t) = A_u \cos(\omega t - \phi), \quad y(t) = A_y \cos(\omega t) \quad (2.12)$$

Sonraki aşama ile uyumluluk sağlamak için bilinmeyen faz çıkıştan ziyade girişle ilişkilendirilir. Burada,  $A_y$  ve  $\phi$  belirlenmesi gereken bilinmeyenlerdir. Modeldeki diğer terimler kabul edilen sinyallere göre açılabilir,

$$\left. \begin{aligned} \dot{y}(t) &= -A_y \omega \sin(\omega t) \\ \ddot{y}(t) &= -A_y \omega^2 \cos(\omega t) \\ y(t)^2 \dot{y}(t) &= -\frac{3A_y^3}{4} \cos(\omega t) + \frac{A_y^3}{4} \cos(3\omega t) \\ y(t)^3 &= -\frac{A_y^3}{4} \omega \sin(\omega t) + \frac{A_y^3}{4} \omega \sin(3\omega t) \end{aligned} \right\} \quad (2.13)$$

Bu ifadeler Denklem 2.2 ile belirtilen örnek sistemde yerine yerleştirilip açılarak, yalnızca benzer  $\omega$  frekansındaki terimler ele alındığında temel harmonik için denge denklemleri elde edilir,

$$\left. \begin{aligned} \cos(\omega t): & -A_1 \omega^2 + \omega_n^2 A_1 + \frac{3\alpha}{4} A_1^3 = \omega_n^2 A_u \cos(\phi) \\ \sin(\omega t): & 2\mu A_1 \omega + \frac{A_1^3}{4} d_1 \omega = -\omega_n^2 A_u \sin(\phi) \end{aligned} \right\} \quad (2.14)$$

Elde edilen denklem çifti sayısal yöntemlerle çözümlenerek bilinmeyenler tespit edilebilir ve bu değerlere bağlı olarak tanımlama fonksiyonu aşağıdaki gibi ifade edilebilir,

$$N(A_u, j\omega_r) = \frac{Y(j\omega)}{U(j\omega)} = \frac{A_y}{A_u} e^{j\phi} \quad (2.15)$$

Pratikte bu sonucun doğruluğu önemli derecede çıkış sinyallerinin yapısı tanımlanırken yapılacak kabullerin doğruluğuna dayanır (mevcut durumda Denklem 2.12 ile belirtilen tek sinüsoidal sinyal kabul edilmiştir). Genelde sistemin düşük geçiş karakteristiklerine dayanarak bazen yüksek dereceli harmonikler ihmal edilse de, özellikle sistemde alt harmonikler veya sabit (dc) bileşenli terimler düşünüldüğünde harmonik sayısını artırmak gerekir. Bununla birlikte, geleneksel harmonik denge yaklaşımının oluşturduğu bir problem analizde kullanılan harmonik sayısı artırıldığında yöntemin karmaşıklığının artmasıdır. Bu durumu göstermek amacıyla, örneğin önceki sistemde çıkış için kabul edilen forma üçüncü harmonik bileşeni eklenerek sinyal formları aşağıdaki gibi kabul edilmiştir,

$$u(t) = A_u \cos(\omega t - \phi_1), \quad y(t) = A_1 \cos(\omega t) + A_3 \cos(3\omega t + \phi_3) \quad (2.16)$$

Modeldeki doğrusal terimler için gerekli açılımlar basit işlemlerle gerçekleştirilir. Doğrusal olmayan terime ait açılımlar ise kullanılan harmonik sayısına bağlı olarak karmaşık bir hale gelir. Örneğin kübik terim için elde edilen açılım aşağıda görüldüğü gibi çok sayıda terimden oluşur,

$$\begin{aligned} y(t)^3 = & \frac{3}{4} A_1^3 \cos(\omega t) + \frac{A_1^3}{4} \cos(3\omega t) + \frac{3}{4} A_3^3 \cos(3\omega t + \phi) \\ & + \frac{A_3^3}{4} \cos(9\omega t + 3\phi) + \frac{3A_1^2 A_3}{2} \cos(3\omega t + \phi) \\ & + \frac{3A_1^2 A_3}{4} [\cos(5\omega t + \phi) + \cos(\omega t + \phi)] \\ & + \frac{3A_1 A_3^2}{2} \cos(\omega t) + \frac{3A_1 A_3^2}{4} [\cos(7\omega t + 2\phi) + \cos(3\omega t + 2\phi)] \end{aligned} \quad (2.17)$$

Kabul edilen sinyal formu incelendiğinde denge denklemleri oluşturulurken  $\omega$  ve  $3\omega$  bileşenlerine ait terimlerin seçilmesi gerekir. Yalnızca bir terim için çalışmanın büyük bir kısmı gerçekleştirilmiş olsa da çok basit sistemler için bile hesaplamaların karmaşıklaştığı açıkça görülmektedir.

#### 2.4. Genelleştirilmiş Harmonik Denge Metodu

Bir önceki başlık altında tanıtılan klasik harmonik denge metodu doğrusal olmayan sistemlerin limit periyot ve tanımlama fonksiyonu analizi için faydalı bir araçtır. Bu yöntemin uygulamasında karşılaşılan temel problemler, yeni bir sistem modeli için analiz yapılacağı zaman denge denklemlerinin yeniden türetilmesini gerektirmesi ve analizde hesaba katılacak harmonik sayısı artırıldığında açılımların daha karmaşık bir hale gelmesidir. Bunlara çözüm olarak harmonik denge denklemleri, genel doğrusal olmayan sistem formu ve harmonik sayısı isteğe göre belirlenebilen bir giriş sinyali için türetilir. Uygulamada bir sisteme ait parametreler ve giriş sinyali denge denklemlerini elde etmek için geliştirilen formülde yerine konur. Şekil 2.2’de görülen genel yapıdaki doğrusal olmayan sistemi aşağıdaki genel harmonik giriş formu için ele alalım,

$$u(t) = A_u \left[ \sum_{r=1}^{R_u} A_{u,r} \cos(\omega_r t + \phi_{u,r}) + A_{u,0} \right], \omega_i > \omega_j, \quad \forall i > j \quad (2.18)$$

Burada  $R_u$  ile tanımlanan harmonik sayısı ve girişin her birine ait genlik ve faz değerleri  $(A_{u,r}, \phi_{u,r})$  bilinmektedir. Çıkış sinyali  $y(t)$ ’nin de aynı dalga formunda olduğu kabul edilir ve  $R_y$  adet harmoniğe ait genlik ve faz değerleri harmonik denge denklemleri çözdürülerek bulunur. Harmonik denge denklemlerini elde etmek için temelde çeşitli kosinüs terimlerinin zaman boyutu açılımının kullanıldığı klasik metodun tersine, genelleştirilmiş metot tamamen frekans boyutuna dayanmaktadır. Denklem 2.18 ile belirtilen genel giriş formunun Fourier dönüşümü aşağıdaki gibi alınabilir,



$$U(j\omega) = A_u \sum_{r=-R_u}^{R_u} 2\pi \frac{A_{u,lr}}{2} e^{j\phi_{u,r}} \delta(\omega - \omega_r) \quad (2.19)$$

Dikkat edilirse sinyal üstel formda ifade edilmiş olup  $\omega_r = \omega_r$ ,  $\phi_{u,-r} = -\phi_{u,r}$ ,  $\omega_0 = 0$  ve  $A_{u,0} = A_{u,dc}$  tanımlamaları yapılarak basitleştirilmiştir. Benzer tanımlamalar genel çıkış formu için de geçerlidir. Bu harmonikleri geri besleme döngüsü etrafında eşitlemek ya da dengelemek için, çeşitli frekans bileşenlerinin Şekil 2.2'de verilen her bir bloktan geçirilmesi gerekir. Doğrusal bloklar için bu işlem basittir, fakat doğrusal olmayan elemanların frekans davranışı için basit değildir ve her bir durum için farklı bir tanımlama fonksiyonu gerekir. Doğrusal olmayan terimler yalnızca girişlerinin fonksiyonu oldukları için tekrarlı bir cevap üretmezler. Doğrusal olmayan bileşenler için tanımlama fonksiyonu aşağıdaki ifade ile elde edilebilir [51].

$$\frac{A_{x,r}}{2} e^{j\phi_{x,r}} N(A_x, j\omega_r) = \sum_{n=1}^N A_x^{n-1} \sum_{l_1, \dots, l_n = -L}^L c_{0,n}(l_1, \dots, l_n) \sum_{\substack{n_1, \dots, n_n = -R_x \\ \sum \omega_{r_i} = \omega_r}}^{R_x} \prod_{i=1}^n \frac{A_{x,l_i}}{2} e^{j\phi_{x,r_i}} (j\omega_{r_i})^{l_i} \quad (2.20)$$

Burada  $c_{0,n}(\cdot)$  parametreleri sistemin yapısına dayanan ve bilinen katsayıları ve  $N(A_x, j\omega_r)$  istenilen tanımlama fonksiyonunu belirtir. Sisteme ait doğrusal olmayan terimler için tanımlama fonksiyonları hesaplandıktan sonra harmonik denge denklemleri direkt olarak elde edilir. Şekil 2.2 incelendiğinde aşağıdaki gibi bir ifade yazılabilir,

$$Y(j\omega_r) = L(j\omega_r) [N_B(A_u, j\omega_r)U(j\omega_r) - N_A(A_y, j\omega_r)Y(j\omega_r)] \quad (2.21)$$

Giriş ve çıkış için Denklem (2.18) ile belirtilen  $\omega_r$  frekansındaki genlik değerleri yerine konur ve tekrar düzenlenirse, harmonik denge denklemleri aşağıdaki formda elde edilir,

$$A_y A_{y,r} e^{j\phi_{y,r}} [1 + L(j\omega_r)N_A(A_y, j\omega_r)] = L(j\omega_r) N_B(A_u, j\omega_r) A_u A_{u,r} e^{j\phi_{u,r}} \quad (2.22)$$

Elde edilen genel yapıdaki denklem farklı frekans değerleri için oluşturularak, analizde kabul edilen harmonik sayısınca gerçel ve sanal kısımlardan oluşan denklem setleri elde edilir. Bu denklemler daha sonra ifade edileceği gibi, doğrusal olmayan denklem takımlarına yönelik sayısal çözümlene yöntemleri ile bilinmeyen  $A_{y,r}$  genlik ve  $\phi_{y,r}$  fazları elde edilir. Sistemin tümüne ait tanımlama fonksiyonunu ifade eden Denklem 2.22 aşağıdaki gibi düzenlenebilir,

$$N(A_u, j\omega_r) = \frac{Y(j\omega_r)}{U(j\omega_r)} = \frac{L(j\omega_r)N_B(A_u, j\omega_r)}{1 + L(j\omega_r)N_A(A_y, j\omega_r)} \quad (2.23)$$

Elde edilen denklemin paydası çıkış dalga formu parametrelerinin bir fonksiyonudur. Bundan dolayı değerlendirilebilmesi için öncelikle harmonik denge denklemlerinin çözülmesi gerekir.

#### 2.4.1. Örnek uygulama

Denklem 2.2 ile tanımlanan sisteme ait denge denklemlerinin elde edilmesi için gerçekleştirilecek ilk çalışma, Şekil 2.2’de tanımlanan her bir bloğa ait frekans cevabının hesaplanmasıdır. Temel frekanstaki doğrusal blok  $L(j\omega)$  ve doğrusal olmayan  $N_B(j\omega)$  bloğu için bu işlem kolayca yapılabilir,

$$L(j\omega) = \frac{1}{(j\omega)^2 + 2\mu(j\omega) + \omega_n^2}, \quad N_B(j\omega) = \omega_n^2 \quad (2.24)$$

Daha yüksek dereceli harmoniklerin hesabı için  $\omega$  harmoniğinin  $3\omega$  ile değiştirilmesi gerekir.

$$L(j3\omega) = \frac{1}{(j3\omega)^2 + 2\mu(j3\omega) + \omega_n^2}, \quad N_B(j3\omega) = \omega_n^2 \quad (2.25)$$

Doğrusal olmayan blok  $N_A(\cdot)$  için frekans cevabı Denklem 2.20 ile belirlenebilir. Analizi gerçekleştirilen sistem iki adet kübik formdaki doğrusal olmayan terimler

içerdiği için Denklem 2.20'deki ilk toplam ifadesi  $N = 3$  olarak ve ikinci toplam  $c_{3,0}(0,0,1) = d_2$  ve  $c_{3,0}(0,0,0) = \alpha_3$  katsayıları olarak kısalır. İstenilen çıkış frekansına ait bileşenlerin elde edilmesi için gerekli  $n$ 'li harmonikleri seçme işlemi üçüncü toplam operatörü ile sağlanır. Bir önceki örnekte 2.16 ile verilen giriş/çıkış sinyalleri için kullanılacak set,  $\{-3,-1,1,3\}$  dizisi ile belirtildiği gibidir. Bu setten seçilen bileşenler temel harmonik tanımlama fonksiyonunun hesabı için  $r=1$  ve üçüncü harmonik tanımlama fonksiyonu hesabı için  $r=3$  olarak seçilir.

Tablo 2.1. Üçüncü harmonik için katsayılar

$\sum r_i = 1$	$\sum r_i = 3$
$\{r_1 \ r_2 \ r_3\}$	$\{r_1 \ r_2 \ r_3\}$
$\{-1 \ 1 \ 1\}$	$\{-1 \ 1 \ 3\}$
$\{1 \ -1 \ 1\}$	$\{-1 \ 3 \ 1\}$
$\{1 \ 1 \ -1\}$	$\{3 \ -1 \ 1\}$

Böylece denklem 2.20 kullanılarak temel ve üçüncü harmoniklere ait tanımlama fonksiyonları aşağıdaki gibi elde edilir,

$$N_{A_{1,1}}(A_1, A_3, j\omega) = \frac{3\alpha_3 + j\omega d_2}{4} (A_1^2 + 2A_3^2 + A_1A_3e^{j\phi_3}) \quad (2.26)$$

$$N_{A_{3,3}}(A_1, A_3, 3j\omega) = \frac{\alpha_3 + j\omega d_2}{4} \left( 6A_1^2 + 3A_3^2 + \frac{A_1^3}{A_3} e^{-j\phi_3} \right) \quad (2.27)$$

Her iki harmonik bileşen için elde edilen tanımlama fonksiyonları ilgilenilen frekanslardaki denge denklemlerini elde etmek için Denklem 2.22'de yerine konur.

$$A_1 + \left( 1 + \frac{1}{(j\omega)^2 + 2\mu j\omega + \omega_n^2} \frac{3\alpha_3 + j\omega d_2}{4} (A_1^2 + 2A_3^2 + A_1A_3e^{j\phi_3}) \right) = \omega_n^2 A_u e^{j\phi_1}$$

$$1 + \frac{1}{(j\omega)^2 + 2\mu j\omega + \omega_n^2} \frac{\alpha_3 + j\omega d_2}{4} \left( 6A_1^2 + 3A_3^2 + \frac{A_1^3}{A_3} e^{-j\phi_3} \right) = 0 \quad (2.28)$$

Böylece temel ve üçüncü harmonikler için denge denklemleri hesaplanmış olur. Ayrıca bu denklemler gerçel ve sanal kısımlarına ayrılarak dört adet doğrusal olmayan denklem takımı ile ifade edilebilir,

$$\left. \begin{aligned} A_1 \left( \omega_n^2 - \omega^2 + \frac{3\alpha_3}{4} (A_1^2 + A_1 A_3 \cos(\phi_3)) + 2A_3^2 - \frac{\omega d_2}{4} A_1 A_3 \sin(\phi_3) \right) &= \omega_n^2 A_u \cos(\phi_1) \\ A_1 \left( 2\mu\omega + \frac{\omega d_2}{4} (A_1^2 + A_1 A_3 \cos(\phi_3)) + 2A_3^2 + \frac{3\alpha_3}{4} A_1 A_3 \sin(\phi_3) \right) &= -\omega_n^2 A_u \sin(\phi_1) \\ \omega_n^2 - 9\omega^2 + \frac{\alpha_3}{4} \left( 6A_1^2 + \frac{A_1^3}{A_3} \cos(\phi_3) + 3A_3^2 \right) + \frac{\omega d_2}{4} \frac{A_1^3}{A_3} \sin(\phi_3) &= 0 \\ 6\mu\omega + \frac{\omega d_2}{4} \left( 6A_1^2 + \frac{A_1^3}{A_3} \cos(\phi_3) + 3A_3^2 \right) - \frac{\alpha_3}{4} \frac{A_1^3}{A_3} \sin(\phi_3) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.29)$$

Elde edilen denklem takımlarında  $A_3=0$  ve  $\phi_3=0$  seçilmesiyle temel harmonik için klasik uygulamaya ait Denklem 2.14'ün elde edildiği görülür.

#### 2.4.2. Doğrusal olmayan denklem takımlarının çözdürülmesi

Harmonik denge denklemleri üretildiğinde izlenmesi gereken adım verilen parametreler için doğrusal olmayan formdaki denklem takımlarının çözdürülmesidir. Bu amaçla kullanılan en temel ve yaygın yöntemlerden biri Newton-Raphson metodudur [52].

$$F(x) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \dots \\ f_n(x_1, \dots, x_n) \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

Yukarıda verilen  $n$  adet doğrusal olmayan eşitlik,  $X^{(0)} = [x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}]$  noktası civarında Taylor serisine açılır, ikinci ve sonraki türevler ihmal edilirse  $(k+1)$ 'inci iterasyon aşağıdaki eşitlikle ifade edilebilir,

$$\begin{bmatrix} f_1(x_1^{(k+1)}, \dots, x_n^{(k+1)}) \\ \dots \\ f_n(x_1^{(k+1)}, \dots, x_n^{(k+1)}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}) \\ \dots \\ f_n(x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(k+1)} - x_1^{(k)} \\ \vdots \\ x_n^{(k+1)} - x_n^{(k)} \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

Bu ifade matris formda basitleştirilmiş olarak yazılabilir,

$$F(X^{(k+1)}) = F(X^{(k)}) + J(X^{(k)})\Delta X \quad (2.32)$$

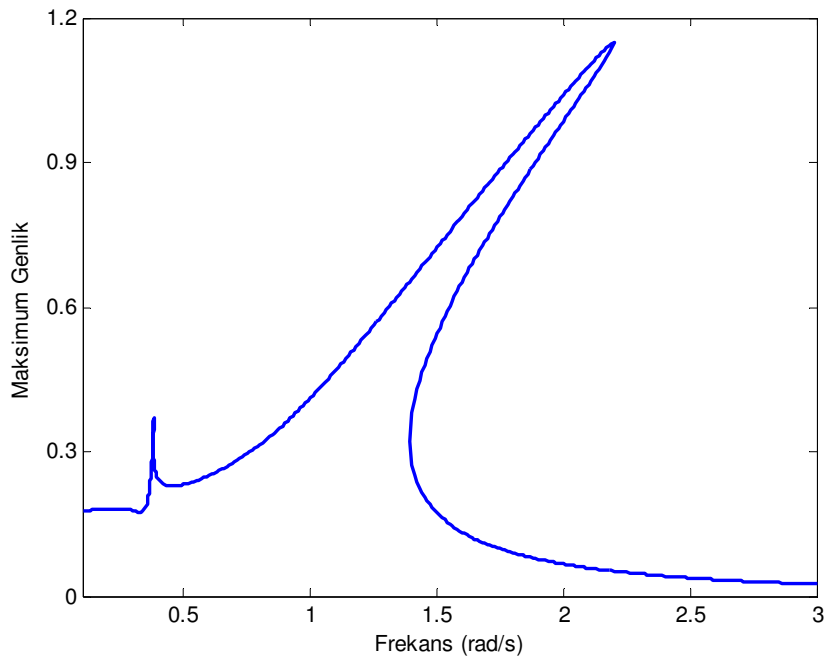
Burada  $J$  ile belirtilen Jacobian matrisinin satırları her bir doğrusal olmayan denklemin tüm değişkenlere göre kısmi türevinin alınmasıyla oluşturulur. Jacobian matrisinin hesabı ek bir yük getirdiği için bu matrisin sonlu farklar (finite differences) yaklaşımı ile hesabı gerçekleştirilebilir. Diğer bir yöntem daha karmaşık bir algoritma yapısına sahip Nelder-Mead Simplex direkt arama yöntemidir [53,54]. Bu yöntemin avantajı Jacobian matrise ihtiyaç duymadan yalnızca çözümlenecek denklem takımların değerlendirilerek istenilen sonuca ulaşmasıdır. Bununla birlikte çözümlenme hızı bakımından Jacobian matrisi gerektiren Newton ve benzeri yöntemlere göre daha yavaştır. Amaç verilen doğrusal olmayan formdaki denge denklemlerinin çözümünü sağlamak olduğu için algoritma yapılarından kaynaklanan yuvarlama hataları hariç elde edilen sonuçlar aynı olur. Elde edilen denklem takımlarının sayısal olarak çözdürülebilmesi için gerekli sistem parametreleri örneğin aşağıdaki gibi seçilebilir,

$$\omega_n = 1; \quad d_2 = 0,2; \quad \mu = 0,005; \quad \alpha_3 = 4; \quad A_u = 0,2 \quad (2.33)$$

İstenilen frekans değerleri için çözümlenmeler gerçekleştirildikten sonra Denklem 2.15 ile gösterilen sinyaller tanımlama fonksiyonunu elde etmek için  $\phi_1' = 3\phi_1$  ve  $\phi_3' = \phi_3 + 3\phi_1$  alınarak aşağıdaki gibi tekrar düzenlenir,

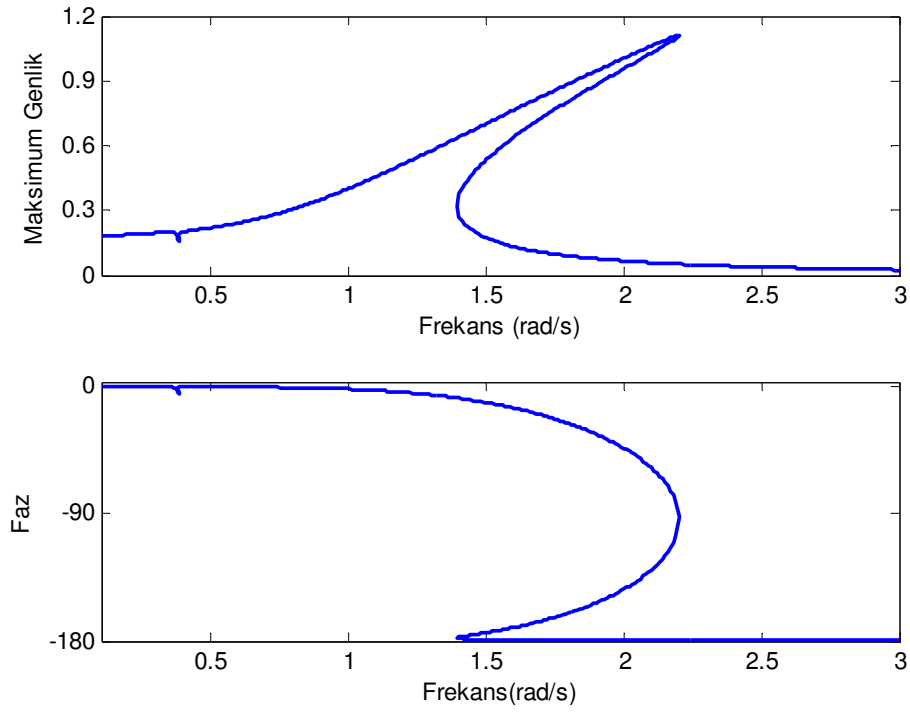
$$u(t) = A_u \cos(\omega t), \quad y(t) = A_1 \cos(\omega t + \phi_1') + A_3 \cos(3\omega t + \phi_3') \quad (2.34)$$

Böylece istenilen bir frekans aralığı için, zaman boyutunda elde edilen sonuçlara ait maksimum değerler veya sistemin kazancı, aralıktaki her bir frekans değeri hesaplandıktan sonra elde edilebilir. Örneğin  $\omega = \{0,10; 0,11; \dots; 2,99; 3,00\}$  seti için çözümlerler gerçekleştirildiğinde kazançta ait frekans cevabı Şekil 2.3'deki gibi elde edilir.

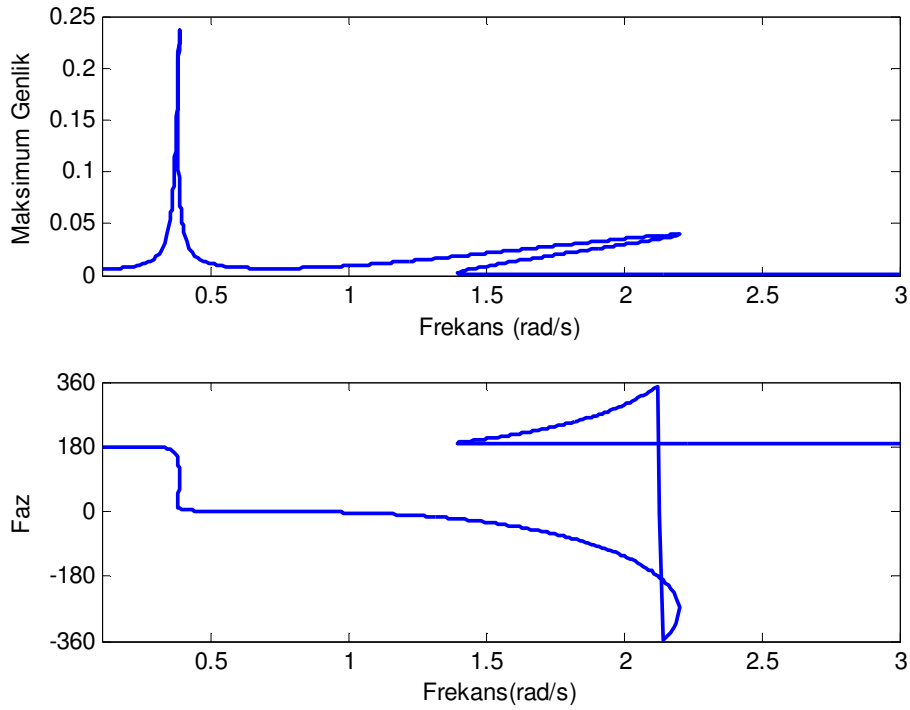


Şekil 2.3. Sistemin maksimum genliklerine ait frekans cevabı

Çözümleme sırasında bir önceki sonuçlar başlangıç durumu olarak kullanılır. Bu işlem atlama davranışının ortaya konması açısından önemlidir. Durumlar bir sonraki frekans noktası için interpolasyon ile tahmin edilerek çözümleme süresi kısaltılabilir.



Şekil 2.4. Temel harmoniğe ait maksimum genlik ve faz cevapları

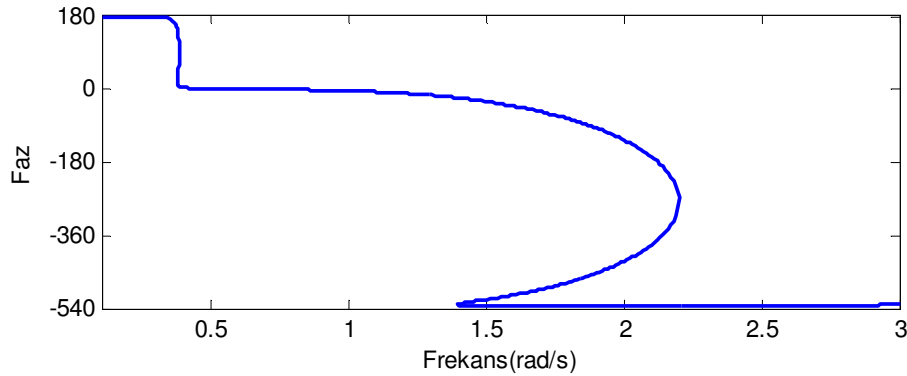


Şekil 2.5. Üçüncü harmoniğe ait maksimum genlik ve faz cevapları

Çıkışta kabul edilen frekans bileşenlerine ait frekans cevapları, gerek genlik değerleri gerekse Denklem 2.35 ile belirtilen tanımlama fonksiyonları kullanılarak sunulabilir.

$$N_{1,1}(j\omega) = \frac{A_1}{A_u} e^{j\phi_1}, \quad N_{1,3}(j\omega) = \frac{A_3}{A_u} e^{j(\phi_3+3\phi_1)} \quad (2.35)$$

Tanımlama fonksiyonları ile giriş ve çıkışa ait iki frekans bileşeninin genliklerine ait oran ile belirtilerek giriş ve çıkışa ait iki bileşen arasındaki kazanç ve faz ilişkileri Şekil 2.4 ve 2.5’de verilmiştir. Şekil 2.5 incelendiğinde, üçüncü harmoniğe ait faz cevabının tepe değerinin olduğu 2,2 rad/s civarında 360 derecelik bir değişim olduğu görülür. Bu noktadan sonraki veriler 360 derece eksiltilerek tekrar bir düzenleme yapılırsa faz cevabı aşağıdaki gibi daha düzenli bir şekilde ifade edilebilir,

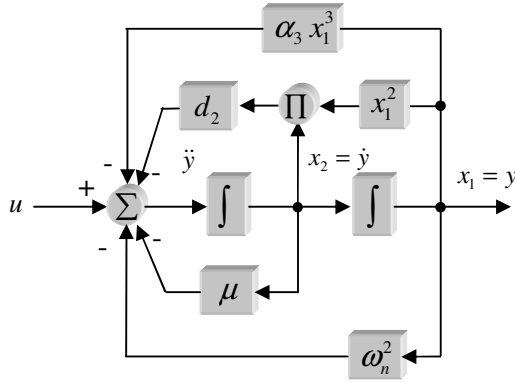


Şekil 2.6. Üçüncü harmoniğe ait düzenlenmiş faz cevabı

### 2.4.3. Sayısal integrasyonlar ile simülasyon

Diferansiyel denklemlerin sayısal yaklaşımlar ile çözümlenmesi için Runge–Kutta, Adams–Bashforth–Moulton ve Backward Differentiation algoritmaları gibi genel olarak kabul gören birçok yöntem mevcuttur. Bununla birlikte, Runge–Kutta metodunu temel alan algoritmalar daha yaygın kullanıma sahiptir [55]. Diferansiyel denklemlerin çözümlenmesinde sisteme ait durumların ifade edilmesi gerekir. Örnek olarak verilen sisteme ait faz değişimi blok diyagramı aşağıdaki gibi ifade edilebilir,





Şekil 2.7. Denklem 2.2 ile verilen sisteme ait faz değişimi blok diyagramı

Sisteme ait durum denklemleri Şekil 2.7'den aşağıdaki gibi ifade edilebilir,

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -\mu x_2(t) - d_2 x_1(t)^2 x_2(t) - \omega_n^2 x_1(t) - \alpha_3 x_1(t)^3 + u(t) \quad (2.36)$$

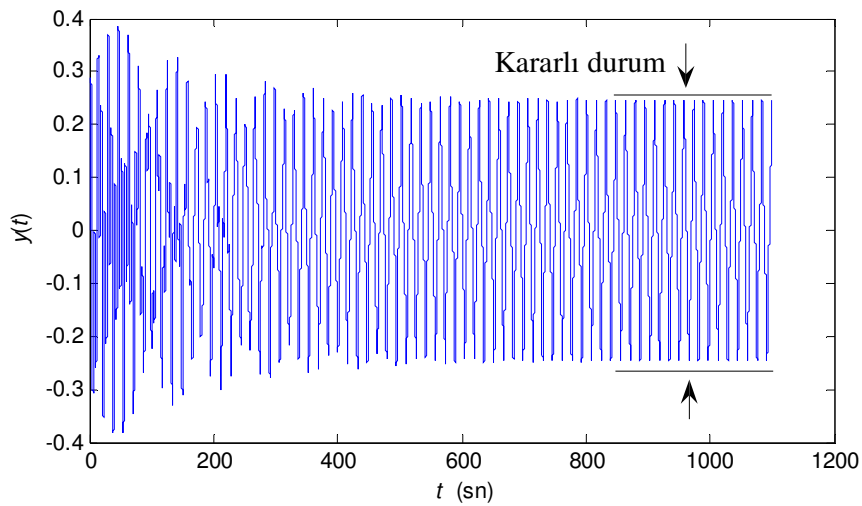
Sistemi tanımlayan bu ifade, durumların ve sistem parametrelerinin bir fonksiyonudur. Bu fonksiyon örneğin Runge-Kutta 4 yönteminin uygulamasında aşağıda verilen hesaplamaların gerçekleştirilmesi için kullanılır.

$$\left. \begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\ k_1 &= hf(x, y) \\ k_2 &= hf(x + h/2, y + 1/2k_1) \\ k_3 &= hf(x + h/2, y + 1/2k_2) \\ k_4 &= hf(x + h/2, y + 1/2k_3) \end{aligned} \right\} \quad (2.37)$$

Burada  $f(x, y)$  fonksiyonundan elde edilen değer,  $x$  ve  $k_i$  değişkenleri sistemin derecesine bağlı vektörel yapıdaki değişkenlerdir. Böylece diferansiyel denklemin çözümü istenilen  $u(t)$  sinyali için gerçekleştirilebilir.

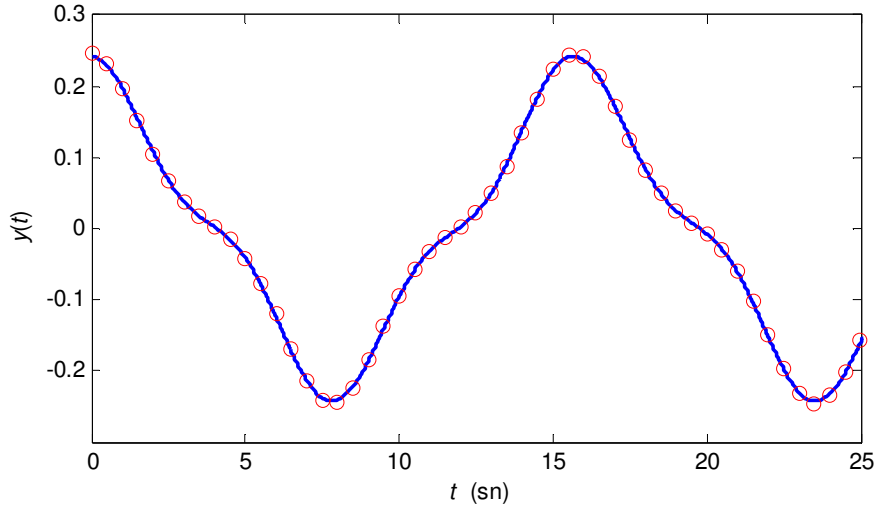
#### 2.4.4. Simülasyon yöntemi ile frekans cevabının elde edilmesi

Bir sistemin simülasyonu ile frekans cevabı davranışı, verilen frekans aralığındaki her bir frekans değeri için zaman boyutu özellikleri incelenerek çıkartılır. Sistemin girişine uygulanan periyodik test sinyali ile çıkışta elde edilen periyodik sinyal arasındaki genliklere ait oran ve faz farkı hesaplanarak uygulanan frekans değeri için analiz gerçekleştirilmiş olur. Bu amaçla sistemin bir periyotluk analizinin yapılması yeterlidir. Fakat bir zaman boyutu simülasyonu istenen bir kararlı durum davranışına ek olarak Şekil 2.8’de görüldüğü gibi geçici bir başlangıç durumu sergiler. Bundan dolayı inceleme yapılacak bir periyotluk sinyalin kararlı durum diliminden seçilmesi gerekir.



Şekil 2.8.  $\omega=0,4$  rad/s için sistemin simülasyonu

Harmonik denge denklemleri ile yapılan çözümlene sonucu elde edilen 0,4 rad/sn frekansındaki örnek bir sinyal için simülasyonundan elde edilen sonuç ile kıyaslaması Şekil 2.9’da verilmiştir.



Şekil 2.9.  $\omega = 0,4$  rad/s için zaman boyutunda harmonik denge ve simülasyon sonuçları

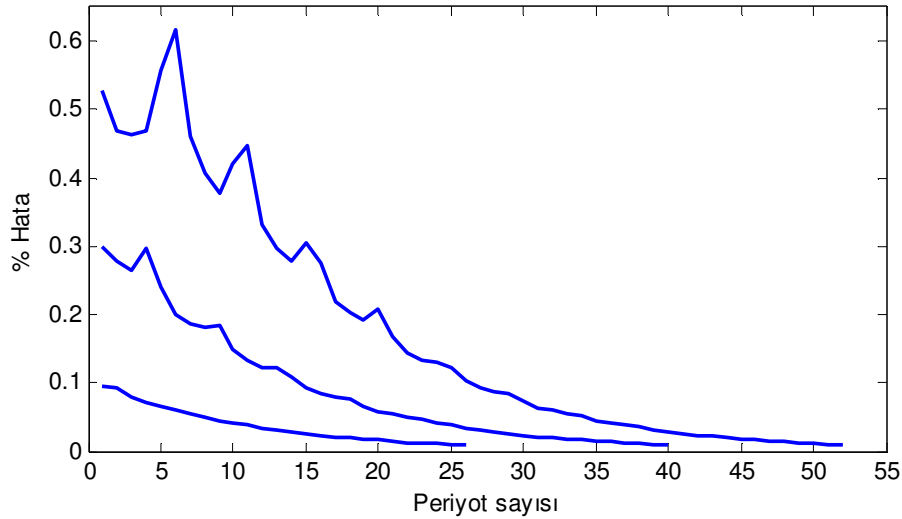
Sisteme uygulanan periyodik bir giriş için cevap incelenirken birim basamak sinyalinde elde edildiği gibi sabit bir değer yoktur, bu yüzden kararlı durum tespitinde sınırlamalar birbiri ardına periyotlar arasında noktasal olarak yapılır. Kararlı durumun elde edilmesi için gerekli periyot sayısı uygulanan frekans bileşenine bağlı olarak değişebilir. Bundan dolayı uygulanan frekans bileşeni gibi farklı parametreler için kararlı durumun istenilen hassasiyetle sağlandığı periyot tekrar aranır. Örneğin aralarındaki farkın ölçülmesi aşağıdaki gibi tanımlanabilir [56].

$$\% \text{ hata} = \frac{\text{maksimum}(|y(t) - y(t - T)|)}{\text{maksimum}(|y(t) - \text{ortalama}(y(t))|)} \times 100 \quad (2.38)$$

burada  $y(t)$ ,  $nT < t < (n+1)T$  periyodu için sistemin çıkışına ait dalga formunu gösterir.  $T$  periyodu,  $n$  simülasyonu yapılmış toplam periyot sayısını belirtmektedir. Dikkat edilirse hata, ortalama değeri çıkartılmış çıkış genliğinin bir yüzdesi olarak tanımlanır. Çift dereceli doğrusal olmayan elemanlar genelde sabit değerler ürettiği için bu önlem gereklidir. Örneğin negatif bir sabit bileşen, ortalama seviye çıkarılmazsa  $y(t)$  çıkış değerini dolayısıyla Denklem 2.38'in paydasını sıfır yapabilecek bir değere sahip olabilir. Simülasyonda kararlı durum periyodunu belirleyebilmek için her bir periyot sonunda bir önceki ile karşılaştırma yapılır ve

Denklem 2.38 kullanılarak aralarındaki hata ilişkisi hesaplanır. Bu işlemler kullanıcı tarafından belirtilen sınırın altına düşene kadar veya kullanıcı tarafından belirtilen maksimum simülasyon sayısı aşılanaya kadar sürer. Son simülasyonun bu noktadaki çıkışı ve durum değişkenleri bir sonraki analiz için kaydedilir. Eğer Runge-Kutta 4-5 gibi değişken adımlı bir çözümlenme yöntemi kullanılıyorsa hata miktarının hesaplanabilmesi için kıyaslanacak periyotların nokta sayısı interpolasyon ile eşitlenmesi gerekir.

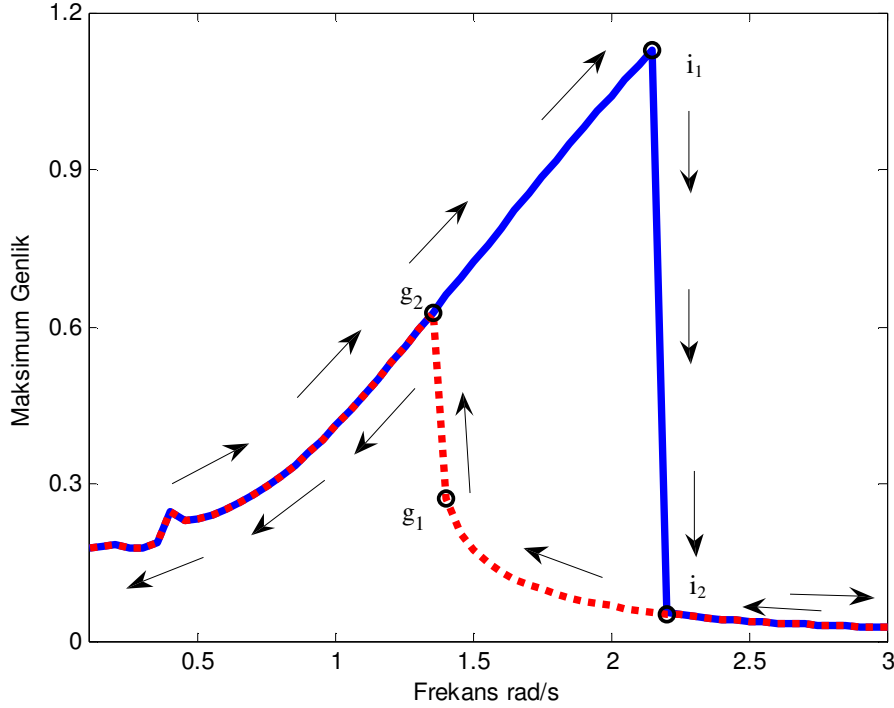
Örneğin 0,4 rad/s frekansında %1 ile gerçekleştirilecek bir analiz için sıfır başlangıç durumları kullanıldığında 52 periyotluk simülasyon sonrasında kararlı duruma ulaşılır. Eğer başlangıç durumu olarak 0,3 rad/s sonucunda elde edilen durumlar kullanılırsa bu süre 40 periyoda, biraz daha yakın bir frekans değeri seçildiğinde 0,39 rad/s için, sağlanması istenen hata miktarı için kararlı durumlara 26 periyot sonunda ulaşılır.



Şekil 2.10. %1 hata ile kararlı durumların elde edilmesi

Şekil 2.10'da verilmiş olan grafiklerde dikkat edilirse ilk periyotlarda oluşan hatalar düzensiz bir şekilde değişse de bu düzensizlikler giderek azalır. Bununla birlikte iterasyon sayısının daha fazla artırılması ile hata miktarındaki değişim giderek küçülen değerlere sahip olur. Bundan dolayı, analizin istenilen hassasiyetin

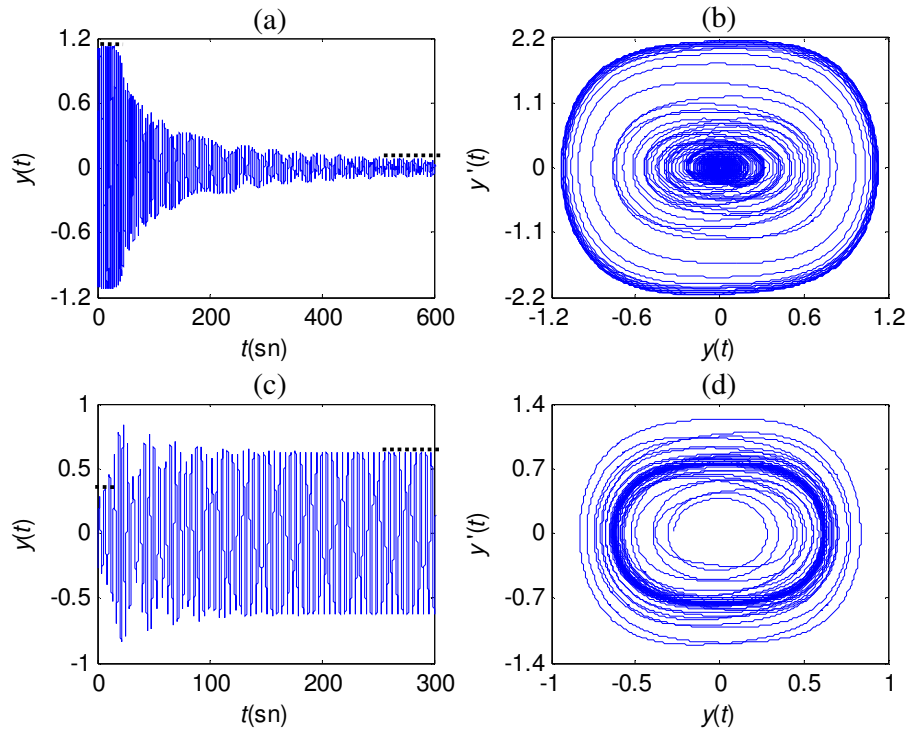
üzerine çıkılarak gerçekleştirilmesi işlem yükünü artırır. Her bir frekans noktasına ait simülasyon işlemi kararlı durum dilimlerine ait maksimum genlik değerleri hesaplanarak analizin gerçekleştirildiği frekans aralığı için frekans cevabı Şekil 2.11’de görüldüğü gibi çıkarılmış olur.



Şekil 2.11. İleri ve geri yönde sayısal simülasyonlar ile elde edilen frekans cevabı

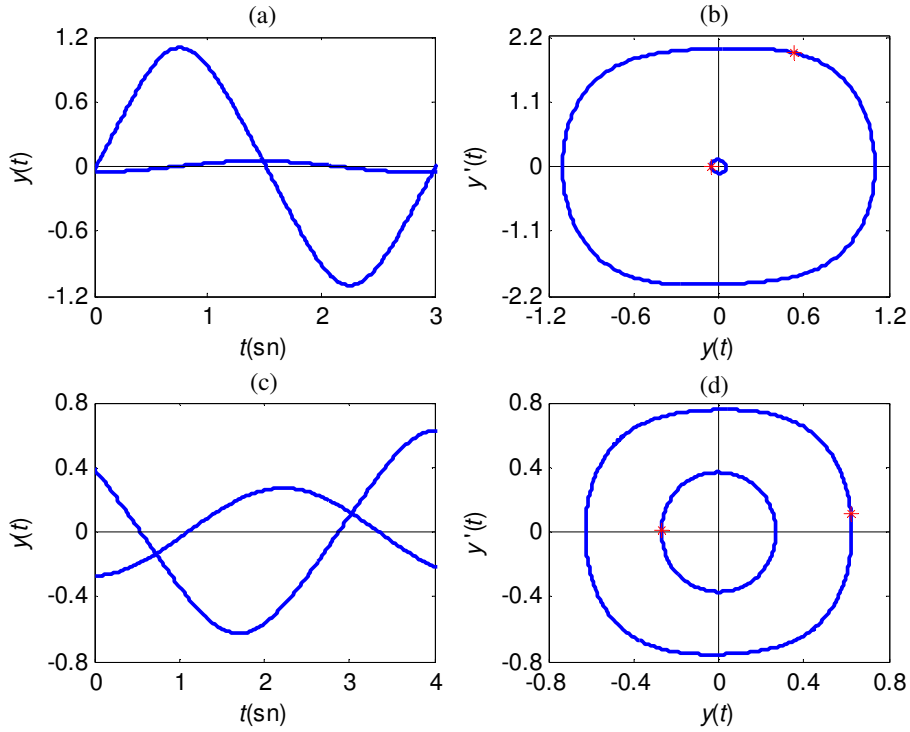
Doğrusal olmayan sistemlerin frekans cevabının elde edilmesinde frekansın değişim yönü önem taşır. Bundan dolayı zaman boyutundaki sonuçlarda oluşan değişimler bazı bölgelerde farklılık gösterir [57,58]. Şekil 2.11 incelendiğinde, belli bir frekans aralığında ileri ve geri yöndeki sonuçlarına ait genlik değerlerinde ani farklılıkların sergilenmesi frekansın değişim yönünün önemini açıkça gösterir. İleri yönde gerçekleştirilen simülasyon için  $i_1$  noktasında elde edilen kararlı duruma başlangıç durumları kullanılarak  $i_2$  ile belirtilen bir sonraki frekans değerinde simülasyon gerçekleştirildiğinde atlama olayı olarak adlandırılan davranış gözlenmiştir. Bu durum zaman boyutunda incelendiğinde grafiklerden Şekil 2.12 (a)’da verilen sinyal elde edilmiştir. Simülasyona ait cevap bir önceki başlangıç durumlarının etkisiyle belli bir genlik değerini sürdürmüştü, buna karşın belli bir noktadan sonra geçici durumlar sergileyerek kararlı duruma ulaştığında genlik değeri başlangıçtakine

kıyasla oldukça düşmüştür. Çıkış ve türevine ait grafiğin çizdirilmesi sonucu başlangıç ve bitiş noktalarının birleştiği kısım faz açısını veren faz portresi incelendiğinde bu davranış elde edilen dairelerin giderek küçülmesi şeklinde ortaya çıkmıştır. Frekansın yüksekte düşüğe doğru adımlarla değiştirilmesi sonucu bu kez tersi şeklinde ortaya çıkan benzer davranışlar ise Şekil 2.12-b ve c grafiklerinden açıkça görülmektedir.  $g_1$  noktasında elde edilen kararlı duruma ait başlangıç durumları  $g_2$  noktası için kullanıldığında zaman boyutundaki cevabın genlik değerinde ani artış oluşmuştur.



Şekil 2.12. Atlama frekansları için zaman boyutunda cevaplar ve faz portreleri

Atlama noktalarında ortaya çıkan diğer bir durum ise Şekil 2.12'den de açıkça görüldüğü gibi simülasyon sürelerinin oldukça uzamasıdır. Atlama noktasında kararlı durum sinyaline ulaşmak diğer noktalara kıyasla oldukça fazla periyotluk simülasyon gerektirir. Şekil 2.13-a'da  $i_1$  ve  $i_2$  noktalarına ait kararlı durum sinyallerinden ve 2.13-b'de ise bir periyotluk kararlı dilimlere ait faz portrelerinden genlik ve faz farkları açıkça görülmektedir. Faz portresinde elde edilen çizimlerin kapalı formda oluşması sinyallerin kararlı duruma ait olduğunu açıkça gösterir.



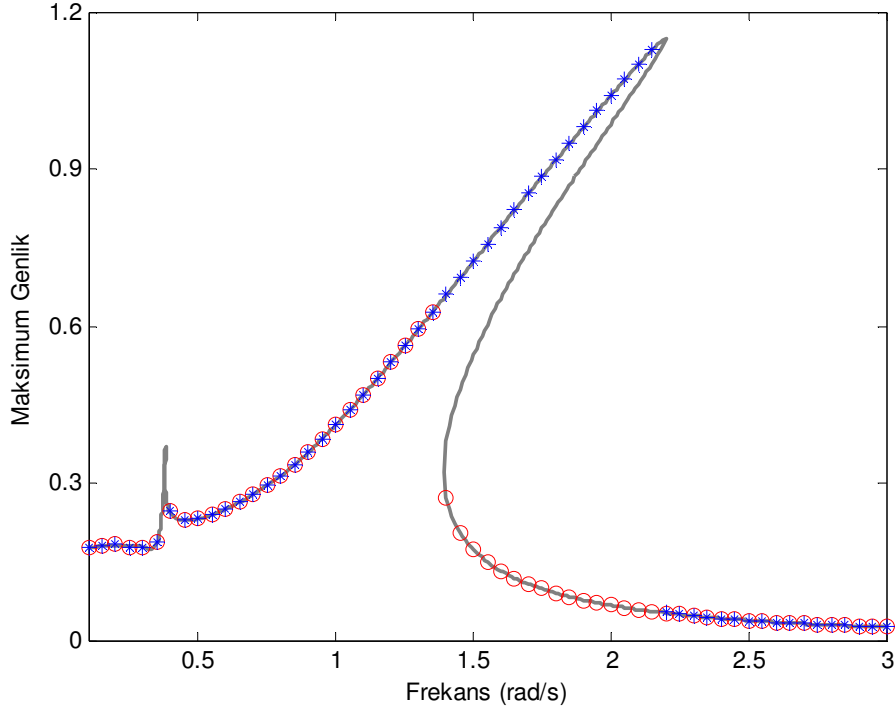
Şekil 2.13. Atlama frekansları için kararlı duruma ait zaman boyutunda cevaplar ve faz portreleri

Sayısal simülasyondan elde edilen frekans cevabı verilerinin, analitik verilerle karşılaştırılması Şekil 2.14’de görülmektedir. Sayısal simülasyona ait verilerin bulunmadığı kısımda analitik olarak çözümlenmeler gerçekleştirilmiş olsa da bunlar kararsız çözümlerdir. Harmoniklere ait cevaplar ise simülasyondan elde edilen verilerin analizi gerçekleştirilerek doğrulanabilir. Bu amaca yönelik olarak örneğin ayrık Fourier analizi kullanılabilir,

$$Y(jr\omega) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum y(t)e^{-jr\omega t} \quad (2.39)$$

Burada  $\omega$  aranan bileşenin frekansını,  $r$  ise harmoniğini belirtir. Elde edilen sanal bileşenli dizinin elemanlarına ait mutlak değerler harmoniğe ait genliği, açıları ise faz açısını belirtir. Her bir frekans noktasına ait simülasyon işlemi sonunda kararlı durum dilimleri, frekans cevabındaki bileşenlerin analizi için saklanarak Denklem

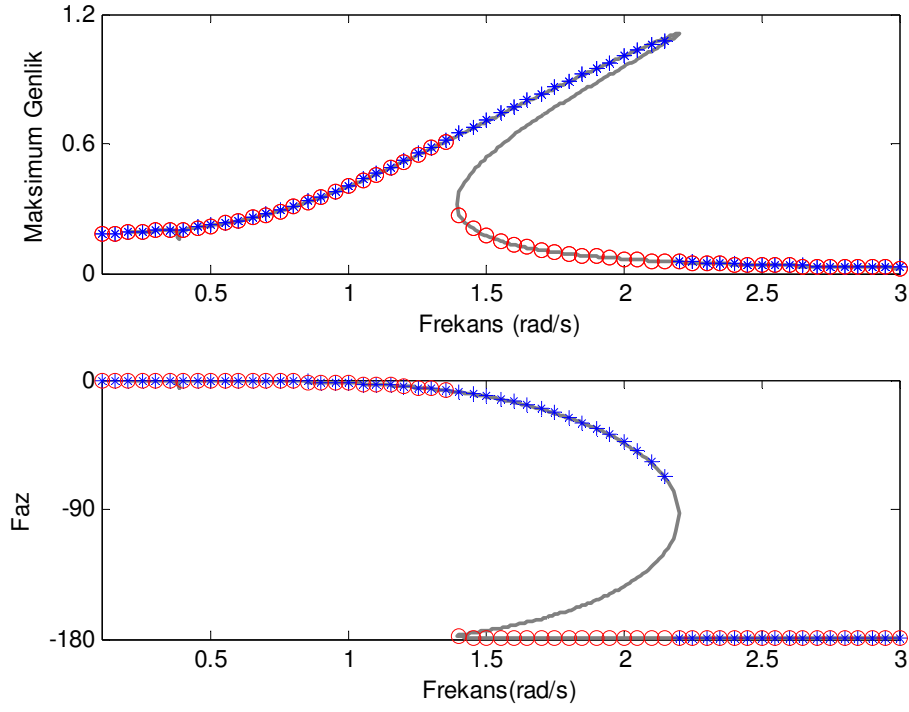
2.39’da belirtilen  $y(t)$  sinyali için kullanıldığında ilgilenilen bileşenlere ait cevaplar elde edilebilir.



