T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

IR_1^n, $n-$BOYUTLU MİNKOWSKİ UZAYINDA GENELLEŞTİRİLMİŞ REGLE YÜZEYLERİN KESİT EĞRİLİKLERİ

DOKTORA TEZİ

Soley ERSOY

Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK

Tez Danışmanı : Doç. Dr. Murat TOSUN

Mayıs 2007

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

IR_1^n, $n-$BOYUTLU MİNKOWSKİ UZAYINDA GENELLEŞTİRİLMİŞ REGLE YÜZEYLERİN KESİT EĞRİLİKLERİ

DOKTORA TEZİ

Soley ERSOY

Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK

Bu tez 10/05/2007 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Oybirliği ile kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Nuri KURUOĞLU
Jüri Başkanı

Prof. Dr. Kadri ARSLAN
Üye

Doç.Dr. Murat TOSUN
Üye

Doç.Dr. İbrahim OKUR
Üye

Yrd.Doç.Dr.İbrahim ÖZGÜR
Üye

TEŞEKKÜR

Doktora danışmanlığımı üstlenip, bilgi ve tecrübesiyle destek veren, çalışmamın her safhasında yardımını esirgemeyen sayın hocam Doç. Dr. Murat TOSUN'a şükran ve saygılarımı sunarım.

Tez çalışmam sırasında bana yardımcı olan Yrd. Doç. Dr. Mehmet Ali GÜNGÖR'e ve Arş. Gör. Murat SARDUVAN'a teşekkürü borç bilirim.

Desteğini her zaman yanımda hissettiğim değerli eşim Yunus Emre ERSOY'a ve sevgili aileme teşekkür ederim.

Soley ERSOY

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

IR_1^n	: $n-$ boyutlu Minkowski uzayı
g_{ij}	: Birinci temel form
g	: Birinci temel formun determinantı
D	: Koneksiyon
Γ_{ij}^k	: Christoffel sembolleri
R_{jkl}^i	: Riemann eğrilik tensörü katsayıları
R_{ijkl}	: Riemann-Christoffel eğrilik tensörü
K	: Kesit eğrilik fonksiyonu
α	: Diferensiyellenebilir eğri
$T_M(P)$	: M nin P noktasındaki tanjant uzayı
M	: Spacelike doğrultman uzaylı genelleştirilmiş timelike regle yüzey
M'	: Timelike doğrultman uzaylı genelleştirilmiş timelike regle yüzey
$E_k(t)$	: Regle yüzeyin doğrultman uzayı
$A(t)$	: Asimptotik demet
$T(t)$	: Teğetsel demet
$K_{k-m}(t)$	: Regle yüzeyin sırt uzayı
$Z_{k-m}(t)$	: Regle yüzeyin merkez uzayı
Ω	: Regle yüzeyin merkez regle yüzeyi
h_σ	: Regle yüzeyin asli ışınlar
M_σ	: Regle yüzeyin σ. ıncı asli ışın yüzeyi
P_σ	: Regle yüzeyin σ. ıncı asli dağılma parametresi
P	: Regle yüzeyin dağılma parametresi

ÖZET

Anahtar Kelimeler: Minkowski uzayı, Regle yüzey, Kesit eğriliği, Lorentzian Beltrami-Euler formülü, Lorentzian Beltrami-Meusnier formülü, Lorentzian Lamarle formülü.

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmıştır. İkinci bölümde Minkowski uzayı, Minkowski uzayında vektörler ve açı kavramı tanıtılmış, yarı-Riemann manifoldu ve eğrilikler ile ilgili temel tanımlar ve gerekli teoremler verilmiştir. Üçüncü bölümde IR_1^n, $n-$boyutlu Minkowski uzayında spacelike doğrultman uzaylı genelleştirilmiş timelike regle yüzeyler ve IR_1^n, $n-$boyutlu Minkowski uzayında timelike doğrultman uzaylı genelleştirilmiş timelike regle yüzeyler olmak üzere iki kısımda özetlenmiştir.

Dördüncü bölüm bu çalışmanın orijinal kısmını oluşturmaktadır ve iki alt bölüm olarak düzenlenmiştir. Dördüncü bölümün birinci alt bölümünde IR_1^n, $n-$boyutlu Minkowski uzayında spacelike doğrultman uzaylı genelleştirilmiş timelike regle yüzeyin kesit eğrilikleri incelenmiş ve bu timelike regle yüzeyin kesit eğrilikleri için Lorentzian Beltrami-Euler formülü, genelleştirilmiş Lorentzian Lamarle formülü ve I., II. ve III. tip Lorentzian Beltrami-Meusnier formülleri bulunmuştur. İkinci alt bölümde ise IR_1^n, $n-$boyutlu Minkowski uzayında timelike doğrultman uzaylı genelleştirilmiş timelike regle yüzeyin kesit eğrilikleri incelenmiş ve bu timelike regle yüzeyin kesit eğrilikleri için I., II., III. ve IV. tip Lorentzian Beltrami-Euler formülü, genelleştirilmiş Lorentzian Lamarle formülü ve I., II. ve III. tip Lorentzian Beltrami-Meusnier formülleri elde edilmiştir.

Beşinci bölümde tüm çalışmanın geniş bir özeti yapılmış ve bundan sonra yapılacak araştırmalara yönelik öneride bulunulmuştur.

ON THE SECTIONAL CURVATURES OF GENERALIZED RULED SURFACES IN n-DIMENSIONAL MINKOSWKI SPACE, IR_1^n

SUMMARY

Key words: Minkowski space, Ruled surface, Sectional curvature, Lorentzian Beltrami-Euler formula, Lorentzian Beltrami-Meusnier formula, generalized Lamarle formula.

This thesis consists of five chapters. First chapter is devoted to the introduction. In the second chapter, Minkowski space, the concept of the angle and vectors in Minkowski space are introduced. Moreover, basic definitions and necessary theorems which are related to semi-Riemannian manifolds and curvatures are given. Third chapter is arranged as two subsections. In this chapter, generalized timelike ruled surface with spacelike generating surface in $n-$dimensional Minkowski and generalized timelike ruled surface with timelike generating surface in $n-$dimensional Minkowski are summarized.

Fourth chapter is the original part of the study and it is organized as two subsections. In the first part, the sectional curvatures of generalized timelike ruled surface with spacelike generating space in the $n-$dimensional Minkowski space, IR_1^n are studied and Lorentzian Beltrami-Euler formula, generalized Lorentzian Lamarle formula and I., II., III. type Lorentzian Beltrami-Meusnier formula are obtained for sectional curvature of generalized timelike ruled surface with spacelike generating space. In the second part, the sectional curvatures of generalized timelike ruled surface with timelike generating space in the $n-$dimensional Minkowski space, IR_1^n are investigated and I., II., III. and IV. type Lorentzian Beltrami-Euler formula, generalized Lorentzian Lamarle formula and I., II., III. type Lorentzian Beltrami-Meusnier formula are established for sectional curvature of generalized timelike ruled surface with timelike generating space.

In fifth chapter of this thesis, a brief summary of the study is given and a suggestion is proposed for investigations on the realm of sectional curvature of ruled surface.

BÖLÜM 1. GİRİŞ

Eğrilik teorisinin temelleri M.Ö. 3. yüzyıla kadar uzanmaktadır. Antik Yunanda (Bergamalı) APOLLONİUS, normalleri, eğrilik merkezlerini ve temel eğrilerin evolütlerini çalışmıştır. Özellikle son üç yüzyılda eğrilik teorisi daha da genişlemiştir. L. EULER, ilk araştırmalarında ve sonra özellikle “L'application de l'analyse à la géométrie” de yüzeyin eğrilik teorisine girmiştir. EULER, yüzey ile yüzeyin normalini içeren düzlemin (normal düzlem) arakesiti olan normal eğrisini göz önüne almış ve böylece, normal eğrilik ile asli eğrilikler arasındaki bağıntı olan Euler Teoremi (Euler-eğrilik formülü) literatüre girmiştir. Daha sonra MEUSNIER, yüzeyin normal olmak zorunda olmayan (yüzeyin belli bir noktasından geçen ve bu noktada yüzeyin normali ile bir açı yapan) düzlemler ile yüzeyin arakesit eğrilerinin normal eğriliklerini hesaplamış ve böylece, önemli sonuçları ile bilinen Meusnier teoremi literatürde yerini almıştır. W. BLASCHKE ve E. KRUPPA gibi pek çok önemli bilim adamının klasik diferensiyel geometri kitaplarında Euler teoremi ve Meusnier teoremi $3-$boyutlu Öklid uzayında $2-$boyutlu yüzeyler için verilmiştir. $n-$boyutlu Öklid uzayında hiperyüzeyler için Euler teoremi ve Meusnier teoremi, Prof. Dr. H. Hilmi HACISALİHOĞLU tarafından “Diferensiyel Geometri, (1983)” kitabında verilmiştir.

Bu teoremlerin, Lorentz (Minkowski) uzayındaki karşılıkları ile ilgili çalışmalardan biri “Lorentz Uzayında Hiperyüzeyler için Euler Teoremi, (1991)” Nurdan ÖRNEK tarafından hazırlanan yüksek lisans tezidir. Ayrıca, Prof. Dr. Ertuğrul ÖZDAMAR danışmanlığında Esen İYİGÜN tarafından hazırlanan yüksek lisans tezi “Lorentz Geometrisi Relativite ve L^3de Meusnier Teoremi, (1991)” ve doktora tezi “L^n Uzayında Meusnier Teoremi, (1998)”, Lorentz uzayında yapılan diğer çalışmalardandır.

Klasik yüzey teorisinde yüzeyler için eğriliğin önemli bir notasyonu GAUSS tarafından verilmiştir. Gauss eğriliğinde anahtar fonksiyon Gauss dönüşümüdür, öyle ki bu dönüşüm yüzey üzerindeki her bir noktayı yüzeyin birim normal vektörüne (yani birim kürenin başlangıç noktasına) karşılık getirir. Bu dönüşüm ile Gauss eğriliği küresel alan elementinin yüzeyin alan elementine oranı olarak verilmiştir. Hiperyüzeyin Gauss eğriliğine Prof. Dr. H. Hilmi HACISALİHOĞLU "Diferensiyel Geometri, (1983)" kitabında yer vermiştir.

$2-$boyutlu yüzeyler için yüzeyin dağılma parametresi ile Gauss eğriliği arasındaki bağıntıya E. KRUPPA "Analytische und Konstruktive Differentialgeometrie, (1957)" kitabında yer vermiş ve bu bağıntı Lamarle formülü olarak literatüre girmiştir.

Genelleştirilmiş regle yüzeyler teorisi "Ligne de striction sur une généralisation à plusieurs dimensions d'une surface réglée, (1962)" çalışması ile M. JUZA tarafından ortaya atılmış ve son yüzyıllarda bu alanda yapılan çalışmalar yoğunlaşmıştır. H. FRANK, O. GIERING ve C. THAS nın çalışmalarının yanı sıra ülkemizde de bu alanda Arif SABUNCUOĞLU, Mahmut ERGÜT, Nuri KURUOĞLU ve pek çok değerli bilim adamının çalışmaları ile $n-$boyutlu Öklid uzayında genelleştirilmiş regle yüzeylerin özellikleri incelenmiştir.

Klasik yüzey teorisinde iyi bilinen Euler teoremi, Meusnier teoremi ve Lamarle formüllerinin genelleştirilmiş regle yüzeylerin teğet kesitlerine uygulanması H. FRANK ve O. GIERING tarafından "Zur Schnittkrümmung verallgemeinerter Regelflachen, (1979)" çalışmasında verilmiştir. Bu çalışmada E^n, $n-$boyutlu Öklid uzayında genelleştirilmiş regle yüzeylerin kesit eğrilikleri hesap edilmiş ve teğet kesitlerinin eğrilikleri için elde edilen bağıntılar Beltrami-Euler formülü, Beltrami-Meusnier formülü olarak literatüre girmiştir. Ayrıca, genelleştirilmiş regle yüzeylerin dağılma parametresi ile eğrilikleri incelenerek Lamarle formülü genelleştirilmiştir. Bu çalışma 2001 yılında Gülcan FERAH tarafından hazırlanan "Genelleştirilmiş Regle Yüzeylerin Kesit Eğriliği Üzerine" adlı yüksek lisans tezinde incelemiştir. Literatürde Beltrami-Euler formülü, Beltrami-Meusnier formülü ve genelleştirilmiş Lamarle formülü ile ilgili başka bir esere rastlanamamış ve Minkowski (Lorentz) uzayındaki Lorentzian anlamda karşılıkları tarafımızdan araştırılmıştır.

Minkowski uzayında genelleştirilmiş regle yüzeyler ülkemizde ve yurt dışında pek çok bilim adamı tarafından çalışmıştır. Murat TOSUN tarafından hazırlanan "IR_1^n, Minkowski uzayında spacelike doğrultman uzaylı genelleştirilmiş timelike regle yüzeyler, (1995)", adlı doktora tezi ve İsmail AYDEMİR tarafından hazırlanan "IR_1^n, Minkowski uzayında timelike doğrultman uzaylı genelleştirilmiş timelike regle yüzeyler, (1995)", adlı doktora tezinin yanı sıra literatürde IR_1^n de genelleştirilmiş regle yüzey teorisi ile ilgili pek çok çalışmaya rastlamak mümkündür. Çalışmamızda özet olarak tanıttığımız IR_1^n de genelleştirilmiş timelike regle yüzeyler göz önüne alınarak tezimizin orijinal olan bölümünde iki ayrı başlık altında IR_1^n, $n-$boyutlu Minkowski uzayında spacelike doğrultman uzaylı genelleştirilmiş timelike regle yüzeylerin kesit eğrilikleri ve timelike doğrultman uzaylı genelleştirilmiş timelike regle yüzeylerin kesit eğrilikleri incelenmiştir.

BÖLÜM 2. TEMEL KAVRAMLAR

2. 1. Minkowski Uzayında Temel Kavramlar

Tanım 2.1.1. V, sonlu boyutlu reel vektör uzayı olmak üzere,

$$\langle\ ,\ \rangle : V \times V \rightarrow IR$$

2-lineer fonksiyonu her $\vec{v}, \vec{w} \in V$ için $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = \langle \vec{w}, \vec{v} \rangle$ özeliğini sağlıyor ise, $\langle\ ,\ \rangle$ ye V üzerinde bir simetrik 2-lineer form denir [18].

Tanım 2.1.2. V, vektör uzayı üzerinde bir simetrik 2-lineer form $\langle\ ,\ \rangle$ olsun. Bu takdirde,

i) $\forall \vec{v} \in V$, $\vec{v} \neq 0$ için $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle > 0$ ise $\langle\ ,\ \rangle$ 2-lineer formu pozitif tanımlı,

ii) $\forall \vec{v} \in V$, $\vec{v} \neq 0$ için $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle < 0$ ise $\langle\ ,\ \rangle$ 2-lineer formu negatif tanımlı,

iii) $\forall \vec{v} \in V$, $\vec{v} \neq 0$ için $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle \geq 0$ ise $\langle\ ,\ \rangle$ 2-lineer formu yarı-pozitif tanımlı,

iv) $\forall \vec{v} \in V$, $\vec{v} \neq 0$ için $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle \leq 0$ ise $\langle\ ,\ \rangle$ 2-lineer formu yarı-negatif tanımlı,

v) $\forall \vec{w} \in V$ için $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = 0$ için $\vec{v} = \vec{0}$ oluyorsa $\langle\ ,\ \rangle$ 2-lineer formuna nondejenere, aksi halde dejenere adı verilir [18].

Tanım 2.1.3. $\langle\ ,\ \rangle$, V üzerinde simetrik 2-lineer form ve W da V nin bir altuzayı olsun. $\langle\ ,\ \rangle$ nin W üzerinde kısıtlanmışı $\langle\ ,\ \rangle|_W$ olmak üzere,

$$\langle\ ,\ \rangle|_W : W \times W \rightarrow IR$$

negatif tanımlı olacak şekilde en büyük boyutlu W altuzayının boyutuna, $\langle\ ,\ \rangle$ simetrik 2-lineer formun indeksi denir. Eğer $\langle\ ,\ \rangle$ nin indeksi ν ise $0 \leq \nu \leq \text{boy}V$ dir [18].

Tanım 2.1.4. M , türevlenebilir (C^{∞} sınıfından) manifold ve

$$\begin{aligned} \langle\ ,\ \rangle : \chi(M) \times \chi(M) &\to C^{\infty}(M, IR) \\ (\vec{X}, \vec{Y}) &\to \langle \vec{X}, \vec{Y} \rangle \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan simetrik, 2-lineer ve nondejenere metrik fonksiyona M üzerinde bir metrik tensör denir. Bu metrik tensörün indeksi M manifoldunun indeksi olarak ifade edilir [18].

M bir C^{∞} sınıfından manifold olmak üzere, $\chi(M)$ de tanımlı $\langle\ ,\ \rangle$ iç çarpım fonksiyonu, M nin her bir tanjant uzayına bir iç çarpım indirger, öyle ki $\vec{X}, \vec{Y} \in \chi(M)$ ve $P \in M$ için $\vec{X}_P, \vec{Y}_P \in T_M(P)$ dir. Böylece,

$$\langle\ ,\ \rangle\big|_P : T_M(P) \times T_M(P) \to IR$$

simetrik, 2-lineer ve nondejenere dönüşüm tanımlayan $\langle\ ,\ \rangle\big|_P$ fonksiyonuna $T_M(P)$ üzerinde bir metrik tensör denir [18].

Tanım 2.1.5. M bir C^{∞} sınıfından manifold ve $\langle\ ,\ \rangle$ de M üzerinde sabit indeksli bir metrik tensör olmak üzere $(M, \langle\ ,\ \rangle)$ ikilisine bir yarı-Riemann manifoldu denir [18].

M nin indeksi ν olmak üzere $0 \leq \nu \leq n = \text{boy}M$ için, eğer $\nu = 0$ ise M bir Riemann manifoldu, $\nu = 1$ ve $n \geq 2$ durumunda ise M bir Lorentz manifoldu adını alır [18].

Tanım 2.1.6. IR^n, $n-$boyutlu Öklid uzayı verilsin. $0 \le \nu \le n$ olmak üzere,

$$\left\langle \vec{X}, \vec{Y} \right\rangle = -\sum_{i=1}^{\nu} x_i y_i + \sum_{j=\nu+1}^{n} x_j y_j$$

şeklinde bir metrik tensör tanımlanırsa, seçilen uzay yarı-Öklid uzayı olarak isimlendirilir ve IR_ν^n ile gösterilir. Özel olarak $\nu = 1$, $n \ge 2$ durumunda ise IR_1^n, $n-$boyutlu Minkowski uzayı adını alır. Metrik tensör ise Lorentz metriği olarak adlandırılır [18].

Tanım 2.1.7. $\vec{X} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in IR_1^n$ olsun. Eğer

i) $\left\langle \vec{X}, \vec{X} \right\rangle < 0$ ise $\vec{X}$ e timelike vektör,

ii) $\left\langle \vec{X}, \vec{X} \right\rangle > 0$ veya $\vec{X} = \vec{0}$ ise $\vec{X}$ e spacelike vektör,

iii) $\left\langle \vec{X}, \vec{X} \right\rangle = 0$ ve $\vec{X} \ne \vec{0}$ ise $\vec{X}$ e null (lightlike) vektör adı verilir [18].

Tanım 2.1.8. IR_1^n, $n-$boyutlu Minkowski uzayı olsun. $\forall \vec{X}, \vec{Y} \in IR_1^n$ için

$$\left\langle \vec{X}, \vec{Y} \right\rangle = 0$$

ise $\vec{X}$ ve $\vec{Y}$ vektörleri Lorentz anlamda diktirler denir [18].

Tanım 2.1.9. IR_1^n, $n-$boyutlu Minkowski uzayının bütün timelike vektörlerin cümlesi τ olsun. Böylece $\forall \vec{U} \in \tau$ için

$$C(\vec{U}) = \left\{ \vec{X} \in \tau \,\middle|\, \left\langle \vec{U}, \vec{X} \right\rangle < 0 \right\}$$

biçiminde tanımlanan $C(\vec{U})$ cümlesine $\vec{U}$ yu içeren IR_1^n nin bir time-konisi denir [18].

Tanım 2.1.10. $\vec{X}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in IR_1^n$ için $\vec{X}$ vektörünün normu

$$\left\|\vec{X}\right\|=\sqrt{\left|\left\langle\vec{X},\vec{X}\right\rangle\right|}$$

ile tanımlanır [18].

Teorem 2.1.11. $\vec{X}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in IR_1^n$ olsun. Bu takdirde

i) $\left\|\vec{X}\right\|>0$ dır,

ii) $\left\|\vec{X}\right\|=0\Leftrightarrow\vec{X}$ bir null vektördür,

iii) $\vec{X}$ bir timelike vektör ise, $\left\|\vec{X}\right\|^2=-\left\langle\vec{X},\vec{X}\right\rangle$ dir,

iv) $\vec{X}$ bir spacelike vektör ise, $\left\|\vec{X}\right\|^2=\left\langle\vec{X},\vec{X}\right\rangle$ dir [18].

Tanım 2.1.12. $(V,\langle\ ,\ \rangle)$ bir Minkowski uzayı olsun. $W\subset V$ altuzayı göz önüne alınırsa

i) $\langle\ ,\ \rangle|_W : W\times W\to\mathbb{R}$, pozitif ise, W ya spacelike altuzay,

ii) $\langle\ ,\ \rangle|_W : W\times W\to\mathbb{R}$, 1-indeksli ve nondejenere ise, W ya timelike altuzay,

iii) $\langle\ ,\ \rangle|_W : W\times W\to\mathbb{R}$, dejenere ise, W ya lightlike altuzay denir [18].

Teorem 2.1.13. IR_1^n, Minkowski uzayında iki timelike vektör $\vec{X}$ ve $\vec{Y}$ olsun. Bu durumda

$$\left|\left\langle\vec{X},\vec{Y}\right\rangle\right|\geq\left\|\vec{X}\right\|\left\|\vec{Y}\right\|$$

eşitsizliği vardır. Bu eşitsizlikte eşitlik durumunun sağlanması için gerek ve yeter şart $\vec{X}$ ve $\vec{Y}$ vektörlerinin lineer bağımlı olmasıdır [18].

Teorem 2.1.14. IR_1^n, Minkowski uzayında $\vec{X}$ ve $\vec{Y}$ timelike vektörleri aynı time-konisinin elemanı ise

$$\left\langle \vec{X},\vec{Y}\right\rangle = -\left\|\vec{X}\right\|\left\|\vec{Y}\right\|\cosh\theta \tag{2.1.1}$$

olacak şekilde bir tek $\theta \geq 0$ reel sayısı vardır [18].

Tanım 2.1.15. Yukarıdaki teoremde verilen θ reel sayısına $\vec{X}$ ve $\vec{Y}$ timelike vektörleri arasındaki Lorentzian timelike açı denir [20].

Teorem 2.1.16. IR_1^n, Minkowski uzayında iki lineer bağımsız spacelike vektör $\vec{X}$ ve $\vec{Y}$ olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler birbirine denktir [20];

i) $\vec{X}$ ve $\vec{Y}$ vektörleri $\left|\left\langle \vec{X},\vec{Y}\right\rangle\right| \leq \left\|\vec{X}\right\|\left\|\vec{Y}\right\|$ denklemini sağlar,

ii) $\vec{X}$ ve $\vec{Y}$ spacelike vektörleri tarafından gerilen V altuzayı spacelike dır,

iii) Sırasıyla, $\vec{X}$ ve $\vec{Y}$ ye Lorentz anlamda ortogonal olan H^n nin, P ve Q hiperdüzlemleri kesişirler.

Teorem 2.1.17. IR_1^n, Minkowski uzayında $\vec{X}$ ve $\vec{Y}$ spacelike vektörlerinin gerdikleri altuzay spacelike ise $\left|\left\langle \vec{X},\vec{Y}\right\rangle\right| \leq \left\|\vec{X}\right\|\left\|\vec{Y}\right\|$ eşitsizliği vardır. Bu eşitsizlikte eşitlik durumunun sağlanması için gerek ve yeter şart $\vec{X}$ ve $\vec{Y}$ vektörlerinin lineer bağımlı olmasıdır. Böylece,

$$\left\langle \vec{X},\vec{Y}\right\rangle = \left\|\vec{X}\right\|\left\|\vec{Y}\right\|\cos\theta \tag{2.1.2}$$

olacak şekilde bir tek $0 \leq \theta \leq \pi$ reel sayısı vardır [20].

Tanım 2.1.18. Yukarıdaki teoremde verilen θ reel sayısına $\vec{X}$ ve $\vec{Y}$ spacelike vektörleri arasındaki Lorentzian spacelike açı denir [20].

Teorem 2.1.19. IR_1^n, Minkowski uzayında iki lineer bağımsız spacelike vektör $\vec{X}$ ve $\vec{Y}$ olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler birbirine denktir [20];

i) $\vec{X}$ ve $\vec{Y}$ vektörleri $\left|\left\langle \vec{X}, \vec{Y} \right\rangle\right| > \left\|\vec{X}\right\| \left\|\vec{Y}\right\|$ denklemini sağlar,

ii) $\vec{X}$ ve $\vec{Y}$ spacelike vektörleri tarafından gerilen V altuzayı timelike dır,

iii) Sırasıyla, $\vec{X}$ ve $\vec{Y}$ ye Lorentz anlamda ortogonal olan H^n nin, P ve Q hiperdüzlemleri ayrıktır.

Teorem 2.1.20. IR_1^n, Minkowski uzayında $\vec{X}$ ve $\vec{Y}$ spacelike vektörlerinin gerdikleri altuzay timelike ise $\left|\left\langle \vec{X}, \vec{Y} \right\rangle\right| > \left\|\vec{X}\right\| \left\|\vec{Y}\right\|$ eşitsizliği vardır. Böylece,

$$\left\langle \vec{X}, \vec{Y} \right\rangle = \left\|\vec{X}\right\| \left\|\vec{Y}\right\| \cosh \theta \tag{2.1.3}$$

olacak şekilde bir tek $\theta > 0$ reel sayısı vardır [20].

Tanım 2.1.21. Yukarıdaki teoremde verilen θ reel sayısına $\vec{X}$ ve $\vec{Y}$ spacelike vektörleri arasındaki Lorentzian timelike açı denir [20].

Teorem 2.1.22. IR_1^n, Minkowski uzayında $\vec{X}$ bir spacelike vektör ve $\vec{Y}$ timelike vektör ise

$$\left\langle \vec{X}, \vec{Y} \right\rangle = \left\|\vec{X}\right\| \left\|\vec{Y}\right\| \sinh \theta \tag{2.1.4}$$

olacak şekilde bir tek $\theta > 0$ reel sayısı vardır [20].

Tanım 2.1.23. Yukarıdaki teoremde verilen θ reel sayısına $\vec{X}$ spacelike vektörü ile $\vec{Y}$ timelike vektörü arasındaki Lorentzian timelike açı denir [20].

Tanım 2.1.24. $\alpha \in IR_1^n$ Minkowski uzayında bir eğri olsun. Böylece, α eğrisinin hız vektörü $\dot{\alpha}$ olmak üzere;

i) $\left\langle \dot{\alpha}, \dot{\alpha} \right\rangle < 0$ ise, α timelike eğri,

ii) $\left\langle \dot{\alpha}, \dot{\alpha} \right\rangle > 0$ ise, α spacelike eğri,

iii) $\left\langle \dot{\alpha}, \dot{\alpha} \right\rangle = 0$ ise, α null eğri

olarak adlandırılır [18].

2. 2. Koneksiyonlar ve Eğrilik

Tanım 2.2.1. M, bir yarı-Riemann manifoldu ve M üzerinde vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ olsun. $\forall$ $\vec{X}$, $\vec{Y}$, $\vec{Z} \in \chi(M)$ ve $\forall f \in C^{\infty}(M, IR)$ için

$$\begin{aligned} D : \chi(M) \times \chi(M) &\to \chi(M) \\ \left(\vec{X}, \vec{Y}\right) &\to D\left(\vec{X}, \vec{Y}\right) = D_{\vec{X}} \vec{Y} \end{aligned}$$

operatörü,

D1) $D_{\vec{X}}\left(\vec{Y} + \vec{Z}\right) = D_{\vec{X}} \vec{Y} + D_{\vec{X}} \vec{Z}$

D2) $D_{\vec{X}+\vec{Y}} \vec{Z} = D_{\vec{X}} \vec{Z} + D_{\vec{Y}} \vec{Z}$

D3) $D_{f\vec{X}} \vec{Y} = f D_{\vec{X}} \vec{Y}$

D4) $D_{\vec{X}}\left(f\vec{Y}\right) = \vec{X}[f]\vec{Y} + f D_{\vec{X}} \vec{Y}$

özeliklerini sağlıyor ise D ye M üzerinde koneksiyon $D_{\vec{X}} \vec{Y}$ ye de $\vec{Y}$ nin $\vec{X}$ vektör alanına göre kovaryant türevi denir [13].

Tanım 2.2.2. M, bir yarı-Riemann manifoldu ve M üzerindeki koneksiyon D olsun. $\forall\ \vec{X}$, $\vec{Y}$, $\vec{Z} \in \chi(M)$ için

D5) $\left[\vec{X},\vec{Y}\right] = D_{\vec{X}}\vec{Y} - D_{\vec{Y}}\vec{X}$

D6) $\vec{X}\left\langle \vec{Y},\vec{Z}\right\rangle = \left\langle D_{\vec{X}}\vec{Y},\vec{Z}\right\rangle + \left\langle \vec{Y},D_{\vec{X}}\vec{Z}\right\rangle$

özelikleri sağlanıyorsa D koneksiyonuna M üzerinde Levi-Civita koneksiyonu denir [13].

Tanım 2.2.3. M, bir yarı-Riemann manifoldu ve M nin her bir U koordinat komşuluğu üzerinde yerel koordinat fonksiyonları $x_1, x_2,\ldots,x_n$ ve tanjant uzayının bazı $\{\partial_1,\partial_2,\ldots,\partial_n\}$, $\partial_i = \dfrac{\partial}{\partial x_i}$, $1 \le i \le n$, olsun.

$$D_{\partial_i}\left(\partial_j\right) = \sum_k \Gamma_{ij}^k \partial_k \qquad , \qquad 1 \le i, j \le n \tag{2.2.1}$$

olmak üzere

$$\Gamma_{ij}^k : U \xrightarrow{C^\infty} IR$$

reel değerli Γ_{ij}^k fonksiyonları D nin Christoffel sembolleri olarak adlandırılır [18].

$\left[\partial_i,\partial_j\right] = 0$ ve (D5) den $D_{\partial_i}\left(\partial_j\right) = D_{\partial_j}\left(\partial_i\right)$ dir. Böylece,

$$\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k \tag{2.2.2}$$

dir [18].

Önerme 2.2.4. U üzerinde yerel koordinat fonksiyonları $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ve tanjant uzayının bazı $\{\partial_1, \partial_2, \ldots, \partial_n\}$, $\partial_i = \dfrac{\partial}{\partial x_i}$, $1 \le i \le n$, olsun. $W = \sum_j W_j \partial_j$ olmak üzere

$$D_{\partial_i}\left(\sum_j W_j \partial_j\right) = \sum_k \left\{\frac{\partial W_k}{\partial x_i} + \sum_j \Gamma_{ij}^k W_j\right\}\partial_k \tag{2.2.3}$$

dır, burada Γ_{ij}^k Christoffel sembolleri

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}\sum_m g^{km}\left[\frac{\partial g_{jm}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{im}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_m}\right] \text{ (Koszul eşitliği)} \tag{2.2.4}$$

ile verilir. Burada, D_{∂_i}, ∂_i yönündeki Lorentz anlamda kovaryant türev ve g^{km} ise g_{km} nin ters matrisidir [18].

Teorem 2.2.5. Bir yarı-Riemann manifoldu üzerinde bir tek Levi-Civita koneksiyonu vardır [18].

Lemma 2.2.6. IR_ν^n, $(\nu = 0,1,\ldots,n)$ yarı-Öklid uzayının Levi-Civita koneksiyonu D olsun. IR_ν^n üzerinde yerel koordinat sistemine göre

$$1)\ g_{ij} = \delta_{ij}\varepsilon_j \quad , \qquad \varepsilon_j = \begin{cases} -1, & 1 \le j \le \nu \\ +1, & \nu+1 \le j \le n \end{cases} \tag{2.2.5}$$

$$2)\ \Gamma_{ij}^k = 0 \quad , \qquad 1 \le i, j \le n \tag{2.2.6}$$

dir [4].

Tanım 2.2.7. M, bir yarı-Riemann manifoldu ve M üzerinde Levi-Civita koneksiyonu D olmak üzere

$$\begin{aligned} R : \chi(M)\times\chi(M)\times\chi(M) &\to \chi(M) \\ (\vec{X},\vec{Y},\vec{Z}) &\to R(\vec{X},\vec{Y},\vec{Z}) = R_{\vec{X}\vec{Y}}\vec{Z} \end{aligned}$$

$$R_{\vec{X}\vec{Y}}\vec{Z} = D_{\vec{X}}D_{\vec{Y}}\vec{Z} - D_{\vec{Y}}D_{\vec{X}}\vec{Z} - D_{[\vec{X},\vec{Y}]}\vec{Z} \tag{2.2.7}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyon M üzerinde 3. mertebeden bir kovaryant tensör alanı olup M nin Riemann eğrilik tensörü olarak adlandırılır [13].

Eğer $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z} \in T_P(M)$ ise

$$\begin{aligned} R_{\vec{x}\vec{y}} : T_P(M) &\to T_P(M) \\ \vec{z} &\to R_{\vec{x}\vec{y}}\vec{z} \end{aligned}$$

operatörüne eğrilik operatörü denir [18].

Teorem 2.2.8. Eğer $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$, $\vec{v}$, $\vec{w} \in T_P(M)$ ise

$$\begin{aligned} &1)\ R_{\vec{x}\vec{y}} = -R_{\vec{y}\vec{x}} \\ &2)\ \langle R_{\vec{x}\vec{y}}\vec{v},\vec{w}\rangle = -\langle R_{\vec{x}\vec{y}}\vec{w},\vec{v}\rangle \\ &3)\ R_{\vec{x}\vec{y}}\vec{z} + R_{\vec{y}\vec{z}}\vec{x} + R_{\vec{z}\vec{x}}\vec{y} = 0 \\ &4)\ \langle R_{\vec{x}\vec{y}}\vec{v},\vec{w}\rangle = \langle R_{\vec{v}\vec{w}}\vec{x},\vec{y}\rangle \end{aligned} \tag{2.2.8}$$

bağıntıları vardır [18].

Tanım 2.2.9. M , yarı-Riemann manifoldunun $x_1, x_2, \ldots, x_n$ koordinat sisteminin koordinat komşuluğunda tanjant uzayının bazı $\{\partial_1, \partial_2, \ldots, \partial_n\}$, $\partial_i = \dfrac{\partial}{\partial x_i}$, $1 \le i \le n$, olmak üzere, M nin Riemann eğrilik tensörü

$$R_{\partial_k \partial_l}\left(\partial_j\right) = \sum_{i=1}^{n} R^i_{jkl} \partial_i \tag{2.2.9}$$

biçiminde tanımlanır. Bu eşitlikteki R^i_{jkl} fonksiyonlarına M nin Riemann eğrilik tensörü katsayıları olarak adlandırılır [4].

Teorem 2.2.10. M , yarı-Riemann manifoldunun Riemann eğrilik tensörü

$$R_{\partial_k \partial_l}\left(\partial_j\right) = \sum_{i=1}^{n} R^i_{jkl} \partial_i$$

olmak üzere R^i_{jkl} Riemann eğrilik tensörü katsayıları

$$R^i_{jkl} = \frac{\partial}{\partial x_k} \Gamma^i_{lj} - \frac{\partial}{\partial x_l} \Gamma^i_{kj} + \sum_{m=1}^{n} \left(\Gamma^i_{km} \Gamma^m_{lj} - \Gamma^i_{lm} \Gamma^m_{kj} \right) \tag{2.2.10}$$

dir [4].

Tanım 2.2.11. M , $n-$boyutlu $(n \ge 4)$ yarı-Riemann manifoldu olsun. $\forall \vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z}, \vec{W} \in \chi(M)$ için

$$\begin{aligned} R : \chi(M) \times \chi(M) \times \chi(M) \times \chi(M) &\to C^\infty(M, IR) \\ \left(\vec{W}, \vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z}\right) &\to R\left(\vec{W}, \vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z}\right) = \left\langle \vec{W}, R_{\vec{X}\vec{Y}} \vec{Z} \right\rangle \end{aligned} \tag{2.2.11}$$

biçiminde tanımlanan 4. mertebeden bir kovaryant tensöre, M üzerinde Riemann-Christoffel eğrilik tensörü denir [13].

Teorem 2.2.12. M, yarı-Riemann manifoldunun Riemann-Christoffel eğrilik tensörü

$$R_{ijkl} = \sum_{r=1}^{n} g_{ir} R^{r}_{jkl} \tag{2.2.12}$$

olarak ifade edilir [4].

Tanım 2.2.13. M, bir yarı-Riemann manifoldu ve $P \in M$ noktasındaki $T_P(M)$ tanjant uzayının iki boyutlu alt uzayı Π olsun. Π ye M nin P noktasındaki teğet kesiti denir [18].

$\vec{v}, \vec{w} \in T_P(M)$ tanjant vektörleri, Π teğet kesitinin bir bazını oluşturmak üzere

$$Q(\vec{v}, \vec{w}) = \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle \langle \vec{w}, \vec{w} \rangle - \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle^2 \tag{2.2.13}$$

için Π teğet kesiti nondejeneredir ancak ve ancak $Q(\vec{v}, \vec{w}) \neq 0$ dır [18].

$|Q(\vec{v}, \vec{w})|$ mutlak değeri, kenarları $\vec{v}$ ve $\vec{w}$ olan paralelkenarın alanının karesine eşittir. Eğer $\langle \, , \rangle|_{\Pi}$ definit ise $Q(\vec{v}, \vec{w})$ pozitif, $\langle \, , \rangle|_{\Pi}$ indefinit ise $Q(\vec{v}, \vec{w})$ negatiftir [18].

M yarı-Riemann manifoldunun P noktasındaki nondejenere teğet kesiti Π nin bir bazı $\{\vec{v}, \vec{w}\}$ olmak üzere M nin teğet kesitleri

$\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle \langle \vec{w}, \vec{w} \rangle - \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle^2 < 0$ (timelike düzlem)

$\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle \langle \vec{w}, \vec{w} \rangle - \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle^2 = 0$ (dejenere düzlem)

$\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle \langle \vec{w}, \vec{w} \rangle - \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle^2 > 0$ (spacelike düzlem)

olacak şekilde sınıflandırılır [4].

Tanım 2.2.14. M , bir yarı-Riemann manifoldu ve $P \in M$ noktasındaki nondejenere teğet kesiti Π olsun. Bu düzlem üzerinde $\forall \vec{v}, \vec{w} \in \Pi$ için

$$K(\vec{v}, \vec{w}) = \frac{\langle R_{\vec{v}\vec{w}}\vec{v}, \vec{w}\rangle}{\langle \vec{v}, \vec{v}\rangle\langle \vec{w}, \vec{w}\rangle - \langle \vec{v}, \vec{w}\rangle^2} \tag{2.2.14}$$

olarak tanımlanan K reel değerli fonksiyonuna M nin P noktasındaki kesit eğrilik fonksiyonu ve $K(\vec{v}, \vec{w})$ reel değerine de M nin P noktasındaki kesit eğriliği denir [4].

$\{\vec{v}, \vec{w}\}$ bazı ile verilen Π teğet kesitinin kesit eğriliği, $\vec{v} = \sum v_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ ve $\vec{w} = \sum w_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ için

$$K(\vec{v}, \vec{w}) = \frac{\sum R_{ijkm} w_i v_j w_k v_m}{\sum g_{ij} v_i v_j g_{km} w_k w_m - \left[\sum g_{ij} v_i w_j\right]^2} \tag{2.2.14}$$

ile verilir [4].

BÖLÜM 3. IR_1^n, $n-$BOYUTLU MİNKOWSKİ UZAYINDA GENELLEŞTİRİLMİŞ REGLE YÜZEYLER

3.1. IR_1^n, $n-$boyutlu Minkowski Uzayında Spacelike Doğrultman Uzaylı Genelleştirilmiş Timelike Regle Yüzeyler

IR_1^n, $n-$boyutlu Minkowski uzayında $\{0\} \subset I \subset IR$ olmak üzere diferensiyellenebilir timelike bir eğri

$$\begin{aligned} \alpha : I &\to IR_1^n \\ t &\to \alpha(t) = (\alpha_1(t), \ldots, \alpha_n(t)) \end{aligned}$$

olsun. α eğrisinin her $\alpha(t)$ noktasında tanımlı bir ortonormal vektör alan sistemi $\{e_1(t), \ldots, e_k(t)\}$ ile verilmiş olsun. Bu sistem $\alpha(t) \in IR_1^n$ noktasındaki bir $T_{IR_1^n}(\alpha(t))$ tanjant uzayının k boyutlu bir altuzayını gerer. Bu altuzay $E_k(t)$ ile gösterilirse

$$E_k(t) = Sp\{e_1(t), \ldots, e_k(t)\}$$

dir [24]. Bu bölümün 3.1. kısmında $E_k(t)$ daima spacelike altuzay kabul edilmiştir.

Tanım 3.1.1. $E_k(t)$ spacelike altuzayı α timelike eğrisi boyunca hareket ederken IR_1^n de $(k+1)-$boyutlu bir yüzey meydana getirir. Bu yüzeye $n-$boyutlu Minkowski uzayında spacelike doğrultman uzaylı $(k+1)-$boyutlu genelleştirilmiş timelike regle yüzey denir [24].

Tanım 3.1.2. $E_k(t)$ spacelike altuzayına M regle yüzeyinin $\alpha(t)$ noktasındaki doğrultman uzayı ve α timelike eğrisine de M nin dayanak eğrisi adı verilir [24].

M , $(k+1)-$boyutlu timelike regle yüzeyi için bir parametrizasyon,

$$\varphi(t,u_1,\ldots,u_k)=\alpha(t)+\sum_{\nu=1}^{k}u_\nu e_\nu(t) \tag{3.1.1}$$

şeklindedir. Eğer φ nin t ye ve u_ν ye göre türevi alınırsa

$$\varphi_t=\dot{\alpha}(t)+\sum_{\nu=1}^{k}u_\nu \dot{e}_\nu(t)$$

ve

$$\varphi_{u_\nu}=e_\nu \quad , \quad 1\leq \nu\leq k$$

elde edilir. Bu çalışmada

$$\left\{\dot{\alpha}(t)+\sum_{\nu=1}^{k}u_\nu \dot{e}_\nu(t),e_1(t),\ldots,e_k(t)\right\} \tag{3.1.2}$$

sistemi daima lineer bağımsız kabul edilmiştir [24].

Tanım 3.1.3. M , IR_1^n de $(k+1)-$boyutlu bir timelike regle yüzey ve $E_k(t)$ de M nin doğrultman uzayı olsun.

$$Sp\left\{e_1,\ldots,e_k,\dot{e}_1,\ldots,\dot{e}_k\right\}$$

altuzayına M nin $E_k(t)$ ye göre asimptotik demeti denir ve $A(t)$ ile gösterilir [24].

Eğer

$$\text{boy}A(t) = k + m \quad , \quad 0 \leq m \leq k \tag{3.1.3}$$

kabul edilirse, $A(t)$ asimptotik demetinin $E_k(t)$ yi ihtiva eden

$$\{e_1, \ldots, e_k, a_{k+1}, \ldots, a_{k+m}\} \tag{3.1.4}$$

şeklinde bir ortonormal bazı bulunabilir [24].

Tanım 3.1.4. M , IR_1^n de $(k+1)-$boyutlu bir timelike regle yüzey olsun.

$$Sp\left\{e_1, \ldots, e_k, \dot{e}_1, \ldots, \dot{e}_k, \dot{\alpha}\right\} \tag{3.1.5}$$

altuzayına M nin $E_k(t)$ ye göre teğetsel demeti denir ve $T(t)$ ile gösterilir [24].

$\text{boy}A(t) = k + m$, $0 \leq m \leq k$, olmak üzere $k + m \leq \text{boy}T(t) \leq k + m + 1$ dir.

$E_k(t)$ spacelike altuzay olduğundan

$$\left\langle e_v, e_\mu \right\rangle = \delta_{v\mu} \quad , \quad 1 \leq v, \mu \leq k$$

bağıntısı sağlanır ve α timelike eğri olduğundan

$$\left\langle \dot{\alpha}, \dot{\alpha} \right\rangle < 0$$

dır.

Eğer boy $T(t)=k+m+1$ ise bu takdirde α dayanak eğrisinin hız vektörü $\dot{\alpha}$ olmak üzere,

$$\dot{\alpha}\notin Sp\{e_1,\ldots,e_k,a_{k+1},\ldots,a_{k+m}\}$$

dır. Böylece, $T(t)$ nin

$$\{e_1,\ldots,e_k,a_{k+1},a_{k+2},\ldots,a_{k+m},a_{k+m+1}\}$$

şeklinde bir ortonormal bazı bulunabilir. Burada a_{k+m+1} vektörü $\dot{\alpha}$ timelike, vektörünün ortonormalleştirilmesi ile elde edildiğinden, a_{k+m+1} bir timelike vektördür ve

$$T(t)=Sp\{e_1,\ldots,e_k,a_{k+1},a_{k+2},\ldots,a_{k+m},a_{k+m+1}\} \tag{3.1.6}$$

teğetsel demeti IR_1^n in bir timelike altuzayıdır. Bu ise

$$A(t)=Sp\{e_1,\ldots,e_k,a_{k+1},\ldots,a_{k+m}\}$$

asimptotik demetinin $T(t)$ nin bir spacelike altuzayı olmasını gerektirir [24].

O halde IR_1^n de $(k+1)-$boyutlu M timelike regle yüzeyi için aşağıdaki teoremler verilebilir.

Teorem 3.1.5. M, IR_1^n de $(k+1)-$boyutlu bir timelike regle yüzey ve $T(t)$, M nin teğetsel demeti olsun. $T(t)$ daima bir timelike altuzaydır [24].

Teorem 3.1.6. M , IR_1^n de $(k+1)-$boyutlu bir timelike regle yüzey ve $E_k(t)$ de M nin doğrultman uzayı olsun. $t_0 \in I$ olmak üzere $\{e_1(t_0),\ldots,e_k(t_0)\}$ da $E_k(t)$ nin bir ortonormal bazı olsun. $t \in J \subset I$ olacak şekilde öyle bir J aralığı bulunabilir ki bu aralıkta $E_k(t)$ nin, $\forall t \in J$ için,

$$\left\langle \dot{\overline{e_\nu}}, \overline{e_\mu} \right\rangle = 0 \quad , \qquad 1 \le \nu, \mu \le k$$

olacak şekilde $\{\overline{e_1}(t),\ldots,\overline{e_k}(t)\}$ bazı tek türlü bulunabilir [24].

Teorem 3.1.7. M , IR_1^n de $(k+1)-$boyutlu bir timelike regle yüzey, $E_k(t)$ doğrultman uzayı ve $T(t)$ de M nin teğetsel demeti olsun. boy$T(t) = k+m$ ve $E_k(t)$ nin ortonormal bazı $\{e_1(t),\ldots,e_m(t),e_{m+1}(t),\ldots,e_k(t)\}$ olsun. Bu takdirde $\{e_1(t),\ldots,e_m(t)\}$ ortonormal sistemi $J \subset I$ açık aralığında

$$\left\langle \overset{\circ}{e}_\nu, \overset{\circ}{e}_\mu \right\rangle = 0 \quad , \quad 1 \le \nu, \mu \le m \quad , \quad \nu \ne \mu \tag{3.1.7}$$

$$\left\langle \overset{\circ}{e}_1, \overset{\circ}{e}_1 \right\rangle > \ldots > \left\langle \overset{\circ}{e}_{s-1}, \overset{\circ}{e}_{s-1} \right\rangle > \left\langle \overset{\circ}{e}_{s+1}, \overset{\circ}{e}_{s+1} \right\rangle > \ldots > \left\langle \overset{\circ}{e}_m, \overset{\circ}{e}_m \right\rangle > 0$$

$$\left\langle \overset{\circ}{e}_s, \overset{\circ}{e}_s \right\rangle < 0 \quad , \qquad 1 \le s \le m$$

olacak şekilde bulunabilir. Burada

$$\overset{\circ}{e}_\nu = \dot{e}_\nu - \sum_{\mu=1}^{k} \left\langle \dot{e}_\nu, e_\mu \right\rangle e_\mu \tag{3.1.8}$$

dir [24].

Teorem 3.1.8. M, IR_1^n de $(k+1)-$boyutlu bir timelike regle yüzey, $E_k(t)$ doğrultman uzayı ve $T(t)$ de M nin bir teğetsel demeti olsun. boy$T(t)=k+m+1$, $0\leq m\leq k$ ve $E_k(t)$ nin bir ortonormal bazı $\{e_1(t),\ldots,e_m(t),e_{m+1}(t),\ldots,e_k(t)\}$ ortonormal sistemi, $J\subset I$ açık aralığında,

$$\left\langle \overset{\circ}{e}_v(t),\overset{\circ}{e}_\mu\right\rangle=0 \quad , \quad 1\leq v,\mu\leq m \quad , \quad v\neq\mu \tag{3.1.9}$$

$$\left\langle \overset{\circ}{e}_1(t),\overset{\circ}{e}_1(t)\right\rangle>\ldots>\left\langle \overset{\circ}{e}_m(t),\overset{\circ}{e}_m(t)\right\rangle>0$$

olacak şekilde seçilebilir. Burada

$$\overset{\circ}{e}_v=\dot{e}_v-\sum_{s=1}^{k}\left\langle \dot{e}_v,e_s\right\rangle e_s \tag{3.1.10}$$

dir [24].

Sonuç 3.1.9.

$$A(t)=Sp\left\{e_1,\ldots,e_k,\dot{e}_1,\ldots,\dot{e}_k\right\}$$

asimptotik demetinin

$$\left\{e_1,\ldots,e_k,\overset{\circ}{e}_1,\ldots,\overset{\circ}{e}_m\right\} \quad , \quad 0\leq m\leq k \tag{3.1.11}$$

olacak şekilde bir ortogonal bazı bulunabilir [24].

Teorem 3.1.10. M, IR_1^n de $(k+1)-$boyutlu bir timelike regle yüzey, $E_k(t)$ doğrultman uzayı ve $A(t)$ de asimptotik demeti olsun. boy$A(t)=k+m$ olmak üzere $E_k(t)$ nin $\{e_1(t),\ldots,e_k(t)\}$ ortonormal bazı

$$\dot{e}_\sigma = \sum_{\mu=1}^{k} \alpha_{\sigma\mu} e_\mu + \kappa_\sigma a_{k+\sigma} \quad , \quad 1 \leq \sigma \leq m$$
$$\dot{e}_{m+\rho} = \sum_{\mu=1}^{k} \alpha_{(m+\rho)\mu} e_\mu \quad , \quad 1 \leq \rho \leq k-m \tag{3.1.12}$$

bağıntıları geçerli olacak şekilde seçilebilir; burada

$$\alpha_{\nu\mu} = -\alpha_{\mu\nu} \tag{3.1.13}$$

ve

$$\kappa_1 > \kappa_2 > \ldots > \kappa_m > 0 \tag{3.1.14}$$

dır [24].

3.1.1. Spacelike Doğrultman Uzaylı Genelleştirilmiş Timelike Regle Yüzeylerin Merkez, Sırt ve Asli Regle Yüzeyleri

M, IR_1^n de $(k+1)-$boyutlu bir timelike regle yüzey olsun. M nin doğrultman uzayı $E_k(t)$, asimptotik demeti $A(t)$ ve teğetsel demeti de $T(t)$ olsun. O halde

$$k+m \leq \text{boy}T(t) \leq k+m+1$$

dir. Bu kısımda teğetsel demetin boyutunun $k+m$ ve $k+m+1$ olması durumunda meydana gelecek olan $(k-m+1)-$ boyutlu regle yüzeyler incelenmiştir [25].

Kabul edelim ki $\text{boy}T(t) = k+m$ olsun. Böylece, M nin α dayanak eğrisinin hız vektörü

$$\dot{\alpha} \in A(t) = Sp\{e_1, \ldots, e_k, a_{k+1}, \ldots, a_{k+m}\}$$

dir. O halde

$$\dot{\alpha} = \sum_{\nu=1}^{k} \zeta_{\nu} e_{\nu} + \sum_{\sigma=1}^{m} \eta_{\sigma} a_{k+\sigma} \tag{3.1.15}$$

yazılabilir. Ayrıca herhangi bir $P(t)$ dayanak eğrisi için

$$P(t) = \alpha(t) + \sum_{\nu=1}^{k} u_{\nu}(t) e_{\nu}(t) \tag{3.1.16}$$

yazılabilir. Bu son ifadeden

$$\begin{aligned} \dot{P} &= \dot{\alpha} + \sum_{\nu=1}^{k} \left(\dot{u}_{\nu}\, e_{\nu} + u_{\nu}\, \dot{e}_{\nu} \right) \\ &= \sum_{\nu=1}^{k} \zeta_{\nu} e_{\nu} + \sum_{\sigma=1}^{m} \eta_{\sigma} a_{k+\sigma} + \sum_{\nu=1}^{k} \dot{u}_{\nu}\, e_{\nu} + \sum_{\nu=1}^{k} u_{\nu}\, \dot{e}_{\nu} \end{aligned}$$

bulunur. Burada (3.1.12) denklemindeki $\dot{e}_{\nu}$ vektörü yerine yazılırsa

$$\dot{P} = \sum_{\mu=1}^{k} \left(\zeta_{\mu} + \dot{u}_{\mu} + \sum_{\nu=1}^{m} u_{\nu} \alpha_{\nu\mu} + \sum_{\nu=m+1}^{k} u_{\nu} \alpha_{\nu\mu} \right) e_{\mu} + \sum_{\sigma=1}^{m} \left(\eta_{\sigma} + u_{\sigma} \kappa_{\sigma} \right) a_{k+\sigma} \tag{3.1.17}$$

elde edilir. Böylece

$$u_{\sigma} \kappa_{\sigma} + \eta_{\sigma} = 0 \quad , \quad 1 \le \sigma \le m \tag{3.1.18}$$

şartını sağlayan $P(t)$ noktaları için $\dot{P}$ türev vektörleri $E_k(t)$ uzayı içinde kalacaktır.

$\kappa_{\sigma} > 0$, $1 \le \sigma \le m$, olduğundan (3.1.18) denklem sisteminde m tane u_{σ} değişkenleri tek türlü çözülebilir. Geriye kalan $k-m$ tane u_{σ} keyfi olarak seçilebilir. O halde (3.1.18) denklemini sağlayan $P(t)$ noktalarının cümlesi $E_k(t)$ içinde

$(k-m)-$boyutlu bir altuzay doldururlar. Bu altuzaya M nin sırt (edge) uzayı denir ve $K_{k-m}(t)$ ile gösterilir, öyle ki

$$K_{k-m}(t)=\left\{P(t)\middle|\,\dot{\alpha}(t)\in A(t),\ \kappa_\sigma u_\sigma+\eta_\sigma=0,\ 1\leq\sigma\leq m\right\}$$

dir. $E_k(t)$ doğrultman uzayı bir spacelike altuzay olduğundan baz vektörlerinin hepsi spacelike vektördür. O halde $K_{k-m}(t)$ sırt uzayı bir spacelike altuzaydır [25].

Böylece aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.1.11. M, IR_1^n de $(k+1)-$boyutlu bir timelike regle yüzey ve teğetsel demeti de $T(t)$ olsun. Eğer boy$T(t)=k+m$ ise M nin sırt uzayı spacelike altuzayıdır [25].

Eğer $K_{k-m}(t)$ sırt uzayı, doğrultman uzayı ve M nin α dayanak eğrisi, dayanak eğrisi olarak alınırsa $K_{k-m}(t)$ uzayı α eğrisi boyunca hareket ederken M tarafından ihtiva edilen $(k-m+1)-$ boyutlu bir regle yüzey meydana getirir. Bu yüzeye M nin $(k-m+1)-$ boyutlu sırt regle yüzeyi denir. α dayanak eğrisi timelike bir eğri, $K_{k-m}(t)$ uzayı spacelike bir altuzay olduğundan sırt regle yüzey timelike bir regle yüzeyidir [25].

Böylece aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.1.12. M, IR_1^n de $(k+1)-$boyutlu bir timelike regle yüzey ve teğetsel demeti de $T(t)$ olsun. Eğer boy$T(t)=k+m$ ise M nin sırt regle yüzeyi vardır ve sırt regle yüzeyi timelike dır [25].

M nin $T(t)$ teğetsel demeti için $boyT(t) = k + m + 1$ olsun. Bu durumda M nin α dayanak eğrisinin hız vektörü $\dot{\alpha}$ için

$$\dot{\alpha} \notin Sp\{e_1, \ldots, e_k, a_{k+1}, \ldots, a_{k+m}\}$$

dir ve $T(t)$ nin bir ortonormal bazı

$$\{e_1, \ldots, e_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots, a_{k+m}, a_{k+m+1}\}$$

dir. O halde $\eta_{m+1} \neq 0$ olmak üzere

$$\dot{\alpha} = \sum_{v=1}^{k} \zeta_v e_v + \sum_{\sigma=1}^{m} \eta_\sigma a_{k+\sigma} + \eta_{m+1} a_{k+m+1} \qquad (3.1.19)$$

yazılabilir. Burada (3.1.12) denklemindeki $\dot{e}_v$ vektörü yerine yazılırsa

$$\dot{P} = \sum_{\mu=1}^{k} \left(\zeta_\mu + \dot{u}_\mu + \sum_{v=1}^{m} u_v \alpha_{v\mu} + \sum_{v=m+1}^{k} u_v \alpha_{v\mu} \right) e_\mu + \sum_{\sigma=1}^{m} (\eta_\sigma + u_\sigma \kappa_\sigma) a_{k+\sigma} + \eta_{m+1} a_{k+m+1} \qquad (3.1.20)$$

elde edilir. Böylece

$$\kappa_\sigma u_\sigma + \eta_\sigma = 0 \quad , \quad 1 \leq \sigma \leq m \qquad (3.1.21)$$

şartını sağlayan $P(t)$ noktaları için $\dot{P}$ türev vektörleri $Sp\left\{e_1, \ldots, e_k, \dot{\alpha}\right\}$ altuzayı içinde yatar.

$\kappa_\sigma > 0$, $1 \leq \sigma \leq m$, olduğundan (3.1.21) denklem sisteminde m tane u_σ değişkenleri tek türlü çözülebilir. Geriye kalan $k - m$ tane u_σ keyfi olarak seçilebilir. O halde

(3.1.21) denklemini sağlayan $P(t)$ noktalarının cümlesi, $Sp\left\{e_1,\ldots,e_k,\dot{\alpha}\right\}$ altuzayı içinde $(k-m)-$boyutlu bir altuzaydır. Bu altuzaya M nin merkez uzayı denir ve $Z_{k-m}(t)$ ile gösterilir, öyle ki

$$Z_{k-m}(t)=\left\{P(t)\middle|\ \dot{\alpha}(t)\notin A(t),\ \kappa_\sigma u_\sigma+\eta_\sigma=0,\ 1\le\sigma\le m\right\}$$

dir. $Z_{k-m}(t)$ merkez uzayının her bir noktasına merkez noktası denir. Merkez uzayın noktalarında M nin tanjant uzayları $A(t)$ asimptotik demetine diktirler [25].

$E_k(t)$ doğrultman uzayı bir spacelike altuzay olduğundan baz vektörlerinin hepsi spacelike vektördür. O halde $Z_{k-m}(t)$ merkez uzayı bir spacelike altuzaydır [25].

Böylece aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.1.13. M, IR_1^n de $(k+1)-$boyutlu bir timelike regle yüzey ve teğetsel demeti de $T(t)$ olsun. Eğer boy$T(t)=k+m+1$ ise M nin merkez uzayı spacelike altuzayıdır [25].

Eğer $Z_{k-m}(t)$ merkez uzayı, doğrultman uzayı ve M nin α dayanak eğrisi, dayanak eğrisi olarak alınırsa, $Z_{k-m}(t)$ uzayı α eğrisi boyunca hareket ederken, M tarafından ihtiva edilen $(k-m+1)-$boyutlu bir regle yüzey meydana getirir. Bu yüzeye M nin $(k-m+1)-$boyutlu merkez regle yüzeyi denir ve Ω ile gösterilir. α timelike bir eğri olduğundan merkez regle yüzey timelike regle yüzeydir [25].

Böylece aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.1.14. M, IR_1^n de $(k+1)-$boyutlu bir timelike regle yüzey ve teğetsel demeti de $T(t)$ olsun. Eğer boy$T(t)=k+m+1$ ise M nin merkez regle yüzeyi vardır ve merkez regle yüzeyi timelike dır [25].

Tanım 3.1.15. M, $(k+1)-$boyutlu bir timelike regle yüzey ve Ω da M nin timelike merkez regle yüzeyi olsun. Ω nın $Z_{k-m}(t)$ doğrultman uzayına total olarak ortogonal olan bir altuzay $F_m(t)$ ve Ω nın ortogonal yörüngesi de r olsun. $F_m(t)$ doğrultman uzayı r boyunca hareket ederken bir $(m+1)-$boyutlu regle yüzey meydana getirir. Bu yüzeye M nin asli regle yüzeyi denir ve Λ ile gösterilir. Ω merkez regle yüzeyi timelike olduğundan, Λ asli regle yüzeyi timelike regle yüzeydir [25].

Ayrıca, burada

$$E_k(t)=Sp\{e_1(t),\ldots,e_k(t)\}$$

olduğundan

$$F_m(t)=Sp\{e_1(t),\ldots,e_m(t)\}$$

ve

$$Z_{k-m}(t)=Sp\{e_{m+1}(t),\ldots,e_k(t)\}$$

olur. Böylece

$$\text{boy}F_m(t)+\text{boy}Z_{k-m}(t)=\text{boy}E_k(t)$$

dir [25].

Sonuç 3.1.16. M , IR_1^n de $(k+1)-$boyutlu bir timelike regle yüzey ve Ω da M nin timelike merkez regle yüzeyi olsun. Bu takdirde M nin $(m+1)-$boyutlu asli regle yüzeyi timelike dır [25].

Teorem 3.1.17. IR_1^n de merkez regle yüzeyli $(k+1)-$boyutlu timelike regle yüzey M olsun. $(m+1)-$boyutlu timelike asli regle yüzeyi, Ω merkez regle yüzeyinin $\alpha(t)$ ortogonal yörüngesine sahiptir ve bu ortogonal yörünge $(m+1)-$regle yüzey için bir striksiyon çizgisidir [23].

IR_1^n de $(k+1)-$boyutlu M timelike regle yüzeyinin $\alpha(t)$ dayanak eğrisinin $\zeta \in Z_{k-m}(t)$ noktasındaki $h_\sigma = Sp\{e_\sigma\}$, $1 \le \sigma \le m$, $1-$boyutlu doğrultman uzayları $E_k(t)$ içindedir. $\zeta + ue_\sigma(t)$ parametrik ifadesi ile verilen h_σ doğrultmanlarına $F_m(t)$ nin asli ışınları denir [23].

Tanım 3.1.18. M , IR_1^n de merkez regle yüzeyli genelleştirilmiş timelike regle yüzey olsun. $h_\sigma = Sp\{e_\sigma\}$, $1 \le \sigma \le m$, asli ışınları Ω merkez regle yüzeyinin $\alpha(t)$ timelike dayanak eğrisi boyunca M nin $2-$boyutlu asli regle yüzeylerini oluştururlar. Bu regle yüzeylere M nin asli ışın yüzeyleri denir ve parametrik olarak

$$\varphi_\sigma(t,u) = \alpha(t) + ue_\sigma(t) \quad , \quad 1 \le \sigma \le m \quad , \quad (t,u) \in (I, IR) \tag{3.1.22}$$

ile verilir. Açıktır ki φ_σ, $1 \le \sigma \le m$, asli ışın yüzeyleri timelike dır [23].

Eğer Ω merkez regle yüzeyinin $\alpha(t)$ dayanak eğrisi, M nin ortogonal yörüngesi olarak seçilirse (3.1.19) ifadesinde $\eta_\sigma = 0$ bağıntısı geçerlidir ve böylece, $\alpha(t)$, φ_σ nın bir striksiyon çizgisi olur. O halde her asli ışın yüzeyi bir striksiyon çizgisine sahiptir [23].

Böylece aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.1.19. M , IR_1^n de Ω merkez regle yüzeyli genelleştirilmiş timelike regle yüzey olsun. M nin Ω merkez regle yüzeyinin $\alpha(t)$ timelike dayanak eğrisi ile tanımlanan her bir φ_σ, $1 \leq \sigma \leq m$, asli ışın yüzeyi bir striksiyon çizgisine sahiptir. Eğer Ω merkez regle yüzeyinin $\alpha(t)$ dayanak eğrisi, M nin ortogonal yörüngesi ise $\alpha(t)$, φ_σ asli ışın yüzeyinin striksiyon çizgisi ile çakışır [23].

Tanım 3.1.20. IR_1^n de M merkez regle yüzeyli genelleştirilmiş timelike regle yüzeyinin dayanak eğrisinin hız vektörü

$$\dot{\alpha} = \sum_{v=1}^{k} \zeta_v e_v + \eta_{m+1} a_{k+m+1}$$

olmak üzere, $\eta_{m+1} \neq 0$ ise

$$P_\sigma = \frac{\eta_{m+1}}{\kappa_\sigma} \quad , \qquad 1 \leq \sigma \leq m \tag{3.1.23}$$

ifadesine M nin σ. asli dağılma parametresi denir, burada $\kappa_\sigma = \left\| \overset{\circ}{e}_\sigma \right\| > 0$ dır [23].

Tanım 3.1.21. IR_1^n de M merkez regle yüzeyli genelleştirilmiş timelike regle yüzeyinin asli dağılma parametreleri $P_1, P_2, \ldots, P_m$ olmak üzere

$$P = \sqrt[m]{\left| P_1 P_2 \ldots P_m \right|} \tag{3.1.24}$$

ifadesine M nin dağılma parametresi denir [23].

3.2. IR_1^n, $n-$boyutlu Minkowski Uzayında Timelike Doğrultman Uzaylı Genelleştirilmiş Timelike Regle Yüzeyler

IR_1^n, $n-$boyutlu Minkowski uzayında $\{0\} \subset I \subset IR$ olmak üzere diferensiyellenebilir spacelike bir eğri

$$\begin{aligned} \alpha : I &\to IR_1^n \\ t &\to \alpha(t) = (\alpha_1(t), \ldots, \alpha_n(t)) \end{aligned}$$

olsun. α eğrisinin her $\alpha(t)$ noktasında tanımlı bir ortonormal vektör alan sistemi $\{e_1(t), \ldots, e_k(t)\}$ ile verilmiş olsun. Bu sistem $\alpha(t) \in IR_1^n$ noktasındaki bir $T_{IR_1^n}(\alpha(t))$ tanjant uzayının k boyutlu bir altuzayını gerer. Bu altuzay $E_k(t)$ ile gösterilirse

$$E_k(t) = Sp\{e_1(t), \ldots, e_k(t)\}$$

dir [3]. Bu bölümün 3.2. kısmında $E_k(t)$ daima timelike altuzay kabul edilmiştir.

Tanım 3.2.1. $E_k(t)$ timelike altuzayı, α spacelike eğrisi boyunca hareket ederken IR_1^n de $(k+1)-$boyutlu bir yüzey meydana getirir. Bu yüzeye $n-$boyutlu Minkowski uzayında timelike doğrultman uzaylı $(k+1)-$boyutlu genelleştirilmiş timelike regle yüzey denir [3].

IR_1^n, $n-$boyutlu Minkowski uzayında timelike doğrultman uzaylı $(k+1)-$boyutlu genelleştirilmiş timelike regle yüzeyi M' ile gösterelim.

Tanım 3.2.2. $E_k(t)$ timelike altuzayına M' regle yüzeyinin $\alpha(t)$ noktasındaki doğrultman uzayı ve α spacelike eğrisine de M' nün dayanak eğrisi adı verilir [3].

M' , $(k+1)-$boyutlu timelike regle yüzeyi için bir parametrizasyon,

$$\varphi(t,u_1,\ldots,u_k)=\alpha(t)+\sum_{\nu=1}^{k}u_\nu e_\nu(t) \tag{3.2.1}$$

dir. Eğer φ nin t ye ve u_ν ye göre türevi alınırsa

$$\varphi_t=\dot{\alpha}(t)+\sum_{\nu=1}^{k}u_\nu\,\dot{e}_\nu(t)$$

ve

$$\varphi_{u_\nu}=e_\nu \qquad , \qquad 1\le\nu\le k$$

elde edilir. Bu çalışmada

$$\left\{\dot{\alpha}(t)+\sum_{\nu=1}^{k}u_\nu\,\dot{e}_\nu(t),e_1(t),\ldots,e_k(t)\right\} \tag{3.2.2}$$

sistemi daima lineer bağımsız kabul edilmiştir [3].

Tanım 3.2.3. M', IR_1^n de $(k+1)-$boyutlu bir timelike regle yüzey ve $E_k(t)$ de M' nün doğrultman uzayı olsun.

$$Sp\left\{e_1,\ldots,e_k,\dot{e}_1,\ldots,\dot{e}_k\right\}$$

altuzayına M' nün $E_k(t)$ ye göre asimptotik demeti denir ve $A(t)$ ile gösterilir [3].

Eğer

$$\text{boy}A(t)=k+m \qquad , \qquad 0\le m\le k \tag{3.2.3}$$

kabul edilirse $A(t)$ asimptotik demetinin $E_k(t)$ yi ihtiva eden

$$\{e_1,\ldots,e_k,a_{k+1},\ldots,a_{k+m}\} \tag{3.2.4}$$

şeklinde bir ortonormal bazı bulunabilir. $E_k(t)$ timelike altuzay olduğundan

$$\left\langle e_\nu,e_\mu\right\rangle=\varepsilon_\nu\delta_{\nu\mu} \quad , \quad 1\le \nu,\mu\le k \tag{3.2.5}$$

bağıntısı sağlanır. Ayrıca $E_k(t)$ timelike altuzayının indeksi 1 olduğundan

$$\left\langle e_s,e_s\right\rangle=-1 \quad , \quad 1\le s\le k$$

olacak şekilde bir tek e_s , $1\le s\le k$, timelike vektörü vardır [3].

Böylece aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.2.4. M', IR_1^n de $(k+1)-$boyutlu bir timelike regle yüzey ve $A(t)$, M' nün asimptotik demeti olsun. $A(t)$ timelike bir altuzaydır [3].

Tanım 3.2.5. M' , IR_1^n de $(k+1)-$boyutlu bir timelike regle yüzey olsun.

$$Sp\left\{e_1,\ldots,e_k,\dot{e}_1,\ldots,\dot{e}_k,\dot{\alpha}\right\} \tag{3.2.6}$$

altuzayına M' nün $E_k(t)$ ye göre teğetsel demeti denir ve $T(t)$ ile gösterilir.

Eğer M' nün $A(t)$ asimptotik demeti için

$$\text{boy}A(t)=k+m \quad , \quad 0\le m\le k$$

ise

$$k+m \leq \text{boy}T(t) \leq k+m+1 \qquad (3.2.7)$$

dir. Kabul edelim ki $\text{boy}T(t)=k+m$ olsun. Bu takdirde $\{e_1,\ldots,e_k,a_{k+1},\ldots,a_{k+m}\}$ hem $A(t)$ asimptotik demetinin ve hem de $T(t)$ teğetsel demetinin bir ortonormal bazıdır. Bu halde $A(t)=T(t)$ dir. Teorem 3.2.4.den $A(t)$ bir timelike altuzay olduğundan $T(t)$ de timelike bir altuzaydır [3].

Eğer $\text{boy}T(t)=k+m+1$ ise bu takdirde $T(t)$ nin

$$\{e_1,\ldots,e_k,a_{k+1},a_{k+2},\ldots,a_{k+m},a_{k+m+1}\} \qquad (3.2.8)$$

şeklinde bir ortonormal bazı bulunabilir. IR_1^n, indeksi 1 olan yarı-Öklidiyen bir uzay olduğundan bazındaki timelike vektörlerin sayısı bir tanedir ve bu vektör $E_k(t)$ içinde kalır [3].

O halde IR_1^n de bir $(k+1)-$boyutlu M' timelike regle yüzeyi için aşağıdaki teoremler verilebilir.

Teorem 3.2.6. M', IR_1^n de $(k+1)-$boyutlu bir timelike regle yüzey ve $T(t)$, M' nün teğetsel demeti olsun. $T(t)$ timelike bir altuzaydır [3].

Teorem 3.2.7. M', IR_1^n de $(k+1)-$boyutlu bir timelike regle yüzey ve $E_k(t)$ de M' nün doğrultman uzayı olsun. $t_0 \in I$ olmak üzere $\{e_1(t_0),\ldots,e_k(t_0)\}$ da $E_k(t)$ nin bir ortonormal bazı olsun. $t \in J \subset I$ olacak şekilde öyle bir J aralığı bulunabilir ki bu aralıkta $E_k(t)$ nin $\forall t \in J$ için

$$\left\langle \dot{\overline{e}}_{\nu}, \overline{e}_{\mu} \right\rangle = 0 \quad , \qquad 1 \leq \nu, \mu \leq k$$

olacak şekilde $\left\{ \overline{e_1}(t), \ldots, \overline{e_k}(t) \right\}$ bazı tek türlü olarak bulunabilir [3].

Teorem 3.2.8. M', IR_1^n de $(k+1)-$boyutlu bir timelike regle yüzey, $E_k(t)$ doğrultman uzayı ve $T(t)$ de M' nün teğetsel demeti olsun. boy$A(t) = k+m$ ve $E_k(t)$ nin ortonormal bazı $\left\{ e_1(t), \ldots, e_m(t), e_{m+1}(t), \ldots, e_k(t) \right\}$ olsun. Bu takdirde $\left\{ e_1(t), \ldots, e_m(t) \right\}$ ortonormal sistemi $J \subset I$ açık aralığında

$$\left\langle \overset{\circ}{e}_{\nu}, \overset{\circ}{e}_{\mu} \right\rangle = 0 \quad , \quad 1 \leq \nu, \mu \leq m \quad , \quad \nu \neq \mu \tag{3.2.9}$$

$$\left\| \overset{\circ}{e}_1 \right\|^2 \geq \left\| \overset{\circ}{e}_2 \right\|^2 \geq \ldots \geq \left\| \overset{\circ}{e}_m \right\|^2 \geq 0$$

olacak şekilde bulunabilir. Burada

$$\overset{\circ}{e}_{\nu} = \dot{e}_{\nu} - \sum_{\mu=1}^{k} \varepsilon_{\mu} \left\langle \dot{e}_{\nu}, e_{\mu} \right\rangle e_{\mu} \tag{3.2.10}$$

dir [3].

Sonuç 3.2.9.

$$A(t) = Sp\left\{ e_1, \ldots, e_k, \dot{e}_1, \ldots, \dot{e}_k \right\}$$

asimptotik demetinin

$$\left\{ e_1, \ldots, e_k, \overset{\circ}{e}_1, \ldots, \overset{\circ}{e}_m \right\} \quad , \qquad 0 \leq m \leq k \tag{3.2.11}$$

olacak şeklinde bir ortogonal bazı bulunabilir [3].

Teorem 3.2.10. M', IR_1^n de $(k+1)-$boyutlu bir timelike regle yüzey, $E_k(t)$ doğrultman uzayı ve $A(t)$ de asimptotik demet olsun. boy$A(t)=k+m$ olmak üzere $E_k(t)$ nin $\{e_1(t),\ldots,e_k(t)\}$ ortonormal bazı

$$\begin{aligned} \dot{e}_\sigma &= \sum_{\mu=1}^{k} \alpha_{\sigma\mu} e_\mu + \kappa_\sigma a_{k+\sigma} \quad , \quad 1 \le \sigma \le m \\ \dot{e}_{m+\rho} &= \sum_{\mu=1}^{k} \alpha_{(m+\rho)\mu} e_\mu \quad , \quad 1 \le \rho \le k-m \end{aligned} \tag{3.2.12}$$

bağıntıları geçerli olacak şekilde seçilebilir; burada

$$\varepsilon_\mu \alpha_{\nu\mu} = -\varepsilon_\nu \alpha_{\mu\nu} \tag{3.2.13}$$

ve

$$\kappa_1 > \kappa_2 > \ldots > \kappa_m > 0 \tag{3.2.14}$$

dır [3].

3.2.1. Timelike Doğrultman Uzaylı Genelleştirilmiş Timelike Regle Yüzeylerin Merkez, Sırt ve Asli Regle Yüzeyleri

M', IR_1^n de $(k+1)-$boyutlu bir timelike regle yüzey olsun. M' nün doğrultman uzayı $E_k(t)$, asimptotik demeti $A(t)$ ve teğetsel demeti de $T(t)$ olsun. O halde

$$k+m \le \text{boy}T(t) \le k+m+1$$

dir. Bu kısımda teğetsel demetin boyutunun $k+m$ ve $k+m+1$ olması durumunda meydana gelecek olan $(k-m+1)-$ boyutlu regle yüzeyler incelenmiştir [2].

Kabul edelim ki boy$T(t)=k+m$ olsun. Bu halde M' nün α dayanak eğrisinin hız vektörü için

$$\dot{\alpha} \in A(t) = Sp\{e_1, \ldots, e_k, a_{k+1}, \ldots, a_{k+m}\}$$

dir. O halde

$$\dot{\alpha} = \sum_{\nu=1}^{k} \zeta_\nu e_\nu + \sum_{\sigma=1}^{m} \eta_\sigma a_{k+\sigma} \tag{3.2.15}$$

yazılabilir. Ayrıca herhangi bir $P(t)$ dayanak eğrisi için

$$P(t) = \alpha(t) + \sum_{\nu=1}^{k} u_\nu(t) e_\nu(t) \tag{3.2.16}$$

yazılabilir. Bu son ifadeden

$$\begin{aligned} \dot{P} &= \dot{\alpha} + \sum_{\nu=1}^{k} \left(\dot{u}_\nu e_\nu + u_\nu \dot{e}_\nu \right) \\ &= \sum_{\nu=1}^{k} \zeta_\nu e_\nu + \sum_{\sigma=1}^{m} \eta_\sigma a_{k+\sigma} + \sum_{\nu=1}^{k} \dot{u}_\nu e_\nu + \sum_{\nu=1}^{k} u_\nu \dot{e}_\nu \end{aligned}$$

bulunur. Burada (3.2.12) denklemindeki $\dot{e}_\nu$ vektörü yerine yazılırsa

$$\dot{P} = \sum_{\mu=1}^{k} \left(\zeta_\mu + \dot{u}_\mu + \sum_{\nu=1}^{m} u_\nu \alpha_{\nu\mu} + \sum_{\nu=m+1}^{k} u_\nu \alpha_{\nu\mu} \right) e_\mu + \sum_{\sigma=1}^{m} \left(\eta_\sigma + u_\sigma \kappa_\sigma \right) a_{k+\sigma} \tag{3.2.17}$$

elde edilir. Böylece

$$u_\sigma \kappa_\sigma + \eta_\sigma = 0 \quad , \quad 1 \le \sigma \le m \tag{3.2.18}$$

şartını sağlayan $P(t)$ noktaları için $\dot{P}$ türev vektörleri $E_k(t)$ uzayı içinde kalacaktır.

$\kappa_\sigma > 0$, $1 \le \sigma \le m$, olduğundan (3.2.18) denklem sisteminde m tane u_σ değişkenleri tek türlü çözülebilir. Geriye kalan $k-m$ tane u_σ keyfi olarak seçilebilir. O halde (3.2.18) denklemini sağlayan $P(t)$ noktalarının cümlesi, $E_k(t)$ içinde $(k-m)-$boyutlu bir altuzay olur. Bu altuzaya M' nün sırt (edge) uzayı denir ve $K_{k-m}(t)$ ile gösterilir, öyle ki

$$K_{k-m}(t) = \left\{ P(t) \middle| \dot{\alpha}(t) \in A(t),\ \kappa_\sigma u_\sigma + \eta_\sigma = 0,\ 1 \le \sigma \le m \right\}$$

dir. $E_k(t)$ doğrultman uzayı bir timelike altuzay olduğundan baz vektörlerinden bir tanesi timelike vektörüdür. Bu timelike vektör $K_{k-m}(t)$ içinde ise sırt uzayı bir timelike altuzay, eğer timelike vektör $K_{k-m}(t)$ dışında ise sırt uzayı bir spacelike altuzaydır [2].