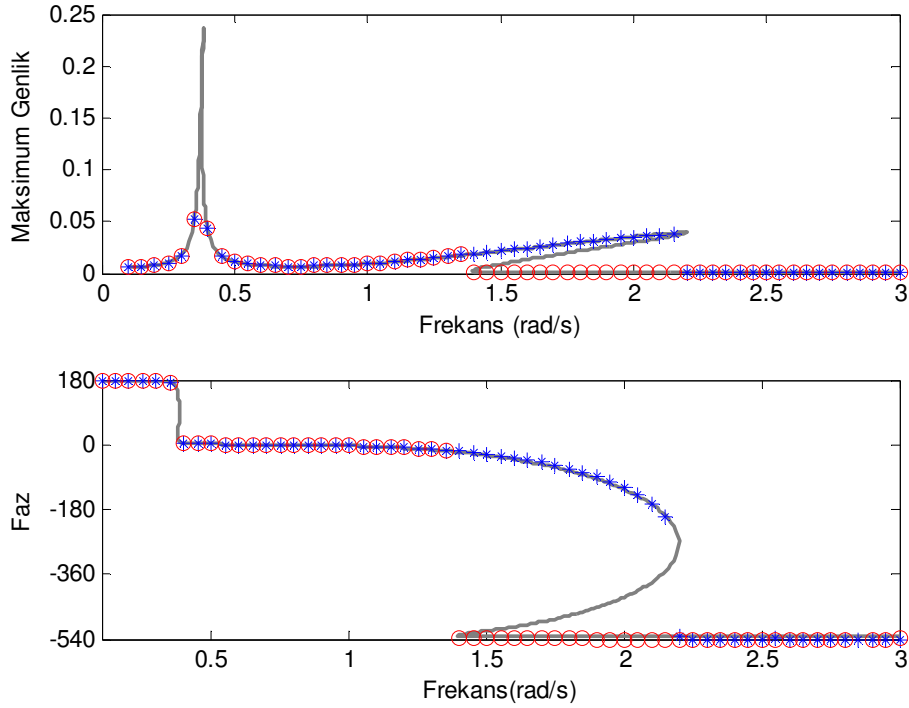
Şekil 2.14. Analitik (-) ve sayısal simülasyonlar (\* ileri, o geri) için sonuçlar

Şekil 2.15 ve 2.16’da sırasıyla birinci ve üçüncü harmoniklere ait genlik ve faz cevapları sayısal simülasyon sonuçlarıyla birlikte sunulmuştur. Her iki harmoniğe ait cevapta da toplam çıkıştaki ile aynı frekans değerlerinde atlama olayı açıkça görülmektedir.





Şekil 2.15. Temel harmoniğe ait analitik ve simülasyon sonuçları



Şekil 2.16. Üçüncü harmoniğe ait analitik ve sayısal simülasyon sonuçları

Üçüncü harmonik için rezonans yanında temel harmonikte gerçekleşen atlama olayı temel harmoniğe kıyasla daha düşük genlik seviyesinde elde edilmiştir. Bununla birlikte, 0,4 rad/s civarında görülen düşük seviyeli rezonans noktasında üçüncü harmoniğin etkisinin daha büyük seviyede olduğu açıkça görülmektedir.

## 2.5. Sonuçlar

Bu bölümde harmonik denge analizinin klasik uygulaması ve dezavantajlarını gidermek amacıyla kullanılan geliştirilmiş yapıdaki sembolik algoritmaya ait uygulamalar sunuldu. Yöntemin klasik uygulamasında, analizde kabul edilen sinyal formunu oluşturan harmonik sayısı veya sistemin doğrusal olmama derecesi artırıldığında, elde edilen açılımlardan ilgilenilen terimlerin seçilmesi basit bir terim için gerçekleştirildiğinde bile karmaşık hale gelebildiği Denklem 2.17 ile verilen ifadeye gösterilmiştir. Yöntemi geliştirerek sistematik yapıda uygulamasını mümkün kılan sembolik algoritma, bu güçlükleri ortadan kaldırarak karmaşık işlemler sonucu oluşabilecek hata ve zaman kayıplarına çözüm sunmaktadır. Bu yöntem ile sadece açılımın gerçekleştirileceği denge denklemine ait frekanstaki bileşenleri veren kombinasyonlar kullanılmıştır. Geliştirilmiş yöntemin sağladığı kolaylık, örnek üzerinde sembolik algoritma ile elde edilen sonuçlar sunularak gösterilmiştir. Bununla birlikte HBM ile elde edilen sonuçların doğruluğunu göstermek amacıyla sayısal simülasyon yöntemlerine ait işlemler açıklanarak aynı örnek üzerinde elde edilen sonuçlarla karşılaştırılmıştır.

Tanımlan algoritma ile harmonik sayısı isteğe bağlı olarak ayarlanabilmekte ve sisteme ait tanımlama Denklem 2.1 ile belirtilen model parametreleri cinsinden yapılabilmektedir. Yöntem genel bir yapı sağlamasına karşın kombinasyonların ve bunlara ait permütasyonların belirlenmesindeki güçlükler, genel sınıf denkleme ait giriş ve çıkışın çarpım halinde olduğu terimleri içermemesi gibi bazı eksikliklere sahiptir. Bunlara ilişkin iyileştirmeler bir sonraki bölümde tanıtılıp yapı olarak biraz daha farklı bir algoritma ile giderilecektir.

## **BÖLÜM 3. HARMONİK DENGE YÖNTEMİNİN SEMBOLİK ALGORİTMA İLE UYGULAMASI**

### **3.1. Giriş**

Harmonik denge analizinin gerçekleştirilmesinde karşılaşılan güçlükler bir önceki bölümde tanıtılan algoritma ile azaltılarak yönteme pratik bir yapı kazandırılmıştır. Böylece, genel formda tanımlanan sistem yapısı ve giriş/çıkış sinyalleri için denge denklemleri sembolik olarak elde edilebilir. Bununla birlikte, söz konusu algoritma ile harmonik denge denklemleri yalnızca saf (çıkışa veya girişe ait) terimler içeren doğrusal olmayan diferansiyel denklem modelleri için direkt olarak yazdırılabilir [32]. Ayrıca analizde herhangi bir çıkış bileşeni için denge denklemlerini üretmede kullanılan kombinasyonlar ve permütasyonların algoritmaya kullanıcı tarafından belirlenip uygulanmalıdır. Bu eksiklikleri ortadan kaldıran, analiz mantığı bir önceki ile aynı olmasına karşın algoritma yapısındaki hesaplama teknikleri oldukça farklı bir algoritma geliştirilmiştir [37].

Geliştirilen bu algoritma, bilgisayar ortamında daha kolay gerçekleşmesi bakımından bir öncekine kıyasla daha kullanışlı bir formda olup, giriş ve çıkış terimlerinin çarpım halinde olduğu durumları da içerecek şekilde genişletilmiştir. Böylece yöntem Denklem 2.1 ile tanımlanan sistemlerin tümünü kapsayacak hale getirilmiştir. Denge denklemlerinin hesabında istenilen çıkış bileşenini sağlayan kombinasyonların üretilmesi genel formdaki bir kombinasyon üretici ile sağlanır. Kombinasyonları oluşturan karmaşık sayı formundaki genliklerin çarpımları için farklı permütasyonlar içermesi bakımından simetrik olarak adlandırılan fonksiyonların hesabı için gerekli permütasyonlar yine bu amaçla kullanılan bir algoritma yardımı ile gerçekleştirilir. Böylece harmonik denge denklemleri bir

önceki gibi direkt olarak türetildiği diferansiyel denklemin katsayıları cinsinden ve genel harmonik dalga formunun karmaşık genlikleri cinsinden hesaplanır.

Bu bölümde, mevcut yöntemi pratikleştirerek eksiklerini gidermek amacıyla geliştirilmiş otomatikleştirilmiş algoritma yapısına sahip yöntem sunulacaktır. Algoritmada kullanılan üstel formdaki giriş ve çıkış sinyalleri tanıtılarak, doğrusal olmayan fonksiyona uygulanmaları sonucu elde edilen açılımlar genelleştirilmiş formda kombinasyonlar ve permütasyonlar cinsinden ifade edilecektir. Açılıma ait kombinasyon ve permütasyonların hesabını otomatik olarak gerçekleştiren özyinelemeli (rekürsif) formdaki algoritmalar tanıtılacaktır. Yöntemin uygulaması örnek olarak bir geminin dinamik davranışını tanımlayan diferansiyel denklem modeli üzerinde gerçekleştirilecektir. Elde edilen analitik sonuçların doğruluğu simülasyon yönteminden elde edilen sonuçlar ile karşılaştırılarak gösterilecektir. Bunlara ek olarak harmonik sayısının doğruluğa etkisi ve giriş genliğinin frekans cevabı üzerindeki etkileri sunulacaktır.

### 3.2. Giriş ve Çıkış Sinyal Formları

Geliştirilen yöntemde temel alınan sistem yapısı bir önceki gibi Denklem 2.1 ile verilen polinom formdaki doğrusal olmayan sistemleri tanımlayan ifadeye dayanır. Harmonik denge metodunda giriş ve çıkış sinyalleri harmonikler formunda yani, sinüsoidal sinyallerin toplamı şeklinde ifade edildiği için algoritma aşağıda gösterildiği gibi, bir öncekiyle benzer şekilde  $a_{x_r}$  genlikli ve  $\phi_{x_r}$  fazlı  $R_x$  tane sinüsoidalden oluşan ve  $a_{x_0}$  sabit bileşenli genel formda bir  $x(t)$  sinyali için tanımlanır.

$$x(t) = a_{x_0} + \sum_{r=1}^{R_x} a_{x_r} \cos(\omega_r t + \phi_{x_r}) \quad (3.1)$$

Sinyal üstel forma dönüştürüldüğünde aşağıdaki gibi ifade edilebilir,

$$x(t) = \sum_{r=-R_x}^{R_x} \frac{A_{x_r}}{2} e^{j\omega_r t} \quad (3.2)$$

Üstel formda üs alma işlemleri kolayca gerçekleştirilebildiği için algoritma yapısında tercih edilir. Buradaki  $A_{x_r}$  karmaşık genlikler ile  $\omega_r$  frekans tanımlamaları aşağıdaki gibidir,

$$\left. \begin{aligned} A_{x_0} &= 2a_{x_0} & \omega_0 &= 0 \\ A_{x_{-r}} &= a_{x_r} e^{-j\phi_r} & \omega_{-r} &= -\omega_r \\ A_{x_r} &= a_{x_r} e^{j\phi_r} & \omega_r &= r\omega \quad (\text{harmonik olarak ilişkili}) \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

Giriş ve çıkış sinyalleri sisteme uygulandığında elde edilecek açılımlardan denge denklemlerinin oluşturulmasında kullanılacak terimlerin kolayca seçilebilmesi için bunlara ait açılımların bilinmesi gerekir. Bu amaçla Denklem 2.1 ile verilen sistemin herhangi bir terimini genel olarak tanımlayan yapıda bir doğrusal olmayan fonksiyon tanımlaması yapılmıştır.

### 3.3. Doğrusal Olmayan Fonksiyon

Diferansiyel denklemin girişine veya çıkışına ait terimlerin genel formunu temsil eden doğrusal olmayan fonksiyon  $F_n[\cdot]$ ,  $l_i$  dereceden türevli  $n$  adet terimin çarpımı şeklindedir,

$$F_n[x(t)] = \prod_{i=1}^n D^{l_i} x(t) \quad (3.4)$$

Önceki gibi  $D$ , diferansiyel operatörü ve  $x(t)$  3.2 ile verilen harmonik sinyal formunu belirtir. Giriş genliğini belirten  $A$  çarpanıyla birlikte  $x(t)$ 'yi Denklem 3.4'de yerine koyup diferansiyel işlem gerçekleştirildikten sonra açılım tekrar düzenlenerek çarpımların toplamı cinsinden ifade edilebilir,

$$\begin{aligned}
F_n[Ax(t)] &= \prod_{i=1}^n D^{l_i} \left( A \sum_{r=-R_x}^{R_x} \frac{A_{x_r}}{2} e^{j\omega_r t} \right) \\
&= \left( \frac{A}{2} \right)^n \prod_{i=1}^n \sum_{r=-R_x}^{R_x} A_{x_r} (j\omega_r)^{l_i} e^{j\omega_r t} \\
&= \left( \frac{A}{2} \right)^n \sum_{r_1, r_n = -R_x}^{R_x} \prod_{i=1}^n A_{x_{r_i}} (j\omega_{r_i})^{l_i} e^{j(\omega_{r_1} + \dots + \omega_{r_n})t} \quad (3.5)
\end{aligned}$$

Böylece  $\{\omega_{-R_x}, \dots, \omega_{R_x}\}$  frekans setinin bütün tekrar eden permütasyonları elde edilir ve her biri giriş frekans bileşenlerinin farklı bir ara modülasyonunu belirtir. Girişte sabit bir terim olduğu kabul edilirse toplam  $(2R+1)^n$  adet aramodülasyon oluşur. Bunların çoğu aynı çıkış frekansına katkıda bulunur. Örneğin Denklem 3.5'deki üstel kısım incelenirse çıkış setinin elemanlarının  $\{\omega_{r_1}, \dots, \omega_{r_n}\}$  setinin elemanlarının toplamı tarafından verildiği ve bundan dolayı bileşenlerin permütasyonlarından etkilenmediği görülür. Denklem, permütasyonlar ve kombinasyonlar için farklı toplam operatörleri kullanılarak tekrar düzenlenebilir,

$$F_n[Ax(t)] = \left( \frac{A}{2} \right)^n \sum_{\substack{\{-R_x, \dots, R_x\} \text{ setinden} \\ \text{her seferinde } n \text{ tane alınan} \\ \{r_1, \dots, r_n\} \text{ dizisinin} \\ \text{bütün kombinasyonları}}} \sum_{\substack{\{r_1, \dots, r_n\} \text{ dizisinin} \\ \text{herbir kombinasyondaki} \\ \text{permütasyonları}}} \times \prod_{i=1}^n A_{x_{r_i}} (j\omega_{r_i})^{l_i} e^{j(\omega_{r_1} + \dots + \omega_{r_n})t} \quad (3.6)$$

Denklem 3.6'daki ilk toplam incelendiğinde, çıkış frekans değerlerinin daha açık bir şekilde giriş frekanslarının kombinasyonu ile ilişkili olduğu görülür. İkinci toplam ise etkileşim içindeki giriş frekans bileşenlerinin verilen kombinasyon için bütün olası (çıkış frekansı aynı) permütasyonlarını toplar. Genelde birbirlerinden farklı değerlerdedir ve her bir eleman aldığı  $l_i$ 'inci türev derecesinden dolayı frekans bileşenlerinin derecesine bağlıdır. Bununla birlikte permütasyonların toplamı elemanların derecelerinden bağımsız olduğu için fonksiyonu simetrik yapar. Buna göre Denklem 3.6 tekrar aşağıdaki gibi düzenlenebilir,

$$F_n[Ax(t)] = \left(\frac{A}{2}\right)^n \sum_{\substack{\text{her seferinde } n \text{ tane alınan} \\ \{r_1, \dots, r_n\} \text{ dizisinin} \\ \{-R, \dots, R\} \text{ aralığında} \\ \text{bütün kombinasyonları}}} \times n_r^* f_x^{sym}(r_1, \dots, r_n) e^{j(\omega_{r_1} + \dots + \omega_{r_n})t} \quad (3.7)$$

Burada,  $f_x^{sym}(\cdot)$  simetrik fonksiyonu tanımlar,

$$f_x^{sym}(r_1, \dots, r_n) = \frac{1}{n_r^*} \sum_{\substack{\{r_1, \dots, r_n\} \text{ dizisinin} \\ \text{bütün farklı} \\ \text{permütasyonları}}} \prod_{i=1}^n A_{x_{r_i}}(j\omega_{r_i})^{l_i} \quad (3.8)$$

$\{r_1, \dots, r_n\}$  setinin içerebileceği farklı permütasyonların sayısı  $n_r^*$  olarak tanımlanır,

$$n_r^* = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_d!} \quad n = n_1 + n_2 + \dots + n_d \quad (3.9)$$

Burada  $d$  indisi her bir kombinasyondaki frekans bileşenleri içinde farklı değerlere sahip frekans bileşeni sayısını, ve  $n_i$  her bir farklı frekansın tekrar sayısını belirtir.  $n_r^*$  değişkeni aynı değeri veren permütasyonların gereksiz hesaplanmasını ortadan kaldırır.  $f_x^{sym}(\cdot)$  fonksiyonu elde edilen bütün fonksiyonların ortalaması olarak tanımlanır. Türevsel ifadelerin tanımlandığı  $\{l_1, \dots, l_n\}$  setinin de tekrarlı değerler içermesi mümkündür ve bu yüzden  $f_x^{sym}(\cdot)$  fonksiyonunun değerlendirilmesinde  $l_i$ 'nin permütasyonlarının ortalamasının alınması hesaplama olarak daha etkilidir. Çünkü bunlar Denklem 3.8'de tek başına türev derecesidir. Böylece  $f_x^{sym}(\cdot)$ , Denklem 3.8'deki gibi ifade edilebilir,

$$f_x^{sym}(r_1, \dots, r_n) = \frac{1}{n_l^*} \sum_{\substack{\{l_1, \dots, l_n\} \\ \text{bütün ayık} \\ \text{permütasyonları}}} \prod_{i=1}^n A_{x_{r_i}}(j\omega_{r_i})^{l_i} \quad (3.10)$$

Burada  $n_l^*$ , Denklem 3.9 da verilen  $n_r^*$  katsayısına benzer biçimde tanımlanır. Bu iki formdan ilki tercih edilir, çünkü türev ifadeleri sistemin yapısına dayanır ve

değişmezler, buna karşın  $\omega_{r_i}$  düşünülen özel uyartıma bağlıdır. Simetrik fonksiyon,  $x(t)$  sinyalinin veya türevlerinin basit üssü olduğu oldukça karşılaşılan özel bir durumda Denklem 3.10 aşağıdaki gibi basitleşir,

$$f_x^{sym}(r_1, \dots, r_n) = \prod_{i=1}^n A_{x_{r_i}} (j\omega_{r_i})^{l_i} \quad (3.11)$$

Böylece, doğrusal olmayan  $F_n[.]$  fonksiyonu, Denklem 3.7, 3.9 veya 3.10 ile birlikte sinüsoidallerden oluşan giriş için genel bir harmonik açılımı sunar. Bununla birlikte, harmonik denge denklemlerinin oluşturulmasında yalnızca ilgilenilen  $\omega_r$  frekans bileşenine katkıda bulunan terimleri hesaplamak gerekir. Denklem 3.7'nin incelenmesiyle, toplamları istenen  $\omega_r$  frekansını veren giriş frekanslarının kombinasyonları seçilerek ilgilenilen terimler hızlı bir şekilde elde edilir. Bu amaçla  $e^{j\omega_r t}$  üsteline ait katsayının belirlenmesi işlemi aşağıdaki gibi  $X_r[.]$  operatörü ile tanımlanabilir,

$$X_r[F_n[Ax(t)]] = \left(\frac{A}{2}\right)^n \sum_{\substack{\text{her seferinde n tane alınan} \\ \{r_1, \dots, r_n\} \text{ dizisinin} \\ \{-R, \dots, R\} \text{ aralığında} \\ \sum \omega_{r_i} = \omega_r \text{ şartıyla} \\ \text{bütün kombinasyonları}}} \times n_r^* f_x^{sym}(r_1, \dots, r_n) \quad (3.12)$$

Bu sonuç, Denklem (2.1) ile belirtilen genel sınıf içinde yalnızca girişe veya çıkışa ait doğrusal olmayan terimleri içeren sistemlerin harmonik denge denklemlerinin hesaplanmasında doğrudan uygulanabilir. Örneğin yalnızca girişe ait terimler Denklem 2.1'in bir alt sınıfı  $p=0$ 'a karşılık gelir,

$$-c_{0,1}(0)y(t) = \sum_{m=q=1}^m \sum_{l_1, l_q=-L}^L c_{0,q}(l_1, \dots, l_q) \prod_{p=1}^q D^{l_p} u(t) \quad (3.13)$$

Denklemin sağ tarafı  $F_n[.]$  ile tanımlanan terimlerin toplamıdır, buna karşın sol taraftaki  $y(t)$ , Denklem 3.2 formunda harmoniklerden oluşan bir sinyal olarak kabul



edilir. Verilen bir  $\omega_r$  çıkış frekansı için harmonik denge aşağıdaki formda yazılabilir.

$$-c_{1,0}(0) \frac{A_{y_r}}{2} = \sum_{m=q=1}^m \left( \frac{A}{2} \right)^q \sum_{l_1, l_q = -L}^L c_{0,q}(l_1, \dots, l_q) \times \sum_{\substack{\text{her seferinde } n \text{ tane alınan} \\ \{r_1, \dots, r_n\} \text{ dizisinin} \\ \{-R, \dots, R\} \text{ aralığında} \\ \sum \omega_{r_i} = \omega_r \text{ şartıyla} \\ \text{bütün kombinasyonları}}} \times n_r^* f_u^{sym}(r_1, \dots, r_n) \quad (3.14)$$

Elde edilen ifade,  $n$ 'inci dereceden (saf girişli bir doğrusal olmayan sistemin) tanımlama fonksiyonu bileşenini,  $H_{n_u}(j\omega_r)$ , hesaplamak için kullanılan seri ifadelerine benzerdir. Buna karşın aynı sonuç seri açılımı sonsuz uzunluğa sahip, çıkışı doğrusal olmayan sistemler için geçerli değildir. Bu alt sınıf sistem denklem (2.1)'de  $q=0$  olarak tanımlanır,

$$\sum_{m=p=1}^M \sum_{l_1, l_p=0}^L c_{p,0}(l_1, \dots, l_{p+q}) \prod_{i=1}^p D^{l_i} y(t) = -c_{0,1}(0) u(t) \quad (3.15)$$

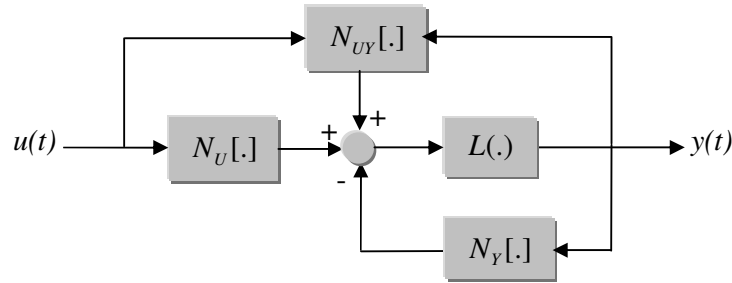
Gerçekleştirilen çarpım işlemi  $F_n[.]$  ile tanımlanmış olan forma sahiptir, ve  $u(t)$  bilinen bir harmonik giriştir. Buna göre harmonik denge denklemleri aşağıdaki gibi ifade edilebilir,

$$\sum_{m=p=1}^M \frac{1}{2^p} \sum_{l_1, l_p=0}^L c_{p,0}(l_1, \dots, l_p) \times \sum_{\substack{\text{her seferinde } n \text{ tane alınan} \\ \{r_1, \dots, r_n\} \text{ dizisinin} \\ \{-R, \dots, R\} \text{ aralığında} \\ \sum \omega_{r_i} = \omega_r \text{ şartıyla} \\ \text{bütün kombinasyonları}}} \times n_r^* f_y^{sym}(r_1, \dots, r_p) = -c_{0,1}(0) \frac{A_{u_r}}{2} \quad (3.16)$$

Giriş ve çıkışın çarpım halinde olduğu terimleri içeren sistemler için denklemler benzer şekilde kolayca elde edilebilir, fakat yöntemin bunları kapsayacak şekilde genişletilmesi gerekmektedir.

### 3.3.1. Giriş ve çıkışın çarpım halinde olduğu doğrusal olmayan terimler

Önceki başlık altında incelenen saf girişlere veya saf çıkışlara ait terimler giriş ve çıkış terimlerinin çarpım halinde bulunduğu terimlerin alt formları olarak düşünülebilir. Bu durum Şekil 3.1'de verilen blok yapıya benzer şekilde ifade edilebilir,



Şekil 3.1. Giriş ve çıkış terimlerinin çarpım halini içeren blok gösterim

Burada  $N_{UY}[\cdot]$  aşağıdaki formdadır,

$$w(t) = \sum_{p=0}^m \sum_{q=p+1}^{m-p} \sum_{l_1, l_{p+q}=0}^L c_{p,q}(l_1, \dots, l_{p+q}) \prod_{i=1}^p D^{l_i} y(t) \prod_{i=p+1}^{p+q} D^{l_i} u(t) = 0 \quad (3.17)$$

Böylece Denklem 2.1 ile tanımlanan genel sistem yapısı tümüyle algoritma yapısında kapsamış olur. Yukarıdaki ifade ile aynı zamanda  $p=0$  alınarak  $N_U[\cdot]$  ve  $q=0$  alınarak da  $N_Y[\cdot]$  fonksiyonları elde edilebilir. Önceki çalışmaya göre bu çarpımlar aşağıdaki gibi yazılabilir,

$$\left. \begin{aligned} & F_p[y(t)]F_q[Au(t)] \\ &= \prod_{i=1}^p D^{l_i} y(t) \prod_{i=p+1}^{p+q} D^{l_i} u(t) \\ &= \frac{A^q}{2^m} \sum_{\substack{\text{n tane alınan} \\ \{r_1, \dots, r_p\} \text{ dizisinin} \\ \{-R, \dots, R\} \text{ aralığında} \\ \text{bütün kombinasyonları}}} \sum_{\substack{\text{n tane alınan} \\ \{r_{p+1}, \dots, r_{p+q}\} \text{ dizisinin} \\ \{-R, \dots, R\} \text{ aralığında} \\ \text{bütün kombinasyonları}}} \times n_{r_y}^* n_{r_u}^* f_y^{sym}(r_1, \dots, r_p) \end{aligned} \right\} \quad (3.18)$$

$$\times f_u^{sym}(r_{p+1}, \dots, r_{p+q}) e^{j(\omega_1 + \dots + \omega_m)t}$$

Çıkış frekansı yine etkileşim içindeki frekans bileşenlerinin toplamına eşittir, yalnız bu durumda frekanslar iki gruba ayrılır: biri  $y(t)$  deki  $p$ 'inci dereceden çarpan ile diğeri ise  $u(t)$  deki  $q$ 'uncu dereceden çarpan ile ilişkilidir. Birinci gruptakilerin toplamı  $\omega_a$  ve ikinci gruptakilerin toplamı  $\omega_b$  ise  $\omega_a + \omega_b = \omega_r$  değerini veren bütün kombinasyonlardan elde edilir. Buna göre genel sistem yapısının tümünü kapsayan harmonik denge denklemleri aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$\sum_{m=1}^M \sum_{p=0}^m \frac{A^q}{2^m} \sum_{l_1, l_{p+q}=0}^L c_{p,q}(l_1, \dots, l_{p+q}) \times \sum_{\substack{\text{n tane alınan} \\ \{r_1, \dots, r_p\} \text{ dizisinin} \\ \{-R, \dots, R\} \text{ aralığında} \\ \sum \omega_i = \omega_a \text{ şartıyla} \\ \text{bütün kombinasyonları}}} \sum_{\substack{\text{n tane alınan} \\ \{r_1, \dots, r_{p+q}\} \text{ dizisinin} \\ \{-R, \dots, R\} \text{ aralığında} \\ \sum \omega_i = \omega_b \text{ şartıyla} \\ \text{bütün kombinasyonları}}} \times n_r^* f_y^{sym}(r_1, \dots, r_p) f_u^{sym}(r_{p+1}, \dots, r_{p+q}) = 0 \quad (3.19)$$

Bu ifadede giriş ve çıkış sinyalleri için kabul edilen harmonik sayıları,  $R_y$  ve  $R_u$  farklı olarak belirtilme avantajına sahip olmasına karşın oldukça uzun ve istenen kombinasyonların oluşturulmasında çift toplam işlemi karmaşıklığa sebep olur. Buna alternatif olarak,  $R_y = R_u$  alınıp  $F_p[y(t)] F_q[Au(t)]$  çarpımı öncekine benzer şekilde açılabilir,

$$F_p[y(t)] F_q[Au(t)] = \frac{A^q}{2^m} \sum_{\substack{\text{n tane alınan} \\ \{r_1, \dots, r_m\} \text{ dizisinin} \\ \{-R, \dots, R\} \text{ aralığında} \\ \text{bütün kombinasyonları}}} n_r^* f_{uy}^{sym}(r_1, \dots, r_m) e^{j(\omega_1 + \dots + \omega_m)t} \quad (3.20)$$

Burada  $f_{uy}^{sym}(\cdot)$  simetrik fonksiyonu belirtir,

$$f_{uy}^{sym}(r_1, \dots, r_m) = \frac{1}{n_r} \sum_{\substack{\{r_1, \dots, r_m\} \\ \text{bütün farklı} \\ \text{permütasyonları}}} \prod_{i=1}^p A_{y_{r_i}} (jr_i \omega)^{l_i} \prod_{i=p+1}^{p+q} A_{u_{r_i}} (jr_i \omega)^{l_i} \quad (3.21)$$

Denklem (3.8) ile kıyaslandığında giriş ve çıkışa ait terimler farklı çarpım operatörleri kullanılarak iki gruba ayrılmıştır. Bu yüzden  $l_i$ 'nin permütasyonları ile  $f_{uy}^{sym}(\cdot)$  terimini Denklem 3.10 daki gibi hesaplamak,  $p=0$  veya  $q=0$  durumları haricinde mümkün değildir. Alternatif açılımın avantajı, sahip olduğu basit form ve yalnızca tek bir kombinasyon setinin düşünülmesidir. Herhangi bir  $\omega_r$  çıkış frekansındaki harmonik denge aşağıdaki formda yazılabilir,

$$\sum_{m=1}^M \sum_{p=0}^m \frac{A^q}{2^m} \sum_{l_1, l_{p+q}=0}^L c_{p,q(l_1, \dots, l_{p+q})} \times \sum_{\substack{\text{her defasında } n \text{ tane alınan} \\ \{r_1, \dots, r_m\} \text{ dizisinin} \\ \{-R, \dots, R\} \text{ aralığında} \\ \sum \omega_r = \omega_r \text{ şartıyla} \\ \text{bütün kombinasyonları}}} n_r^* f_{uy}^{sym}(r_1, \dots, r_m) = 0 \quad (3.22)$$

Böylece 3.21 ve 3.22 denklemleri, 2.1 ile belirtilen herhangi sınıf bir sistem ve 3.2 formunda kabul edilen herhangi bir tek-tonlu (harmonik olarak ilişkili sinüsoidal) yapıda sinyaller için harmonik denge denklemlerinin doğrudan elde edilmesini sağlar. Algoritmaya otomatik bir form kazandırmak için denge denklemlerinin oluşturulduğu  $\omega_r$  harmoniğini veren kombinasyonlar ve bunlara ait simetrik fonksiyonların oluşturulmasında kullanılan permütasyonların da sistematik bir formda üretilmesi gerekir.

### 3.4. Kombinasyonların Üretilmesi

Denklem 3.22'de ikinci toplam operatörü tarafından tanımlanan uygun frekans bileşenlerinin seçilmesi işlemini gerçekleştiren bir algoritmaya ihtiyaç duyulur. Bu amaçla elemanları  $\{-R, \dots, R\}$  harmonik setinden toplamları istenilen çıkış harmoniğinin  $r$  değerini verecek şekilde seçilerek  $\{r_1, \dots, r_m\}$  dizisinin kombinasyonlarını üreten fonksiyon  $S_{m,r}(r_1, \dots, r_m)$  olsun. Bu fonksiyon aşağıdaki gibi tanımlanmıştır,

$$S_{m,r}(r_1, \dots, r_m) = \sum_{\substack{\{r_1, \dots, r_m\} \text{ dizisinin} \\ \{-R, \dots, R\} \text{ aralığında} \\ \sum r_i = r \text{ şartıyla bütün} \\ \text{kombinasyonları}}} \{r_1, \dots, r_m\} \quad (3.23)$$

Fonksiyonun değerlendirilmesi sonucu, tamsayı formundaki kombinasyonlar,  $\{r_1, \dots, r_m\}$  dizisinden seçilen istenilen harmoniği sağlayan farklı değerleri için elde edilir. Bu amaçla dizi elemanlarına ait uygun değişim aralıklarının belirlenmesi ve bunlara bağlı olarak farklı dizilerin elde edilerek bunların toplamından bir dizi seti oluşturulması işlemi gerçekleştirilmektedir. Hesaplama işleminin birinci dereceden bir terim için gerçekleştirilmesi durumunda bir adet kombinasyon elde edilir ve frekans seti  $r$  değerine eşittir. Bu işlem doğrusal olmama derecesi yüksek terimlerde daha karmaşıktır. Örneğin verilen  $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$  harmonik setinden üçüncü dereceden bir terim için birinci harmoniğe ait kombinasyonlar  $\{r_1, r_2, r_3\}$  dizisi olsun. Dizinin her bir elemanının alabileceği maksimum ve minimum değerler birinci elemandan başlanarak sırayla belirlenebilir. Dizinin elemanları toplamı,

$$r_1 + r_2 + r_3 = r \quad (3.24)$$

şartını sağlaması gerektiği için ilk elemanın minimum değeri, diğer elemanların maksimum yapılmasıyla belirlenebilir.

$$r_{1_{\min}} = r - (r_{2_{\max}} + r_{3_{\max}}) \quad (3.25)$$

Belirtilen sınır değerleri, verilen harmonik setindeki maksimum ve minimum değerler ile belirlenir. Bundan dolayı dizinin herhangi bir elemanı  $-R \leq r_i \leq R$  koşulunu sağlamalıdır. Maksimum değer olarak  $R$  seçilebileceği için ilk elemanın alabileceği minimum değer,

$$\begin{aligned} r_{1_{\min}} &= r - 2R \\ &= 1 - 2 \times 3 \\ &= -5 \end{aligned} \quad (3.26)$$

olarak elde edilir. Bu değer  $-R$  değerine eşit veya büyük olması gerektiği için  $r_{1_{\min}} = -3$  alınması gerekir. Böylece genel olarak bir elemanın minimum değeri,

$$r_{i_{\min}} = maks \begin{cases} -R \\ r - (m-1)R \end{cases} \quad (3.27)$$

formunda ifade edilebilir. Elemanın alabileceği maksimum değer  $r_{i_{maks}}$  diğer elemanlara minimum değerleri verilerek 3.24 ile belirtilen formdan belirlenebilir.

$$r_{i_{maks}} = r - (r_{2_{\min}} + r_{3_{\min}}) \quad (3.28)$$

Burada minimum değer olarak  $-R$  verilirse, elde edilen kombinasyonlar aynı elemanlara sahip dizilerin (permütasyonların) oluşmasına sebep olabilir. Permütasyonların engellenmesi bir sonraki elemanın değeri bir öncekine eşit veya daha büyük seçilirse ( $r_i \geq r_{i-1}$ ) mümkündür. Eğer sonraki elemanların değerleri dizinin maksimum değeri olarak seçilirse bu şart yerine getirilmiş olur.

$$\begin{aligned} r_{i_{maks}} &= r - 2r_{i_{maks}} \\ &= r/3 \\ &= 1/3 \end{aligned} \quad (3.29)$$

Maksimum değer tam sayı olması gerektiği için tabana yuvarlanması gerekir. Bundan dolayı  $r_{i_{maks}} = 0$  olarak alınır. İfade genel bir formda aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$r_{i_{maks}} = taban(r/m) \quad (3.30)$$

Dizinin ilk elemanına ait aralık belirlenen minimum ve maksimum değerlerden  $\{-3, -2, -1, 0\}$  şeklinde hesaplanır. Bundan sonraki adımda dizinin ikinci elemanına ait değerler birinci dizinin her bir elemanı için belirlenir. Kombinasyonları üreten fonksiyon Denklem 3.23 kullanılarak aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$S_{m,r}(r_1, \dots, r_m) = \sum_{r_1 = maks \begin{cases} -R \\ r - (m-1)R \end{cases}}^{taban(r/m)} \left\{ r_1, \sum_{r_2, \dots, r_m = r_{i_{\min}}}^{r_{i_{maks}}} \{r_2, \dots, r_m\} \right\} \quad (3.31)$$

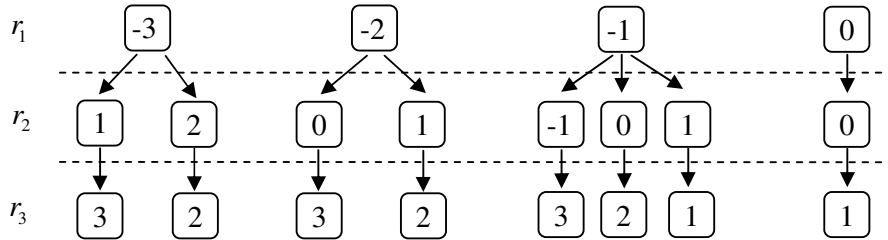
Dikkat edilirse ilk eleman için minimum ve maksimum değerler belirlenmiş ve ilk elemanın alacağı her bir değer için benzer işlemler bir sonraki için gerçekleştirilir.

$$S_{3,1}(r_1, r_2, r_3) = \left\{ \sum_{r_1=r_{1\min}}^{r_{1\max}} r_1, S_{2,r-r_1}(r_2, r_3) \right\} \quad (3.32)$$

Görüldüğü gibi son elemana kadar aynı işlem tekrarlanır. Genelleştirilmiş formda,

$$S_{2,1}(r_2, r_3) = \left\{ \sum_{r_2=r_{2\min}}^{r_{2\max}} r_2, S_{1,r-r_2}(r_3) \right\} \quad (3.33)$$

Kombinasyonda geriye kalan elemanlar tekrarlı ifadeden faydalalarak daha fazla işlem yapılmaksızın belirlenebilir. Benzer işlemler gerçekleştirildiğinde oluşan kombinasyonlar Şekil 3.2'de görüldüğü gibidir.



Şekil 3.2.  $r=1$  için kombinasyonlar

Böylece kombinasyonların üretiminde kullanılan denklem aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$S_{m,r}(r_1, \dots, r_m) = \sum_{r_1=\max\{-R, r-(m-1)R\}}^{\text{taban}(r/n)} \{r_1, S_{m-1,r-r_1}(r_2, \dots, r_m)\} \quad (3.34)$$

### 3.5. Permütasyonların Üretilmesi

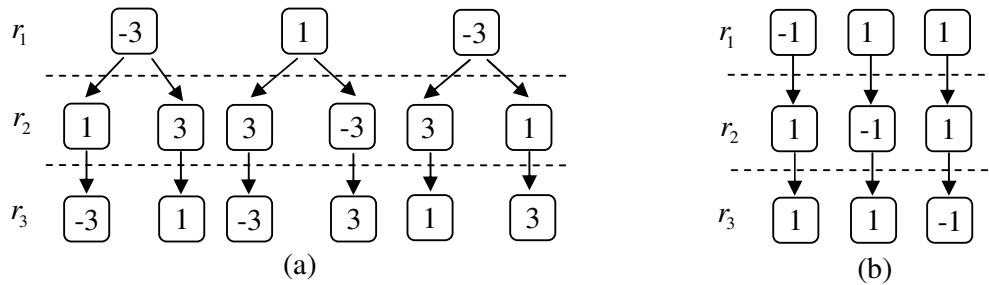
Farklı türev derecelerinin çarpımlarından veya giriş ve çıkış çarpımlarından oluşan terimlerin hesabında algoritma işletilirken permütasyonların belirlenmesine ihtiyaç duyulur. Bu amaçla  $\{r_1, \dots, r_m\}$  dizisinin permütasyonlarını veren  $P(\cdot)$  fonksiyonu özyinelemeli yapıda aşağıdaki gibi tanımlanabilir,

$$P_m(r_1, \dots, r_m) = \sum_{i=1}^m \{r_i, P_{m-1}(v_2, \dots, v_i, \dots, v_m)\} \quad (3.35)$$

Başlangıçta  $v = r$  ve  $i > 1$  için  $v_i = r_i$  olarak alınır. Verilen set içerisinde aynı elemanların bulunması durumunda permütasyon sayısının hatalı hesaplanmasını önlemek için  $v_i$  ile belirtilen elemanın değeri değiştirilmez.

$$v_i = \begin{cases} r_i, & v_{i-1} \neq v_i \\ v_i, & v_{i-1} = v_i \end{cases} \quad (3.36)$$

Örneğin bir önceki örnekte verilen kombinasyonlardan  $\{-3, 1, 3\}$  ve  $\{-1, 1, 1\}$  için permütasyonlar aşağıdaki gibidir.



Şekil 3.3. a)  $\{-3, 1, 3\}$  ve b)  $\{-1, 1, 1\}$  dizilerine ait farklı permütasyonlar

### 3.6. Örnek Uygulama

Yöntemin uygulamasını sunmak amacıyla, örnek olarak bir geminin doğrusal olmayan sallanma dinamiğinin yüksek genliğe sahip dalgalı denizlerdeki davranışına ait diferansiyel denklem modeli ele alınacaktır. Gemi modeline ait denklem yapısı aşağıda görüldüğü gibi üç adet doğrusal olmayan terim içerir.



$$\ddot{y}(t) + 2\mu\dot{y}(t) + d_2\dot{y}(t)^3 + d_4u(t)^2\dot{y}(t) + \omega_n^2 y(t) + \alpha_3 y(t)^3 = u(t) \quad (3.37)$$

Denklem terimlerin derecesi bakımından incelendiğinde Tablo 3.1’de görüldüğü gibi doğrusal ve kübik terimlere sahiptir. Doğrusal terimler kendi arasında girişe ve çıkışa ait olan terimler, kübik terimler ise yine kendi arasında çıkışa ait olanlar ve giriş-çıkış çarpımına ait olan terimler olmak üzere alt gruplara ayrılabilir. Yapılan gruplamalardan yola çıkarak diğer terimlerle birlikte denkleme ait model katsayıları aşağıdaki gibi bulunabilir.

Tablo 3.1. Modele ait katsayılar

	Terim	$(p, q)$	Türev derecesi	Katsayı $c_{p,q}(\cdot)$
Doğrusal	$y(t)$	(0)	$l = (0)$	$c_{1,0}(0) = \omega_n^2$
	$\dot{y}(t)$	(1)	$l = (1)$	$c_{1,0}(1) = 2\mu$
	$\ddot{y}(t)$	(2)	$l = (2)$	$c_{1,0}(2) = 1$
	$u(t)$	(1)	$l = (0)$	$c_{0,1}(0) = -1$
Kübik	$y(t)^3$	(0,0,0)	$l = (0,0,0)$	$c_{3,0}(0,0,0) = \alpha_3$
	$\dot{y}(t)^3$	(1,1,1)	$l = (1,1,1)$	$c_{3,0}(1,1,1) = d_2$
	$u(t)^2 \dot{y}(t)$	(0,0,1)	$l = (1,0,0)$	$c_{1,2}(1,0,0) = d_4$

Harmonik denge denklemlerinin oluşturulabilmesi için  $u(t)$  ve  $y(t)$  sinyallerinin Denklem (3.2) ile belirtilen formda kabul edilmesi gerekmektedir. Eğer giriş sinyali sabit bileşen (bias) içermeyecekse kabul edilen çıkış sinyalinde tek dereceli harmonikler, sabit bileşen içerecek ise, çıkış denkleminde çift dereceli harmonikler dahil edilir.

$$u(t) = a_{u_0} + a_{u_1} \cos(\omega t)$$

$$y(t) = a_{y_0} + a_{y_1} \cos(\omega t + \phi_{y_1}) + a_{y_2} \cos(2\omega t + \phi_{y_2}) + a_{y_3} \cos(3\omega t + \phi_{y_3}) \quad (3.38)$$

Algoritma yapısı üstel sunum gerektirdiği için aynı ifade aşağıdaki gibi açıkça yazılabilir.

$$u(t) = \frac{A_{u_{-1}}}{2} e^{-j\omega t} + \frac{A_{u_0}}{2} + \frac{A_{u_1}}{2} e^{j\omega t}$$

$$y(t) = \frac{A_{y_{-3}}}{2} e^{-j3\omega t} + \frac{A_{y_{-2}}}{2} e^{-j2\omega t} + \frac{A_{y_{-1}}}{2} e^{-j\omega t} + \frac{A_{y_0}}{2} + \frac{A_{y_1}}{2} e^{j\omega t} + \frac{A_{y_2}}{2} e^{j2\omega t} + \frac{A_{y_3}}{2} e^{j3\omega t} \quad (3.39)$$

$u(t)$  ve  $y(t)$  kolaylık sağlaması için üstel formda ifade edilip 1. denklemden yerine konursa  $m$ 'inci dereceden doğrusal olmayan terimler, intermodülasyon içindeki harmoniklerin permütasyonlarından dolayı  $\omega_{out} = (r_1 + \dots + r_m)\omega$  frekanslarında üsteller içerir. Bu farklı çıkış frekansları üretse de intermodülasyon içindeki harmonikler, kombinasyondaki permütasyonlar hesaba katılmaksızın aynı frekansa katkıda bulunurlar. Bu yüzden  $r$ 'inci harmonik denge denklemi yalnızca toplamları  $r\omega$  çıkış frekansı olan kombinasyonlar seçilerek oluşturulur. Sunulan yöntemin uygulaması örnek olarak sabit bileşene ait harmonik denge denkleminin manuel elde edilmesi üzerinde ayrıntılı olarak gösterilecektir. Bu uygulamada simetrik fonksiyonlar oluşturulurken, ele alınan sistem modelini tanımlayan doğrusal ve kübik yapıda terimler şeklinde iki gruba ayrılarak incelenecektir.

### 3.6.1. Doğrusal (birinci dereceden) terimler

Doğrusal terimler için simetrik fonksiyonlar hesaplanırken dereceleri  $n = 1$  olduğu göz önüne alındığında elde edilen kombinasyonda yalnızca bir eleman  $\{r_1\}$  bulunacaktır. Denklem kullanılarak simetrik fonksiyon yazılabilir.

$$f_x^{sym}(r_1) = A_{x_{r_1}} (r_1 j\omega)^1 \quad (3.40)$$

Türevsel ifade içermeyen terimler için tek değişkene iner.

$$f_x^{sym}(r_1) = A_{x_{r_1}} \quad (3.41)$$

Harmonik denge denklemleri sabit bileşen için hesaplanırken frekans ‘0’ alınır. Buna göre  $\omega_{r_1} = r_1\omega = 0$  olacak şekilde alınarak sabit bileşenler Denklem 3.41 ve 3.42 kullanılarak aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$\left. \begin{aligned}
 y(t): \quad l = (l_1) = (0) \\
 \quad \quad \quad f_y^{sym}(0) = A_{y_0} \\
 \dot{y}(t): \quad l = (l_1) = (1) \\
 \quad \quad \quad f_y^{sym}(0) = A_{y_0} (0j\omega)^1 = 0 \\
 \ddot{y}(t): \quad l = (l_1) = (2) \\
 \quad \quad \quad f_y^{sym}(0) = A_{y_0} (0j\omega)^2 = 0 \\
 u(t): \quad l = (l_1) = (0) \\
 \quad \quad \quad f_u^{sym}(0) = A_{u_0}
 \end{aligned} \right\} \quad (3.42)$$

Doğrusal terimlere ait simetrik fonksiyonlar giriş e çıkış terimleri için olmak üzere Tablo 3.2’deki gibi elde edilir.

Tablo 3.2. Doğrusal terimler için simetrik fonksiyonlar

Kombinasyonlar	Çarpan	$f_y^{sym}(r_1)$			$f_u^{sym}(r_1)$
		$y(t)$	$\dot{y}(t)$	$\ddot{y}(t)$	$u(t)$
0	$\frac{1!}{1!}$	$A_{y_0}$	0	0	$A_{u_0}$

### 3.6.2. Kübik (Üçüncü dereceden) Terimler

Kübik gruptaki terimler için bileşenler hesaplanırken, dereceleri  $n=3$ , olduğu göz önüne alınırsa kombinasyonların 3 elemanlı  $\{r_1, r_2, r_3\}$  dizilerinden oluşacağı açıktır. Bu durumda hesaplanacak harmonik denge bileşenleri saf çıkışlar ve çarpaz çarpım çıkışlar için olmak üzere incelenebilir. Üçüncü derecen terimler için elde edilen simetrik fonksiyonlara uygulanmak üzere, istenilen çıkış bileşenini sağlayan üçlü

kombinasyonlar analizde kabul edilen frekans seti kullanılarak Denklem 3.33 ile verilen ifadeye göre elde edilebilir.

Tablo 3.3.  $\omega_i = 0$  için üçlü kombinasyonlar

$\{ r_1 \ r_2 \ r_3 \}$	$n_r^*$	$\{ r_1 \ r_2 \ r_3 \}$	$n_r^*$
$\{-3 \ 0 \ 3 \}$	$\frac{3!}{1!1!1!} = 6$	$\{-2 \ 1 \ 1 \}$	$\frac{3!}{1!2!} = 3$
$\{-3 \ 1 \ 2 \}$	$\frac{3!}{1!1!1!} = 6$	$\{-1 \ -1 \ 2 \}$	$\frac{3!}{2!1!} = 3$
$\{-2 \ -1 \ 3 \}$	$\frac{3!}{1!1!1!} = 6$	$\{-1 \ 0 \ 1 \}$	$\frac{3!}{1!1!1!} = 6$
$\{-2 \ 0 \ 2 \}$	$\frac{3!}{1!1!1!} = 6$	$\{0 \ 0 \ 0 \}$	$\frac{3!}{3!} = 1$

Üretilen üçlü kombinasyonlar kübik terimlere ait simetrik fonksiyonların elde edilmesinde kullanılabilir. Yalnızca çıkışa ait  $y(t)^3$  ve  $\dot{y}(t)^3$  terimleri için simetrik fonksiyon Denklem 3.11'e göre aşağıdaki formda yazılabilir,

$$f_y^{sym}(r_1, r_2, r_3) = \prod_{i=1}^3 A_{y_{r_i}} (r_j \omega)^{l_i} \quad (3.43)$$

Türevsel ifade içeren  $\dot{y}(t)^3$  için istenilen harmoniği sağlayan her bir kombinasyon için değerlendirilerek Tablo 3.4'de görüldüğü gibi tüm simetrik fonksiyonlar elde edilir.