Böylece aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.2.11. M', IR_1^n de $(k+1)-$boyutlu bir timelike regle yüzey ve teğetsel demeti de $T(t)$ olsun. Eğer boy$T(t) = k+m$ ise M' nün sırt uzayı timelike veya spacelike altuzayıdır [2].

Eğer $K_{k-m}(t)$ sırt uzayı, doğrultman uzayı ve M' nün α dayanak eğrisi, dayanak eğrisi olarak alınırsa, $K_{k-m}(t)$ uzayı α eğrisi boyunca hareket ederken M' tarafından ihtiva edilen $(k-m+1)-$boyutlu bir regle yüzey meydana getirir. Bu yüzeye M' nün $(k-m+1)-$boyutlu sırt regle yüzeyi denir. α daima spacelike bir eğri olarak seçildiğinden, eğer $K_{k-m}(t)$ doğrultman uzayı timelike ise sırt regle yüzeyi timelike regle yüzey, eğer $K_{k-m}(t)$ doğrultman uzayı spacelike ise sırt regle yüzeyi spacelike regle yüzeydir [2].

Böylece aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.2.12. M', IR_1^n de $(k+1)-$boyutlu bir timelike regle yüzey ve teğetsel demeti de $T(t)$ olsun. Eğer boy$T(t)=k+m$ ise M' nün sırt regle yüzeyi vardır ve sırt regle yüzeyi timelike veya spacelike dır [2].

Şimdi kabul edelim ki M' nün $T(t)$ teğetsel demeti için $boy\,T(t)=k+m+1$ olsun. Bu durumda M' nün α dayanak eğrisinin $\dot{\alpha}$ hız vektörü için

$$\dot{\alpha} \notin Sp\{e_1,\ldots,e_k,a_{k+1},\ldots,a_{k+m}\}$$

dir ve $T(t)$ nin bir ortonormal bazı

$$\{e_1,\ldots,e_k,a_{k+1},a_{k+2},\ldots,a_{k+m},a_{k+m+1}\}$$

dir. O halde $\eta_{m+1}\neq 0$ olmak üzere

$$\dot{\alpha}=\sum_{v=1}^{k}\zeta_v e_v+\sum_{\sigma=1}^{m}\eta_\sigma a_{k+\sigma}+\eta_{m+1}a_{k+m+1} \tag{3.2.19}$$

yazılabilir. Burada (3.1.12) denklemindeki $\dot{e}_v$ vektörü yerine yazılırsa

$$\dot{P}=\sum_{\mu=1}^{k}\left(\zeta_\mu+\dot{u}_\mu+\sum_{v=1}^{m}u_v\alpha_{v\mu}+\sum_{v=m+1}^{k}u_v\alpha_{v\mu}\right)e_\mu+\sum_{\sigma=1}^{m}\left(\eta_\sigma+u_\sigma\kappa_\sigma\right)a_{k+\sigma}+\eta_{m+1}a_{k+m+1} \tag{3.2.20}$$

elde edilir. Böylece

$$\kappa_\sigma u_\sigma+\eta_\sigma=0 \quad , \quad 1\leq\sigma\leq m \tag{3.2.21}$$

şartını sağlayan $P(t)$ noktaları için $\overset{\bullet}{P}$ türev vektörleri $Sp\left\{e_1,\ldots,e_k,\overset{\bullet}{\alpha}\right\}$ altuzayı içinde yatar.

$\kappa_\sigma > 0$, $1 \le \sigma \le m$, olduğundan (3.2.21) denklem sisteminde m tane u_σ değişkenleri tek türlü çözülebilir. Geriye kalan $k-m$ tane u_σ keyfi olarak seçilebilir. O halde (3.2.21) denklemini sağlayan $P(t)$ noktalarının cümlesi $Sp\left\{e_1,\ldots,e_k,\overset{\bullet}{\alpha}\right\}$ altuzayı içinde $(k-m)-$boyutlu bir altuzay olur. Bu altuzaya M' nün merkez uzayı denir ve $Z_{k-m}(t)$ ile gösterilir, öyle ki

$$Z_{k-m}(t) = \left\{P(t) \middle| \overset{\bullet}{\alpha}(t) \notin A(t),\ \kappa_\sigma u_\sigma + \eta_\sigma = 0,\ 1 \le \sigma \le m\right\}$$

dir. $Z_{k-m}(t)$ merkez uzayının her bir noktasına merkez noktası denir. Merkez uzayın noktalarında, M' nün tanjant uzayları $A(t)$ asimptotik demetine diktirler [2].

$E_k(t)$ doğrultman uzayı bir timelike altuzay olduğundan baz vektörlerinden bir tanesi timelike vektördür. Bu timelike vektör $Z_{k-m}(t)$ içinde ise merkez uzayı bir timelike altuzay, aksi halde spacelike altuzaydır [2].

Böylece aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.2.13. M', IR_1^n de $(k+1)-$boyutlu bir timelike regle yüzey ve teğetsel demeti de $T(t)$ olsun. Eğer boy$T(t) = k+m+1$ ise M' nün merkez uzayı timelike veya spacelike altuzaydır [2].

Eğer $Z_{k-m}(t)$ merkez uzayı doğrultman uzayı ve M' nün α dayanak eğrisi, dayanak eğrisi olarak alınırsa, $Z_{k-m}(t)$ uzayı α eğrisi boyunca hareket ederken M'

tarafından ihtiva edilen $(k-m+1)-$boyutlu bir regle yüzey meydana getirir. Bu yüzeye M' nün $(k-m+1)-$boyutlu merkez regle yüzeyi denir ve Ω ile gösterilir. α spacelike bir eğri olduğundan, eğer $Z_{k-m}(t)$ doğrultman uzayı timelike ise merkez regle yüzey timelike regle yüzey, eğer $Z_{k-m}(t)$ doğrultman uzayı spacelike ise merkez regle yüzey spacelike regle yüzeydir [2].

Böylece aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.2.14. M', IR_1^n de $(k+1)-$boyutlu bir timelike regle yüzey ve teğetsel demeti de $T(t)$ olsun. Eğer boy$T(t)=k+m+1$ ise M' nün merkez regle yüzeyi vardır ve merkez regle yüzeyi timelike veya spacelike dır [2].

Tanım 3.2.15. M', $(k+1)-$boyutlu bir timelike regle yüzey ve Ω da M' nün timelike (spacelike) merkez regle yüzeyi olsun. Ω nın $Z_{k-m}(t)$ doğrultman uzayına total olarak ortogonal olan bir altuzay $F_m(t)$ ve Ω nın ortogonal yörüngesi de r olsun. $F_m(t)$ doğrultman uzayı r boyunca harekete ederken bir $(m+1)-$boyutlu regle yüzey meydana getirir. Bu yüzeye M' nün asli regle yüzeyi denir ve Λ ile gösterilir. Ω merkez regle yüzeyi timelike veya spacelike olmasına göre Λ asli regle yüzeyi spacelike veya timelike regle yüzeydir [2].

Ayrıca, burada

$$E_k(t)=Sp\{e_1(t),\ldots,e_k(t)\}$$

olduğundan

$$F_m(t)=Sp\{e_1(t),\ldots,e_m(t)\}$$

ve

$$Z_{k-m}(t) = Sp\{e_{m+1}(t),\ldots,e_k(t)\}$$

dır. Böylece

$$\text{boy}F_m(t) + \text{boy}Z_{k-m}(t) = \text{boy}E_k(t)$$

bulunur [2].

Sonuç 3.2.16. M', IR_1^n de $(k+1)-$boyutlu bir timelike regle yüzey ve Ω da M' nün timelike (spacelike) merkez regle yüzeyi olsun. Bu takdirde M' nün $(m+1)-$boyutlu asli regle yüzeyi spacelike (timelike) dır [2].

Teorem 3.2.17. M', IR_1^n de merkez regle yüzeyli $(k+1)-$boyutlu bir timelike regle yüzey olsun. $(m+1)-$boyutlu spacelike veya timelike asli regle yüzeyi, Ω merkez regle yüzeyinin $\alpha(t)$ ortogonal yörüngesine sahiptir ve bu ortogonal yörünge $(m+1)-$regle yüzey için bir striksiyon çizgisidir [1].

IR_1^n de $(k+1)-$boyutlu M' timelike regle yüzeyinin $\alpha(t)$ dayanak eğrisinin $\zeta \in Z_{k-m}(t)$ noktasındaki $h_\sigma = Sp\{e_\sigma\}$, $1 \le \sigma \le m$, $1-$boyutlu doğrultman uzayları $E_k(t)$ içindedir. $\zeta + ue_\sigma(t)$ parametrik ifadesi ile verilen h_σ doğrultmanlarına $F_m(t)$nin asli ışınları denir [1].

Tanım 3.2.18. IR_1^n de merkez regle yüzeyli genelleştirilmiş timelike regle yüzey M' olsun. $h_\sigma = Sp\{e_\sigma\}$, $1 \le \sigma \le m$, asli ışınları Ω merkez regle yüzeyinin $\alpha(t)$ spacelike dayanak eğrisi boyunca M' nün $2-$boyutlu asli regle yüzeylerini oluştururlar. Bu regle yüzeylere M' nün asli ışın yüzeyleri denir ve φ_σ, $1 \le \sigma \le m$, asli ışın yüzeyleri parametrik olarak

$$\varphi_\sigma(t,u)=\alpha(t)+ue_\sigma(t) \quad , \quad 1\leq\sigma\leq m \quad , \quad (t,u)\in(I,IR) \tag{3.2.22}$$

ile verilir.

Ω merkez regle yüzeyi timelike iken $F_m(t)$ spacelike altuzay olacağından $h_\sigma=Sp\{e_\sigma\}$, $1\leq\sigma\leq m$, doğrultmanları spacelike olacaktır. Dolayısıyla α spacelike eğrisi boyunca h_σ doğrultmanlarının hareketiyle M' nün $m-$tane spacelike $2-$boyutlu asli regle yüzeyi oluşur [1].

Ω merkez regle yüzeyi spacelike iken $F_m(t)$ timelike altuzay olacağından $h_\sigma=Sp\{e_\sigma\}$, $1\leq\sigma\leq m$, doğrultmanlarından bir tanesi timelike, $(m-1)-$tanesi spacelike olacaktır. Dolayısıyla α spacelike eğrisi boyunca h_σ doğrultmanlarının hareketiyle M' nün $1-$tane timelike ve $(m-1)-$tane spacelike $2-$boyutlu asli regle yüzeyi oluşur [1].

Eğer Ω merkez regle yüzeyinin $\alpha(t)$ dayanak eğrisi M' nün ortogonal yörüngesi olarak seçilirse (3.2.19) ifadesinde $\eta_\sigma=0$ bağıntısı geçerlidir ve $\alpha(t)$ φ_σ nın bir striksiyon çizgisi olur. O halde her asli ışın yüzeyi bir striksiyon çizgisine sahip olur.

Böylece aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.2.19. M', IR_1^n de Ω merkez regle yüzeyli genelleştirilmiş timelike regle yüzey olsun. M' nün Ω merkez regle yüzeyinin $\alpha(t)$ spacelike dayanak eğrisinde tanımlanan her bir φ_σ, $1\leq\sigma\leq m$, asli ışın yüzeyi bir striksiyon çizgisine sahiptir. Eğer Ω merkez regle yüzeyinin $\alpha(t)$ dayanak eğrisi, M' nün ortogonal yörüngesi ise $\alpha(t)$, φ_σ asli ışın yüzeyinin striksiyon çizgisi ile çakışır [1].

BÖLÜM 4. IR_1^n, $n-$BOYUTLU MİNKOWSKİ UZAYINDA GENELLEŞTİRİLMİŞ REGLE YÜZEYLERİN KESİT EĞRİLİKLERİ

4. 1. IR_1^n, $n-$boyutlu Minkowski Uzayında Spacelike Doğrultman Uzaylı Genelleştirilmiş Timelike Regle Yüzeylerin Kesit Eğrilikleri

IR_1^n, $n-$boyutlu Minkowski uzayında, $\{0\} \subset I \subset IR$ olmak üzere, α eğrisi diferensiyellenebilir timelike eğri ve M, spacelike doğrultman uzaylı genelleştirilmiş timelike regle yüzey olsun. Ω, M nin $(k-m+1)-$boyutlu ($m>0$) merkez regle yüzeyi olmak üzere, M regle yüzeyinin $\alpha(t)$ dayanak eğrisini Ω merkez regle yüzeyinin dayanak eğrisi olarak kabul edelim. Bu takdirde M nin asimptotik ve teğetsel demetler çakışmaz ve M nin dayanak eğrilerinin hız vektörleri $\{e_1, e_2, \dots, e_k, a_{k+m+1}\}$ uzayı içinde bulunur. O halde $\alpha(t)$ dayanak eğrisinin hız vektörü

$$\dot{\alpha}(t) = \sum_{\nu=1}^{k} \zeta_\nu e_\nu + \eta_{m+1} a_{k+m+1} \quad , \qquad \eta_{m+1} \neq 0 \qquad (4.1.1)$$

dır.

Merkez uzayın noktalarında M nin tanjant uzayları $A(t)$ asimptotik demetine diktir. $\Omega \subset M$ merkez regle yüzeyinin merkez noktası olarak adlandırılan noktalarda $\varphi(t, u_1, \dots, u_k) = \alpha(t) + \sum_{\nu=1}^{k} u_\nu e_\nu(t)$ parametrik gösteriminde

$$u_1 = u_2 = \dots u_m = 0 \qquad (4.1.2)$$

dır.

IR_1^n, $n-$boyutlu Minkowski uzayında spacelike doğrultman uzaylı genelleştirilmiş timelike regle yüzey için, (3.1.12) ve (4.1.1) eşitlikleri göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} \varphi_t &= \dot{\alpha}(t) + \sum_{\nu=1}^{k} u_\nu \dot{e}_\nu(t) \\ &= \sum_{\nu=1}^{k}\left(\zeta_\nu + \sum_{\mu=1}^{k} \alpha_{\nu\mu} u_\mu\right) e_\nu + \sum_{\sigma=1}^{m} u_\sigma \kappa_\sigma a_{k+\sigma} + \eta_{m+1} a_{k+m+1} \end{aligned} \tag{4.1.3}$$

ve

$$\varphi_{u_\nu} = e_\nu(t) \quad , \quad 1 \le \nu \le k \tag{4.1.4}$$

elde edilir. Böylece spacelike doğrultman uzaylı genelleştirilmiş timelike regle yüzeyin teğetsel demetinin kanonik bazı

$$\left\{ \sum_{\nu=1}^{k}\left(\zeta_\nu + \sum_{\mu=1}^{k} \alpha_{\nu\mu} u_\mu\right) e_\nu + \sum_{\sigma=1}^{m} u_\sigma \kappa_\sigma a_{k+\sigma} + \eta_{m+1} a_{k+m+1}, e_1, e_2, \ldots, e_k \right\} \tag{4.1.5}$$

dır ve bu kanonik baza göre M nin birinci temel formun katsayıları hesaplanabilir. Bundan sonra, alışılagelmiş indeks yazım şeklini kullanmak için $u_0 = t$ olarak ifade edilirse, M nin metrik katsayıları

$$g_{00} = \langle \varphi_t, \varphi_t \rangle \quad , \quad g_{\nu 0} = \langle \varphi_{u_\nu}, \varphi_t \rangle \quad , \quad g_{\nu\mu} = \langle \varphi_{u_\nu}, \varphi_{u_\mu} \rangle \quad , \quad 1 \le \nu, \mu \le k$$

eşitliklerinden bulunur. Ayrıca, boy$T(t) = k + m + 1$ olduğu yani a_{k+m+1} timelike olduğu göz önünde bulundurulursa, (4.1.3) ve (4.1.4) eşitlikleri yardımıyla,

$$\begin{aligned} g_{00} &= \langle \varphi_t, \varphi_t \rangle = \sum_{\nu=1}^{k}\left(\zeta_\nu + \sum_{\mu=1}^{k} \alpha_{\nu\mu} u_\mu\right)^2 + \sum_{\sigma=1}^{m} (u_\sigma \kappa_\sigma)^2 - (\eta_{m+1})^2, \\ g_{\nu 0} &= \langle \varphi_{u_\nu}, \varphi_t \rangle = \zeta_\nu + \sum_{\mu=1}^{k} \alpha_{\nu\mu} u_\mu \quad , \quad 1 \le \nu \le k, \\ g_{\nu\mu} &= \langle \varphi_{u_\nu}, \varphi_{u_\mu} \rangle = \delta_{\nu\mu} \quad , \quad 1 \le \nu, \mu \le k \end{aligned}$$

elde edilir. Birinci temel formun matris formu $\left[g_{ij}\right]$, $0 \le i, j \le k$ regüler, bir matris olsun. Böylece,

$$\left[g_{ij}\right]=\begin{bmatrix} g_{00} & g_{01} & g_{02} & \cdots & g_{0k} \\ g_{10} & g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1k} \\ g_{20} & g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\vdots\vdots & \vdots \\ g_{k0} & g_{k1} & g_{k2} & \cdots & g_{kk} \end{bmatrix}$$

olmak üzere

$$\left[g_{ij}\right]=\begin{bmatrix} \sum\limits_{\nu=1}^{k}\left(\zeta_\nu+\sum\limits_{\mu=1}^{k}\alpha_{\nu\mu}u_\mu\right)^2+\sum\limits_{\sigma=1}^{m}\left(u_\sigma\kappa_\sigma\right)^2-\left(\eta_{m+1}\right)^2 & \zeta_1+\sum\limits_{\mu=1}^{k}\alpha_{1\mu}u_\mu & \zeta_2+\sum\limits_{\mu=1}^{k}\alpha_{2\mu}u_\mu & \dots & \zeta_k+\sum\limits_{\mu=1}^{k}\alpha_{k\mu}u_\mu \\ \zeta_1+\sum\limits_{\mu=1}^{k}\alpha_{1\mu}u_\mu & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \zeta_2+\sum\limits_{\mu=1}^{k}\alpha_{2\mu}u_\mu & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\vdots\vdots & \vdots \\ \zeta_k+\sum\limits_{\mu=1}^{k}\alpha_{k\mu}u_\mu & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Buradan

$$g=\det\left[g_{ij}\right]=\sum_{\sigma=1}^{m}\left(u_\sigma\kappa_\sigma\right)^2-\eta_{m+1}^2 \qquad , \qquad 0\le i,j\le k$$

bulunur ve $\left[g_{ij}\right]$ regüler bir matris olduğundan $\sum\limits_{\sigma=1}^{m}\left(u_\sigma\kappa_\sigma\right)^2-\eta_{m+1}^2\neq 0$ dır. Sonuç olarak,

$$
\begin{aligned}
& g_{00} = g + \sum_{\nu=1}^{k}\left(\zeta_\nu + \sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{\nu\mu}u_\mu\right)^2 & & \\
& g_{\nu 0} = \left(\zeta_\nu + \sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{\nu\mu}u_\mu\right) & , \quad & 1 \le \nu \le k \\
& g_{\nu\mu} = \delta_{\nu\mu} & , \quad & 0 \le \nu, \mu \le k \\
& g = \det\left[g_{ij}\right] = \sum_{\sigma=1}^{m}\left(u_\sigma \kappa_\sigma\right)^2 - \eta_{m+1}^2 & , \quad & 0 \le i, j \le k
\end{aligned}
\tag{4.1.6}
$$

eşitlikleri elde edilir.

Şimdi $\left[g_{ij}\right]$ matrisinin $\left[g^{ij}\right]$ ters matrisini hesaplayalım. $\left[\delta_{ij}\right]$, $0 \le i, j \le k$, birim matris olmak üzere

$$\left[g_{ij} \vdots \delta_{ij}\right] \quad , \qquad 0 \le i, j \le k$$

ekli matrisine elementer satır işlemleri uygulanarak

$$\left[\delta_{ij} \vdots g^{ij}\right] \quad , \qquad 0 \le i, j \le k$$

satırca indirgenmiş eşelon formu elde edilir. Böylece, $\left[g^{ij}\right]$ aşağıdaki gibidir:

$$
\left[g^{ij}\right]=\begin{bmatrix}
g^{-1} & -\left(\zeta_1+\sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{1\mu}u_\mu\right)g^{-1} & -\left(\zeta_2+\sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{2\mu}u_\mu\right)g^{-1} & \cdots & -\left(\zeta_k+\sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{k\mu}u_\mu\right)g^{-1} \\
-\left(\zeta_1+\sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{1\mu}u_\mu\right)g^{-1} & \left(\delta_{11}g+\left(\zeta_1+\sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{1\mu}u_\mu\right)\left(\zeta_1+\sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{1\mu}u_\mu\right)\right)g^{-1} & \left(\delta_{12}g+\left(\zeta_1+\sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{1\mu}u_\mu\right)\left(\zeta_2+\sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{2\mu}u_\mu\right)\right)g^{-1} & \cdots & \left(\delta_{1k}g+\left(\zeta_1+\sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{1\mu}u_\mu\right)\left(\zeta_k+\sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{k\mu}u_\mu\right)\right)g^{-1} \\
-\left(\zeta_2+\sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{2\mu}u_\mu\right)g^{-1} & \left(\delta_{21}g+\left(\zeta_2+\sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{2\mu}u_\mu\right)\left(\zeta_1+\sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{1\mu}u_\mu\right)\right)g^{-1} & \left(\delta_{22}g+\left(\zeta_2+\sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{2\mu}u_\mu\right)\left(\zeta_2+\sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{2\mu}u_\mu\right)\right)g^{-1} & \cdots & \left(\delta_{2k}g+\left(\zeta_2+\sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{2\mu}u_\mu\right)\left(\zeta_k+\sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{k\mu}u_\mu\right)\right)g^{-1} \\
. & . & . & \cdots & . \\
. & . & . & \cdots & . \\
. & . & . & \cdots & . \\
-\left(\zeta_k+\sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{k\mu}u_\mu\right)g^{-1} & \left(\delta_{k1}g+\left(\zeta_k+\sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{k\mu}u_\mu\right)\left(\zeta_1+\sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{1\mu}u_\mu\right)\right)g^{-1} & \left(\delta_{k2}g+\left(\zeta_k+\sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{k\mu}u_\mu\right)\left(\zeta_2+\sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{2\mu}u_\mu\right)\right)g^{-1} & \cdots & \left(\delta_{kk}g+\left(\zeta_k+\sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{k\mu}u_\mu\right)\left(\zeta_k+\sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{k\mu}u_\mu\right)\right)g^{-1}
\end{bmatrix}
$$

Açıktır ki, $\left[g^{ij}\right]$, $0 \le i, j \le k$, ters matrisinin elemanları

$$
\begin{aligned}
g^{00} &= g^{-1} \\
g^{\nu 0} &= -\left(\zeta_\nu + \sum_{\mu=1}^{k} \alpha_{\nu\mu} u_\mu\right) g^{-1} & , \quad 1 \le \nu \le k \qquad (4.1.7) \\
g^{\nu\lambda} &= \left(\delta_{\nu\lambda} g + \left(\zeta_\nu + \sum_{\mu=1}^{k} \alpha_{\nu\mu} u_\mu\right)\left(\zeta_\lambda + \sum_{\mu=1}^{k} \alpha_{\lambda\mu} u_\mu\right)\right) g^{-1} & , \quad 1 \le \nu, \lambda \le k
\end{aligned}
$$

şeklindedir. (4.1.6) ve (4.1.7) denklemleri (2.2.4) denkleminde yerine yazılırsa, $1 \le \nu, \mu, \lambda \le k$, için, sırasıyla, Γ_{00}^0, Γ_{00}^λ, $\Gamma_{\nu\mu}^0$, $\Gamma_{\mu\nu}^0$, $\Gamma_{\nu\mu}^\lambda$, $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$, $\Gamma_{\lambda 0}^0$, $\Gamma_{0\lambda}^0$, $\Gamma_{\lambda 0}^\nu$, $\Gamma_{0\lambda}^\nu$ Christoffel sembolleri elde edilir.

İlk olarak Γ_{00}^0 ifadesinin değerini hesaplamak için

$$
\begin{aligned}
\Gamma_{00}^0 &= \frac{1}{2} \sum_{r=0}^{k} g^{0r} \left[\frac{\partial g_{r0}}{\partial u_0} + \frac{\partial g_{r0}}{\partial u_0} - \frac{\partial g_{00}}{\partial u_r}\right] \\
&= \frac{1}{2} g^{00} \left[\frac{\partial g_{00}}{\partial u_0} + \frac{\partial g_{00}}{\partial u_0} - \frac{\partial g_{00}}{\partial u_0}\right] + \frac{1}{2} g^{01} \left[\frac{\partial g_{10}}{\partial u_0} + \frac{\partial g_{10}}{\partial u_0} - \frac{\partial g_{00}}{\partial u_1}\right] \\
&\quad + \frac{1}{2} g^{02} \left[\frac{\partial g_{20}}{\partial u_0} + \frac{\partial g_{20}}{\partial u_0} - \frac{\partial g_{00}}{\partial u_2}\right] + \ldots + \frac{1}{2} g^{0k} \left[\frac{\partial g_{k0}}{\partial u_0} + \frac{\partial g_{k0}}{\partial u_0} - \frac{\partial g_{00}}{\partial u_k}\right]
\end{aligned}
$$

olarak verilen Koszul eşitliği göz önüne alınır ve burada (4.1.6) ve (4.1.7) eşitlikleri yerine yazılırsa

$$
\begin{aligned}
\Gamma_{00}^0 &= \frac{1}{2} \frac{1}{g} \left[\frac{\partial g}{\partial u_0} + 2 \sum_{\nu=1}^{k} \left(\zeta_\nu + \sum_{\mu=1}^{k} \alpha_{\nu\mu} u_\mu\right)\left(\dot{\zeta}_\nu + \sum_{\mu=1}^{k} \dot{\alpha}_{\nu\mu} u_\mu\right)\right] \\
&\quad - \frac{1}{2} \frac{1}{g} \left(\zeta_1 + \sum_{\mu=1}^{k} \alpha_{1\mu} u_\mu\right)\left[2\left(\dot{\zeta}_1 + \sum_{\mu=1}^{k} \dot{\alpha}_{1\mu} u_\mu\right) - \frac{\partial g}{\partial u_1} - 2 \sum_{\nu=1}^{k} \left(\zeta_\nu + \sum_{\mu=1}^{k} \alpha_{\nu\mu} u_\mu\right) \alpha_{\nu 1}\right] \\
&\quad - \frac{1}{2} \frac{1}{g} \left(\zeta_2 + \sum_{\mu=1}^{k} \alpha_{2\mu} u_\mu\right)\left[2\left(\dot{\zeta}_2 + \sum_{\mu=1}^{k} \dot{\alpha}_{2\mu} u_\mu\right) - \frac{\partial g}{\partial u_2} - 2 \sum_{\nu=1}^{k} \left(\zeta_\nu + \sum_{\mu=1}^{k} \alpha_{\nu\mu} u_\mu\right) \alpha_{\nu 2}\right] \\
&\quad \vdots \\
&\quad - \frac{1}{2} \frac{1}{g} \left(\zeta_k + \sum_{\mu=1}^{k} \alpha_{k\mu} u_\mu\right)\left[2\left(\dot{\zeta}_k + \sum_{\mu=1}^{k} \dot{\alpha}_{k\mu} u_\mu\right) - \frac{\partial g}{\partial u_k} - 2 \sum_{\nu=1}^{k} \left(\zeta_\nu + \sum_{\mu=1}^{k} \alpha_{\nu\mu} u_\mu\right) \alpha_{\nu k}\right]
\end{aligned}
$$

elde edilir. Bu son denklemde gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\Gamma_{00}^{0}=\frac{1}{2g}\frac{\partial g}{\partial u_0}+\frac{1}{g}\sum_{\nu=1}^{k}\left(\zeta_\nu+\sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{\nu\mu}u_\mu\right)\left(\dot{\zeta}_\nu+\sum_{\mu=1}^{k}\dot{\alpha}_{\nu\mu}u_\mu\right)$$
$$-\frac{1}{g}\sum_{\nu=1}^{k}\left(\zeta_\nu+\sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{\nu\mu}u_\mu\right)\left(\dot{\zeta}_\nu+\sum_{\mu=1}^{k}\dot{\alpha}_{\nu\mu}u_\mu\right)+\frac{1}{2g}\sum_{\nu=1}^{k}\left(\zeta_\nu+\sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{\nu\mu}u_\mu\right)\frac{\partial g}{\partial u_\nu}$$
$$-\frac{1}{g}\sum_{\nu=1}^{k}\left(\zeta_\nu+\sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{\nu\mu}u_\mu\right)^2\alpha_{\nu\nu}$$

bulunur. Ayrıca, $\alpha_{\nu\nu}=-\alpha_{\nu\nu}$ yani, $\alpha_{\nu\nu}=0$ olduğu göz önüne alınır ve gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$$\Gamma_{00}^{0}=\frac{1}{2g}\left[\frac{\partial g}{\partial u_0}+\sum_{\nu=1}^{k}\left(\zeta_\nu+\sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{\nu\mu}u_\mu\right)\frac{\partial g}{\partial u_\nu}\right] \tag{4.1.8}$$

olduğu görülür.

Benzer şekilde Γ_{00}^{λ}, $1\le\lambda\le k$, değerini hesaplamak üzere, Koszul eşitliği,

$$\Gamma_{00}^{\lambda}=\frac{1}{2}\sum_{r=0}^{k}g^{\lambda r}\left[\frac{\partial g_{r0}}{\partial u_0}+\frac{\partial g_{r0}}{\partial u_0}-\frac{\partial g_{00}}{\partial u_r}\right]$$
$$=\frac{1}{2}g^{\lambda 0}\left[\frac{\partial g_{00}}{\partial u_0}+\frac{\partial g_{00}}{\partial u_0}-\frac{\partial g_{00}}{\partial u_0}\right]+\frac{1}{2}g^{\lambda 1}\left[\frac{\partial g_{10}}{\partial u_0}+\frac{\partial g_{10}}{\partial u_0}-\frac{\partial g_{00}}{\partial u_1}\right]+\frac{1}{2}g^{\lambda 2}\left[\frac{\partial g_{20}}{\partial u_0}+\frac{\partial g_{20}}{\partial u_0}-\frac{\partial g_{00}}{\partial u_2}\right]$$
$$+\ldots+\frac{1}{2}g^{\lambda\lambda}\left[\frac{\partial g_{\lambda 0}}{\partial u_0}+\frac{\partial g_{\lambda 0}}{\partial u_0}-\frac{\partial g_{00}}{\partial u_\lambda}\right]+\ldots+\frac{1}{2}g^{\lambda k}\left[\frac{\partial g_{k0}}{\partial u_0}+\frac{\partial g_{k0}}{\partial u_0}-\frac{\partial g_{00}}{\partial u_k}\right]$$

olur. Burada (4.1.6) ve (4.1.7) eşitlikleri yerlerine yazılırsa

$$\Gamma_{00}^{\lambda}=-\frac{1}{2}\frac{1}{g}\left(\zeta_{\lambda}+\sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{\lambda\mu}u_{\mu}\right)\left[\frac{\partial g}{\partial u_0}+2\sum_{\nu=1}^{k}\left(\zeta_{\nu}+\sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{\nu\mu}u_{\mu}\right)\left(\dot{\zeta}_{\nu}+\sum_{\mu=1}^{k}\dot{\alpha}_{\nu\mu}u_{\mu}\right)\right]$$
$$+\frac{1}{2}\frac{1}{g}\left(\delta_{\lambda 1}g+\left(\zeta_{\lambda}+\sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{\lambda\mu}u_{\mu}\right)\left(\zeta_{1}+\sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{1\mu}u_{\mu}\right)\right)\left[2\left(\dot{\zeta}_{1}+\sum_{\mu=1}^{k}\dot{\alpha}_{1\mu}u_{\mu}\right)-\frac{\partial g}{\partial u_1}-2\sum_{\nu=1}^{k}\left(\zeta_{\nu}+\sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{\nu\mu}u_{\mu}\right)\alpha_{\nu 1}\right]$$
$$+\frac{1}{2}\frac{1}{g}\left(\delta_{\lambda 2}g+\left(\zeta_{\lambda}+\sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{\lambda\mu}u_{\mu}\right)\left(\zeta_{2}+\sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{2\mu}u_{\mu}\right)\right)\left[2\left(\dot{\zeta}_{2}+\sum_{\mu=1}^{k}\dot{\alpha}_{2\mu}u_{\mu}\right)-\frac{\partial g}{\partial u_2}-2\sum_{\nu=1}^{k}\left(\zeta_{\nu}+\sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{\nu\mu}u_{\mu}\right)\alpha_{\nu 2}\right]$$
$$\vdots$$
$$+\frac{1}{2}\frac{1}{g}\left(\delta_{\lambda\lambda}g+\left(\zeta_{\lambda}+\sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{\lambda\mu}u_{\mu}\right)\left(\zeta_{\lambda}+\sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{\lambda\mu}u_{\mu}\right)\right)\left[2\left(\dot{\zeta}_{k}+\sum_{\mu=1}^{k}\dot{\alpha}_{k\mu}u_{\mu}\right)-\frac{\partial g}{\partial u_k}-2\sum_{\nu=1}^{k}\left(\zeta_{\nu}+\sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{\nu\mu}u_{\mu}\right)\alpha_{\nu\lambda}\right]$$
$$\vdots$$
$$+\frac{1}{2}\frac{1}{g}\left(\delta_{\lambda k}g+\left(\zeta_{\lambda}+\sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{\lambda\mu}u_{\mu}\right)\left(\zeta_{k}+\sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{k\mu}u_{\mu}\right)\right)\left[2\left(\dot{\zeta}_{k}+\sum_{\mu=1}^{k}\dot{\alpha}_{k\mu}u_{\mu}\right)-\frac{\partial g}{\partial u_k}-2\sum_{\nu=1}^{k}\left(\zeta_{\nu}+\sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{\nu\mu}u_{\mu}\right)\alpha_{\nu k}\right]$$

elde edilir ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\Gamma_{00}^{\lambda}=-\frac{1}{2g}\left(\zeta_{\lambda}+\sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{\lambda\mu}u_{\mu}\right)\frac{\partial g}{\partial u_0}-\frac{1}{g}\left(\zeta_{\lambda}+\sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{\lambda\mu}u_{\mu}\right)\sum_{\nu=1}^{k}\left(\zeta_{\nu}+\sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{\nu\mu}u_{\mu}\right)\left(\dot{\zeta}_{\nu}+\sum_{\mu=1}^{k}\dot{\alpha}_{\nu\mu}u_{\mu}\right)$$
$$+\frac{1}{2g}2g\left(\dot{\zeta}_{\lambda}+\sum_{\mu=1}^{k}\dot{\alpha}_{\lambda\mu}u_{\mu}\right)-\frac{1}{2g}g\frac{\partial g}{\partial u_{\lambda}}-\frac{1}{2g}2g\sum_{\nu=1}^{k}\left(\zeta_{\nu}+\sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{\nu\mu}u_{\mu}\right)\alpha_{\nu\lambda}$$
$$+\frac{1}{g}\left(\zeta_{\lambda}+\sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{\lambda\mu}u_{\mu}\right)\sum_{\nu=1}^{k}\left(\zeta_{\nu}+\sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{\nu\mu}u_{\mu}\right)\left(\dot{\zeta}_{\nu}+\sum_{\mu=1}^{k}\dot{\alpha}_{\nu\mu}u_{\mu}\right)$$
$$-\frac{1}{2g}\left(\zeta_{\lambda}+\sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{\lambda\mu}u_{\mu}\right)\sum_{\nu=1}^{k}\left(\zeta_{\nu}+\sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{\nu\mu}u_{\mu}\right)\frac{\partial g}{\partial u_{\nu}}-\frac{1}{g}\left(\zeta_{\lambda}+\sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{\lambda\mu}u_{\mu}\right)\sum_{\nu=1}^{k}\left(\zeta_{\nu}+\sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{\nu\mu}u_{\mu}\right)^{2}\alpha_{\nu\nu}$$

bulunur. $\alpha_{\nu\nu}=0$ ve $\alpha_{\nu\lambda}=-\alpha_{\lambda\nu}$ olduğu göz önüne alınır ve gerekli sadeleştirmeler yapılırsa, $1\leq\lambda\leq k$, için

$$\Gamma_{00}^{\lambda}=\frac{1}{2g}\left[-\left(\zeta_{\lambda}+\sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{\lambda\mu}u_{\mu}\right)\left(\frac{\partial g}{\partial u_0}+\sum_{\nu=1}^{k}\left(\zeta_{\nu}+\sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{\nu\mu}u_{\mu}\right)\frac{\partial g}{\partial u_{\nu}}\right)\right.$$
$$\left.+2g\left(\left(\dot{\zeta}_{\lambda}+\sum_{\mu=1}^{k}\dot{\alpha}_{\lambda\mu}u_{\mu}\right)+\sum_{\nu=1}^{k}\left(\zeta_{\nu}+\sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{\nu\mu}u_{\mu}\right)\alpha_{\lambda\nu}-\frac{1}{2}\frac{\partial g}{\partial u_{\lambda}}\right)\right] \tag{4.1.9}$$

olarak elde edilir.

$\Gamma^0_{\nu\mu}$ ve $\Gamma^0_{\mu\nu}$, $1 \le \nu, \mu \le k$, için Koszul eşitliği,

$$\Gamma^0_{\nu\mu} = \frac{1}{2}\sum_{r=0}^{k} g^{0r}\left[\frac{\partial g_{r\nu}}{\partial u_\mu} + \frac{\partial g_{r\mu}}{\partial u_\nu} - \frac{\partial g_{\nu\mu}}{\partial u_r}\right]$$
$$= \frac{1}{2}g^{00}\left[\frac{\partial g_{0\nu}}{\partial u_\mu} + \frac{\partial g_{0\mu}}{\partial u_\nu} - \frac{\partial g_{\nu\mu}}{\partial u_0}\right] + \frac{1}{2}g^{01}\left[\frac{\partial g_{1\nu}}{\partial u_\mu} + \frac{\partial g_{1\mu}}{\partial u_\nu} - \frac{\partial g_{\nu\mu}}{\partial u_1}\right]$$
$$+ \frac{1}{2}g^{02}\left[\frac{\partial g_{2\nu}}{\partial u_\mu} + \frac{\partial g_{2\mu}}{\partial u_\nu} - \frac{\partial g_{\nu\mu}}{\partial u_2}\right] + \ldots + \frac{1}{2}g^{0k}\left[\frac{\partial g_{k\nu}}{\partial u_\mu} + \frac{\partial g_{k\mu}}{\partial u_\nu} - \frac{\partial g_{\nu\mu}}{\partial u_k}\right]$$

olduğundan (4.1.6) ve (4.1.7) eşitlikleri yerlerine yazılırsa

$$\Gamma^0_{\nu\mu} = \frac{1}{2}\frac{1}{g}\left[\alpha_{\nu\mu} + \alpha_{\mu\nu} - 0\right] + \frac{1}{2}\frac{1}{g}\left(-\left(\zeta_1 + \sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{1\mu}u_\mu\right)\right)\left[0+0-0\right]$$
$$+ \frac{1}{2}\frac{1}{g}\left(-\left(\zeta_2 + \sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{2\mu}u_\mu\right)\right)\left[0+0-0\right] + \ldots + \frac{1}{2}\frac{1}{g}\left(-\left(\zeta_k + \sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{k\mu}u_\mu\right)\right)\left[0+0-0\right]$$

bulunur. (2.2.2) denkleminden ve $\alpha_{\nu\mu} = -\alpha_{\mu\nu}$ olduğundan

$$\Gamma^0_{\nu\mu} = \Gamma^0_{\mu\nu} = 0 \ , \qquad 1 \le \nu, \mu \le k \qquad (4.1.10)$$

elde edilir.