Tablo 3.4.  $\dot{y}(t)^3$  terimi için simetrik fonksiyonlar

$f_y^{sym}(r_1, r_2, r_3)$	$\prod_{i=1}^3 A_{y_{r_i}} (j\omega_{r_i})^{l_i} = A_{y_{r_1}} (j\omega_{r_1})^{l_1} A_{y_{r_2}} (j\omega_{r_2})^{l_2} A_{y_{r_3}} (j\omega_{r_3})^{l_3}$
$f_y^{sym}(-3, 0, 3)$	$A_{y_{-3}} (-3j\omega)^1 A_{y_0} (0j\omega)^1 A_{y_3} (3j\omega)^1 = 0$
$f_y^{sym}(-3, 1, 2)$	$A_{y_{-3}} (-3j\omega)^1 A_{y_1} (1j\omega)^1 A_{y_2} (2j\omega)^1 = A_{y_{-3}} A_{y_1} A_{y_2} (6j\omega^3)$
$f_y^{sym}(-2, -1, 3)$	$A_{y_{-2}} (-2j\omega)^1 A_{y_{-1}} (-1j\omega)^1 A_{y_3} (3j\omega)^1 = A_{y_{-2}} A_{y_{-1}} A_{y_3} (-6j\omega^3)$
$f_y^{sym}(-2, 0, 2)$	$A_{y_{-2}} (-2j\omega)^1 A_{y_0} (0j\omega)^1 A_{y_2} (2j\omega)^1 = 0$
$f_y^{sym}(-2, 1, 1)$	$A_{y_{-2}} (-2j\omega)^1 A_{y_1} (1j\omega)^1 A_{y_1} (1j\omega)^1 = A_{y_{-2}} A_{y_1}^2 (2j\omega^3)$
$f_y^{sym}(-1, -1, 2)$	$A_{y_{-1}} (-1j\omega)^1 A_{y_{-1}} (-1j\omega)^1 A_{y_2} (2j\omega)^1 = A_{y_{-1}}^2 A_{y_2} (-2j\omega^3)$
$f_y^{sym}(-1, 0, 1)$	$A_{y_{-1}} (-1j\omega)^1 A_{y_0} (0j\omega)^1 A_{y_1} (1j\omega)^1 = 0$
$f_y^{sym}(0, 0, 0)$	$A_{y_0} (0j\omega)^1 A_{y_0} (0j\omega)^1 A_{y_0} (0j\omega)^1 = 0$

Türevsel ifade içermeyen  $y(t)^3$  terimi için sanal çarpan ifadeden çıkartılırsa işlem daha da basitleşir,

$$f_y^{sym}(r_1, r_2, r_3) = \prod_{i=1}^3 A_{y_{r_i}} \quad (3.44)$$

İşlemler bir öncekine benzer şekilde tüm kombinasyonlar için gerçekleştirildiğinde Tablo 3.5’de verildiği gibi elde edilir. Bir öncekinde sıfır olarak elde edilen simetrik fonksiyonlar türevsel ifade bulunmadığı için sıfırdan farklı elde edilmiştir.

Tablo 3.5.  $y(t)^3$  terimi için kombinasyonlar

$f_y^{sym}(r_1, r_2, r_3)$	$\prod_{i=1}^3 A_{y_{r_i}} = A_{y_{r_1}} A_{y_{r_2}} A_{y_{r_3}}$
$f_y^{sym}(-3, 0, 3)$	$A_{y_{-3}} A_{y_0} A_{y_3}$
$f_y^{sym}(-3, 1, 2)$	$A_{y_{-3}} A_{y_1} A_{y_2}$
$f_y^{sym}(-2, -1, 3)$	$A_{y_{-2}} A_{y_{-1}} A_{y_3}$
$f_y^{sym}(-2, 0, 2)$	$A_{y_{-2}} A_{y_0} A_{y_2}$
$f_y^{sym}(-2, 1, 1)$	$A_{y_{-2}} A_{y_1} A_{y_1} = A_{y_{-2}} A_{y_1}^2$
$f_y^{sym}(-1, -1, 2)$	$A_{y_{-1}} A_{y_{-1}} A_{y_2} = A_{y_{-1}}^2 A_{y_2}$
$f_y^{sym}(-1, 0, 1)$	$A_{y_{-1}} A_{y_0} A_{y_1}$
$f_y^{sym}(0, 0, 0)$	$A_{y_0} A_{y_0} A_{y_0} = A_{y_0}^3$

Giriş ve çıkışın çarpım halinde olduğu terim  $u(t)^2 \dot{y}(t)$  için simetrik fonksiyon Denklem 3.21'e göre aşağıdaki gibi ifade edilebilir,

$$\begin{aligned}
 f_{uy}^{sym}(r_1, r_2, r_3) &= \frac{1}{n_r^*} \sum_{\substack{\{r_1, r_2, r_3\} \text{ dizisinin} \\ \text{tüm farklı permütasyonları}}} \prod_{i=1}^1 A_{y_{r_i}} (j\omega_{r_i})^{l_i} \prod_{i=2}^{1+2} A_{u_{r_i}} (j\omega_{r_i})^{l_i} \\
 &= \frac{1}{n_r^*} \sum_{\substack{\{r_1, r_2, r_3\} \text{ dizisinin} \\ \text{tüm farklı permütasyonları}}} A_{y_{r_1}} (r_1 j\omega)^{l_1} A_{u_{r_2}} (r_2 j\omega)^{l_2} A_{u_{r_3}} (r_3 j\omega)^{l_3} \\
 &= \frac{1}{n_r^*} \sum_{\substack{\{r_1, r_2, r_3\} \text{ dizisinin} \\ \text{tüm farklı permütasyonları}}} A_{y_{r_1}} (r_1 j\omega)^{l_1} A_{u_{r_2}} (r_2 j\omega)^0 A_{u_{r_3}} (r_3 j\omega)^0 \\
 &= \frac{1}{n_r^*} \sum_{\substack{\{r_1, r_2, r_3\} \text{ dizisinin} \\ \text{tüm farklı permütasyonları}}} A_{y_{r_1}} (r_1 j\omega)^{l_1} A_{u_{r_2}} A_{u_{r_3}}
 \end{aligned} \tag{3.45}$$

Dikkat edilirse burada her bir kombinasyonun permütasyonlarına da ihtiyaç duyulur. Bundan dolayı her bir kombinasyon için simetrik fonksiyona ait permütasyonların

elde edilmesi gerekir. Örneğin  $\{-3,0,3\}$  için simetrik fonksiyona önce Tablo 3.6'daki gibi her bir permütasyon için hesaplamalar gerçekleştirilir.

Tablo 3.6.  $f_{uy}^{sym}(-3,0,3)$  fonksiyonuna ait permütasyonlar

$\{r_1 \quad r_2 \quad r_3\}$	$A_{y_1}(r_1 j\omega)^1 A_{u_2} A_{u_3}$
$\{-3 \quad 0 \quad 3\}$	$A_{y_{-3}}(-3j\omega)^1 A_{u_0} A_{u_3} = A_{y_{-3}} A_{u_0} A_{u_3}(-3j\omega)$
$\{-3 \quad 3 \quad 0\}$	$A_{y_{-3}}(-3j\omega)^1 A_{u_3} A_{u_0} = A_{y_{-3}} A_{u_0} A_{u_3}(-3j\omega)$
$\{0 \quad 3 \quad -3\}$	$A_{y_0}(0j\omega)^1 A_{u_3} A_{u_{-3}} = 0$
$\{0 \quad -3 \quad 3\}$	$A_{y_0}(0j\omega)^1 A_{u_{-3}} A_{u_3} = 0$
$\{3 \quad 0 \quad -3\}$	$A_{y_3}(3j\omega)^1 A_{u_0} A_{u_{-3}} = A_{y_3} A_{u_{-3}} A_{u_0}(3j\omega)$
$\{3 \quad -3 \quad 0\}$	$A_{y_3}(3j\omega)^1 A_{u_{-3}} A_{u_0} = A_{y_3} A_{u_{-3}} A_{u_0}(3j\omega)$

Her bir permütasyon için elde edilen permütasyonlar 3.46'da yerine konduğunda simetrik fonksiyon elde edilmiş olur.

$$f_y^{sym}(-3, 0, 3) = 2A_{y_{-3}} A_{u_0} A_{u_3}(-3j\omega) + A_{y_3} A_{u_{-3}} A_{u_0}(3j\omega) \quad (3.46)$$

Benzer şekilde diğer kombinasyonlar için permütasyonlar üretilirse simetrik fonksiyonlar Tablo 3.7'deki gibi elde edilir.

Tablo 3.7. Giriş ve çıkışın çarpım halinde olduğu terime ait simetrik fonksiyonlar.

$f_y^{sym}(r_1, r_2, r_3)$	$u(t)^2 \dot{y}(t)$
$f_y^{sym}(-3, 0, 3)$	$\frac{1}{6}(2A_{y-3} A_{u_0} A_{u_3} (-3j\omega) + A_{y_3} A_{u-3} A_{u_0} (3j\omega))$
$f_y^{sym}(-3, 1, 2)$	$\frac{1}{6}(2A_{y-3} A_{u_1} A_{u_2} (-3j\omega) + 2A_{y_1} A_{u-3} A_{u_2} (j\omega) + 2A_{y_2} A_{u-3} A_{u_1} (2j\omega))$
$f_y^{sym}(-2, -1, 3)$	$\frac{1}{6}(2A_{y-2} A_{u-1} A_{u_3} (-2j\omega) + 2A_{y-1} A_{u-2} A_{u_3} (-j\omega) + 2A_{y_3} A_{u-1} A_{u-2} (3j\omega))$
$f_y^{sym}(-2, 0, 2)$	$\frac{1}{6}(2A_{y-2} A_{u_0} A_{u_2} (-2j\omega) + 2A_{y_2} A_{u_0} A_{u-2} (2j\omega))$
$f_y^{sym}(-2, 1, 1)$	$\frac{1}{3}(A_{y-2} A_{u_1}^2 (-2j\omega) + 2A_{y_1} A_{u-2} A_{u_1} (j\omega))$
$f_y^{sym}(-1, -1, 2)$	$\frac{1}{3}(2A_{y-1} A_{u-1} A_{u_2} (-j\omega) + A_{y_2} A_{u-1}^2 (2j\omega))$
$f_y^{sym}(-1, 0, 1)$	$\frac{1}{6}(2A_{y-1} A_{u_0} A_{u_1} (-j\omega) + 2A_{y_1} A_{u-1} A_{u_0} (j\omega))$
$f_y^{sym}(0, 0, 0)$	0

Hesaplanan simetrik fonksiyonlar Denklem 3.22'de yerine konulduğunda  $r=0$  için denge denklemi elde edilmiş olur.

$$\begin{aligned}
& \sum_{m=1}^3 \sum_{p=0}^m \frac{A^q}{2^m} \sum_{l_1, l_{p+q}=0}^2 c_{p,q}(l_1, \dots, l_{p+q}) \sum_{\substack{\text{bütün komb.} \\ \{r_1, \dots, r_m\} \\ \{-3, \dots, 3\} \\ \sum r_i \omega = r\omega}} n_r^* f_{uy}^{sym}(r_1, \dots, r_m) = \\
& \left. \begin{aligned}
& \frac{1}{2} c_{0,1}(0) \sum_{\{r_1\}=\{0\}} f_u^{sym}(r_1) + \frac{1}{2} c_{1,0}(0) \sum_{\{r_1\}=\{0\}} f_y^{sym}(r_1) + \frac{1}{2} c_{1,0}(1) \sum_{\{r_1\}=\{0\}} f_{y_1}^{sym}(r_1) \\
& + \frac{1}{2} c_{1,0}(2) \sum_{\{r_1\}=\{0\}} f_y^{sym}(r_1) + \frac{1}{8} c_{3,0}(0,0,0) \sum_{\substack{\{r_1, r_2, r_3\} \\ \{-3, \dots, 3\} \\ \sum \omega_i = 0}} n_r^* f_y^{sym}(r_1, r_2, r_3) \\
& + \frac{1}{8} c_{3,0}(1,1,1) \sum_{\substack{\{r_1, r_2, r_3\} \\ \{-3, \dots, 3\} \\ \sum \omega_i = 0}} n_r^* f_y^{sym}(r_1, r_2, r_3) + \frac{1}{8} c_{1,2}(1,0,0) \sum_{\substack{\{r_1, r_2, r_3\} \\ \{-3, \dots, 3\} \\ \sum \omega_i = 0}} n_r^* f_{uy}^{sym}(r_1, r_2, r_3) = 0
\end{aligned} \right\} (3.47)
\end{aligned}$$



Burada katsayılar ve simetrik fonksiyonlar yerine konarak sabit bileşen için denge denklemi oluşturulmuş olur,

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2}A_{u_0} + \frac{1}{2}\omega_n^2 A_{y_0} \\
& + \frac{1}{8}\alpha_3 \left[ 6A_{y-3} A_{y_0} A_{y_3} + 6A_{y-3} A_{y_1} A_{y_2} + 6A_{y-2} A_{y-1} A_{y_3} + 6A_{y-2} A_{y_0} A_{y_2} \right. \\
& \quad \left. + 3A_{y-2} A_{y_1}^2 + 3A_{y-1}^2 A_{y_2} + 6A_{y-1} A_{y_0} A_{y_1} + A_{y_0}^3 \right] \\
& + \frac{1}{8}d_2 \left[ 6A_{y-3} A_{y_1} A_{y_2} (6j\omega^3) + 6A_{y-2} A_{y-1} A_{y_3} (-6j\omega^3) \right. \\
& \quad \left. + 3A_{y-2} A_{y_1}^2 (2j\omega^3) + 3A_{y-1}^2 A_{y_2} (-2j\omega^3) \right] \\
& + \frac{1}{8}d_4 \left[ 2A_{y-3} A_{u_0} A_{u_3} (-3j\omega) + 2A_{y_3} A_{u_0} A_{u-3} (3j\omega) + 2A_{y_1} A_{u-3} A_{u_2} (j\omega) \right. \\
& \quad + 2A_{y_2} A_{u-3} A_{u_1} (2j\omega) + 2A_{y-1} A_{u-2} A_{u_3} (-j\omega) + 2A_{y_3} A_{u-2} A_{u-1} (3j\omega) \\
& \quad + 2A_{y-2} A_{u_0} A_{u_2} (-2j\omega) + 2A_{y_2} A_{u_0} A_{u-2} (2j\omega) + 2A_{y_1} A_{u_1} A_{u-2} (j\omega) \\
& \quad + A_{y-2} A_{u_1}^2 (-2j\omega) + 2A_{y-1} A_{u-1} A_{u_2} (-j\omega) + A_{y_2} A_{u_1}^2 (2j\omega) \\
& \quad \left. + 2A_{y-1} A_{u_0} A_{u_1} (-j\omega) + 2A_{y_1} A_{u-1} A_{u_0} (j\omega) \right] = 0
\end{aligned} \tag{3.48}$$

Giriş sinyali ikinci ve üçüncü harmonik içermediği için ilgili katsayılar  $A_{u_2}$ ,  $A_{u-2}$ ,  $A_{u_3}$ ,  $A_{u-3}$  =0 olarak alındığında denge denklemi aşağıdaki gibi sadeleşir,

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2}A_{u_0} + \frac{1}{2}\omega_n^2 A_{y_0} \\
& + \frac{1}{8}\alpha_3 \left[ 6A_{y-3} A_{y_0} A_{y_3} + 6A_{y-3} A_{y_1} A_{y_2} + 6A_{y-2} A_{y-1} A_{y_3} + 6A_{y-2} A_{y_0} A_{y_2} \right. \\
& \quad \left. + 3A_{y-2} A_{y_1}^2 + 3A_{y-1}^2 A_{y_2} + 6A_{y-1} A_{y_0} A_{y_1} + A_{y_0}^3 \right] \\
& + \frac{3}{4}d_2 j\omega^3 \left[ 6A_{y-3} A_{y_1} A_{y_2} - 6A_{y-2} A_{y-1} A_{y_3} + A_{y-2} A_{y_1}^2 - A_{y-1} A_{y_2} \right] \\
& + \frac{3}{4}d_4 j\omega \left[ -A_{y-2} A_{u_1}^2 + A_{y_2} A_{u_1}^2 - A_{y-1} A_{u_0} A_{u_1} + A_{y_1} A_{u-1} A_{u_0} \right] = 0
\end{aligned} \tag{3.49}$$

Benzer şekilde temel, ikinci ve üçüncü harmonikler için benzer işlemler gerçekleştirilir. Buna göre denge denklemleri birinci harmonik için;

$$\begin{aligned}
& \frac{A_{y_2}}{2} (\omega_n^2 - 4\omega^2 + 4\mu j\omega) \\
& + \frac{3}{8} \alpha_3 \left[ 2A_{y_3} A_{y_1} A_{y_3} + A_{y_3} A_{y_2}^2 + 2A_{y_2} A_{y_0} A_{y_3} + 2A_{y_2} A_{y_1} A_{y_2} \right] \\
& + \frac{3}{8} d_2 j\omega^3 \left[ 18A_{y_3} A_{y_1} A_{y_3} + 12A_{y_3} A_{y_2}^2 + 8A_{y_2} A_{y_1} A_{y_2} \right] \\
& + \frac{1}{8} d_4 j\omega \left[ 3A_{y_3} A_{u_1}^2 + 4A_{y_2} A_{u_0} A_{u_1} + A_{y_1} A_{u_1}^2 + 2A_{y_1} A_{u_1} A_{u_1} + A_{y_1} A_{u_0}^2 \right] = 0
\end{aligned} \tag{3.50}$$

İkinci harmonik için;

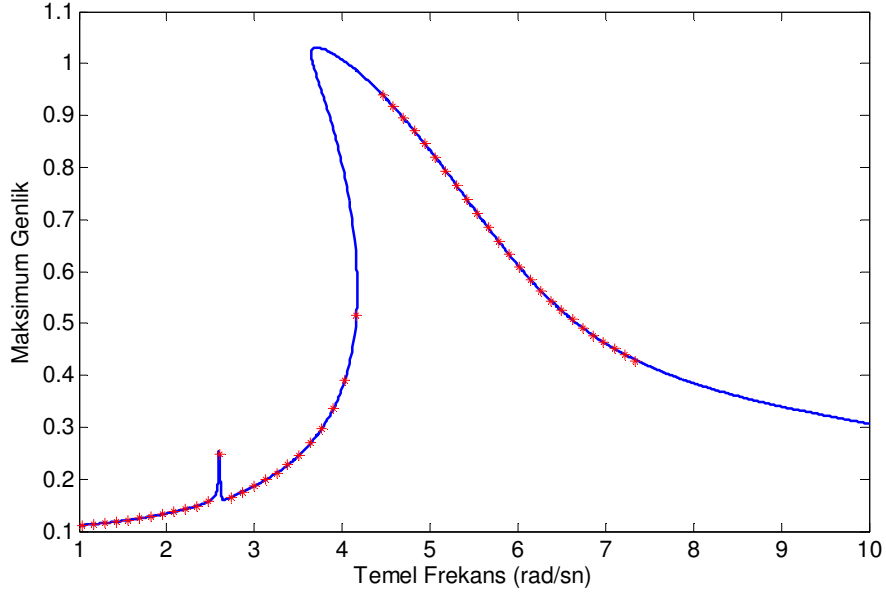
$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2} A_{u_0} + \frac{1}{2} \omega_n^2 A_{y_0} \\
& + \frac{3}{2} \alpha_3 \left[ 9A_{y_3} A_{y_2} A_{y_3} + 3A_{y_2} A_{y_1} A_{y_3} + 2A_{y_2} A_{y_2}^2 + A_{y_1} A_{y_1} A_{y_2} \right] \\
& + \frac{3}{4} d_2 j\omega^3 \left[ A_{y_3} A_{y_2} A_{y_3} + A_{y_2} A_{y_1} A_{y_3} + 3A_{y_2} A_{y_2}^2 + A_{y_1} A_{y_1} A_{y_2} \right] \\
& + \frac{1}{4} d_4 j\omega \left[ 3A_{y_3} A_{u_0} A_{u_1} + 2A_{y_2} A_{u_1} A_{u_1} + A_{y_2} A_{u_0}^2 + A_{y_1} A_{u_0} A_{u_1} \right] = 0
\end{aligned} \tag{3.51}$$

Üçüncü harmonik için;

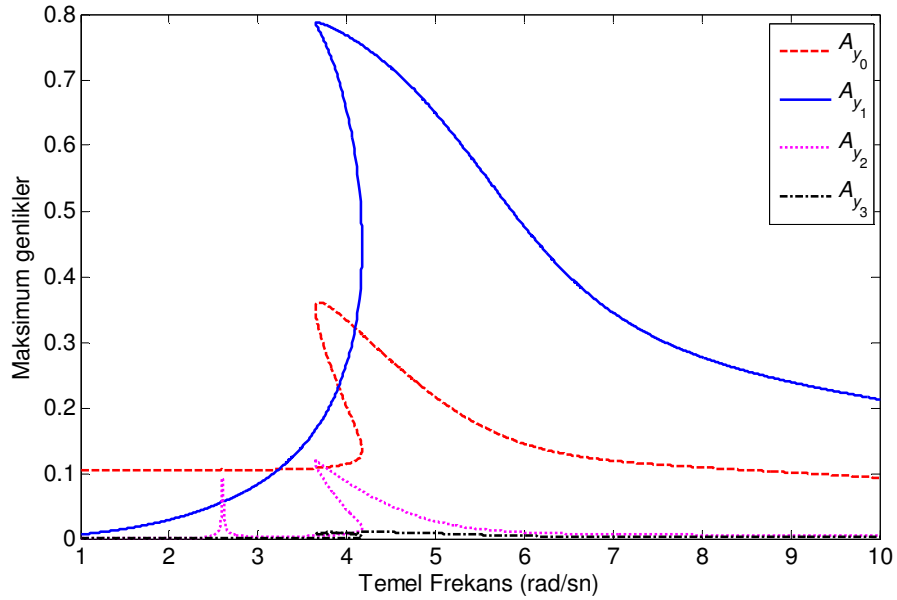
$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2} A_{u_0} + \frac{1}{2} \omega_n^2 A_{y_0} \\
& + \frac{1}{8} \alpha_3 \left[ 6A_{y_3} A_{y_3} A_{y_3} + 6A_{y_2} A_{y_2} A_{y_3} + 6A_{y_1} A_{y_1} A_{y_3} + 3A_{y_1} A_{y_2}^2 + A_{y_1}^3 \right] \\
& + \frac{3}{4} d_2 j\omega^3 \left[ 6A_{y_3} A_{y_3} A_{y_3} + 6A_{y_2} A_{y_2} A_{y_3} + 6A_{y_1} A_{y_1} A_{y_3} + 3A_{y_1} A_{y_2}^2 + A_{y_1}^3 \right] \\
& + \frac{A^2}{4} d_4 j\omega \left[ 6A_{y_3} A_{u_1} A_{u_1} + 3A_{y_3} A_{u_0}^2 + 4A_{y_2} A_{u_1} A_{u_0} + A_{y_1} A_{u_1}^2 \right] = 0
\end{aligned} \tag{3.52}$$

şeklinde toplamda dört takım doğrusal olmayan denklem formunda elde edilir. Bir sonraki aşamada 3.54-3.57 ile belirtilen denklemler örneğin Nelder-Mead Simplex sayısal çözümleme yöntemi kullanılarak verilen frekans aralığındaki her bir değer

için çıkış sinyaline ait  $a_{y_0}, a_{y_1}, \phi_{y_1}, a_{y_2}, \phi_{y_2}, a_{y_3}, \phi_{y_2}$  bilinmeyen değişkenlerin değerleri elde edilebilir.



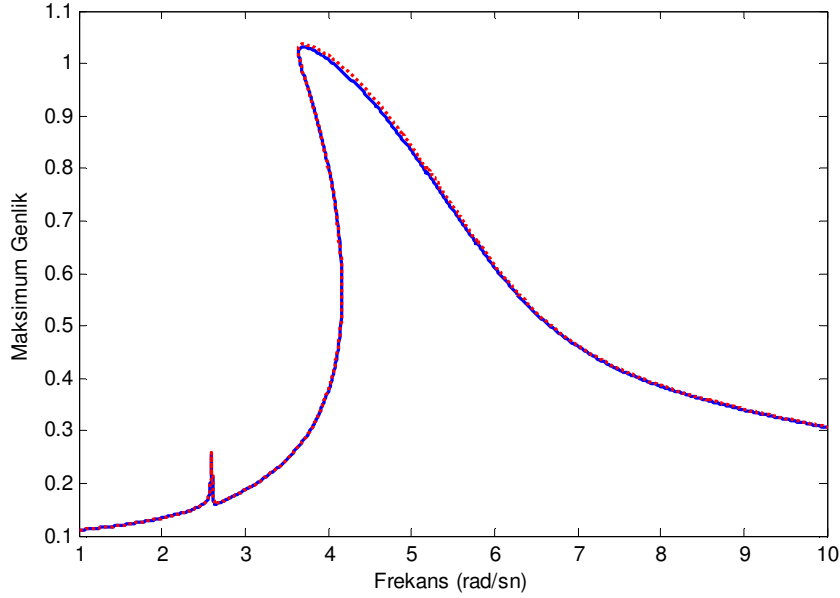
Şekil 3.4. Maksimum genlikler için analitik (-) ve simülasyon (\*) sonuçlarının karşılaştırılması



Şekil 3.5. Sinyal formunu oluşturan harmoniklere ait frekans cevapları

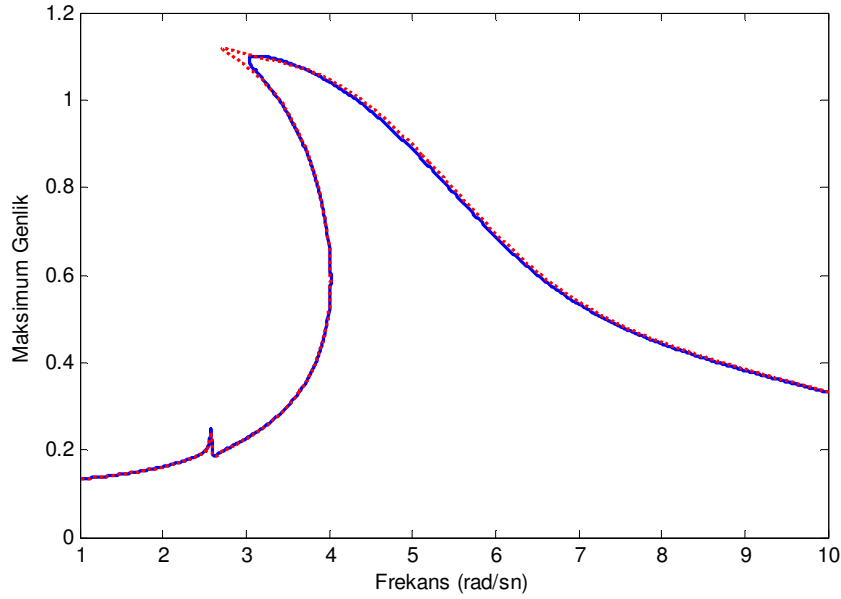
Yöntemi doğrulamak için maksimum genliklere ait frekans cevabı gerçekleştirilen sayısal simülasyon sonuçlarıyla birlikte Şekil 3.4'deki gibi karşılaştırılabilir. Görüldüğü gibi, analizde kabul edilen harmonik sayısının, analitik sonuçlar ve

sayısal simülasyon sonuçları ile kıyaslandığında yeterli olduğu açıktır. Çıkış sinyalini oluşturan harmoniklere ait genliklerin frekansa bağlı değişimleri Şekil 3.5’de verilmiştir. Frekans bileşenlerine ait genlik seviyeleri bakımından incelendiğinde üçüncü harmoniğin etkisi diğerlerine göre oldukça zayıf kalmaktadır. Bu nedenle verilen giriş için iki harmonikli analiz yeterli olabilir.



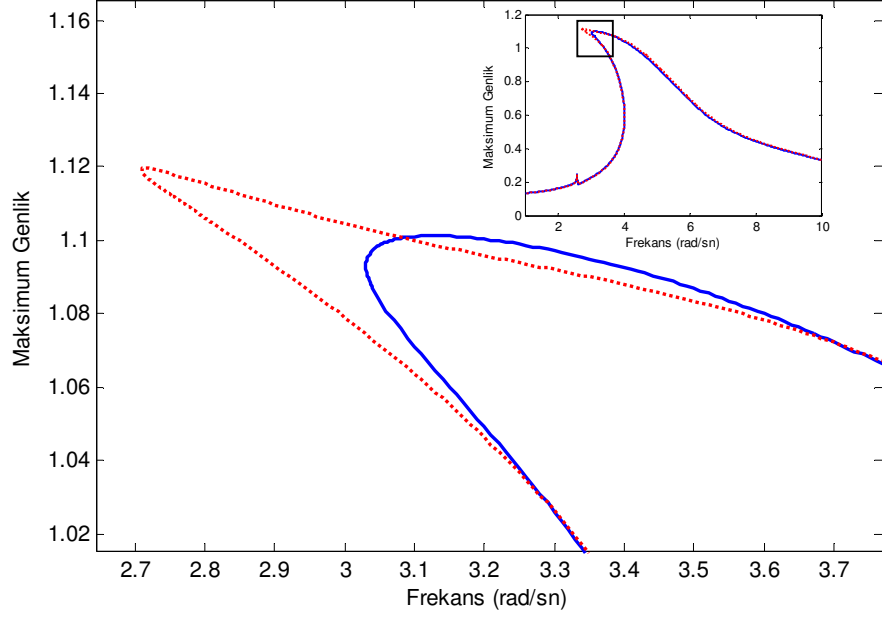
Şekil 3.6. İki (...) ve üç (-) harmonik kullanılarak elde edilen frekans cevapları

Eğer analiz üçüncü harmonik ihmal edilerek gerçekleştirilirse frekans cevabı Şekil 3.6’da görüldüğü gibi rezonans dilimine yakın sırt noktalarında düşük bir hatayla elde edilir. Doğrusal olmayan sistemler uygulanan frekans bileşenleri yanında, giriş sinyalin genliğine de bağlı bir frekans cevabı sergilerler. Örneğin giriş sinyali 1.2 kat artırılırsa Şekil 3.7’de görüldüğü gibi iki harmonik kullanılan analiz ile üç harmonik kullanılan analiz arasındaki fark önceki kıyaslamaya göre önemli miktarda artmıştır.

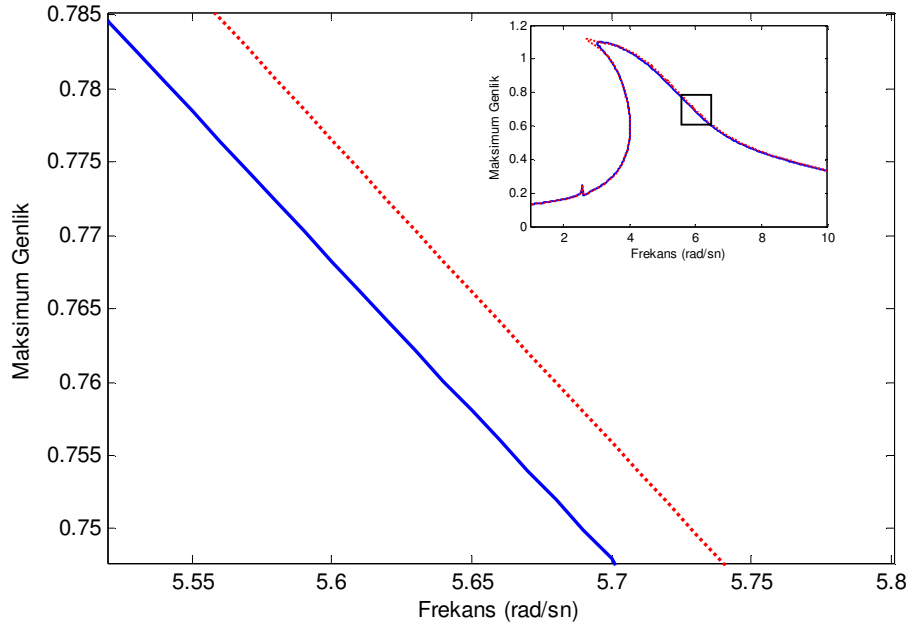


Şekil 3.7.  $u(t) \times 1.2$  için iki (...) ve üç (-) harmonik kullanılarak gerçekleştirilen analizler

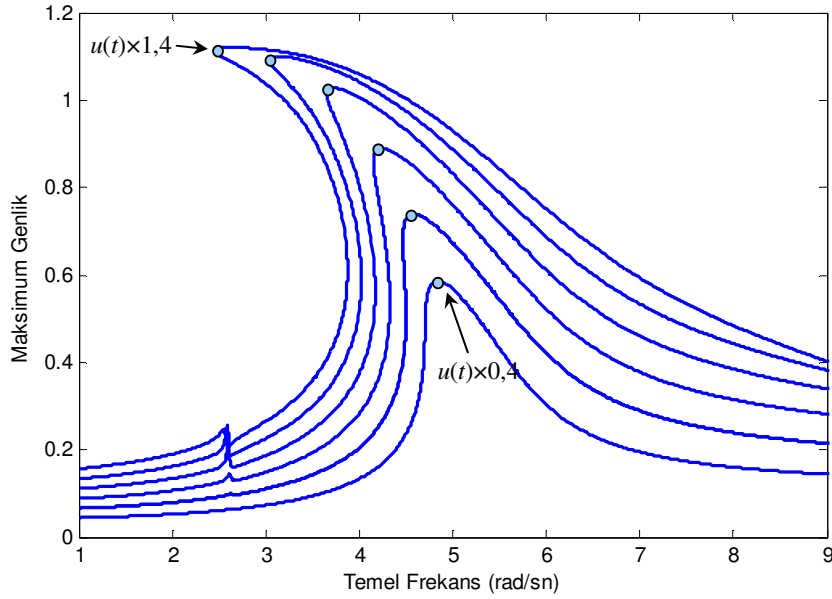
Sayısal simülasyon sonuçları ile üç harmonikli analizde elde edilen sonuç ile daha yakın olmasına karşın iki harmonikli analizdeki sonuç nispeten hata miktarı daha fazla oluşmuştur. Özellikle Şekil 3.8’de verilmiş olan tepe noktalarına ait kıyaslamada iki harmonikli analizde oluşan hata belirgin olarak ortaya çıkmıştır. Yine tepe noktasına kıyasla az olsa da Şekil 3.9’da görülen sırt bölgesinde bir miktar hata oluşmuştur. Genlik farkının tepe noktasına kıyasla daha az olması, bu aralığın doğrusal olmayan davranışının tepe noktasına kıyasla daha zayıf sergilendiği kısımlardır.



Şekil 3.8.  $u(t) \times 1,2$  için iki (...) ve üç (–) harmonik kullanılan analizlerde tepe noktasındaki farklar



Şekil 3.9.  $u(t) \times 1,2$  için iki (...) ve üç (–) harmonik kullanılan analizler için sırtlarda oluşan farklar



Şekil 3.10. Giriş genliğinin  $u(t) \times 0,4 \dots u(t) \times 1,4$  aralığı için frekans cevabına etkisi

Çıkış frekans cevabı, giriş sinyalinin genliği sırasıyla  $\{0,4; 0,6; 0,8; 1, 1,2; 1,4\}$  kat olarak değiştirildiğinde, genliği düşük cevaptan yükseğe doğru Şekil 3.10'da görüldüğü gibi elde edilir. Dikkat edilirse giriş genliği artırıldıkça dönüşlerin gerçekleştiği frekans değerleri arasındaki fark giderek artmaktadır. Bununla birlikte, giriş genliği azaldıkça sergilenen frekans cevabının doğrusal olmayan yapısı giderek azalmaktadır. Örneğin girişin 0,4 ile çarpıldığı durumda atlama davranışının gerçekleşmediği görülür.

### 3.7. Sonuçlar

Harmonik denge analizini yüksek hassasiyetle gerçekleştirmek için harmonik sayısı ve bundan dolayı denge denklemi sayısı artar. Çözümü gerçekleştirilen sistemin derecesi artırıldığında ise elde edilen denge denklemleri daha fazla sayıda terimden oluşur. Bu etkenlerden dolayı yöntemin uygulamasında ortaya çıkan güçlükleri yenmek için geliştirilen bir algoritma yapısı tanıtılmıştır. Sunulan sembolik algoritma ile girilen sistem ve giriş/çıkış sinyallerine ait katsayılar girildikten sonra denge denklemlerinin hesabı otomatik olarak gerçekleştirilebilir. Bir öncekine göre iyileştirmeler yapılarak pratik bir form kazandırılan algoritmaya ait denklemlerin

çıkartılışı detaylı olarak açıklanmıştır. Genel formda tanımlanan denklemin terimleri sadece girişe veya çıkışa ait olanlar ile giriş ve çıkış çarpımına ait olanlar olmak üzere ele alınmış ve her ikisini kapsayan açılımlar simetrik fonksiyonlar kullanılarak tanımlanmıştır. Bunların açılımlarından ilgilenilen kombinasyonları ve permütasyonları otomatik olarak elde edilebilmesi için kullanılan algoritmalar açıklanmıştır. Yöntemi sunmak amacıyla, düzenli dalgalara maruz kalan bir gemi modelini tanımlayan diferansiyel denklem için örnek uygulama gerçekleştirilmiştir. Üç adet harmonik ve bir adet sabit bileşenden olmak üzere toplam dört adet bileşen için harmonik denge denklemlerinin elde edilişi açıklanmıştır. Burada sabit bileşen için denge denkleminin elde edilişi detaylı olarak sunulmuştur. Elde edilen maksimum genliklere ait sonuçlar simulasyon sonuçları ile kıyaslanarak yöntemin doğruluğu da gösterilmiştir. Verilen giriş sinyali için analiz iki harmonik ve bir sabit bileşen içerecek şekilde gerçekleştirildiğinde üç harmonikli analize yakın sonuçlar elde edilmiştir. Bununla birlikte, giriş genliğindeki bir artışın frekans cevabı üzerindeki etkisini göstermek amacıyla artırıldığında iki ve üç bileşenli analiz arasındaki farkın arttığı gözlenmiştir. Bu davranış doğrusal olmayan sistemlerin frekans cevabının giriş genliğine bağımlılığının yanında, analizde kabul edilen frekans bileşeni sayısının analizin doğruluğuna etkisini göstermiştir. Giriş genliği artırıldığında analizdeki hata oranının düşürülmesi veya analizin daha yüksek doğruluk ile gerçekleştirilmesi istendiğinde harmonik sayısının artırılması gerektiği gösterilmiştir.

Detaylı olarak açıklanan yöntem iyileştirilmiş yapıya sahip olmasına karşın, yalnızca tek-tonlu sinyal formlarını kapsar. Bununla birlikte doğrusal olmayan sistem karakteristiklerinin incelenmesinde çok-tonlu sinyaller ile analize de ihtiyaç duyulur. Bu amaç doğrultusunda bir sonraki bölümde tek-girişli tek-çıkışlı sistemler için çok-tonlu sinyalleri kapsayan harmonik denge metodunu geliştirilmesine yönelik yeni bir sembolik algoritma sunulacaktır.



## **BÖLÜM 4. ÇOK-TONLU HARMONİK DENGE YÖNTEMİ İÇİN SEMBOİK ALGORİTMA TASARIMI**

### **4.1. Giriş**

DOS'ların çıkışında sergilediği frekans spektrumu bileşenleri, giriş sinyalinin genlik seviyesinin yanında içerdiği frekans bileşenleri ile de ilişkilidir. Bu ilişki zaman boyutu ve frekans boyutu karakteristikleri uygulanan sinyalin frekans bileşenlerine bağlı olarak değişimine çeşitli seviyelerde katkıda bulunabilir. DOS'ların sergilediği davranışları daha etkili bir şekilde ortaya çıkarmak için bazen analizin birden fazla frekans bileşeni içerecek şekilde gerçekleştirilmesi gerekir. Örneğin, DOS'ların analizinde genel yaklaşımlardan biri olan Volterra transfer fonksiyonları ile gerçekleştirilen bir çalışmada, birden fazla ve harmonik olarak ilişkili formda frekans bileşenleri içeren giriş sinyalleri için tanımlama fonksiyonlarının hesabı gerçekleştirilmiştir [59]. Yine aynı yöntem kullanılarak frekans cevabı fonksiyonları iki-tonlu giriş sinyali kullanılarak incelenmiştir [60]. Farklı bir uygulamada, random genlikli çok-tonlu giriş sinyali kullanılarak ikinci dereceden Volterra modellerine ait kernellerin tahmini gerçekleştirilmiştir [61]. Diğer bir analiz yöntemi olan çok zamanlı ölçekleme (multiple time scales) ile çok-tonlu uyarım için birinci dereceden serbestliğe sahip kübik terimli bir sistemin cevabı analitik ve sayısal integrasyonlar kullanılarak çalışılmıştır [62]. Aynı yöntem kullanılarak metal levhaların kaplanması sırasında ortaya çıkan titreşimler tek frekanslı harici ve çok-tonlu parametrik uyarımlar için incelenmiştir [63]. Son zamanlarda da çok-tonlu çalışmaları temel alarak çeşitli yaklaşımlar gerçekleştirilmiştir [64-69].

Bir önceki bölümde sunulan sembolik HBM algoritması, birden fazla harmonikten oluşan tek-tonlu sinyal formları için analizin gerçekleştirilmesinde pratik bir yaklaşım sağlamasına karşın çok-tonlu olarak gerçekleştirilen analizlerde geçerli

değildir. Eğer bir DOS giriş sinyalinde iki veya daha fazla harmonik olarak ilişkisiz sinüzoidallerden oluşan çok-tonlu sinyal kullanılıyorsa çıkış sinyal formu benzer şekilde fakat her bir temel frekansa ait harmonikler içerir. Fakat bunlara ek olarak çıkış sinyali harmonik olarak ilişkisiz frekans bileşenlerinin ara modülasyonlarıyla oluşan karışım frekans bileşenlerini de içermelidir [70]. Bundan dolayı sembolik HBM yönteminin çok-tonlu forma kavuşturulabilmesi için analizde kullanılan sinyal formunun bu tip etkileşimleri kapsayacak şekilde yeniden tanımlanması ve algoritma yapısının buna göre yeniden oluşturulması gerekir.

Gerçekleştirilen çalışmanın bu bölümünde, polinom tip doğrusal olmayan sistemler için harmonik olarak ilişkisiz frekans bileşenlerinden oluşan giriş sinyallerini kapsayan yeni bir sembolik algoritma sunulacaktır. Bu amaçla çok-tonlu sinyal formlarına ait genelleştirilmiş açılımlar ile denge denklemlerinin tasarımı açıklanacaktır. Algoritmanın otomatik hale getirilmesinde önemli rol oynayan ve parametreleri sınırlama yöntemi ile ilişkili olan otomatik kombinasyon ve permütasyon üretici algoritmaları tanıtılacaktır. Analizin gerçekleştirilmesinde izlenen işlem basamakları sunulup, oluşturulan algoritmanın manuel uygulaması örnek bir model üzerinde gösterilerek elde edilen sonuçlar sayısal simülasyon sonuçları ile doğrulanacaktır. Ayrıca, analizde kabul edilen çıkış frekans bileşenlerinin tespit edilmesinde giriş genliklerinin etkisi incelenecektir. Kullanılan giriş genliklerine göre çeşitli sayılarda seçilen frekans bileşenleri için elde edilen hata değerleri karşılaştırılmalı olarak sunulacaktır.

#### **4.2. Çok-Tonlu Giriş İçin Analizde Kullanılan Sinyal Formu**

Analizin çok-tonlu giriş sinyaline uygulanabilmesi için bir giriş sinyalinin formu ve sisteme uygulandığında buna ait frekans bileşenlerinin etkileşimlerini genel olarak sunan bir çıkış sinyalinin tanımlanması gerekir. Böylece, Denklem 2.1 ile belirtilen sistem yapısının giriş, çıkış ve giriş-çıkış çarpımı şeklindeki terimleri için doğrusal olmayan fonsiyonlara ait açılımlar elde edilebilir. Tek-tonlu uygulama için Denklem 3.1 ile verilen sinüzoidallerin toplamı formundaki sinyal, yapı olarak bir temel frekansın harmoniklerinden oluşur. Benzer şekilde, giriş sinyali  $\sigma$  adet harmonik

olarak ilişkisiz temel frekans bileşeni ve harmonikleri şeklinde çok-tonlu formda tanımlanabilir,

$$u(t) = a_{u_0} + \sum_{r_1=1}^{R_{u_1}} a_{u_{r_1}} \cos(r_1 \omega_1 t + \phi_{r_1}) + \dots + \sum_{r_\sigma=1}^{R_{u_\sigma}} a_{u_{r_\sigma}} \cos(r_\sigma \omega_\sigma t + \phi_{r_\sigma}) \quad (4.1)$$

Burada  $\omega_1, \dots, \omega_\sigma$  harmonik olarak ilişkisiz temel frekans bileşenleri,  $R_{u_1}, \dots, R_{u_\sigma}$  sinyallere ait temel frekansların harmonik sayısını ve  $\phi_{r_1}, \dots, \phi_{r_\sigma}$  frekans bileşenlerinin faz değerlerini belirtir. Örneğin, iki harmonik olarak ilişkisiz sinyal ve bir sabit bileşeni içeren bir çok-tonlu giriş sinyali DOS'a uygulandığında çıkışta üretebileceği frekans bileşenleri  $r_1 \omega_1 \pm r_2 \omega_2$  formunda yani giriş frekans bileşenlerinin tamsayı katlarının toplamları şeklinde elde edilmektedir. Bu durumu basitçe açıklamak amacıyla, örneğin iki harmonik ilişkisiz frekans bileşeni ve bir sabit bileşenden oluşan bir sinyal tanımlaması aşağıdaki gibi yapılabilir,

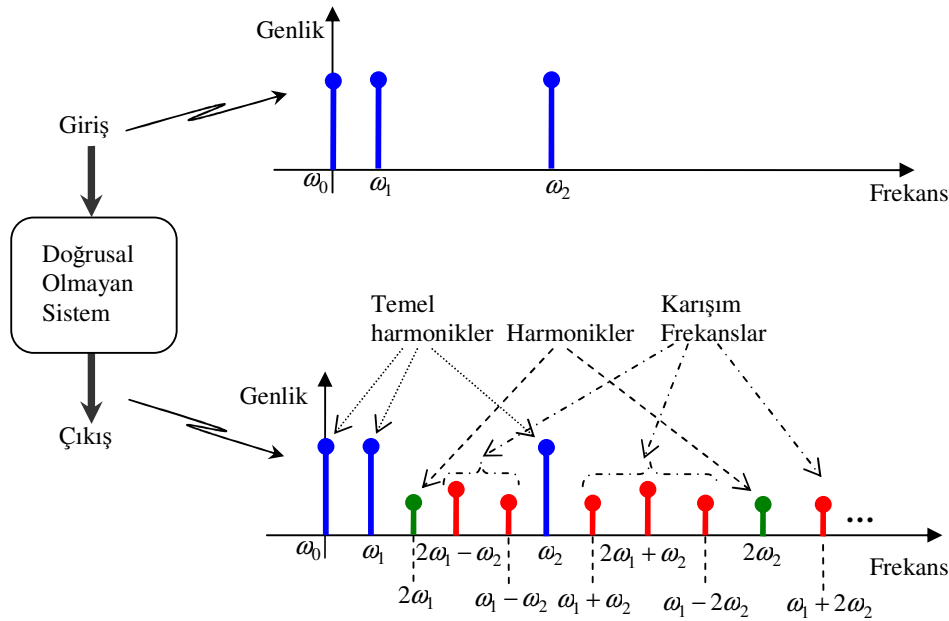
$$\begin{aligned} x(t) &= 1 + \cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t) \\ &= 1 + \frac{1}{2} (e^{j\omega_1 t} + e^{-j\omega_1 t}) + \frac{1}{2} (e^{j\omega_2 t} + e^{-j\omega_2 t}) \end{aligned} \quad (4.2)$$

Üstel formda tanımlanan bu sinyal ile çarpma ve üs alma işlemlerini gerçekleştirmek kosinüslerle tanımlanan forma göre daha kolaydır. Örneğin üstel formda  $x(t)$  ile tanımlanan bir sinyal kübik fonksiyona uygulandığında elde edilen açılım sanal ve gerçel kısımlar şeklinde aşağıdaki gibi elde edilir,

$$x(t)^3 = 4 + \begin{pmatrix} 2.625e^{j\omega_1 t} + 0.75e^{j2\omega_1 t} + 0.125e^{j3\omega_1 t} \\ + 2.625e^{j\omega_2 t} + 0.75e^{j2\omega_2 t} + 0.125e^{j3\omega_2 t} \\ + 0.75e^{j(\omega_1 + \omega_2)t} + 0.75e^{j(\omega_1 - \omega_2)t} \\ + 0.375e^{j(\omega_1 + 2\omega_2)t} + 0.375e^{j(\omega_1 - 2\omega_2)t} \\ + 0.375e^{j(2\omega_1 + \omega_2)t} + 0.375e^{j(2\omega_1 - \omega_2)t} \end{pmatrix}$$

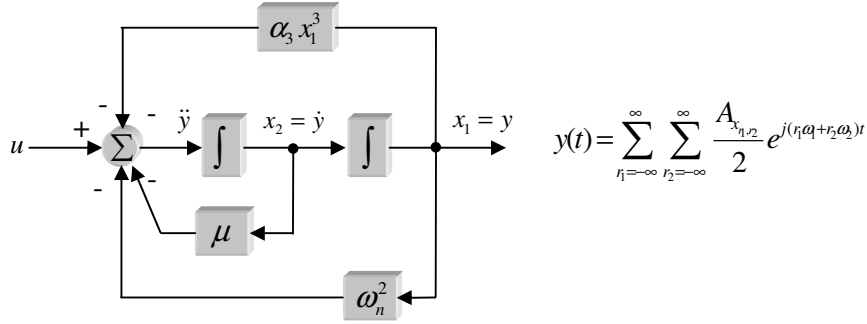
$$+ \begin{pmatrix} 2.625e^{-j\omega_1 t} + 0.75e^{-j2\omega_1 t} + 0.125e^{-j3\omega_1 t} \\ + 2.625e^{-j\omega_2 t} + 0.75e^{-j2\omega_2 t} + 0.125e^{-j3\omega_2 t} \\ + 0.75e^{-j(\omega_1 + \omega_2)t} + 0.75e^{-j(\omega_1 - \omega_2)t} \\ + 0.375e^{-j(\omega_1 + 2\omega_2)t} + 0.375e^{-j(\omega_1 - 2\omega_2)t} \\ + 0.375e^{-j(2\omega_1 + \omega_2)t} + 0.375e^{-j(2\omega_1 - \omega_2)t} \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

Açılımdaki frekans bileşenleri incelendiğinde  $r_1, r_2 \in \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$  ve  $|r_1| + |r_2| \leq 3$  için  $r_1\omega_1 + r_2\omega_2$  şeklinde oluştuğu görülür. Şekil 4.1'de bu bileşenlerin frekans düzleminde sembolik olarak sıralanışı verilmiştir.



Şekil 4.1. İki-tonlu giriş uygulanmış bir DOS için tipik çıkış frekans spektrumu bileşenleri

Benzer bir fonksiyon örneğinin Şekil 4.2'de görüldüğü gibi çıkışı tekrarlı bir diferansiyel denklemin yapısında bulunursa geri beslemeli yapıdan dolayı  $r_1, r_2 \in \{-\infty, \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, \infty\}$  şeklinde  $r_1$  ve  $r_2$  çarpanları teorik olarak sonsuz adet tamsayı değer alır.