$\Gamma^\lambda_{\nu\mu}$ ve $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$, $1 \le \lambda, \nu, \mu \le k$, değerlerini hesaplamak üzere,

$$\Gamma^\lambda_{\nu\mu} = \frac{1}{2}\sum_{r=0}^{k} g^{\lambda r}\left[\frac{\partial g_{r\nu}}{\partial u_\mu} + \frac{\partial g_{r\mu}}{\partial u_\nu} - \frac{\partial g_{\nu\mu}}{\partial u_r}\right]$$
$$= \frac{1}{2}g^{\lambda 0}\left[\frac{\partial g_{0\nu}}{\partial u_\mu} + \frac{\partial g_{0\mu}}{\partial u_\nu} - \frac{\partial g_{\nu\mu}}{\partial u_0}\right] + \frac{1}{2}g^{\lambda 1}\left[\frac{\partial g_{1\nu}}{\partial u_\mu} + \frac{\partial g_{1\mu}}{\partial u_\nu} - \frac{\partial g_{\nu\mu}}{\partial u_1}\right] + \frac{1}{2}g^{\lambda 2}\left[\frac{\partial g_{2\nu}}{\partial u_\mu} + \frac{\partial g_{2\mu}}{\partial u_\nu} - \frac{\partial g_{\nu\mu}}{\partial u_2}\right]$$
$$+ \ldots + \frac{1}{2}g^{\lambda\lambda}\left[\frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial u_\mu} + \frac{\partial g_{\lambda\mu}}{\partial u_\nu} - \frac{\partial g_{\nu\mu}}{\partial u_\lambda}\right] + \ldots + \frac{1}{2}g^{\lambda k}\left[\frac{\partial g_{k\nu}}{\partial u_\mu} + \frac{\partial g_{k\mu}}{\partial u_\nu} - \frac{\partial g_{\nu\mu}}{\partial u_k}\right]$$

Koszul eşitliğinde (4.1.6) ve (4.1.7) denklemleri yerlerine yazılırsa

$$
\begin{aligned}
\Gamma^{\lambda}_{\nu\mu} &= -\frac{1}{2}\frac{1}{g}\left(\zeta_{\lambda} + \sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{\lambda\mu}u_{\mu}\right)\left[\alpha_{\nu\mu} + \alpha_{\mu\nu} - 0\right] \\
&+ \frac{1}{2}\frac{1}{g}\left(\delta_{\lambda 1}g + \left(\zeta_{\lambda} + \sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{\lambda\mu}u_{\mu}\right)\left(\zeta_{1} + \sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{1\mu}u_{\mu}\right)\right)\left[0+0-0\right] \\
&+ \frac{1}{2}\frac{1}{g}\left(\delta_{\lambda 2}g + \left(\zeta_{\lambda} + \sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{\lambda\mu}u_{\mu}\right)\left(\zeta_{2} + \sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{2\mu}u_{\mu}\right)\right)\left[0+0-0\right] \\
&\vdots \\
&+ \frac{1}{2}\frac{1}{g}\left(\delta_{\lambda\lambda}g + \left(\zeta_{\lambda} + \sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{\lambda\mu}u_{\mu}\right)\left(\zeta_{\lambda} + \sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{\lambda\mu}u_{\mu}\right)\right)\left[0+0-0\right] \\
&\vdots \\
&+ \frac{1}{2}\frac{1}{g}\left(\delta_{\lambda k}g + \left(\zeta_{\lambda} + \sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{\lambda\mu}u_{\mu}\right)\left(\zeta_{k} + \sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{k\mu}u_{\mu}\right)\right)\left[0+0-0\right]
\end{aligned}
$$

elde edilir. Son olarak, (2.2.2) denklemi ve $\alpha_{\nu\mu} = -\alpha_{\mu\nu}$ olduğu göz önüne alınırsa

$$
\Gamma^{\lambda}_{\nu\mu} = \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = 0 \qquad , \qquad 1 \le \nu, \mu, \lambda \le k \tag{4.1.11}
$$

olur.

$\Gamma^{0}_{\lambda 0}$ ve $\Gamma^{0}_{0\lambda}$, $1 \le \lambda \le k$, değerlerini hesaplamak için

$$
\begin{aligned}
\Gamma^{0}_{\lambda 0} &= \frac{1}{2}\sum_{r=0}^{k} g^{0r}\left[\frac{\partial g_{r\lambda}}{\partial u_0} + \frac{\partial g_{r0}}{\partial u_{\lambda}} - \frac{\partial g_{\lambda 0}}{\partial u_r}\right] \\
&= \frac{1}{2}g^{00}\left[\frac{\partial g_{0\lambda}}{\partial u_0} + \frac{\partial g_{00}}{\partial u_{\lambda}} - \frac{\partial g_{\lambda 0}}{\partial u_0}\right] + \frac{1}{2}g^{01}\left[\frac{\partial g_{1\lambda}}{\partial u_0} + \frac{\partial g_{10}}{\partial u_{\lambda}} - \frac{\partial g_{\lambda 0}}{\partial u_1}\right] \\
&+ \frac{1}{2}g^{02}\left[\frac{\partial g_{2\lambda}}{\partial u_0} + \frac{\partial g_{20}}{\partial u_{\lambda}} - \frac{\partial g_{\lambda 0}}{\partial u_2}\right] + \ldots + \frac{1}{2}g^{0k}\left[\frac{\partial g_{k\lambda}}{\partial u_0} + \frac{\partial g_{k0}}{\partial u_{\lambda}} - \frac{\partial g_{\lambda 0}}{\partial u_k}\right]
\end{aligned}
$$

ile verilen Koszul eşitliği göz önüne alınır ve burada (4.1.6) ve (4.1.7) eşitlikleri yerlerine yazılırsa

$$\Gamma_{\lambda 0}^{0}=\frac{1}{2}\frac{1}{g}\left[\frac{\partial g}{\partial u_{\lambda}}+2\sum_{\nu=1}^{k}\left(\zeta_{\nu}+\sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{\nu\mu}u_{\mu}\right)\alpha_{\nu\lambda}\right]+\frac{1}{2}\frac{1}{g}\left(-\left(\zeta_{1}+\sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{1\mu}u_{\mu}\right)\right)\left[0+\alpha_{1\lambda}-\alpha_{\lambda 1}\right]$$
$$+\frac{1}{2}\frac{1}{g}\left(-\left(\zeta_{2}+\sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{2\mu}u_{\mu}\right)\right)\left[0+\alpha_{2\lambda}-\alpha_{\lambda 2}\right]+\ldots+\frac{1}{2}\frac{1}{g}\left(-\left(\zeta_{k}+\sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{k\mu}u_{\mu}\right)\right)\left[0+\alpha_{k\lambda}-\alpha_{\lambda k}\right]$$

elde edilir. $\alpha_{\nu\lambda}-\alpha_{\lambda\nu}=2\alpha_{\nu\lambda}$ olduğu göz önüne alınır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\Gamma_{\lambda 0}^{0}=\frac{1}{2g}\frac{\partial g}{\partial u_{\lambda}}+\frac{1}{g}\sum_{\nu=1}^{k}\left(\zeta_{\nu}+\sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{\nu\mu}u_{\mu}\right)\alpha_{\nu\lambda}-\frac{1}{g}\sum_{\nu=1}^{k}\left(\zeta_{\nu}+\sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{\nu\mu}u_{\mu}\right)\alpha_{\nu\lambda}$$

bulunur. Bu son denklemde (2.2.2) göz önüne alınarak gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$$\Gamma_{\lambda 0}^{0}=\Gamma_{0\lambda}^{0}=\frac{1}{2g}\frac{\partial g}{\partial u_{\lambda}} \quad , \qquad 1\leq\lambda\leq k \tag{4.1.12}$$

elde edilir.

Son olarak, $\Gamma_{\nu 0}^{\lambda}$ ve $\Gamma_{0\nu}^{\lambda}$, $1\leq\nu,\lambda\leq k$, değerlerini hesaplamak üzere

$$\Gamma_{\nu 0}^{\lambda}=\frac{1}{2}\sum_{r=0}^{k}g^{\lambda r}\left[\frac{\partial g_{r\nu}}{\partial u_{0}}+\frac{\partial g_{r0}}{\partial u_{\nu}}-\frac{\partial g_{\lambda 0}}{\partial u_{r}}\right]$$
$$=\frac{1}{2}g^{\lambda 0}\left[\frac{\partial g_{0\nu}}{\partial u_{0}}+\frac{\partial g_{00}}{\partial u_{\nu}}-\frac{\partial g_{\nu 0}}{\partial u_{0}}\right]+\frac{1}{2}g^{\lambda 1}\left[\frac{\partial g_{1\nu}}{\partial u_{0}}+\frac{\partial g_{10}}{\partial u_{\nu}}-\frac{\partial g_{\nu 0}}{\partial u_{1}}\right]+\frac{1}{2}g^{\lambda 2}\left[\frac{\partial g_{2\nu}}{\partial u_{0}}+\frac{\partial g_{20}}{\partial u_{\nu}}-\frac{\partial g_{\nu 0}}{\partial u_{2}}\right]$$
$$+\ldots+\frac{1}{2}g^{\lambda\lambda}\left[\frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial u_{0}}+\frac{\partial g_{\lambda 0}}{\partial u_{\nu}}-\frac{\partial g_{\nu 0}}{\partial u_{\lambda}}\right]+\ldots+\frac{1}{2}g^{\lambda k}\left[\frac{\partial g_{k\nu}}{\partial u_{0}}+\frac{\partial g_{k0}}{\partial u_{\nu}}-\frac{\partial g_{\nu 0}}{\partial u_{k}}\right]$$

Koszul eşitliğinde, (4.1.6) ve (4.1.7) denklemleri yerlerine yazılırsa

$$
\begin{aligned}
\Gamma_{\nu 0}^{\lambda} = & -\frac{1}{2}\frac{1}{g}\left(\zeta_{\lambda}+\sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{\lambda\mu}u_{\mu}\right)\left[\frac{\partial g}{\partial u_{\nu}}+2\sum_{\nu=1}^{k}\left(\zeta_{\nu}+\sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{\nu\mu}u_{\mu}\right)\alpha_{\nu\nu}\right] \\
& +\frac{1}{2}\frac{1}{g}\left(\delta_{\lambda 1}g+\left(\zeta_{\lambda}+\sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{\lambda\mu}u_{\mu}\right)\left(\zeta_{1}+\sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{1\mu}u_{\mu}\right)\right)\left[0+\alpha_{1\nu}-\alpha_{\nu 1}\right] \\
& +\frac{1}{2}\frac{1}{g}\left(\delta_{\lambda 2}g+\left(\zeta_{\lambda}+\sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{\lambda\mu}u_{\mu}\right)\left(\zeta_{2}+\sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{2\mu}u_{\mu}\right)\right)\left[0+\alpha_{2\nu}-\alpha_{\nu 2}\right] \\
& \vdots \\
& +\frac{1}{2}\frac{1}{g}\left(\delta_{\lambda\lambda}g+\left(\zeta_{\lambda}+\sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{\lambda\mu}u_{\mu}\right)\left(\zeta_{\lambda}+\sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{\lambda\mu}u_{\mu}\right)\right)\left[0+\alpha_{\lambda\nu}-\alpha_{\nu\lambda}\right] \\
& \vdots \\
& +\frac{1}{2}\frac{1}{g}\left(\delta_{\lambda k}g+\left(\zeta_{\lambda}+\sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{\lambda\mu}u_{\mu}\right)\left(\zeta_{k}+\sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{k\mu}u_{\mu}\right)\right)\left[0+\alpha_{k\nu}-\alpha_{\nu k}\right]
\end{aligned}
$$

elde edilir. $\delta_{\nu\lambda}=\begin{cases}1, & \nu=\lambda \\ 0, & \nu\neq\lambda\end{cases}$ ve $\alpha_{\lambda\nu}-\alpha_{\nu\lambda}=2\alpha_{\lambda\nu}$ olduğundan gerekli düzenlemeler sonucu

$$
\begin{aligned}
\Gamma_{\nu 0}^{\lambda} = & -\frac{1}{2g}\left(\zeta_{\lambda}+\sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{\lambda\mu}u_{\mu}\right)\frac{\partial g}{\partial u_{\nu}}+\frac{1}{g}\sum_{\nu=1}^{k}\left(\zeta_{\nu}+\sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{\nu\mu}u_{\mu}\right)\alpha_{\nu\nu} \\
& -\frac{1}{g}\sum_{\nu=1}^{k}\left(\zeta_{\nu}+\sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{\nu\mu}u_{\mu}\right)\alpha_{\nu\nu}+\frac{1}{2g}2g\left(\alpha_{\lambda\nu}\right)
\end{aligned}
$$

bulunur. Son denklemde sadeleştirmeler yapılır ve (2.2.2) denklemi göz önüne alınırsa

$$
\Gamma_{\nu 0}^{\lambda}=\Gamma_{0\nu}^{\lambda}=\frac{1}{2g}\left[-\left(\zeta_{\lambda}+\sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{\lambda\mu}u_{\mu}\right)\frac{\partial g}{\partial u_{\nu}}+2g\left(\alpha_{\lambda\nu}\right)\right],\ 1\leq\nu,\lambda\leq k \qquad (4.1.13)
$$

elde edilir. Sonuç olarak (4.1.8), (4.1.9), (4.1.10), (4.1.11), (4.1.12) ve (4.1.13) denklemlerinden, $1\leq\nu,\mu,\lambda\leq k$, için Christoffel sembolleri

$$\Gamma_{00}^{0}=\frac{1}{2g}\left[\frac{\partial g}{\partial u_0}+\sum_{\nu=1}^{k}\left(\zeta_\nu+\sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{\nu\mu}u_\mu\right)\frac{\partial g}{\partial u_\nu}\right],$$

$$\Gamma_{00}^{\lambda}=\frac{1}{2g}\left[-\left(\zeta_\lambda+\sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{\lambda\mu}u_\mu\right)\left(\frac{\partial g}{\partial u_0}+\sum_{\nu=1}^{k}\left(\zeta_\nu+\sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{\nu\mu}u_\mu\right)\frac{\partial g}{\partial u_\nu}\right)\right.$$

$$\left.+2g\left(\left(\dot{\zeta}_\lambda+\sum_{\mu=1}^{k}\dot{\alpha}_{\lambda\mu}u_\mu\right)+\sum_{\nu=1}^{k}\left(\zeta_\nu+\sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{\nu\mu}u_\mu\right)\alpha_{\lambda\nu}-\frac{1}{2}\frac{\partial g}{\partial u_\lambda}\right)\right],$$

$$\Gamma_{\nu\mu}^{0}=\Gamma_{\mu\nu}^{0}=0, \qquad (4.1.14)$$

$$\Gamma_{\nu\mu}^{\lambda}=\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}=0,$$

$$\Gamma_{\lambda 0}^{0}=\Gamma_{0\lambda}^{0}=\frac{1}{2g}\frac{\partial g}{\partial u_\lambda},$$

$$\Gamma_{\nu 0}^{\lambda}=\Gamma_{0\nu}^{\lambda}=\frac{1}{2g}\left[-\left(\zeta_\lambda+\sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{\lambda\mu}u_\mu\right)\frac{\partial g}{\partial u_\nu}+2g\left(\alpha_{\lambda\nu}\right)\right]$$

olarak verilir. Bu son denklemler Riemann eğriliği hesaplanırken kullanılacaktır. Teorem 2.2.10. a göre $\{u_0,u_1,\ldots,u_k\}$ koordinat sisteminin koordinat komşuluğunda tanjant uzayının bazı $\{\partial_0,\partial_1,\ldots,\partial_k\}$ ($\frac{\partial}{\partial u_i}=\partial_i,\ 0\le i\le k$) olmak üzere M , spacelike doğrultman uzaylı genelleştirilmiş timelike regle yüzeyinin Riemann eğrilik tensörü

$$R_{\partial_i\partial_j}\left(\partial_l\right)=\sum_{r=0}^{k}R_{lij}^{r}\partial_r$$

dir, burada R_{lij}^{r} Riemann eğrilik tensörü katsayıları

$$R_{lij}^{r}=\frac{\partial}{\partial u_i}\Gamma_{jl}^{r}-\frac{\partial}{\partial u_j}\Gamma_{il}^{r}-\sum_{s=0}^{k}\Gamma_{il}^{s}\Gamma_{js}^{r}+\sum_{s=0}^{k}\Gamma_{jl}^{s}\Gamma_{is}^{r}$$

dır. Böylece Teorem 2.2.12. den M nin Riemann-Christoffel eğrilik tensörü

$$R_{hlij}=\sum_{r=0}^{k}g_{rh}\left(\frac{\partial}{\partial u_i}\Gamma_{jl}^{r}-\frac{\partial}{\partial u_j}\Gamma_{il}^{r}-\sum_{s=0}^{k}\Gamma_{il}^{s}\Gamma_{js}^{r}+\sum_{s=0}^{k}\Gamma_{jl}^{s}\Gamma_{is}^{r}\right) \qquad (4.1.15)$$

olur.

Ayrıca Teorem 2.2.8. den dolayı eğrilik tensörü için

$$\begin{aligned} R_{hlij} &= R_{ijhl} \\ R_{ijhl} &= -R_{jihl} \end{aligned} \tag{4.1.16}$$

bağıntıları vardır. Böylece, $1 \leq \iota, \lambda, \nu, \mu \leq k$, için, sırasıyla,

$$\begin{aligned} &R_{0000}, \\ &R_{\nu 000} = R_{00\nu 0} = -R_{0\nu 00} = -R_{000\nu}, \\ &R_{\nu\mu 00} = R_{00\nu\mu}, \\ &R_{0\lambda\nu\mu} = R_{\nu\mu\lambda 0} = -R_{0\lambda\nu\mu} = -R_{\nu\mu 0\lambda}, \\ &R_{\iota\lambda\nu\mu}, \\ &R_{\nu 0\mu 0} = -R_{0\nu\mu 0} = -R_{\mu 00\nu} = R_{0\mu 0\nu} \end{aligned}$$

değerleri hesaplanabilir. Şimdi, sırasıyla bu değerleri hesaplayalım. (4.1.6) ve (4.1.14) denklemleri (4.1.15) denkleminde yerine yazılırsa, R_{0000} eğriliği

$$R_{0000} = \sum_{r=0}^{k} g_{r0} \left(\frac{\partial}{\partial u_0} \Gamma_{00}^{r} - \frac{\partial}{\partial u_0} \Gamma_{00}^{r} - \sum_{s=0}^{k} \Gamma_{00}^{s} \Gamma_{0s}^{r} + \sum_{s=0}^{k} \Gamma_{00}^{s} \Gamma_{0s}^{r} \right) = 0$$

olur. Benzer şekilde $R_{\nu 000}$ eğriliği

$$R_{\nu 000} = \sum_{r=0}^{k} g_{r\nu} \left(\frac{\partial}{\partial u_0} \Gamma_{00}^{r} - \frac{\partial}{\partial u_0} \Gamma_{00}^{r} - \sum_{s=0}^{k} \Gamma_{00}^{s} \Gamma_{0s}^{r} + \sum_{s=0}^{k} \Gamma_{00}^{s} \Gamma_{0s}^{r} \right) = 0 \quad , \quad 1 \leq \nu \leq k$$

elde edilir. Ayrıca $R_{\nu\mu 00}$ eğriliği

$$R_{\nu\mu 00} = \sum_{r=0}^{k} g_{r\nu} \left(\frac{\partial}{\partial u_0} \Gamma_{0\mu}^{r} - \frac{\partial}{\partial u_0} \Gamma_{0\mu}^{r} - \sum_{s=0}^{k} \Gamma_{0\mu}^{s} \Gamma_{0s}^{r} + \sum_{s=0}^{k} \Gamma_{0\mu}^{s} \Gamma_{0s}^{r} \right) = 0 \quad , \quad 1 \leq \nu, \mu \leq k$$

dır. Bu son üç denklemden dolayı

$$R_{ij00} = 0 \qquad , \qquad 0 \le i, j \le k \tag{4.1.17}$$

dir. Eğer, (4.1.15) denklemi göz önüne alınırsa $R_{0\lambda\nu\mu}$, $1 \le \lambda, \nu, \mu \le k$, eğriliği

$$\begin{aligned}
R_{0\lambda\nu\mu} &= \sum_{r=0}^{k} g_{r0} \left(\frac{\partial}{\partial u_\nu} \Gamma^r_{\mu\lambda} - \frac{\partial}{\partial u_\mu} \Gamma^r_{\nu\lambda} - \sum_{s=0}^{k} \Gamma^s_{\nu\lambda} \Gamma^r_{\mu s} + \sum_{s=0}^{k} \Gamma^s_{\mu\lambda} \Gamma^r_{\nu s} \right) \\
&= g_{00} \left(\frac{\partial}{\partial u_\nu} \Gamma^0_{\mu\lambda} - \frac{\partial}{\partial u_\mu} \Gamma^0_{\nu\lambda} - \Gamma^0_{\nu\lambda} \Gamma^0_{\mu 0} + \Gamma^0_{\mu\lambda} \Gamma^0_{\nu 0} - \sum_{s=1}^{k} \Gamma^s_{\nu\lambda} \Gamma^0_{\mu s} + \sum_{s=1}^{k} \Gamma^s_{\mu\lambda} \Gamma^0_{\nu s} \right) \\
&\quad + \sum_{r=1}^{k} g_{r0} \left(\frac{\partial}{\partial u_\nu} \Gamma^r_{\mu\lambda} - \frac{\partial}{\partial u_\mu} \Gamma^r_{\nu\lambda} - \Gamma^0_{\nu\lambda} \Gamma^r_{\mu 0} + \Gamma^0_{\mu\lambda} \Gamma^r_{\nu 0} - \sum_{s=1}^{k} \Gamma^s_{\nu\lambda} \Gamma^r_{\mu s} + \sum_{s=1}^{k} \Gamma^s_{\mu\lambda} \Gamma^r_{\nu s} \right)
\end{aligned}$$

dır. Burada, (4.1.14) de verilen

$$\Gamma^0_{\nu\mu} = \Gamma^0_{\mu\nu} = \Gamma^\lambda_{\nu\mu} = \Gamma^\lambda_{\mu\nu} = 0 \qquad , \qquad 1 \le \lambda, \nu, \mu \le k$$

eşitlikleri göz önüne alınırsa

$$R_{0\lambda\nu\mu} = 0 \qquad , \qquad 1 \le \lambda, \nu, \mu \le k$$

bulunur. Benzer şekilde (4.1.15) denkleminden, $1 \le \iota, \lambda, \nu, \mu \le k$, olmak üzere, $R_{\iota\lambda\nu\mu}$ eğriliği

$$\begin{aligned}
R_{\iota\lambda\nu\mu} &= \sum_{r=0}^{k} g_{r\iota} \left(\frac{\partial}{\partial u_\nu} \Gamma^r_{\mu\lambda} - \frac{\partial}{\partial u_\mu} \Gamma^r_{\nu\lambda} - \sum_{s=0}^{k} \Gamma^s_{\nu\lambda} \Gamma^r_{\mu s} + \sum_{s=0}^{k} \Gamma^s_{\mu\lambda} \Gamma^r_{\nu s} \right) \\
&= g_{0\iota} \left(\frac{\partial}{\partial u_\nu} \Gamma^0_{\mu\lambda} - \frac{\partial}{\partial u_\mu} \Gamma^0_{\nu\lambda} - \Gamma^0_{\nu\lambda} \Gamma^0_{\mu 0} + \Gamma^0_{\mu\lambda} \Gamma^0_{\nu 0} - \sum_{s=1}^{k} \Gamma^s_{\nu\lambda} \Gamma^0_{\mu s} + \sum_{s=1}^{k} \Gamma^s_{\mu\lambda} \Gamma^0_{\nu s} \right) \\
&\quad + \sum_{r=1}^{k} g_{r\iota} \left(\frac{\partial}{\partial u_\nu} \Gamma^r_{\mu\lambda} - \frac{\partial}{\partial u_\mu} \Gamma^r_{\nu\lambda} - \Gamma^0_{\nu\lambda} \Gamma^r_{\mu 0} + \Gamma^0_{\mu\lambda} \Gamma^r_{\nu 0} - \sum_{s=1}^{k} \Gamma^s_{\nu\lambda} \Gamma^r_{\mu s} + \sum_{s=1}^{k} \Gamma^s_{\mu\lambda} \Gamma^r_{\nu s} \right)
\end{aligned}$$

olur. (4.1.14) de verilen

$$\Gamma^0_{\nu\mu} = \Gamma^0_{\mu\nu} = \Gamma^\lambda_{\nu\mu} = \Gamma^\lambda_{\mu\nu} = 0 \qquad , \qquad 1 \le \lambda, \nu, \mu \le k$$

eşitlikleri göz önüne alınırsa

$$R_{\iota\lambda\nu\mu}=0 \qquad , \qquad 1\le \iota,\lambda,\nu,\mu\le k$$

bulunur. Böylece

$$R_{00\nu\mu}=R_{\lambda 0\nu\mu}=R_{0\lambda\nu\mu}=R_{\iota\lambda\nu\mu}=0 \quad , \quad 1\le \iota,\lambda,\nu,\mu\le k$$

olduğundan

$$R_{ij\nu\mu}=0 \quad , \quad 0\le i,j\le k \quad , \quad 1\le \nu,\mu\le k \tag{4.1.18}$$

genellemesi elde edilir. Son olarak (4.1.15) denkleminden $R_{\nu 0\mu 0}$, $1\le \nu,\mu\le k$, eğriliği

$$\begin{aligned} R_{\nu 0\mu 0} &= g_{0\nu}\left(\frac{\partial}{\partial u_\mu}\Gamma^0_{00}-\frac{\partial}{\partial u_0}\Gamma^0_{\mu 0}-\Gamma^0_{\mu 0}\Gamma^0_{00}+\Gamma^0_{00}\Gamma^0_{\mu 0}-\sum_{s=1}^{k}\Gamma^s_{\mu 0}\Gamma^0_{0s}+\sum_{s=1}^{k}\Gamma^s_{00}\Gamma^0_{\mu s}\right) \\ &\quad +\sum_{r=1}^{k} g_{r\nu}\left(\frac{\partial}{\partial u_\mu}\Gamma^r_{00}-\frac{\partial}{\partial u_0}\Gamma^r_{\mu 0}-\Gamma^0_{\mu 0}\Gamma^r_{00}+\Gamma^0_{00}\Gamma^r_{\mu 0}-\sum_{s=1}^{k}\Gamma^s_{\mu 0}\Gamma^r_{0s}+\sum_{s=1}^{k}\Gamma^s_{00}\Gamma^r_{\mu s}\right) \end{aligned} \tag{4.1.19}$$

dır. Bu denklemin bileşenlerini hesaplayabilmek için (4.1.14) denklemleri göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u_\mu}\Gamma^0_{00} &= -\frac{1}{2g^2}\frac{\partial g}{\partial u_\mu}\frac{\partial g}{\partial u_0}+\frac{1}{2g}\frac{\partial^2 g}{\partial u_\mu \partial u_0}-\frac{1}{2g^2}\sum_{\nu=1}^{k}\left(\zeta_\nu+\sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{\nu\mu}u_\mu\right)\frac{\partial g}{\partial u_\mu}\frac{\partial g}{\partial u_\nu}+\frac{1}{2g}\sum_{\nu=1}^{k}\alpha_{\nu\mu}\frac{\partial g}{\partial u_\nu} \\ &\quad +\frac{1}{2g}\sum_{\nu=1}^{k}\left(\zeta_\nu+\sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{\nu\mu}u_\mu\right)\frac{\partial^2 g}{\partial u_\mu \partial u_\nu} \ , \end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial u_0}\Gamma^0_{\mu 0} = -\frac{1}{2g^2}\frac{\partial g}{\partial u_0}\frac{\partial g}{\partial u_\mu}+\frac{1}{2g}\frac{\partial^2 g}{\partial u_0 \partial u_\mu} \ ,$$

$$\sum_{s=1}^{k}\Gamma_{\mu 0}^{s}\Gamma_{0s}^{0}=-\frac{1}{4g^2}\sum_{s=1}^{k}\left(\zeta_s+\sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{s\mu}u_\mu\right)\frac{\partial g}{\partial u_s}\frac{\partial g}{\partial u_\mu}+\frac{1}{2g}\sum_{s=1}^{k}\alpha_{s\mu}\frac{\partial g}{\partial u_s}\quad ,$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial u_\mu}\Gamma_{00}^{r}=&\frac{1}{2g^2}\left(\zeta_r+\sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{r\mu}u_\mu\right)\frac{\partial g}{\partial u_\mu}\frac{\partial g}{\partial u_0}-\frac{1}{2g}\alpha_{r\mu}\frac{\partial g}{\partial u_0}-\frac{1}{2g}\left(\zeta_r+\sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{r\mu}u_\mu\right)\frac{\partial^2 g}{\partial u_\mu\partial u_0}\\&+\frac{1}{2g^2}\left(\zeta_r+\sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{r\mu}u_\mu\right)\sum_{\nu=1}^{k}\left(\zeta_\nu+\sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{\nu\mu}u_\mu\right)\frac{\partial g}{\partial u_\mu}\frac{\partial g}{\partial u_\nu}-\frac{1}{2g}\alpha_{r\mu}\sum_{\nu=1}^{k}\left(\zeta_\nu+\sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{\nu\mu}u_\mu\right)\frac{\partial g}{\partial u_\nu}\\&-\frac{1}{2g}\left(\zeta_r+\sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{r\mu}u_\mu\right)\sum_{\nu=1}^{k}\alpha_{\nu\mu}\frac{\partial g}{\partial u_\nu}-\frac{1}{2g}\left(\zeta_r+\sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{r\mu}u_\mu\right)\sum_{\nu=1}^{k}\left(\zeta_\nu+\sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{\nu\mu}u_\mu\right)\frac{\partial^2 g}{\partial u_\mu\partial u_\nu}\\&+\dot{\alpha}_{r\mu}+\sum_{\nu=1}^{k}\alpha_{\nu\mu}\alpha_{r\nu}-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial u_r\partial u_\mu}\quad ,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial u_0}\Gamma_{\mu 0}^{r}=&\frac{1}{2g^2}\left(\zeta_r+\sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{r\mu}u_\mu\right)\frac{\partial g}{\partial u_\mu}\frac{\partial g}{\partial u_0}-\frac{1}{2g}\left(\dot{\zeta}_r+\sum_{\mu=1}^{k}\dot{\alpha}_{r\mu}u_\mu\right)\frac{\partial g}{\partial u_\mu}\\&-\frac{1}{2g}\left(\zeta_r+\sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{r\mu}u_\mu\right)\frac{\partial^2 g}{\partial u_\mu\partial u_0}+\dot{\alpha}_{r\mu}\quad ,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{\mu 0}^{0}\Gamma_{00}^{r}=&-\frac{1}{4g^2}\left(\zeta_r+\sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{r\mu}u_\mu\right)\frac{\partial g}{\partial u_0}\frac{\partial g}{\partial u_\mu}-\frac{1}{4g^2}\left(\zeta_r+\sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{r\mu}u_\mu\right)\sum_{\nu=1}^{k}\left(\zeta_\nu+\sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{\nu\mu}u_\mu\right)\frac{\partial g}{\partial u_\nu}\frac{\partial g}{\partial u_\mu}\\&+\frac{1}{2g}\left(\dot{\zeta}_r+\sum_{\mu=1}^{k}\dot{\alpha}_{r\mu}u_\mu\right)\frac{\partial g}{\partial u_\mu}+\frac{1}{2g}\sum_{\nu=1}^{k}\left(\zeta_\nu+\sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{\nu\mu}u_\mu\right)\alpha_{r\nu}\frac{\partial g}{\partial u_\mu}-\frac{1}{4g}\frac{\partial g}{\partial u_r}\frac{\partial g}{\partial u_\mu}\quad ,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{00}^{0}\Gamma_{\mu 0}^{r}=&-\frac{1}{4g^2}\left(\zeta_r+\sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{r\mu}u_\mu\right)\frac{\partial g}{\partial u_0}\frac{\partial g}{\partial u_\mu}-\frac{1}{4g^2}\left(\zeta_r+\sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{r\mu}u_\mu\right)\sum_{\nu=1}^{k}\left(\zeta_\nu+\sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{\nu\mu}u_\mu\right)\frac{\partial g}{\partial u_\nu}\frac{\partial g}{\partial u_\mu}\\&+\frac{1}{2g}\alpha_{r\mu}\frac{\partial g}{\partial u_0}+\frac{1}{2g}\sum_{\nu=1}^{k}\left(\zeta_\nu+\sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{\nu\mu}u_\mu\right)\alpha_{r\mu}\frac{\partial g}{\partial u_\nu}\quad ,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{s=1}^{k}\Gamma_{\mu 0}^{s}\Gamma_{0s}^{r}=&\frac{1}{4g^2}\left(\zeta_r+\sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{r\mu}u_\mu\right)\sum_{s=1}^{k}\left(\zeta_s+\sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{s\mu}u_\mu\right)\frac{\partial g}{\partial u_s}\frac{\partial g}{\partial u_\mu}+\sum_{s=1}^{k}\alpha_{rs}\alpha_{s\mu}\\&-\frac{1}{2g}\sum_{s=1}^{k}\left(\zeta_s+\sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{s\mu}u_\mu\right)\alpha_{rs}\frac{\partial g}{\partial u_\mu}-\frac{1}{2g}\left(\zeta_r+\sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{r\mu}u_\mu\right)\sum_{s=1}^{k}\alpha_{s\mu}\frac{\partial g}{\partial u_s}\end{aligned}$$

denklemleri elde edilir. Elde edilen son denklemler ile (4.1.6) denklemleri, (4.1.19) denkleminde yerine yazılırsa

$$
\begin{aligned}
R_{\nu 0\mu 0} = &\left(\zeta_\nu + \sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{\nu\mu}u_\mu\right)\Bigg[-\frac{1}{2g^2}\frac{\partial g}{\partial u_\mu}\frac{\partial g}{\partial u_0} + \frac{1}{2g}\frac{\partial^2 g}{\partial u_\mu \partial u_0} - \frac{1}{2g^2}\sum_{\nu=1}^{k}\left(\zeta_\nu + \sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{\nu\mu}u_\mu\right)\frac{\partial g}{\partial u_\mu}\frac{\partial g}{\partial u_\nu} \\
&+\frac{1}{2g}\sum_{\nu=1}^{k}\alpha_{\nu\mu}\frac{\partial g}{\partial u_\nu} + \frac{1}{2g}\sum_{\nu=1}^{k}\left(\zeta_\nu + \sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{\nu\mu}u_\mu\right)\frac{\partial^2 g}{\partial u_\mu \partial u_\nu} + \frac{1}{2g^2}\frac{\partial g}{\partial u_0}\frac{\partial g}{\partial u_\mu} - \frac{1}{2g}\frac{\partial^2 g}{\partial u_0 \partial u_\mu} \\
&+\frac{1}{4g^2}\sum_{s=1}^{k}\left(\zeta_s + \sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{s\mu}u_\mu\right)\frac{\partial g}{\partial u_s}\frac{\partial g}{\partial u_\mu} - \frac{1}{2g}\sum_{s=1}^{k}\alpha_{s\mu}\frac{\partial g}{\partial u_s}\Bigg] \\
&+\sum_{r=1}^{k}\delta_{r\nu}\Bigg[\frac{1}{2g^2}\left(\zeta_r + \sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{r\mu}u_\mu\right)\frac{\partial g}{\partial u_\mu}\frac{\partial g}{\partial u_0} - \frac{1}{2g}\alpha_{r\mu}\frac{\partial g}{\partial u_0} - \frac{1}{2g}\left(\zeta_r + \sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{r\mu}u_\mu\right)\frac{\partial^2 g}{\partial u_\mu \partial u_0} \\
&+\frac{1}{2g^2}\left(\zeta_r + \sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{r\mu}u_\mu\right)\sum_{\nu=1}^{k}\left(\zeta_\nu + \sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{\nu\mu}u_\mu\right)\frac{\partial g}{\partial u_\mu}\frac{\partial g}{\partial u_\nu} - \frac{1}{2g}\sum_{\nu=1}^{k}\left(\zeta_\nu + \sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{\nu\mu}u_\mu\right)\alpha_{r\mu}\frac{\partial g}{\partial u_\nu} \\
&-\frac{1}{2g}\left(\zeta_r + \sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{r\mu}u_\mu\right)\sum_{\nu=1}^{k}\alpha_{\nu\mu}\frac{\partial g}{\partial u_\nu} - \frac{1}{2g}\left(\zeta_r + \sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{r\mu}u_\mu\right)\sum_{\nu=1}^{k}\left(\zeta_\nu + \sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{\nu\mu}u_\mu\right)\frac{\partial^2 g}{\partial u_\mu \partial u_\nu} \\
&+\dot{\alpha}_{r\mu} + \sum_{\nu=1}^{k}\alpha_{\nu\mu}\alpha_{r\nu} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial u_r \partial u_\mu} - \frac{1}{2g^2}\left(\zeta_r + \sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{r\mu}u_\mu\right)\frac{\partial g}{\partial u_\mu}\frac{\partial g}{\partial u_0} + \frac{1}{2g}\left(\dot{\zeta}_r + \sum_{\mu=1}^{k}\dot{\alpha}_{r\mu}u_\mu\right)\frac{\partial g}{\partial u_\mu} \\
&+\frac{1}{2g}\left(\zeta_r + \sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{r\mu}u_\mu\right)\frac{\partial^2 g}{\partial u_\mu \partial u_0} - \dot{\alpha}_{r\mu} + \frac{1}{4g^2}\left(\zeta_r + \sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{r\mu}u_\mu\right)\frac{\partial g}{\partial u_0}\frac{\partial g}{\partial u_\mu} \\
&+\frac{1}{4g^2}\left(\zeta_r + \sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{r\mu}u_\mu\right)\sum_{\nu=1}^{k}\left(\zeta_\nu + \sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{\nu\mu}u_\mu\right)\frac{\partial g}{\partial u_\nu}\frac{\partial g}{\partial u_\mu} - \frac{1}{2g}\left(\dot{\zeta}_r + \sum_{\mu=1}^{k}\dot{\alpha}_{r\mu}u_\mu\right)\frac{\partial g}{\partial u_\mu} \\
&-\frac{1}{2g}\sum_{\nu=1}^{k}\left(\zeta_\nu + \sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{\nu\mu}u_\mu\right)\alpha_{r\nu}\frac{\partial g}{\partial u_\mu} + \frac{1}{4g}\frac{\partial g}{\partial u_r}\frac{\partial g}{\partial u_\mu} - \frac{1}{4g^2}\left(\zeta_r + \sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{r\mu}u_\mu\right)\frac{\partial g}{\partial u_\mu}\frac{\partial g}{\partial u_0} \\
&-\frac{1}{4g^2}\left(\zeta_r + \sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{r\mu}u_\mu\right)\sum_{\nu=1}^{k}\left(\zeta_\nu + \sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{\nu\mu}u_\mu\right)\frac{\partial g}{\partial u_\nu}\frac{\partial g}{\partial u_\mu} + \frac{1}{2g}\alpha_{r\mu}\frac{\partial g}{\partial u_0} \\
&+\frac{1}{2g}\sum_{\nu=1}^{k}\left(\zeta_\nu + \sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{\nu\mu}u_\mu\right)\alpha_{r\mu}\frac{\partial g}{\partial u_\nu} - \frac{1}{4g^2}\left(\zeta_r + \sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{r\mu}u_\mu\right)\sum_{s=1}^{k}\left(\zeta_s + \sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{s\mu}u_\mu\right)\frac{\partial g}{\partial u_s}\frac{\partial g}{\partial u_\mu} \\
&-\sum_{s=1}^{k}\alpha_{rs}\alpha_{s\mu} + \frac{1}{2g}\sum_{s=1}^{k}\left(\zeta_s + \sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{s\mu}u_\mu\right)\alpha_{rs}\frac{\partial g}{\partial u_\mu} + \frac{1}{2g}\left(\zeta_r + \sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{r\mu}u_\mu\right)\sum_{s=1}^{k}\alpha_{s\mu}\frac{\partial g}{\partial u_s}\Bigg]
\end{aligned}
$$

bulunur. Gerekli sadeleştirmeler yapılır ve $\delta_{r\nu} = \begin{cases} 0, & r \neq \nu \\ 1, & r = \nu \end{cases}$ olduğu göz önüne alınırsa

$$
\begin{aligned}
R_{\nu 0\mu 0} = & -\frac{1}{2g^2}\sum_{\nu=1}^{k}\left(\zeta_\nu+\sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{\nu\mu}u_\mu\right)^2\frac{\partial g}{\partial u_\mu}\frac{\partial g}{\partial u_\nu}+\frac{1}{2g}\sum_{\nu=1}^{k}\left(\zeta_\nu+\sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{\nu\mu}u_\mu\right)^2\frac{\partial^2 g}{\partial u_\mu \partial u_\nu} \\
& +\frac{1}{4g^2}\left(\zeta_\nu+\sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{\nu\mu}u_\mu\right)\sum_{s=1}^{k}\left(\zeta_s+\sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{s\mu}u_\mu\right)\frac{\partial g}{\partial u_s}\frac{\partial g}{\partial u_\mu} \\
& +\frac{1}{2g^2}\sum_{\nu=1}^{k}\left(\zeta_\nu+\sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{\nu\mu}u_\mu\right)^2\frac{\partial g}{\partial u_\mu}\frac{\partial g}{\partial u_\nu}-\frac{1}{2g}\sum_{\nu=1}^{k}\left(\zeta_\nu+\sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{\nu\mu}u_\mu\right)^2\frac{\partial^2 g}{\partial u_\mu \partial u_\nu} \\
& -\frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial u_\nu \partial u_\mu}+\frac{1}{4g}\frac{\partial g}{\partial u_\nu}\frac{\partial g}{\partial u_\mu}-\frac{1}{4g^2}\left(\zeta_\nu+\sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{\nu\mu}u_\mu\right)\sum_{s=1}^{k}\left(\zeta_s+\sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{s\mu}u_\mu\right)\frac{\partial g}{\partial u_s}\frac{\partial g}{\partial u_\mu}
\end{aligned}
$$

elde edilir. Sadeleştirmeler sonucu $R_{\nu 0\mu 0}$ eğriliği M nin birinci temel formunun matrisinin determinantı g ve g nin birinci ve ikinci mertebeden kısmi türevleri cinsinden

$$
R_{\nu 0\mu 0} = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial u_\nu \partial u_\mu}+\frac{1}{4g}\frac{\partial g}{\partial u_\nu}\frac{\partial g}{\partial u_\mu} \quad , \quad 1\leq \nu,\mu\leq k \tag{4.1.20}
$$

şeklinde bulunur.