Şekil 4.2.  $\ddot{y}(t) + \mu\dot{y}(t) + \omega_n^2 y(t) + \alpha_3 y(t)^3 = u(t)$  denklemine ait faz değişimi diyagramı

Eğer sisteme uygulanan giriş,  $\omega_1, \dots, \omega_\sigma$  şeklinde  $\sigma$  adet harmonik olarak ilişkisiz frekans bileşenlerinden oluşuyorsa çıkış sinyali faz farkları da dahil edilerek  $\omega = r_1\omega_1 + \dots + r_\sigma\omega_\sigma$  frekansında bileşenler içerecek şekilde aşağıdaki gibi genel bir tanımlama yapılabilir,

$$x(t) = \sum_{r_1=-R_{x_1}}^{R_{x_1}} \dots \sum_{r_\sigma=-R_{x_\sigma}}^{R_{x_\sigma}} \frac{A_{x_{r_1 \dots r_\sigma}}}{2} e^{j((r_1\omega_1 + \dots + r_\sigma\omega_\sigma)t + \phi_{r_1 \dots r_\sigma})} \quad (4.4)$$

burada  $R_{x_i}$  her bir temel frekans için analizde kabul edilen harmonik sayısını tanımlar. Böylece temel frekansların harmoniklerinin toplamları ve farkları karışım frekanslarını verir. Karmaşık genlikler ise Denklem (3.3) ile belirtilen forma benzer şekilde tanımlanmıştır,

$$A_{x_0} = 2a_{x_0}, \quad A_{x_{r_1 \dots r_\sigma}} = a_{x_{r_1 \dots r_\sigma}} e^{j\phi_{r_1 \dots r_\sigma}}, \quad A_{x_{-r_1 \dots -r_\sigma}} = a_{x_{r_1 \dots r_\sigma}} e^{-j\phi_{r_1 \dots r_\sigma}}, \quad \omega_0 = 0 \quad (4.5)$$

Harmonik çarpanların  $r_1=0, \dots, r_\sigma=0$  değerleri için giriş sinyaline ait sabit bileşen  $a_{x_0}$  elde edilir. Çıkış sinyalini tanımlayan ifade aynı zamanda Denklem 4.1 ile tanımlanmış olan giriş sinyal formunu da kapsamaktadır. Bundan dolayı algoritma yapısı basitleştirilerek hem çıkış, hem de giriş sinyalini temsil eden genel bir form olarak kullanılabilir. Çıkış sinyali sinüzoidaller formunda oluşturulmak istenirse Şekil 4.3 ile belirtilen düzlemin bir kısmı çıkışı temsil etmek için kullanılır. Bu

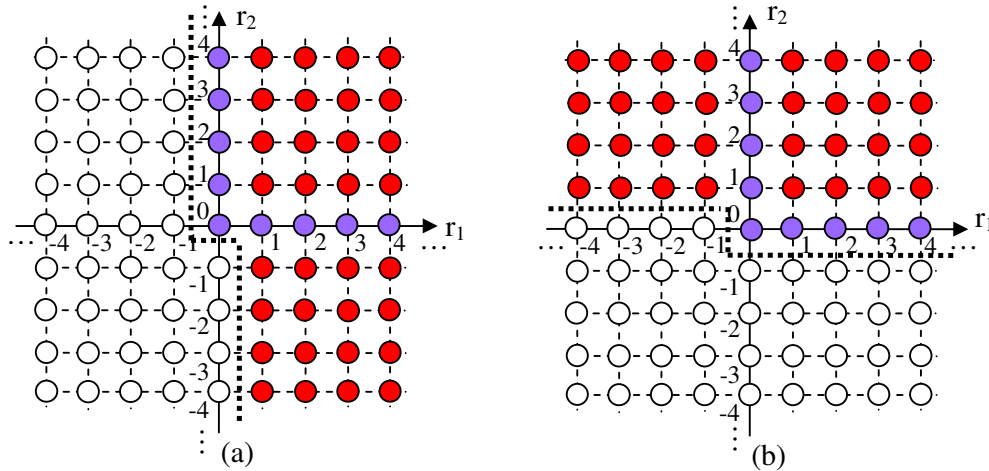
durumda karmaşık eşlenikler kendi aralarında aşağıdaki gibi toplanarak kosinüsler şeklinde ifade edilebilir,

$$x(t)^3 = \left( \begin{array}{l} 0.125(e^{j3\omega_1 t} + e^{-j3\omega_1 t}) + 0.75(e^{j2\omega_1 t} + e^{-j2\omega_1 t}) + 2.625(e^{j\omega_1 t} + e^{-j\omega_1 t}) \\ + 0.125(e^{j3\omega_2 t} + e^{-j3\omega_2 t}) + 0.75(e^{j2\omega_2 t} + e^{-j2\omega_2 t}) + 2.625(e^{j\omega_2 t} + e^{-j\omega_2 t}) \\ + 0.75(e^{j(\omega_1 + \omega_2)t} + e^{-j(\omega_1 + \omega_2)t}) + 0.75(e^{j(\omega_1 - \omega_2)t} + e^{-j(\omega_1 - \omega_2)t}) \\ + 0.375(e^{j(\omega_1 - 2\omega_2)t} + e^{-j(\omega_1 - 2\omega_2)t}) + 0.375(e^{j(\omega_1 + 2\omega_2)t} + e^{-j(\omega_1 + 2\omega_2)t}) \\ + 0.375(e^{j(2\omega_1 + \omega_2)t} + e^{-j(2\omega_1 + \omega_2)t}) + 0.375(e^{j(2\omega_1 - \omega_2)t} + e^{-j(2\omega_1 - \omega_2)t}) \end{array} \right) \quad (4.6)$$

Yukarıdaki karmaşık eşitlik kosinüsler cinsinden ifade edilirse aşağıdaki gibi yalnızca gerçek formdan oluşacak şekilde sadeleşir,

$$x(t)^3 = \left( \begin{array}{l} 4 + 5.5 \cos(\omega_1 t) + 1.5 \cos(2\omega_1 t) + 0.25 \cos(3\omega_1 t) \\ + 5.5 \cos(\omega_2 t) + 1.5 \cos(2\omega_2 t) + 0.25 \cos(3\omega_2 t) \\ + 1.5 \cos((\omega_1 + \omega_2)t) + 1.5 \cos((\omega_1 - \omega_2)t) \\ + 0.75 \cos((\omega_1 + 2\omega_2)t) + 0.75 \cos((\omega_1 - 2\omega_2)t) \\ + 0.75 \cos((2\omega_1 + \omega_2)t) + 0.75 \cos((2\omega_1 - \omega_2)t) \end{array} \right) \quad (4.7)$$

Denklem 4.7'de ortaya çıkan frekans bileşenleri Şekil 4.3-a ile örnek olarak verildiği gibi frekans katsayılarına ait düzlemin bir yarısından seçilmiş olur. Burada görülen koyu renkli daireler çıkışı ifade etmede kullanılan bileşenleri temsil etmektedir. Eksenler üzerinde bulunan bileşenler harmonikleri, diğerleri ise oluşan karışım frekanslarını gösterir.



Şekil 4.3. Frekans düzleminde çıkışı temsil eden bileşenlere ait örnek çarpanlar

Çıkış sinyalinin bileşenleri Şekil 4.3-b ile gösterildiği gibi de seçilebilir. Bunu sağlamak için Denklem 4.6'daki karmaşık eşlenik üstellerin işaretleri aşağıdaki gibi değiştirilerek çıkış sinyali yeniden düzenlenebilir.

$$\begin{aligned}
 6(e^{-j(\omega_1-\omega_2)t} + e^{j(\omega_1-\omega_2)t}) &\Rightarrow 6(e^{j(\omega_2-\omega_1)t} + e^{-j(\omega_2-\omega_1)t}) \\
 3(e^{-j(\omega_1-2\omega_2)t} + e^{j(\omega_1-2\omega_2)t}) &\Rightarrow 3(e^{j(2\omega_2-\omega_1)t} + e^{-j(2\omega_2-\omega_1)t}) \\
 3(e^{-j(2\omega_1-\omega_2)t} + e^{j(2\omega_1-\omega_2)t}) &\Rightarrow 3(e^{j(\omega_2-2\omega_1)t} + e^{-j(\omega_2-2\omega_1)t})
 \end{aligned} \tag{4.8}$$

Bu eşitliklerdeki değişiklikler göz önünde bulundurulduğunda sinyal tekrar düzenlenip kosinüsler cinsinden sadeleştirilirse aşağıdaki gibi ifade edilebilir,

$$x(t)^3 = \begin{pmatrix} 4 + 5.5 \cos(\omega_1 t) + 1.5 \cos(2\omega_1 t) + 0.25 \cos(3\omega_1 t) \\ + 5.5 \cos(\omega_2 t) + 1.5 \cos(2\omega_2 t) + 0.25 \cos(3\omega_2 t) \\ + 1.5 \cos((\omega_1 + \omega_2)t) + 1.5 \cos((\omega_2 - \omega_1)t) \\ + 0.75 \cos((\omega_2 + 2\omega_1)t) + 0.75 \cos((\omega_2 - 2\omega_1)t) \\ + 0.75 \cos((2\omega_2 + \omega_1)t) + 0.75 \cos((2\omega_2 - \omega_1)t) \end{pmatrix} \tag{4.9}$$

Böylece sinyal Denklem 4.7 ve 4.9 ile belirtildiği gibi fark frekanslarının işaretleri değiştirilerek çıkışı ifade etmek için kullanılabilir. Şekil 4.2'de iki bileşen için verilen bileşenlere ait frekans düzlemi düzlem teorik olarak sonsuza kadar uzanacağı

için, yöntemin uygulamasında bileşen adedi istenilen hassasiyet açısından önemsiz kabul edilebildiği bir noktada kesilerek belirlenir.

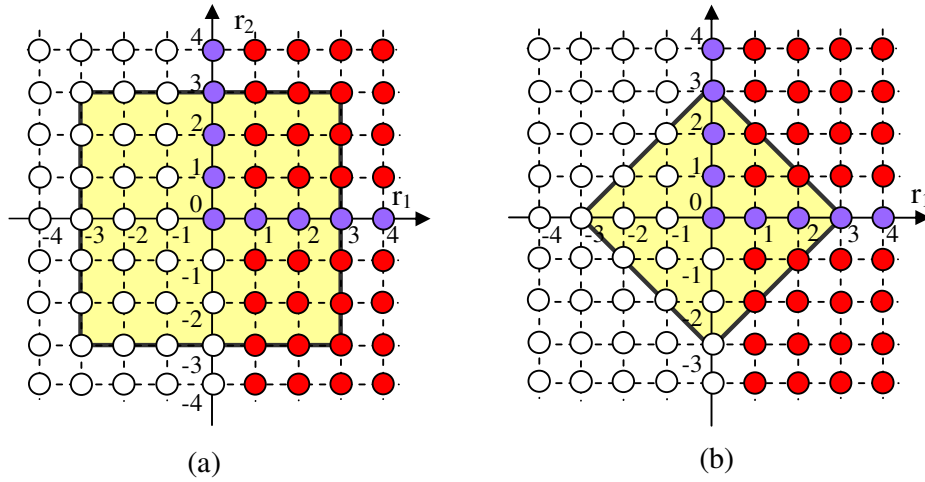
### 4.3. Frekans Bileşenlerinin Belirlenmesi

Yalnızca harmonik olarak ilişkili frekans bileşenlerinin kullanıldığı durumda analizin hassasiyeti seçilen harmonik sayısı ile ilişkilidir. Çok-tonlu giriş sinyalinin iki veya daha fazla harmonik olarak ilişkisiz bileşen içermesinden dolayı sınırlamada farklı kurallara ihtiyaç duyulur. Örneğin iki-tonlu giriş için Şekil 4.2’de verilen çıkış spektrumundan da görüldüğü gibi çıkış frekans bileşenleri ara modülasyon etkilerinden dolayı her bir bileşenin harmoniklerine ek olarak, temel frekanslarla harmonik olarak ilişkisiz frekans bileşenleri oluşmaktadır. Analizde kullanılacak frekans bileşenlerinin, harmonik olarak ilişkisiz durumdakine benzer şekilde belli bir noktada kesilmesi gerekir. Fakat frekans bileşenleri tek-tonlu durumdaki gibi girişe uygulanan temel harmoniğin katları olmadığı için belirleme aşamasında temel frekanslar ile karışım frekansları arasında düzgün bir dağılım sağlayacak şekilde kesilmelidir. Kutu sınırlama yönteminde her bir temel frekans bileşenine ait harmonik sayısı Denklem 4.4 incelendiğinde verilen bir  $R_{x_i}$  sınır değerine eşit veya küçüktür,

$$|r_1| \leq R_{x_1}, \dots, |r_\sigma| \leq R_{x_\sigma} \quad (4.10)$$

Denklem 4.4 formundaki çok-tonlu sinyallerin frekans bileşenlerini sınırlamak amacıyla uygulamada kutu ve elmas sınırlama yöntemleri kullanılmaktadır [71]. Şekil 4.3-a’da kutu sınırlama ve Şekil 4.3-b’de elmas sınırlama yöntemlerinin iki frekans bileşeni için görselleştirilmiş hali görülmektedir.





Şekil 4.4. İki harmonik olarak ilişkisiz frekansa sahip çıkış frekans bileşenlerinin seçimi: a) Kutu, b) Elmas sınırlama teknikleri

Elmas sınırlama tekniğinde ise frekans çarpanlarının mutlak değerlerinin toplamı yine açılımın derecesini belirten bir maksimum değer ile sınırlandırılır,

$$|r_1| + \dots + |r_\sigma| \leq R_b \quad (4.11)$$

Buna göre elmas sınırlama tekniği için çıkış sinyali aşağıdaki gibi genel bir sinyal formu ile gösterilebilir,

$$x(t) = \sum_{r_1=-R_{x_1}}^{R_{x_1}} \sum_{r_2=-R_{x_2}+|r_1|}^{R_{x_2}-|r_1|} \dots \sum_{r_\sigma=-R_{x_\sigma}+(|r_1|+\dots+|r_{\sigma-1}|)}^{R_{x_\sigma}-(|r_1|+\dots+|r_{\sigma-1}|)} \frac{A_{x_{r_1, \dots, r_\sigma}}}{2} e^{j((r_1\omega_1+\dots+r_\sigma\omega_\sigma)t+\phi_{r_1, \dots, r_\sigma})} \quad (4.12)$$

Örneğin  $R_{x_1} = R_{x_2} = 3$  seçildiğinde kutu sınırlama yöntemine göre analizde 25 adet frekans bileşeni kullanılmış olur. Bu durumda altıncı dereceye kadar bileşenler çıkış sinyali bileşenlerine dahil edilmiş olur. Elmas sınırlama yönteminde ise kutu sınırlama yönteminde kullanılan üçüncü derecenin üstündeki 12 adet eleman elenerek diğerine göre daha az karışım frekansları içerecek şekilde 13 adet frekans bileşeni ile sınırlama Şekil 4.3'e benzer şekilde gerçekleştirilmiş olur.

#### 4.4. Çok-Tonlu Sinyal Formu İçin Genelleştirilmiş Açılımlar

Giriş ve çıkış için çok-tonlu formda kabul edilen sinyal, Denklem 2.1 ile verilen sisteme uygulandığında oluşacak açılımların genel bir formda belirlenmesi gerekir. Bu ifadeler kombinasyonlar ve permütasyonlar cinsinden türetilerek önceki bölümde sunulan yöntemle benzer tarzda istenilen otomatikleştirilmiş algoritma elde edilebilir. Bu işlem istenilen bir frekans bileşeni için denge denklemi oluşturulurken kullanılan terimlerin belirlenmesini kolaylaştırır. Bunun için analizde düşünülen sistem formunun önce alt sınıfları olan giriş veya çıkış ve giriş-çıkış çarpım terimlerine ait açılımların incelenmesi gerekir. Böylece bu açılımlar kullanılarak, harmonik denge denklemleri giriş ve çıkış sinyal formlarının karmaşık sayı formundaki genlikleri ve sistemi tanımlayan model katsayıları cinsinden ifade edilebilir. Bununla birlikte yöntemin otomatikleştirilmesi için istenilen frekans bileşenine ait mümkün kombinasyon ve permütasyonları veren algoritmalara da ihtiyaç duyulur.

##### 4.4.1. Giriş veya çıkış sinyalleri için genelleştirilmiş açılımlar

Harmonik olarak ilişkili durumda olduğu gibi, Denklem 2.1 ile belirtilen sistem yapısının  $n$ . dereceden giriş veya çıkış terimini genel formda ifade eden doğrusal olmayan fonksiyona Denklem 4.4 ile tanımlanan sinyal formu uygulanır. Bu işlem, fonksiyonun açılımından elde edilecek mümkün harmonikler ve temel bileşenlerin karışımlarından oluşan ara modülasyonların genel bir formda sunulması açısından önemlidir,

$$\begin{aligned}
 F_n[x(t)] &= \prod_{i=1}^n D^{l_i} x(t) \\
 &= \prod_{i=1}^n D^{l_i} \left( \sum_{r_1=-R_{x_1}}^{R_{x_1}} \dots \sum_{r_\sigma=-R_{x_\sigma}}^{R_{x_\sigma}} \frac{A_{x_{r_1 \dots r_\sigma}}}{2} e^{j(r_1 \omega_1 + \dots + r_\sigma \omega_\sigma)t} \right) \\
 &= \sum_{r_{1,1}, r_{n,1}=-R_{x_1}}^{R_{x_1}} \dots \sum_{r_{\sigma,1}, r_{\sigma,n}=-R_{x_\sigma}}^{R_{x_\sigma}} \frac{1}{2^n} \prod_{i=1}^n A_{x_{r_{1,i}, \dots, r_{\sigma,i}}} j^{l_i} (r_{1,i} \omega_1 + \dots + r_{\sigma,i} \omega_\sigma)^{l_i} \\
 &\quad e^{j((r_{1,1} + \dots + r_{n,1}) \omega_1 + \dots + (r_{1,\sigma} + \dots + r_{n,\sigma}) \omega_\sigma)t}
 \end{aligned} \tag{4.13}$$

burada,  $x(t)$  genel formdaki giriş veya çıkış sinyalini temsil eder. Girişin sabit bir terim içerdiği kabul edilirse  $((2R_{x_1} + 1) \dots (2R_{x_\sigma} + 1))^n$  adet aramodülasyon oluşur, fakat bunların çoğu aynı frekans bileşenine katkıda bulunur. Çıkış frekansını ifade eden  $(r_{1,1} + \dots + r_{n,1})\omega_1 + \dots + (r_{1,\sigma} + \dots + r_{n,\sigma})\omega_\sigma$  temel frekanslara ait bileşenler ve katsayıları sırasıyla satır ve sütun vektörler olarak tanımlanabilir,

$$\boldsymbol{\omega} = [\omega_1, \dots, \omega_\sigma], \quad \mathbf{r}_i = [r_{1,i}, \dots, r_{\sigma,i}]^T \quad (4.14)$$

Çıkış frekansı bu vektörlerin çarpımının  $i=1, \dots, n$ . terimine kadar tekrarlanıp toplanmasıyla elde edilebilir,

$$\boldsymbol{\omega} \mathbf{r} = \sum_{i=1}^n \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}_i \quad (4.15)$$

Analizde kullanılan frekans bileşenleri harmonik olarak ilişkisiz temel bileşenleri içeren  $\boldsymbol{\omega}$  ve her birinin katkısını tanımlayan  $\mathbf{r}$  sütun vektörünün çarpımı ile tek tonlu duruma benzer şekilde ifade edilebilir. Denklem 4.13 incelendiğinde çıkış frekans bileşeninin  $r_{1,i}, \dots, r_{\sigma,i}$  çarpanlarıyla ilişkili olduğu görülür. Bu ifade, açılmadan ilgililenilen frekans bileşenlerinin seçilebilmesi için aşağıdaki gibi düzenlenebilir,

$$\begin{aligned} F_n[x(t)] &= \sum_{r_{1,1}=-R_{x_1}}^{R_{x_1}} \dots \sum_{r_{\sigma,1}=-R_{x_\sigma}}^{R_{x_\sigma}} \dots \sum_{r_{1,n}=-R_{x_1}}^{R_{x_1}} \dots \sum_{r_{\sigma,n}=-R_{x_\sigma}}^{R_{x_\sigma}} \frac{1}{2^n} \prod_{i=1}^n A_{x_{r_i}} j^{l_i} (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}_i)^{l_i} e^{j\boldsymbol{\omega} \mathbf{r} t} \\ &= \sum_{\substack{[R_{x_1} \dots R_{x_\sigma}] \\ [r_{1,1} \dots r_{\sigma,1}] = [-R_{x_1} \dots -R_{x_\sigma}]} \dots \sum_{\substack{[R_{x_1} \dots R_{x_\sigma}] \\ [r_{1,n} \dots r_{\sigma,n}] = [-R_{x_1} \dots -R_{x_\sigma}]} \frac{1}{2^n} \prod_{i=1}^n A_{x_{r_i}} j^{l_i} (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}_i)^{l_i} e^{j\boldsymbol{\omega} \mathbf{r} t} \quad (4.16) \end{aligned}$$

Kullanılan toplam operatörleri permütasyonlar ve kombinasyonlar cinsinden ifade edilerek daha sade bir şekle indirgenebilir,

$$F_n[x(t)] = \sum_{\substack{\{\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n\} \text{ dizisinin } \mathbf{R} \text{ den} \\ \text{seçilen tüm kombinasyonları}}} \sum_{\substack{\{\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n\} \text{ dizisinin} \\ \text{tüm farklı permütasyonları}}} \frac{1}{2^n} \prod_{i=1}^n A_{x_{r_i}} j^{l_i} (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}_i)^{l_i} e^{j\boldsymbol{\omega} \mathbf{r} t} \quad (4.17)$$

Burada  $\mathbf{r}_i$  vektörlerinin toplam operatörünün değerlendirilmesi sonucu alabileceği farklı değerler  $\mathbf{R}$  seti ile tanımlanmıştır,

$$\mathbf{R} = \left\{ \begin{bmatrix} v_{1,1} \\ \vdots \\ v_{\sigma,1} \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} v_{1,n_R} \\ \vdots \\ v_{\sigma,n_R} \end{bmatrix} \right\}, \quad \mathbf{R} = \sum_{r_{i,j}=-R_{n_1}}^{R_{n_1}} \dots \sum_{r_{\sigma,j}=-R_{n_\sigma}}^{R_{n_\sigma}} \quad (4.18)$$

Böylece Denklem 4.18 ile yalnızca ilgilenilen kombinasyonlar ve permütasyonlar cinsinden tanımlanması kolaylaşır. Kombinasyonlara ait farklı permütasyonların toplamı, elemanlar yer değiştirdiğinde aynı ifadeyi vermesi bakımından simetrik fonksiyon olarak tanımlanabilir. Bu yaklaşım giriş veya çıkışa ait terimlerin türev derecesinin aynı olduğu durumlarda benzer terimlerin tekrar üretilmesini engeller. Böylece doğrusal olmayan fonksiyona ait genelleştirilmiş açılım hesaplama tekniği açısından daha uygun bir formda ifade edilebilir,

$$F_n[x(t)] = \frac{1}{2^n} \sum_{\substack{\{\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n\} \text{ dizisinin } \mathbf{R}' \text{ den} \\ \text{seçilen tüm kombinasyonları}}} n_{\mathbf{r}}^* f_x^{sym}(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n) e^{j\omega \mathbf{r} t} \quad (4.19)$$

Buna göre her bir kombinasyona ait farklı permütasyonları içeren simetrik fonksiyon aşağıdaki gibi tanımlanabilir,

$$f_x^{sym}(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n) = \frac{1}{n_{\mathbf{r}}^*} \sum_{\substack{\{\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n\} \text{ dizisinin} \\ \text{tüm farklı permütasyonları}}} \prod_{i=1}^n A_{x_{r_i}} j^{l_i} (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}_i)^{l_i} \quad (4.20)$$

Doğrusal olmayan fonksiyonun açılımından elde edilen frekans bileşenlerinin kombinasyonları oluşabilecek farklı frekans bileşenlerini verir. Kombinasyonları oluşturan vektörlere ait ayrık permütasyon sayısı ise  $n_{\mathbf{r}}^*$  ile tanımlanmış olup Denklem 3.9 ile belirtildiği gibi hesaplanır.

#### 4.4.2. Giriş-çıkış çarpım terimlerini kapsayan doğrusal olmayan fonksiyon

Denklem 4.20 ile verilen ifade, Denklem 2.1 ile verilen doğrusal olmayan diferansiyel denklemin yalnızca giriş veya çıkış terimlerini kapsar. Bu eksikliği gidermek için bir önceki bölümde tanıtilen algoritmaya benzer şekilde hem giriş hem de çıkışı kapsayan yapıya dönüştürülebilir. Analizde kullanılan genel formda tanımlanmış sinyal giriş ve çıkışı tanımlayan doğrusal olmayan fonksiyonda yerine konulup benzer şekilde düzenlenirse açılım aşağıdaki gibi elde edilir,

$$F_{p,q}[y(t),u(t)] = \prod_{i=1}^p D^{l_i} y(t) \prod_{i=1}^{p+q} D^{l_i} u(t) \left. \begin{aligned} &= \frac{1}{2^m} \sum_{\substack{\{\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_p\} \\ \text{dizisinin } \mathbf{R}' \text{ den seçilen} \\ \text{tüm kombinasyonları}}} \sum_{\substack{\{\mathbf{r}_{p+1}, \dots, \mathbf{r}_{p+q}\} \\ \text{dizisinin } \mathbf{R}' \text{ den seçilen} \\ \text{tüm kombinasyonları}}} n_{\mathbf{r}}^* f_{yu}^{sym}(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_{p+q}) e^{j\omega \mathbf{r} t} \end{aligned} \right\} \quad (4.21)$$

burada simetrik fonksiyon aşağıdaki gibi tanımlanmıştır,

$$f_{yu}^{sym}(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_{p+q}) = \frac{1}{n_{\mathbf{r}}^*} \left. \begin{aligned} &\sum_{\substack{\{\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_p\} \text{ dizisinin} \\ \text{bütün farklı permütasyonları}}} \sum_{\substack{\{\mathbf{r}_{p+1}, \dots, \mathbf{r}_{p+q}\} \text{ dizisinin} \\ \text{bütün farklı permütasyonları}}} \\ &\prod_{i=1}^p A_{y_{r_i}} j^{l_i}(\omega \cdot \mathbf{r}_i)^{l_i} \prod_{i=p+1}^{p+q} A_{u_{r_i}} j^{l_i}(\omega \cdot \mathbf{r}_i)^{l_i} \end{aligned} \right\} \quad (4.22)$$

Giriş ve çıkış tanımlayan simetrik fonksiyon genel bir yapıyı temsil eder. Genel olarak karşılaşılan özel durumlar için bu ifade daha basit formlara indirgenebilir.

$$f_x^{sym}(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n) = \frac{1}{n_{\mathbf{r}}^*} \prod_{i=1}^n A_{x_{r_i}} \sum_{\substack{\{\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_m\} \text{ dizisinin} \\ \text{bütün farklı permütasyonları}}} \prod_{i=1}^n j^{l_i}(\omega \cdot \mathbf{r}_i)^{l_i} \quad (4.23)$$

Yukarıda yapılan sadeleştirme sonucu karmaşık sayı formundaki genlik çarpanları, açılımı gerçekleştirilen denklem teriminin sadece girişe veya çıkışa ait olduğu durumlarda çarpım sonucu tüm permütasyonlarda aynı değeri üreteceği için toplam operatörünün önüne alınabilir. Eğer terim, sadece girişe veya çıkışa ait ve aynı türev dereceli çarpımlardan oluşuyorsa permütasyonların hepsi aynı sonucu vereceği için bir tanesinin hesaplanması yeterlidir.

$$f_x^{sym}(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n) = \prod_{i=1}^n A_{x_{r_i}} j^{l_i} (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}_i)^{l_i} \quad (4.24)$$

Elde edilen sonuç algoritmada  $n_r^*$  ile çarpılarak permütasyonlar hesaba katılmış olur. Eğer terim türevsel ifade içermiyorsa Denklem 4.23 aşağıdaki gibi basitleşir,

$$f_x^{sym}(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n) = \prod_{i=1}^n A_{x_{r_i}} \quad (4.25)$$

Böylece simetrik fonksiyon karmaşık  $j$  çarpanı ifadeden çıkartılarak bileşenlere ait genliklerin çarpımları şeklinde ifade edilir.

#### 4.5. Çok-Tonlu Harmonik Denge Algoritması

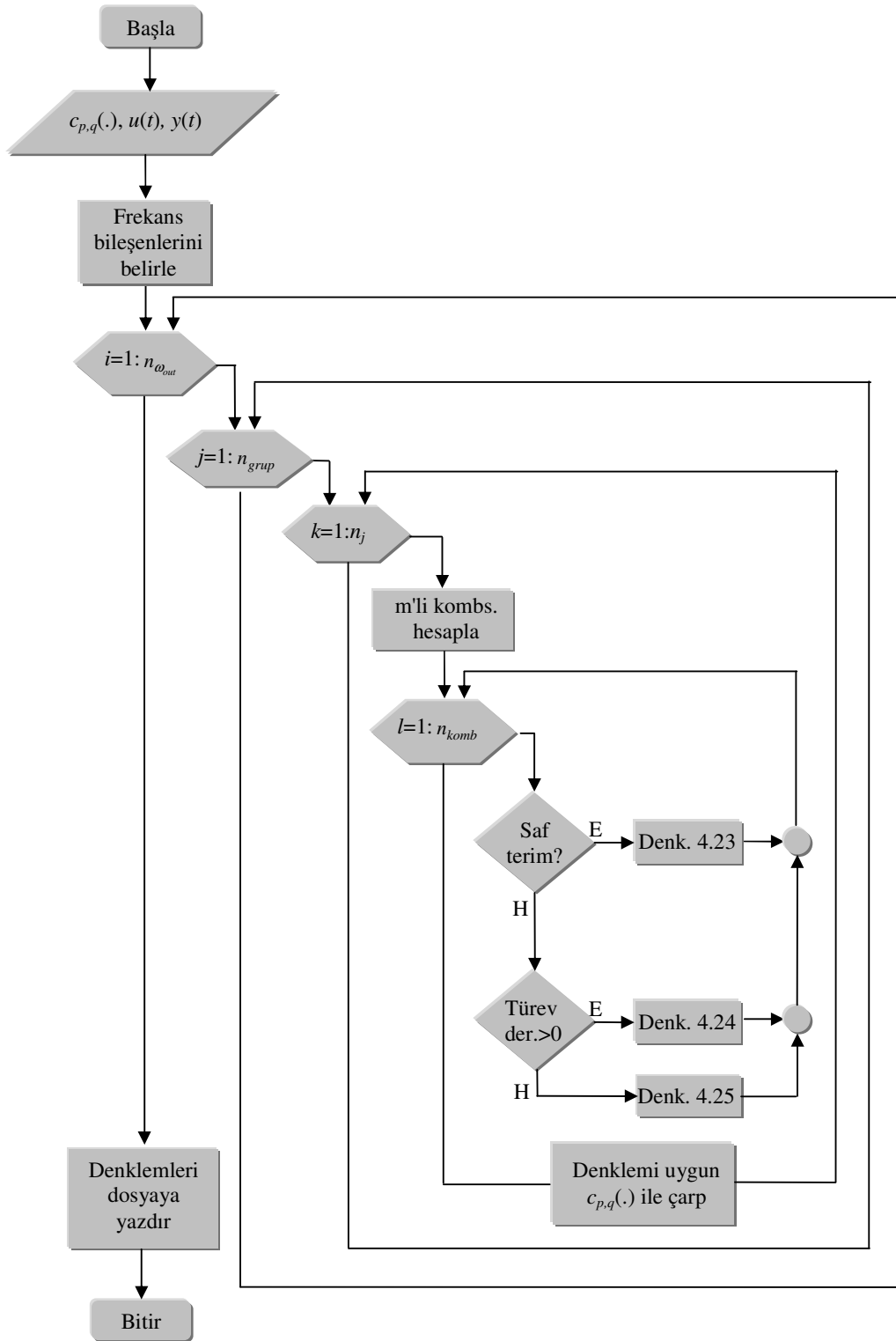
Denklem 4.23 ile belirtilen doğrusal olmayan fonksiyona ait genelleştirilmiş açılım, Denklem 2.1 ile belirtilen genel diferansiyel denklemde giriş ve çıkış formlarının yerine konularak, istenilen bir  $\omega_o = \boldsymbol{\omega} \mathbf{r}$  çıkış frekansı için harmonik denge denklemi sembolik formda ifade edilebilir,

$$\sum_{m=1}^M \sum_{p=0}^m \frac{A^q}{2^m} \sum_{l_1, \dots, l_{p+q}=0}^L C_{p,q} (l_1, \dots, l_{p+q}) \sum_{\substack{\{\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_m\} \text{ dizisinin} \\ \sum \mathbf{r}_i = \mathbf{r} \text{ şartıyla } \mathbf{R} \text{ setinden} \\ \text{kombinasyonları}}} n_r^* f_{yu}^{sym}(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_m) e^{j\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}} = 0 \quad (4.26)$$

Böylece yalnızca toplamları  $\mathbf{r}$  olan kombinasyonlar üretilerek uygun simetrik fonksiyonların hesaplanmasıyla ilgilenilen frekans için denge denklemine ait bileşenler elde edilir. Her bir çıkış harmoniği için bir harmonik denge denklemi oluşturulur ve ortaya çıkan denklem takımları sayısal çözümlene yöntemleri kullanılarak uygulanan parametreler için bilinmeyenler tespit edilir. Denklemlerin elde edilmesi için gerekli işlemlere ait akış diyagramı Şekil. 4.4'de sade bir şekilde verilmiştir. Bununla birlikte algoritmanın gerçekleştirilmesinde işlemlerin gerçekleştirileceği programlama dilinin göz önünde bulundurulması gerekir. Denklemlerin yazdırılması bütün hesaplamalar gerçekleştirildikten sonra olabileceği gibi satır veya her hesaplama sonunda da olabilir. Geliştirilen algoritma yapısının

mevcut hali ile bir programlama diline kodlanması, istenilen frekans bileşeni için oluşabilecek kombinasyonların hesaplanarak dışardan girilmesiyle veya bir program aracılığı ile mümkündür.

Çok-tonlu analizde her bir temel frekans bileşenine ait harmoniklerin yanında karışım bileşenlerinin de analize katılması, kabul edilen frekans setinden açılımda ilgilenilen frekanstaki bileşenlerin el ile belirlenmesi çok daha güçtür. Giriş temel frekansları ve hesaplanan terimlerin derecesine bağlı olarak artan kombinasyonların sayısının yüzlerce veya binlerce olabildiği çok-frekans uyartımlı analizde bu oldukça zaman alıcı ve hatasız gerçekleştirilmesi zor bir işlemdir. Örneğin iki tonlu bir analizde  $\omega_o = \omega_1$  çıkış frekansında  $R=2$ , için denge denklemlerinin oluşturulmasında 60 adet kombinasyon gerekir. Harmonik olarak ilişkili durumda kullanılan Denklem 3.34 ile tanımlanmış algoritma çok tonlu durumda geçersiz kaldığı için, vektörel formdaki kombinasyonları verilen girdilere göre otomatik olarak elde eden bir algoritmanın geliştirilmesinin gerekliliği ortaya çıkar.



Şekil 4.5. Harmonik denge algoritma akış diyagramı



#### 4.6. Çok-Tonlu Durum İçin Kombinasyonların Üretilmesi

Analizde kullanılan temel frekans bileşenlerine ait katsayılar sütun vektörlerden oluşan  $\mathbf{R}$  ile tanımlanmıştır. Verilen bir çıkış frekansı için bu diziden uygun kombinasyonların seçilmesi her bir temel bileşene ait kombinasyonların satırlar halinde aşamalı olarak üretilmesiyle sağlanabilir. Bu amaçla aranan vektörlere ait kombinasyonlar  $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_m$  aşağıdaki gibi girişi ve çıkışı da kapsayacak katsayılardan oluşan bir  $R^*$  matrisi olarak tanımlanabilir,

$$R^* = [R_y^* : R_u^*] = \begin{bmatrix} r_{1,1} & \cdots & r_{1,p} & r_{1,p+1} & \cdots & r_{1,p+q} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ r_{\sigma,1} & \cdots & r_{\sigma,q} & r_{\sigma,q+1} & \cdots & r_{\sigma,p+q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{1,1} & \cdots & r_{1,m} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ r_{\sigma,1} & \cdots & r_{\sigma,m} \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

Matrisin her bir satırı harmonik olarak ilişkisiz temel bir bileşeni ve sahip olduğu sütun sayısı da harmonik açılımın gerçekleştirildiği elemanın derecesini göstermektedir. Analizde kullanılacak kombinasyonları oluşturan  $R^*$  matrisleri bir  $\mathbf{A}_{R^*}$  üç boyutlu dizisi olarak tanımlanabilir,

$$\mathbf{A}_{R^*} = \left\{ \begin{bmatrix} r_{1,1,1} & \cdots & r_{1,m,1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ r_{\sigma,1,1} & \cdots & r_{\sigma,m,1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} r_{1,1,2} & \cdots & r_{1,m,2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ r_{\sigma,1,2} & \cdots & r_{\sigma,m,2} \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} r_{1,1,n_A} & \cdots & r_{1,m,n_A} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ r_{\sigma,1,n_A} & \cdots & r_{\sigma,m,n_A} \end{bmatrix} \right\} \quad (4.28)$$

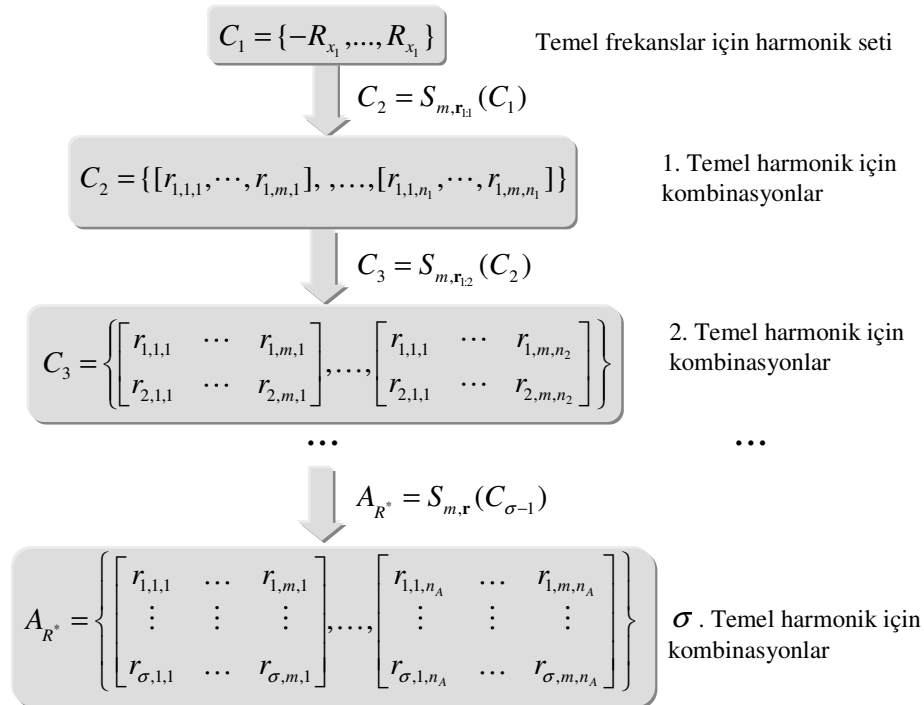
Kombinasyon matrisi adedini belirten  $n_A$  değişkeni, istenilen çıkış frekans bileşeni,  $\mathbf{R}$  harmonik çarpanlar seti ve hesaplanan terimin derecesi ile ilişkili bir parametredir. Burada her bir kombinasyon  $R^*$  formunda tanımlanırken, bu matrisin sütunları analizde kabul edilen  $R_{x_1}, \dots, R_{x_\sigma}$  değerlerinin Denklem 4.20 de kullanılması sonucu elde edilen  $\mathbf{R}$  harmonik katsayılar setinden seçilir. Harmonik olarak ilişkili duruma benzer şekilde harmonik katsayılar matrisinin kombinasyonlarını veren aşağıdaki formda bir fonksiyon tanımlaması yapılabilir.

$$S_{m,r}(C) = \sum_{\substack{[\mathbf{r}_1; \dots; \mathbf{r}_m] \text{ matrisinin} \\ |\sum \mathbf{r}_j = \mathbf{r} \text{ şartıyla } \mathbf{R} \text{ setinden} \\ \text{kombinasyonları}}} [\mathbf{r}_1; \mathbf{r}_2 \dots \mathbf{r}_m] \quad (4.29)$$

Elemanları  $\mathbf{R}$  setinden seçilen  $[\mathbf{r}_1; \mathbf{r}_2 \dots \mathbf{r}_m]$  kombinasyonları harmonik çarpanlar matrisi  $R^*$ 'yi tanımlar. Çıkış frekans bileşeni  $\mathbf{r}$  kombinasyonların elde edildiği frekansa ait harmonik olarak ilişkisiz temel frekans bileşenlerinin toplam katkılarını tanımlayan çarpan değerlerini içermektedir. Burada  $\mathbf{r}$  sütun vektörü formundadır,

$$\mathbf{r} = [r_1' \dots r_\sigma']^T \quad (4.30)$$

Harmonik çarpanlardan oluşan matrisin verilen bir çıkış bileşeni için olası kombinasyonları aşamalı bir şekilde elde edilebilir. Öncelikle çıkış frekansını veren frekans bileşenlerinden biri için açılım harmonik olarak ilişkili durumdakine benzer şekilde gerçekleştirilir. Böylece harmonik katsayılar matrisinin ilk satırı için kombinasyonlar elde edilir. Bunlar bir sonraki satırda diğer bir temel frekans bileşeni için matrisin ikinci satır elemanları belirlenirken kullanılır.



Şekil 4.6. Harmonik çarpanlar matrisinin elde edilmiş aşamaları

Şekil 4.6’da görüldüğü gibi daha sonraki satırlarda da elemanlar belirlenirken benzer şekilde kendinden önce elde edilen kombinasyonlar göz önünde bulundurulur. Örneğin önceki bir kombinasyona ait elde edilen satırlar sonraki satırda birden fazla kombinasyonda kullanılabilir. Buna göre, Denklem 4.29 ile prensip olarak verilmiş işlem daha açık bir şekilde tekrar düzenlenebilir.

$$S_{m,r}(C) = \sum_{k=1}^{n_C} \sum_{r_{n_r,1,k}=r_{1\min}}^{r_{1\max}} \left\{ \begin{array}{c} r_{1,1,k} \\ \vdots \\ r_{n_r,1,k} \end{array} \right\}, \sum_{r_{n_r,2,k}=r_{2\min}}^{r_{2\max}} \left( \begin{array}{c} r_{1,2,k} \\ \vdots \\ r_{n_r,2,k} \end{array} \right), \dots, \left( \begin{array}{c} r_{1,m,k} \\ \vdots \\ r_{n_r,m,k} \end{array} \right) \right\} \quad (4.31)$$

Burada üç boyutlu olarak uygulanan  $C$  dizisinin içerdiği matris adedi  $n_c$  ile, satır sayısı ise giriş frekans adedi  $n_r$  ile tanımlanmaktadır. İlk temel frekans için bileşenler üretilirken  $C$  dizisi  $\{-R_{x_1}, \dots, R_{x_1}\}$  seti olarak seçilir ve dizi satır vektörü formunda olduğu için  $n_C=1$ ’dir. Bu durumda algoritma harmonik olarak ilişkili durumdakine benzer şekilde çalışır.

$$S_{m,r}(C) = \sum_{r_{n_r,1,k}=r_{1\min}}^{r_{1\max}} \left\{ r_{1,1,1}, \sum_{r_{n_r,1,k}=r_{2\min}}^{r_{2\max}} \{r_{1,2,1}, \dots, r_{1,m,1}\} \right\} \quad (4.32)$$

Bu ifade sonucunda elde edilen üç boyutlu formdaki dizi ilk harmonik bileşen için kombinasyonlar içerir,

$$A_{R^*} = \{[r_{1,1,1}, \dots, r_{1,m,1}], \dots, [r_{1,1,n_1}, \dots, r_{1,m,n_1}]\} \quad (4.33)$$

Bu kombinasyonlar ikinci frekans bileşenine ait olan ikinci satırdaki elemanların üretilmesinde kullanılmak üzere  $C^*$ ’ye eşitlenerek tekrar algoritmaya uygulanabilir. Bu durumda algoritmadan çıktısı olarak iki satır ve  $m$  sütun boyutlarında  $n_2$  adet matris den oluşan yeni bir dizi elde edilir,

$$A_{R^*} = \left\{ \begin{array}{ccc} r_{1,1,1} & \cdots & r_{1,m,1} \\ r_{2,1,1} & \cdots & r_{2,m,1} \end{array} \right\}, \dots, \left\{ \begin{array}{ccc} r_{1,1,1} & \cdots & r_{1,m,n_2} \\ r_{2,1,1} & \cdots & r_{2,m,n_2} \end{array} \right\} \quad (4.34)$$

Benzer şekilde  $\sigma$ . temel frekans bileşenine kadar elde edilen sonuçlar bir sonraki frekans bileşeninin elde edilmesinde kullanılmak üzere algoritmaya uygulanır. Bu işlemler için,  $C$  vektörü aşağıdaki gibi genel bir yapıda ifade edilebilir,

$$C = \begin{cases} [-R_{x_1}, \dots, R_{x_1}] & n_r = 1 \\ \left\{ \left[ \begin{array}{ccc} r_{1,1,1} & \dots & r_{1,m,1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ r_{n_r-1,1,1} & \dots & r_{n_r-1,m,1} \end{array} \right], \dots, \left[ \begin{array}{ccc} r_{1,1,n_c} & \dots & r_{1,m,n_c} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ r_{n_r-1,1,n_c} & \dots & r_{n_r-1,m,n_c} \end{array} \right] \right\} & n_r = \{2, \dots, \sigma\} \end{cases} \quad (4.35)$$

Harmonik olarak ilişkili durumdaki gibi harmonik çarpanlar matrisine ait kombinasyonların üretilmesi için, matris elemanlarının değişim aralıklarının belirlenmesi gerekir. Bu işlem permütasyonları önleyen bazı kurallara göre minimum ve maksimum değerlerin belirlenmesi ile gerçekleştirilir. İlk satırda minimum değer önceki bölümde bahsedilen harmonik olarak ilişkili durumdakine benzer şekilde tespit edilebilir.

$$r_{i_{\min}} = \max(-R_{x_{n_r}}, r_{n_r} - (m-1) \times R_{x_{n_r}}) \quad (4.36)$$

İlk temel bileşen için  $r_1'$  şartını sağlayan kombinasyonlar üretildikten sonra bunlar referans alınarak ikinci temel bileşen için  $r_2'$  şartını sağlayan kombinasyonlar üretilir. Bu işlem son temel bileşene ait  $r_\sigma'$  çarpanı için gerçekleştirilene kadar devam ettirilir. Bu aşamada minimum değer belirlenirken diğer bir kontrol edilmesi gereken durum ise işlemin gerçekleştirildiği  $r_{:,i,k}$  sütunun, önceki  $r_{:,i-1,k}$  sütunu ile aynı olup olmadığıdır. Eğer aynı ise ve sınırları belirlenen elemanın aldığı minimum değer bir öncekinden büyük veya eşit olması kombinasyonlara ait permütasyonların önlenmesi bakımından önemlidir.

$$r_{i_{\min}} = \max(r_{n_r, i-1, k}, r_{n_r} - (m-1)R_{x_{n_r}}) \quad (4.37)$$

Diğer durumlarda Denklem 4.37 minimum değer bulunmasında kullanılır. Yani ilk satırın elemanlarının hesaplandığı  $n_r = 1$  veya önceki sütun ile hesaplanan sütunun

aynı olmadığı durumlarda kullanılabilir. Böylece minimum değer genel olarak aşağıdaki gibi ifade edilebilir,

$$r_{i_{\min}} = \begin{cases} \text{maks}(-R_{x_{n_r}}, r_{n_r}' - (m-1)R_{x_{n_r}}) & (r_{:,i-1,k} \neq r_{:,i,k}) \vee (n_r = 1) \\ \text{maks}(r_{n_r, i-1, k}, r_{n_r}' - (m-1)R_{x_{n_r}}) & (r_{:,i-1,k} = r_{:,i,k}) \wedge (r_{n_r, i-1, k} \leq r_{n_r, i, k}) \wedge (n_r > 1) \end{cases} \quad (4.38)$$

Maksimum değer belirlenmesinde de ilk satır ve daha sonrakiler için olmak üzere iki durum söz konusudur. İlk satırda, yani  $n_r = 1$  durumu için, harmonik olarak ilişkili formdakine benzer tarzda bulunabilir,

$$r_{i_{\max}} = \text{taban}(r_{n_r}' / m) \quad (4.39)$$

Satırdaki bir elemana ait maksimum değer hesaplanırken, sonraki elemanların alabileceği minimum değerlerin toplamının hesaplanması gerekir. Böylece  $r_{n_r}'$  değişkeninin değerinden çıkartıldığında maksimum değer hesaplanmış olur.

$$r_{i_{\max}} = r_{n_r}' - (-R_{x_{n_r}}(m-1)) \quad (4.40)$$

Ardışıl olarak  $n_s$  adet aynı sütunların bulunması durumunda permütasyonları önlemek için aşağıdaki gibi düzenlenebilir,

$$r_{i_{\max}} = \text{taban}((r_{n_r}' + R_{x_{n_r}}(m - n_s)) / n_s) \quad (4.41)$$

Bu ifade aynı elemanın bulunmadığı durumu ifade eden  $n_s = 1$  için Denklem 4.41'e ve işlem yapılmakta olan elman ile birlikte  $m$  adet elemanın aynı olduğu  $n_s = m$  durumu için Denklem 4.40 olarak sadeleşir. Söz konusu durumlar göz önünde bulundurularak maksimum değer aşağıdaki gibi ifade edilebilir,

$$r_{i_{\max}} = \begin{cases} \text{taban}(r_1' / m) & n_r = 1 \\ \text{taban}(r_{n_r}' - (R_{x_{n_r}}(m - n_s)) / n_s) & n_r > 1 \end{cases} \quad (4.42)$$

Minimum ve maksimum değerler belirlendiğine göre Denklem 4.33 düzenlenerek özinyelemeli formda aşağıdaki gibi ifade edilebilir,

$$S_{m,r}(C) = \sum_{k=1}^{n_c} \sum_{r_{n_r+1,k}=r_{\min}}^{r_{\max}} \left\{ \begin{bmatrix} r_{1,1,k} \\ \vdots \\ r_{n_r,1,k} \end{bmatrix}, S_{m-1,r_n} \left( \begin{bmatrix} r_{1,2,k} & \cdots & r_{1,m,k} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ r_{n_r-1,2,k} & \cdots & r_{n_r-1,m,k} \end{bmatrix} \right) \right\} \quad (4.43)$$

Böylece kombinasyonlar dizisi, Denklem (4.42) kullanılarak aşağıdaki gibi ifade edilebilir,

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{A}_{R_i^*} &= \sum_{i=1}^{\beta} S_{m,r_{i^*}}(C) \\ C &= \begin{cases} [-R_d, \dots, R_d] & i=1 \\ \mathbf{A}_{R_{i-1}^*} & i>1 \end{cases} \text{ ve } r_{i^*}' = [r_1', \dots, r_i']^T \end{aligned} \right\} \quad (4.44)$$

$C$  ile tanımlanan ifadeye ilk anda harmonik olarak ilişkili durumdaki bileşenler uygulanır. Daha öncede belirtildiği gibi bunun sonucunda elde edilen kombinasyonlar ikinci satırı elde etmek için fonksiyona tekrar uygulanır. Bu işlem uygulanan  $\sigma$  adet harmonik olarak ilişkisiz frekans bileşeni için bir satır oluşturulana kadar devam eder. Sonuç olarak Denklem 4.28 ile verilen  $\sigma \times m$  boyutlu matrislerden oluşan dizi elde edilir. Burada  $\mathbf{A}_{R_{i-1}^*}$  bir önceki frekans bileşeni için üretilen kombinasyonları tanımlar. Geliştirilen algoritma ile hem harmonik olarak ilişkili hem de ilişkisiz durumlar için kombinasyonlar üretilebilir.

#### 4.7. Çok-Tonlu Durum İçin Permütasyonların Üretilmesi

Simetrik fonksiyonların hesabı gerçekleştirilirken basit terimlerde tek-tonlu durumda da karşılaşıldığı gibi, kombinasyonlara ait permütasyonlar aynı ifadeyi verdiği için hesaplanması gerekmez. Bunun yerine permütasyon adedini belirten  $n_r^*$  katsayısı ile çarpılarak simetrik fonksiyon hesaplanır. Diğer terimler için simetrik fonksiyonların hesabında permütasyonların belirlenmesine ihtiyaç duyulur. Bu işlem özinyelemeli bir algoritma formu ile basitçe hesaplanabilir,

$$P_n(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n) = \sum_{i=1}^n \{ \mathbf{r}_i, P_{n-1}(\mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n) \} \quad (4.45)$$

Başlangıçta  $P_{n-1}(\cdot)$  fonksiyonunun giriş değişkenleri  $\{\mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$  aynı zamanda  $P_n(\cdot)$  fonksiyonuna uygulanan  $\{\mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n\}$  olarak seçilir. Bundan sonraki iterasyonlarda  $i = \{2, \dots, n\}$  için  $\mathbf{r}_i \neq \mathbf{r}_{i-1}$  durumu hariç  $\mathbf{v}_i = \mathbf{r}_i$  olarak alınır.

#### 4.8. Örnek Uygulama

Geliştirilen yöntemin kullanımında gerçekleştirilen işlemleri açık bir örnek üzerinde sunmadan önce işlem basamakları maddeler halinde aşağıdaki gibi ifade edilebilir;

- i. Denklemi tanımlayan model katsayıları Denklem 2.1'e göre elde edilir.
- ii. Sisteme uygulanan giriş sinyali tipi belirlenir.
- iii. Giriş frekans bileşenlerine bağlı olarak çıkış bileşenleri analizde istenilen hassasiyete ve istenilen dereceye bağlı olarak seçilir.
- iv. Sistemi tanımlayan diferansiyel denklemin terimleri doğrusal olmama derecelerine bağlı olarak gruplandırılır.
- v. Çıkış frekans bileşenleri setinden denge denklemini hesaplamak üzere frekans bileşenlerinden biri seçilir.
  - a. Seçilen gruptaki terimler için frekans bileşenini sağlayan bütün kombinasyonlar Denklem 4.44 ile üretilir.
  - b. Her bir grup terimi için simetrik fonksiyonlar elde edilen kombinasyonlar kullanılarak üretilir.  $n_i^*$  çarpanı hesaplanarak basit terimler haricindekiler için permütasyonlar Denklem 4.45 ile elde edilir. Sıradaki grup terim için (a) basamağından devam edilir.
- vi. Harmonik denge denklemi Denklem 4.26 ifadesine göre elde edilir.
- vii. Bütün frekans bileşenleri tamamlanana kadar v. basamak tekrarlanır.