Sonuç olarak, (4.1.17), (4.1.18) ve (4.1.20) denklemlerinden, Riemann-Christoffel eğrilik tensörü için

$$
\begin{aligned}
R_{ij00} &= 0 && , \ 0\leq i,j\leq k \\
R_{ij\nu\mu} &= 0 && , \ 0\leq i,j\leq k \ , 1\leq \nu,\mu\leq k \\
R_{\nu 0\mu 0} &= -\frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial u_\nu \partial u_\mu}+\frac{1}{4g}\frac{\partial g}{\partial u_\nu}\frac{\partial g}{\partial u_\mu} && , \ 1\leq \nu,\mu\leq k
\end{aligned} \tag{4.1.21}
$$

bağıntıları vardır.

Tanım 4.1.1. IR_1^n, $n-$boyutlu Minkowski uzayında M, $(k+1)-$boyutlu spacelike doğrultman uzaylı timelike regle yüzeyin $\xi\in T_M(\xi)$ noktasında tanjant uzayının iki boyutlu altuzayının bir bazı $\{b,c\}$ olsun. $Sp\{b,c\}$ teğet kesiti nondejenere olmak üzere

$$K_{\xi}(b,c)=\frac{\langle b,R(b,c)c\rangle}{\langle b,b\rangle\langle c,c\rangle-\langle b,c\rangle^{2}} \tag{4.1.22}$$

olarak tanımlanan $K_{\xi}(b,c)$ reel değerine M regle yüzeyinin ξ noktasındaki kesit eğriliği denir.

M nin lineer bağımsız teğet vektörleri b ve c nin koordinatları, sırasıyla, $(\beta_0,\beta_1,\ldots,\beta_k)$ ve $(\gamma_0,\gamma_1,\ldots,\gamma_k)$ olmak üzere $\xi\in T_M(\xi)$ noktasında M regle yüzeyinin kesit eğriliği, bileşenleri cinsinden

$$K_{\xi}(b,c)=\frac{\sum\limits_{i,j,r,s=0}^{k}R_{ijrs}\beta_i\beta_r\gamma_j\gamma_s}{\langle b,b\rangle\langle c,c\rangle-\langle b,c\rangle^{2}} \tag{4.1.23}$$

dır.

IR_1^n, $n-$boyutlu Minkowski uzayında M, spacelike doğrultman uzaylı timelike regle yüzeyinin dayanak eğrisi, M nin Ω merkez regle yüzeyinin de dayanak eğrisi olsun. Böylece, M nin $E_k(t)$ ye ortogonal olan n normal teğet vektörü, $\forall\xi(t,u_v)$ noktasında

$$n=\sum_{\sigma=1}^{m}u_{\sigma}\kappa_{\sigma}(t)a_{k+\sigma}(t)+\eta_{m+1}a_{k+m+1}(t) \quad , \quad (\eta_{m+1}\neq 0) \tag{4.1.24}$$

şeklinde tanımlanır, öyle ki bu normal teğet vektör alanı, $\sum\limits_{\sigma=1}^{m}(u_{\sigma}\kappa_{\sigma})^2-\eta_{m+1}^2\neq 0$ olduğundan nondejeneredir. Öyleyse, sırasıyla,

$$\langle n,n\rangle = \sum_{\sigma=1}^{m}\left(u_\sigma \kappa_\sigma\right)^2 - \eta_{m+1}^2 > 0$$

veya

$$\langle n,n\rangle = \sum_{\sigma=1}^{m}\left(u_\sigma \kappa_\sigma\right)^2 - \eta_{m+1}^2 < 0$$

iken n normal teğet vektörü spacelike veya timelike vektördür. Bu iki durumu ayrı ayrı inceleyelim.

İlk olarak kabul edelim ki n normal teğet vektörü spacelike olsun. M nin asli çatısı $\{e_1(t), e_2(t), \ldots, e_k(t)\}$ olmak üzere, $\xi \in M$ noktasında

$$\langle e_\nu, e_\nu\rangle\langle n,n\rangle - \langle e_\nu, n\rangle^2 > 0 \quad , \qquad 1 \le \nu \le k$$

olacağından M nin asli çatısına göre ν. asli teğet kesiti (e_ν, n), $1 \le \nu \le k$, spacelike düzlemdir.

(4.1.21), (4.1.23) ve (4.1.24) denklemleri göz önünde bulundurularak, $\xi \in M$ noktasında (e_ν, n), $1 \le \nu \le k$, spacelike ν. asli kesitinin eğriliği ile ilgili aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 4.1.2. IR_1^n, $n-$boyutlu Minkowski uzayında spacelike doğrultman uzaylı, merkez regle yüzeyli genelleştirilmiş timelike regle yüzey M ve M nin doğrultman uzayına ortogonal olan spacelike normal teğet vektörü n olsun. M nin $\forall \xi \in M$ noktasında (e_ν, n), $1 \le \nu \le k$, spacelike ν. asli kesitinin eğriliği

$$K_\xi(e_\nu, n) = -\frac{1}{2g}\frac{\partial^2 g}{\partial u_\nu^{\,2}} + \frac{1}{4g^2}\left(\frac{\partial g}{\partial u_\nu}\right)^2 \quad , \quad 1 \le \nu \le k \qquad (4.1.25)$$

dır.

İspat. Spacelike doğrultman uzaylı, merkez regle yüzeyli genelleştirilmiş timelike regle yüzeyi M nin (e_ν, n), $1 \le \nu \le k$, spacelike $\nu.$ asli kesitinin bazını oluşturan e_ν, $1 \le \nu \le k$, ve n nin koordinatları, sırasıyla, $(\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_\nu, \ldots, \beta_k)$ ve $(\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_\nu, \ldots, \gamma_k)$ olmak üzere, M nin teğetsel demetinin kanonik bazı (4.1.5) e göre bu koordinatların karşılıkları, sırasıyla, $(0, 0, \ldots, 1, \ldots, 0)$ ve $(1, 0, \ldots, 0, \ldots, 0)$ dır. Böylece, (3.1.23) denkleminden (e_ν, n), $1 \le \nu \le k$, spacelike $\nu.$ asli kesitinin eğriliği

$$K_\xi(e_\nu, n) = \frac{R_{\nu 0 \nu 0}}{\langle e_\nu, e_\nu \rangle \langle n, n \rangle - \langle e_\nu, n \rangle^2}$$

olur. Burada (4.1.21) ve (4.1.24) denklemleri yerlerine yazılırsa

$$K_\xi(e_\nu, n) = \frac{-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial u_\nu^2} + \frac{1}{4g}\left(\frac{\partial g}{\partial u_\nu}\right)^2}{\langle e_\nu, e_\nu \rangle \left\langle \sum_{\sigma=1}^{m} u_\sigma \kappa_\sigma a_{k+\sigma} + \eta_{m+1} a_{k+m+1}, \sum_{\sigma=1}^{m} u_\sigma \kappa_\sigma a_{k+\sigma} + \eta_{m+1} a_{k+m+1} \right\rangle - \left\langle e_\nu, \sum_{\sigma=1}^{m} u_\sigma \kappa_\sigma a_{k+\sigma} + \eta_{m+1} a_{k+m+1} \right\rangle^2}$$

olarak bulunur. Ayrıca,

$$\begin{aligned}
&\langle e_\nu, e_\nu \rangle = \langle a_{k+\sigma}, a_{k+\sigma} \rangle = 1 \quad , \quad 1 \le \nu \le k \quad , \quad 1 \le \sigma \le m \\
&\langle a_{k+m+1}, a_{k+m+1} \rangle = -1, \\
&\langle e_\nu, a_{k+\sigma} \rangle = \langle e_\nu, a_{k+m+1} \rangle = \langle a_{k+\sigma}, a_{k+m+1} \rangle = 0 \quad , \quad 1 \le \nu \le k \quad , \quad 1 \le \sigma \le m
\end{aligned}$$

eşitlikleri kullanılarak

$$K_\xi(e_\nu, n) = \frac{-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial u_\nu^2} + \frac{1}{4g}\left(\frac{\partial g}{\partial u_\nu}\right)^2}{\sum_{\sigma=1}^{m} (u_\sigma \kappa_\sigma)^2 - \eta_{m+1}^2} \quad , \qquad 1 \le \nu \le k$$

elde edilir. Elde edilen son denklem ile (4.1.6) denklemi birlikte göz önüne alınırsa ispat tamamlanır.

Şimdi kabul edelim ki, n normal teğet vektörü timelike olsun. M nin asli çatısı $\{e_1(t), e_2(t), \ldots, e_k(t)\}$ olmak üzere, $\xi \in M$ noktasında

$$\langle e_\nu, e_\nu \rangle \langle n, n \rangle - \langle e_\nu, n \rangle^2 < 0 \quad , \qquad 1 \le \nu \le k$$

olacağından M nin asli çatısına göre ν. asli teğet kesiti (e_ν, n), $1 \le \nu \le k$, timelike düzlemdir.

(4.1.21), (4.1.23) ve (4.1.24) denklemleri göz önünde bulundurularak, $\xi \in M$ noktasında (e_ν, n), $1 \le \nu \le k$, timelike ν. asli kesitinin eğriliği ile ilgili aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 4.1.3. IR_1^n, $n-$boyutlu Minkowski uzayında spacelike doğrultman uzaylı, merkez regle yüzeyli genelleştirilmiş timelike regle yüzey M ve M nin doğrultman uzayına ortogonal olan spacelike normal teğet vektörü n olsun. $\forall \xi \in M$ noktasında M nin (e_ν, n), $1 \le \nu \le k$, timelike ν. asli kesitinin eğriliği

$$K_\xi(e_\nu, n) = -\frac{1}{2g}\frac{\partial^2 g}{\partial u_\nu^{\,2}} + \frac{1}{4g^2}\left(\frac{\partial g}{\partial u_\nu}\right)^2 \quad , \quad 1 \le \nu \le k \qquad (4.1.26)$$

dır.

İspat. Spacelike doğrultman uzaylı, merkez regle yüzeyli genelleştirilmiş timelike regle yüzeyi M nin (e_ν, n), $1 \le \nu \le k$, timelike asli kesitinin bazını oluşturan e_ν, $1 \le \nu \le k$, ve n nin koordinatları, sırasıyla, $(\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_\nu, \ldots, \beta_k)$ ve $(\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_\nu, \ldots, \gamma_k)$, M nin teğetsel demetinin kanonik bazı (4.1.5) e göre $(0, 0, \ldots, 1, \ldots, 0)$ ve $(1, 0, \ldots, 0, \ldots, 0)$ dır. Böylece (e_ν, n), $1 \le \nu \le k$, timelike ν. asli kesitinin eğriliği (4.1.23) denklemine göre

$$K_{\xi}\left(e_{\nu},n\right)=\frac{R_{\nu 0\nu 0}}{\left\langle e_{\nu},e_{\nu}\right\rangle\left\langle n,n\right\rangle-\left\langle e_{\nu},n\right\rangle^{2}}$$

olur. Burada (4.1.21) ve (4.1.24) denklemleri yerine yazılırsa

$$K_{\xi}\left(e_{\nu},n\right)=\frac{-\frac{1}{2}\frac{\partial^{2}g}{\partial u_{\nu}^{2}}+\frac{1}{4g}\left(\frac{\partial g}{\partial u_{\nu}}\right)^{2}}{\left\langle e_{\nu},e_{\nu}\right\rangle\left\langle\sum_{\sigma=1}^{m}u_{\sigma}\kappa_{\sigma}a_{k+\sigma}+\eta_{m+1}a_{k+m+1},\sum_{\sigma=1}^{m}u_{\sigma}\kappa_{\sigma}a_{k+\sigma}+\eta_{m+1}a_{k+m+1}\right\rangle-\left\langle e_{\nu},\sum_{\sigma=1}^{m}u_{\sigma}\kappa_{\sigma}a_{k+\sigma}+\eta_{m+1}a_{k+m+1}\right\rangle^{2}}$$

dir. Bu son denklemde, $1\leq\nu\leq k$ ve $1\leq\sigma\leq m$, olmak üzere

$$\begin{aligned}&\left\langle e_{\nu},e_{\nu}\right\rangle=\left\langle a_{k+\sigma},a_{k+\sigma}\right\rangle=1,\\&\left\langle a_{k+m+1},a_{k+m+1}\right\rangle=-1,\\&\left\langle e_{\nu},a_{k+\sigma}\right\rangle=\left\langle e_{\nu},a_{k+m+1}\right\rangle=\left\langle a_{k+\sigma},a_{k+m+1}\right\rangle=0\end{aligned}$$

eşitlikleri kullanılarak

$$K_{\xi}\left(e_{\nu},n\right)=\frac{-\frac{1}{2}\frac{\partial^{2}g}{\partial u_{\nu}^{2}}+\frac{1}{4g}\left(\frac{\partial g}{\partial u_{\nu}}\right)^{2}}{\sum_{\sigma=1}^{m}\left(u_{\sigma}\kappa_{\sigma}\right)^{2}-\eta_{m+1}^{2}}\qquad,\qquad 1\leq\nu\leq k$$

elde edilir. (4.1.6) denkleminde verilen $g=\sum_{\sigma=1}^{m}\left(u_{\sigma}\kappa_{\sigma}\right)^{2}-\eta_{m+1}^{2}$ eşitliği göz önüne alınırsa ispat tamamlanır.

(4.1.25) ve (4.1.26) denklemleri göz önüne alınırsa aşağıdaki sonuç verilir.

Sonuç 4.1.4. IR_{1}^{n}, $n-$boyutlu Minkowski uzayında spacelike doğrultman uzaylı, merkez regle yüzeyli genelleştirilmiş timelike regle yüzey M olsun. $\forall\xi\in M$ noktasında M nin spacelike asli kesitinin ve timelike asli kesitinin eğrilikleri aynıdır.

M nin (e_ν, n) ν. asli kesiti spacelike veya timelike düzlem iken kesit eğrilikleri aynı olduğundan bundan sonra (e_ν, n), $1 \le \nu \le k$, nondejenere ν. asli kesitinin eğriliği M, spacelike doğrultman uzaylı genelleştirilmiş timelike regle yüzeyinin ν. asli kesit eğriliği olarak adlandırılacaktır.

Teorem 4.1.5. IR_1^n, $n-$boyutlu Minkowski uzayında spacelike doğrultman uzaylı, merkez regle yüzeyli genelleştirilmiş timelike regle yüzey M ve M nin nondejenere (spacelike veya timelike) normal teğet vektörü n olsun. $\forall \xi \in M$ noktasında M nin σ. asli kesit eğriliği ve $(m+\rho)$. asli kesit eğriliği, sırasıyla,

$$K_\xi(e_\sigma, n) = -\frac{(\kappa_\sigma)^2 \left[\sum_{\iota=1}^{m} (u_\iota \kappa_\iota)^2 - \eta_{m+1}^2 - (u_\sigma \kappa_\sigma)^2 \right]}{\left(\sum_{\iota=1}^{m} (u_\iota \kappa_\iota)^2 - \eta_{m+1}^2 \right)^2} \quad , \quad 1 \le \sigma \le m$$

ve

$$K_\xi(e_{m+\rho}, n) = 0 \quad , \quad 1 \le \rho \le k-m$$

dır.

İspat. (4.1.6) denkleminde verilen g nin σ ya ve $(m+\rho)$ ya göre birinci ve ikinci mertebeden kısmi türevleri

$$\frac{\partial g}{\partial u_\sigma} = 2u_\sigma \kappa_\sigma^2 \quad , \quad \frac{\partial^2 g}{\partial u_\sigma^2} = 2\kappa_\sigma^2 \quad , \quad \left(\frac{\partial g}{\partial u_\sigma} \right)^2 = 4\left(u_\sigma \kappa_\sigma^2\right)^2 \kappa_\sigma^2 \quad , \quad 1 \le \sigma \le m$$

ve

$$\frac{\partial g}{\partial u_{m+\rho}} = 0 \quad , \quad \frac{\partial^2 g}{\partial u_{m+\rho}^2} = 0 \quad , \quad \left(\frac{\partial g}{\partial u_{m+\rho}} \right)^2 = 0 \quad , \quad 1 \le \rho \le k-m$$

dır. Bu eşitlikler (4.1.25) ve (4.1.26) denklemlerinde yerine yazılırsa, $1 \le \sigma \le m$, için σ. asli kesit eğriliği

$$K_{\xi}\left(e_{\sigma},n\right)=-\frac{2\left(\kappa_{\sigma}\right)^{2}}{2\left(\sum_{\iota=1}^{m}\left(u_{\iota}\kappa_{\iota}\right)^{2}-\eta_{m+1}^{2}\right)}+\frac{4\left(u_{\sigma}\kappa_{\sigma}\right)^{2}\left(\kappa_{\sigma}\right)^{2}}{4\left(\sum_{\iota=1}^{m}\left(u_{\iota}\kappa_{\iota}\right)^{2}-\eta_{m+1}^{2}\right)^{2}}$$

dır. Gerekli sadeleştirmeler yapılırsa M nin σ. asli kesit eğriliği elde edilir. Benzer şekilde, $1\leq\rho\leq k-m$, için $\left(m+\rho\right)$. asli kesit eğriliği

$$K_{\xi}\left(e_{m+\rho},n\right)=0$$

olduğu görülür.

Böylece aşağıdaki sonuç verilir.

Sonuç 4.1.6. $IR_1^{\,n}$, $n-$boyutlu Minkowski uzayında spacelike doğrultman uzaylı, merkez regle yüzeyli genelleştirilmiş timelike regle yüzey M olsun. $\forall\xi\in M$ noktasında, $1\leq\rho\leq k-m$, olmak üzere M nin $\left(m+\rho\right)$. asli kesit eğriliği sıfırdır.

Teorem 4.1.7. $IR_1^{\,n}$, $n-$boyutlu Minkowski uzayında spacelike doğrultman uzaylı, merkez regle yüzeyli genelleştirilmiş timelike regle yüzey M ve M nin σ. asli dağılma parametresi P_{σ}, $1\leq\sigma\leq m$, olsun. $\forall\zeta\in\Omega$ merkez noktasında M nin σ. asli kesit eğriliği ve $\left(m+\rho\right)$. asli kesit eğriliği, sırasıyla,

$$K_{\zeta}\left(e_{\sigma},n\right)=\frac{1}{P_{\sigma}^{2}}\qquad,\qquad 1\leq\sigma\leq m$$

ve

$$K_{\zeta}\left(e_{m+\rho},n\right)=0\qquad,\qquad 1\leq\rho\leq k-m$$

dır.

İspat. IR_1^n de spacelike doğrultman uzaylı, merkez regle yüzeyli genelleştirilmiş timelike regle yüzey M nin, $\zeta \in \Omega$ merkez noktasında (4.1.2) de verilen $u_\sigma = 0$, $1 \le \sigma \le m$, şartı göz önüne alınarak (4.1.25) ve (4.1.26) denklemleri hesaplandığında, M nin σ. kesit eğriliği

$$K_\zeta\left(e_\sigma, n\right) = \frac{\left(-\kappa_\sigma^2\right)\left(-\eta_{m+1}^2\right)}{\left(-\eta_{m+1}^2\right)^2} \quad , \qquad 1 \le \sigma \le m$$

bulunur ve gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$$K_\zeta\left(e_\sigma, n\right) = \left(\frac{\kappa_\sigma}{\eta_{m+1}}\right)^2 \quad , \qquad 1 \le \sigma \le m$$

elde edilir. Bu son denklem ile birlikte (3.1.23) denklemi göz önüne alınırsa M nin σ. kesit eğriliği ile σ. asli dağılma parametresi arasındaki bağıntı elde edilir. Ayrıca Sonuç 4.1.6. den dolayı, M nin $\left(m+\rho\right)$. asli kesit eğriliği

$$K_\zeta\left(e_{m+\rho}, n\right) = 0 \quad , \qquad 1 \le \rho \le k-m$$

olduğu açıktır.

IR_1^n, $n-$boyutlu Minkowski uzayında spacelike doğrultman uzaylı, merkez regle yüzeyli genelleştirilmiş timelike regle yüzeyin $2-$boyutlu σ. asli ışın yüzeyi M_σ, $1 \le \sigma \le m$, olsun. M_σ nın $1-$boyutlu doğrultmanları $h_\sigma = Sp\left\{e_\sigma\right\}$, $1 \le \sigma \le m$, $E_k\left(t\right)$ içindedir, dolaysıyla, doğrultmanların her biri spacelike dır. Böylece, M nin timelike ortogonal yörüngesi boyunca h_σ doğrultmanlarının hareketiyle oluşan $m-$tane M_σ, striksiyon eğrili asli ışın yüzeyi timelike dır ve bu spacelike doğrultmanlı timelike asli ışın yüzeylerinin kesit eğriliği ile ilgili teorem aşağıdadır.

Teorem 4.1.8. IR_1^n, $n-$boyutlu Minkowski uzayında spacelike doğrultman uzaylı, merkez regle yüzeyli genelleştirilmiş timelike regle yüzey M ve M nin spacelike doğrultmanlı timelike asli ışın yüzeyi M_σ, $1 \le \sigma \le m$, olsun. $\zeta \in \Omega \subset M$, $u \in IR$ için $\zeta + ue_\sigma$ noktasında M_σ σ. asli ışın yüzeyinin kesit eğriliği

$$K_{\zeta + ue_\sigma}\left(e_\sigma, n\right) = \frac{P_\sigma^2}{\left(u^2 - P_\sigma^2\right)^2} \quad , \qquad 1 \le \sigma \le m \qquad (4.1.27)$$

dır, burada P_σ, $1 \le \sigma \le m$, M nin σ. asli dağılma parametresidir.

İspat. IR_1^n $n-$boyutlu Minkowski uzayında M nin ortogonal yörüngesi boyunca $h_\sigma = Sp\{e_\sigma\}$, $1 \le \sigma \le m$, asli ışının oluşturduğu M_σ, $1 \le \sigma \le m$, spacelike doğrultmanlı timelike asli ışın yüzeyi

$$\varphi_\sigma\left(t, u\right) = \alpha\left(t\right) + ue_\sigma\left(t\right) \quad , \qquad 1 \le \sigma \le m$$

parametrizasyonu ile verilir. M_σ nın birinci temel formunun regüler matrisinin determinantı

$$g = \left(u\kappa_\sigma\right)^2 - \eta_{m+1}^2 \quad , \qquad 1 \le \sigma \le m$$

olur. Böylece g nin birinci ve ikinci mertebeden kısmi türevleri

$$\frac{\partial g}{\partial u} = 2u\kappa_\sigma^2 \quad , \qquad \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} = 2\kappa_\sigma^2 \quad , \qquad \left(\frac{\partial g}{\partial u}\right)^2 = 4\left(u\kappa_\sigma^2\right)^2 \kappa_\sigma^2$$

dır. $h_\sigma = Sp\{e_\sigma\}$ doğrultmanı üzerinde yani $\zeta \in \Omega \subset M$, $u \in IR$ olmak üzere $\zeta + ue_\sigma$ noktasında $\left(e_\sigma, n\right)$, $1 \le \sigma \le m$, kesitinin eğriliğini bulmak için, sırasıyla, (4.1.21) denklemi yazılır, son eşitlikler yerine konulur ve gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$$
\begin{aligned}
K_{\zeta+ue_\sigma}(e_\sigma,n) &= \frac{R_{\sigma 0\sigma 0}}{\langle e_\sigma,e_\sigma\rangle\langle n,n\rangle-\langle e_\sigma,n\rangle^2} \\
&= -\frac{1}{2g}\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}+\frac{1}{4g^2}\left(\frac{\partial g}{\partial u}\right)^2 \\
&= -\frac{2(\kappa_\sigma)^2}{2\left((u\kappa_\sigma)^2-\eta_{m+1}^2\right)}+\frac{4(u\kappa_\sigma)^2(\kappa_\sigma)^2}{4\left((u\kappa_\sigma)^2-\eta_{m+1}^2\right)^2} \\
&= -\frac{(\kappa_\sigma)^2\left[(u\kappa_\sigma)^2-\eta_{m+1}^2-(u\kappa_\sigma)^2\right]}{\left((u\kappa_\sigma)^2-\eta_{m+1}^2\right)^2} \\
&= \frac{(\kappa_\sigma\eta_{m+1})^2}{(u\kappa_\sigma)^4-2(u\kappa_\sigma\eta_{m+1})^2+(\eta_{m+1})^4}
\end{aligned}
$$

elde edilir. Bu son denklemin payı ve paydası κ_σ^4 ile sadeleştirilirse

$$
K_{\zeta+ue_\sigma}(e_\sigma,n)=\frac{\left(\dfrac{\eta_{m+1}}{\kappa_\sigma}\right)^2}{u^4-2u^2\left(\dfrac{\eta_{m+1}}{\kappa_\sigma}\right)^2+\left(\dfrac{\eta_{m+1}}{\kappa_\sigma}\right)^4}
$$

bulunur. Burada (3.1.23) denklemi göz önüne alınırsa

$$
K_{\zeta+ue_\sigma}(e_\sigma,n)=\frac{P_\sigma^2}{u^4-2u^2P_\sigma^2+P_\sigma^4} \quad , \qquad 1\le\sigma\le m
$$

elde edilir. Gerekli düzenlemeler sonucu ispat tamamlanır.

IR_1^n de spacelike doğrultman uzaylı genelleştirilmiş timelike regle yüzeyin timelike ortogonal yörüngesi boyunca, spacelike asli ışınlarının hareketiyle oluşan $2-$boyutlu asli ışın yüzeylerinin (4.1.27) denklemi ile verilen kesit eğriliği, [6] da verilen IR_1^3, $3-$boyutlu Minkowski uzayında spacelike doğrultmalı timelike ışın yüzeylerinin Gauss eğriliği ile dağılma parametresi arasındaki bağıntı olan **Lorentzian Lamarle formülünün genelleştirilmişidir**.

Şimdi M, merkez regle yüzeyli genelleştirilmiş timelike regle yüzeyin spacelike doğrultman uzayı $E_k(t)$ içinde bir birim vektör e ve M nin $E_k(t)$ ye ortogonal olan nondejenere normal tanjant vektörü n olmak üzere (e,n) nondejenere kesitinin eğriliğini bulalım. Burada n normal teğet vektörü, sırasıyla, spacelike veya timelike iken

$$\langle e,e\rangle\langle n,n\rangle-\langle e,n\rangle^2=1>0$$

veya

$$\langle e,e\rangle\langle n,n\rangle-\langle e,n\rangle^2=-1<0$$

dır. Bu ifade eder ki (e,n) teğet kesiti spacelike veya timelike düzlemdir. (e,n) teğet kesiti spacelike veya timelike olması durumlarında işlemler yapılarak (e,n) spacelike ve timelike kesitinin eğriliği aynı olduğu görülür. Böylece, (e,n) spacelike veya (e,n) timelike kesiti yerine kısaca (e,n) nondejenere kesitinin eğriliği ile ilgili aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 4.1.9. IR_1^n, $n-$boyutlu Minkowski uzayında spacelike doğrultman uzaylı, merkez regle yüzeyli genelleştirilmiş timelike regle yüzey M ve M nin doğrultman uzayı $E_k(t)$ içinde bir birim vektör e olsun. M nin $E_k(t)$ ye ortogonal olan nondejenere normal tanjant vektörü n olmak üzere, $\zeta\in\Omega\subset M$ noktasında (e,n) nondejenere kesitinin eğriliği ile asli kesit eğrilikleri arasında

$$K_\zeta(e,n)=\sum_{\sigma=1}^{m}\cos^2\theta_\sigma K_\zeta(e_\sigma,n) \tag{4.1.28}$$

bağıntısı vardır, burada (e,n) nondejenere düzleminde e birim vektörü ile $e_1,e_2,\ldots,e_k$ baz vektörleri arasındaki açılar $\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_k$ olmak üzere

$$e=\sum_{\nu=1}^{k}\cos\theta_{\nu}e_{\nu} \quad , \quad \sum_{\nu=1}^{k}\cos^2\theta_{\nu}=1 \tag{4.1.29}$$

dır.

İspat. M , Ω merkez regle yüzeyli genelleştirilmiş timelike regle yüzeyin spacelike doğrultman uzayı $E_k(t)$ içinde $e=\sum_{\nu=1}^{k}\beta_{\nu}e_{\nu}$ vektörü bir birim vektör olduğundan

$$\beta_1^2+\beta_2^2+\ldots+\beta_k^2=1$$

dir, yani

$$\beta_{\nu}^2\leq 1 \quad , \quad 1\leq\nu\leq k$$

dir. Böylece (e,e_{ν}), $1\leq\nu\leq k$, nondejenere düzlemi

$$\langle e,e\rangle\langle e_{\nu},e_{\nu}\rangle-\langle e,e_{\nu}\rangle^2=1-\beta_{\nu}^2>0$$

olacağından spacelike dır. Teorem 2.1.17.den (e,e_{ν}), $1\leq\nu\leq k$, spacelike düzlemde e spacelike birim vektörü ile e_{ν}, $1\leq\nu\leq k$, spacelike baz vektörleri arasındaki açılar θ_{ν}, $1\leq\nu\leq k$, olmak üzere

$$\beta_{\nu}=\langle e,e_{\nu}\rangle=\cos\theta_{\nu} \quad , \quad 1\leq\nu\leq k$$

dır. Buradan e birim vektörü

$$e=\sum_{\nu=1}^{k}\cos\theta_{\nu}e_{\nu} \quad , \quad \sum_{\nu=1}^{k}\cos^2\theta_{\nu}=1$$

olarak yazılır. M, timelike regle yüzeyin teğetsel demetin kanonik bazı (4.1.5) e göre (e,n) nondejenere kesitinin bazını oluşturan e spacelike vektörü ve n

nondejenere normal teğet vektörünün koordinatları, sırasıyla, $(\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_k)$ ve $(\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_k)$ olmak üzere (4.1.24) ve (4.1.29) denklemlerinden

$$\beta_0 = \langle e, e_0 \rangle = 0 \quad , \quad \beta_\nu = \langle e, e_\nu \rangle = \cos\theta_\nu \quad , \quad 1 \le \nu \le k$$

ve

$$\gamma_0 = \langle n, e_0 \rangle = 1 \quad , \quad \gamma_\nu = \langle n, e_\nu \rangle = 0 \qquad , \quad 1 \le \nu \le k$$

bulunur. Bu eşitlikler $\zeta \in \Omega$ merkez noktasında (4.1.23) denkleminde yerine yazılırsa

$$K_\zeta(e,n) = \frac{\sum_{\sigma=1}^{m} \cos^2\theta_\sigma R_{\sigma 0 \sigma 0}}{\langle e,e \rangle \langle n,n \rangle - \langle e,n \rangle^2} \quad , \qquad 1 \le \sigma \le m$$

elde edilir. Böylece (e,n) nondejenere kesitinin eğriliği

$$K_\zeta(e,n) = \frac{\cos^2\theta_1 R_{1010} + \cos^2\theta_2 R_{2020} + \ldots + \cos^2\theta_m R_{m0m0}}{g}$$

olarak elde edilir. (4.1.21) denkleminde ki eşitlikler göz önünde bulundurulursa

$$K_\zeta(e,n) = \sum_{\sigma=1}^{m} \cos^2\theta_\sigma \left[-\frac{1}{2g}\frac{\partial^2 g}{\partial u_\sigma^{\,2}} + \frac{1}{4g^2}\left(\frac{\partial g}{\partial u_\sigma}\right)^2 \right]$$

bulunur. $\forall \zeta \in \Omega$ noktasında (e_σ, n), $1 \le \sigma \le m$, nondejenere asli kesitinin (4.1.25) ve (4.1.26) denklemleri ile verilen eğrilik formülü göz önüne alınırsa, M spacelike doğrultman uzaylı genelleştirilmiş timelike regle yüzeyin (e,n) nondejenere kesitinin eğriliği ile asli kesit eğrilikleri arasında

$$K_{\zeta}\left(e,n\right)=\sum_{\sigma=1}^{m}\cos^{2}\theta_{\sigma}K_{\zeta}\left(e_{\sigma},n\right)$$

bağıntısı vardır. Bu bağıntı M spacelike doğrultman uzaylı, merkez regle yüzeyli genelleştirilmiş timelike regle yüzeyin $\zeta\in\Omega$ merkez noktasında **Lorentzian Beltrami-Euler formülü** olarak adlandırıldı.

Ayrıca, merkez olmayan herhangi $\xi\in M$ noktasında $\left(e,n\right)$ nondejenere kesitinin eğriliği

$$K_{\xi}\left(e,n\right)=\sum_{\sigma=1}^{m}\cos^{2}\theta_{\sigma}\left[-\frac{1}{2g}\frac{\partial^{2}g}{\partial u_{\sigma}^{2}}+\frac{1}{4g^{2}}\left(\frac{\partial g}{\partial u_{\sigma}}\right)^{2}\right]$$

dir. Burada M nin birinci temel formunun matrisinin determinantı g ve g nin birinci ve ikinci mertebeden kısmi türevleri yerine konulursa $\left(e,n\right)$ nondejenere kesitinin eğriliği

$$K_{\xi}\left(e,n\right)=-\frac{\sum_{\sigma=1}^{m}\left(\cos\theta_{\sigma}\kappa_{\sigma}\right)^{2}}{\sum_{\iota=1}^{m}\left(u_{\iota}\kappa_{\iota}\right)^{2}-\eta_{m+1}^{2}}+\frac{\sum_{\sigma,\iota=1}^{m}\left(\kappa_{\sigma}\kappa_{\iota}\right)^{2}\cos\theta_{\sigma}\cos\theta_{\iota}u_{\sigma}u_{\iota}}{\left(\sum_{\iota=1}^{m}\left(u_{\iota}\kappa_{\iota}\right)^{2}-\eta_{m+1}^{2}\right)^{2}}$$

olarak elde edilir. Bu denklemden açıktır ki merkez olmayan bir noktada Lorentzian Beltrami-Euler formülünden bahsedilemez.

Teorem 4.1.10. IR_{1}^{n}, $n-$boyutlu Minkowski uzayında $\zeta\in\Omega$ merkez noktasında spacelike doğrultmanı $h_{\zeta}\left(e\right)\subset E_{k}\left(t\right)$ olan $2-$boyutlu timelike regle yüzey M ve M nin dağılma parametresi P olsun. $\zeta\in\Omega$ merkez noktasında M nin $\left(e,n\right)$ nondejenere (spacelike veya timelike) kesitinin eğriliği

$$K_{\zeta}\left(e,n\right)=\frac{1}{P^{2}}\tag{4.1.30}$$

dir.

İspat. M, IR_1^n de spacelike doğrultmanı $h_\zeta(e) \subset E_k(t)$ olan $2-$boyutlu regle yüzeyi parametrik olarak

$$\varphi(t,u) = \alpha(t) + ue(t)$$

ile verilir. $\zeta \in \Omega$ merkez noktasında $u_\sigma = 0$, $1 \le \sigma \le m$, olduğu göz önüne alınır ve (4.1.28) denklemi hesap edilirse, (e,n) spacelike kesitinin eğriliği

$$K_\zeta(e,n) = \sum_{\sigma=1}^{m} \cos^2\theta_\sigma \left[\frac{\left(-\kappa_\sigma^2\right)\left(-\eta_{m+1}^2\right)}{\left(-\eta_{m+1}^2\right)^2} \right]$$

bulunur. Gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$$K_\zeta(e,n) = \frac{\sum_{\sigma=1}^{m} \cos^2\theta_\sigma \kappa_\sigma^2}{\eta_{m+1}^2} \tag{4.1.31}$$

elde edilir. Ayrıca, (e,n) nondejenere düzleminde e, spacelike birim vektörü ile $e_1, e_2, \ldots, e_k$ baz vektörleri arasındaki açılar $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k$ olmak üzere

$$e = \sum_{\nu=1}^{k} \cos\theta_\nu e_\nu$$

dir. Böylece, e spacelike birim vektörünün teğet vektörü

$$\dot{e} = \sum_{\nu=1}^{k} \cos\theta_\nu \dot{e}_\nu$$

dır. Ayrıca $A(t) = Sp\left\{e_1, \ldots, e_k, \dot{e}_1, \ldots, \dot{e}_k\right\}$ asimptotik demetinin $\left\{e_1, \ldots, e_k, \overset{\circ}{e}_1, \ldots, \overset{\circ}{e}_m\right\}$ olacak şekilde bir ortogonal bazı olduğundan, Teorem 3.1.8. göz önüne alınarak

$$
\begin{aligned}
\overset{\circ}{e} &= \dot{e} - \sum_{\mu=1}^{k} \left\langle \dot{e}, e_\mu \right\rangle e_\mu \\
&= \sum_{\nu=1}^{k} \cos\theta_\nu \, \dot{e}_\nu - \sum_{\mu=1}^{k} \left\langle \sum_{\nu=1}^{k} \cos\theta_\nu \, \dot{e}_\nu, e_\mu \right\rangle e_\mu \\
&= \sum_{\nu=1}^{k} \cos\theta_\nu \left(\dot{e}_\nu - \sum_{\mu=1}^{k} \left\langle \dot{e}_\nu, e_\mu \right\rangle e_\mu \right)
\end{aligned}
$$

bulunur. O halde

$$\overset{\circ}{e} = \sum_{\sigma=1}^{m} \cos\theta_\sigma \, \overset{\circ}{e}_\sigma$$

olduğundan

$$\left\| \overset{\circ}{e} \right\|^2 = \sum_{\sigma=1}^{m} \cos^2\theta_\sigma \left\| \overset{\circ}{e}_\sigma \right\|^2$$

dır. Ayrıca, $\left\| \overset{\circ}{e} \right\| = \kappa$ ve $\left\| \overset{\circ}{e}_\sigma \right\| = \kappa_\sigma$, $1 \le \sigma \le m$, olduğu göz önüne alınırsa

$$\kappa^2 = \sum_{\sigma=1}^{m} \cos^2\theta_\sigma \kappa_\sigma^2$$

elde edilir. Bu son denklem (4.1.31) de yerine yazılırsa

$$K_\zeta(e,n) = \left(\frac{\kappa}{\eta_{m+1}} \right)^2$$

bulunur. M nin dağılma parametresi $P=\dfrac{\eta_{m+1}}{\kappa}$ olduğu göz önüne alınırsa

$$K_\zeta\left(e,n\right)=\frac{1}{P^2}$$

elde edilir. Bu bağıntı $\zeta\in\Omega$ merkez noktasında spacelike doğrultmanlı $2-$boyutlu timelike yüzeyin $\left(e,n\right)$ nondejenere kesitinin eğriliği için **Lorentzian Lamarle formülü** olarak adlandırıldı.