Geliştirilen yöntemin bir uygulaması olarak, biri sertlikte diğeri sönümde olmak üzere iki adet doğrusal olmayan terim içeren yapı olarak Denklem 2.1 ile belirtilen forma sahip Duffing-Van der Pol denklemini kullanalım,

$$\ddot{y}(t) + \mu \dot{y}(t) + d_2 y(t)^2 \dot{y}(t) + \omega_n^2 y(t) + \alpha_3 y(t)^3 = u(t) \quad (4.46)$$

Buna göre, Denklem 2.1 ile eşitlendiğinde modeli tanımlayan katsayılar aşağıdaki gibi belirlenir,

$$\begin{aligned} c_{1,0}(2) &= 1, & c_{3,0}(0,0,1) &= d_2, & c_{1,0}(1) &= \mu, & c_{3,0}(0,0,0) &= \alpha_3 \\ c_{1,0}(0) &= \omega_n^2, & c_{0,1}(0) &= -1, & \text{diğer durumlar } & c_{p,q} &= 0 \end{aligned} \quad (4.47)$$

Yöntem çok-tonlu giriş sinyali için geliştirildiğine göre bu duruma yönelik en temel örnek iki-tonlu sinyal için uygulanabilir. Bunun yanında sabit bir bileşenin de kullanıldığı sinyal aşağıdaki gibi  $\omega_1$  ve  $\omega_2$  ile tanımlanan harmonik olarak ilişkisiz frekans bileşenlerini içerecek şekilde kabul edilebilir,

$$u(t) = a_{u_0} + a_{u_{10}} \cos(\omega_1 + \phi_{u_{10}}) + a_{u_{01}} \cos(\omega_2 + \phi_{u_{01}}) \quad (4.48)$$

Böylece çıkışta kabul edilecek frekans bileşenleri, Denklem 4.4 formunda, uygulanan harmonik olarak ilişkisiz iki frekans bileşeninin harmoniklerine ek olarak, karışım frekansları da içerecek şekilde aşağıdaki gibi tanımlanabilir,

$$x(t) = \sum_{r_1=-2}^2 \sum_{r_2=-2}^2 \frac{A_{x_{r_1,r_2}}}{2} e^{j((r_1\omega_1+r_2\omega_2)t+\phi_{r_1,r_2})} \quad (4.49)$$

Denklem 4.49'nin açılımından da görülebileceği gibi denge denklemleri oluşturulurken  $R_{x_1} = R_{x_1} = 2$  seçilerek kutu sınırlama ile kombinasyonların elde edilmesinde kullanılacak katsayılar seti aşağıdaki gibidir,

$$\mathbf{R} = \left\{ \begin{array}{l} \left[ \begin{array}{c} -2 \\ -2 \end{array} \right], \left[ \begin{array}{c} -2 \\ -1 \end{array} \right], \left[ \begin{array}{c} -2 \\ 0 \end{array} \right], \left[ \begin{array}{c} -2 \\ 1 \end{array} \right], \left[ \begin{array}{c} -2 \\ 2 \end{array} \right], \left[ \begin{array}{c} -1 \\ -2 \end{array} \right], \left[ \begin{array}{c} -1 \\ -1 \end{array} \right], \left[ \begin{array}{c} -1 \\ 0 \end{array} \right], \left[ \begin{array}{c} -1 \\ 1 \end{array} \right], \left[ \begin{array}{c} -1 \\ 2 \end{array} \right], \left[ \begin{array}{c} 0 \\ -2 \end{array} \right], \\ \left[ \begin{array}{c} 0 \\ -1 \end{array} \right], \left[ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \right], \left[ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} \right], \left[ \begin{array}{c} 0 \\ 2 \end{array} \right], \left[ \begin{array}{c} 1 \\ -2 \end{array} \right], \left[ \begin{array}{c} 1 \\ -1 \end{array} \right], \left[ \begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} \right], \left[ \begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} \right], \left[ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} \right], \left[ \begin{array}{c} 2 \\ -2 \end{array} \right], \left[ \begin{array}{c} 2 \\ -1 \end{array} \right], \left[ \begin{array}{c} 2 \\ 0 \end{array} \right], \left[ \begin{array}{c} 2 \\ 1 \end{array} \right], \left[ \begin{array}{c} 2 \\ 2 \end{array} \right] \end{array} \right\} \quad (4.50)$$



Dikkat edilirse  $\mathbf{R}$  seti, frekans bileşenlerinin karmaşık eşleniklerini de içermektedir. Bundan dolayı, çıkış değişkenlerini temsil eden harmonik çarpanlar, yukarıdaki setin gerçek bileşenlerini tanımlayan katsayılar kullanılarak elde edilir.

$$\mathbf{R}_o = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \right\} \quad (4.51)$$

Denge denklemlerinin elde edileceği çıkış bileşenlerini veren katsayılar ait  $\mathbf{R}_o$  seti göz önünde bulundurulduğunda, analizde kabul edilen bileşenler, harmonikler ve karışım frekanslar olmak üzere temel bileşenler ve katsayılar cinsinden Tablo 4.1'de sıralanmıştır. Böylece her bir frekans bileşeni için bir tane olmak üzere toplam 13 adet denge denkleminin oluşturulması gerekir. Denklem 4.49'dan, analizde çıkışı temsil eden sinyal formu kosinüsler cinsinden bilinmeyen genlik ve faz bileşenleriyle birlikte aşağıdaki gibi ifade edilebilir,

$$y(t) = a_{y_{0,0}} + a_{y_{1,0}} \cos(\omega_1 t + \phi_{y_{1,0}}) + a_{y_{2,0}} \cos(2\omega_1 t + \phi_{y_{2,0}}) \\ + a_{y_{0,1}} \cos(\omega_2 t + \phi_{y_{0,1}}) + a_{y_{0,2}} \cos(2\omega_2 t + \phi_{y_{0,2}}) \\ + a_{y_{1,1}} \cos((\omega_1 + \omega_2)t + \phi_{y_{1,1}}) + a_{y_{1,-1}} \cos((\omega_1 - \omega_2)t + \phi_{y_{1,-1}}) \\ + a_{y_{2,1}} \cos((2\omega_1 + \omega_2)t + \phi_{y_{2,1}}) + a_{y_{2,-1}} \cos((2\omega_1 - \omega_2)t + \phi_{y_{2,-1}}) \\ + a_{y_{1,2}} \cos((\omega_1 + 2\omega_2)t + \phi_{y_{1,2}}) + a_{y_{1,-2}} \cos((\omega_1 - 2\omega_2)t + \phi_{y_{1,-2}}) \\ + a_{y_{2,2}} \cos((2\omega_1 + 2\omega_2)t + \phi_{y_{2,2}}) + a_{y_{2,-2}} \cos((2\omega_1 - 2\omega_2)t + \phi_{y_{2,-2}}) \quad (4.52)$$

Sinyal formu incelendiğinde kullanılan frekans bileşenleri Tablo4.1'deki gibi sınıflandırılabilir.

Tablo 4.1. İki frekanslı uyartım için frekans bileşenleri

	Katsayılar		Çıkış Frekansı
	$r_1$	$r_2$	$\omega_o = r_1' \omega_1 + r_2' \omega_2$
1	0	0	$\omega_0$
2	1	0	$\omega_1$
3	2	0	$2\omega_1$

Sabit bileşen

1. Temel frekansa ait harmonikler

Tablo 4.2. Devam

4	0	1	$\omega_2$	} 2. Temel frekansa ait harmonikler
5	0	2	$2\omega_2$	
6	1	1	$\omega_1 + \omega_2$	} 1. ve 2. temel frekanslara ait harmoniklerden oluşan karışım frekanslar
7	1	-1	$\omega_1 - \omega_2$	
8	2	1	$2\omega_1 + \omega_2$	
9	2	-1	$2\omega_1 - \omega_2$	
10	1	2	$\omega_1 + 2\omega_2$	
11	1	-2	$\omega_1 - 2\omega_2$	
12	2	2	$2\omega_1 + 2\omega_2$	
13	2	-2	$2\omega_1 - 2\omega_2$	

#### 4.8.1. Doğrusal terimler için simetrik fonksiyonlar

Analizde seçilen giriş sinyaline göre hangi frekans bileşenlerinin çıkış için göz önüne alınacağı belirlendikten sonra, terimler doğrusal olmama derecelerine göre gruplandırılır. Sisteme ait modelin tanımlandığı Denklem 4.47 yapısal olarak birinci ve üçüncü dereceden terimlerden oluşmuştur. Birinci dereceden terimler, giriş sinyalinin frekans bileşenlerinde çıkış frekans bileşenlerini üretir ve bundan dolayı kombinasyonlar aşağıda verilen formda olduğu gibi yalnızca bir elemandan oluşur.

$$R^* = \begin{bmatrix} r_{1,1} \\ r_{2,1} \end{bmatrix} \quad (4.53)$$

Girişte yalnızca harmonik olarak ilişkisiz iki sinyal bulunduğu için, satır sayısı iki, açılımı gerçekleştirilen elemanın derecesi  $m = 1$  olduğu için sütun sayısı bir olur. Bu durumda birinci dereceden çıkışlara ait simetrik fonksiyon Denklem 4.24'den aşağıdaki gibi yazılabilir,

$$f_y^{sym}(\mathbf{r}_1) = A_{y_n} j^{l_1} (r_{1,1}\omega_1 + r_{2,1}\omega_2)^{l_1} \quad (4.54)$$

Türev içermeyen ifadeler için aşağıdaki gibi basitleştirilebilir,

$$f_y^{sym}(\mathbf{r}_1) = A_{y_{r_1}}, \quad f_u^{sym}(\mathbf{r}_1) = A_{u_{r_1}} \quad (4.55)$$

Örneğin  $\omega_1$  çıkış frekansındaki denge denklemleri harmonik çarpanlar matrisi çıkış frekans bileşenini tanımlayan  $\omega_o = r_1' \omega_1 + r_2' \omega_2$  göz önüne alırsa  $r_{1,1} = 1$  ve  $r_{2,1} = 0$  olacağı için tek sütun formundadır,

$$R^* = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.56)$$

Denklemin doğrusal terimlerine ait  $\omega_o = \omega_1$  için elde edilen simetrik fonksiyonlar Denklem 4.54 ve 4.55 kullanılarak Tablo 4.2'de verildiği gibi elde edilir.

Tablo 4.3.  $\omega_o = \omega_1$  çıkış frekansında doğrusal terimler için simetrik fonksiyonlar

$\mathbf{r}_1$	$n_r^*$	$y(t)$	$\dot{y}(t)$	$\ddot{y}(t)$	$u(t)$
$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	1	$A_{y_{1,0}}$	$A_{y_{1,0}} j\omega_1$	$-A_{y_{1,0}} \omega_1^2$	$A_{u_{1,0}}$

#### 4.8.2. Kübik terimler için simetrik fonksiyonlar

Denklemler yapı olarak yalnızca çıkış terimlerinden oluşan iki adet kübik terime sahiptir. Üçüncü dereceden terimler üç frekans bileşeninin toplamından elde edilen frekans bileşenlerini üretir. Bundan dolayı harmonik çarpanlar matrisi  $R^*$ 'nin boyutu  $2 \times 3$  olarak elde edilir.

$$R^* = \begin{bmatrix} r_{1,1} & r_{1,2} & r_{1,3} \\ r_{2,1} & r_{2,2} & r_{2,3} \end{bmatrix} \quad (4.57)$$

Saf olmayan terim için, Denklem 4.24 dikkate alınarak simetrik fonksiyonun formu aşağıdaki gibi ifade edilebilir,

$$f_y^{sym}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) = \frac{1}{n_r^*} \sum_{\substack{\{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3\} \text{ dizisinin} \\ \text{bütün farklı permütasyonları}}} \prod_{i=1}^3 A_{y_{n_i, r_{2,i}}} j^{l_i} (r_{1,i} \omega_1 + r_{2,i} \omega_2)^{l_i} \quad (4.58)$$

Saf terim için Denklem 4.26'dan,

$$f_y^{sym}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) = \prod_{i=1}^3 A_{y_{n_i, r_{2,i}}} \quad (4.59)$$

Çıkış frekansı  $\omega \mathbf{r} = \omega_1$  için kübik terimleri elde edilebilmesi için aşağıdaki koşulu sağlayan kombinasyonların elde edilmesi gerekir,

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3 = [1 \ 0]^T \quad (4.60)$$

Verilen şartı sağlayan kombinasyonlar Denklem 4.44 algoritması ile aşağıdaki gibi elde edilebilir,

$$A_{R^*} = \left( \left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}, \left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}, \left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}, \dots, \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \right\} \right) \quad (4.61)$$

Bu kombinasyonlar kullanılarak sistemin üçüncü dereceden terimleri için simetrik fonksiyonlar belirlenir. Türevsel ifade içeren  $y(t)^2 \dot{y}(t)$  terimi için Denklem 4.58'den simetrik fonksiyon aşağıdaki gibi elde edilir,

$$f_y^{sym} \left( \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \right) = \frac{1}{n_r^*} \sum_{\substack{\{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3\} \text{ dizisinin} \\ \text{bütün farklı permütasyonları}}} A_{y_{n_1}} A_{y_{n_2}} A_{y_{n_3}} j \omega \cdot \mathbf{r}_1 \quad (4.62)$$

Simetrik fonksiyonun hesabında kombinasyonların yer değiştirmesi durumunda değeri değişeceği için oluşabilecek durumların, yani tüm ayrık permütasyonların

hesaplanması gerekir. Bu işlem bilgisayar ortamında Denklem 4.45 ile verilen algoritma yapısı ile sağlanabilir.

Tablo 4.4. Denklem 4.63 ile verilen simetrik fonksiyona ait permütasyonlar

$\{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3\}$	$f_y^{asym}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) = A_{y_{r_1}} A_{y_{r_2}} A_{y_{r_3}} j\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}_1$
$\left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$	$A_{y_{-2,-2}} A_{y_{1,0}} A_{y_{2,2}} j(-2\omega_1 - 2\omega_2)$
$\left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$	$A_{y_{-2,-2}} A_{y_{2,2}} A_{y_{1,0}} j(-2\omega_1 - 2\omega_2)$
$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$	$A_{y_{1,0}} A_{y_{2,2}} A_{y_{-2,-2}} j\omega_1$
$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix} \right\}$	$A_{y_{1,0}} A_{y_{2,2}} A_{y_{-2,-2}} j\omega_1$
$\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix} \right\}$	$A_{y_{2,2}} A_{y_{1,0}} A_{y_{-2,-2}} j(2\omega_1 + 2\omega_2)$
$\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$	$A_{y_{2,2}} A_{y_{-2,-2}} A_{y_{1,0}} j(2\omega_1 + 2\omega_2)$

Tablo 4.3'de verilen permütasyonlar için asimetrik fonksiyonlar hesaplandıktan sonra, toplamları permütasyon sayısını belirten  $n_r^*$  değerine bölünür. Böylece simetrik fonksiyon aşağıdaki gibi elde edilir,

$$\begin{aligned}
 f_y^{sym} \left( \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \right) &= A_{y_{-2,-2}} A_{y_{1,0}} A_{y_{2,2}} j(-2\omega_1 - 2\omega_2) \\
 &+ A_{y_{-2,-2}} A_{y_{2,2}} A_{y_{1,0}} j(-2\omega_1 - 2\omega_2) + A_{y_{1,0}} A_{y_{2,2}} A_{y_{-2,-2}} j\omega_1 \\
 &+ A_{y_{1,0}} A_{y_{2,2}} A_{y_{-2,-2}} j\omega_1 + A_{y_{2,2}} A_{y_{1,0}} A_{y_{-2,-2}} j(2\omega_1 + 2\omega_2) \\
 &+ A_{y_{2,2}} A_{y_{-2,-2}} A_{y_{1,0}} j(2\omega_1 + 2\omega_2) \\
 &= \frac{1}{6} A_{y_{-2,-2}} A_{y_{1,0}} A_{y_{2,2}} j(2\omega_1) + A_{y_{1,0}} A_{y_{2,2}} A_{y_{-2,-2}} j\omega_1
 \end{aligned} \tag{4.63}$$

Türevsel ifade içermeyen  $y(t)^3$  için ise Denklem 4.58'in basitleştirilmiş şekli olan Denklem 4.59 kullanılarak simetrik fonksiyon aşağıdaki gibi elde edilir,

$$f_y^{sym} \left( \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \right) = A_{y_{-2,-2}} A_{y_{1,0}} A_{y_{2,2}} \quad (4.64)$$

Dikkat edilirse sütunların yer değiştirmesi, sonucu değiştirmeyeceği için permütasyonların hesabına gerek yoktur. İstenilen çıkış frekansını veren diğer her bir kombinasyon için Tablo 4.5'deki gibi üretilir. Eksik kombinasyonlar ekte verilmiştir.

Tablo 4.5. Kübik terimler için simetrik fonksiyonlar

			$f_y^{sym}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3)$	
No	$\{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3\}$	$n_r^*$	$y(t)^3$	$y(t)^2 \dot{y}(t)$
1	$\left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$	{6}	$A_{y_{-2,-2}} A_{y_{1,0}} A_{y_{2,2}}$	$\frac{1}{6} A_{y_{-2,-2}} A_{y_{1,0}} A_{y_{2,2}} 2j\omega_1$
2	$\left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$	{6}	$A_{y_{-2,-2}} A_{y_{1,1}} A_{y_{2,1}}$	$\frac{1}{6} A_{y_{-2,-2}} A_{y_{1,1}} A_{y_{2,1}} 2j\omega_1$
3	$\left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$	{6}	$A_{y_{-2,-2}} A_{y_{1,-2}} A_{y_{2,0}}$	$\frac{1}{6} A_{y_{-2,-2}} A_{y_{1,-2}} A_{y_{2,0}} 2j\omega_1$
...	...	...	...	...
60	$\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \right\}$	{3}	$A_{y_{0,1}}^2 A_{y_{1,-2}}$	$\frac{1}{3} A_{y_{0,1}}^2 A_{y_{1,-2}} j\omega_1$

#### 4.8.3. Harmonik denge denkleminin oluşturulması

Sisteme ait model katsayıları ve diferansiyel denklemin terimlerine göre hesaplanan simetrik fonksiyonlar genel formda Denklem 4.26'ye göre aşağıdaki gibi  $\omega_r$  çıkış frekansı için ifade edilebilir.

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2}c_{0,1}(0) \sum_{\{\mathbf{r}_1=\mathbf{r}\}} f_u^{sym}(\mathbf{r}_1) + \frac{1}{2}c_{1,0}(0) \sum_{\{\mathbf{r}_1=\mathbf{r}\}} f_y^{sym}(\mathbf{r}_1) + \frac{1}{2}c_{1,0}(1) \sum_{\{\mathbf{r}_1=\mathbf{r}\}} f_y^{sym}(\mathbf{r}_1) \\
& + \frac{1}{2}c_{1,0}(2) \sum_{\{\mathbf{r}_1=\mathbf{r}\}} f_y^{sym}(\mathbf{r}_1) + \frac{1}{8}c_{3,0}(0,0,0) \sum_{\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_2+\mathbf{r}_3=\mathbf{r}} n_r^* f_y^{sym}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) \\
& + \frac{1}{8}c_{3,0}(0,0,1) \sum_{\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_2+\mathbf{r}_3=\mathbf{r}} n_r^* f_y^{sym}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) = 0
\end{aligned} \tag{4.65}$$

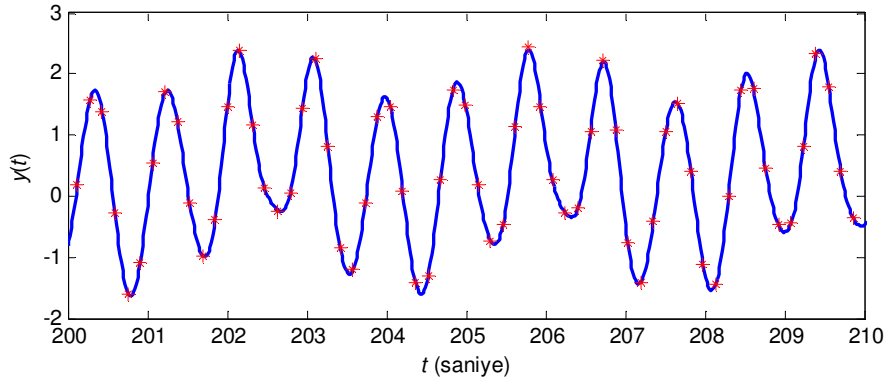
Hesaplanan simetrik fonksiyonlara ait açılımlar, denklem katsayıları ve  $n_r^*$  çarpanı yukarıdaki denklemde yerine konularak, örnek olarak ifadelerin türetildiği  $\omega \mathbf{r} = \omega_1$  çıkış bileşeni için denge denklemleri aşağıdaki formda elde edilir. Denge denkleminin tamamı ekte verilmiştir.

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2}A_{u_{1,0}} - \omega_1^2 \frac{A_{y_{1,0}}}{2} + \mu j\omega_1 \frac{A_{y_{1,0}}}{2} + \frac{A_{y_{1,0}}}{2} \omega_n^2 \\
& + \frac{1}{8}\alpha_3 \left( 6A_{y_{-2,-2}} A_{y_{1,0}} A_{y_{2,2}} + 6A_{y_{-2,-2}} A_{y_{1,1}} A_{y_{2,1}} + 3A_{y_{-2,-2}} A_{y_{1,-2}} A_{y_{2,0}} + \dots + A_{y_{0,1}}^2 A_{y_{1,-2}} \right) \\
& + \frac{1}{8}d_2 \left( A_{y_{-2,-2}} A_{y_{1,0}} A_{y_{2,2}} 2j\omega_1 + A_{y_{-2,-2}} A_{y_{1,1}} A_{y_{2,1}} 2j\omega_1 \right. \\
& \left. + A_{y_{-2,-2}} A_{y_{1,-2}} A_{y_{2,0}} j2\omega_1 + \dots + A_{y_{0,1}}^2 A_{y_{1,-2}} j\omega_1 \right) = 0
\end{aligned} \tag{4.66}$$

Benzer işlemler analizde kabul edilen diğer 13 adet frekans bileşeni içinde gerçekleştirilerek tüm denge denklemleri oluşturulur. Çıkış sinyali formunun bilinmeyen genlik ve faz değerlerini tespit edebilmek için model katsayılarının denklemlerde yerine konularak doğrusal olmayan denklem takımları sayısal çözümlene yöntemleriyle çözdürülür. Modele ait katsayılar örnek uygulamada aşağıdaki gibi alınmıştır.

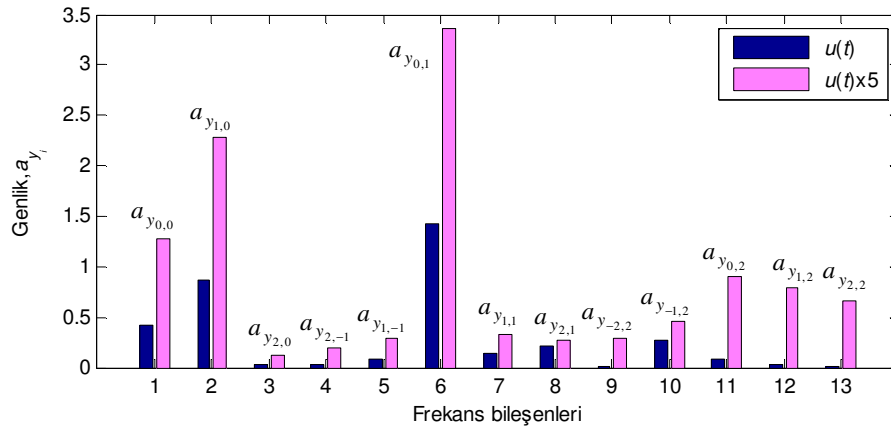
$$\mu = 1 ; d_2 = 0.15 ; \omega_n = 10 ; \alpha_3 = 4 \tag{4.67}$$

Analizde kabul edilen çok-tonlu giriş sinyali için  $a_{u_{0,0}} = 0,5$ ,  $a_{u_{1,0}} = 1$ ,  $a_{u_{0,1}} = 1$  alınarak  $\omega_1 = 1,8$ ,  $\omega_2 = 6,9$  rad/sn frekans değerleri için bilinmeyenler tespit edilip Denklem 4.66'de yerine konulduğunda istenilen zaman dilimine ait sinyal grafiksel olarak elde edilebilir. Örneğin çıkışa ait 10 saniyelik bir sinyal aşağıdaki gibidir,



Şekil 4.7. Analik (—) ve sayısal simülasyon (\*) yoluyla elde edilmiş sonuçlar

Burada sonucun doğruluğunu göstermek amacıyla sayısal simülasyon yoluyla elde edilen sonuç kararlı dilim olarak kabul edilen bir zaman aralığı için birlikte Şekil 4.7'de çizdirilmiştir. Elde edilen sonucun sayısal simülasyon sonuçlarıyla kıyaslandığında doğruluğu açıkça görülmektedir. Bu durum aynı zamanda analizde çıkış için kabul edilen frekans bileşeni sayısının yeterli olduğunu gösterir. Örneğin, giriş genliğinin bir öncekine göre beş kat artırıldığı farklı harmonik sayıları için analizde kullanılan sinyal formlarına ait katsayıların genliklerindeki değişim Şekil 4.8'deki gibi gerçekleşmiştir.

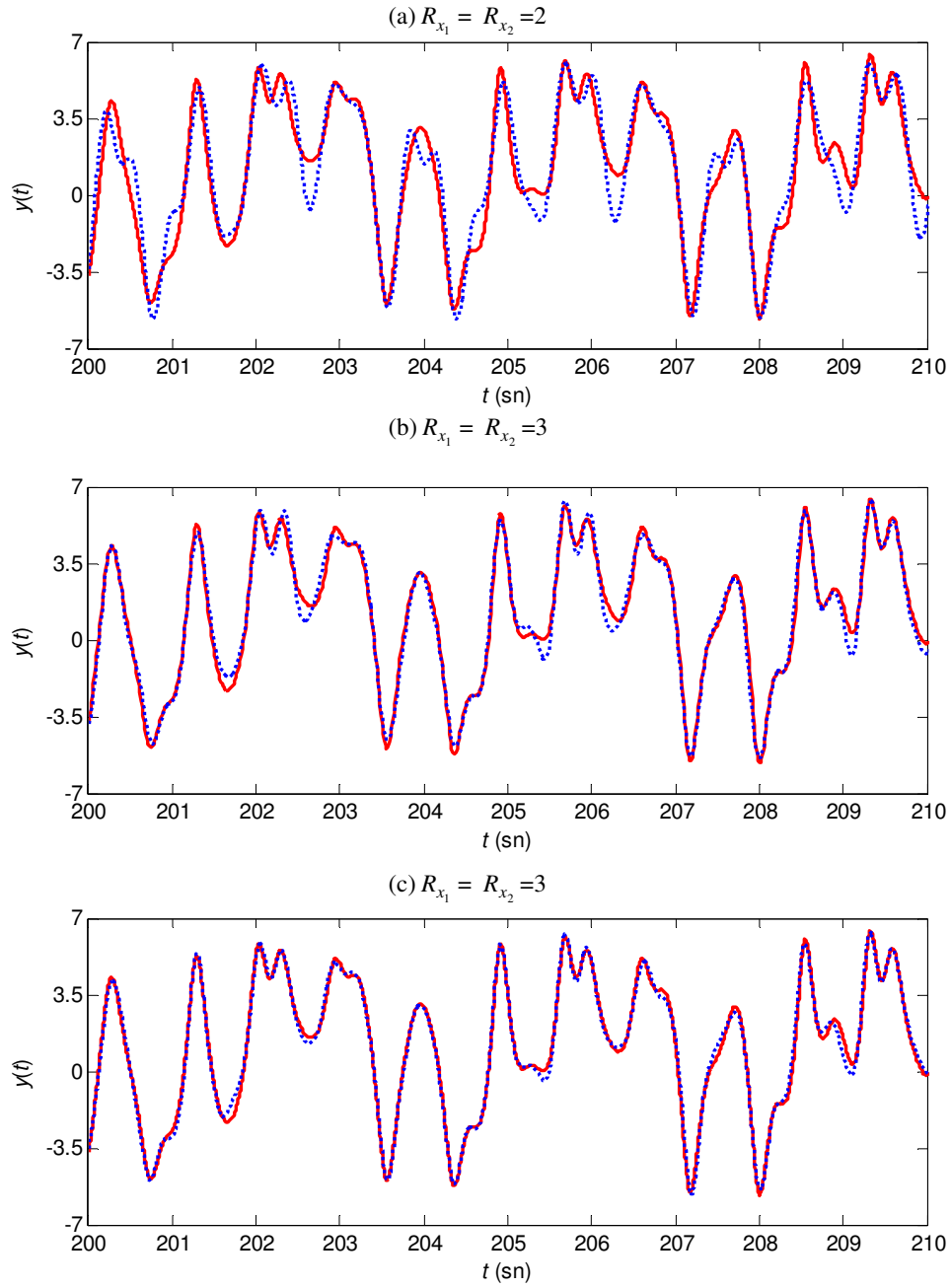


Şekil 4.8. Çıkış sinyal formundaki frekans bileşenlerine ait genlikler

Doğrusal olmayan sistemlerin girişe bağımlı karakteristikleri dolayısıyla, uygulanan sinyalin genliğindeki bir artış analizde kabul edilen frekans bileşenlerinin genliklerini de artırarak çıkış sinyalinde önemli etkiler oluşturmuştur. Bunun yanında analiz sonucu elde edilen çıkış sinyali ile sayısal simülasyon arasındaki fark Şekil 4.9-a'da



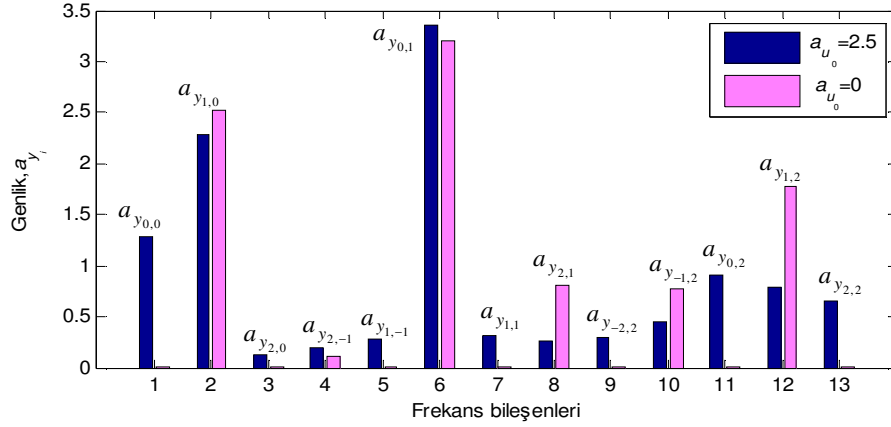
görüldüğü gibi belirgin bir şekilde artmıştır. Artan hata miktarının telafi edilmesi için analizde kullanılan frekans bileşenlerinin artırılması gerekir. Örneğin  $R_{x_1} = R_{x_2} = 3$  ve  $R_{x_1} = R_{x_2} = 4$  alınarak gerçekleştirilen analizler sonucunda Şekil 4.9-b ve c'de görüldüğü gibi hata seviyesi giderek azalmıştır. Diğer yandan harmonik sayısı artırılarak daha çok frekans bileşeni analizde kullanıldığında denge denklemlerini oluşturan doğrusal olmayan formda denklem takımlarının çözümlenmesi için bilgisayar tarafından gerçekleştirilen işlem yükü de artar.



Şekil 4.9. a)  $R_{x_1} = R_{x_2} = 2$ , b)  $R_{x_1} = R_{x_2} = 3$ , c)  $R_{x_1} = R_{x_2} = 4$  sınırlama değerleri için harmonik denge (--) ve sayısal simülasyon (—) sonuçları

Sabit bir bileşenin giriş sinyalinde kullanıldığı ve kullanılmadığı durumlar Şekil 4.10'da görülmektedir. Dikkat edilirse kullanılmadığı durumda çift dereceden bileşenlerin genlik değerleri sıfırlanmıştır. Tek dereceden bileşenler incelendiğinde

ise farklı olarak, giriş sinyalinin içeriğinin değişmesi sonucu genlik seviyelerinde değişimler oluşmuştur.



Şekil 4.10. Giriş sabit bileşenin, çıkış frekans bileşenleri üzerindeki etkisi

Sabit bileşenin kullanılmadığı analizlerde çift dereceden harmonikler ve karışım frekanslar sıfır kabul edilebilir. Bu bileşenler analize dahil edilse de sonucu etkilemezler. Bundan dolayı sinyal formundan elenerek frekans bileşenlerinin yarısı azaltılır ve böylece gereksiz işlemler ortadan kaldırılmış olur. Bu durumda, verilen örnek uygulama için analizde kabul edilen frekans bileşeni 6 adede düşerek çıkış sinyali aşağıdaki gibi kısılır.

$$\begin{aligned}
 y(t) = & a_{y_{1,0}} \cos(\omega_1 t + \phi_{y_{1,0}}) + a_{y_{0,1}} \cos(\omega_2 t + \phi_{y_{0,1}}) \\
 & + a_{y_{2,1}} \cos((2\omega_1 + \omega_2)t + \phi_{y_{2,1}}) + a_{y_{2,-1}} \cos((2\omega_1 - \omega_2)t + \phi_{y_{2,-1}}) \\
 & + a_{y_{1,2}} \cos((\omega_1 + 2\omega_2)t + \phi_{y_{1,2}}) + a_{y_{1,-2}} \cos((\omega_1 - 2\omega_2)t + \phi_{y_{1,-2}})
 \end{aligned} \quad (4.68)$$

Sistemi tanımlayan diferansiyel denklemde karesel fonksiyonlar mevcutsa girişte sabit bileşen olmaması durumunda da çift dereceli bileşenleri de kullanılır.

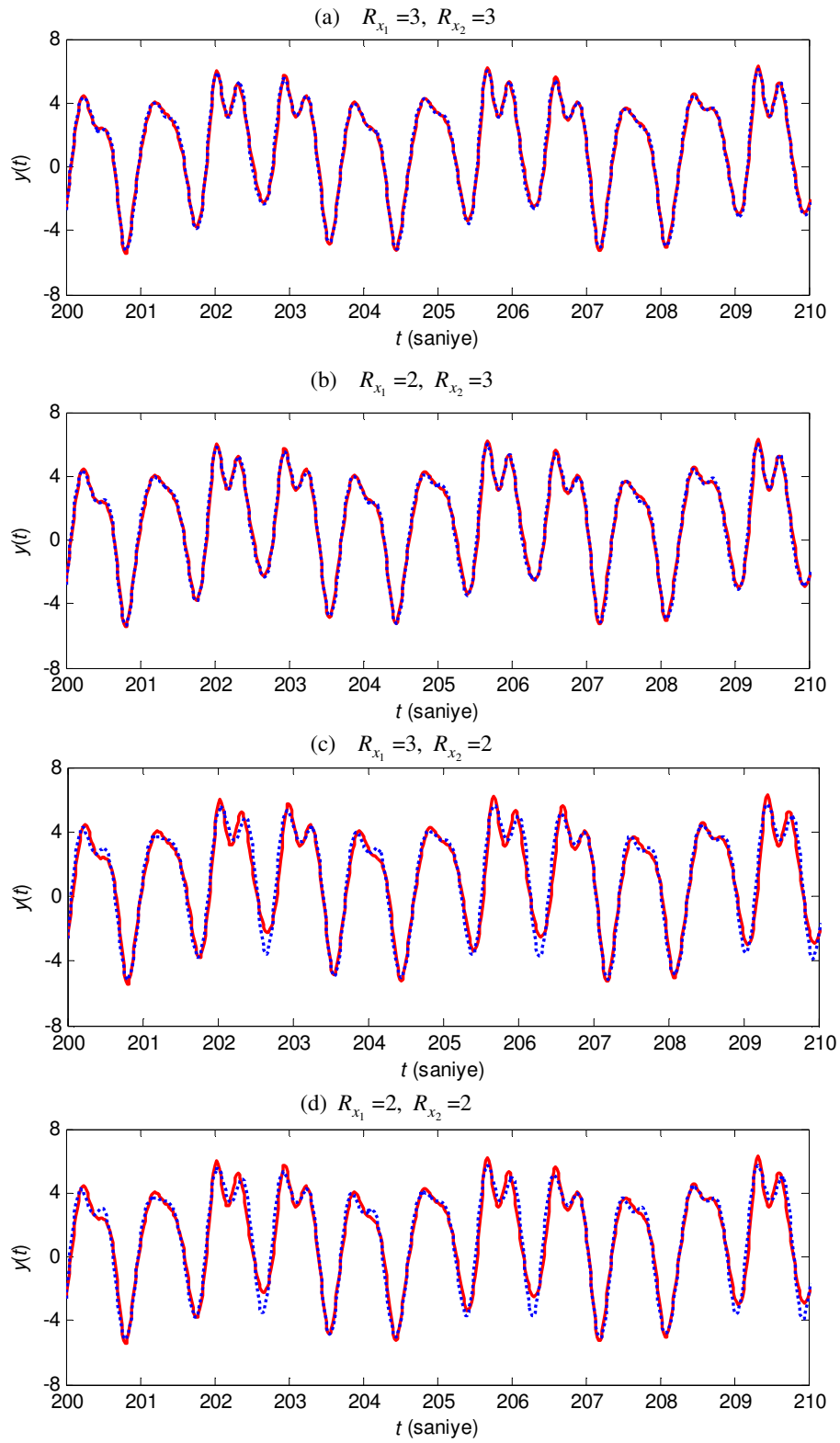
#### 4.8.4. Giriş frekans bileşenlerinin genliklerinin çıkış bileşenleri üzerindeki etkileri

Doğrusal olmayan sistemlerin frekans cevabı karakteristikleri girişe bağımlı olduğu için çıkışta oluşan harmonikler ve karışım frekanslarına ait bileşenlerin genlikleri,

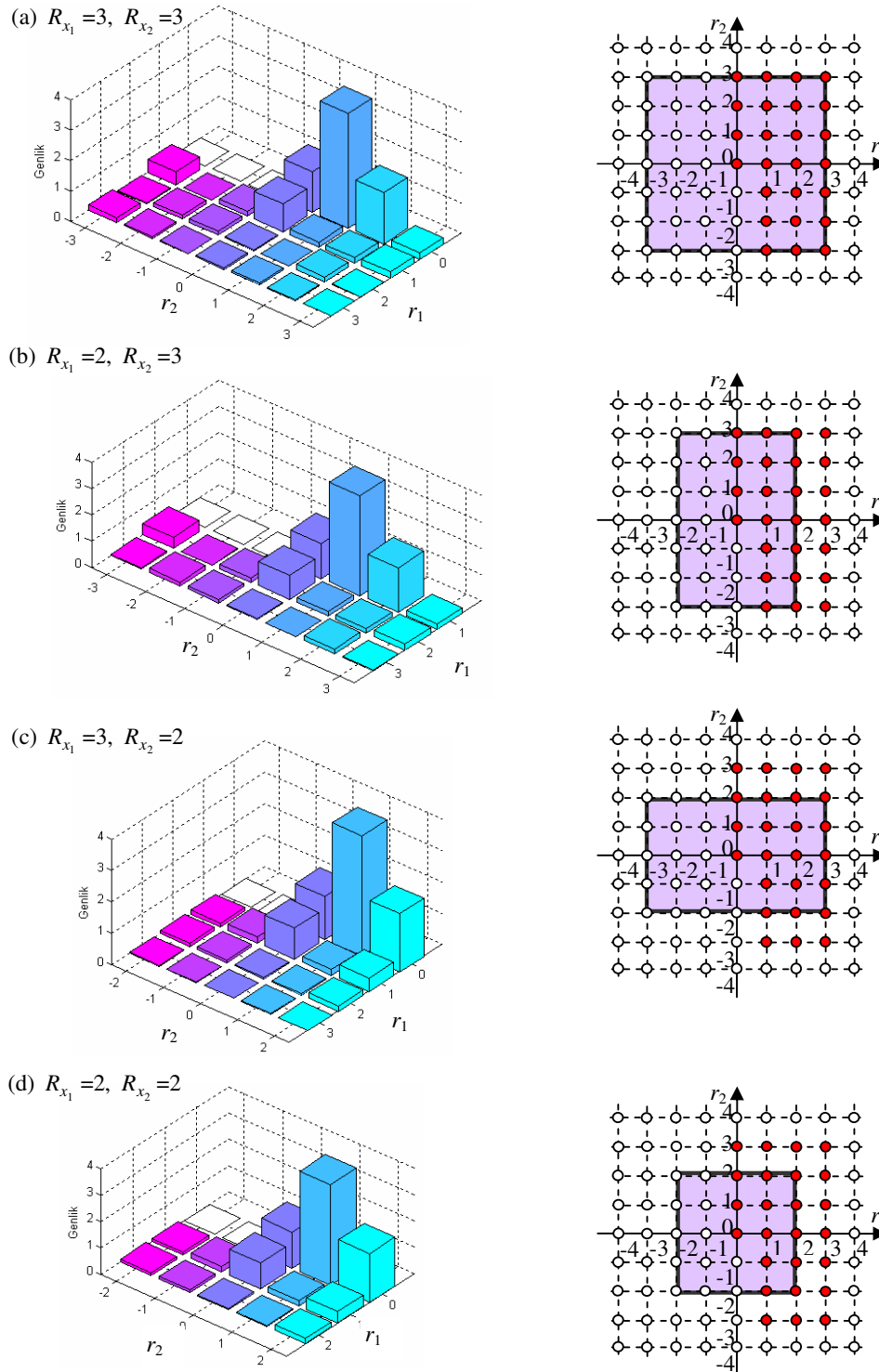
girişe uygulanan farklı frekans bileşenlerine bağlı olarak farklı değerler alır. Genlik seviyesi önemli kabul edilen bileşenlerin analiz doğruluğu açısından hesaba katılması gerekir. Tek tonlu analizde temel bileşene ait harmonik sayısının artırılması analiz doğruluğunu artırdığı gibi, çok-tonlu analizde de her bir harmonik olarak ilişkisiz temel bileşene ait harmonik sayısının artırılması doğruluğu artırır. Fakat çok tonlu analizde her bir temel frekans bileşenine ait harmonik sayısı doğruluk üzerinde farklı etkilere sahip olur. Örneğin, analizde kullanılmak üzere bir sabit bileşen ve farklı genliklerde iki tonlu giriş aşağıdaki gibi tanımlanmıştır,

$$u(t) = 0.5 + \cos(1.8t) + 0.5\cos(6.9t) \quad (4.69)$$

Bu sinyal formu için Şekil 4.10'da  $R_{x_1}$  ve  $R_{x_2}$ 'nin farklı değerleri uygulanıp, harmonik denge ve sayısal çözümlere ait çıkış sinyalleri birlikte sunulmuştur. Dikkat edilirse  $R_{x_1}=3$ ,  $R_{x_2}=2$  ve  $R_{x_1}=2$ ,  $R_{x_2}=3$  sınırlamalarının her ikisi için analizde 18 adet frekans bileşeni kullanılmış olmasına karşın, ilgili grafikler karşılaştırıldığında birincisine ait sonucun sayısal simülasyona daha yakın elde edildiği görülmektedir. Frekans bileşenlerinden birinin genliği diğerinin yarısı kadar seçildiği için  $R_{x_2}=2$  olarak alınması çıkış frekans bileşenlerinin genliklerini önemli seviyede etkilememiştir.  $R_{x_1}=3$ ,  $R_{x_2}=3$  seçilerek 25 adet frekans bileşeninin kullanıldığı analiz ile ve  $R_{x_1}=3$ ,  $R_{x_2}=2$  için gerçekleştirilen analizler karşılaştırıldığında birbirine daha yakın olduğu gözlenebilir. Oluşan hata bakımından, 14 adet frekans bileşeninin kullanıldığı  $R_{x_1}=2$ ,  $R_{x_2}=3$  ve  $R_{x_1}=2$ ,  $R_{x_2}=2$  sınırlamaları için yakın sonuçlar elde edilmiştir. Şekil 4.11'de  $R_{x_1}$  ve  $R_{x_2}$  sınırlarına ait dört farklı durum için seçilen frekans bileşenleri genlik değerleri ile birlikte incelendiğinde daha açık bir şekilde anlaşılabilir.  $R_{x_1}=3$ ,  $R_{x_2}=3$  için Şekil 4.11 (a)'da  $r_1=3$  katsayısına ait eksen üzerinde görülen genlik değerleri diğer eksenlerdekilere kıyasla düşük seviyededir. Bundan dolayı  $R_{x_1}=3$ ,  $R_{x_2}=2$  seçilerek frekans bileşeni sayısı azaltıldığında diğer durumlara kıyasla daha yüksek doğruluk elde edilir.



Şekil 4.11. a)  $R_{x_1} = 3, R_{x_2} = 3$  ve b)  $R_{x_1} = 3, R_{x_2} = 2$ , c)  $R_{x_1} = 2, R_{x_2} = 3$ , d)  $R_{x_1} = 2, R_{x_2} = 2$ , için zaman boyutunda cevaplar



Şekil 4.12. a)  $R_{x_1}=R_{x_2}=3$  ve b)  $R_{x_1}=2, R_{x_2}=3$ , c)  $R_{x_1}=3, R_{x_2}=2$  ve d)  $R_{x_1}=2, R_{x_2}=2$  durumları için bileşenlere ait genlikler

Eğer,  $R_{x_1}=2$ ,  $R_{x_2}=3$  olarak seçilirse Şekil 4.11-c'de görüldüğü gibi yüksek genlik seviyesine sahip  $A_{y_{3,1}}$  bileşeni ihmal edilmiş olur. Diğer bileşenlerin de ihmalıyla  $R_{x_1}=3$ ,  $R_{x_2}=2$  durumuna göre hata miktarı her iki seçim şekli için aynı sayıda frekans bileşeni kullanılmış olmasına karşın artar. Bununla birlikte, eğer frekans bileşeni miktarını azaltmak gerekli veya elde edilen sonuçlar kabul edilebilir hata miktarına sahipse 14 adet frekans bileşeninin kullanıldığı  $R_{x_1}=2$ ,  $R_{x_2}=2$  durumunu  $R_{x_1}=2$ ,  $R_{x_2}=3$  olarak seçilen analize göre tercih etmek daha az frekans bileşeni ile benzer seviyede doğruluk sağlar. Sisteme uygulanan sinyale ait frekans bileşenleri farklı genlik değerlerine sahipse frekans bileşenlerine ait harmonik sayıları benzer oranlarda seçilebilir. Bunun yanında, belli bir noktadan sonra bileşenleri ihmal etmek önemli hatalara sahip sonuçların elde edilmesine sebep olabilir. Kararlı durumdan alınan  $20\pi$  sn örnek analiz ve eşit sayıda noktadan oluşan örnek ile denge denklemleri sonucu hesaplanan değerler arasındaki hata miktarı Denklem 4.71 ile verilen öklid bağıntısı kullanılarak karşılaştırılabilir,

$$\text{Hata} = \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_{h_i} - y_{s_i})^2} \quad (4.70)$$

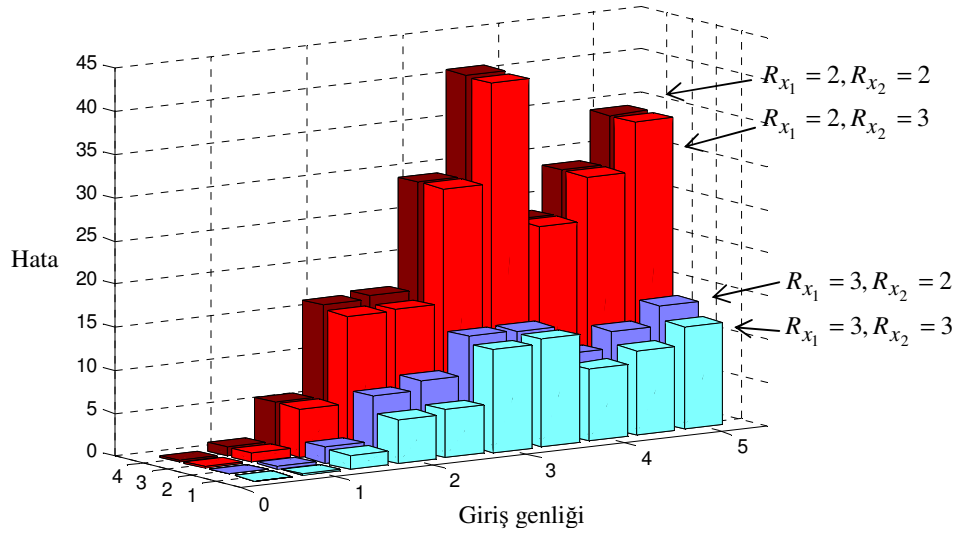
Böylece farklı  $R_{x_1}$  ve  $R_{x_2}$  sınır değerleri için sayısal simülasyonlar referans alınarak Tablo 4.6'da görüldüğü gibi karşılaştırılabilir.

Tablo 4.6.  $R_{x_1}$  ve  $R_{x_2}$  değerlerine bağlı hata değerleri

$R_{x_1}$	$R_{x_2}$	Hata
3	3	11.9125
2	3	13.6142
3	2	34.1601
2	2	34.2696

Farklı giriş genliklerinde de benzer ilişki olduğunu göstermek amacıyla örneğin  $A_u = \{0,5 ; 1 ; 1,5 ; \dots ; 5\}$  giriş genlikleri için oluşan hata değerleri Şekil 4.13'de

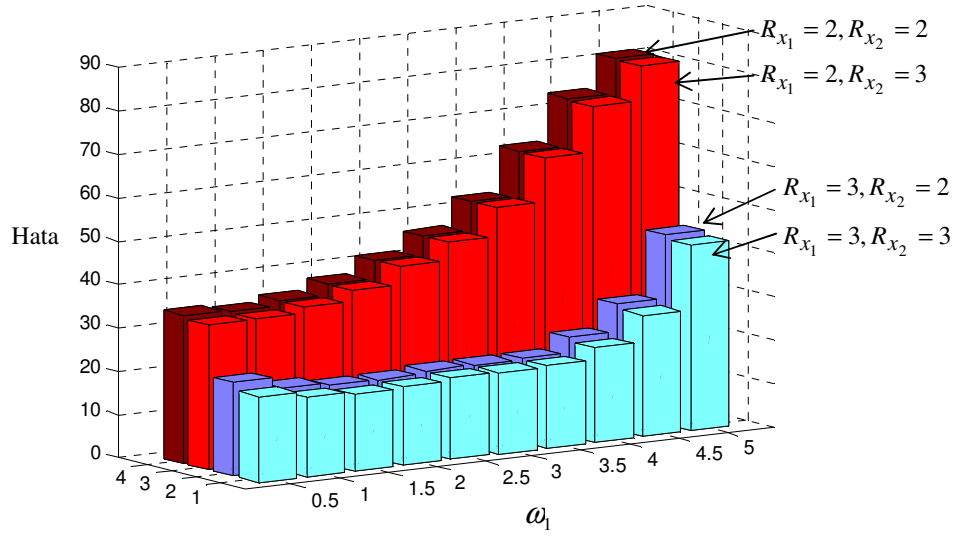
verilmiştir. Hata miktarları uygulanan genliğe bağlı artmakla birlikte verilen giriş sinyali için seçilen  $R_{x_1}$  ve  $R_{x_2}$  değerleri ile ilişkili olarak hata bakımından Tablo 4.5'e benzer bir davranış sergiler.



Şekil 4.13. Temel bileşenlerin harmonik sayısının hataya etkisi

Sınırlama değerlerine bağlı olarak ortaya konan ilişki genlik değişiminde olduğu gibi, farklı giriş frekans bileşenleri için de ortaya çıktığı gösterilebilir. Bununla birlikte, hatanın frekansa bağlı değişimi genlikte olduğu gibi düzenli bir şekilde oluşmayabilir. Örneğin  $\omega_1 = \{ 0,5; 1; 1,5; \dots; 5 \}$  ile verilen bir aralık ve  $\omega_2 = 6.9$  rad/s alınıp  $20\pi$  sn süre ve eşit sayıda nokta ile elde edilen çıkış sinyalleri için hatalar hesaplandığında frekansa bağlı olarak sütunlar şeklinde Şekil 4.13'de görüldüğü gibi sunulabilir. Hata miktarları sistemin geçiş karakteristiklerine bağlı olarak değişebileceği için farklı frekanslarda farklı değerler almıştır.





Şekil 4.14.  $R_{x_1}$  ve  $R_{x_2}$  değerlerinin farklı frekanslar için hata seviyesine etkileri

Hata miktarları her bir frekans değeri için farklı seviyede oluşmasına karşın birbirleri ile kıyaslandığında belirtilen  $R_{x_1}$  ve  $R_{x_2}$  sınırlama değerleri için genlikde görülen hata değerlerine benzer bir ilişki sergiler. Bundan dolayı, analizdeki frekans bileşenleri belirlenirken giriş genlikleri göz önünde bulundurularak seçilecek frekans bileşenlerinin uygun bir şekilde kestirilmesi daha az sayıda frekans bileşeni ile analizin doğruluğunu artırmaya katkıda bulunur.

#### 4.9. Sonuçlar

Bu bölümde SISO yapıya sahip sistemlerin harmonik olarak ilişkisiz frekans bileşenleri için harmonik denge denklemlerini genelleştirerek sembolik formda veren bir algoritma sunulmuştur. Giriş sinyalinin iki veya daha fazla harmonik olarak ilişkisiz frekans bileşeni içermesi durumunda, temel sinyallerin harmoniklerine ek olarak bu sinyallerin karışımlarını da içerdiği için HBM algoritmasında bu tip sinyalleri de kapsayan yeni bir sinyal tanımlanmıştır. Yeni sinyal formu için çıkış frekans bileşenlerinin seçimine yönelik temel spektrum sınırlama teknikleri olan Kutu ve Elmas sınırlama yöntemleri açıklanmıştır. Doğrusal olmayan sistem yapısına ait terimleri tek-tonlu durumdaki gibi genelleştirilmiş bir şekilde tanımlayan doğrusal

olmayan fonksiyonlar için açılımlar gerçekleştirilmiştir. Böylece istenilen frekanstaki denge denklemlerini veren genelleştirilmiş formda bir ifade türetilmiştir. İstenilen bir frekans bileşeni için denge denklemleri oluşturulurken simetrik fonksiyonları hesaplamada kullanılan kombinasyon setlerini otomatik olarak üreten bir özyinelemeli algoritma geliştirilmiştir. Yine basit olmayan terimlerin hesabında ihtiyaç duyulan kombinasyonlara ait permütasyonları elde eden bir algoritma geliştirilmiştir.