IR_1^n, $n-$boyutlu Minkowski uzayında M nin ortogonal timelike yörüngesi boyunca $h_\zeta\left(e\right)\subset E_k\left(t\right)$, spacelike doğrultmanın hareketiyle oluşan $2-$boyutlu timelike yüzeyin kesit eğriliği, IR_1^3, $3-$boyutlu Minkowski uzayında spacelike doğrultmalı $2-$boyutlu timelike yüzeylerin Gauss eğriliğine dejenere olur.

IR_1^n, $n-$boyutlu Minkowski uzayında spacelike doğrultman uzaylı genelleştirilmiş timelike regle yüzeyi M nin merkez regle yüzeyi Ω ve spacelike doğrultman uzayı $E_k\left(t\right)=Sp\left\{e_1\left(t\right),\ldots,e_k\left(t\right)\right\}$ olmak üzere e_σ, $1\le\sigma\le m$, ile lineer bağımsız herhangi a birim vektörü verilmiş olsun. Böylece, $\forall\zeta\in\Omega\subset M$ merkez noktasında herhangi bir a birim vektörü

$$a=\lambda_0\frac{n}{\|n\|}+\lambda_1e_1+\lambda_2e_2+\ldots+\lambda_ke_k\qquad,\qquad\|a\|=1\qquad(4.1.32)$$

olarak yazılır, öyle ki a birim vektörünün spacelike veya timelike olması n normal teğet vektörüne bağlıdır. Bu iki durumu ayrı ayrı inceleyelim.

(a) n normal teğet vektörü spacelike olsun.

IR_1^n, $n-$boyutlu Minkowski uzayında spacelike doğrultman uzaylı genelleştirilmiş timelike regle yüzeyi M nin $E_k\left(t\right)$ ye ortogonal olan spacelike normal teğet vektörü n olmak üzere (4.1.32) denkleminden

$$\langle a,a\rangle = \lambda_0^2+\lambda_1^2+\lambda_2^2+\ldots+\lambda_k^2 = 1>0$$

olur ve buradan a birim vektörü spacelike dır. (2.1.2) denklemi göz önüne alınırsa $\forall\zeta\in\Omega\subset M$ merkez noktasında a birim vektörü

$$a=\cos\psi_0\frac{n}{\|n\|}+\sum_{\nu=1}^{k}\cos\psi_\nu e_\nu \quad , \quad \cos^2\psi_0+\sum_{\nu=1}^{k}\cos^2\psi_\nu=1 \qquad (4.1.33)$$

olarak yazılır, burada $\psi_0,\psi_1,\psi_2,\ldots,\psi_k$ açıları sırasıyla, a spacelike birim vektörü ile $n,e_1,e_2,\ldots,e_k$ vektörleri arasındaki açılardır ve (e_σ,n) timelike düzlemdir.

(b) n normal teğet vektörü timelike olsun.

IR_1^n, $n-$boyutlu Minkowski uzayında spacelike doğrultman uzaylı genelleştirilmiş timelike regle yüzeyi M nin $E_k(t)$ ye ortogonal olan timelike normal teğet vektörü n olmak üzere (4.1.32) denkleminden

$$\langle a,a\rangle = -\lambda_0^2+\lambda_1^2+\lambda_2^2+\ldots+\lambda_k^2 = \pm 1$$

olacağından, a birim vektörü spacelike veya timelike dır. Bu iki durumda kendi arasında ikiye ayrılır. Şimdi iki durumu ayrı ayrı inceleyelim.

(b1) n normal teğet vektörü timelike ve a birim vektörü spacelike olsun.

(2.1.3) ve (2.1.4) denklemleri göz önüne alınarak $\forall\zeta\in\Omega\subset M$ merkez noktasında herhangi a spacelike birim vektörü,

$$a=\sinh\psi_0\frac{n}{\|n\|}+\sum_{\nu=1}^{k}\cosh\psi_\nu e_\nu \quad , \quad -\sinh^2\psi_0+\sum_{\nu=1}^{k}\cosh^2\psi_\nu=1 \qquad (4.1.34)$$

olarak yazılır, burada $\psi_0,\psi_1,\psi_2,\ldots,\psi_k$, sırasıyla, a ile $n,e_1,e_2,\ldots,e_k$ arasındaki hiperbolik açılardır.

(b2) n normal teğet vektörü timelike ve a birim vektörü timelike olsun.
(2.1.1) ve (2.1.4) denklemleri göz önüne alınarak $\forall \zeta \in \Omega \subset M$ merkez noktasında herhangi a timelike birim vektörü

$$a = \cosh \psi_0 \frac{n}{\|n\|} + \sum_{\nu=1}^{k} \sinh \psi_\nu e_\nu \quad , \quad -\cosh^2 \psi_0 + \sum_{\nu=1}^{k} \sinh \psi_\nu = -1 \qquad (4.1.35)$$

olarak yazılır, burada $\psi_0, \psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_k$ açıları, sırasıyla, a timelike vektörü ile $n, e_1, e_2, \ldots, e_k$ vektörleri arasındaki hiperbolik açılardır.

Şimdi, sırasıyla, (a), (b1) ve (b2) durumları göz önüne alınırsa $\left(e_\sigma, a\right)$, $1 \le \sigma \le m$, kesitinin eğriliği ile $\left(e_\sigma, n\right)$, $1 \le \sigma \le m$, σ. asli kesitinin eğriliği arasındaki bağıntı ile ilgili aşağıdaki üç teorem verilebilir.

Teorem 4.1.11. $IR_1^{\,n}$, $n-$boyutlu Minkowski uzayında spacelike doğrultman uzaylı, merkez regle yüzeyli genelleştirilmiş timelike regle yüzey M ve M nin $E_k\left(t\right)$ ye ortogonal olan spacelike normal teğet vektörü n olsun. e_σ, $1 \le \sigma \le m$, ile lineer bağımsız herhangi a spacelike birim vektörü verildiğinde $\left(\zeta + u e_\sigma\right) \in M$ noktasında $\left(e_\sigma, a\right)$ spacelike kesitinin eğriliği ile $\left(e_\sigma, n\right)$ spacelike σ. asli kesitinin eğriliği arasında

$$\left(1 - \cos^2 \psi_\sigma\right) K_{\zeta + u e_\sigma}\left(e_\sigma, a\right) = \cos^2 \psi_0 K_{\zeta + u e_\sigma}\left(e_\sigma, n\right)$$

bağıntısı vardır. Burada ki ψ_0 açısı a spacelike birim vektörü ile n spacelike normal teğet vektörü arasındaki açı, ψ_σ, $1 \le \sigma \le m$, a spacelike birim vektörü ile e_σ, $1 \le \sigma \le m$, baz vektörleri arasındaki açılardır.

İspat. (4.1.23) denklemi göz önüne alınırsa, $\left(\zeta + u e_\sigma\right) \in M$ noktasında $\left(e_\sigma, a\right)$ spacelike kesitinin eğriliği

$$K_{\zeta+ue_\sigma}\left(e_\sigma, a\right)=\frac{\beta_\sigma \beta_\sigma \lambda_0 \lambda_0 R_{\sigma 0 \sigma 0}}{\left\langle e_\sigma, e_\sigma\right\rangle\left\langle a, a\right\rangle-\left\langle e_\sigma, a\right\rangle^2} \quad , \quad 1 \leq \sigma \leq m \qquad (4.1.36)$$

olarak verilir. e_ν, $1 \leq \nu \leq k$, ve a teğet vektörlerinin koordinatları, sırasıyla, $\left(\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_k\right)$ ve $\left(\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_k\right)$ olmak üzere

$$\beta_0=\left\langle e_\nu, e_0\right\rangle=0 \quad , \quad \beta_\nu=\left\langle e_\nu, e_\nu\right\rangle=1 \quad , \quad 1 \leq \nu \leq k$$

ve

$$\gamma_0=\left\langle a, e_0\right\rangle=\frac{\cos \psi_0}{\|n\|} \quad , \quad \gamma_\nu=\left\langle a, e_\nu\right\rangle=\cos \psi_\nu \quad , \quad 1 \leq \nu \leq k$$

dır. Bu eşitlikler ile (4.1.21) ve (4.1.33) denklemleri (4.1.36) denkleminde yerine yazılırsa

$$K_{\zeta+ue_\sigma}\left(e_\sigma, a\right)=\frac{\dfrac{\cos^2 \psi_0}{\|n\|^2}\left(-\dfrac{1}{2} \dfrac{\partial^2 g}{\partial u_\sigma{}^2}+\dfrac{1}{4 g}\left(\dfrac{\partial g}{\partial u_\sigma}\right)^2\right)}{1-\cos^2 \psi_\sigma}$$

bulunur. $\|n\|^2=g$ olduğu göz önüne alınırsa

$$K_{\zeta+ue_\sigma}\left(e_\sigma, a\right)=\frac{\cos^2 \psi_0\left(-\dfrac{1}{2 g} \dfrac{\partial^2 g}{\partial u_\sigma^2}+\dfrac{1}{4 g^2}\left(\dfrac{\partial g}{\partial u_\sigma}\right)^2\right)}{1-\cos^2 \psi_\sigma}$$

elde edilir. (4.1.25) denklemi göz önüne alınırsa ispat tamamlanır.

Teorem 4.1.12. IR_1^n, $n-$boyutlu Minkowski uzayında spacelike doğrultman uzaylı, merkez regle yüzeyli genelleştirilmiş timelike regle yüzey M ve M nin $E_k\left(t\right)$ ye ortogonal olan timelike normal teğet vektörü n olsun. e_σ, $1 \leq \sigma \leq m$, ile lineer bağımsız herhangi a spacelike birim vektörü verildiğinde $\left(\zeta+ue_\sigma\right) \in M$ noktasında

$\left(e_\sigma, a\right)$ timelike kesitinin eğriliği ile $\left(e_\sigma, n\right)$ timelike σ. asli kesitinin eğriliği arasında

$$\left(1-\cosh^2\psi_\sigma\right)K_{\zeta+ue_\sigma}\left(e_\sigma, a\right)=\sinh^2\psi_0 K_{\zeta+ue_\sigma}\left(e_\sigma, n\right)$$

bağıntısı vardır. Burada ψ_0 açısı a spacelike birim vektörü ile n timelike normal teğet vektörü arasındaki açıdır ve ψ_σ, $1\leq\sigma\leq m$, a spacelike birim vektörü ile e_σ, $1\leq\sigma\leq m$, baz vektörleri arasındaki açılardır.

İspat. (4.1.23) denklemleri göz önüne alınırsa $\left(\zeta+ue_\sigma\right)\in M$ noktasında $\left(e_\sigma, a\right)$ timelike kesitinin eğriliği

$$K_{\zeta+ue_\sigma}\left(e_\sigma, a\right)=\frac{\beta_\sigma\beta_\sigma\lambda_0\lambda_0 R_{\sigma0\sigma0}}{\left\langle e_\sigma, e_\sigma\right\rangle\left\langle a, a\right\rangle-\left\langle e_\sigma, a\right\rangle^2} \quad , \quad 1\leq\sigma\leq m \tag{4.1.37}$$

olarak verilir. e_ν, $1\leq\nu\leq k$, ve a teğet vektörlerinin koordinatları, sırasıyla, $\left(\beta_0,\beta_1,\ldots,\beta_k\right)$ ve $\left(\gamma_0,\gamma_1,\ldots,\gamma_k\right)$ olmak üzere

$$\beta_0=\left\langle e_\nu, e_0\right\rangle=0 \quad , \quad \beta_\nu=\left\langle e_\nu, e_\nu\right\rangle=1 \quad , \quad 1\leq\nu\leq k$$

ve

$$\gamma_0=\left\langle a, e_0\right\rangle=\frac{\sinh\psi_0}{\|n\|} \quad , \quad \gamma_\nu=\left\langle a, e_\nu\right\rangle=\cosh\psi_\nu \quad , \quad 1\leq\nu\leq k$$

dır. Bu eşitlikler ile (4.1.21) ve (4.1.34) denklemleri (4.1.37) denkleminde yerine yazılırsa

$$K_{\zeta+ue_\sigma}\left(e_\sigma, a\right)=\frac{\dfrac{\sinh^2\psi_0}{\|n\|^2}\left(-\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 g}{\partial u_\sigma^2}+\dfrac{1}{4g}\left(\dfrac{\partial g}{\partial u_\sigma}\right)^2\right)}{1-\cosh^2\psi_\sigma}$$

bulunur. $\|n\|^2 = g$ olduğundan

$$K_{\zeta+ue_\sigma}(e_\sigma,a)=\frac{\sinh^2\psi_0\left(-\frac{1}{2g}\frac{\partial^2 g}{\partial u_\sigma^2}+\frac{1}{4g^2}\left(\frac{\partial g}{\partial u_\sigma}\right)^2\right)}{1-\cosh^2\psi_\sigma}$$

dir. (4.1.26) denklemi göz önüne alınırsa (e_σ,n) σ. timelike asli kesitinin eğriliği ile (e_σ,a) timelike kesitinin eğriliği arasındaki bağıntı elde edilir ve ispat tamamlanır.

Teorem 4.1.13. IR_1^n, $n-$boyutlu Minkowski uzayında spacelike doğrultman uzaylı, merkez regle yüzeyli genelleştirilmiş timelike regle yüzey M ve M nin $E_k(t)$ ye ortogonal olan timelike normal teğet vektörü n olsun. e_σ, $1\le\sigma\le m$, ile lineer bağımsız herhangi a timelike birim vektörü verildiğinde $(\zeta+ue_\sigma)\in M$ noktasında (e_σ,a) timelike kesitinin eğriliği ile (e_σ,n) timelike σ. asli kesitinin eğriliği arasında

$$\left(1+\sinh^2\psi_\sigma\right)K_{\zeta+ue_\sigma}(e_\sigma,a)=-\cosh^2\psi_0 K_{\zeta+ue_\sigma}(e_\sigma,n)$$

bağıntısı vardır. Burada ψ_0 açısı a timelike birim vektörü ile n timelike normal teğet vektörü arasındaki açıdır ve ψ_σ, $1\le\sigma\le m$, a timelike birim vektörü ile e_σ, $1\le\sigma\le m$, baz vektörleri arasındaki açılardır.

İspat. (4.1.23) denklemi göz önüne alınırsa, $1\le\sigma\le m$, olmak üzere $(\zeta+ue_\sigma)\in M$ noktasında (e_σ,a) timelike kesitinin eğriliği

$$K_{\zeta+ue_\sigma}(e_\sigma,a)=\frac{\beta_\sigma\beta_\sigma\lambda_0\lambda_0 R_{\sigma0\sigma0}}{\langle e_\sigma,e_\sigma\rangle\langle a,a\rangle-\langle e_\sigma,a\rangle^2}\quad,\quad 1\le\sigma\le m \tag{4.1.38}$$

olarak verilir. e_ν, $1 \le \nu \le k$, ve a teğet vektörlerinin koordinatları, sırasıyla, $(\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_k)$ ve $(\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_k)$ olmak üzere

$$\beta_0 = \langle e_\nu, e_0 \rangle = 0 \quad , \quad \beta_\nu = \langle e_\nu, e_\nu \rangle = 1 \quad , \quad 1 \le \nu \le k$$

ve

$$\gamma_0 = \langle a, e_0 \rangle = \frac{\cosh \psi_0}{\|n\|} \quad , \quad \gamma_\nu = \langle a, e_\nu \rangle = \sinh \psi_\nu \quad , \quad 1 \le \nu \le k$$

dır. Bu eşitlikler ile (4.1.21) ve (4.1.35) denklemleri (4.1.38) denkleminde yerine yazılırsa

$$K_{\zeta + u e_\sigma}(e_\sigma, a) = \frac{\dfrac{\cosh^2 \psi_0}{\|n\|^2} \left(-\dfrac{1}{2} \dfrac{\partial^2 g}{\partial u_\sigma^2} + \dfrac{1}{4g} \left(\dfrac{\partial g}{\partial u_\sigma} \right)^2 \right)}{-1 - \sinh^2 \psi_\sigma}$$

bulunur. $\|n\|^2 = g$ olduğundan

$$K_{\zeta + u e_\sigma}(e_\sigma, a) = \frac{\cosh^2 \psi_0 \left(-\dfrac{1}{2g} \dfrac{\partial^2 g}{\partial u_\sigma^2} + \dfrac{1}{4g^2} \left(\dfrac{\partial g}{\partial u_\sigma} \right)^2 \right)}{-1 - \sinh^2 \psi_\sigma}$$

dir. (4.1.26) denklemi göz önüne alınırsa ispat tamamlanır.

$\forall \zeta \in \Omega \subset M$ merkez noktasında herhangi birim vektör a ve e de $E_k(t)$ doğrultman uzayında bir birim vektör olmak üzere, sırasıyla, (a), (b1) ve (b2) durumları için M spacelike doğrultman uzaylı timelike regle yüzeyinin (e, a) kesitinin eğriliği ile ilgili aşağıdaki üç teorem verilir.

Teorem 4.1.14. IR_1^n, $n-$boyutlu Minkowski uzayında spacelike doğrultman uzaylı, merkez regle yüzeyli genelleştirilmiş timelike regle yüzey M olsun. e, $E_k(t)$ içinde bir birim vektör ve n, $E_k(t)$ ye ortogonal olan spacelike normal teğet vektör olmak üzere $\zeta \in \Omega$ merkez noktasında e ile lineer bağımsız herhangi a spacelike birim vektörü verildiğinde (e,a) nondejenere kesitinin eğriliği ile (e,n) spacelike kesitinin eğriliği arasında

$$K_\zeta(e,a) = \frac{\cos^2 \psi_0}{1-\langle e,a\rangle^2} K_\zeta(e,n)$$

bağıntısı vardır. Burada ψ_0 açısı a spacelike birim vektörü ile n spacelike normal teğet vektörü arasındaki açıdır.

İspat. (4.1.21) ve (4.1.23) denklemleri göz önüne alınırsa $\zeta \in \Omega$ merkez noktasında (e,a) spacelike kesitinin eğriliği

$$K_\zeta(e,a) = \frac{\sum_{\sigma=1}^{m} \beta_\sigma \beta_\sigma \lambda_0 \lambda_0 R_{\sigma 0 \sigma 0}}{\langle e,e\rangle\langle a,a\rangle - \langle e,a\rangle^2} \tag{4.1.39}$$

dir. (4.1.29) ve (4.1.33) denklemleri ile verilen e ve a vektörlerinin koordinatları, sırasıyla, $(\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_k)$ ve $(\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_k)$ olmak üzere

$$\beta_0 = \langle e, e_0\rangle = 0 \quad , \quad \beta_\nu = \langle e, e_\nu\rangle = \cos\theta_\nu \quad , \quad 1 \le \nu \le k$$

ve

$$\gamma_0 = \langle a, e_0\rangle = \frac{\cos\psi_0}{\|n\|} \quad , \quad \gamma_\nu = \langle a, e_\nu\rangle = \cos\psi_\nu \quad , \quad 1 \le \nu \le k$$

dır. Bu son eşitlikler, (4.1.21), (4.1.29) ve (4.1.33) denklemleri (4.1.39) denkleminde yerine yazılırsa

$$K_\zeta(e,a)=\frac{\dfrac{\cos^2\psi_0}{\|n\|^2}\sum_{\sigma=1}^{m}\cos^2\theta_\sigma\left(-\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 g}{\partial u_\sigma^2}+\dfrac{1}{4g}\left(\dfrac{\partial g}{\partial u_\sigma}\right)^2\right)}{1-\langle e,a\rangle^2}$$

bulunur. Böylece $\|n\|^2=g$ olduğundan

$$K_\zeta(e,a)=\frac{\cos^2\psi_0\sum_{\sigma=1}^{m}\cos^2\theta_\sigma\left(-\dfrac{1}{2g}\dfrac{\partial^2 g}{\partial u_\sigma^2}+\dfrac{1}{4g^2}\left(\dfrac{\partial g}{\partial u_\sigma}\right)^2\right)}{1-\langle e,a\rangle^2}$$

olur. (4.1.25) denklemi göz önüne alınırsa $1\le\sigma\le m$ olmak üzere (e_σ,n) σ. spacelike asli kesitinin eğriliği ile (e,a) nondejenere kesitinin eğriliği arasında

$$K_\zeta(e,a)=\frac{\cos^2\psi_0\sum_{\sigma=1}^{m}\cos^2\theta_\sigma K_\zeta(e_\sigma,n)}{1-\langle e,a\rangle^2}$$

bağıntısı elde edilir. (4.1.28) denklemi ile verilen (e,n) spacelike kesitinin eğriliği ile (e_σ,n) σ. spacelike asli kesitinin eğriliği arasındaki Lorentzian Beltrami-Euler formülünden

$$K_\zeta(e,a)=\frac{\cos^2\psi_0}{1-\langle e,a\rangle^2}K_\zeta(e,n)$$

bağıntısı bulunur. Böylece, $\zeta\in\Omega$ merkez noktasında herhangi (e,a) nondejenere kesitinin eğriliği, lineer bağımsız e ve a vektörlerine, Lorentzian Beltrami-Euler formülüne ve $\psi_0=\sphericalangle(a,n)$ açısına dayanır. Bu bağıntı spacelike doğrultman uzaylı, merkez regle yüzeyli genelleştirilmiş timelike regle yüzeyin merkez noktasında kesit eğriliğinin **I. tip Lorentzian Beltrami-Meusnier formülü** olarak adlandırıldı.

Teorem 4.1.15. IR_1^n, $n-$boyutlu Minkowski uzayında spacelike doğrultman uzaylı, merkez regle yüzeyli genelleştirilmiş timelike regle yüzey M olsun. e, $E_k(t)$ içinde bir birim vektör ve n, M nin $E_k(t)$ ye ortogonal olan timelike normal teğet vektör olmak üzere $\zeta \in \Omega$ merkez noktasında e ile lineer bağımsız herhangi a spacelike birim vektörü verildiğinde (e,a) nondejenere kesitinin eğriliği ile (e,n) timelike kesitinin eğriliği arasında

$$K_\zeta(e,a) = \frac{\sinh^2 \psi_0}{1-\langle e,a\rangle^2} K_\zeta(e,n)$$

bağıntısı vardır. Burada ψ_0 açısı a spacelike birim vektörü ile n timelike normal teğet vektörü arasındaki hiperbolik açıdır.

İspat. (4.1.21) ve (4.1.23) denklemleri göz önüne alınırsa $\zeta \in \Omega$ merkez noktasında (e,a) timelike kesitinin eğriliği

$$K_\zeta(e,a) = \frac{\sum_{\sigma=1}^{m} \beta_\sigma \beta_\sigma \lambda_0 \lambda_0 R_{\sigma 0 \sigma 0}}{\langle e,e\rangle\langle a,a\rangle - \langle e,a\rangle^2} \tag{4.1.40}$$

olarak verilir. (4.1.29) ve (4.1.34) denklemlerinden e ve a teğet vektörlerinin koordinatları, sırasıyla, $(\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_k)$ ve $(\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_k)$ olmak üzere

$$\beta_0 = \langle e, e_0\rangle = 0 \quad , \quad \beta_\nu = \langle e, e_\nu\rangle = \cos\theta_\nu \quad , \quad 1 \le \nu \le k$$

ve

$$\gamma_0 = \langle a, e_0\rangle = \frac{\sinh\psi_0}{\|n\|} \quad , \quad \gamma_\nu = \langle a, e_\nu\rangle = \cosh\psi_\nu \quad , \quad 1 \le \nu \le k$$

dır. Bu eşitlikler ile (4.1.21), (4.1.29) ve (4.1.34) denklemleri, (4.1.40) denkleminde yerine yazılırsa

$$K_\zeta\left(e,a\right)=\frac{\frac{\sinh^2\psi_0}{\left\|n\right\|^2}\sum_{\sigma=1}^{m}\cos^2\theta_\sigma\left(-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial u_\sigma^2}+\frac{1}{4g}\left(\frac{\partial g}{\partial u_\sigma}\right)^2\right)}{1-\left\langle e,a\right\rangle^2}$$

bulunur. $\left\|n\right\|^2=g$ olduğu göz önüne alınırsa

$$K_\zeta\left(e,a\right)=\frac{\sinh^2\psi_0\sum_{\sigma=1}^{m}\cos^2\theta_\sigma\left(-\frac{1}{2g}\frac{\partial^2 g}{\partial u_\sigma^2}+\frac{1}{4g^2}\left(\frac{\partial g}{\partial u_\sigma}\right)^2\right)}{1-\left\langle e,a\right\rangle^2}$$

elde edilir. (4.1.26) denklemi göz önüne alınırsa $1\leq\sigma\leq m$ olmak üzere $\left(e_\sigma,n\right)$ σ. timelike asli kesitinin eğriliği ile$\left(e,a\right)$ timelike kesitinin eğriliği arasında

$$K_\zeta\left(e,a\right)=\frac{\sinh^2\psi_0\sum_{\sigma=1}^{m}\cos^2\theta_\sigma K_\zeta\left(e_\sigma,n\right)}{1-\left\langle e,a\right\rangle^2}$$

bağıntısı elde edilir. (4.1.28) denkleminde verilen $\left(e,n\right)$ timelike kesitinin eğriliği ile $\left(e_\sigma,n\right)$ σ. timelike asli kesitinin eğriliği arasındaki Lorentzian Beltrami-Euler formülünden

$$K_\zeta\left(e,a\right)=\frac{\sinh^2\psi_0}{1-\left\langle e,a\right\rangle^2}K_\zeta\left(e,n\right)$$

bağıntısı bulunur. Böylece, $\zeta\in\Omega$ merkez noktasında herhangi $\left(e,a\right)$ nondejenere kesitinin eğriliği, lineer bağımsız e ve a vektörlerine, Lorentzian Beltrami-Euler formülüne ve $\psi_0=\measuredangle\left(a,n\right)$ hiperbolik açısına dayanır. Bu bağıntı spacelike doğrultman uzaylı, merkez regle yüzeyli genelleştirilmiş timelike regle yüzeyin merkez noktasında kesit eğriliğinin **II. tip Lorentzian Beltrami-Meusnier formülü** olarak adlandırıldı.

Teorem 4.1.16. IR_1^n, $n-$boyutlu Minkowski uzayında spacelike doğrultman uzaylı, merkez regle yüzeyli genelleştirilmiş timelike regle yüzey M olsun. e, $E_k(t)$ içinde bir birim vektör ve n, M nin $E_k(t)$ ye ortogonal olan timelike normal teğet vektör olmak üzere $\zeta \in \Omega$ merkez noktasında e ile lineer bağımsız herhangi a timelike birim vektörü verildiğinde (e,a) timelike kesitinin eğriliği ile (e,n) timelike kesitinin eğriliği arasında

$$K_\zeta(e,a) = -\frac{\cosh^2\psi_0}{1+\langle e,a\rangle^2} K_\zeta(e,n)$$

bağıntısı vardır, burada ψ_0 açısı a timelike birim vektörü ile n timelike normal teğet vektörü arasındaki hiperbolik açıdır.

İspat. (4.1.21) ve (4.1.23) denklemleri göz önüne alınırsa $\zeta \in \Omega$ merkez noktasında (e_σ, a) timelike kesitinin eğriliği

$$K_\zeta(e,a) = \frac{\sum_{\sigma=1}^{m} \beta_\sigma \beta_\sigma \lambda_0 \lambda_0 R_{\sigma 0 \sigma 0}}{\langle e,e\rangle\langle a,a\rangle - \langle e,a\rangle^2} \tag{4.1.41}$$

dir. (4.1.29) ve (4.1.35) denklemlerinden e ve a teğet vektörlerinin koordinatları, sırasıyla, $(\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_k)$ ve $(\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_k)$ olmak üzere

$$\beta_0 = \langle e, e_0\rangle = 0 \quad , \quad \beta_\nu = \langle e, e_\nu\rangle = \cos\theta_\nu \quad , \quad 1 \le \nu \le k$$

ve

$$\gamma_0 = \langle a, e_0\rangle = \frac{\cosh\psi_0}{\|n\|} \quad , \quad \gamma_\nu = \langle a, e_\nu\rangle = \sinh\psi_\nu \quad , \quad 1 \le \nu \le k$$

dır. Bu eşitlikler ile (4.1.21), (4.1.29) ve (4.1.35) denklemleri (4.1.41) denkleminde yerine yazılırsa

$$K_\zeta(e,a)=\frac{\dfrac{\cosh^2\psi_0}{\|n\|^2}\displaystyle\sum_{\sigma=1}^{m}\cos^2\theta_\sigma\left(-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial u_\sigma^2}+\frac{1}{4g}\left(\frac{\partial g}{\partial u_\sigma}\right)^2\right)}{-1-\langle e,a\rangle^2}$$

bulunur. $\|n\|^2=g$ olduğundan

$$K_\zeta(e,a)=\frac{\sinh^2\psi_0\displaystyle\sum_{\sigma=1}^{m}\cos^2\theta_\sigma\left(-\frac{1}{2g}\frac{\partial^2 g}{\partial u_\sigma^2}+\frac{1}{4g^2}\left(\frac{\partial g}{\partial u_\sigma}\right)^2\right)}{-1-\langle e,a\rangle^2}$$

elde edilir. (4.1.26) denklemi göz önüne alınırsa $1\le\sigma\le m$ olmak üzere (e_σ,n) σ. timelike asli kesitinin eğriliği ile (e,a) timelike kesitinin eğriliği arasında

$$K_\zeta(e,a)=-\frac{\cosh^2\psi_0\displaystyle\sum_{\sigma=1}^{m}\cos^2\theta_\sigma K_\zeta(e_\sigma,n)}{1+\langle e,a\rangle^2}$$

bağıntısı bulunur. (4.1.28) denkleminde verilen (e,n) timelike kesitinin eğriliği ile (e_σ,n) σ. timelike asli kesitinin eğriliği arasındaki Lorentzian Beltrami-Euler formülünden

$$K_\zeta(e,a)=-\frac{\cosh^2\psi_0}{1+\langle e,a\rangle^2}K_\zeta(e,n)$$

bağıntısı elde edilir. Böylece, $\zeta\in\Omega$ merkez noktasında herhangi (e,a) timelike kesitinin eğriliği, lineer bağımsız e ve a vektörlerine, Beltrami-Euler formülüne ve $\psi_0=\sphericalangle(a,n)$ hiperbolik açısına dayanır. Bu bağıntı spacelike doğrultman uzaylı, merkez regle yüzeyli genelleştirilmiş timelike regle yüzeyinin merkez noktasında kesit eğriliğinin **III. tip Lorentzian Beltrami-Meusnier formülü** olarak adlandırıldı.

Örnek 4.1.17. $X=(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5), Y=(y_1,y_2,y_3,y_4,y_5)\in IR^5$ olmak üzere

$$\langle X,Y\rangle = x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3+x_4y_4-x_5y_5$$

Lorentz metriği ile verilen $5-$boyutlu Minkowski uzayı IR_1^5 olsun. IR_1^5 de κ, τ ve $\varepsilon=\sqrt{\kappa^2+\tau^2}$ keyfi sabitler olmak üzere $\alpha : I\to IR_1^5$ eğrisi

$$\alpha(t)=\frac{1}{\varepsilon}\left(2\varepsilon^2 t,\kappa\sin\varepsilon t-\kappa\cos\varepsilon t,\tau\sin\varepsilon t-\tau\cos\varepsilon t,-\varepsilon\cos\varepsilon t-\varepsilon\sinh\varepsilon t,0\right)$$

olsun. $\left\langle \dot{\alpha},\dot{\alpha}\right\rangle=-3\varepsilon^2<0$ olduğundan α timelike bir eğridir. Bu α eğrisinin her noktasında tanımlı $\{e_1(t),e_2(t)\}$ ortonormal vektör alan sistemi

$$e_1(t)=\frac{1}{\sqrt{3}\varepsilon}\left(\varepsilon,\ \kappa\cos\varepsilon t-\tau,\ \tau\cos\varepsilon t+\kappa,\ \varepsilon\sin\varepsilon t,0\right)$$
$$e_2(t)=\frac{1}{\sqrt{3}\varepsilon}\left(\varepsilon,\ \kappa\sin\varepsilon t+\tau,\ \tau\sin\varepsilon t-\kappa,\ -\varepsilon\cos\varepsilon t,0\right)$$

olarak verilsin. Bu sistem $\alpha(t)\in IR_1^5$ noktasında tanjant uzayının $2-$boyutlu bir altuzayını gerer. Bu altuzay $E_2(t)$ ile gösterilir. $\langle e_1,e_1\rangle=\langle e_2,e_2\rangle=1$, olduğundan $E_2(t)$ spacelike bir alt uzaydır. Bu takdirde, IR_1^5 de timelike dayanak eğrili, spacelike doğrultman uzaylı $3-$boyutlu timelike regle yüzey parametrik olarak

$$\varphi(t,u_1,u_2)=\alpha(t)+\sum_{v=1}^{2}u_v e_v(t)$$

ile verilir ve bu regle yüzey M ile gösterilir. M nin $E_2(t)$ doğrultman uzayının asli çatısı $\{e_1(t),e_2(t)\}$ ve teğetsel demetinin bazı $\left\{e_1(t),e_2(t),\dot{e}_1(t),\dot{e}_2(t),\dot{\alpha}(t)\right\}$ olmak üzere Gramm-Schmidth yöntemi kullanılarak

$$a_3(t) = \frac{1}{\sqrt{6\varepsilon}}\left(\varepsilon, -2\kappa\sin\varepsilon t + \tau, -2\tau\sin\varepsilon t - \kappa, 2\varepsilon\cos\varepsilon t, 0\right),$$
$$a_4(t) = \frac{1}{\sqrt{6\varepsilon}}\left(-\varepsilon, 2\kappa\cos\varepsilon t + \tau, 2\tau\cos\varepsilon t - \kappa, 2\varepsilon\sin\varepsilon t, 0\right),$$
$$a_5(t) = (0, 0, 0, 0, 1)$$

ortonormal baz vektörleri elde edilir. Böylece, M nin teğetsel demetinin $\{e_1(t), e_2(t), a_3(t), a_4(t), a_5(t)\}$ ortonormal bazı bulunur. M nin doğrultman uzayının asli çatısı $\{e_1(t), e_2(t)\}$ için türev denklemleri ve α dayanak eğrisinin hız vektörü, sırasıyla,

$$\dot{e}_1(t) = -\frac{\varepsilon}{3}\mathrm{e}_2(t) + \frac{\sqrt{2}}{3}\varepsilon a_3(t),$$
$$\dot{e}_2(t) = \frac{\varepsilon}{3}e_1(t) + \frac{\sqrt{2}}{3}\varepsilon a_4(t),$$
$$\dot{\alpha} = \sqrt{3}\varepsilon e_1 + \sqrt{3}\varepsilon e_2 + 3\varepsilon a_5$$

bulunur. Bu takdirde spacelike doğrultman uzaylı $3-$boyutlu timelike regle yüzeyin metrik katsayıları

$$g_{00} = \frac{2\sqrt{3}}{3}\varepsilon^2 u_1 - \frac{2\sqrt{3}}{3}\varepsilon^2 u_2 + \frac{\varepsilon^2}{3}u_1^2 + \frac{\varepsilon^2}{3}u_2^2 - 3\varepsilon^2$$
$$g_{10} = g_{01} = \sqrt{3}\varepsilon - \frac{\varepsilon}{3}u_2$$
$$g_{20} = g_{02} = \sqrt{3}\varepsilon + \frac{\varepsilon}{3}u_1$$
$$g_{12} = g_{21} = 0$$
$$g_{11} = g_{22} = 1$$

ve M nin birinci temel formunun regüler matrisi

$$\left[g_{ij}\right]_{3\times 3}=\begin{bmatrix} \frac{2\sqrt{3}}{3}\varepsilon^2 u_1-\frac{2\sqrt{3}}{3}\varepsilon^2 u_2+\frac{\varepsilon^2}{3}u_1^2+\frac{\varepsilon^2}{3}u_2^2-3\varepsilon^2 & \sqrt{3}\varepsilon-\frac{\varepsilon}{3}u_2 & \sqrt{3}\varepsilon+\frac{\varepsilon}{3}u_1 \\ \sqrt{3}\varepsilon-\frac{\varepsilon}{3}u_2 & 1 & 0 \\ \sqrt{3}\varepsilon+\frac{\varepsilon}{3}u_1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir. Bu regüler matrisinin determinantı

$$g=\det\left[g_{ij}\right]=\frac{2}{9}\varepsilon^2 u_1^2+\frac{2}{9}\varepsilon^2 u_2^2-9\varepsilon^2$$

olur. $\left[g_{ij}\right]$ regüler bir matris olduğundan $u_1^2+u_2^2\neq\frac{81}{2}$ dır. $3-$boyutlu timelike regle yüzeyi M nin $E_2(t)$ doğrultman uzayına ortogonal olan normal teğet vektörü $\forall\xi\in M$ noktasında

$$n=\frac{\sqrt{2}}{3}\varepsilon u_1 a_3+\frac{\sqrt{2}}{3}\varepsilon u_2 a_4+3\varepsilon a_5$$

şeklinde tanımlanır, öyle ki $\langle n,n\rangle=\frac{2}{9}\varepsilon^2\left(u_1^2+u_2^2\right)-9\varepsilon^2$ ve $u_1^2+u_2^2\neq\frac{81}{2}$ olduğundan n normal vektörü nondejenere (spacelike veya timelike) bir vektördür. Böylece Teorem 4.1.2. ve Teorem 4.1.3. den $E_2(t)$ nin asli çatısına göre M nin nondejenere 1. asli teğet kesiti (e_1,n) ve nondejenere 2. asli teğet kesiti (e_2,n) için asli kesit eğrilikleri, sırasıyla,

$$K_\xi(e_1,n)=-\frac{1}{2g}\frac{\partial^2 g}{\partial u_1^2}+\frac{1}{4g^2}\left(\frac{\partial g}{\partial u_1}\right)^2$$

ve

$$K_\xi(e_2,n)=-\frac{1}{2g}\frac{\partial^2 g}{\partial u_2^2}+\frac{1}{4g^2}\left(\frac{\partial g}{\partial u_2}\right)^2$$

dır. Burada

$$\frac{\partial g}{\partial u_1}=\frac{4}{9}\varepsilon^2 u_1 \quad , \quad \frac{\partial^2 g}{\partial u_1^2}=\frac{4}{9}\varepsilon^2 \quad , \quad \left(\frac{\partial g}{\partial u_1}\right)^2=\frac{16}{81}\varepsilon^4 u_1^2$$

ve

$$\frac{\partial g}{\partial u_2}=\frac{4}{9}\varepsilon^2 u_2 \quad , \quad \frac{\partial^2 g}{\partial u_2^2}=\frac{4}{9}\varepsilon^2 \quad , \quad \left(\frac{\partial g}{\partial u_2}\right)^2=\frac{16}{81}\varepsilon^4 u_2^2$$

olduğundan nondejenere 1. asli teğet kesiti (e_1,n) ve 2. asli teğet kesiti (e_2,n) nin kesit eğrilikleri, sırasıyla,

$$K_\xi\left(e_1,n\right)=\frac{-4u_2^2+162}{\left(2u_1^2+2u_2^2-81\right)^2}$$

ve

$$K_\xi\left(e_2,n\right)=\frac{-4u_1^2+162}{\left(2u_1^2+2u_2^2-81\right)^2}$$

bulunur. $\forall\zeta\in\Omega$ merkez noktasında $u_1=u_2=0$ göz önüne alınırsa $K_\zeta\left(e_1,n\right)$ ve $K_\zeta\left(e_2,n\right)$ asli kesit eğrilikleri, sırasıyla,

$$K_\zeta\left(e_1,n\right)=\frac{2}{81} \text{ ve } K_\zeta\left(e_2,n\right)=\frac{2}{81}$$

olarak bulunur. Aynı zamanda M nin $\forall\zeta\in\Omega$ merkez noktasında 1. ve 2. asli dağılma parametresi, sırasıyla,

$$P_1=\frac{3\varepsilon}{\frac{\sqrt{2}\varepsilon}{3}}=\frac{9}{\sqrt{2}} \text{ ve } P_2=\frac{3\varepsilon}{\frac{\sqrt{2}\varepsilon}{3}}=\frac{9}{\sqrt{2}}$$

olduğundan Teorem 4.1.7. den de aynı sonuç

$$K_{\zeta}\left(e_1,n\right)=\frac{1}{P_1^2}=\frac{2}{81} \text{ ve } K_{\zeta}\left(e_2,n\right)=\frac{1}{P_2^2}=\frac{2}{81}$$

olarak elde edilir.

Şimdi IR_1^5 de $2-$boyutlu asli ışın yüzeylerini göz önüne alalım.

$$\varphi_1\left(t,u\right)=\alpha\left(t\right)+ue_1\left(t\right)$$

parametrizasyonu ile verilen spacelike doğrultmanlı timelike asli ışın yüzeyi M_1 olsun. Teorem 4.1.8. den yani genelleştirilmiş Lorentzian Lamarle formülünden M_1 in $\zeta+ue_1$ noktasında $\left(e_1,n\right)$ nondejenere kesitinin eğriliği

$$K_{\zeta+ue_1}\left(e_1,n\right)=\frac{162}{\left(2u^2-81\right)^2} \quad , \qquad u\neq\frac{9}{\sqrt{2}}$$

bulunur.

$$\varphi_2\left(t,u\right)=\alpha\left(t\right)+ve_2\left(t\right)$$

parametrizasyonu ile verilen spacelike doğrultmanlı timelike asli ışın yüzeyi M_2 olsun. Benzer şekilde, genelleştirilmiş Lorentzian Lamarle formülünden M_2 in $\zeta+ve_2$ noktasında $\left(e_2,n\right)$ nondejenere kesitinin eğriliği

$$K_{\zeta+ve_2}\left(e_2,n\right)=\frac{162}{\left(2v^2-81\right)^2} \quad , \qquad v\neq\frac{9}{\sqrt{2}}$$

elde edilir.

Şimdi, $E_2\left(t\right)$ içinde e spacelike birim vektörünü göz önüne alalım. e birim vektörü ile e_1 ve e_2 baz vektörleri arasındaki açılar, sırasıyla, θ_1 ve θ_2 açıları olmak üzere, e spacelike birim vektörü

$$e = \cos\theta_1 e_1 + \cos\theta_2 e_2 \quad , \quad \cos^2\theta_1 + \cos^2\theta_2 = 1$$

olarak yazılır. Teorem 4.1.9. da verilen Lorentzian Beltrami-Euler formülünden M nin merkez noktasında (e,n) nondejenere kesitinin eğriliği ile asli kesit eğrilikler arasında

$$K_\zeta(e,n) = \cos^2\theta_1 K_\zeta(e_1,n) + \cos^2\theta_2 K_\zeta(e_2,n)$$

bağıntısı olduğundan (e,n) nondejenere kesitinin eğriliği

$$K_\zeta(e,n) = \frac{2}{81}\cos^2\theta_1 + \frac{2}{81}\cos^2\theta_2 = \frac{2}{81}$$

olarak bulunur. Bu sonuç Teorem 4.1.10. ile tutarlıdır çünkü M nin dağılma parametresi

$$P = \sqrt{|P_1.P_2|} = \sqrt{\left|\frac{9}{\sqrt{2}}.\frac{9}{\sqrt{2}}\right|} = \frac{9}{\sqrt{2}}$$

olmak üzere Lorentzian Lamarle formülünden (e,n) nondejenere kesitinin eğriliği

$$K_\zeta(e,n) = \frac{1}{P^2} = \frac{2}{81}$$

olarak elde edilir.

Şimdi, IR_1^5 de spacelike doğrultman uzaylı genelleştirilmiş timelike regle yüzey M nin $\forall\zeta\in\Omega$ merkez noktasında herhangi bir birim vektörü göz önüne alalım. Bu birim vektörün spacelike veya timelike olması n normal teğet vektörünün spacelike veya timelike olmasına bağlıdır. Bu durumları ayrı ayrı inceleyelim.

İlk olarak, n normal teğet vektörü spacelike ve $\forall \zeta \in \Omega$ noktasında herhangi bir spacelike birim vektör a olsun. a birim vektörü ile n, e_1 ve e_2 vektörleri arasındaki açılar, sırasıyla, ψ_0, ψ_1 ve ψ_2 olmak üzere, a spacelike birim vektörü

$$a = \cos\psi_0 \frac{n}{\|n\|} + \cos\psi_1 e_1 + \cos\psi_2 e_2$$

olarak yazılır. Teorem 4.1.14. de verilen I. tip Lorentzian Beltrami-Meusnier bağıntısından M nin $\zeta \in \Omega$ merkez noktasında e ile lineer bağımsız herhangi a spacelike birim vektörü verildiğinde (e,a) nondejenere kesitinin eğriliği ile (e,n) spacelike kesitinin eğriliği arasında

$$K_\zeta(e,a) = \frac{\cos^2\psi_0}{1-\langle e,a\rangle^2} K_\zeta(e,n)$$

bağıntısı vardır. Buradan (e,a) nondejenere kesitinin eğriliği

$$K_\zeta(e,a) = \frac{2\cos^2\psi_0}{81\left[1-\left(\cos\psi_1\cos\theta_1 + \cos\psi_2\cos\theta_2\right)^2\right]}$$

bulunur.

İkinci olarak, n normal teğet vektörü timelike ve $\forall \zeta \in \Omega$ noktasında herhangi bir spacelike birim vektör a^* olsun. a^* birim vektörü ile n, e_1 ve e_2 vektörleri arasındaki açılar, sırasıyla, ψ_0^*, ψ_1^* ve ψ_2^* hiperbolik açıları olmak üzere, a^* spacelike birim vektörü

$$a^* = \sinh\psi_0^* \frac{n}{\|n\|} + \cosh\psi_1^* e_1 + \cosh\psi_2^* e_2$$

olarak yazılır. Teorem 4.1.15. de verilen II. tip Lorentzian Beltrami-Meusnier bağıntısından M nin $\zeta \in \Omega$ merkez noktasında e ile lineer bağımsız herhangi a^* spacelike birim vektörü verildiğinde $\left(e, a^*\right)$ nondejenere kesitinin eğriliği ile $\left(e, n\right)$ timelike kesitinin eğriliği arasında

$$K_\zeta\left(e, a^*\right) = \frac{\sinh^2 \psi_0^*}{1 - \left\langle e, a^* \right\rangle^2} K_\zeta\left(e, n\right)$$

bağıntısı vardır. Böylece, $\left(e, a^*\right)$ nondejenere kesitinin eğriliği

$$K_\zeta\left(e, a^*\right) = \frac{2\sinh^2 \psi_0^*}{81\left[1 - \left(\cosh\psi_1^* \cos\theta_1 + \cosh\psi_2^* \cos\theta_2\right)^2\right]}$$

olarak elde edilir.

Son olarak, n normal teğet vektörü timelike ve $\forall \zeta \in \Omega$ noktasında herhangi bir timelike birim vektör a^{**} olsun ψ_0^{**}, ψ_1^{**} ve ψ_2^{**} hiperbolik açıları, sırasıyla, a^{**} birim vektörü ile n, e_1 ve e_2 vektörleri arasındaki açılar olmak üzere, a^{**} timelike birim vektörü

$$a^{**} = \cosh\psi_0^{**} \frac{n}{\|n\|} + \sinh\psi_1^{**} e_1 + \sinh\psi_2^{**} e_2$$

olarak yazılır. Teorem 4.1.16. da verilen III. tip Lorentzian Beltrami-Meusnier bağıntısından M nin $\zeta \in \Omega$ merkez noktasında e ile lineer bağımsız herhangi a^{**} spacelike birim vektörü verildiğinde $\left(e, a^{**}\right)$ timelike kesitinin eğriliği ile $\left(e, n\right)$ timelike kesitinin eğriliği arasında

$$K_\zeta\left(e, a^{**}\right) = -\frac{\cosh^2 \psi_0^{**}}{1 + \left\langle e, a^{**} \right\rangle^2} K_\zeta\left(e, n\right)$$

bağıntısı vardır. Buradan $\left(e, a^{**}\right)$ timelike kesitinin eğriliği

$$K_{\zeta}\left(e, a^{**}\right) = -\frac{2\cosh^2 \psi_0^{**}}{81\left[1+\left(\sinh\psi_1^{**}\cos\theta_1 + \sinh\psi_2^{**}\cos\theta_2\right)^2\right]}$$

bulunur.

4.2. IR_1^n, $n-$boyutlu Minkowski Uzayında Timelike Doğrultman Uzaylı Genelleştirilmiş Timelike Regle Yüzeylerin Kesit Eğrilikleri

IR_1^n, $n-$boyutlu Minkowski uzayında, $\{0\}\subset I\subset IR$ olmak üzere, α eğrisi diferensiyellenebilir spacelike bir eğri ve M' timelike doğrultman uzaylı genelleştirilmiş timelike regle yüzey olsun. Ω, M' nün $m>0$ olacak şekilde $(k-m+1)-$boyutlu merkez regle yüzeyi olmak üzere M' regle yüzeyinin $\alpha(t)$ dayanak eğrisini Ω merkez regle yüzeyinin dayanak eğrisi olarak kabul edelim. Bu takdirde

$$\dot{\alpha}(t)=\sum_{\nu=1}^{k}\zeta_\nu e_\nu+\eta_{m+1}a_{k+m+1} \quad , \qquad \eta_{m+1}\neq 0 \qquad (4.2.1)$$

dır.

Merkez uzayın noktalarında M' nün tanjant uzayları $A(t)$ asimptotik demetine diktir. $\Omega\subset M'$ merkez regle yüzeyinin merkez noktası olarak adlandırılan noktalarda $\varphi(t,u_1,\ldots,u_k)=\alpha(t)+\sum_{\nu=1}^{k}u_\nu e_\nu(t)$ parametrik gösteriminde

$$u_\sigma=0 \quad , \qquad 1\leq\sigma\leq m \qquad (4.2.2)$$

dır.

IR_1^n, $n-$boyutlu Minkowski uzayında timelike doğrultman uzaylı genelleştirilmiş timelike regle yüzeyi için (4.2.1) ve (3.2.12) eşitlikleri göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}\varphi_t&=\dot{\alpha}(t)+\sum_{\nu=1}^{k}u_\nu\dot{e}_\nu(t)\\&=\sum_{\nu=1}^{k}\left(\zeta_\nu+\sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{\nu\mu}u_\mu\right)e_\nu+\sum_{\sigma=1}^{m}u_\sigma\kappa_\sigma a_{k+\sigma}+\eta_{m+1}a_{k+m+1}\end{aligned} \qquad (4.2.3)$$

ve

$$\varphi_{u_\nu} = e_\nu(t) \qquad , \qquad 1 \le \nu \le k \tag{4.2.4}$$

elde edilir. Böylece, M' nün teğetsel demetinin kanonik bazı

$$\left\{ \sum_{\nu=1}^{k} \left(\zeta_\nu + \sum_{\mu=1}^{k} \alpha_{\nu\mu} u_\mu \right) e_\nu + \sum_{\sigma=1}^{m} u_\sigma \kappa_\sigma a_{k+\sigma} + \eta_{m+1} a_{k+m+1}, e_1, e_2, \ldots, e_k \right\} \tag{4.2.5}$$

dir. Alışılagelmiş indeks yazım şeklini kullanmak için, $u_0 = t$ olarak ifade edilirse, bu kanonik baza göre M' nün birinci temel formunun katsayıları

$$g_{00} = \langle \varphi_t, \varphi_t \rangle \quad , \quad g_{\nu 0} = \left\langle \varphi_{u_\nu}, \varphi_t \right\rangle \quad , \quad g_{\nu\mu} = \left\langle \varphi_{u_\nu}, \varphi_{u_\mu} \right\rangle \quad , \quad 1 \le \nu, \mu \le k$$

eşitliklerinden hesaplanabilir. (4.2.3) ve (4.2.4) eşitlikleri yardımıyla,

$$\begin{aligned}
g_{00} &= \langle \varphi_t, \varphi_t \rangle = \sum_{\nu=1}^{k} \varepsilon_\nu \left(\zeta_\nu + \sum_{\mu=1}^{k} \alpha_{\nu\mu} u_\mu \right)^2 + \sum_{\sigma=1}^{m} \left(u_\sigma \kappa_\sigma \right)^2 + \left(\eta_{m+1} \right)^2, \\
g_{\nu 0} &= \left\langle \varphi_{u_\nu}, \varphi_t \right\rangle = \varepsilon_\nu \left(\zeta_\nu + \sum_{\mu=1}^{k} \alpha_{\nu\mu} u_\mu \right) \quad , \qquad 1 \le \nu \le k \,, \\
g_{\nu\mu} &= \left\langle \varphi_{u_\nu}, \varphi_{u_\mu} \right\rangle = \varepsilon_\nu \delta_{\nu\mu} \qquad\qquad , \qquad 1 \le \nu, \mu \le k
\end{aligned}$$

elde edilir. M' nün birinci temel formunun matris formu

$$\left[g_{ij} \right] = \begin{bmatrix} g_{00} & g_{01} & g_{02} & \cdots & g_{0k} \\ g_{10} & g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1k} \\ g_{20} & g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\vdots & \vdots \\ g_{k0} & g_{k1} & g_{k2} & \cdots & g_{kk} \end{bmatrix}$$

dır. $\left[g_{ij} \right]$ regüler matris olmak üzere

$$
\left[g_{ij} \right] = \begin{bmatrix}
\sum_{\nu=1}^{k} \varepsilon_{\nu} \left(\zeta_{\nu} + \sum_{\mu=1}^{k} \alpha_{\nu\mu} u_{\mu} \right)^2 + \sum_{\sigma=1}^{m} \left(u_{\sigma} \kappa_{\sigma} \right)^2 + \left(\eta_{m+1} \right)^2 & \varepsilon_1 \left(\zeta_1 + \sum_{\mu=1}^{k} \alpha_{1\mu} u_{\mu} \right) & \varepsilon_2 \left(\zeta_2 + \sum_{\mu=1}^{k} \alpha_{2\mu} u_{\mu} \right) & \dots & \varepsilon_k \left(\zeta_k + \sum_{\mu=1}^{k} \alpha_{k\mu} u_{\mu} \right) \\
\varepsilon_1 \left(\zeta_1 + \sum_{\mu=1}^{k} \alpha_{1\mu} u_{\mu} \right) & \varepsilon_1 & 0 & \dots & 0 \\
\varepsilon_2 \left(\zeta_2 + \sum_{\mu=1}^{k} \alpha_{2\mu} u_{\mu} \right) & 0 & \varepsilon_2 & \dots & 0 \\
. & . & . & \dots & . \\
. & . & . & \dots & . \\
. & . & . & \dots & . \\
\varepsilon_k \left(\zeta_k + \sum_{\mu=1}^{k} \alpha_{k\mu} u_{\mu} \right) & 0 & 0 & \dots & \varepsilon_k
\end{bmatrix}
$$

dır. Buradan

$$g = \det\left[g_{ij}\right] = -\sum_{\sigma=1}^{m}\left(u_\sigma \kappa_\sigma\right)^2 - \eta_{m+1}^2 \quad , \qquad 0 \le i, j \le k$$

bulunur ve $\left[g_{ij}\right]$ regüler matris olduğundan $-\sum_{\sigma=1}^{m}\left(u_\sigma \kappa_\sigma\right)^2 - \eta_{m+1}^2 \neq 0$ dır. Sonuç olarak

$$\begin{aligned}
g_{00} &= -g + \sum_{\nu=1}^{k} \varepsilon_\nu \left(\zeta_\nu + \sum_{\mu=1}^{k} \alpha_{\nu\mu} u_\mu\right)^2 && \\
g_{\nu 0} &= \varepsilon_\nu \left(\zeta_\nu + \sum_{\mu=1}^{k} \alpha_{\nu\mu} u_\mu\right) && , \quad 1 \le \nu \le k \\
g_{\nu\mu} &= \varepsilon_\nu \delta_{\nu\mu} && , \quad 0 \le \nu, \mu \le k \\
g &= \det\left[g_{ij}\right] = -\sum_{\sigma=1}^{m}\left(u_\sigma \kappa_\sigma\right)^2 - \eta_{m+1}^2 && , \quad 0 \le i, j \le k
\end{aligned} \qquad (4.2.6)$$

eşitlikleri elde edilir.

$\left[g_{ij}\right]$ matrisinin tersi de aşağıdaki gibi elde edilebilir. $\left[\delta_{ij}\right]$, $0 \le i, j \le k$, birim matris olmak üzere

$$\left[g_{ij} \vdots \delta_{ij}\right] \quad , \qquad 0 \le i, j \le k$$

ekli matrisinin elementer satır işlemleri yardımıyla,

$$\left[\delta_{ij} \vdots g^{ij}\right] \quad , \qquad 0 \le i, j \le k$$

satırca indirgenmiş eşelon formu elde edilir. Buradaki $\left[g^{ij}\right]$ matrisi $\left[g_{ij}\right]$ matrisinin tersidir ve $\left[g^{ij}\right]$ ters matrisi aşağıdaki gibidir:

$$
\left[g^{ij}\right]=\begin{bmatrix}
-g^{-1} & \left(\zeta_1+\sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{1\mu}u_\mu\right)g^{-1} & \left(\zeta_2+\sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{2\mu}u_\mu\right)g^{-1} & \cdots & \left(\zeta_k+\sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{k\mu}u_\mu\right)g^{-1} \\
\left(\zeta_1+\sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{1\mu}u_\mu\right)g^{-1} & \left(\varepsilon_1\delta_{11}g-\left(\zeta_1+\sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{1\mu}u_\mu\right)\left(\zeta_1+\sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{1\mu}u_\mu\right)\right)g^{-1} & \left(\varepsilon_1\delta_{12}g-\left(\zeta_1+\sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{1\mu}u_\mu\right)\left(\zeta_2+\sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{2\mu}u_\mu\right)\right)g^{-1} & \cdots & \left(\varepsilon_1\delta_{1k}g-\left(\zeta_1+\sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{1\mu}u_\mu\right)\left(\zeta_k+\sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{k\mu}u_\mu\right)\right)g^{-1} \\
\left(\zeta_2+\sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{2\mu}u_\mu\right)g^{-1} & \left(\varepsilon_2\delta_{21}g-\left(\zeta_2+\sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{2\mu}u_\mu\right)\left(\zeta_1+\sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{1\mu}u_\mu\right)\right)g^{-1} & \left(\varepsilon_2\delta_{22}g-\left(\zeta_2+\sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{2\mu}u_\mu\right)\left(\zeta_2+\sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{2\mu}u_\mu\right)\right)g^{-1} & \cdots & \left(\varepsilon_2\delta_{2k}g-\left(\zeta_2+\sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{2\mu}u_\mu\right)\left(\zeta_k+\sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{k\mu}u_\mu\right)\right)g^{-1} \\
. & . & . & \cdots & . \\
. & . & . & \cdots & . \\
. & . & . & \cdots & . \\
\left(\zeta_k+\sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{k\mu}u_\mu\right)g^{-1} & \left(\varepsilon_k\delta_{k1}g-\left(\zeta_k+\sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{k\mu}u_\mu\right)\left(\zeta_1+\sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{1\mu}u_\mu\right)\right)g^{-1} & \left(\varepsilon_k\delta_{k2}g-\left(\zeta_k+\sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{k\mu}u_\mu\right)\left(\zeta_2+\sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{2\mu}u_\mu\right)\right)g^{-1} & \cdots & \left(\varepsilon_k\delta_{kk}g-\left(\zeta_k+\sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{k\mu}u_\mu\right)\left(\zeta_k+\sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{k\mu}u_\mu\right)\right)g^{-1}
\end{bmatrix}
$$

Buradan açıktır ki, $\left[g^{ij}\right]$ ters matrisinin elemanları

$$
\begin{aligned}
g^{00} &= -g^{-1} \\
g^{\nu 0} &= \left(\zeta_\nu + \sum_{\mu=1}^{k} \alpha_{\nu\mu} u_\mu\right) g^{-1} && , \quad 1 \le \nu \le k \qquad (4.2.7) \\
g^{\nu\lambda} &= \left(\varepsilon_\nu \delta_{\nu\lambda} g - \left(\zeta_\nu + \sum_{\mu=1}^{k} \alpha_{\nu\mu} u_\mu\right)\left(\zeta_\lambda + \sum_{\mu=1}^{k} \alpha_{\lambda\mu} u_\mu\right)\right) g^{-1} && , \quad 1 \le \nu, \lambda \le k
\end{aligned}
$$

dir.

(4.2.6) ve (4.2.7) denklemleri (2.2.4) denkleminde yerine yazılırsa, sırasıyla, Γ_{00}^{0}, Γ_{00}^{λ}, $\Gamma_{\nu\mu}^{0}$, $\Gamma_{\mu\nu}^{0}$, $\Gamma_{\nu\mu}^{\lambda}$, $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$, $\Gamma_{\lambda 0}^{0}$, $\Gamma_{0\lambda}^{0}$, $\Gamma_{\lambda 0}^{\nu}$, $\Gamma_{0\lambda}^{\nu}$, $1 \le \nu, \mu, \lambda \le k$, Christoffel sembolleri hesaplanabilir. İlk olarak Γ_{00}^{0} ifadesinin değerini hesaplamak üzere

$$
\begin{aligned}
\Gamma_{00}^{0} &= \frac{1}{2}\sum_{r=0}^{k} g^{0r}\left[\frac{\partial g_{r0}}{\partial u_0} + \frac{\partial g_{r0}}{\partial u_0} - \frac{\partial g_{00}}{\partial u_r}\right] \\
&= \frac{1}{2} g^{00}\left[\frac{\partial g_{00}}{\partial u_0} + \frac{\partial g_{00}}{\partial u_0} - \frac{\partial g_{00}}{\partial u_0}\right] + \frac{1}{2} g^{01}\left[\frac{\partial g_{10}}{\partial u_0} + \frac{\partial g_{10}}{\partial u_0} - \frac{\partial g_{00}}{\partial u_1}\right] \\
&\quad + \frac{1}{2} g^{02}\left[\frac{\partial g_{20}}{\partial u_0} + \frac{\partial g_{20}}{\partial u_0} - \frac{\partial g_{00}}{\partial u_2}\right] + \ldots + \frac{1}{2} g^{0k}\left[\frac{\partial g_{k0}}{\partial u_0} + \frac{\partial g_{k0}}{\partial u_0} - \frac{\partial g_{00}}{\partial u_k}\right]
\end{aligned}
$$

ile verilen Koszul eşitliğinde (4.2.6) ve (4.2.7) denklemleri yerine konulursa

$$
\begin{aligned}
\Gamma_{00}^{0} &= -\frac{1}{2}\frac{1}{g}\left[-\frac{\partial g}{\partial u_0} + 2\varepsilon_\nu \sum_{\nu=1}^{k}\left(\zeta_\nu + \sum_{\mu=1}^{k} \alpha_{\nu\mu} u_\mu\right)\left(\dot{\zeta}_\nu + \sum_{\mu=1}^{k} \dot{\alpha}_{\nu\mu} u_\mu\right)\right] \\
&\quad + \frac{1}{2}\frac{1}{g}\left(\zeta_1 + \sum_{\mu=1}^{k} \alpha_{1\mu} u_\mu\right)\left[2\varepsilon_1\left(\dot{\zeta}_1 + \sum_{\mu=1}^{k} \dot{\alpha}_{1\mu} u_\mu\right) + \frac{\partial g}{\partial u_1} - 2\varepsilon_\nu \sum_{\nu=1}^{k}\left(\zeta_\nu + \sum_{\mu=1}^{k} \alpha_{\nu\mu} u_\mu\right)\alpha_{\nu 1}\right] \\
&\quad + \frac{1}{2}\frac{1}{g}\left(\zeta_2 + \sum_{\mu=1}^{k} \alpha_{2\mu} u_\mu\right)\left[2\varepsilon_2\left(\dot{\zeta}_2 + \sum_{\mu=1}^{k} \dot{\alpha}_{2\mu} u_\mu\right) + \frac{\partial g}{\partial u_2} - 2\varepsilon_\nu \sum_{\nu=1}^{k}\left(\zeta_\nu + \sum_{\mu=1}^{k} \alpha_{\nu\mu} u_\mu\right)\alpha_{\nu 2}\right] \\
&\quad \vdots \\
&\quad + \frac{1}{2}\frac{1}{g}\left(\zeta_k + \sum_{\mu=1}^{k} \alpha_{k\mu} u_\mu\right)\left[2\varepsilon_k\left(\dot{\zeta}_k + \sum_{\mu=1}^{k} \dot{\alpha}_{k\mu} u_\mu\right) + \frac{\partial g}{\partial u_k} - 2\varepsilon_\nu \sum_{\nu=1}^{k}\left(\zeta_\nu + \sum_{\mu=1}^{k} \alpha_{\nu\mu} u_\mu\right)\alpha_{\nu k}\right]
\end{aligned}
$$

elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\Gamma_{00}^{0} = \frac{1}{2g}\frac{\partial g}{\partial u_0} - \frac{1}{g}\sum_{\nu=1}^{k}\left(\zeta_\nu + \sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{\nu\mu}u_\mu\right)\left(\dot{\zeta}_\nu + \sum_{\mu=1}^{k}\dot{\alpha}_{\nu\mu}u_\mu\right)$$
$$+\frac{1}{g}\sum_{\nu=1}^{k}\left(\zeta_\nu + \sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{\nu\mu}u_\mu\right)\left(\dot{\zeta}_\nu + \sum_{\mu=1}^{k}\dot{\alpha}_{\nu\mu}u_\mu\right) + \frac{1}{2g}\sum_{\nu=1}^{k}\left(\zeta_\nu + \sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{\nu\mu}u_\mu\right)\frac{\partial g}{\partial u_\nu}$$
$$-\frac{1}{g}\sum_{\nu=1}^{k}\left(\zeta_\nu + \sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{\nu\mu}u_\mu\right)^2\alpha_{\nu\nu}$$

bulunur. Bu son denklemde $\alpha_{\nu\nu} = 0$ olduğu göz önüne alınır ve gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$$\Gamma_{00}^{0} = \frac{1}{2g}\left[\frac{\partial g}{\partial u_0} + \sum_{\nu=1}^{k}\left(\zeta_\nu + \sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{\nu\mu}u_\mu\right)\frac{\partial g}{\partial u_\nu}\right] \tag{4.2.8}$$

elde edilir.

Benzer şekilde Γ_{00}^{λ}, $1 \le \lambda \le k$, değerini hesaplamak için, Koszul eşitliği

$$\Gamma_{00}^{\lambda} = \frac{1}{2}\sum_{r=0}^{k} g^{\lambda r}\left[\frac{\partial g_{r0}}{\partial u_0} + \frac{\partial g_{r0}}{\partial u_0} - \frac{\partial g_{00}}{\partial u_r}\right]$$
$$= \frac{1}{2}g^{\lambda 0}\left[\frac{\partial g_{00}}{\partial u_0} + \frac{\partial g_{00}}{\partial u_0} - \frac{\partial g_{00}}{\partial u_0}\right] + \frac{1}{2}g^{\lambda 1}\left[\frac{\partial g_{10}}{\partial u_0} + \frac{\partial g_{10}}{\partial u_0} - \frac{\partial g_{00}}{\partial u_1}\right] + \frac{1}{2}g^{\lambda 2}\left[\frac{\partial g_{20}}{\partial u_0} + \frac{\partial g_{20}}{\partial u_0} - \frac{\partial g_{00}}{\partial u_2}\right]$$
$$+\ldots+\frac{1}{2}g^{\lambda\lambda}\left[\frac{\partial g_{\lambda 0}}{\partial u_0} + \frac{\partial g_{\lambda 0}}{\partial u_0} - \frac{\partial g_{00}}{\partial u_\lambda}\right] + \ldots + \frac{1}{2}g^{\lambda k}\left[\frac{\partial g_{k0}}{\partial u_0} + \frac{\partial g_{k0}}{\partial u_0} - \frac{\partial g_{00}}{\partial u_k}\right]$$

olur. Burada (4.2.6) ve (4.2.7) eşitlikleri yerine yazılırsa

$$\Gamma_{00}^{\lambda} = \frac{1}{2}\frac{1}{g}\left(\zeta_{\lambda} + \sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{\lambda\mu}u_{\mu}\right)\left[-\frac{\partial g}{\partial u_0} + 2\varepsilon_{\nu}\sum_{\nu=1}^{k}\left(\zeta_{\nu} + \sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{\nu\mu}u_{\mu}\right)\left(\dot{\zeta}_{\nu} + \sum_{\mu=1}^{k}\dot{\alpha}_{\nu\mu}u_{\mu}\right)\right]$$

$$+\frac{1}{2}\frac{1}{g}\left(\varepsilon_{\lambda}\delta_{\lambda 1}g - \left(\zeta_{\lambda} + \sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{\lambda\mu}u_{\mu}\right)\left(\zeta_{1} + \sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{1\mu}u_{\mu}\right)\right)\left[2\varepsilon_{1}\left(\dot{\zeta}_{1} + \sum_{\mu=1}^{k}\dot{\alpha}_{1\mu}u_{\mu}\right) + \frac{\partial g}{\partial u_1} - 2\sum_{\nu=1}^{k}\varepsilon_{\nu}\left(\zeta_{\nu} + \sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{\nu\mu}u_{\mu}\right)\alpha_{\nu 1}\right]$$

$$+\frac{1}{2}\frac{1}{g}\left(\varepsilon_{\lambda}\delta_{\lambda 2}g - \left(\zeta_{\lambda} + \sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{\lambda\mu}u_{\mu}\right)\left(\zeta_{2} + \sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{2\mu}u_{\mu}\right)\right)\left[2\varepsilon_{2}\left(\dot{\zeta}_{2} + \sum_{\mu=1}^{k}\dot{\alpha}_{2\mu}u_{\mu}\right) + \frac{\partial g}{\partial u_2} - 2\sum_{\nu=1}^{k}\varepsilon_{\nu}\left(\zeta_{\nu} + \sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{\nu\mu}u_{\mu}\right)\alpha_{\nu 2}\right]$$

$$\vdots$$

$$+\frac{1}{2}\frac{1}{g}\left(\varepsilon_{\lambda}\delta_{\lambda\lambda}g - \left(\zeta_{\lambda} + \sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{\lambda\mu}u_{\mu}\right)\left(\zeta_{\lambda} + \sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{\lambda\mu}u_{\mu}\right)\right)\left[2\varepsilon_{\lambda}\left(\dot{\zeta}_{k} + \sum_{\mu=1}^{k}\dot{\alpha}_{k\mu}u_{\mu}\right) + \frac{\partial g}{\partial u_k} - 2\sum_{\nu=1}^{k}\varepsilon_{\nu}\left(\zeta_{\nu} + \sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{\nu\mu}u_{\mu}\right)\alpha_{\nu\lambda}\right]$$

$$\vdots$$

$$+\frac{1}{2}\frac{1}{g}\left(\varepsilon_{\lambda}\delta_{\lambda k}g - \left(\zeta_{\lambda} + \sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{\lambda\mu}u_{\mu}\right)\left(\zeta_{k} + \sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{k\mu}u_{\mu}\right)\right)\left[2\varepsilon_{k}\left(\dot{\zeta}_{k} + \sum_{\mu=1}^{k}\dot{\alpha}_{k\mu}u_{\mu}\right) + \frac{\partial g}{\partial u_k} - 2\sum_{\nu=1}^{k}\varepsilon_{\nu}\left(\zeta_{\nu} + \sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{\nu\mu}u_{\mu}\right)\alpha_{\nu k}\right]$$

elde edilir ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\Gamma_{00}^{\lambda} = -\frac{1}{2g}\left(\zeta_{\lambda} + \sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{\lambda\mu}u_{\mu}\right)\frac{\partial g}{\partial u_0} + \frac{1}{g}\left(\zeta_{\lambda} + \sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{\lambda\mu}u_{\mu}\right)\sum_{\nu=1}^{k}\varepsilon_{\nu}\left(\zeta_{\nu} + \sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{\nu\mu}u_{\mu}\right)\left(\dot{\zeta}_{\nu} + \sum_{\mu=1}^{k}\dot{\alpha}_{\nu\mu}u_{\mu}\right)$$

$$+\frac{1}{2g}\varepsilon_{\lambda}^{2}2g\left(\dot{\zeta}_{\lambda} + \sum_{\mu=1}^{k}\dot{\alpha}_{\lambda\mu}u_{\mu}\right) + \frac{1}{2g}\varepsilon_{\lambda}g\frac{\partial g}{\partial u_{\lambda}} - \frac{1}{2g}\varepsilon_{\lambda}2g\sum_{\nu=1}^{k}\varepsilon_{\nu}\left(\zeta_{\nu} + \sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{\nu\mu}u_{\mu}\right)\alpha_{\nu\lambda}$$

$$-\frac{1}{g}\left(\zeta_{\lambda} + \sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{\lambda\mu}u_{\mu}\right)\sum_{\nu=1}^{k}\varepsilon_{\nu}\left(\zeta_{\nu} + \sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{\nu\mu}u_{\mu}\right)\left(\dot{\zeta}_{\nu} + \sum_{\mu=1}^{k}\dot{\alpha}_{\nu\mu}u_{\mu}\right)$$

$$-\frac{1}{2g}\left(\zeta_{\lambda} + \sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{\lambda\mu}u_{\mu}\right)\sum_{\nu=1}^{k}\left(\zeta_{\nu} + \sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{\nu\mu}u_{\mu}\right)\frac{\partial g}{\partial u_{\nu}} + \frac{1}{g}\left(\zeta_{\lambda} + \sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{\lambda\mu}u_{\mu}\right)\sum_{\nu=1}^{k}\varepsilon_{\nu}\left(\zeta_{\nu} + \sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{\nu\mu}u_{\mu}\right)^{2}\alpha_{\nu\nu}$$

bulunur. $\alpha_{\nu\nu} = 0$, $\varepsilon_{\lambda}^{2} = 1$ ve $\varepsilon_{\lambda}\varepsilon_{\nu}\alpha_{\nu\lambda} = -\alpha_{\lambda\nu}$ olduğu göz önüne alınır ve sadeleştirmeler yapılırsa, $1 \leq \lambda \leq k$, için

$$\begin{aligned}\Gamma_{00}^{\lambda} = \frac{1}{2g}\Bigg[&-\left(\zeta_{\lambda} + \sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{\lambda\mu}u_{\mu}\right)\left(\frac{\partial g}{\partial u_0} + \sum_{\nu=1}^{k}\left(\zeta_{\nu} + \sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{\nu\mu}u_{\mu}\right)\frac{\partial g}{\partial u_{\nu}}\right) \\ &+2g\left(\left(\dot{\zeta}_{\lambda} + \sum_{\mu=1}^{k}\dot{\alpha}_{\lambda\mu}u_{\mu}\right) + \sum_{\nu=1}^{k}\left(\zeta_{\nu} + \sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{\nu\mu}u_{\mu}\right)\alpha_{\lambda\nu} + \frac{1}{2}\varepsilon_{\lambda}\frac{\partial g}{\partial u_{\lambda}}\right)\Bigg]\end{aligned} \tag{4.2.9}$$

olarak genellenir.

$\Gamma^0_{\nu\mu}$ ve $\Gamma^0_{\mu\nu}$, $1 \le \nu, \mu \le k$, değerlerini hesaplamak için, Koszul eşitliği

$$\Gamma^0_{\nu\mu} = \frac{1}{2}\sum_{r=0}^{k} g^{0r}\left[\frac{\partial g_{r\nu}}{\partial u_\mu} + \frac{\partial g_{r\mu}}{\partial u_\nu} - \frac{\partial g_{\nu\mu}}{\partial u_r}\right]$$
$$= \frac{1}{2}g^{00}\left[\frac{\partial g_{0\nu}}{\partial u_\mu} + \frac{\partial g_{0\mu}}{\partial u_\nu} - \frac{\partial g_{\nu\mu}}{\partial u_0}\right] + \frac{1}{2}g^{01}\left[\frac{\partial g_{1\nu}}{\partial u_\mu} + \frac{\partial g_{1\mu}}{\partial u_\nu} - \frac{\partial g_{\nu\mu}}{\partial u_1}\right]$$
$$+ \frac{1}{2}g^{02}\left[\frac{\partial g_{2\nu}}{\partial u_\mu} + \frac{\partial g_{2\mu}}{\partial u_\nu} - \frac{\partial g_{\nu\mu}}{\partial u_2}\right] + \ldots + \frac{1}{2}g^{0k}\left[\frac{\partial g_{k\nu}}{\partial u_\mu} + \frac{\partial g_{k\mu}}{\partial u_\nu} - \frac{\partial g_{\nu\mu}}{\partial u_k}\right]$$

alınır ve burada (4.2.6) ve (4.2.7) eşitlikleri yerine konulursa

$$\Gamma^0_{\nu\mu} = -\frac{1}{2}\frac{1}{g}\left[\varepsilon_\nu \alpha_{\nu\mu} + \varepsilon_\mu \alpha_{\mu\nu} - 0\right] + \frac{1}{2}\frac{1}{g}\left(\zeta_1 + \sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{1\mu}u_\mu\right)\left[0+0-0\right]$$
$$+ \frac{1}{2}\frac{1}{g}\left(\zeta_2 + \sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{2\mu}u_\mu\right)\left[0+0-0\right] + \ldots + \frac{1}{2}\frac{1}{g}\left(\zeta_k + \sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{k\mu}u_\mu\right)\left[0+0-0\right]$$

elde edilir. (2.2.2) denklemi ve $\varepsilon_\nu \alpha_{\nu\mu} = -\varepsilon_\mu \alpha_{\mu\nu}$ olduğundan

$$\Gamma^0_{\nu\mu} = \Gamma^0_{\mu\nu} = 0 \; , \qquad 1 \le \nu, \mu \le k \tag{4.2.10}$$

elde edilir.

$\Gamma^\lambda_{\nu\mu}$ ve $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$, $1 \le \lambda, \nu, \mu \le k$, değerlerini hesaplamak için, Koszul eşitliği

$$\Gamma^\lambda_{\nu\mu} = \frac{1}{2}\sum_{r=0}^{k} g^{\lambda r}\left[\frac{\partial g_{r\nu}}{\partial u_\mu} + \frac{\partial g_{r\mu}}{\partial u_\nu} - \frac{\partial g_{\nu\mu}}{\partial u_r}\right]$$
$$= \frac{1}{2}g^{\lambda 0}\left[\frac{\partial g_{0\nu}}{\partial u_\mu} + \frac{\partial g_{0\mu}}{\partial u_\nu} - \frac{\partial g_{\nu\mu}}{\partial u_0}\right] + \frac{1}{2}g^{\lambda 1}\left[\frac{\partial g_{1\nu}}{\partial u_\mu} + \frac{\partial g_{1\mu}}{\partial u_\nu} - \frac{\partial g_{\nu\mu}}{\partial u_1}\right] + \frac{1}{2}g^{\lambda 2}\left[\frac{\partial g_{2\nu}}{\partial u_\mu} + \frac{\partial g_{2\mu}}{\partial u_\nu} - \frac{\partial g_{\nu\mu}}{\partial u_2}\right]$$
$$+ \ldots + \frac{1}{2}g^{\lambda\lambda}\left[\frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial u_\mu} + \frac{\partial g_{\lambda\mu}}{\partial u_\nu} - \frac{\partial g_{\nu\mu}}{\partial u_\lambda}\right] + \ldots + \frac{1}{2}g^{\lambda k}\left[\frac{\partial g_{k\nu}}{\partial u_\mu} + \frac{\partial g_{k\mu}}{\partial u_\nu} - \frac{\partial g_{\nu\mu}}{\partial u_k}\right]$$

olur. Burada (4.2.6) ve (4.2.7) eşitlikleri yerine yazılırsa

$$\Gamma_{\nu\mu}^{\lambda}=\frac{1}{2}\frac{1}{g}\left(\zeta_{\lambda}+\sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{\lambda\mu}u_{\mu}\right)\left[\varepsilon_{\nu}\alpha_{\nu\mu}+\varepsilon_{\mu}\alpha_{\mu\nu}-0\right]$$
$$+\frac{1}{2}\frac{1}{g}\left(\varepsilon_{\lambda}\delta_{\lambda 1}g-\left(\zeta_{\lambda}+\sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{\lambda\mu}u_{\mu}\right)\left(\zeta_{1}+\sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{1\mu}u_{\mu}\right)\right)\left[0+0-0\right]$$
$$+\frac{1}{2}\frac{1}{g}\left(\varepsilon_{\lambda}\delta_{\lambda 2}g-\left(\zeta_{\lambda}+\sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{\lambda\mu}u_{\mu}\right)\left(\zeta_{2}+\sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{2\mu}u_{\mu}\right)\right)\left[0+0-0\right]$$
$$\vdots$$
$$+\frac{1}{2}\frac{1}{g}\left(\varepsilon_{\lambda}\delta_{\lambda\lambda}g-\left(\zeta_{\lambda}+\sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{\lambda\mu}u_{\mu}\right)\left(\zeta_{\lambda}+\sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{\lambda\mu}u_{\mu}\right)\right)\left[0+0-0\right]$$
$$\vdots$$
$$+\frac{1}{2}\frac{1}{g}\left(\varepsilon_{\lambda}\delta_{\lambda k}g-\left(\zeta_{\lambda}+\sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{\lambda\mu}u_{\mu}\right)\left(\zeta_{k}+\sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{k\mu}u_{\mu}\right)\right)\left[0+0-0\right]$$

elde edilir. (2.2.2) denklemi ve $\varepsilon_{\nu}\alpha_{\nu\mu}=-\varepsilon_{\mu}\alpha_{\mu\nu}$ olduğu göz önüne alınırsa

$$\Gamma_{\nu\mu}^{\lambda}=\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}=0 \qquad , \qquad 1\le \nu,\mu,\lambda\le k \tag{4.2.11}$$

bulunur.