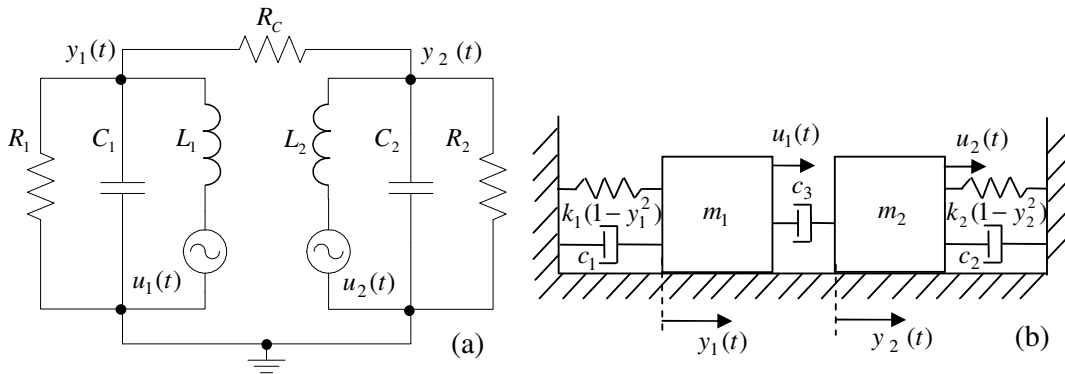
Yöntemin bir uygulaması örnek olarak seçilen Duffing Van der Pol sistemi üzerinde gösterilerek elde edilen sonuçlar sayısal simülasyonlar ile doğrulanmıştır. Giriş genliğinin artırılmasıyla birlikte artan doğrusal olmayan etkilerden dolayı analizde hesaba katılmayan bileşenlerin diğerlerine kıyasla önemli seviyelere ulaşmaları sonucu hata miktarının da arttığı gösterilmiştir. Frekans bileşenleri incelendiğinde harmoniklerin yanında karışım frekanslarında önemli seviyelere ulaştığı Şekil 4.7 üzerinde karşılaştırılarak gösterilmiştir. Oluşan hatayı telafi etmek amacıyla çıkışta kabul edilen frekans bileşeni sayısının artırılmasıyla birlikte hata seviyesinin azaldığı gözlenmiştir. Ayrıca analizde kullanılan girişin sabit bileşen içermediği durumda çıkıştaki çift dereceden bileşenlerin etkisinin sıfır olduğu gösterilmiştir.

Geliştirilen yöntemin doğruluğunu göstermenin yanında, çok-tonlu analizde frekans bileşenlerinin seçiminde önemli bir etken olarak giriş bileşenlerinin genlik seviyelerinin çıkış frekans bileşenlerinin seçimine etkileri incelenmiştir. Burada, giriş temel bileşenlerine ait genliklere benzer oranda harmonik sayılarının seçilmesi ile farklı durumlarla kıyaslaması yapılarak önemi ortaya konmuştur. Her iki bileşen için aynı sayıda harmonik kabul etmek yerine, genliği daha düşük seviyede olan frekans bileşeni için harmonik adedi diğerine göre daha az seçilerek analizde kullanılan frekans bileşeni sayısı düşürülebilir. Genlik seviyelerinin yanında frekans bileşenlerinin değişimi ile de benzer durumun olduğu grafiksel olarak sunulmuştur.

## BÖLÜM 5. MIMO SİSTEMLER İÇİN HARMONİK DENGE ANALİZİ

### 5.1. Giriş

Çok-tonlu sinyallere yönelik önceki bölümde tanıtılan sembolik algoritma yapısı SISO sistemlerin HBM ile analizi için uygulama alanı sinyal çeşitliliği bakımından genişletilmiştir. Dinamik sistemlerin SISO yapıda olmasının yanında birden fazla giriş ve çıkış içermesi de sıklıkla karşılaşılan bir durumdur. SISO sistemlerin bir alt sınıfı olduğu çok-girişli çok-çıkışlı (MIMO) formdaki dinamik sistemler, fizik, kimya, biyoloji gibi bilim dallarında çeşitli uygulamalar şeklinde ortaya çıkar [40-45]. Örneğin Şekil 5.1 de iki giriş iki çıkışlı form için verilen sistemlere benzer şekilde, birleşik yapıdaki elektriksel sistemler veya iki veya daha fazla dereceden serbestliğe sahip mekanik yapıdaki sistemler MIMO diferansiyel denklemler kullanılarak modellenirler [46-48]. Temel formu oluşturan SISO sistemlere kıyasla daha karmaşık etkileşimlere sahip MIMO doğrusal olmayan sistemler için literatürde gerçekleştirilen çalışmalar daha azdır. Bununla birlikte birçok farklı disiplinde ortaya çıkan dinamik sistemlerin sunumunda kullanılan MIMO modeller üzerine gerçekleştirilen çalışmalar son zamanlarda artarak devam etmektedir [72-75].



Şekil 5.1. MIMO yapıdaki sistemlere örnekler

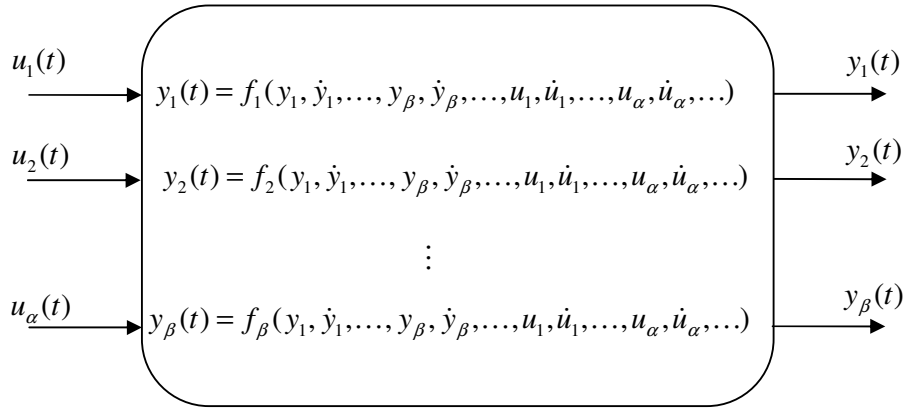
SISO sistemlerin davranışlarının incelenmesi için geliştirilmiş bir çözüm sunan Volterra transfer fonksiyonları MIMO sistemler için de çeşitli uygulamalarda kullanılmıştır [77-81]. Volterra serilerinin kullanıldığı yönteme göre daha az genel, bununla birlikte etkili ve pratik bir alternatif metot olan HBM, MIMO sistemlerin analizinde de kullanım alanları bulmuştur [81-83]. HBM kullanılarak SISO sistemler için geliştirilen otomatikleştirilmiş yöntemler nispeten daha karmaşık etkileşimlerin ortaya çıktığı MIMO sistemleri kapsayacak şekilde geliştirilebilir. Bu amaçla çok-tonlu sinyal tanımlaması ile analiz tekniği çeşitliliği artırılan yöntem MIMO sistemleri de kapsayacak şekilde geliştirildiğinde, sistem yapısı bakımından da uygulama alanı genişletilmiş olur.

Bu bölümde, polinom tip doğrusal olmayan terimler içeren birden fazla giriş ve çıkışa sahip sistemler için HBM uygulamasına yönelik yeni bir algoritma sunulacaktır. Kullanılan sinyal formu bakımından bir önceki bölümde tanıtılan ile aynı forma sahip olan algoritma, yapı olarak MIMO sistemleri kapsayacak şekilde yeniden düzenlenecektir. Öncelikle, Denklem 2.1 ile yapılan tanımlama temel alınarak, MIMO sistemlerin sunumuna yönelik geliştirilecek geliştirilmiş bir model yapısı tanıtılacaktır. Kullanım şekli iki-girişli iki-çıkışlı Duffing model yapısında bir doğrusal olmayan elektriksel sistem üzerinde açıklanacaktır. Geliştirilen model yapısı temel alınarak, HBM için gerekli doğrusal olmayan geliştirilmiş açılımlar elde edildikten sonra MIMO sistemler için denge denklemlerinin elde edilmesine yönelik algoritma tanımlaması yapılacaktır. Yöntem iki-giriş iki-çıkışlı Duffing model üzerinde sunulacak zaman düzleminde gerçekleştirilen sayısal simülasyonlar ile doğrulanacaktır. Ayrıca analizde kullanılan sinyallerin tek-tonlu olması durumu aynı örnek üzerinde incelenecektir.

## **5.2. MIMO Doğrusal Olmayan Sistemlerin Zaman Boyutunda Sunumu**

SISO sistemlerin geliştirilmiş sunumu, harmonik denge denklemlerinin otomatikleştirilmiş formda sembolik olarak tanımlanması için etkili bir yöntem oluşturulmasında önemli bir rol oynar. Uygulamada geniş bir alana hitap eden polinom tip doğrusal olmayan terimler içeren diferansiyel denklemlerle ifade edilen sistemler için kullanılan Denklem 2.1 yapı olarak yalnızca SISO sistemleri kapsar.

Birden fazla giriş ve çıkışa sahip sistemler için bu genelleştirilmiş form tekrar düzenlenerek kullanılabilir. Denklem 2.1 incelendiğinde diferansiyel denklemin giriş ve çıkış terimlerinin belirtilen derece ve türev terimleri için çarpım halinde olduğu görülür. Benzer şekilde bir MIMO sistem için her bir çıkışına ait bir alt sistem kullanılarak tanımlandığında her birine ait terimler kendi diğer alt sistemlere ait giriş ve çıkış çarpımları şeklinde genel olarak ifade edilebilir.



Şekil 5.2. Çok girişli çok çıkışlı sisteme ait temel yapının blok diyagram formu

Görüldüğü gibi her bir alt sistem, diğer alt sistemlere ait durum değişkenlerinin bir fonksiyonu olarak ifade edilmiştir. Böylece alt sistemler arası ortaya çıkabilecek bütün polinom tip terimler sistem yapısı tarafından kapsanmış olur. MIMO sistemlerin frekans cevabının Volterra transfer fonksiyonları ile elde edildiği bir çalışmada kullanılan polinom tip doğrusal olmayan terimler içeren benzer bir genel model yapısı aşağıdaki formda ifade edilmiştir [78],

$$\sum_{n=1}^{N_1} \sum_{p=0}^n \sum_{\alpha_1=1}^m \sum_{\alpha_2=\alpha_1}^m \dots \sum_{\alpha_p=\alpha_{p-1}}^m \sum_{\beta_1=1}^r \sum_{\beta_2=\beta_1}^r \dots \sum_{\beta_q=\beta_{q-1}}^r \sum_{l_1, l_{p+q}=0}^L \times$$

$$c_{pq}^{\alpha_1, \dots, \alpha_p, \beta_1, \dots, \beta_q} (j_1 : l_1, \dots, l_{p+q}) \prod_{i=1}^p D^{l_i} u_{\alpha_i} \prod_{i=p+1}^{p+q} D^{l_i} y_{\beta_{i-p}} = 0 \quad (5.40)$$

Karmaşık gözükken bu sunum tarzı çok sayıda toplam operatörü içermesi, tanımlanmış olan çok-tonlu sinyal formuna ait simetrik fonksiyonların genelleştirilmiş açılımları elde etme işlemlerini daha da karmaşık hale getirir. Buna

alternatif olarak bir yaklaşım Denklem 2.1 ile verilen ifadeye benzer şekilde yeni bir form tanımlanabilir. Bu amaçla Şekil 5.2 göz önünde bulundurularak  $\alpha$ -giriş  $\beta$ -çıkışlı bir sistemin sisteme ait bir alt sistem için genel bir sunum şekli aşağıdaki gibi ifade edilebilir,

$$\sum_{m_j=1}^{M_j} \sum_{p_1, p_\beta=0}^{m_j} \sum_{l_1, l_{p+q}=0}^{L_b} c_{\mathbf{p}, \mathbf{q}}^{\gamma_1 \dots \gamma_{p+q}} (b : l_1 \dots l_{p+q}) \prod_{i=1}^{p_1} D^{l_i} y_1(t) \prod_{i=p_1+1}^{p_1+p_2} D^{l_i} y_2(t) \dots \prod_{i=p_1+\dots+p_{\beta-1}+1}^{p_1+\dots+p_\beta} D^{l_i} y_\beta(t)$$

$$\prod_{i=p+1}^{p+q_1} D^{l_i} u_1(t) \prod_{i=p+q_1+1}^{p+q_1+q_2} D^{l_i} u_2(t) \dots \prod_{i=p+q_1+\dots+q_{\alpha-1}+1}^{p+q_1+\dots+q_\alpha} D^{l_i} u_\alpha(t) = 0$$

$$p = p_1 + \dots + p_\beta, \quad q = q_1 + \dots + q_\alpha, \quad p + q = m_j, \quad j = 1, \dots, \beta \quad (5.41)$$

$$\mathbf{p} = [p_1, \dots, p_\beta], \quad \mathbf{q} = [q_1, \dots, q_\alpha]$$

Dikkat edilirse her bir alt sisteme ait durumların çarpımları Şekil 5.2’de ifade edildiği gibi tanımlanarak en genel formda gerçekleştirilmiştir. Burada  $\mathbf{p}$  ve  $\mathbf{q}$  vektörleri ile alt sistemlere ait hangi terimlerin çarpımları ile terim oluşturulduğu belirtilir. Sistem yapısının açık olarak gösterildiği bu model temel alınarak, alt sistemlere ait tüm terimleri çarpım halinde yazmak yerine yalnızca ilgilenilen terimlerin oluşturulmasında kullanılan giriş ve çıkış terimlerinin tanımlanması için kısa bir sunum tarzı aşağıdaki gibi ifade edilebilir,

$$\sum_{m=1}^{M_b} \sum_{p_1, p_\beta=0}^m \sum_{\gamma_1, \gamma_{p+q}=1}^{N_\gamma} \sum_{l_1, l_{p+q}=0}^{L_b} c_{\mathbf{p}, \mathbf{q}}^{\gamma_1 \dots \gamma_{p+q}} (b : l_1 \dots l_{p+q}) \prod_{i=1}^p D^{l_i} y_{\gamma_i}(t) \prod_{i=p+1}^{p+q} D^{l_i} u_{\gamma_i}(t) = 0 \quad (5.42)$$

Alt sistemlere ait girişler ve çıkışlar genel formda tanımlanmış, bütün alt sistemleri için içine katmak yerine yalnızca terimi oluşturan alt sistem veya alt sistemlere ait terimler  $\gamma_1, \dots, \gamma_{p+q}$  ile belirtilmiştir. Burada,  $b = 1, \dots, \beta$ ,  $M_b$  ilgili alt sistemin doğrusal olmama derecesi, giriş veya çıkış sayısı  $N_\gamma$  değişkeni ile belirtilmiştir. Denklem teriminin derecesi,  $m = p + q$  ve  $p$  girişe ait  $q$  çıkışa ait eleman sayısını belirtir. Denklem uygulamasını göstermek amacıyla Şekil 5.1-a ile verilen iki-girişli iki-çıkışlı sisteme ait diferansiyel denklem takımı aşağıdaki gibi ifade edilebilir,

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x}_1 + (k_1 + \delta)\dot{x}_1 + c_1x_1 + c_3x_1^3 - \delta\dot{x}_2 &= (k_1 + \delta)u_1 + \dot{u}_1 - \delta u_2 \\ \ddot{x}_2 + (k_2 + \delta)\dot{x}_2 + c_1x_2 + c_3x_2^3 - \delta\dot{x}_1 &= (k_2 + \delta)u_2 + \dot{u}_2 - \delta u_1 \end{aligned} \right\} \quad (5.43)$$

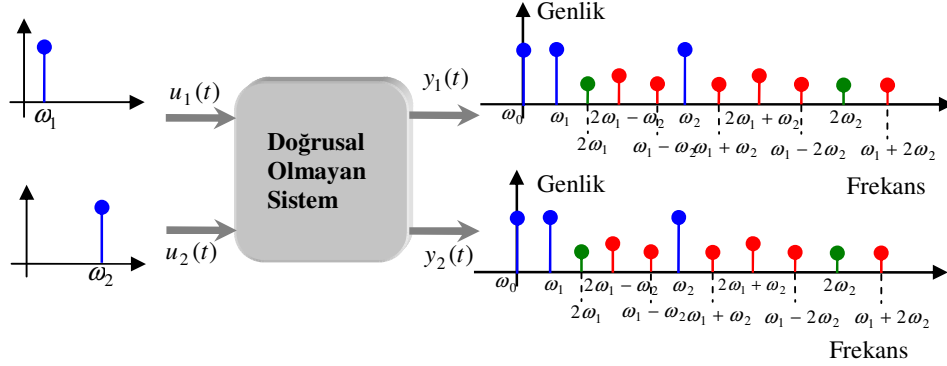
İki alt sisteme ait diferansiyel denklemler karşılaştırıldığında her iki denkleme doğrusal olmama özelliği katan kübik terimler içermeleri yanında, bunlar arasında etkileşimi sağlayan giriş ve çıkış için sırasıyla  $\delta\dot{x}_1$ ,  $\delta\dot{x}_2$  ve  $\delta u_1$ ,  $\delta u_2$  olmak üzere her bir denklemde birer terim mevcuttur. Bu sistem için model katsayıları 5.2'deki sunuma göre aşağıdaki gibi elde edilir,

$$\left. \begin{aligned} &1. \text{ Alt sistem için katsayılar} \\ &c_{1,0}^1(1;2)=1 ; c_{1,0}^1(1;1)=(k_1 + \delta) ; c_{1,0}^1(1;0)=c_1 ; c_{1,0}^2(1;1)=-\delta ; \\ &c_{3,0}^{111}(1;0,0,0)=c_3 ; c_{0,1}^1(1;0)=-(k_1 + \delta) ; c_{0,1}^1(1;1)=-1 ; c_{0,1}^2(1;0)=\delta \\ &2. \text{ Alt sistem için katsayılar} \\ &c_{1,0}^2(2;2)=1 ; c_{1,0}^2(2;1)=(k_2 + \delta) ; c_{1,0}^2(2;0)=c_1 ; c_{1,0}^1(2;1)=-\delta ; \\ &c_{3,0}^{222}(2;0,0,0)=c_3 ; c_{0,1}^2(2;0)=-(k_2 + \delta) ; c_{0,1}^2(2;1)=-1 ; c_{0,1}^2(2;0)=\delta \\ &\text{diğer durumlar } c_{p,q}(\cdot)=0 \end{aligned} \right\} \quad (5.44)$$

### 5.3. MIMO Sistemler İçin Harmonik Denge Denklemleri

Bir önceki bölümde incelenen SISO sistemlerin çok-tonlu analizinde sistemin girişinde iki veya daha fazla harmonik olarak ilişkisiz sinüzoidlerden oluşan çok-tonlu sinyal kullanıldığında çıkış sinyal formu her bir temel frekansa ait harmonikler ve harmonik olarak ilişkisiz frekans bileşenlerinin ara modülasyonlarıyla oluşan karışım frekansları da içerdiği örnekler üzerinde gösterildi. Benzer durum çok girişli ve çok çıkışlı sistemlerde de düşünülebilir. Sistemin herhangi bir girişine harmonik olarak ilişkili sinüzoidlerden oluşan sinyal formları uygulanabileceği gibi girişlere uygulanan sinyallerin de harmonik olarak ilişkisiz olması söz konusudur. Örneğin iki-girişli iki-çıkışlı bir doğrusal olmayan sistemin girişlerine farklı frekanslarda

bileşenler uygulandığında çıkış sinyal formları bu sinyallerin harmonikleri ve karışımları olarak Şekil 5.3’de görüldüğü gibi düşünülebilir.



Şekil 5.3. İki-girişli iki-çıkışlı sistem için örnek giriş-çıkış frekans bileşenleri

Her bir alt sistem için analizde kabul edilen sinyal formu uygulanan girişlere bağlı olarak farklı formlarda kabul edilebilir. Bu amaçla,  $b$ . alt sistem için sinyal formu SISO duruma benzer bir şekilde çok-tonlu formda kabul edilebilir,

$$x_b(t) = \sum_{r_1^b = -R_{x_1}^b}^{R_{x_1}^b} \dots \sum_{r_\sigma^b = -R_{x_\sigma}^{(b)}}^{R_{x_\sigma}^b} \frac{A_{x_{r_1 \dots r_\sigma}}^b}{2} e^{j(r_1^b \omega_1 + \dots + r_\sigma^b \omega_\sigma)t} \quad (5.45)$$

SISO sistemler için doğrusal olmayan fonksiyonelin en genel formu giriş ve çıkış terimlerinin çarpım halinde olduğu terimlerdir. Dolayısıyla  $\alpha$ -giriş  $\beta$ -çıkışlı bir MIMO sistem için en genel durum  $\alpha$  adet giriş ve  $\beta$  adet çıkış sinyalinin ve türevlerinin belirtilen dereceye kadar çarpımlarını içerecek bir doğrusal olmayan fonksiyonele ihtiyaç duyulur. Böylece alt sistemler arası oluşan etkileşimler, fonksiyonun açılımından elde edilecek mümkün harmonikler ve harmonik olarak ilişkisiz bileşenlerin karışımından oluşan ara modülasyonlar genel bir formda ifade edilebilir. Diferansiyel denklemin alt sistemlerinden birinin girişine veya çıkışına ait bir terimi genel formda temsil eden doğrusal olmayan fonksiyonun açılımı Denklem 4.20 ile belirtildiği gibi hesaplanabilir. Bu ifade temel alınarak tüm alt sistemlerin etkileşim içinde bulunduğu MIMO sistemler için daha genel bir ifade türetilebilir. Bu durumda, herhangi bir alt sistemin genel formdaki bir terimi tanımlayan doğrusal olmayan fonksiyon, aşağıdaki gibi  $y_1(t), \dots, y_\beta(t)$  çıkışları ve  $u_1(t) \dots u_\alpha(t)$  girişleri



için olmak üzere tüm alt sistemlerin giriş ve çıkışlarına ait doğrusal olmayan fonksiyonların çarpımı şeklinde sunulabilir,

$$\begin{aligned}
& F_{n_{y_1}}[y_1(t)] \dots F_{n_{y_\beta}}[y_\beta(t)] F_{n_{u_1}}[A_1 u_1(t)] \dots F_{n_{u_\alpha}}[A_\alpha u_\alpha(t)] \\
&= \prod_{i=1}^{n_{y_1}} D^i y_1(t) \dots \prod_{i=1}^{n_{y_\beta}} D^i y_\beta(t) \prod_{i=1}^{n_{u_1}} D^i u_1(t) \dots \prod_{i=1}^{n_{u_\alpha}} D^i u_\alpha(t) \\
&= \frac{A_1^{n_{\gamma_1}} \dots A_q^{n_{\gamma_m}}}{2^{(n_{\gamma_1} + \dots + n_{\gamma_m})}} \sum_{\substack{\{\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_{n_{y_1}}\} \text{ dizisinin} \\ \mathbf{R}_1^b \text{ setinden bütün} \\ \text{kombinasyonları}}} \dots, \sum_{\substack{\{\mathbf{r}_{p-n_{y_\beta}+1}, \dots, \mathbf{r}_p\} \text{ dizisinin} \\ \mathbf{R}_p^b \text{ setinden bütün} \\ \text{kombinasyonları}}} \sum_{\substack{\{\mathbf{r}_{p+1}, \dots, \mathbf{r}_{p+n_{u_1}}\} \text{ dizisinin} \\ \mathbf{R}_{p+1}^b \text{ setinden bütün} \\ \text{kombinasyonları}}} \dots, \sum_{\substack{\{\mathbf{r}_{p+q-n_{u_\alpha}}, \dots, \mathbf{r}_{p+q}\} \text{ dizisinin} \\ \mathbf{R}_{p+q}^b \text{ setinden bütün} \\ \text{kombinasyonları}}} \\
&\times n_{\mathbf{r}_1}^* \dots n_{\mathbf{r}_{p+q}}^* f_{n_{y_1}}^{sym}(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_{n_{y_1}}), \dots, f_{n_{y_\beta}}^{sym}(\mathbf{r}_{p-n_{y_\beta}+1}, \dots, \mathbf{r}_p) \\
&f_{n_{\gamma_1}}^{sym}(\mathbf{r}_{n_{\gamma_1}+1}, \dots, \mathbf{r}_{n_{\gamma_1}+2}), \dots, f_{n_{\gamma_q}}^{sym}(\mathbf{r}_{n_{\gamma_q}+1}, \dots, \mathbf{r}_{n_{\gamma_q}+q}) e^{j\omega t} \tag{5.46}
\end{aligned}$$

burada  $p = n_{y_1} + \dots + n_{y_\beta}$  ve  $q = n_{u_1} + \dots + n_{u_\alpha}$  olarak tanımlanmıştır. Tüm terimlerin katkısını gösteren bu açılıma alternatif olarak yalnızca belirtilen terimlere ait açılımları sunan daha kullanışlı bir yapı aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$\begin{aligned}
& F_p[y_{\gamma_1}(t), \dots, y_{\gamma_p}(t)] F_q[A_{\gamma_{p+1}} u_{\gamma_{p+1}}(t), \dots, A_{\gamma_{p+q}} u_{\gamma_{p+q}}(t)] \\
&= \prod_{i=1}^p D^i y_{\gamma_i}(t) \prod_{i=p+1}^{p+q} D^i A^{\gamma_i} u_{\gamma_i}(t) \\
&= \frac{A_1^{n_{\gamma_1}} \dots A_q^{n_{\gamma_m}}}{2^{(n_{\gamma_1} + \dots + n_{\gamma_m})}} \sum_{\substack{\{\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_p\} \\ \text{dizisinin } \mathbf{R} \text{ setinden} \\ \text{seçilen tüm kombinasyonları}}} \sum_{\substack{\{\mathbf{r}_{p+1}, \dots, \mathbf{r}_{p+q}\} \\ \text{dizisinin } \mathbf{R} \text{ setinden} \\ \text{seçilen tüm kombinasyonları}}} n_{\mathbf{r}_y}^* n_{\mathbf{r}_u}^* \\
&\times f_{y_{\gamma_1} \dots y_{\gamma_p}}^{sym}(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_p) f_{u_{\gamma_{p+1}} \dots u_{\gamma_{p+q}}}^{sym}(\mathbf{r}_{p+1}, \dots, \mathbf{r}_{p+q}) \tag{5.47}
\end{aligned}$$

Burada,

$$\gamma_1 \leq \gamma_2 \leq \dots \leq \gamma_p \leq \beta \text{ ve } \gamma_{p+1} \leq \gamma_{p+2} \leq \dots \leq \gamma_{p+q} \leq \alpha \tag{5.48}$$

şeklinde tanımlanmıştır. Ayrıca  $\mathbf{R}_1^b = \dots = \mathbf{R}_p^b = \mathbf{R}_{p+1}^b = \dots = \mathbf{R}_{p+q}^b = \mathbf{R}^b$  seçilerek işlemler basitleştirilmiştir. Temel frekanslara ait bileşenler ve katsayıları sırasıyla satır ve sütun vektörler olarak Denklem 4.16'da verilen formdadır. Çıkış

frekansından görüldüğü gibi elde edilen açılım sonucunda oluşan bileşenler girişte kabul edilen sinyal formuna benzer şekilde temel bileşenlerin ara modülasyon etkilerinden dolayı, harmonik olarak ilişkisiz karışım frekanslar ortaya çıkar.  $\mathbf{R}^b$  seti analizde seçilen temel frekanslara ait harmonik sayılarına bağlı olarak Denklem 4.21 ile elde edilebilir. Simetrik fonksiyon tanımlaması, daha önceki çalışmalarda da ifade edildiği gibi sıklıkla rastlanan basit terimlere ait açılımlarda gereksiz hesaplama yükünü ortadan kaldırır. Giriş ve çıkışlar için kullanılan kombinasyonlar ve permütasyonlar toplamları kendi içlerinde tek bir toplama operatörü ile ve simetrik fonksiyon tanımlaması yapılarak aşağıdaki gibi ifade edilebilir,

$$\begin{aligned}
 & F_p[y_{\gamma_1}(t), \dots, y_{\gamma_p}(t)] F_q[A_{\gamma_{p+1}} u_{\gamma_{p+1}}(t), \dots, A_{\gamma_{p+q}} u_{\gamma_{p+q}}(t)] \\
 &= \frac{A_1^{n_{\gamma_1}} \dots A_q^{n_{\gamma_m}}}{2^{(n_{\gamma_1} + \dots + n_{\gamma_m})}} \sum_{\substack{\{\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_{p+q}\} \\ \text{dizisinin } \mathbf{R}^b \text{ setinden} \\ \text{seçilen tüm kombinasyonları}}} n_{\mathbf{r}}^* f_{y_{\gamma_1} \dots \gamma_{p+q}}^{sym}(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_{p+q}) e^{j\omega \mathbf{r} t} \\
 & f_{u_{\gamma_1} \dots u_{\gamma_{p+q}}}^{sym}(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_{p+q}) = \frac{1}{n_{\mathbf{r}}^*} \sum_{\substack{\{\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_{p+q}\} \text{ dizisinin} \\ \text{bütün farklı permütasyonları}}} \\
 & \times \prod_{i=1}^p A_{y_{r_i}} j^{l_i} (\omega \cdot \mathbf{r}_i)^{l_i} \prod_{i=p+1}^{p+q} A_{u_{r_i}} j^{l_i} (\omega \cdot \mathbf{r}_i)^{l_i}
 \end{aligned} \quad (5.49)$$

Çıkış frekans bileşenlerini ifade eden  $\mathbf{R}^b$  setinde kullanılan  $b$  değişkeni ait olduğu çıkış formunu belirtir. Elde edilen genelleştirilmiş açılım, Denklem 5.3 ile belirtilen genel formdaki polinom tip diferansiyel denklem formunda giriş ve çıkış sinyalleri yerine konularak, istenilen bir  $\omega \mathbf{r}$  çıkış frekansı için harmonik denge denklemleri oluşturulur. Alt sistemlerden herhangi biri ( $b$ 'inci alt sistem) için harmonik denge algoritması aşağıdaki gibi ifade edilebilir,

$$\begin{aligned}
 & \sum_{m=1}^{M_b} \sum_{p_1, p_\beta=0}^m \frac{A_1^{n_{\gamma_1}} \dots A_q^{n_{\gamma_m}}}{2^{(n_{\gamma_1} + \dots + n_{\gamma_m})}} \sum_{\gamma_1, \gamma_{p+q}=1}^{N_\gamma} \sum_{l_1, l_{p+q}=0}^{L_b} c_{p,q}^{\gamma_1 \dots \gamma_{p+q}}(b: l_1 \dots l_{p+q}) \\
 & \sum_{\substack{\{\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_m\} \text{ dizisinin} \\ \sum_{\mathbf{r}_i = \mathbf{r}} \text{ şartı } \mathbf{R}^b \text{ setinden} \\ \text{kombinasyonları}}} n_{\mathbf{r}}^* f_{y_{\gamma_1} \dots u_{\gamma_{p+q}}}^{sym}(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_{p+q}) e^{j\omega \mathbf{r} t} = 0
 \end{aligned} \quad (5.50)$$

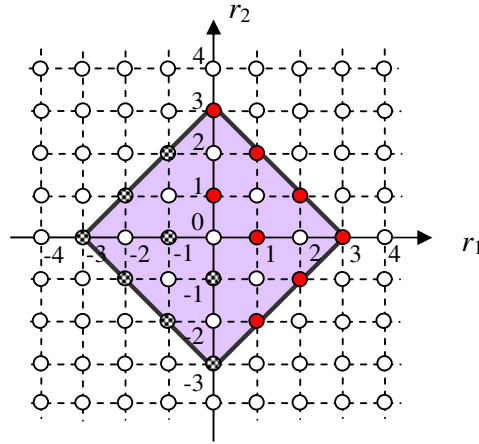
Verilen ifade her bir alt sistem için denge denklemlerini ifade etmede kullanılabilir. Herhangi bir analizde ihtiyaç duyulan harmonik denklemler sayısı her bir alt sistem için çıkışlarda kabul edilen frekans bileşeni adetlerinin toplamıyla ilişkilidir. Algoritmayı otomatik forma dönüştürmek için tek tonlu durumda olduğu gibi denklemlerdeki kombinasyonların ve simetrik fonksiyonlara ait permütasyonların üretildiği bir algoritmanın kullanılması gerekir. Bu amaca yönelik olarak tek tonlu durum için kullanılan kombinasyon ve permütasyon algoritmaları her bir alt sisteme ait açıklamaları elde etmede kullanılabilir.

#### 5.4. Örnek Uygulama: İki-Girişli İki-Çıkışlı Birleşik Duffing Sistemi

Yöntemin uygulamasını göstermek amacıyla Denklem 5.3 ile verilen iki-girişli iki-çıkışlı sisteme ait doğrusal olmayan diferansiyel denklem için denge denklemleri hesaplanarak çıkış sinyalleri zaman boyutunda elde edilecektir. Örneğin sisteme uygulanan her bir giriş  $\omega_1$  ve  $\omega_2$  frekans bileşenlerine sahip iki sinüzoidal olarak aşağıdaki gibi tanımlanabilir,

$$\left. \begin{aligned} u_1(t) &= a_{u_{10}} \cos(\omega_1 + \phi_{u_{10}}) \\ u_2(t) &= a_{u_{20}} \cos(\omega_2 + \phi_{u_{20}}) \end{aligned} \right\} \quad (5.51)$$

Buna göre alt sistemlere ait çıkış sinyal formları, bu kez kutu sınırlama yöntemine göre daha az karışım bileşeni sağlayan elmas sınırlama yöntemi kullanılarak elde edilecektir. Tanımlanan her bir temel frekans için en fazla üç harmonik ve üçüncü dereceden bileşenler aşağıdaki gibi belirtilen alanın içinde kalan elemanları kapsayacak şekilde seçilebilir.



Şekil 5.4. Analizde kullanılan çıkış bileşenlerine ait katsayılar

Dikkat edilirse giriş sinyali sabit bileşen içermediği ve diferansiyel denklemde çift dereceden doğrusal olmayan terimler bulunmadığı için çıkış sinyali formunda çift bileşenler ihmal edilmiştir. Bu durumda ilgilenilen frekans bileşenlerini sağlayan harmoniklere ait katsayıların elde edilmesinde kullanılan harmonik katsayılar seti analizde kabul edilen frekans bileşenleri göz önünde bulundurulduğunda iki alt sisteme ait çıkışlar için aşağıdaki gibi tanımlanır,

$$\mathbf{R}^1 = \mathbf{R}^2 = \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \right\} \quad (5.52)$$

Denge denklemlerinin elde edileceği çıkış frekans bileşenlerini tanımlayan katsayılar ise yukarıda belirtilen sette karmaşık eşleniklere ait frekans bileşenlerinin katsayıları çıkartıldığında aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\mathbf{R}_{o_1} = \mathbf{R}_{o_2} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \right\} \quad (5.53)$$

Böylece analizde kullanılan sekiz adet frekans bileşeni için çıkışları tanımlayan sinyal formları Denklem 5.15 ile belirtildiği gibi tanımlanmış olur.

$$\begin{aligned}
x_1(t) = & a_{x_{1,0}^b} \cos(\omega_1 t + \phi_{y_{1,0}^b}) + a_{x_{3,0}^b} \cos(3\omega_1 t + \phi_{y_{3,0}^b}) \\
& + a_{x_{0,1}^b} \cos(\omega_2 t + \phi_{y_{0,1}^b}) + a_{x_{0,3}^b} \cos(3\omega_2 t + \phi_{y_{0,3}^b}) \\
& + a_{x_{2,1}^b} \cos((2\omega_1 + \omega_2)t + \phi_{y_{2,1}^b}) + a_{x_{2,-1}^b} \cos((2\omega_1 - \omega_2)t + \phi_{y_{2,-1}^b}) \\
& + a_{x_{1,2}^b} \cos((\omega_1 + 2\omega_2)t + \phi_{y_{1,2}^b}) + a_{x_{1,-2}^b} \cos((\omega_1 - 2\omega_2)t + \phi_{y_{1,-2}^b})
\end{aligned} \tag{5.54}$$

Analizi gerçekleştirilen sistem modeli ve kabul edilen frekans bileşenlerine göre 5.11 kullanılarak çıkışta kabul edilen frekans bileşeni adedince denge denklemlerinin elde edilmesi gerekir. Bu amaçla simetrik fonksiyonların hesaplanması için ilgilenilen kombinasyonları seçmek ve basit olmayan terimler için permütasyonları hesaplamada tek tonlu durumda kullanılan yöntemlerden faydalanılır. Simetrik fonksiyonların hesabı, bir önceki bölümde daha ayrıntılı olarak açıklanan işlemlere benzer tarzda, MIMO durum için tanımlanmış olan denklemler kullanılarak gerçekleştirilir. Her bir alt sistem için  $R_{o_1}$  ve  $R_{o_2}$  setlerine göre sekiz tane olmak üzere toplam on altı adet doğrusal olmayan denklem takımı elde edilir. Buna göre birinci alt sisteme ait denge denklemleri,

$$\left. \begin{aligned}
f_{li}(x, \omega) = & \frac{1}{2} c_{0,1}^1(1;1) \sum_{\{\mathbf{r}_1=\mathbf{r}\}} f_{u_1}^{sym}(\mathbf{r}_1) + \frac{1}{2} c_{0,1}^1(1;0) \sum_{\{\mathbf{r}_1=\mathbf{r}\}} f_{u_1}^{sym}(\mathbf{r}_1) \\
& + \frac{1}{2} c_{1,0}^2(1;1) \sum_{\{\mathbf{r}_1=\mathbf{r}\}} f_{u_2}^{sym}(\mathbf{r}_1) + \frac{1}{2} c_{1,0}^1(1;2) \sum_{\{\mathbf{r}_1=\mathbf{r}\}} f_{y_1}^{sym}(\mathbf{r}_1) \\
& + \frac{1}{2} c_{1,0}^1(1;1) \sum_{\{\mathbf{r}_1=\mathbf{r}\}} f_{y_1}^{sym}(\mathbf{r}_1) + \frac{1}{2} c_{1,0}^1(1;0) \sum_{\{\mathbf{r}_1=\mathbf{r}\}} f_{y_1}^{sym}(\mathbf{r}_1) \\
& + \frac{1}{2} c_{1,0}^2(1;1) \sum_{\{\mathbf{r}_1=\mathbf{r}\}} f_{y_2}^{sym}(\mathbf{r}_1) \\
& + \frac{1}{8} c_{3,0}^{111}(1;0,0,0) \sum_{\substack{\{\sum_{i=1}^3 \mathbf{r}_i=\mathbf{r}\} \text{ şartıyla} \\ \text{tüm kombinasyonlar}}} n_{\mathbf{r}}^* f_{y_1, y_1, y_1}^{sym}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) = 0
\end{aligned} \right\} \tag{5.55}$$

İkinci alt sisteme ait denge denklemleri,

$$\left. \begin{aligned}
f_{2i}(x, \omega) = & \frac{1}{2} c_{0,1}^2(1;1) \sum_{\{\mathbf{r}_1=\mathbf{r}\}} f_{u_1}^{sym}(\mathbf{r}_1) + \frac{1}{2} c_{0,1}^2(1;0) \sum_{\{\mathbf{r}_1=\mathbf{r}\}} f_{u_2}^{sym}(\mathbf{r}_1) \\
& + \frac{1}{2} c_{1,0}^1(1;1) \sum_{\{\mathbf{r}_1=\mathbf{r}\}} f_{u_1}^{sym}(\mathbf{r}_1) + \frac{1}{2} c_{1,0}^2(1;2) \sum_{\{\mathbf{r}_1=\mathbf{r}\}} f_{y_2}^{sym}(\mathbf{r}_1) \\
& + \frac{1}{2} c_{1,0}^2(1;1) \sum_{\{\mathbf{r}_1=\mathbf{r}\}} f_{y_2}^{sym}(\mathbf{r}_1) + \frac{1}{2} c_{1,0}^2(1;0) \sum_{\{\mathbf{r}_1=\mathbf{r}\}} f_{y_2}^{sym}(\mathbf{r}_1) \\
& + \frac{1}{2} c_{1,0}^1(1;1) \sum_{\{\mathbf{r}_1=\mathbf{r}\}} f_{y_1}^{sym}(\mathbf{r}_1) \\
& + \frac{1}{8} c_{3,0}^{222}(1;0,0,0) \sum_{\substack{\{\sum_{i=1}^3 \mathbf{r}_i=\mathbf{r}\} \text{ şartıyla} \\ \text{tüm kombinasyonlar}}} n_{\mathbf{r}}^* f_{y_2, y_2, y_2}^{sym}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) = 0
\end{aligned} \right\} \quad (5.56)$$

şeklinde elde edilir. Denklemler verilen giriş ve sistem parametrelerine göre çözdürülerek sistemin 5.15 ile temsil edilen çıkış sinyaline ait bilinmeyenler tespit edilir. Kullanılan sistem parametreleri aşağıdaki gibidir;

$$\left. \begin{aligned}
c_{11} = 1, \quad c_{13} = 1, \quad \delta_{11} = 0,2, \quad k_{11} = 0,2 \\
c_{21} = 1, \quad c_{23} = 1, \quad \delta_{21} = 0,2, \quad k_{21} = 0,2
\end{aligned} \right\} \quad (5.57)$$

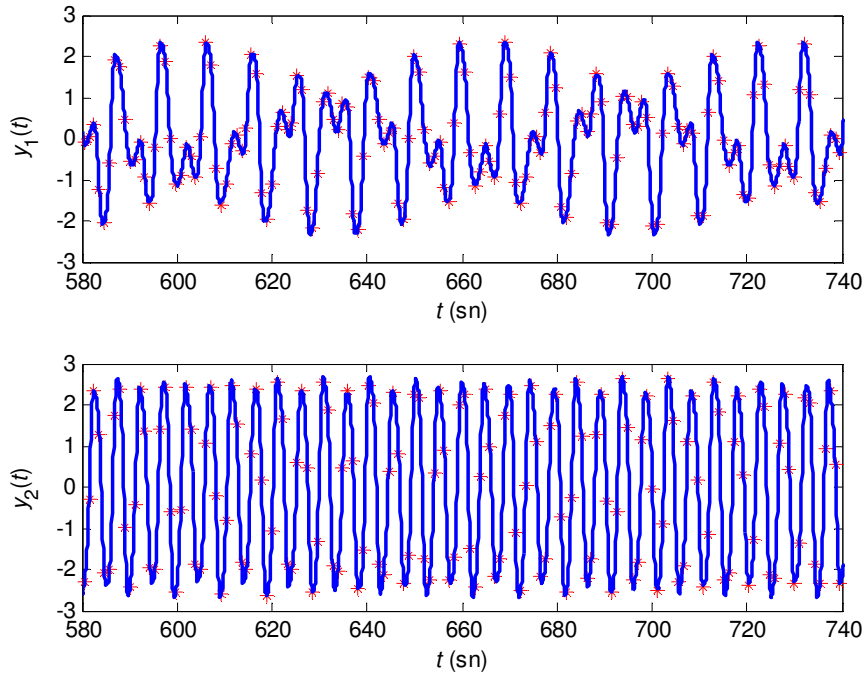
Sonucun doğruluğu SISO durumlarda uygulandığı gibi sayısal simülasyonlar ile kıyaslanarak gösterilebilir. Çok tonlu ve MIMO sistemleri kapsayan sistemlerin sayısal simülasyonunun gerçekleştirilmesine yönelik işlemler, frekans cevaplarının doğrulanması amacıyla takip eden bölümde ele alınmıştır.  $y_1(t)$  için çıkış sinyal formu  $y_1(t) = x_1(t) - \dot{u}_1(t)$  alınarak aşağıdaki gibi ifade edilebilir,

$$\left. \begin{aligned}
y_1(t) = & a_{y_{1,0}}^b \sin(\omega_1 t + \phi_{1,0}^b) + a_{y_{3,0}}^b \sin(3\omega_1 t + \phi_{y_{3,0}}^b) \\
& + a_{y_{0,1}}^b \sin(\omega_2 t + \phi_{y_{0,1}}^b) + a_{y_{0,3}}^b \sin(3\omega_2 t + \phi_{y_{0,3}}^b) \\
& + a_{y_{2,1}}^b \sin((2\omega_1 + \omega_2)t + \phi_{y_{2,1}}^b) + a_{y_{2,-1}}^b \sin((2\omega_1 - \omega_2)t + \phi_{y_{2,-1}}^b) \\
& + a_{y_{1,2}}^b \sin((\omega_1 + 2\omega_2)t + \phi_{y_{1,2}}^b) + a_{y_{1,-2}}^b \sin((\omega_1 - 2\omega_2)t + \phi_{y_{1,-2}}^b) \\
& - a_{u_{1,0}}^b \cos(\omega_1 t + \phi_{u_{1,0}}^b)
\end{aligned} \right\} \quad (5.58)$$

Burada,  $a_{y_{1,2}}^b = -(r_1\omega_1 + r_2\omega_2) a_{x_{1,2}}^b$  olarak tanımlanmıştır. Sistemin sayısal simülasyonunda kullanılan durum denklemleri  $x_1 = y_1$ ,  $x_2 = \dot{y}_1$ ,  $x_3 = y_2$ ,  $x_4 = \dot{y}_2$  olarak alınırsa aşağıdaki gibi ifade edilebilir,

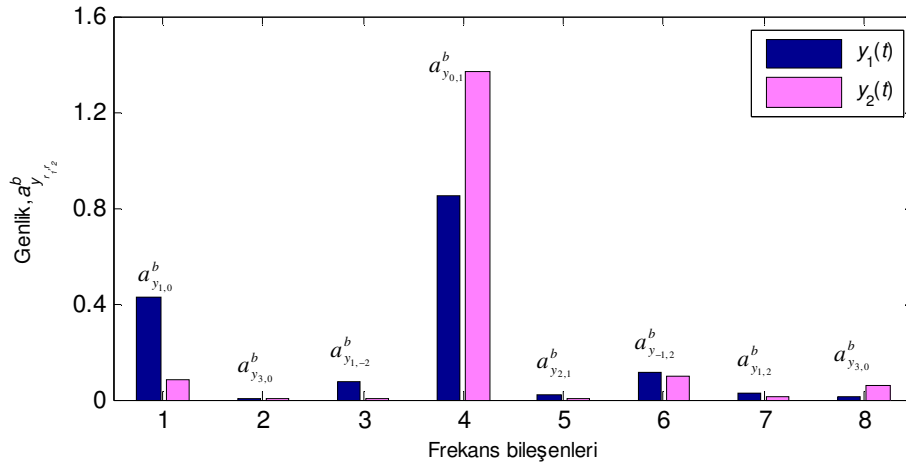
$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -(k_1 + \delta)x_2 - c_1x_1 - c_3x_1^3 + \delta x_4 + (k_1 + \delta)u_1 + \dot{u}_1 - \delta u_2 \\ \dot{x}_3 &= x_4 \\ \dot{x}_4 &= -(k_1 + \delta)x_4 - c_1x_3 - c_3x_3^3 + \delta x_2 + (k_1 + \delta)u_2 + \dot{u}_2 - \delta u_1 \end{aligned} \right\} \quad (5.59)$$

Örneğin, denge denklemleri  $a_{u_{10}} = a_{u_{01}} = 1$  genlik değerleri ve  $\omega_1 = 0,7$  ve  $\omega_2 = 1,3$  rad/s giriş frekans değerleri için çözümlensin. Elde edilen sonuçlar simülasyondan alınan kararlı durum sonuçları ile kıyaslandığında Şekil 5.5'deki gibi sonucun doğruluğu her iki çıkışa ait sinyaller için gösterilebilir.



Şekil 5.5.  $y_1(t)$  ve  $y_2(t)$  çıkışlarına ait  $\omega_1 = 0,7$  ve  $\omega_2 = 1,3$  rad/s ve  $a_{u_{10}}^1 = a_{u_{10}}^2 = 1$  için analitik (–) ve sayısal simülasyon (\*) sonuçları

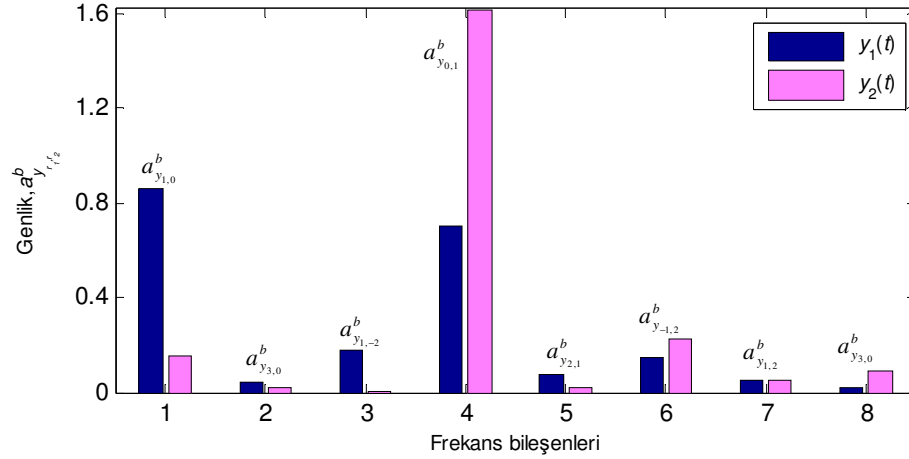
Her bir çıkış için elde edilen sinyalde ilgili girişe ait frekans bileşenlerinin baskın olduğu görülebilir. Kendi temel bileşenlerinin harmoniklerine ek olarak karışım bileşenlerinin de etkili olduğu oluşan sinyal formlarından anlaşılabilir. Sistemi tanımlayan denklem incelendiğinde alt sistemlerin frekans bileşenleri arasındaki karşılıklı etkileşimin  $\delta$  parametresiyle sağlandığı görülür. Sinyal formunu oluşturan frekans bileşenlerinin HBM uygulaması sonucu elde edilen genlik etkilerini görmek amacıyla tanımlanmış olan bileşenlere ait genlik değerleri Şekil 5.6'daki gibi karşılaştırmalı olarak verilmiştir.



Şekil 5.6.  $y_1(t)$  ve  $y_2(t)$  çıkışlarına ait frekans bileşenleri

Burada  $a_{y_{1,2}}^1$  ve  $a_{y_{1,2}}^2$  genlikleri, sırasıyla sistemin  $y_1(t)$  ve  $y_2(t)$  çıkışlarına ait sinyali tanımlayan bileşenlerdir. Çıkışlardaki frekans bileşenlerinin etkileri karşılaştırıldığında öncelikle alt sistemin girişine uygulanan temel frekans bileşeninin yanında diğer çıkışa ait frekans bileşeninin etkili genlik değerlerine sahip olduğu görülebilir. Karışım bileşenler kendi başlarına ele alındığında düşük genliklere sahip olsa da toplam etkileri düşünüldüğünde önem kazanırlar. Karışım bileşenlerin etkileri tek tonlu analizde de değinildiği gibi girişlerdeki genlik değerlerinin artışıyla daha da etkin hale gelirler. Örneğin giriş genliklerinin iki kat artırılmasıyla bu bileşenlerin genliklerinin de önemli değerlere ulaştığı Şekil 5.7'de görülmektedir. Bunun yanında sistemler arası ilişkiyi tanımlayan parametrelerin etkisi de çıkış frekans bileşenlerinin seçiminde göz önünde bulundurulabilir.

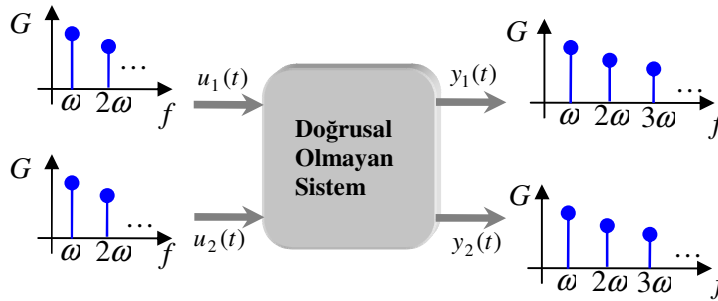




Şekil 5.7.  $a_{u_{1,0}}^1 \times 2$  ve  $a_{u_{0,1}}^2 \times 2$  için  $y_1(t)$  ve  $y_2(t)$  çıkışlarına ait frekans bileşenleri

#### 5.4.1. Girişlerde harmonik olarak ilişkili bileşenlerin bulunması durumu

Eğer analiz yalnızca harmonik olarak ilişkili bileşenler için gerçekleştirilecekse, karışım frekanslarının kullanıldığı çok-tonlu durumdaki hesaplamalar yerine denge denklemleri tek-tonlu durumdaki gibi oluşturulur. Böylece çok-tonlu bileşenler için Denklem 5.11’de gerekli hesaplamalarda kullanılan vektörel tanımlamalar, skaler büyüklük veya bir elemanı bulunan vektör gibi düşünülebilir. Analizin tek-tonlu olduğu bu duruma ait frekans bileşenleri iki-giriş iki-çıkışlı bir sistem için Şekil 5.8’de görülmektedir.



Şekil 5.8. İki-giriş iki-çıkışlı bir sistem için harmonik olarak ilişkili (Tek-tonlu) durumda frekans bileşenleri

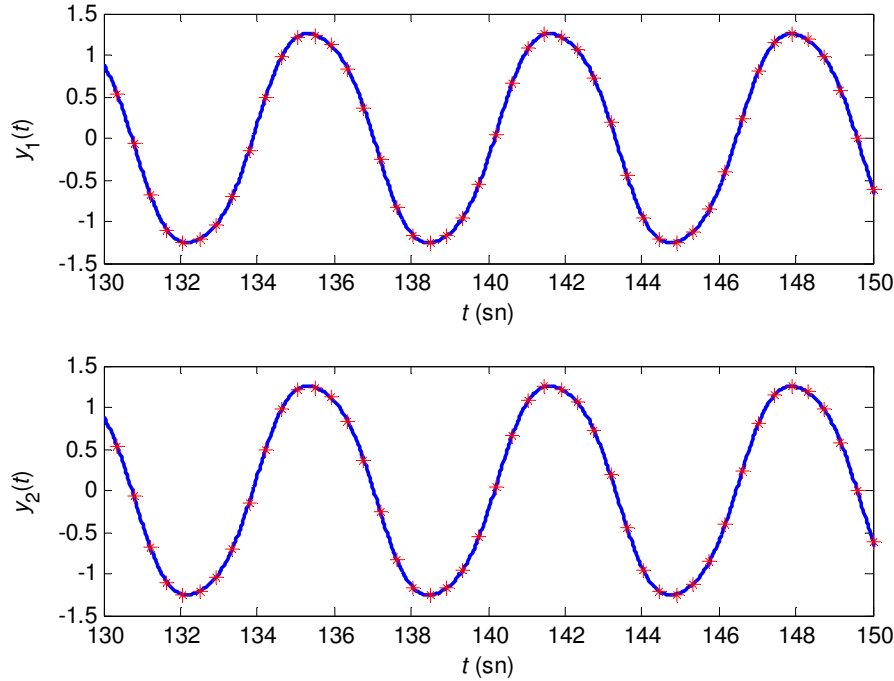
Tek-tonlu durumu örneklendirmek amacıyla giriş sinyal formları aşağıdaki gibi aynı temel harmonikten oluşacak şekilde seçilebilir,

$$\left. \begin{aligned} u_1(t) &= a_{u_1}^1 \cos(\omega t) \\ u_2(t) &= a_{u_1}^2 \cos(\omega t) \end{aligned} \right\} \quad (5.60)$$

Şeklinde uygulanan bir giriş sinyali için analizde kullanılacak çıkış sinyali her bir çıkış için temel bileşen ve üçüncü harmonikler şeklinde aşağıdaki gibi kabul edilsin,

$$\left. \begin{aligned} y_1(t) &= a_{y_1}^1 \sin(\omega t + \phi_{y_1}^2) + a_{y_3}^1 \sin(3\omega t + \phi_{y_3}^1) \\ y_2(t) &= a_{y_1}^2 \sin(\omega t + \phi_{y_1}^2) + a_{y_3}^2 \sin(3\omega t + \phi_{y_3}^2) \end{aligned} \right\} \quad (5.61)$$

Analizde kullanılan denge denklemleri, Denklem 5.21 ile verilen çıkış sinyal formları için tek-tonlu formda Denklem 5.17 ile verilen genel denklem ifadeleri ile belirlenmiştir. Örnek olarak  $\omega_1=1$  ve  $\omega_2=1$  rad/s seçilerek harmonik denge denklemlerine ait çözümler elde edilmiştir.



Şekil 5.9.  $\omega_1 = \omega_2 = 1$  rad/s için analitik (–) ve sayısal simülasyon (\*) sonuçları

Çıkış sinyali sayısal simülasyon sonuçları ile birlikte kıyaslandığında Şekil 5.7’de görüldüğü gibi örtüşmektedir. Bu da yöntemin tek-tonlu durumda da geçerli

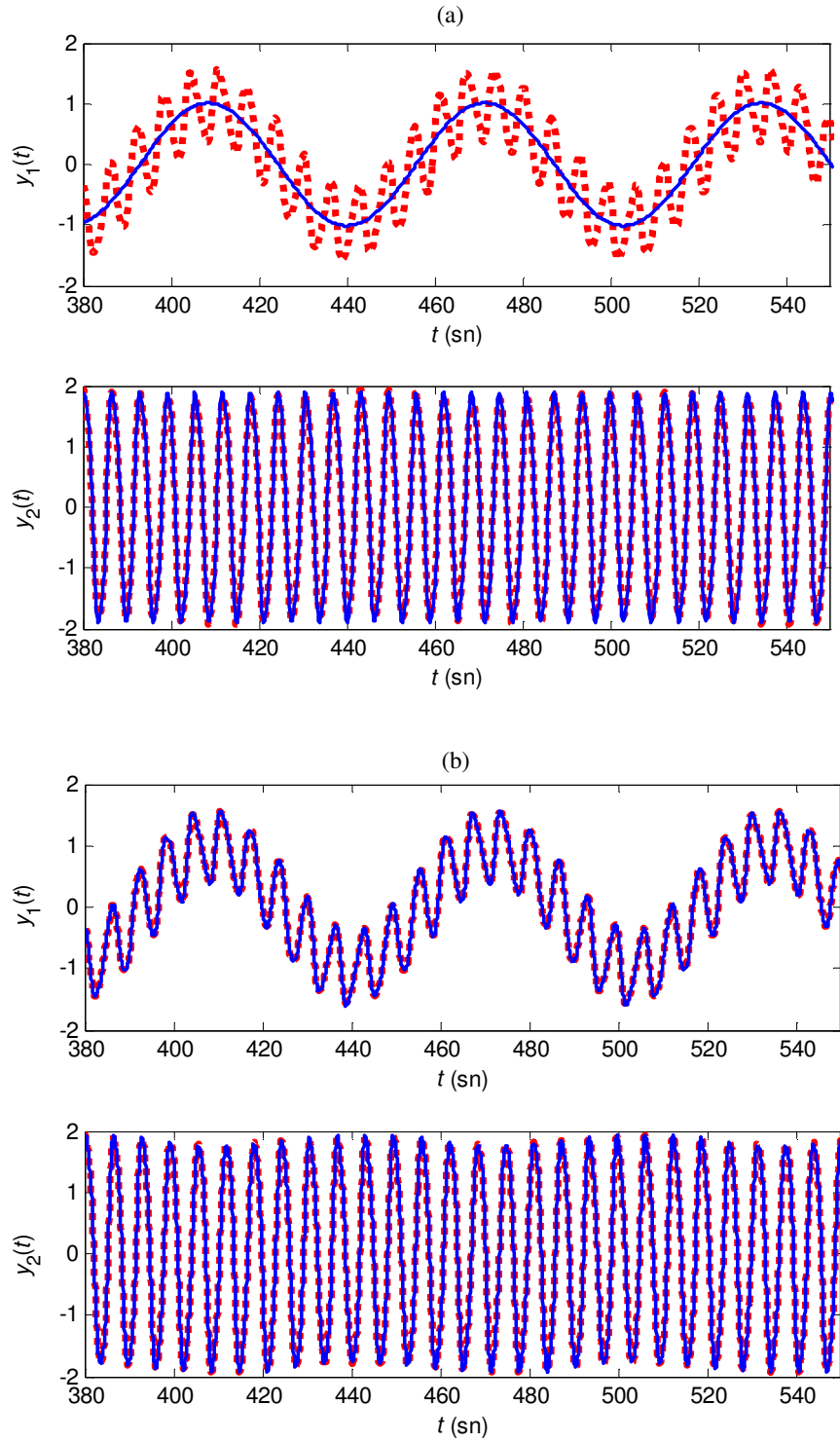
olduğunu doğrulamaktadır. Analizde kullanılan giriş sinyalleri bir katsayı ile ilişkili kabul edilip analizin tek tonlu yaklaşım ile gerçekleştirileceği durumda uygun frekans bileşenlerinin seçimi ve denge denklemleri için uygun kombinasyonların belirlenmesi güç olabilir. Örneğin girişlere uygulanan frekans bileşenlerinden biri diğerinin 10 katı olacak şekilde aşağıdaki gibi seçilebilir.

$$\left. \begin{aligned} u_1(t) &= a_{u_1}^1 \cos(\omega t) \\ u_2(t) &= a_{u_2}^2 \cos(10\omega t) \end{aligned} \right\} \quad (5.62)$$

Bu sinyal formlarından birincisinin uygulanacağı alt sistem için temel ve üçüncü harmonik kabul edildiğinde çıkışta  $\omega$  ve  $3\omega$  bileşenleri kabul edilebilir. Aynı harmonikler ikinci çıkış için de kabul edilirse, bu durumda ikinci girişe uygulanan  $10\omega$  temel frekanslı bileşenler ihmal edilmiş olur. Bundan dolayı ikinci çıkış için  $10\omega$  ve üçüncü harmoniği  $30\omega$  şeklinde ikinci çıkış için sinyal formu kabul edilebilir.

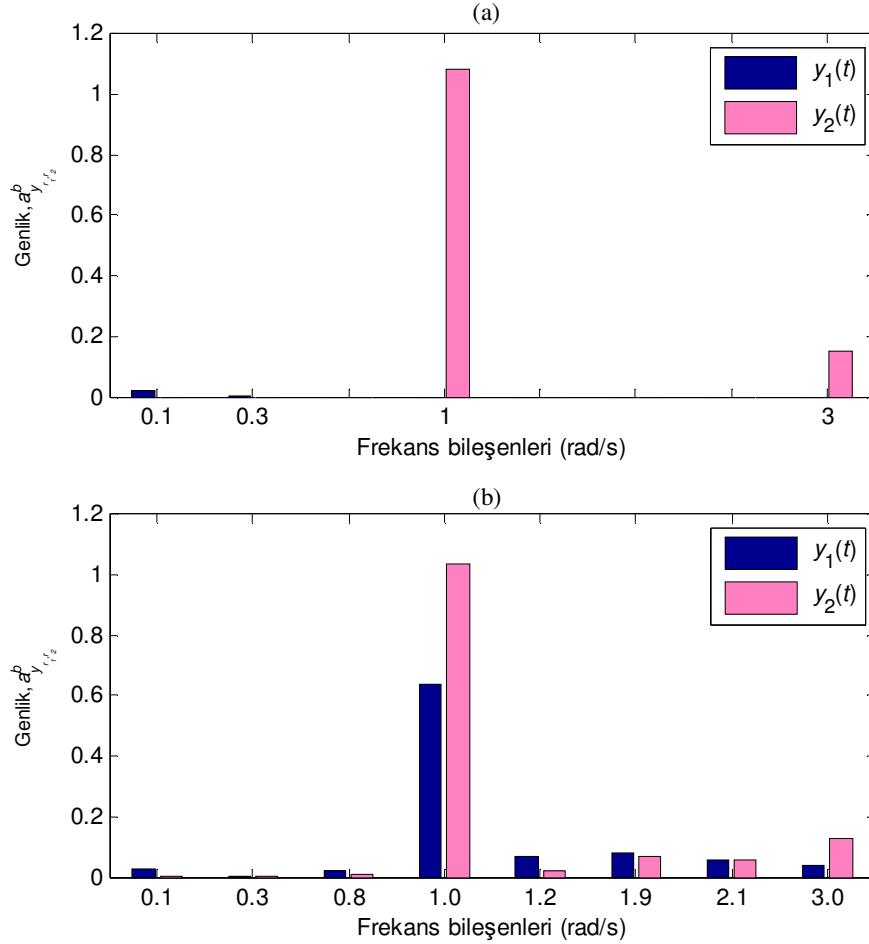
$$\left. \begin{aligned} y_1(t) &= a_{y_1}^1 \sin(\omega t + \phi_{y_1}^2) + a_{y_3}^1 \sin(3\omega t + \phi_{y_3}^1) \\ y_2(t) &= a_{y_{10}}^2 \sin(10\omega t + \phi_{y_{10}}^2) + a_{y_{30}}^2 \sin(30\omega t + \phi_{y_{30}}^2) \end{aligned} \right\} \quad (5.63)$$

Örneğin  $\omega=0,1$  rad/s alınarak çözümlenmeler gerçekleştirildiğinde alt sistemlere ait çıkış sinyalleri Şekil 5.10 (a)'da görüldüğü gibi elde edilir. Dikkat edilirse sayısal simülasyon ile HBM uygulaması sonucu elde edilen sinyaller arasındaki fark oldukça fazladır. Bu farkı gidermek için uygulanabilecek bir yaklaşım her bir çıkış için diğerine ait harmonikleri de hesaba katmak olabilir. Burada oluşan bir problem ilgilenilen kombinasyonların tek-tonlu kombinasyon üretici ile üretilmesinin güçlüğüdür. Çünkü kombinasyon üretici örneğin  $\{\omega, 2\omega, \dots, 30\omega\}$  şeklindeki toplam 30 adet bileşeni hesaba katarak ilgilenilen frekanstaki kombinasyonları hesaplar. Analizde kullanılmayan bileşenlerin elenmesinin gerekliliği işlemleri güçleştirir.



Şekil 5.10.  $\omega_1=0.1$  ve  $\omega_2=1$  rad/s için çok-tonlu analiz ile (–) ve sayısal simülasyon (...) ile elde edilen sinyal formları

Giriş sinyalleri bir tam sayının katı şeklinde ilişkili olduğu durumlarda da analiz gerçekleştirilirken bazen çok-tonlu şekilde düşünmek işlemleri kolaylaştırabilir. Giriş bileşenlerinin temel ve üçüncü harmoniklerinin yanında bunlara ait karışım bileşenler Denklem 5.15’de verildiği gibi düşünülerek hesaplanabilir. Aynı frekans bileşenleri için çok-tonlu algoritma uygulandığında elde edilen sayısal simülasyon sonuçları ile uyumluluğu Şekil 5.10 (b)’de sunulduğu gibi açıkça görülür.



Şekil 5.11.  $\omega_1=0.1$  ve  $\omega_2=1$  rad/s için (a) tek-tonlu ve (b) çok-tonlu frekans bileşenleri

Tek ve çok tonlu analizlere ait bileşenlerin genlik değerleri kıyaslandığında çok-tonlu analizde fazladan kullanılan bileşenlerin önemli genlik seviyelerine sahip olduğu Şekil 5.11 (a) ve (b)’de görülmektedir. Çok-tonlu durumda yalnızca üçüncü dereceden terimlerin etkileşiminden oluşan bileşenler seçilmiştir. Tek tonlu durumda bu bileşenleri seçebilmek için yine yalnızca çok-tonlu durumda kabul edilen bileşenler analizde kullanılabilir.

### 5.5. Sonuçlar

Bu bölümde, çok-tonlu sembolik HBM uygulamasını daha geniş bir alana taşımak amacıyla MIMO sistemleri de kapsayan bir algoritma sunulmuştur. Çok-tonlu algoritma ile kullanılan sinyal bakımından sağlanan çeşitliliğe ek olarak yöntemin kapsadığı sistem yapısı da böylece daha genel bir forma taşınmuştur. Bu amaçla öncelikle polinom tip doğrusal olmayan terimler içeren SISO sistemlerin sunumuna benzer tarzda MIMO sistemlerin genel formda tanımlanmasını sağlayan bir ifade geliştirilmiştir. Giriş ve çıkış için analizde kullanılan genel sinyal formu çok-tonlu formda olacak şekilde tanımlanmuştur. Harmonik denge analizinin genelleştirilmiş yapıya sahip olmasına önemli bir katkı sağlayan ve SISO sistemleri de kapsayan Denklem 5.3 kullanılarak analizde kabul edilen çok-tonlu girişler için genelleştirilmiş açılımlar elde edilmiştir. Böylece tanımlanmış olan MIMO sistem yapısı için genelleştirilmiş formdaki harmonik denge denklemleri sembolik olarak elde edilmiştir. Aılımda ilgilenilen frekans bileşenlerine ait kombinasyonların ve permütasyonların otomatik olarak belirlenmesi için çok-tonlu analizde tanımlanmış olan algoritmalar kullanılmıştır. Yöntemin uygulaması iki-giriş iki-ıkışlı Duffing denklemi ile modellenmiş bir doğrusal olmayan elektriksel sistem üzerinde sunulmuştur. Elde edilen sonuçların doğruluğu gerçekleştirilen sayısal simülasyon sonuçları ile karşılaştırılarak gösterilmiştir. Çok-tonlu analiz basitleştirilmiş bir alt sınıfı konumunda olan tek-tonlu analizde uygulanan bileşenler arasındaki katsayı değeri arttığı zaman problemi çok-tonlu durumdaki gibi ele almanın işlemleri kolaylaştırdığı görülmüştür.

## **BÖLÜM 6. ÇOK-TONLU SİNYALLER İÇİN FREKANS CEVABI ANALİZİ**

### **6.1. Giriş**

Dinamik sistemlerin karakteristiklerini ortaya çıkartmak için farklı sinyaller uygulandığında davranışlarının belirlenmesi gerekir. Bunun için zaman boyutundaki analizlerin yanında, sistemin davranışını daha kapsamlı bir şekilde ortaya koyan frekans boyutu özelliklerinin analizine de başvurulur. Sistemin dinamik davranışı hakkında fikir veren frekans cevabı analizi, doğrusal olmayan SISO sistemlerde olduğu gibi daha genel bir yapıyı temsil eden MIMO sistemlerde ve diğer alt sınıflarında da kullanılan bir yaklaşımdır. Bir sistemin frekans cevabını bulmak için uygulanan bir veya birden fazla sinüzoidalden oluşan giriş için elde edilen çıkış sinyalinin genlik ve faz farkının ölçülmesi gerekir. Ölçüm değerleri geçici durumların önemsiz kabul edildiği kararlı durum aralığından seçilerek gerçekleştirilir. Bölüm 2’de tek tonlu analiz için açıklandığı gibi bu işlem belli bir frekans aralığında tekrar edildiğinde frekans cevabı elde edilir.

Çok-tonlu analizde tüm frekans bileşenlerinin katkısıyla çıkışı temsil eden sinyal için frekans cevabını elde etmek tek-tonlu duruma göre periyodik dilimlerin belirlenmesi bakımından biraz daha güçtür. Çok-tonlu giriş sinyaline ait bileşenlerin karışımları sonucu oluşan düşük frekanslı bileşenler bu sürenin uzamasına neden olduğu gibi oransız giriş bileşenleri için tekrar eden zaman dilimi teorik olarak sonsuz uzunluktadır. HBM kararlı durumları direkt olarak elde ettiği için analizde kabul edilen çıkış sinyal formundaki frekans bileşenlerine ait maksimum genliklerin frekansa bağlı çizdirilmesiyle frekans boyutundaki davranışlar kolayca elde edilir. Çok-tonlu sinyallerin kullanıldığı bir önceki bölümde tanıtılan sembolik algoritma, SISO sistemlerin HBM kullanılarak analizine ait uygulama alanını MIMO sistemlere

genişleterek etkili bir yöntem sağlar. Böylece çok-tonlu giriş sinyalleri için hem SISO hem de üst sınıflara ait frekans cevaplarını elde etmek mümkündür.

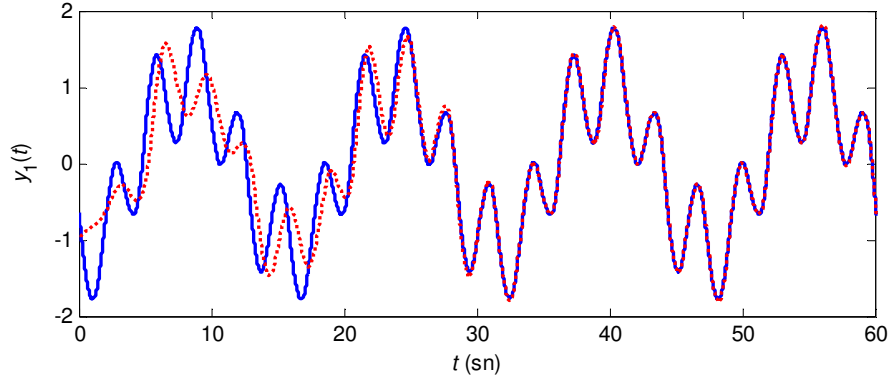
Bu bölümde, çok-tonlu HBM kullanılarak elde edilen frekans karakteristikleri üzerinde durulacaktır. MIMO sistemler için çok-tonlu sinyallerin kullanıldığı denge denklemleri için örnek olarak iki-giriş iki-çıkışlı duffing model için frekans cevapları elde edilecektir. Sonuçların doğruluğunu göstermek amacıyla kullanılan sayısal simülasyonlar ile frekans cevabının elde edilişi açıklanacaktır. Ardından giriş sinyallerinden birinin frekansı sabit tutularak diğer girişteki frekans bileşenine göre frekans cevabının elde edilişi yer alacaktır. Bu işlem diğer girişin genlik seviyesinin frekans cevabına etkilerini ortaya koymak amacıyla farklı genlik değerleri için karşılaştırmalı olarak sunulacaktır. Benzer şekilde girişlerden birindeki farklı bir frekans bileşeninin diğer çıkışa ait frekans spektrumu üzerindeki etkileri de incelenecektir. Bunların yanında MIMO sistemler için çok-tonlu analize ek olarak frekans bileşenleri arasındaki etkileşimlerin daha basit tanımlandığı tek-tonlu durum ele alınacaktır.

## 6.2. Çok-Tonlu Sinyaller İçin Sayısal İntegrasyonlar İle Simülasyonlar

Frekans cevabı gerek sayısal simülasyonlarla gerekse HBM’de kabul edilen sinyal formu için elde edilirken her bir frekans noktası için çıkışa ait periyodik dilimlerin belirlenmesi gerekir. Bu işlem tek-tonlu duruma göre sistemin çıkış sinyaline ait periyodun belirlenmesi bakımından daha güçtür. Düşük frekanslı harmonikler periyot süresinin uzamasına neden olabildiği gibi uygulanan frekans bileşenlerinin irrasyonel olması durumunda tekrar eden zaman dilimleri bulunamaz. Periyot uzunluğunun sonsuz olarak kabul edildiği bu durumda periyodik dilime ait kararlı durum sinyalinin zaman boyutunda ifade edilmesi mümkün değildir. Sayısal simülasyonun gerçekleştirilmesinde uygulanabilecek olan bir yaklaşım kullanılan periyot süresini  $|r_1\omega_1 + \dots + r_\sigma\omega_\sigma|$  ifadesinin alabileceği sıfırdan büyük en küçük değere göre belirlemek olabilir. Temel frekansları katsayıları,  $r_1, \dots, r_\sigma$  tam sayı değerler olduğuna göre en uzun periyoda sahip bileşen  $\omega_1$  veya  $\omega_2$  frekanslarının ondalıklı basamak sayısı ile ilişkilidir. Örneğin  $\omega_1=0,4$  ve  $\omega_2=2$  rad/sn değerleri için sayısal simülasyon gerçekleştirilirse Şekil 6.1’de görüldüğü gibi bir süre geçici durumlar sergilenir.

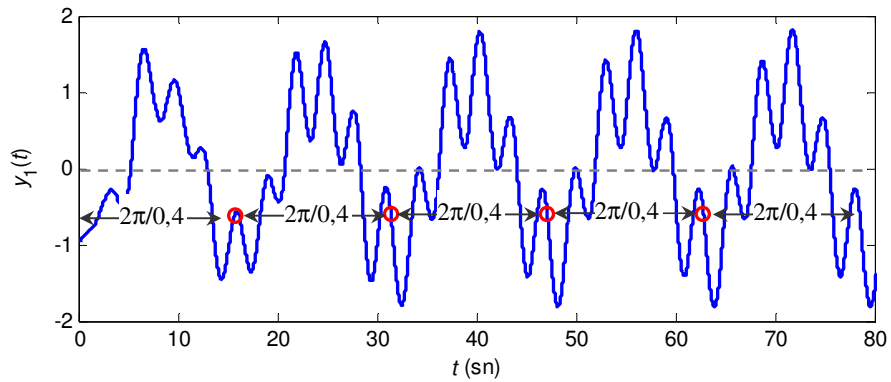


HBM sonucu elde edilen veriler ile kıyaslandığında iki sinyale ait fark, tek tonlu durumda da ifade edildiği gibi, kararlı duruma doğru ilerledikçe kapanır.



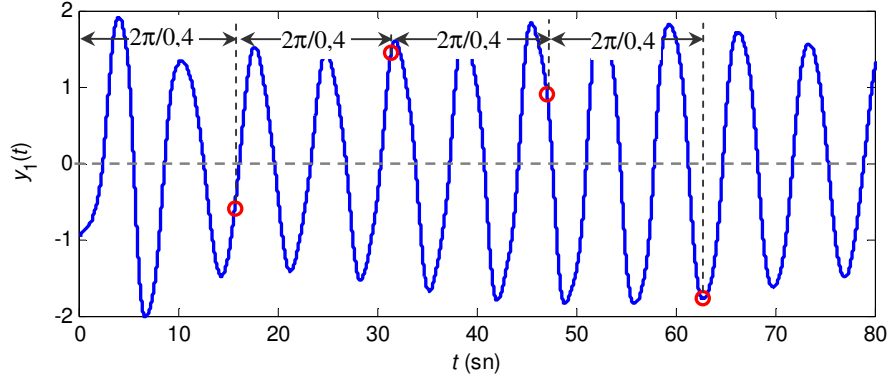
Şekil 6.1. Başlangıç durumlarıyla birlikte analiz (—) ve sayısal simülasyon (...) sonuçları

Sinyal görsel olarak incelendiğinde Şekil 6.2’de görüldüğü gibi tekrar eden dilime ait süre  $T_p = 2\pi/0,4$  sn uzunluğundadır. Uygulanan frekans bileşenleri için  $|r_1 0,4 + r_2 2|$  toplamının alabileceği en küçük değer 0,4 olduğu görülür. Denklem 4.70’e göre periyotlar arasındaki hata miktarı Şekil 6.2’deki sinyal için örneğin 1000 adet örnek ile tanımlanmış ikinci, üçüncü ve dördüncü  $2\pi/0,4$  sn uzunluklu dilimler için oluşan hata değerleri sırasıyla yaklaşık olarak  $\{ 11,824; 8,355; 4,905 \}$  elde edilir. Bu değerlerin birbirini takip eden periyotlar için küçülerek elde edilmesi seçilen sürenin periyodik dilimleri kapsadığını ve sonucun kararlı duruma doğru ilerlediğini gösterir.



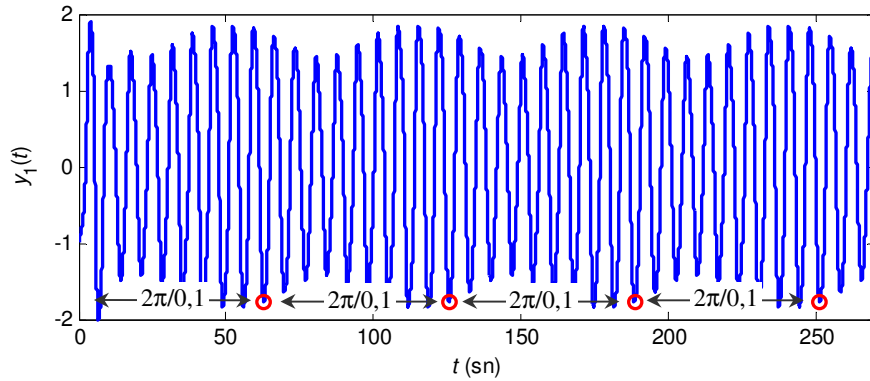
Şekil 6.2.  $\omega_1=0,4$  ve  $\omega_2=2$  rad/s için periyodik dilimler

Örneğin uygulanan frekans bileşenleri  $\omega_1=0,9$  ve  $\omega_2=1$  alınarak sayısal simülasyon gerçekleştirildiğinde tekrar eden zaman dilimi yine  $2\pi/0,4$  sn seçilirse ardışık periyotlar arası hatalar  $\{ 18,307; 20,020; 32,767 \}$  şeklinde düzensiz değerler vererek değişir. Bu durum, Şekil 6.3'de görüldüğü gibi sinyal grafiksel olarak incelendiğinde uygun olmayan  $T_p$  süresinin seçiminden ortaya çıkmaktadır.



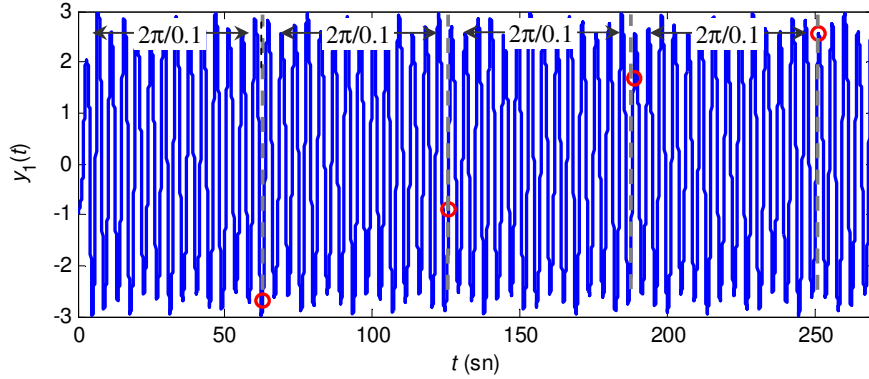
Şekil 6.3.  $\omega_1=0,9$ ,  $\omega_2=1$  rad/s ve  $T_p=2\pi/0,4$  için periyodik olmayan dilimler

Eğer  $\omega_1$  ve  $\omega_2$  bileşenleri incelenirse  $|r_1 0,9 + r_2 1|$  toplamının alabileceği en küçük değer  $0,1$  olduğu görülür. Tekrar eden periyot uzunluğu  $2\pi/0,1$  sn olarak seçilirse hata değerleri  $\{ 21,712; 4,214; 3,430e-004 \}$  olarak azalan şekilde sonuçlanır. Sinyal grafiksel olarak sunulursa tekrar eden periyot sürelerinin  $2\pi/0,1$  sn olduğu Şekil 6.4'de görüldüğü gibi açıktır.



Şekil 6.4.  $\omega_1=0,9$ ,  $\omega_2=1$  rad/s ve  $T_p=2\pi/0,1$  için periyodik dilimler

Tekrar eden dilim en düşük frekans göz önünde bulundurularak  $T_p = 2\pi/0,1$  seçildiğinde bir önceki durum için hatalar hesaplanırsa; { 12,733; 5,912; 0,004} şeklinde hata değerlerinin her dilimde giderek azaldığı görülür. Dolayısıyla en uzun zaman dilimini seçmek bazı frekans bileşenleri için birden fazla tekrar eden dilimi içerse de simülasyon süresinin uzamasından başka doğruluğu etkilemez. Frekans bileşenlerinin irrasyonel olması durumundaysa tekrar eden bir zaman dilimini belirlemek mümkün olmayabilir. Örneğin  $\sqrt{2}$  rad/s gibi bir giriş frekans bileşeni için teorik olarak tekrar eden zaman dilimi yoktur veya sonsuz uzunluktadır denilebilir. Bu frekans bileşeni için yine  $T_p = 2\pi/0,1$  sn uzunluklarla gerçekleştirilen sayısal simülasyonlar için hatalar kıyaslandığında { 46.820; 43.798; 41.020} şeklinde düzensiz olarak elde edilmiştir. Şekil 6.5 incelendiğinde sinyal maksimum genlikler bakımından kararlı gibi görünse de tekrar eden periyodu görsel olarak belirlemekte mümkün değildir.

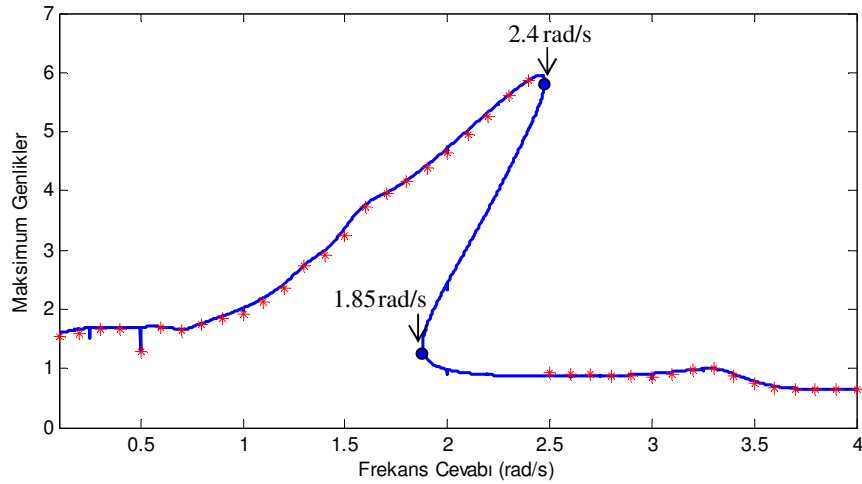


Şekil 6.5.  $\omega_1 = \sqrt{2}$ ,  $\omega_2 = 1$  rad/s ve  $T_p = 2\pi/0,1$  için zamana bağlı çıkış

HBM çok-tonlu durum için gerçekleştirildiğinde, simülasyon yöntemine benzer şekilde karşılaşılan bir problem de toplam çıkış cevabına ait maksimum genliklerin belirlenmesidir. HBM zaten kararlı durumları direkt olarak verdiği için sayısal simülasyonda olduğu gibi geçici durumların oluşması söz konusu değildir. Bununla birlikte hesaplanan parametreler için kabul edilmiş olan sinyal formuna ait maksimum genlikleri bulmak amacıyla tekrar eden dilimin seçilmesi gerekir. Yukarıdaki grafiksel açıklamalarla da belirtildiği gibi tekrar eden dilimi bulmak için zaman aralığı kullanılan adım değerine bağlı olarak seçilebilir.

### 6.3. Çok-Tonlu HBM İle Frekans Cevabı Analizi

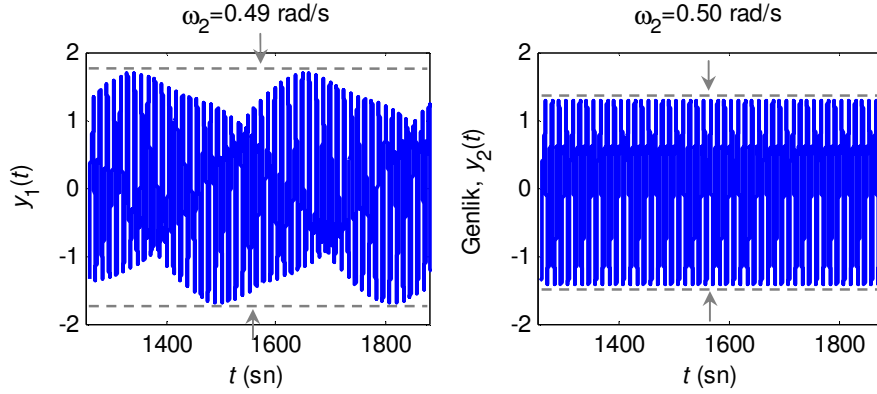
HBM kullanılarak frekans cevabının elde edilebilmesi için öncelikle kabul edilmiş giriş ve çıkış sinyal formları için denge denklemlerinin hesaplanması gerekir. Böylece istenilen frekans aralığında her bir frekans bileşeni için denge denklemleri çözümlenerek frekans cevabı elde edilebilir. Örnek bir sistem üzerinde iki-giriş iki-çıkışlı Duffing model için hesaplanmış olan denge denklemleri kullanılacaktır. Örneğin, verilen  $\omega_1 = \{0,1; 0,2; \dots ; 3,9; 4\}$  rad/s aralığı ve  $\omega_2 = 1$  rad/s için tüm sayısal simülasyon noktalarında ardışıl iki periyot arası hata istenilen toleransın altında gerçekleştirildikten sonra harmonik denge analizine ait aynı aralık için 0,01 rad/s aralıklarla alınan sonuçlarla birlikte maksimum genliklere ait frekans cevabı Şekil 6.6'daki gibi elde edilmiştir. Görüldüğü gibi yaklaşık 2,46 rad/sn'de atlama olayı oluşmuştur.



Şekil 6.6. Harmonik denge (-) ve sayısal simülasyon (\*) sonuçları

Frekans cevabında dikkati çeken bir nokta 0,5 rad/s'de maksimum genlikte meydana gelen düşüştür. Bu noktada, bir önceki ve sonraki frekans değerlerine ait zaman boyutunda cevaplar Şekil 6.7'de görüldüğü gibi değişmiştir.  $\omega_1 = 0,49$  rad/s için düşük frekanslı karışım frekansları çıkış sinyalinde önemli etkiye sahip olurken  $\omega_1 = 0,5$  rad/s için elde edilen çıkış sinyalinde bir öncekinde gözlenen zarflar etkisini kaybetmiştir. Benzer değişimler sistemin doğrusal olmama derecesinin etkisine bağlı

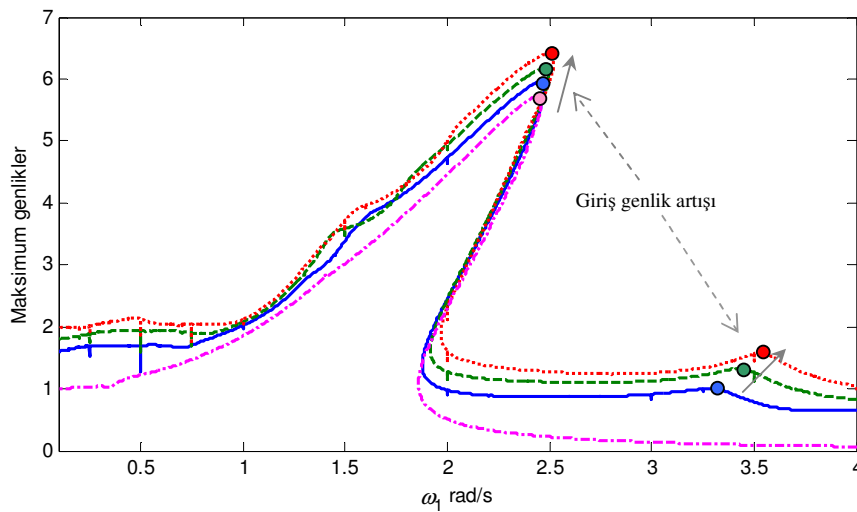
olarak farklı frekans noktalarında da düşük frekanslı karışım bileşenlerinin oluşturduğu zarfların etkisiyle ortaya çıkabilir.



Şekil 6.7.  $\omega_1=0,49$  ve  $\omega_1=0,5$  rad/sn frekanslarında sayısal simülasyona ait sonuçlar

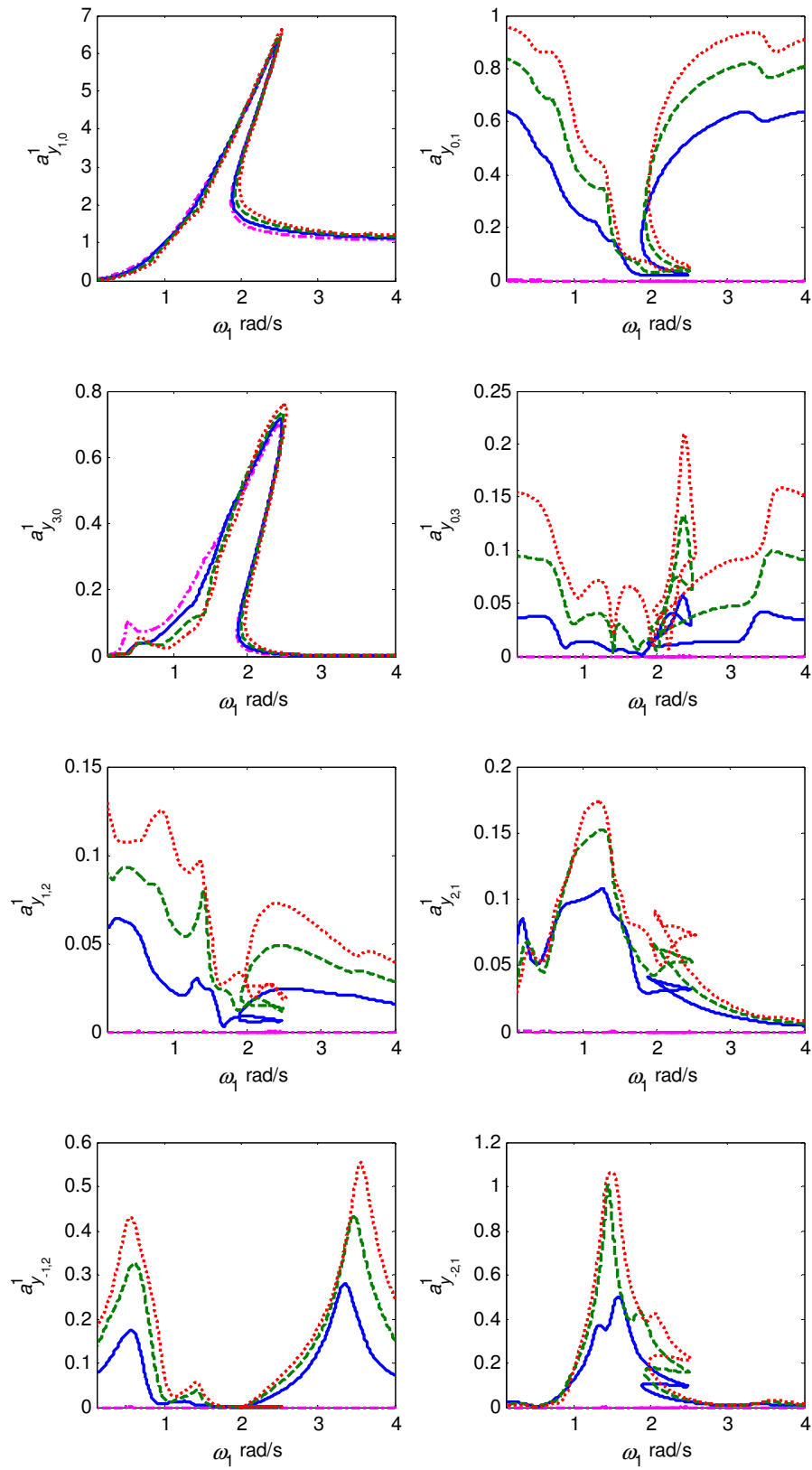
### 6.3.1. Giriş genliğindeki değişimin etkisi

Alt sistemlerden birinin girişi için frekans cevabı çıkartılırken diğer girişlerin aldığı değerler sergiledikleri frekans karakteristiklerinde önemli etkilere sahip olabilir. Bu durumu açıklamak amacıyla örneğin,  $a_{u_{1,0}}^1=1$  olarak sabit tutulup,  $a_{u_{0,1}}^2=\{0; 1; 2; 3\}$  genlik değerleri için değiştirildiğinde frekans cevabı üzerindeki etkisi Şekil 6.8'de karşılaştırmalı olarak verilmiştir.



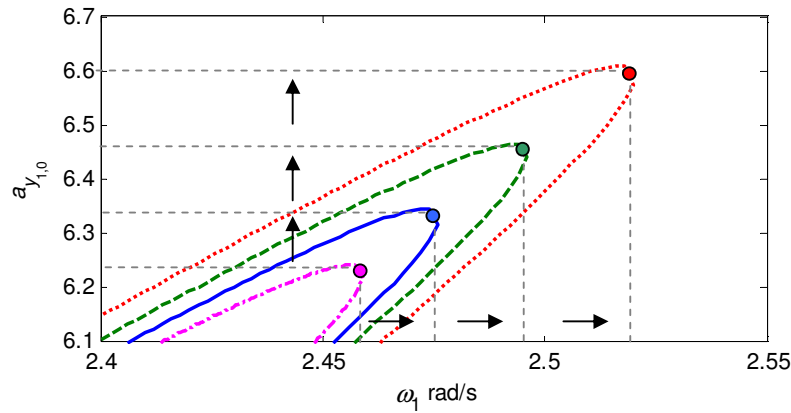
Şekil 6.8.  $a_{u_1}=1$  ve  $a_{u_2}=0$ , (---);  $a_{u_2}=1$ , (- -);  $a_{u_2}=2$ ,(- · -);  $a_{u_2}=3$ ,(···) genlik değerleri için  $y_1(t)$  çıkışına ait frekans cevapları

Frekans cevabında rezonans noktalarına ait maksimum genlikler  $a_{u_{0,1}}^2$  giriş sinyalinin her bir genlik seviyesi için sırasıyla {5,72; 5,95; 6,17; 6,41} şeklinde her bir genlik değeri için farklı değişim gösterirken, rezonans frekansları ise sırasıyla {2,43; 2,45; 2,47; 2,49} şeklinde değişerek  $a_{u_{0,1}}^2$  genliği arttıkça rezonansın olduğu frekans değeri frekans düzleminde ilerlemiştir. Maksimum genliklere ait frekans cevabını elde etmek tek-tonlu duruma göre güç olsa da çıkış sinyalini temsil eden harmonik ve karışım bileşenlerin genliklerinin zamandan bağımsız olması, bunlara ait frekans cevaplarının kolayca elde edilmesini sağlar. Şekil 6.9'da  $a_{u_{0,1}}^2$ 'ye ait farklı giriş genliklerine göre çıkış frekans bileşenlerinin maksimum genlikleri karşılaştırmalı olarak görülmektedir.  $a_{u_{0,1}}^2$ 'nin genliğine bağlı olarak  $\omega_2$ 'ye ait  $a_{y_{0,1}}^1$  ve üçüncü harmoniği temsil eden  $a_{y_{0,3}}^1$  bileşenlerinin yanında karışım frekanslarında da uygulanan genliğe benzer oranlarda değişimler meydana gelmiştir. Bunun yanın da  $a_{u_{0,1}}^2$ 'nin genliğinin artmasıyla, çıkışın  $\omega_1$  ve  $3\omega_1$  bileşenlerinin genliklerinde azalmalar dikkati çekmektedir.



Şekil 6.9.  $a_{u_2} = 0$ , (- -);  $a_{u_2} = 1$ , (-);  $a_{u_2} = 2$ , (- - -);  $a_{u_2} = 3$ , (····) için frekans bileşenleri

$y_1(t)$  çıkışına ait cevapta en etkin davranışa sahip bileşen girişe uygulanmış olan  $\omega_1$  frekansına ait genlik değerini tanımlayan  $a_{y_{0,1}}^2$  değişkenidir. Bu bileşen üzerinde diğer girişe ait genlik değişiminin etkisi diğerlerine kıyasla az gibi gözükse de Şekil 6.10'daki gibi büyütülerek incelendiğinde atlama noktalarının giriş genlik değerinin artmasıyla tepe noktasına ait genlik değeri artmıştır. Ayrıca, atlamaların olduğu frekans değerinin de genlik artışı ile birlikte yatay  $\omega_1$  ekseninde de ilerlediği görülmektedir.



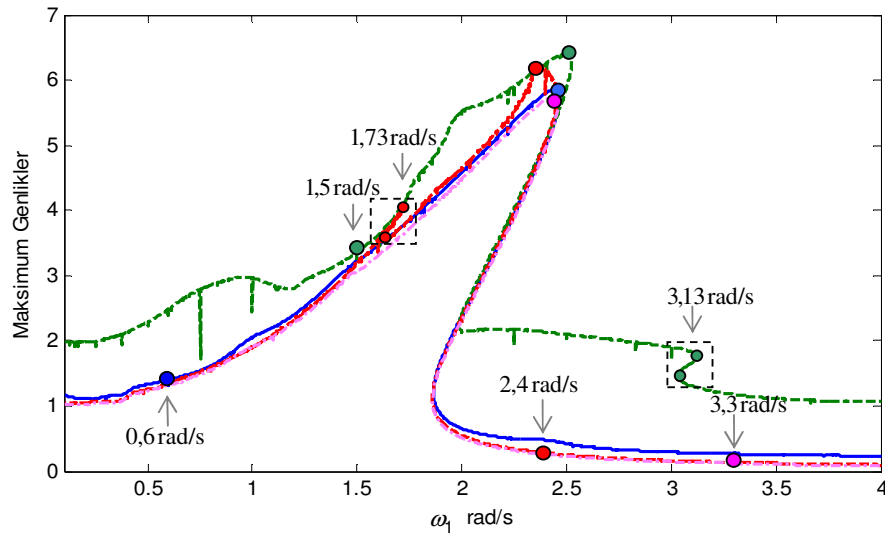
Şekil 6.10.  $y_1(t)$  çıkışına ait temel harmonikte genlik değişimine bağlı olarak atlama noktaları

### 6.3.2. Giriş frekans bileşenlerinin etkisi

DOS'ların frekans karakteristikleri giriş genlik seviyelerinin yanında, girişlerinde bulunan frekans bileşeni adedine bağlı olarak önemli ölçüde farklı özellikler gösterebilir. MIMO yapıdaki bir sistemde frekans cevabı incelenen bir alt sistemin çıkışına ait frekans karakteristikleri ilgili alt sistemin giriş frekans bileşenlerine bağlı olduğu kadar diğer girişlere uygulanan frekans bileşenlerinin içeriği ile de ilişkilidir. Verilen örnekte girişlere ait genlik seviyeleri  $a_{u_{1,0}}^1 = a_{u_{0,1}}^2 = 1$  ve  $u_2$  girişinin içerdiği frekans değerleri sırasıyla  $\omega_2 = \{0,6; 1,5; 2,4; 3,3\}$  seçilerek  $\omega_1$ 'e bağlı maksimum genliklerden oluşan frekans cevapları çizdirildiğinde Şekil 6.11'deki gibi karşılaştırmalı olarak elde edilebilir. Rezonans noktalarına ait maksimum genlikler yaklaşık olarak her bir  $\omega_2$  için farklı değerler almış ve bunlar,  $\omega_1$  ekseninde farklı

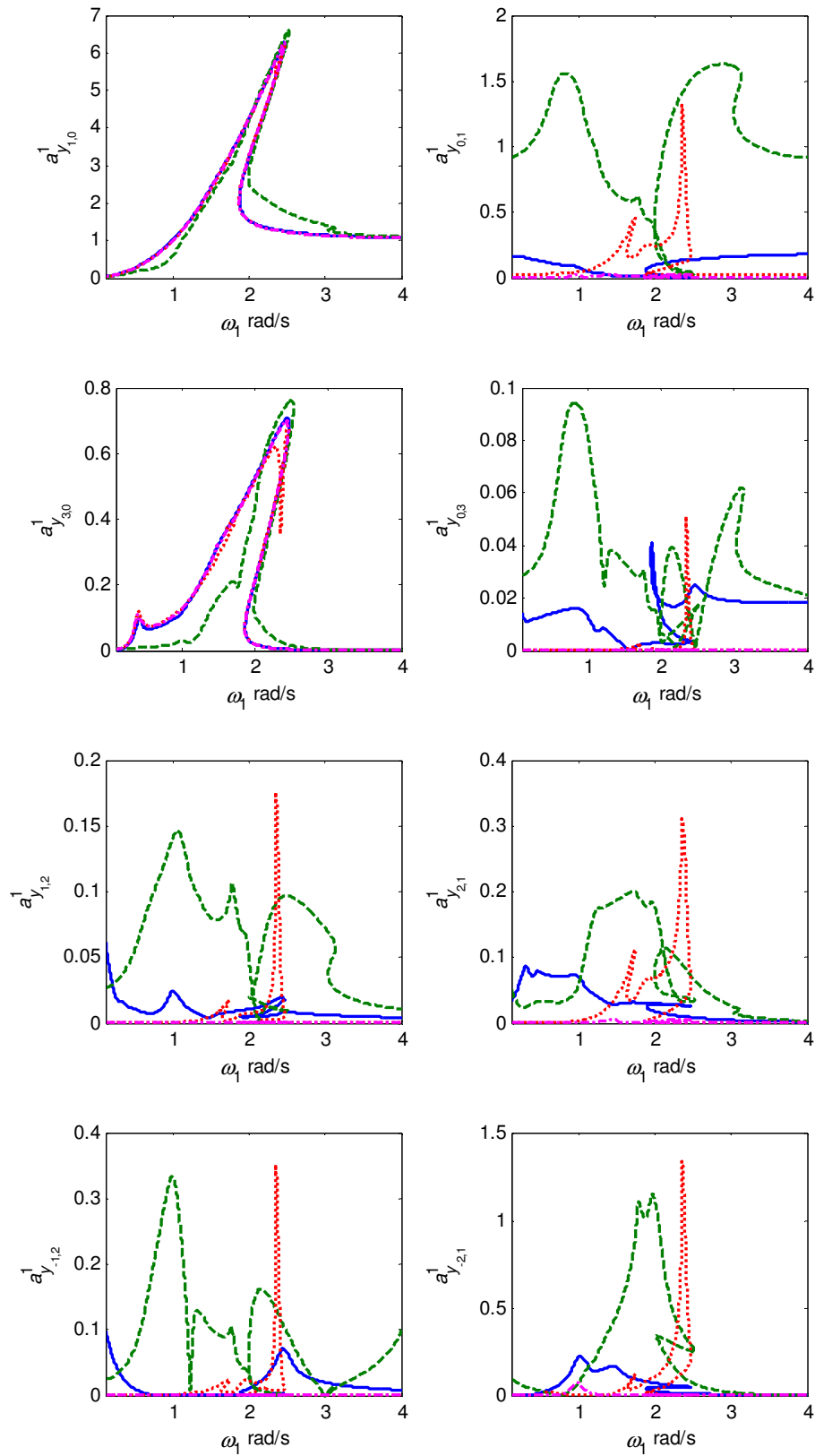


noktalarda gerçekleşmiştir. Genlik artışı ile  $\omega_1$  eksenindeki frekans değerleri de ileri doğru artarken frekans artışı ile  $\omega_1$  ekseninde benzer bir artış ortaya çıkmamıştır. Bunun yanında  $\omega_2=2,4$  rad/s için  $\omega_1=1,73$  rad/s'de ve  $\omega_2=1,5$  rad/s için de  $\omega_1=3,13$  rad/s civarlarında atlama olayı gerçekleşmiştir. Bu durum, diğer bir girişe uygulanan frekans bileşenin maksimum değerleri değiştirebileceği gibi frekans karakteristiğinde farklı noktalarda atlama olaylarının gerçekleşmesine sebep olabileceğini açıkça ortaya koyar.



Şekil 6.11.  $\omega_2 = \{ 0,6 (—); 1,5 (\cdots); 2,4 (-\cdot-); 3,3 (---) \}$  rad/s için frekans cevapları

Şekil 6.11 karşılaştırmalı olarak incelendiğinde  $\omega_2=1,5$  rad/s için elde edilen cevap diğerlerine kıyasla daha farklı karakteristikler sergilemiştir.  $\omega_2=0,6$  rad/s ve  $\omega_2=3,3$  rad/s için frekans cevapları birbirine oldukça yakın ortaya çıkmıştır. Seçilen frekans noktalarının genliğin düşük seviyelerde olduğu rezonans bölgesinden uzak kısımlarda olması, frekans cevabına olan etkilerinin azalması şeklinde ortaya çıkmıştır.



Şekil 6.12.  $\omega_2=0.6$  (—); 1,5 (···); 2,4 (---); 3,3 (— ·) rad/s için frekans cevapları

Çıkış sinyalinin tanımlamada kullanılan bileşenlere ait frekans cevapları karşılaştırmalı olarak Şekil 6.12’de verilmiştir.  $\omega_1$  bileşeninin temel ve üçüncü harmoniğini belirten  $a_{y_{1,0}}^1$  ve  $a_{y_{3,0}}^1$  için frekans cevaplarında diğerlerine kıyasla direkt olarak  $\omega_2$  ile ilişkili olmadığı için daha az değişim gözlenmiştir.  $\omega_2$  bileşeninin temel harmoniğini temsil eden  $a_{y_{0,1}}^1$  değişkeni ise 1,5 rad/s değerinde yüksek genliklere sahip spektrum sergilemiştir. Bu etki  $\omega_2$  ile ilişkili tüm bileşenlerde açıkça görülmektedir. Benzer şekilde  $\omega_2=3,3$  rad/s değerinde  $a_{y_{0,1}}^1$  temel bileşeni oldukça düşük bir genlik değeri gösterdiği için ilişkili tüm bileşenler incelendiğinde bu etki görülebilir.

#### 6.4. Sonuçlar

Bu bölümde, HBM yönteminin çok-tonlu analizini kapsayan uygulamaları kullanılarak örnek bir doğrusal olmayan sistem modeline ait frekans boyutu karakteristiklerinin giriş bileşenlerine bağlı davranışları incelenmiştir. Elde edilen sonuçların doğruluğunu göstermek amacıyla sayısal integrasyonlar ile gerçekleştirilen simülasyonlar kullanılmıştır. Çok-tonlu sinyaller için gerek zaman boyutunda gerçekleştirilen sayısal simülasyonlar, gerekse HBM analizi sonucu çıkış için elde edilen sinyallere ait periyodik dilimleri belirlemek tek bir frekans bileşeni ile ilişkili olmadığı için tek-tonlu duruma göre biraz daha güçtür. Özellikle kullanılan frekans bileşenlerinin irrasyonel olması durumunda kararlı durum sinyalinin sayısal simülasyonlar ile belirlemek mümkün değildir. HBM kararlı durum dilimlerine ait genlikleri direkt olarak hesapladığı için frekans bileşenlerinin rasyonel veya irrasyonel olması yöntemin uygulamasına bir etki oluşturmaz ve bundan dolayı sinyalin frekans bileşenlerini belirlemek daha kolaydır. Çıkışa ait maksimum genliklerin belirlenmesinde sayısal simülasyon yönteminde olduğu gibi geçici durumlar söz konusu değildir. Buna karşın tekrar eden dilimin belirlenmesi sayısal simülasyonda olduğu gibi problem oluşturur. Verilen örneklerdeki grafiklere ait açıklamalarla da belirtildiği gibi tekrar eden dilimi bulmak için zaman aralığı, frekans cevabının elde edilmesinde kullanılan artış değerine bağlı seçilebilir.

HBM analizi sonucu elde edilen frekans cevabının doğruluğu sayısal simülasyon cevabı ile Şekil 6.6’da görüldüğü gibi karşılaştırılarak gösterilmiştir. Geliştirilen HBM kullanılarak verilen örnekte ikinci girişe ait genlik ve frekans değerlerinin birinci çıkışa ait frekans cevabı üzerindeki etkileri sunulmuştur. Frekansa bağı olarak maksimum genliklere ait cevabı elde etmek için gerek tek-tonlu gerekse çok-tonlu durumda cevabın tekrar eden dilimi kapması gerekir. Bununla birlikte, her iki durum için de çıkış sinyalinin temsil eden harmonik ve karışım bileşenlerin genliklerin zamandan bağımsız olması, bunlara ait frekans cevaplarının kolayca elde edilmesini sağlar. Böylece analizde kabul edilen harmonik ve karışım bileşenlerin üzerindeki etkileri de Şekil 6.9 ve Şekil 6.12’de karşılaştırılarak gösterilmiştir.

## BÖLÜM 7. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Doğrusal olmayan dinamik sistemlerin girişine uygulanan sinüzoidaller formundaki giriş sinyalleri için kararlı durumlara ait yine sinüzoidaller formunda kabul edilen çıkış bileşenlerine ait genlik değerleri HBM ile direkt olarak elde edilebilir. Bu işlem kararlı durumların arandığı ve gerçekleştirilen tez çalışmasında sonuçların doğruluğunu göstermek için kullanılmış olan sayısal modellerin simülasyonuna göre daha avantajlıdır. HBM sonucu elde edilen denklemler kullanılarak, Bölüm 2’de detaylı olarak ifade edildiği gibi zaman boyutundaki kararlı durum sinyallerinin yanında giriş sinyali frekansının değiştirilmesiyle, istenilen bir aralık için çözümlenmeler gerçekleştirilebilir. Böylece toplam çıkış sinyaline ait maksimum genlikler veya sinyali tanımlayan bileşenlerin frekans boyutundaki davranışları elde edilebilir. Analizlerde kullanılan sinyallerin genliğinin yanında frekans bileşenlerine karşı bağımlılık DOS’ların sahip oldukları davranışların birden fazla frekans bileşeni için incelenmesi gerekliliğini gösterir. Birden fazla harmonikten oluşan tek-tonlu giriş sinyali tanımlanmasının yapılabildiği sembolik formda bir HBM algoritması Bölüm 3’te detaylı olarak ele alınmış ve örnekler üzerinde uygulaması gösterilmiştir. Bu algoritma ile harmonik denge denklemleri giriş ve çıkış sinyal formlarının karmaşık sayı formundaki genlikleri ve sistemi tanımlayan model katsayıları cinsinden ifade edilebilir. Bununla birlikte, analiz yöntemi sistemin polinom tip doğrusal olmayan terimler içeren diferansiyel denklemler ile tanımlanabilen sistemler için uygulanabilir.

Giriş sinyal formunun harmonik olarak ilişkisiz bileşenlerden oluştuğu çok-tonlu analizlerde, çıkış bileşenleri girişteki temel harmoniklerin katlarına ek olarak bunların karışımlarını içerdiği için tek-tonlu sinyalleri kapsayan sembolik HBM algoritması uygulanamaz. Bu durum, iki harmonik olarak ilişkisiz bileşenden tanımlanan sinyal doğrusal olmayan bir fonksiyona uygulandığında açılım gerçekleştirilerek Denklem 4.3 ile açıkça gösterilmiştir. Her ne kadar elde edilen

açılım belli frekans bileşenlerini içerse de dinamik sistemlerin geri beslemeli yapısından dolayı bu bileşenler teorik olarak sonsuz adettir. Böyle bir çıkış sinyali  $\sigma$  adet harmonik olarak ilişkisiz frekans bileşeni ve  $R_x$  adet harmoniklerini içerecek şekilde, Denklem 4.4 ile verilen ifade ile hem girişi hem de çıkışı temsil eden genel bir formda tanımlanmıştır. Tek-tonlu duruma benzer şekilde genel sinyal formu HBM algoritmasının tasarımında temel alınan polinom tip diferansiyel denklemde yerine konularak açılım gerçekleştirilmiştir. Doğrusal olmayan fonksiyoneller ile analizde düşünülen sistem formunun alt sınıfları olan giriş veya çıkış ve giriş-çıkış çarpım terimlerine ait açılımlar için genel ifadeler türetilmiştir. Kombinasyonlar ve onlara ait permütasyonlar şeklinde düzenlenen ifadeler ilgilenilen frekans bileşenlerinin otomatik olarak seçiminde önemli rol oynar. Yapılan sembolik tanımlamalar kullanılarak istenilen bir  $\omega$  çıkış frekansı için harmonik denge denklemleri gibi sembolik formda Denklem 4.26 ile elde edilebilir. Genel sinyal formunda her bir temel bileşen için  $R_x$  adet harmonik kullanıldığında çıkış bileşenleri kutu sınırlama olarak da adlandırılan bir yöntem ile frekans düzleminden seçilmiş olur. Bu yöntem için frekans bileşenlerine ait kombinasyonlar ve onların permütasyonlarını üreten özyinelemeli algoritmalar hesaplamının gerçekleştirildiği çıkış bileşenine ait terimler kolayca elde edilir.

Yöntemin uygulamasını göstermek amacıyla Duffing-Van der Pol sisteminin analizinde iki tonlu ve sabit bileşen içeren giriş kullanılmıştır. Denge denklemleri oluşturularak çözümlenmeler gerçekleştirildiğinde elde edilen sonucun doğruluğu sayısal simülasyonlardan elde edilen kararlı durum sinyali ile kıyaslanarak gösterilmiştir. Bunun yanında, giriş genliğinin artırılmasıyla doğrusal olmayan terimlerin etkisi sonucu harmonikler ve karışım bileşenlerin genliklerinin ve bununla birlikte hata miktarının arttığı gözlenmiştir. Bu durum ihmal edilen bileşenlerin etkinliğinin artması sonucu ortaya çıkar. Oluşan hatayı telafi etmek amacıyla çıkışta kabul edilen frekans bileşeni sayısının artırılmasıyla birlikte hata seviyesinin azaldığı gözlenmiştir. Bunların yanında, analizde kullanılan girişin sabit bileşen içermediği durumda çıkıştaki çift dereceden bileşenlerinin etkisinin sıfır olduğu gösterilmiştir.

Çok-tonlu analizde ele alınan diğer bir durum ise, frekans bileşenlerinin seçiminde önemli bir etken olarak giriş bileşenlerinin genlik seviyelerinin çıkış frekans bileşenlerinin seçimine etkileridir. Burada, giriş temel bileşenlerine ait genliklere benzer oranda harmonik sayılarının seçilmesinin farklı durumlarla kıyaslaması yapılarak etkileri incelenmiştir. Her iki bileşen için aynı sayıda harmonik kabul etmek yerine, genliği daha düşük seviyede olan frekans bileşeni için harmonik adedi diğerine göre daha az seçilerek analizde kullanılan frekans bileşeni sayısı düşürülebilir. Bu durumun farklı frekans bileşenleri içinde ortaya çıktığı grafiksel olarak Şekil 4.13’de gösterilmiştir.

HBM uygulamasının çok-tonlu sinyaller için genişletildiği algoritma yapısına, Bölüm 5’de daha genel bir üst sınıfı temsil eden ve birçok disiplinde sıklıkla karşılaşılan MIMO sistemleri de kapsayacak bir form kazandırılması ile uygulama alanı bakımından da genişletilmiştir. Bu amaçla SISO sistemler için sunulan algoritma temel alınarak MIMO sistemleri kapsayacak yeni bir tanımlama yapılmıştır. Polinom tip MIMO diferansiyel denklemlerin sunumu, Denklem 5.3 ile belirtilen genel ifade ile tanımlanmıştır. Buna göre gerçekleştirilen açılımlar kullanılarak denge denklemleri sembolik olarak tanımlanmıştır. Yönteme ait sonuçlar iki-girişli iki-çıkışlı birleşik bir elektriksel sistemi tanımlayan duffing model formu üzerinde sunulmuştur. İki girişe uygulanan frekans bileşenlerinin harmonik olarak ilişkisiz olduğu çok-tonlu analizin yanında, açılımların tek-tonlu sonuçlandığı durumda da yöntemin geçerliliği gösterilmiştir. Ayrıca bileşenler arasındaki ilişkiyi tanımlayan katsayının büyük olması durumunda problemi tek tonlu ele almak yerine çok-tonlu düşünerek işlemlerin gerçekleştirilmesi, analizde kullanılacak frekans bileşenlerinin belirlenmesi bakımından avantaj sağladığı gösterilmiştir.

Çok-tonlu etkileşimleri tanımlayan harmonik denge denklemlerinin istenilen bir parametrenin değişimine bağlı olarak çözümlenmesiyle frekans cevabı davranışları incelenebilir. Bölüm 6’da denge denklemleri hesaplanan uygulama için, girişlerden birinin frekansı sabit tutularak diğeri için belli bir frekans aralığında değiştirilmesiyle elde edilen frekans cevabı örnek olarak sunulmuştur. Bu işlem çıkışa ait sinyalde HBM sonucu elde edilen bilinmeyenler yerine konularak maksimum genliklerin belirlenmesiyle gerçekleştirilmiştir. Ayrıca girişlerden birinin genlik ve frekans

değişimlerinin diğer çıkışa ait frekans cevabı üzerindeki etkileri örnekler üzerinde incelenmiştir.

Tez çalışması kapsamında temel olarak yapılan katkılar özetlenirse,

1. SISO sistemler için HBM uygulaması çok-tonlu olarak genişletilmiştir. Bu amaçla:
  - a. Analizde hem giriş hem de çıkışı temsil etmede kullanılan harmonik olarak ilişkisiz bileşenler ve harmoniklerinden oluşan çok-tonlu bir sinyal formu tanımlanmıştır. Bu sinyal formunun bileşenlerinin Kutu ve Elmas sınırlama yöntemleri ile seçimi sunulmuştur.
  - b. Harmonik denge denklemlerinin sembolik formda elde edilebilmesi için çok tonlu sinyale ait genelleştirilmiş açılımlar türetilmiştir. İlgilenilen frekans bileşenlerinin otomatik seçilebilmesi için kombinasyonlar ve permütasyonlar cinsinden düzenlenerek doğrusal olmayan fonksiyonlar ile ifade edilmiştir. Böylece DOS'ların genel formda tanımlanması için kullanılan denklem temel alınarak harmonik denge algoritması genelleştirilmiştir.
  - c. Kutu sınırlama yöntemi temel alınarak kombinasyonlar ve permütasyonlarının üretim şekli tanımlanmıştır.
  - d. Giriş frekans bileşenlerine ait genliklerin çıkış frekans bileşenlerinin seçimindeki etkisi ve önemi örnekler üzerinde sunulmuştur.
2. Çok-tonlu tanımlanarak sinyal formu bakımından çeşitliliği artırılan HBM, uygulama alanı bakımından da MIMO sistemleri kapsayacak şekilde genişletilmiştir. Bu amaçla:
  - a. Polinom formda doğrusal olmayan terimler içeren MIMO sistemlerin sembolik formda ifadesi için yeni bir tanımlama yapılmıştır.
  - b. Bir önceki algorithmadaki denklemler temel alınarak HBM uygulaması MIMO sistemleri de kapsayacak şekilde denklemler türetilmiştir.
  - c. Yöntemin uygulaması iki-giriş iki-çıkışlı duffing modeli üzerinde sunulmuş sonuçların doğruluğu sayısal simülasyonlarla gösterilmiştir. Bunun yanında yöntemin tek-tonlu analizler içinde geçerli olduğu örneklerle sunulmuştur.



3. Çok-tonlu sinyaller için HBM kullanılarak frekans cevaplarının elde edilişi incelenmiştir. Bu amaçla:
  - a. HBM sonucu elde edilen toplam çıkış sinyaline ait maksimum genlikler ve sayısal simülasyonlar sonucu oluşan kararlı dilimlerin belirlenmesi için oluşan problemler ele alınmıştır.
  - b. Girişlerden birinin frekansı sabit tutularak, diğeri için frekans cevabı elde edilerek sayısal simülasyonlar ile doğrulanmıştır. Ayrıca bu girişe ait genlik ve frekans değişimlerinin frekans cevabı üzerindeki etkileri de sunulmuştur.
  - c. HBM ile kararlı durumda frekans bileşenlerinin genlik değerleri direkt olarak hesaplanabildiği için analizde kabul edilen harmonik ve karışım bileşenleri üzerindeki etkiler kolaylıkla incelenmiştir.

Gerçekleştirilen çalışmanın kapsamı denge denklemlerinin çeşitli sinyal formları için elde edilmesi ve çözümlenerek çeşitli parametreler için elde edilen cevapların incelenmesine yöneliktir. Denge denklemleri doğrusal olmayan formdaki denklem takımlarından oluşur ve çözümlenmesi mevcut yöntemler kullanılarak gerçekleştirilir. HBM sonucu elde edilen doğrusal olmayan denklem takımlarının çözümlenmesinde yöntemlerin etkisi ayrıca incelenebilir veya iyileştirilebilir. HBM uygulamasında kullanılan frekans bileşeni sayısının artırılması işlem yükünü özellikle denklemlerin çözümlenmesi aşamasında oldukça artırır. Günümüzde gelişen bilgisayar teknolojisinin hesaplama gücünün sürekli artmasına karşın algoritmanın çalışması farklı teknikler kullanılarak hızlandırılabilir.

Geliştirilen analiz yöntemi sürekli zamanda tanımlanan sistemlerin analizine yöneliktir. Uygulamada çoğu zaman sistemler alınan veriler kullanılarak ayrık zamanlı olarak modellenirler. Tez çalışmasında sunulan yöntem aynı zamanda ayrık sistemlerin çok-tonlu analizinde geliştirilecek bir yöntem için de temel oluşturur.

## KAYNAKLAR

- [1] LEE, J. C., WILLIAM D. OLIVER, KARL K. BERGGREN, T. P., Nonlinear resonant behavior of the dispersive readout scheme for a superconducting flux qubit, *Physical Review*, B 75, 144505, 1-10, 2007
- [2] KUNDERT, K. S. *The Designer's Guide to SPICE and Spectre*. Kluwer Academic Publishers, 1995
- [3] BUTCHER, E.A., Clearance effects on bilinear normal mode frequencies, *Journal of Sound and Vibration*, 224, 305-328, 1999
- [4] INABA, N., TSUKAMOTO, K., ENDO, T., Bifurcation and chaos in the piecewise-linear forced Duffing-vander Pol oscillator with a diode, *Circuits and Systems*, Volume 3, 1297 – 1300, 2001
- [5] GEIGER, H.R.L., Impact of OTA nonlinearities on the performance of continuous-time OTA-C bandpass filters, in *Proc. IEEE Int. Symp. Circuits Syst.* vol.2, pp. 1167–1170, 1990
- [6] BOWRON, P., MOHAMED, A., Nonlinear Modelling Of F.E.T. Input Operational Amplifiers, *Electronics Letters* Vol. 15, No. 15, 1979
- [7] METALLIDIS, P., NATSIAVAS, S., Vibration of a continuous system with clearance and motion constraints, *International Journal of Non-linear Mechanics* 35, 675-690, 2000
- [8] PUN, D., LAU, S.L., LIU, Y.B., Internal resonance of an L-shaped beam with a limit stop I, free vibration, *Journal of Sound and Vibration* 193, 1023-1035, 1996
- [9] PUN, D. S., LAU, L., LIU, Y.B., Internal resonance of an L-shaped beam with a limit stop II, forced vibration, *Journal of Sound and Vibration* 193, 1037-1047, 1996
- [10] RIVOLA, A., WHITE, P.R., Bispectral analysis of the bilinear oscillator with application to the detection of fatiguecracks, *Journal of Sound and Vibration*, 216, 889-910, 1998
- [11] CHATI, M., RAND, R., MUKHERJEE, S., Modal analysis of a cracked beam, *Journal of Sound and Vibration*, 207, 249-270, 1997

- [12] PEARSON, R. K., Discrete Time Dynamic Models, New York: Oxford University Press, 1994
- [13] USU, J. C., MEYER, A.U., Modern Control Principles and Applications, McGraw-Hill Inc., 1968
- [14] VUKIC, Z., Nonlinear Control Systems, CRC, 2003
- [15] NAYFEH, A.H., MOOK, D.T., Nonlinear Oscillations, Wiley Classics Library Edition, 1995
- [16] GELB, A., VANDER VELDE, W. E., Multiple-input Describing Functions and Nonlinear System Design, New York: McGraw-Hill, 1968
- [17] KAHLIL, H. K., Nonlinear Systems, 3rd edition New York: Prentice Hall International, 2001
- [18] LOZOWICKI A., On application of the describing function method for optimization of feedback control systems, International Journal of Robust Nonlinear Control, Vol. 7, 911–933, 1997
- [19] TAYLOR, J. A., Robust nonlinear control based on describing functions methods, ASME IMECE, Dynamic Systems and Control Division Vol. 64, Anaheim, CA, 1998
- [20] COOK, P. A., Nonlinear Dynamical Systems, M. J. Grimble (Ed.), Prentice Hall International Series in Systems and Control Engineering, 1994
- [21] A. FUKUMA AND M. MATSUBARA, Jump resonance criteria of nonlinear control systems, IEEE Trans.Autom. Contr., Vol. 11, no.4, 699–706, 1966
- [22] GIANNAKOPOULOS, K., T. Deliyannis, Jump Phenomenon In An OTA Simulated LC Circuit, Int. J. Electronics, Vol. 88, No. 1, 1-11, 2001
- [23] MONIAND K., R.S., RAO, R., Jump-phenomenon inactive-RC filters, IEEE Trans. Circuits Syst., vol. CAS-29, no.1, 54–55, 1982
- [24] KRAWCZYK, S., Comment on ‘Jump phenomenon inactive-RC filters’ IEEE Trans. Circuits Syst., vol.30, no. CAS-12, 908–909, 1983
- [25] SALT HOUSE, C. D., SARPESHKAR, R. JumpResonance: A Feedback Viewpoint and Adaptive Circuit Solution for Low-Power Active Analog Filters, IEEE Transactions On Circuits And Systems I : Regular Papers, Vol.53, No.8, 2006
- [26] JABBARI, A., UNRUH, A., Jump Resonance in Audio Transducers, Journal of the Audio Engineering Society, Convention Paper, 2004
- [27] KAAJAKARI, V., MATTILA, T., Anti Lipsanen, and Aarne Oja, Nonlinear Mechanical Effects in Silicon Longitudinal Mode Beam Resonators, Sensors And Actuators A: Physical, Vol. 120 (1), 64-70, 2005

- [28] KÖNIG, D. R., KOTTHAUS, J. P., Highly Efficient Laser Driving Scheme for Bilayer Nanoelectromechanical Systems, nanophysics group research report, Ludwig-Maximilians-Universität, 2005
- [29] MARC T.M. KOPER, Non-linear phenomena in electrochemical systems, J. Chem. Soc., Faraday Trans., 94 (10), 1369-1378, 1998
- [30] SENJANOVIC, I., Harmonic Analysis of Nonlinear Oscillations of Cubic Dynamical Systems, J. Ship Research, Vol 38, No.3, 225-238, 1994
- [31] JONES, J. C. P., ÇANKAYA, İ., Generalized Harmonic Analysis of Nonlinear Ship Roll Dynamics, J Ship Research, No. 4, Vol 40, 39-48, 1996
- [32] JONES J. C. P., ÇANKAYA İ, A note on the computation of maximum roll amplitudes in regular beam seas, Journal of Ship Research, Vol. 41, No. 3, 224-229, 1997
- [33] A. CHATTERJEE, Harmonic Balance Based Averaging: Approximate Realizations of an Asymptotic Technique, NonlinearDynamics 32, 323–343, 2003
- [34] S. L. DAS AND A. CHATTERJEE, Multiple Scales via Galerkin Projections: Approximate Asymptotics for Strongly Nonlinear Oscillations, Nonlinear Dynamics 32, 161–186, 2003
- [35] JONES, J. C. P., Zhuang M., and Çankaya, I., Symbolic Computation of Harmonic Balance Equations, International Journal of Control, Vol. 68, No. 3, 449-460, 1997
- [36] J.F.DUNNE, P.HAYWARD, A split-frequency harmonic balance method for nonlinear oscillators with multi-harmonic forcing, Journal of Sound and Vibration 295, 939-963, 2006
- [37] JONES, J. C. P., Automatic Computation of Harmonic Balance Equations for Non-linear Systems, International Journal of Control, Vol. 76, No. 4, 355-365, 2003
- [38] JONES, J. C. P., Practical frequency response analysis of non-linear time-delayed differential or difference equation models, International Journal of Control, 78(1), 65-79, 2005
- [39] MUELLER, J. G., ANTAO, A. A., SALEH, R. A., A multifrequency technique for frequency response computation with application to switched-capacitor circuits with nonlinearities. IEEE Trans. on CAD of Integrated Circuits and Systems 15(7), 775-790, 1996
- [40] SAVI, M. A., PACHECO, P. M. C. L., Chaos in a Two-Degree of Freedom Duffing Oscillator, Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences, Vol. 24, No.2, May 2002

- [41] MARMARELIS, P.K., NAKA, K. I., Identification of Multi-Input Biological Systems IEEE Transactions on Biomedical Engineering, 21, 88-101, 1974
- [42] KURAMOTO, Y., Chemical Oscillations, Waves and Turbulence Springer-Verlag, New York, 1984
- [43] BARRON, M. A., SEN, M., Synchronization of four coupled van der Pol oscillators, December 21, 2007
- [44] LIFSHITZ, R., CROSS, M. C., Response of parametrically driven nonlinear coupled oscillators with application to micromechanical and nanomechanical resonator arrays, Physical Review, B 67, 134-302, 2003
- [45] VINCENT, U. E., Measure synchronization in coupled Duffing Hamiltonian systems, New J. Phys. 7, 209, 2005
- [46] MA, Y., KAWAKAMI, H., Combinatorial Resonances in Coupled Duffing's Circuit, IEICE Trans. Fundamentals, E85-A, 3, 2002
- [47] MA, Y., KAWAKAMI, H., Combinatorial Resonances in Coupled Duffing's Circuit with Asymmetry, IEICE Trans. Fundamentals, VOL. E86-A, NO.9, 2003
- [48] KALYANOV, E. V., Parametrically Controlled Chaotization of Oscillations of Coupled Van der Pol Generators, Journal of Communications Technology and Electronics, Vol. 51, No. 11, 1290-1296, 2006
- [49] JONES, J. C. P., ÇANKAYA, I., The Effect of a Constant Heeling Moment on the Main and Superharmonic Roll Response of a Ship in Regular Beam Seas, International Shipbuilding Progress, Vol 46, No. 446, 165-187, 1999
- [50] PENG, Z. K., LANG, Z. Q., BILLINGS, S. A., Resonances and resonant frequencies for a class of nonlinear system, Journal of Sound and Vibration, 300, 993-1014, 2007
- [51] JONES, J. C. P., Generalised describing functions for a class of nonlinear difference and differential equation models. Proceedings IFAC NOLCOS '95, Lake Tahoe, California, U.S.A., 901-906, 1995
- [52] C. T. KELLEY, Solving Nonlinear Equations with Newton's Method, no 1 in Fundamentals of Algorithms, SIAM, 2003
- [53] NELDER, J. A. AND MEAD, R. A, Simplex Method for Function Minimization, Comput. J. 7, 308-313, 1965
- [54] LAGARIAS, J. C., REEDS, J. A., WRIGHT, M. H. AND WRIGHT, P. E., Convergence Properties of the Nelder-Mead Algorithm in Low Dimensions, AT&T Bell Laboratories Tech. Rep. Murray Hill, NJ, 1995
- [55] ABRAMOWITZ, M., STEGUN, I.A. Handbook of Mathematical Functions, Applied Mathematics Series, Vol. 55, 1964

- [56] JONES, J. C. P., ZHUANG, M., A Simulation tool for nonlinear frequency response investigations, Proceedings of the Conference on Modeling and Simulation, 136-140, 1994
- [57] AKGÜN, D., ÇANKAYA, İ., VATANSEVER, F., Doğrusal Olmayan Sistemler için simülasyon tasarımı ve uygulamaları, 4<sup>th</sup> International Advanced Technologies Symposium, September 28-30, Konya / Türkiye, 2005
- [58] İ. ÇANKAYA, Doğru Simülasyon İçin Başlangıç Değerlerinin Seçimi, Süleyman Demirel Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi, 7-3, 87-91, 2003
- [59] JONES, J. C. P., BILLINGS, S.A., Interpretation of non-linear frequency response functions, International Journal of Control, 52, No. 2, 319-346, 1990
- [60] JONES, J. C. P., BILLINGS, S.A., Describing Functions, Volterra Series, and the Analysis of Non-linear Systems in the Frequency Domain, International Journal of Control, 53, No. 4, 871-887, 1991
- [61] BICKEN, G., CAREY, G.F., STEARMAN, R.O., Frequency Domain Kernel Estimation for 2nd-order Volterra Models Using Random Multi-tone Excitation, VLSI Design, Vol. 15 (4), 701-713, 2002
- [62] SHIJIAZHUANG, Y. S., NAYFEH, A. H., MOOK, D. T., Combination resonances in the response of the Duffing oscillator to a three-frequency excitation, Acta Mechanica, 131, 235-245, 1998
- [63] HWAN, C., WONLEE, K.C., PERKINS, N.C., Nonlinear Vibration of Sheet Metal Plates Under Interacting Parametric and External Excitation During Manufacturing, Journal of Vibration and Acoustics, 36, Vol. 127, 2005
- [64] CHEDJOU, J C, FOTSIN, H B, WOAFU, P., Behavior of the Van der Pol oscillator with two external periodic forces, Physica Scripta, Vol. 55, 390-393, 1997
- [65] ABDELHAFEZ, H.M., Resonance of multiple frequency excited systems with quadratic, cubic and quartic non-linearity, Math. Comput. Simulation 61, 17-37, 2002
- [66] JING-JUN, L., QI-WEI, H., SHI-JIAN, Z., Chaos in the softening duffing system under multi-frequency periodic forces, Volume 25, Applied Mathematics and Mechanics, 12, 2004
- [67] ABDELHAFEZ, H.M. Resonance of a nonlinear forced system with two-frequency parametric and self-excitation, Mathematics and Computers in Simulation 66, 69-83, 2004
- [68] ALASTALO, A.T., KAAJAKARI, V., Third-Order Intermodulation in Microelectromechanical Filters Coupled With Capacitive Transducers, Journal Of Microelectromechanical Systems, Vol. 15, No. 1, 2006

- [69] NARAYANAN, M.D., NARAYANAN, S., ADMANABHAN, C., Multiharmonic excitation for nonlinear system identification, *Journal of Sound and Vibration*, Available online, 2007
- [70] KUNDERT, K. S., WHITE, J. K., SANGIOVANNI-VINCENTELLI, A. Steady-state methods for simulating analog and microwave circuits, Boston: Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1990
- [71] MUELLER, J. G., ANTAO, B. A. A., SALEH, R. A. A multifrequency technique for frequency response computation with application to switched-capacitor circuits with nonlinearities. *IEEE Trans. on CAD of Integrated Circuits and Systems* 15(7), 775-790, 1996
- [72] MANSON, G., WORDEN, K., TOMLINSON, G.R. Pseudo-Fault Induction in Engineering Structures: Multi-Input Multi-Output Control”, *Nonlinear Dynamics* 8, 367-384, 1995
- [73] LANG, Z., BILLINGS, S.A., Evaluation of Output Frequency Responses of Nonlinear Systems Under Multiple Inputs’, *IEEE Transactions On Circuits And Systems II : Analog And Digital Signal Processing*, Vol.47, No.1, January 2000
- [74] LI, L.M., BILLINGS, S.A., Discrete time subharmonic modelling and analysis, *International Journal Of Control*, Vol. 78, No. 16, 1265-1284, 2005
- [75] PENG, Z.K., LANG, Z., BILLINGS, S.A., Resonances and resonant frequencies for a class of nonlinear systems, *Journal of Sound and Vibration*, 300, 993–1014, 2007
- [76] WORDEN, K., MANSON, G., TOMLINSON, G.R, A Harmonic Probing Algorithm for the Multi-Input Volterra Series, *Journal of Sound and Vibration*, 201, No. 1, 67-84, 1997
- [77] LI, L.M., BILLINGS, S.A., Generalized frequency response functions and output response synthesis for MIMO non-linear systems, *International Journal Of Control*, Vol.79, No.1, 53–62, 2006
- [78] SWAIN, A.K., BILLINGS, S.A., Generalized frequency response function matrix for MIMO non-linear systems, *International Journal Of Control*, Vol. 74, No. 8, 829-844, 2001
- [79] PENG, Z.K., LANG, Z.Q., BILLINGS, S.A, Non-linear output frequency response functions for multi-input non-linear Volterra systems, *International Journal of Control*, Vol.80, No. 6, 843–855, June 2007
- [80] LANG, Z., BILLINGS, S.A., Evaluation of Output Frequency Responses of Nonlinear Systems Under Multiple Inputs, *IEEE Transactions On Circuits And Systems II : Analog And Digital Signal Processing*, Vol.47, No.1, January 2000

- [81] LINKENS, D. A., Analytical solutions of Large Number of Mutually Coupled Nearly Sinusoidal Oscillators, IEEE Transactions On Circuits And Systems, Vol. 21, No. 2, 1974
- [82] YAMAPI, R., OROU, J. B. C. Harmonic oscillations, stability and chaos control in a Nonlinear electromechanical system, Journal of Sound and Vibration, 259 (5), 1253–1264, 2003
- [83] MASIANI, R., CAPECCHI, D., VESTRONI, F, Resonant and coupled response of hysteretic two-degree-of-freedom systems using harmonic balance method. International Journal of Non-Linear Mechanics 37, 1421–1434, 2002



## EKLER

Tablo Ek 1.  $f_{uy}^{sym}(-3,1,2)$  fonksiyonuna ait permütasyonlar

$\{r_1 \ r_2 \ r_3\}$	$A_{y_1} (r_1 j\omega)^1 A_{u_2} A_{u_3}$
$\{-3 \ 1 \ 2\}$	$A_{y_{-3}} (-3j\omega)^1 A_{u_1} A_{u_2} = A_{y_{-3}} A_{u_1} A_{u_2} (-3j\omega)$
$\{-3 \ 2 \ 1\}$	$A_{y_{-3}} (-3j\omega)^1 A_{u_2} A_{u_1} = A_{y_{-3}} A_{u_1} A_{u_2} (-3j\omega)$
$\{1 \ -3 \ 2\}$	$A_{y_1} (j\omega)^1 A_{u_{-3}} A_{u_2} = A_{y_1} A_{u_2} A_{u_{-3}} (j\omega)$
$\{1 \ 2 \ -3\}$	$A_{y_1} (j\omega)^1 A_{u_2} A_{u_{-3}} = A_{y_1} A_{u_2} A_{u_{-3}} (j\omega)$
$\{2 \ -3 \ 1\}$	$A_{y_3} (2j\omega)^1 A_{u_{-3}} A_{u_1} = A_{y_3} A_{u_1} A_{u_{-3}} (2j\omega)$
$\{2 \ 1 \ -3\}$	$A_{y_3} (2j\omega)^1 A_{u_1} A_{u_{-3}} = A_{y_3} A_{u_1} A_{u_{-3}} (2j\omega)$

Tablo Ek 2.  $f_{uy}^{sym}(-2,0,2)$  fonksiyonuna ait permütasyonlar

$\{r_1 \ r_2 \ r_3\}$	$A_{y_1} (r_1 j\omega)^1 A_{u_2} A_{u_3}$
$\{-2 \ 0 \ 2\}$	$A_{y_{-2}} (-2j\omega)^1 A_{u_0} A_{u_2} = A_{y_{-2}} A_{u_0} A_{u_2} (-2j\omega)$
$\{-2 \ 2 \ 0\}$	$A_{y_{-2}} (-2j\omega)^1 A_{u_2} A_{u_0} = A_{y_{-2}} A_{u_0} A_{u_2} (-2j\omega)$
$\{0 \ 2 \ -2\}$	$A_{y_0} (0j\omega)^1 A_{u_2} A_{u_{-2}} = 0$
$\{0 \ -2 \ 2\}$	$A_{y_0} (0j\omega)^1 A_{u_{-2}} A_{u_2} = 0$
$\{2 \ 0 \ -2\}$	$A_{y_2} (2j\omega)^1 A_{u_0} A_{u_{-2}} = A_{y_2} A_{u_{-2}} A_{u_0} (2j\omega)$
$\{2 \ -2 \ 0\}$	$A_{y_2} (2j\omega)^1 A_{u_{-2}} A_{u_0} = A_{y_2} A_{u_{-2}} A_{u_0} (2j\omega)$

Tablo Ek 3.  $f_{uy}^{sym}(-2,1,1)$  simetrik fonksiyonu için permütasyonlar

$\{r_1 \ r_2 \ r_3\}$	$A_{y_n} (r_1 j \omega)^1 A_{u_{r_2}} A_{u_{r_3}}$
$\{-2 \ 1 \ 1\}$	$A_{y_{-2}} (-2 j \omega)^1 A_{u_1} A_{u_1} = A_{y_{-2}} A_{u_1}^2 (-2 j \omega)$
$\{1-2 \ 1\}$	$A_{y_1} (j \omega)^1 A_{u_{-2}} A_{u_1} = A_{y_1} A_{u_{-2}} A_{u_1} (j \omega)$
$\{1 \ 1 -2\}$	$A_{y_1} (j \omega)^1 A_{u_1} A_{u_{-2}} = A_{y_1} A_{u_1} A_{u_{-2}} (j \omega)$

Tablo Ek 4.  $f_{uy}^{sym}(-1,-1,2)$  simetrik fonksiyonu için permütasyonlar

$\{r_1 \ r_2 \ r_3\}$	$A_{y_n} (r_1 j \omega)^1 A_{u_{r_2}} A_{u_{r_3}}$
$\{-1 -1 \ 2\}$	$A_{y_{-1}} (-j \omega) A_{u_{-1}} A_{u_2} = A_{y_{-1}} A_{u_{-1}} A_{u_2} (-j \omega)$
$\{-1 \ 2 -1\}$	$A_{y_{-1}} (-j \omega) A_{u_2} A_{u_{-1}} = A_{y_{-1}} A_{u_{-1}} A_{u_2} (-j \omega)$
$\{2 -1 -1\}$	$A_{y_2} (2 j \omega) A_{u_{-1}} A_{u_{-1}} = A_{y_2} A_{u_{-1}}^2 (2 j \omega)$

Tablo Ek 5.  $f_{uy}^{sym}(-1,0,1)$  simetrik fonksiyonu için permütasyonlar

$\{r_1 \ r_2 \ r_3\}$	$A_{y_n} (r_1 j \omega)^1 A_{u_{r_2}} A_{u_{r_3}}$
$\{-1 \ 0 \ 1\}$	$A_{y_{-1}} (-j \omega) A_{u_0} A_{u_1} = A_{y_{-1}} A_{u_0} A_{u_1} (-j \omega)$
$\{-1 \ 1 \ 0\}$	$A_{y_{-1}} (-j \omega) A_{u_1} A_{u_0} = A_{y_{-1}} A_{u_0} A_{u_1} (-j \omega)$
$\{1 -1 \ 0\}$	$A_{y_1} (1 j \omega) A_{u_{-1}} A_{u_0} = A_{y_1} A_{u_{-1}} A_{u_0} (j \omega)$
$\{1 \ 0 -1\}$	$A_{y_1} (1 j \omega) A_{u_0} A_{u_{-1}} = A_{y_1} A_{u_{-1}} A_{u_0} (j \omega)$
$\{0 -1 \ 1\}$	$A_{y_0} (0 j \omega) A_{u_0} A_{u_1} = 0$
$\{0 \ 1 -1\}$	$A_{y_0} (0 j \omega) A_{u_1} A_{u_{-1}} = 0$

Tablo Ek 6.  $f_{uy}^{sym}(0,0,0)$  simetrik fonksiyonu için permütasyonlar

$\{r_1 \ r_2 \ r_3\}$	$A_{y_{r_1}} (r_1 j\omega)^1 A_{u_{r_2}} A_{u_{r_3}}$
$\{0 \ 0 \ 0\}$	0

Tablo Ek 7. Kübik terimler için simetrik fonksiyonlar

	$\{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3\}$	$n_r^*$	$y(t)^3$	$y(t)^2 \dot{y}(t)$
1	$\begin{Bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{Bmatrix}$	3	$A_{y_{-1,-2}} A_{y_{1,1}}^2$	$\frac{1}{3} A_{y_{-1,-2}} A_{y_{1,1}}^2 j\omega_1$
2	$\begin{Bmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{Bmatrix}$	6	$A_{y_{-2,-1}} A_{y_{1,0}} A_{y_{2,1}}$	$\frac{1}{6} A_{y_{-2,-1}} A_{y_{1,0}} A_{y_{2,1}} 2j\omega_1$
3	$\begin{Bmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{Bmatrix}$	6	$A_{y_{-2,1}} A_{y_{1,-1}} A_{y_{2,0}}$	$\frac{1}{6} A_{y_{-2,1}} A_{y_{1,-1}} A_{y_{2,0}} 2j\omega_1$
4	$\begin{Bmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{Bmatrix}$	6	$A_{y_{-2,-1}} A_{y_{1,2}} A_{y_{2,-1}}$	$\frac{1}{6} A_{y_{-2,-1}} A_{y_{1,2}} A_{y_{2,-1}} 2j\omega_1$
5	$\begin{Bmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{Bmatrix}$	6	$A_{y_{-2,0}} A_{y_{1,-1}} A_{y_{2,1}}$	$\frac{1}{6} A_{y_{-2,0}} A_{y_{1,-1}} A_{y_{2,1}} 2j\omega_1$
6	$\begin{Bmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix}$	6	$A_{y_{-2,0}} A_{y_{1,0}} A_{y_{2,0}}$	$\frac{1}{6} A_{y_{-2,0}} A_{y_{1,0}} A_{y_{2,0}} 2j\omega_1$
7	$\begin{Bmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{Bmatrix}$	6	$A_{y_{-2,0}} A_{y_{1,1}} A_{y_{2,-1}}$	$\frac{1}{6} A_{y_{-2,0}} A_{y_{1,1}} A_{y_{2,-1}} 2j\omega_1$
8	$\begin{Bmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{Bmatrix}$	6	$A_{y_{-2,1}} A_{y_{1,-2}} A_{y_{2,1}}$	$\frac{1}{6} A_{y_{-2,1}} A_{y_{1,-2}} A_{y_{2,1}} 2j\omega_1$
9	$\begin{Bmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{Bmatrix}$	6	$A_{y_{-2,1}} A_{y_{1,-1}} A_{y_{2,0}}$	$\frac{1}{6} A_{y_{-2,1}} A_{y_{1,-1}} A_{y_{2,0}} 2j\omega_1$
10	$\begin{Bmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{Bmatrix}$	6	$A_{y_{-2,1}} A_{y_{1,0}} A_{y_{2,-1}}$	$\frac{1}{6} A_{y_{-2,1}} A_{y_{1,0}} A_{y_{2,-1}} 2j\omega_1$
11	$\begin{Bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \end{Bmatrix}$	6	$A_{y_{-1,-2}} A_{y_{0,1}} A_{y_{2,1}}$	$\frac{1}{6} A_{y_{-1,-2}} A_{y_{0,1}} A_{y_{2,1}} 2j\omega_1$
12	$\begin{Bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \end{Bmatrix}$	6	$A_{y_{-1,-2}} A_{y_{0,2}} A_{y_{2,0}}$	$\frac{1}{6} A_{y_{-1,-2}} A_{y_{0,2}} A_{y_{2,0}} 2j\omega_1$
13	$\begin{Bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \end{Bmatrix}$	6	$A_{y_{-1,-2}} A_{y_{0,3}} A_{y_{2,-1}}$	$\frac{1}{6} A_{y_{-1,-2}} A_{y_{0,3}} A_{y_{2,-1}} 2j\omega_1$
14	$\begin{Bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{Bmatrix}$	6	$A_{y_{-1,-1}} A_{y_{0,2}} A_{y_{2,1}}$	$\frac{1}{6} A_{y_{-1,-1}} A_{y_{0,2}} A_{y_{2,1}} 2(j\omega_1 + 1)$
15	$\begin{Bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{Bmatrix}$	6	$A_{y_{-1,-1}} A_{y_{0,1}} A_{y_{2,0}}$	$\frac{1}{6} A_{y_{-1,-1}} A_{y_{0,1}} A_{y_{2,0}} 2j\omega_1$

Tablo Ek 7. Devam

16	$\begin{Bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{Bmatrix}$	6	$A_{y_{-1,-1}} A_{y_{0,2}} A_{y_{2,-1}}$	$\frac{1}{6} A_{y_{-1,-1}} A_{y_{0,2}} A_{y_{2,-1}} 2j\omega_1$
17	$\begin{Bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{Bmatrix}$	6	$A_{y_{-1,0}} A_{y_{0,-1}} A_{y_{2,1}}$	$\frac{1}{6} A_{y_{-1,0}} A_{y_{0,-1}} A_{y_{2,1}} 2j\omega_1$
18	$\begin{Bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix}$	6	$A_{y_{-1,0}} A_{y_{0,0}} A_{y_{2,0}}$	$\frac{1}{6} A_{y_{-1,0}} A_{y_{0,0}} A_{y_{2,0}} 2(j\omega_1 + 1)$
19	$\begin{Bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{Bmatrix}$	6	$A_{y_{-1,0}} A_{y_{0,1}} A_{y_{2,-1}}$	$\frac{1}{6} A_{y_{-1,0}} A_{y_{0,1}} A_{y_{2,-1}} 2j\omega_1$
20	$\begin{Bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{Bmatrix}$	6	$A_{y_{-1,1}} A_{y_{0,-2}} A_{y_{2,1}}$	$\frac{1}{6} A_{y_{-1,1}} A_{y_{0,-2}} A_{y_{2,1}} 2j\omega_1$
21	$\begin{Bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{Bmatrix}$	6	$A_{y_{-1,1}} A_{y_{0,-1}} A_{y_{2,0}}$	$\frac{1}{6} A_{y_{-1,1}} A_{y_{0,-1}} A_{y_{2,0}} 2j\omega_1$
22	$\begin{Bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{Bmatrix}$	6	$A_{y_{-1,1}} A_{y_{0,0}} A_{y_{2,-1}}$	$\frac{1}{6} A_{y_{-1,1}} A_{y_{0,0}} A_{y_{2,-1}} 2(j\omega_1 + 1)$
23	$\begin{Bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{Bmatrix}$	6	$A_{y_{-1,-1}} A_{y_{1,-1}} A_{y_{1,2}}$	$\frac{1}{6} A_{y_{-1,-1}} A_{y_{1,-1}} A_{y_{1,2}} 2j\omega_1$
24	$\begin{Bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{Bmatrix}$	6	$A_{y_{-1,-1}} A_{y_{1,0}} A_{y_{1,1}}$	$\frac{1}{6} A_{y_{-1,-1}} A_{y_{1,0}} A_{y_{1,1}} 2j\omega_1$
25	$\begin{Bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{Bmatrix}$	6	$A_{y_{-1,0}} A_{y_{1,-2}} A_{y_{1,2}}$	$\frac{1}{6} A_{y_{-1,0}} A_{y_{1,-2}} A_{y_{1,2}} 2j\omega_1$
26	$\begin{Bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{Bmatrix}$	6	$A_{y_{-1,0}} A_{y_{1,-2}} A_{y_{1,2}}$	$\frac{1}{6} A_{y_{-1,0}} A_{y_{1,-2}} A_{y_{1,2}} 2j\omega_1$
27	$\begin{Bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix}$	3	$A_{y_{-1,0}} A_{y_{1,0}} A_{y_{1,0}}$	$\frac{1}{6} A_{y_{-1,0}} A_{y_{1,0}} A_{y_{1,0}} j\omega_1$
28	$\begin{Bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{Bmatrix}$	6	$A_{y_{-1,1}} A_{y_{1,-2}} A_{y_{1,1}}$	$\frac{1}{6} A_{y_{-1,1}} A_{y_{1,-2}} A_{y_{1,1}} 2j\omega_1$
29	$\begin{Bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{Bmatrix}$	6	$A_{y_{-1,1}} A_{y_{1,-1}} A_{y_{1,0}}$	$\frac{1}{6} A_{y_{-1,1}} A_{y_{1,-1}} A_{y_{1,0}} 2j\omega_1$
30	$\begin{Bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{Bmatrix}$	6	$A_{y_{-1,2}} A_{y_{1,-2}} A_{y_{1,0}}$	$\frac{1}{6} A_{y_{-1,2}} A_{y_{1,-2}} A_{y_{1,0}} 2j\omega_1$
31	$\begin{Bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{Bmatrix}$	3	$A_{y_{-1,2}} A_{y_{1,-1}}^2$	$\frac{1}{3} A_{y_{-1,2}} A_{y_{1,-1}}^2 j\omega_1$
32	$\begin{Bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \end{Bmatrix}$	6	$A_{y_{0,-2}} A_{y_{0,0}} A_{y_{1,2}}$	$\frac{1}{6} A_{y_{0,-2}} A_{y_{0,0}} A_{y_{1,2}} j(\omega_1 + 1)$
33	$\begin{Bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{Bmatrix}$	6	$A_{y_{0,-2}} A_{y_{0,1}} A_{y_{1,1}}$	$\frac{1}{6} A_{y_{0,-2}} A_{y_{0,1}} A_{y_{1,1}} 2j\omega_1$
34	$\begin{Bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \end{Bmatrix}$	6	$A_{y_{0,-2}} A_{y_{0,2}} A_{y_{1,0}}$	$\frac{1}{6} A_{y_{0,-2}} A_{y_{0,2}} A_{y_{1,0}} 2j\omega_1$

Tablo Ek 7. Devam

35	$\begin{Bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \end{Bmatrix}$	6	$A_{y_{0,-2}} A_{y_{0,3}} A_{y_{1,-1}}$	$\frac{1}{6} A_{y_{0,-2}} A_{y_{0,3}} A_{y_{1,-1}} 2j\omega_1$
36	$\begin{Bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{Bmatrix}$	3	$A_{y_{0,-1}}^2 A_{y_{1,2}}$	$\frac{1}{6} A_{y_{0,-1}}^2 A_{y_{1,2}} j\omega_1$
37	$\begin{Bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{Bmatrix}$	6	$A_{y_{0,-1}} A_{y_{0,0}} A_{y_{1,1}}$	$\frac{1}{6} A_{y_{0,-1}} A_{y_{0,0}} A_{y_{1,1}} 2(j\omega_1 + 1)$
38	$\begin{Bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{Bmatrix}$	6	$A_{y_{0,-1}} A_{y_{0,1}} A_{y_{1,0}}$	$\frac{1}{6} A_{y_{0,-1}} A_{y_{0,1}} A_{y_{1,0}} 2j\omega_1$
39	$\begin{Bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{Bmatrix}$	6	$A_{y_{0,-1}} A_{y_{0,2}} A_{y_{1,-1}}$	$\frac{1}{6} A_{y_{0,-1}} A_{y_{0,2}} A_{y_{1,-1}} 2j\omega_1$
40	$\begin{Bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \end{Bmatrix}$	6	$A_{y_{0,-1}} A_{y_{0,3}} A_{y_{1,-2}}$	$\frac{1}{6} A_{y_{0,-1}} A_{y_{0,3}} A_{y_{1,-2}} 2j\omega_1$
41	$\begin{Bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix}$	3	$A_{y_{0,0}}^2 A_{y_{1,0}}$	$\frac{1}{3} A_{y_{0,0}}^2 A_{y_{1,0}} (j\omega_1 + 2)$
42	$\begin{Bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{Bmatrix}$	6	$A_{y_{0,0}} A_{y_{0,1}} A_{y_{1,-1}}$	$\frac{1}{6} A_{y_{0,0}} A_{y_{0,1}} A_{y_{1,-1}} 2(j\omega_1 + 1)$
43	$\begin{Bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{Bmatrix}$	6	$A_{y_{0,0}} A_{y_{0,2}} A_{y_{1,-2}}$	$\frac{1}{6} A_{y_{0,0}} A_{y_{0,2}} A_{y_{1,-2}} 2(j\omega_1 + 1)$
44	$\begin{Bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{Bmatrix}$	3	$A_{y_{0,1}}^2 A_{y_{1,-2}}$	$\frac{1}{3} A_{y_{0,1}}^2 A_{y_{1,-2}} j\omega_1$

## ÖZGEÇMİŞ

1979 Edirne doğumludur. İlk ve orta öğrenimini Edirne’de tamamlamıştır. 1997 yılında Sakarya Üniversitesi Teknik Eğitim Fakültesi Elektronik ve Bilgisayar Eğitimi Elektronik Öğretmenliği Programına girerek 2001 yılında mezun olmuştur. Yüksek Lisans Eğitimine Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Elektronik ve Bilgisayar Eğitimi Bölümünde 2003 yılında tamamlamıştır. Devamında aynı üniversitede Fen Bilimleri Enstitüsü Elektrik Elektronik Mühendisliği Doktora programına başlamıştır. Araştırma görevlisi olarak Sakarya Üniversitesi Teknik Eğitim Fakültesi Elektronik ve Bilgisayar Eğitimi Bölümü’nde halen görev yapmaktadır