$\Gamma_{\lambda 0}^{0}$ ve $\Gamma_{0\lambda}^{0}$, $1\le\lambda\le k$, değerlerini değerini hesaplamak için

$$\Gamma_{\lambda 0}^{0}=\frac{1}{2}\sum_{r=0}^{k}g^{0r}\left[\frac{\partial g_{r\lambda}}{\partial u_{0}}+\frac{\partial g_{r0}}{\partial u_{\lambda}}-\frac{\partial g_{\lambda 0}}{\partial u_{r}}\right]$$
$$=\frac{1}{2}g^{00}\left[\frac{\partial g_{0\lambda}}{\partial u_{0}}+\frac{\partial g_{00}}{\partial u_{\lambda}}-\frac{\partial g_{\lambda 0}}{\partial u_{0}}\right]+\frac{1}{2}g^{01}\left[\frac{\partial g_{1\lambda}}{\partial u_{0}}+\frac{\partial g_{10}}{\partial u_{\lambda}}-\frac{\partial g_{\lambda 0}}{\partial u_{1}}\right]$$
$$+\frac{1}{2}g^{02}\left[\frac{\partial g_{2\lambda}}{\partial u_{0}}+\frac{\partial g_{20}}{\partial u_{\lambda}}-\frac{\partial g_{\lambda 0}}{\partial u_{2}}\right]+\ldots+\frac{1}{2}g^{0k}\left[\frac{\partial g_{k\lambda}}{\partial u_{0}}+\frac{\partial g_{k0}}{\partial u_{\lambda}}-\frac{\partial g_{\lambda 0}}{\partial u_{k}}\right]$$

Koszul eşitliğinde (4.2.6) ve (4.2.7) denklemleri yerine konulursa

$$\Gamma^0_{\lambda 0} = -\frac{1}{2}\frac{1}{g}\left[\frac{\partial g}{\partial u_\lambda} + 2\sum_{\nu=1}^{k}\varepsilon_\nu\left(\zeta_\nu + \sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{\nu\mu}u_\mu\right)\alpha_{\nu\lambda}\right] + \frac{1}{2}\frac{1}{g}\left(\zeta_1 + \sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{1\mu}u_\mu\right)\left[0 + \varepsilon_1\alpha_{1\lambda} - \varepsilon_\lambda\alpha_{\lambda 1}\right]$$
$$+\frac{1}{2}\frac{1}{g}\left(\zeta_2 + \sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{2\mu}u_\mu\right)\left[0 + \varepsilon_2\alpha_{2\lambda} - \varepsilon_\lambda\alpha_{\lambda 2}\right] + \ldots + \frac{1}{2}\frac{1}{g}\left(\zeta_k + \sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{k\mu}u_\mu\right)\left[0 + \varepsilon_k\alpha_{k\lambda} - \varepsilon_\lambda\alpha_{\lambda k}\right]$$

elde edilir. $\varepsilon_\nu\alpha_{\nu\lambda} - \varepsilon_\lambda\alpha_{\lambda\nu} = 2\varepsilon_\nu\alpha_{\nu\lambda}$ olduğundan gerekli düzenlemeler sonucu

$$\Gamma^0_{\lambda 0} = \frac{1}{2g}\frac{\partial g}{\partial u_\lambda} - \frac{1}{g}\sum_{\nu=1}^{k}\varepsilon_\nu\left(\zeta_\nu + \sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{\nu\mu}u_\mu\right)\alpha_{\nu\lambda} + \frac{1}{g}\sum_{\nu=1}^{k}\varepsilon_\nu\left(\zeta_\nu + \sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{\nu\mu}u_\mu\right)\alpha_{\nu\lambda}$$

bulunur. Sadeleştirmeler yapılır ve (2.2.2) denklemi göz önüne alınırsa

$$\Gamma^0_{\lambda 0} = \Gamma^0_{0\lambda} = \frac{1}{2g}\frac{\partial g}{\partial u_\lambda} \quad , \qquad 1 \le \lambda \le k \qquad (4.2.12)$$

elde edilir.

Son olarak $\Gamma^\lambda_{\nu 0}$ ve $\Gamma^\lambda_{0\nu}$ $1 \le \nu, \lambda \le k$ değerlerini hesaplamak üzere, Koszul eşitliği

$$\Gamma^\lambda_{\nu 0} = \frac{1}{2}\sum_{r=0}^{k} g^{\lambda r}\left[\frac{\partial g_{r\nu}}{\partial u_0} + \frac{\partial g_{r0}}{\partial u_\nu} - \frac{\partial g_{\lambda 0}}{\partial u_r}\right]$$
$$= \frac{1}{2}g^{\lambda 0}\left[\frac{\partial g_{0\nu}}{\partial u_0} + \frac{\partial g_{00}}{\partial u_\nu} - \frac{\partial g_{\nu 0}}{\partial u_0}\right] + \frac{1}{2}g^{\lambda 1}\left[\frac{\partial g_{1\nu}}{\partial u_0} + \frac{\partial g_{10}}{\partial u_\nu} - \frac{\partial g_{\nu 0}}{\partial u_1}\right] + \frac{1}{2}g^{\lambda 2}\left[\frac{\partial g_{2\nu}}{\partial u_0} + \frac{\partial g_{20}}{\partial u_\nu} - \frac{\partial g_{\nu 0}}{\partial u_2}\right]$$
$$+\ldots + \frac{1}{2}g^{\lambda\lambda}\left[\frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial u_0} + \frac{\partial g_{\lambda 0}}{\partial u_\nu} - \frac{\partial g_{\nu 0}}{\partial u_\lambda}\right] + \ldots + \frac{1}{2}g^{\lambda k}\left[\frac{\partial g_{k\nu}}{\partial u_0} + \frac{\partial g_{k0}}{\partial u_\nu} - \frac{\partial g_{\nu 0}}{\partial u_k}\right]$$

olur. Burada (4.2.6) ve (4.2.7) eşitlikleri yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
\Gamma^{\lambda}_{\nu 0} &= \frac{1}{2}\frac{1}{g}\left(\zeta_{\lambda}+\sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{\lambda\mu}u_{\mu}\right)\left[-\frac{\partial g}{\partial u_{\nu}}+2\sum_{\nu=1}^{k}\varepsilon_{\nu}\left(\zeta_{\nu}+\sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{\nu\mu}u_{\mu}\right)\alpha_{\nu\nu}\right] \\
&+\frac{1}{2}\frac{1}{g}\left(\varepsilon_{\lambda}\delta_{\lambda 1}g-\left(\zeta_{\lambda}+\sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{\lambda\mu}u_{\mu}\right)\left(\zeta_{1}+\sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{1\mu}u_{\mu}\right)\right)\left[0+\varepsilon_{1}\alpha_{1\nu}-\varepsilon_{\nu}\alpha_{\nu 1}\right] \\
&+\frac{1}{2}\frac{1}{g}\left(\varepsilon_{\lambda}\delta_{\lambda 2}g-\left(\zeta_{\lambda}+\sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{\lambda\mu}u_{\mu}\right)\left(\zeta_{2}+\sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{2\mu}u_{\mu}\right)\right)\left[0+\varepsilon_{2}\alpha_{2\nu}-\varepsilon_{\nu}\alpha_{\nu 2}\right] \\
&\vdots \\
&+\frac{1}{2}\frac{1}{g}\left(\varepsilon_{\lambda}\delta_{\lambda\lambda}g-\left(\zeta_{\lambda}+\sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{\lambda\mu}u_{\mu}\right)\left(\zeta_{\lambda}+\sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{\lambda\mu}u_{\mu}\right)\right)\left[0+\varepsilon_{\lambda}\alpha_{\lambda\nu}-\varepsilon_{\nu}\alpha_{\nu\lambda}\right] \\
&\vdots \\
&+\frac{1}{2}\frac{1}{g}\left(\varepsilon_{\lambda}\delta_{\lambda k}g-\left(\zeta_{\lambda}+\sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{\lambda\mu}u_{\mu}\right)\left(\zeta_{k}+\sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{k\mu}u_{\mu}\right)\right)\left[0+\varepsilon_{k}\alpha_{k\nu}-\varepsilon_{\nu}\alpha_{\nu k}\right]
\end{aligned}$$

elde edilir. $\varepsilon_{\lambda}\alpha_{\lambda\nu}-\varepsilon_{\nu}\alpha_{\nu\lambda}=2\varepsilon_{\lambda}\alpha_{\lambda\nu}$ olduğu göz önüne alınır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned}
\Gamma^{\lambda}_{\nu 0} &= -\frac{1}{2g}\left(\zeta_{\lambda}+\sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{\lambda\mu}u_{\mu}\right)\frac{\partial g}{\partial u_{\nu}}+\frac{1}{g}\sum_{\nu=1}^{k}\varepsilon_{\nu}\left(\zeta_{\nu}+\sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{\nu\mu}u_{\mu}\right)\alpha_{\nu\nu} \\
&-\frac{1}{g}\sum_{\nu=1}^{k}\varepsilon_{\nu}\left(\zeta_{\nu}+\sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{\nu\mu}u_{\mu}\right)\alpha_{\nu\nu}+\frac{1}{2g}\varepsilon_{\lambda}^{2}2g\left(\alpha_{\lambda\nu}\right)
\end{aligned}$$

bulunur. Sadeleştirmeler yapılır ve (2.2.2) denklemi göz önüne alınırsa

$$\Gamma^{\lambda}_{\nu 0}=\Gamma^{\lambda}_{0\nu}=\frac{1}{2g}\left[-\left(\zeta_{\lambda}+\sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{\lambda\mu}u_{\mu}\right)\frac{\partial g}{\partial u_{\nu}}+2g\left(\alpha_{\lambda\nu}\right)\right],\ 1\le\nu,\lambda\le k \qquad (4.2.13)$$

elde edilir. Sonuç olarak (4.2.8), (4.2.9), (4.2.10), (4.2.11), (4.2.12) ve (4.2.13) denklemlerinden, $1\le\nu,\mu,\lambda\le k$, için Christoffel sembolleri

$$
\begin{aligned}
\Gamma_{00}^{0} &= \frac{1}{2g}\left[\frac{\partial g}{\partial u_0} + \sum_{\nu=1}^{k}\left(\zeta_\nu + \sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{\nu\mu}u_\mu\right)\frac{\partial g}{\partial u_\nu}\right],\\
\Gamma_{00}^{\lambda} &= \frac{1}{2g}\left[-\left(\zeta_\lambda + \sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{\lambda\mu}u_\mu\right)\left(\frac{\partial g}{\partial u_0} + \sum_{\nu=1}^{k}\left(\zeta_\nu + \sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{\nu\mu}u_\mu\right)\frac{\partial g}{\partial u_\nu}\right)\right.\\
&\qquad \left. +2g\left(\left(\dot{\zeta}_\lambda + \sum_{\mu=1}^{k}\dot{\alpha}_{\lambda\mu}\,u_\mu\right) + \sum_{\nu=1}^{k}\left(\zeta_\nu + \sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{\nu\mu}u_\mu\right)\alpha_{\lambda\nu} + \frac{1}{2}\varepsilon_\lambda\frac{\partial g}{\partial u_\lambda}\right)\right],\\
\Gamma_{\nu\mu}^{0} &= \Gamma_{\mu\nu}^{0} = 0, \qquad\qquad (4.2.14)\\
\Gamma_{\nu\mu}^{\lambda} &= \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = 0,\\
\Gamma_{\lambda 0}^{0} &= \Gamma_{0\lambda}^{0} = \frac{1}{2g}\frac{\partial g}{\partial u_\lambda},\\
\Gamma_{\nu 0}^{\lambda} &= \Gamma_{0\nu}^{\lambda} = \frac{1}{2g}\left[-\left(\zeta_\lambda + \sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{\lambda\mu}u_\mu\right)\frac{\partial g}{\partial u_\nu} + 2g\left(\alpha_{\lambda\nu}\right)\right]
\end{aligned}
$$

olarak verilir.

Bu son denklemler göz önüne alınarak Riemann eğriliği hesaplanır. Teorem 2.2.10. a göre $\{u_0, u_1, \ldots, u_k\}$ koordinat sisteminin koordinat komşuluğunda tanjant uzayının bazı $\{\partial_0, \partial_1, \ldots, \partial_k\}$ ($\frac{\partial}{\partial u_i} = \partial_i,\ 0 \le i \le k$) olmak üzere, M' timelike doğrultman uzaylı genelleştirilmiş timelike regle yüzeyinin Riemann eğrilik tensörü

$$R_{\partial_i \partial_j}\left(\partial_l\right) = \sum_{r=0}^{k} R_{lij}^{r}\partial_r$$

olur. Burada R_{lij}^{r} Riemann eğrilik tensörü katsayıları

$$R_{lij}^{r} = \frac{\partial}{\partial u_i}\Gamma_{jl}^{r} - \frac{\partial}{\partial u_j}\Gamma_{il}^{r} - \sum_{s=0}^{k}\Gamma_{il}^{s}\Gamma_{js}^{r} + \sum_{s=0}^{k}\Gamma_{jl}^{s}\Gamma_{is}^{r}$$

dır. Böylece Teorem 2.2.12. den M' nün Riemann-Christoffel eğrilik tensörü

$$R_{hlij} = \sum_{r=0}^{k} g_{rh} \left(\frac{\partial}{\partial u_i} \Gamma_{jl}^{r} - \frac{\partial}{\partial u_j} \Gamma_{il}^{r} - \sum_{s=0}^{k} \Gamma_{il}^{s} \Gamma_{js}^{r} + \sum_{s=0}^{k} \Gamma_{jl}^{s} \Gamma_{is}^{r} \right) \tag{4.2.15}$$

dır. Ayrıca Teorem 2.2.8. den dolayı eğrilik tensörü için

$$\begin{aligned} R_{hlij} &= R_{ijhl} \\ R_{ijhl} &= -R_{jihl} \end{aligned} \tag{4.2.16}$$

bağıntıları vardır. Böylece, $1 \leq \iota, \lambda, \nu, \mu \leq k$, için, sırasıyla,

$$\begin{aligned} &R_{0000}, \\ &R_{\nu 000} = R_{00\nu 0} = -R_{0\nu 00} = -R_{000\nu}, \\ &R_{\nu\mu 00} = R_{00\nu\mu}, \\ &R_{0\lambda\nu\mu} = R_{\nu\mu\lambda 0} = -R_{0\lambda\nu\mu} = -R_{\nu\mu 0\lambda}, \\ &R_{\iota\lambda\nu\mu}, \\ &R_{\nu 0\mu 0} = -R_{0\nu\mu 0} = -R_{\mu 00\nu} = R_{0\mu 0\nu} \end{aligned}$$

değerleri bulunabilir.

(4.2.6) ve (4.2.14) denklemleri (4.2.15) denkleminde yerine yazılırsa, R_{0000} eğriliği

$$R_{0000} = \sum_{r=0}^{k} g_{r0} \left(\frac{\partial}{\partial u_0} \Gamma_{00}^{r} - \frac{\partial}{\partial u_0} \Gamma_{00}^{r} - \sum_{s=0}^{k} \Gamma_{00}^{s} \Gamma_{0s}^{r} + \sum_{s=0}^{k} \Gamma_{00}^{s} \Gamma_{0s}^{r} \right) = 0$$

olarak bulunur. Benzer şekilde $R_{\nu 000}$, $1 \leq \nu \leq k$, eğriliği

$$R_{\nu 000} = \sum_{r=0}^{k} g_{r\nu} \left(\frac{\partial}{\partial u_0} \Gamma_{00}^{r} - \frac{\partial}{\partial u_0} \Gamma_{00}^{r} - \sum_{s=0}^{k} \Gamma_{00}^{s} \Gamma_{0s}^{r} + \sum_{s=0}^{k} \Gamma_{00}^{s} \Gamma_{0s}^{r} \right) = 0$$

elde edilir. Ayrıca, $1 \leq \nu, \mu \leq k$, olmak üzere $R_{\nu\mu 00}$ eğriliği

$$R_{\nu\mu 00} = \sum_{r=0}^{k} g_{r\nu} \left(\frac{\partial}{\partial u_0} \Gamma^r_{0\mu} - \frac{\partial}{\partial u_0} \Gamma^r_{0\mu} - \sum_{s=0}^{k} \Gamma^s_{0\mu} \Gamma^r_{0s} + \sum_{s=0}^{k} \Gamma^s_{0\mu} \Gamma^r_{0s} \right) = 0$$

dır. Bu son denklemlerden

$$R_{0000} = R_{\nu 000} = R_{0\nu 00} = R_{\nu\mu 00} = 0 \quad , \quad 1 \le \nu, \mu \le k$$

olduğundan dolayı

$$R_{ij00} = 0 \qquad , \qquad 0 \le i, j \le k \tag{4.2.17}$$

olur.

Ayrıca, (4.2.15) denkleminden $R_{0\lambda\nu\mu}$, $1 \le \lambda, \nu, \mu \le k$, eğriliği

$$\begin{aligned} R_{0\lambda\nu\mu} &= \sum_{r=0}^{k} g_{r0} \left(\frac{\partial}{\partial u_\nu} \Gamma^r_{\mu\lambda} - \frac{\partial}{\partial u_\mu} \Gamma^r_{\nu\lambda} - \sum_{s=0}^{k} \Gamma^s_{\nu\lambda} \Gamma^r_{\mu s} + \sum_{s=0}^{k} \Gamma^s_{\mu\lambda} \Gamma^r_{\nu s} \right) \\ &= g_{00} \left(\frac{\partial}{\partial u_\nu} \Gamma^0_{\mu\lambda} - \frac{\partial}{\partial u_\mu} \Gamma^0_{\nu\lambda} - \Gamma^0_{\nu\lambda} \Gamma^0_{\mu 0} + \Gamma^0_{\mu\lambda} \Gamma^0_{\nu 0} - \sum_{s=1}^{k} \Gamma^s_{\nu\lambda} \Gamma^0_{\mu s} + \sum_{s=1}^{k} \Gamma^s_{\mu\lambda} \Gamma^0_{\nu s} \right) \\ &\quad + \sum_{r=1}^{k} g_{r0} \left(\frac{\partial}{\partial u_\nu} \Gamma^r_{\mu\lambda} - \frac{\partial}{\partial u_\mu} \Gamma^r_{\nu\lambda} - \Gamma^0_{\nu\lambda} \Gamma^r_{\mu 0} + \Gamma^0_{\mu\lambda} \Gamma^r_{\nu 0} - \sum_{s=1}^{k} \Gamma^s_{\nu\lambda} \Gamma^r_{\mu s} + \sum_{s=1}^{k} \Gamma^s_{\mu\lambda} \Gamma^r_{\nu s} \right) \end{aligned}$$

dir. Burada, (4.2.14) de verilen

$$\Gamma^0_{\nu\mu} = \Gamma^0_{\mu\nu} = \Gamma^\lambda_{\nu\mu} = \Gamma^\lambda_{\mu\nu} = 0 \qquad , \qquad 1 \le \lambda, \nu, \mu \le k$$

eşitlikleri göz önüne alınırsa

$$R_{0\lambda\nu\mu} = 0 \qquad , \qquad 1 \le \lambda, \nu, \mu \le k$$

bulunur. Benzer şekilde (4.2.15) denkleminden $R_{\iota\lambda\nu\mu}$, $1 \le \iota, \lambda, \nu, \mu \le k$, eğriliği

$$
\begin{aligned}
R_{\iota\lambda\nu\mu} &= \sum_{r=0}^{k} g_{r\iota}\left(\frac{\partial}{\partial u_\nu}\Gamma^r_{\mu\lambda} - \frac{\partial}{\partial u_\mu}\Gamma^r_{\nu\lambda} - \sum_{s=0}^{k}\Gamma^s_{\nu\lambda}\Gamma^r_{\mu s} + \sum_{s=0}^{k}\Gamma^s_{\mu\lambda}\Gamma^r_{\nu s}\right) \\
&= g_{0\iota}\left(\frac{\partial}{\partial u_\nu}\Gamma^0_{\mu\lambda} - \frac{\partial}{\partial u_\mu}\Gamma^0_{\nu\lambda} - \Gamma^0_{\nu\lambda}\Gamma^0_{\mu 0} + \Gamma^0_{\mu\lambda}\Gamma^0_{\nu 0} - \sum_{s=1}^{k}\Gamma^s_{\nu\lambda}\Gamma^0_{\mu s} + \sum_{s=1}^{k}\Gamma^s_{\mu\lambda}\Gamma^0_{\nu s}\right) \\
&\quad + \sum_{r=1}^{k} g_{r\iota}\left(\frac{\partial}{\partial u_\nu}\Gamma^r_{\mu\lambda} - \frac{\partial}{\partial u_\mu}\Gamma^r_{\nu\lambda} - \Gamma^0_{\nu\lambda}\Gamma^r_{\mu 0} + \Gamma^0_{\mu\lambda}\Gamma^r_{\nu 0} - \sum_{s=1}^{k}\Gamma^s_{\nu\lambda}\Gamma^r_{\mu s} + \sum_{s=1}^{k}\Gamma^s_{\mu\lambda}\Gamma^r_{\nu s}\right)
\end{aligned}
$$

dır. (4.2.14) denkleminden

$$
\Gamma^0_{\nu\mu} = \Gamma^0_{\mu\nu} = \Gamma^\lambda_{\nu\mu} = \Gamma^\lambda_{\mu\nu} = 0 \qquad , \qquad 1 \le \lambda, \nu, \mu \le k
$$

eşitlikleri göz önüne alınırsa

$$
R_{\iota\lambda\nu\mu} = 0 \qquad , \qquad 1 \le \iota, \lambda, \nu, \mu \le k
$$

bulunur. Böylece

$$
R_{00\nu\mu} = R_{\lambda 0\nu\mu} = R_{0\lambda\nu\mu} = R_{\iota\lambda\nu\mu} = 0 \quad , \quad 1 \le \iota, \lambda, \nu, \mu \le k
$$

olduğundan

$$
R_{ij\nu\mu} = 0 \quad , \quad 0 \le i, j \le k \quad , \quad 1 \le \nu, \mu \le k \tag{4.2.18}
$$

olarak genellenir. Son olarak (4.2.15) denkleminden $R_{\nu 0\mu 0}$, $1 \le \nu, \mu \le k$, eğriliği

$$
R_{\nu 0\mu 0} = \sum_{r=0}^{k} g_{r\nu}\left(\frac{\partial}{\partial u_\mu}\Gamma^r_{00} - \frac{\partial}{\partial u_0}\Gamma^r_{\mu 0} - \sum_{s=0}^{k}\Gamma^s_{\mu 0}\Gamma^r_{0s} + \sum_{s=0}^{k}\Gamma^s_{00}\Gamma^r_{\mu s}\right)
$$

dir, yani

$$R_{\nu 0\mu 0}=g_{0\nu}\left(\frac{\partial}{\partial u_\mu}\Gamma^0_{00}-\frac{\partial}{\partial u_0}\Gamma^0_{\mu 0}-\Gamma^0_{\mu 0}\Gamma^0_{00}+\Gamma^0_{00}\Gamma^0_{\mu 0}-\sum_{s=1}^{k}\Gamma^s_{\mu 0}\Gamma^0_{0s}+\sum_{s=1}^{k}\Gamma^s_{00}\Gamma^0_{\mu s}\right)$$
$$+\sum_{r=1}^{k}g_{r\nu}\left(\frac{\partial}{\partial u_\mu}\Gamma^r_{00}-\frac{\partial}{\partial u_0}\Gamma^r_{\mu 0}-\Gamma^0_{\mu 0}\Gamma^r_{00}+\Gamma^0_{00}\Gamma^r_{\mu 0}-\sum_{s=1}^{k}\Gamma^s_{\mu 0}\Gamma^r_{0s}+\sum_{s=1}^{k}\Gamma^s_{00}\Gamma^r_{\mu s}\right) \tag{4.2.19}$$

olur. Bu son denklemin bileşenlerini hesaplayabilmek için (4.2.14) eşitlikleri göz önüne alınırsa

$$\frac{\partial}{\partial u_\mu}\Gamma^0_{00}=-\frac{1}{2g^2}\frac{\partial g}{\partial u_\mu}\frac{\partial g}{\partial u_0}+\frac{1}{2g}\frac{\partial^2 g}{\partial u_\mu\partial u_0}-\frac{1}{2g^2}\sum_{\nu=1}^{k}\left(\zeta_\nu+\sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{\nu\mu}u_\mu\right)\frac{\partial g}{\partial u_\mu}\frac{\partial g}{\partial u_\nu}$$
$$+\frac{1}{2g}\sum_{\nu=1}^{k}\alpha_{\nu\mu}\frac{\partial g}{\partial u_\nu}+\frac{1}{2g}\sum_{\nu=1}^{k}\left(\zeta_\nu+\sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{\nu\mu}u_\mu\right)\frac{\partial^2 g}{\partial u_\mu\partial u_\nu}\ ,$$

$$\frac{\partial}{\partial u_0}\Gamma^0_{\mu 0}=-\frac{1}{2g^2}\frac{\partial g}{\partial u_0}\frac{\partial g}{\partial u_\mu}+\frac{1}{2g}\frac{\partial^2 g}{\partial u_0\partial u_\mu}\ ,$$

$$\sum_{s=1}^{k}\Gamma^s_{\mu 0}\Gamma^0_{0s}=-\frac{1}{4g^2}\sum_{s=1}^{k}\left(\zeta_s+\sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{s\mu}u_\mu\right)\frac{\partial g}{\partial u_s}\frac{\partial g}{\partial u_\mu}+\frac{1}{2g}\sum_{s=1}^{k}\alpha_{s\mu}\frac{\partial g}{\partial u_s}\ ,$$

$$\frac{\partial}{\partial u_\mu}\Gamma^r_{00}=\frac{1}{2g^2}\left(\zeta_r+\sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{r\mu}u_\mu\right)\frac{\partial g}{\partial u_\mu}\frac{\partial g}{\partial u_0}-\frac{1}{2g}\alpha_{r\mu}\frac{\partial g}{\partial u_0}$$
$$-\frac{1}{2g}\left(\zeta_r+\sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{r\mu}u_\mu\right)\frac{\partial^2 g}{\partial u_\mu\partial u_0}$$
$$+\frac{1}{2g^2}\left(\zeta_r+\sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{r\mu}u_\mu\right)\sum_{\nu=1}^{k}\left(\zeta_\nu+\sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{\nu\mu}u_\mu\right)\frac{\partial g}{\partial u_\mu}\frac{\partial g}{\partial u_\nu}$$
$$-\frac{1}{2g}\alpha_{r\mu}\sum_{\nu=1}^{k}\left(\zeta_\nu+\sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{\nu\mu}u_\mu\right)\frac{\partial g}{\partial u_\nu}-\frac{1}{2g}\left(\zeta_r+\sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{r\mu}u_\mu\right)\sum_{\nu=1}^{k}\alpha_{\nu\mu}\frac{\partial g}{\partial u_\nu}$$
$$-\frac{1}{2g}\left(\zeta_r+\sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{r\mu}u_\mu\right)\sum_{\nu=1}^{k}\left(\zeta_\nu+\sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{\nu\mu}u_\mu\right)\frac{\partial^2 g}{\partial u_\mu\partial u_\nu}+\dot{\alpha}_{r\mu}$$
$$+\sum_{\nu=1}^{k}\alpha_{\nu\mu}\alpha_{r\nu}+\frac{1}{2}\varepsilon_r\frac{\partial^2 g}{\partial u_r\partial u_\mu}\ ,$$

$$\frac{\partial}{\partial u_0}\Gamma^r_{\mu 0} = \frac{1}{2g^2}\left(\zeta_r + \sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{r\mu}u_\mu\right)\frac{\partial g}{\partial u_\mu}\frac{\partial g}{\partial u_0} - \frac{1}{2g}\left(\dot{\zeta}_r + \sum_{\mu=1}^{k}\dot{\alpha}_{r\mu}u_\mu\right)\frac{\partial g}{\partial u_\mu}$$
$$-\frac{1}{2g}\left(\zeta_r + \sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{r\mu}u_\mu\right)\frac{\partial^2 g}{\partial u_\mu \partial u_0} + \dot{\alpha}_{r\mu}\ ,$$

$$\Gamma^0_{\mu 0}\Gamma^r_{00} = -\frac{1}{4g^2}\left(\zeta_r + \sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{r\mu}u_\mu\right)\frac{\partial g}{\partial u_0}\frac{\partial g}{\partial u_\mu}$$
$$-\frac{1}{4g^2}\left(\zeta_r + \sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{r\mu}u_\mu\right)\sum_{\nu=1}^{k}\left(\zeta_\nu + \sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{\nu\mu}u_\mu\right)\frac{\partial g}{\partial u_\nu}\frac{\partial g}{\partial u_\mu}$$
$$+\frac{1}{2g}\left(\dot{\zeta}_r + \sum_{\mu=1}^{k}\dot{\alpha}_{r\mu}u_\mu\right)\frac{\partial g}{\partial u_\mu} + \frac{1}{2g}\sum_{\nu=1}^{k}\left(\zeta_\nu + \sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{\nu\mu}u_\mu\right)\alpha_{r\nu}\frac{\partial g}{\partial u_\mu}$$
$$-\frac{1}{4g}\frac{\partial g}{\partial u_r}\frac{\partial g}{\partial u_\mu}\ ,$$

$$\Gamma^0_{00}\Gamma^r_{\mu 0} = -\frac{1}{4g^2}\left(\zeta_r + \sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{r\mu}u_\mu\right)\frac{\partial g}{\partial u_0}\frac{\partial g}{\partial u_\mu}$$
$$-\frac{1}{4g^2}\left(\zeta_r + \sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{r\mu}u_\mu\right)\sum_{\nu=1}^{k}\left(\zeta_\nu + \sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{\nu\mu}u_\mu\right)\frac{\partial g}{\partial u_\nu}\frac{\partial g}{\partial u_\mu}$$
$$+\frac{1}{2g}\alpha_{r\mu}\frac{\partial g}{\partial u_0} + \frac{1}{2g}\sum_{\nu=1}^{k}\left(\zeta_\nu + \sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{\nu\mu}u_\mu\right)\alpha_{r\mu}\frac{\partial g}{\partial u_\nu}\ ,$$

$$\sum_{s=1}^{k}\Gamma^s_{\mu 0}\Gamma^r_{0s} = \frac{1}{4g^2}\sum_{s=1}^{k}\left(\zeta_s + \sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{s\mu}u_\mu\right)\left(\zeta_r + \sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{r\mu}u_\mu\right)\frac{\partial g}{\partial u_s}\frac{\partial g}{\partial u_\mu} + \sum_{s=1}^{k}\alpha_{rs}\alpha_{s\mu}$$
$$-\frac{1}{2g}\sum_{s=1}^{k}\left(\zeta_s + \sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{s\mu}u_\mu\right)\alpha_{rs}\frac{\partial g}{\partial u_\mu} - \frac{1}{2g}\left(\zeta_r + \sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{r\mu}u_\mu\right)\sum_{s=1}^{k}\alpha_{s\mu}\frac{\partial g}{\partial u_s}$$

denklemleri elde edilir. Bu son denklemler ile birlikte (4.2.6) denklemindeki eşitlikler (4.2.19) denkleminde yerine yazılırsa

$$
\begin{aligned}
R_{\nu 0\mu 0} = \varepsilon_\nu \left(\zeta_\nu + \sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{\nu\mu}u_\mu\right)\Bigg[& -\frac{1}{2g^2}\frac{\partial g}{\partial u_\mu}\frac{\partial g}{\partial u_0} + \frac{1}{2g}\frac{\partial^2 g}{\partial u_\mu \partial u_0} - \frac{1}{2g^2}\sum_{\nu=1}^{k}\left(\zeta_\nu + \sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{\nu\mu}u_\mu\right)\frac{\partial g}{\partial u_\mu}\frac{\partial g}{\partial u_\nu} \\
& + \frac{1}{2g}\sum_{\nu=1}^{k}\alpha_{\nu\mu}\frac{\partial g}{\partial u_\nu} + \frac{1}{2g}\sum_{\nu=1}^{k}\left(\zeta_\nu + \sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{\nu\mu}u_\mu\right)\frac{\partial^2 g}{\partial u_\mu \partial u_\nu} + \frac{1}{2g^2}\frac{\partial g}{\partial u_0}\frac{\partial g}{\partial u_\mu} - \frac{1}{2g}\frac{\partial^2 g}{\partial u_0 \partial u_\mu} \\
& + \frac{1}{4g^2}\sum_{s=1}^{k}\left(\zeta_s + \sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{s\mu}u_\mu\right)\frac{\partial g}{\partial u_s}\frac{\partial g}{\partial u_\mu} - \frac{1}{2g}\sum_{s=1}^{k}\alpha_{s\mu}\frac{\partial g}{\partial u_s}\Bigg] \\
& + \sum_{r=1}^{k}\varepsilon_r\delta_{r\nu}\Bigg[\frac{1}{2g^2}\left(\zeta_r + \sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{r\mu}u_\mu\right)\frac{\partial g}{\partial u_\mu}\frac{\partial g}{\partial u_0} - \frac{1}{2g}\alpha_{r\mu}\frac{\partial g}{\partial u_0} - \frac{1}{2g}\left(\zeta_r + \sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{r\mu}u_\mu\right)\frac{\partial^2 g}{\partial u_\mu \partial u_0} \\
& + \frac{1}{2g^2}\left(\zeta_r + \sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{r\mu}u_\mu\right)\sum_{\nu=1}^{k}\left(\zeta_\nu + \sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{\nu\mu}u_\mu\right)\frac{\partial g}{\partial u_\mu}\frac{\partial g}{\partial u_\nu} - \frac{1}{2g}\sum_{\nu=1}^{k}\left(\zeta_\nu + \sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{\nu\mu}u_\mu\right)\alpha_{r\mu}\frac{\partial g}{\partial u_\nu} \\
& - \frac{1}{2g}\left(\zeta_r + \sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{r\mu}u_\mu\right)\sum_{\nu=1}^{k}\alpha_{\nu\mu}\frac{\partial g}{\partial u_\nu} - \frac{1}{2g}\left(\zeta_r + \sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{r\mu}u_\mu\right)\sum_{\nu=1}^{k}\left(\zeta_\nu + \sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{\nu\mu}u_\mu\right)\frac{\partial^2 g}{\partial u_\mu \partial u_\nu} \\
& + \dot{\alpha}_{r\mu} + \sum_{\nu=1}^{k}\alpha_{\nu\mu}\alpha_{r\nu} - \frac{1}{2}\varepsilon_r\frac{\partial^2 g}{\partial u_r \partial u_\mu} - \frac{1}{2g^2}\left(\zeta_r + \sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{r\mu}u_\mu\right)\frac{\partial g}{\partial u_\mu}\frac{\partial g}{\partial u_0} + \frac{1}{2g}\left(\dot{\zeta}_r + \sum_{\mu=1}^{k}\dot{\alpha}_{r\mu}u_\mu\right)\frac{\partial g}{\partial u_\mu} \\
& + \frac{1}{2g}\left(\zeta_r + \sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{r\mu}u_\mu\right)\frac{\partial^2 g}{\partial u_\mu \partial u_0} - \dot{\alpha}_{r\mu} + \frac{1}{4g^2}\left(\zeta_r + \sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{r\mu}u_\mu\right)\frac{\partial g}{\partial u_0}\frac{\partial g}{\partial u_\mu} \\
& + \frac{1}{4g^2}\left(\zeta_r + \sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{r\mu}u_\mu\right)\sum_{\nu=1}^{k}\left(\zeta_\nu + \sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{\nu\mu}u_\mu\right)\frac{\partial g}{\partial u_\nu}\frac{\partial g}{\partial u_\mu} - \frac{1}{2g}\left(\dot{\zeta}_r + \sum_{\mu=1}^{k}\dot{\alpha}_{r\mu}u_\mu\right)\frac{\partial g}{\partial u_\mu} \\
& - \frac{1}{2g}\sum_{\nu=1}^{k}\left(\zeta_\nu + \sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{\nu\mu}u_\mu\right)\alpha_{r\nu}\frac{\partial g}{\partial u_\mu} + \frac{1}{4g}\varepsilon_r\frac{\partial g}{\partial u_r}\frac{\partial g}{\partial u_\mu} - \frac{1}{4g^2}\left(\zeta_r + \sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{r\mu}u_\mu\right)\frac{\partial g}{\partial u_\mu}\frac{\partial g}{\partial u_0} \\
& - \frac{1}{4g^2}\left(\zeta_r + \sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{r\mu}u_\mu\right)\sum_{\nu=1}^{k}\left(\zeta_\nu + \sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{\nu\mu}u_\mu\right)\frac{\partial g}{\partial u_\nu}\frac{\partial g}{\partial u_\mu} + \frac{1}{2g}\alpha_{r\mu}\frac{\partial g}{\partial u_0} \\
& + \frac{1}{2g}\sum_{\nu=1}^{k}\left(\zeta_\nu + \sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{\nu\mu}u_\mu\right)\alpha_{r\mu}\frac{\partial g}{\partial u_\nu} - \frac{1}{4g^2}\left(\zeta_r + \sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{r\mu}u_\mu\right)\sum_{s=1}^{k}\left(\zeta_s + \sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{s\mu}u_\mu\right)\frac{\partial g}{\partial u_s}\frac{\partial g}{\partial u_\mu} \\
& - \sum_{s=1}^{k}\alpha_{rs}\alpha_{s\mu} + \frac{1}{2g}\sum_{s=1}^{k}\left(\zeta_s + \sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{s\mu}u_\mu\right)\alpha_{rs}\frac{\partial g}{\partial u_\mu} + \frac{1}{2g}\left(\zeta_r + \sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{r\mu}u_\mu\right)\sum_{s=1}^{k}\alpha_{s\mu}\frac{\partial g}{\partial u_s}\Bigg]
\end{aligned}
$$

bulunur. Gerekli sadeleştirmeler yapılır ve $\varepsilon_r\delta_{r\nu} = \begin{cases} 0, & r \neq \nu \\ \varepsilon_\nu, & r = \nu \end{cases}$ olduğu göz önüne

alınırsa

$$R_{\nu 0\mu 0}=-\frac{1}{2g^2}\sum_{\nu=1}^{k}\varepsilon_\nu\left(\zeta_\nu+\sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{\nu\mu}u_\mu\right)^2\frac{\partial g}{\partial u_\mu}\frac{\partial g}{\partial u_\nu}+\frac{1}{2g}\sum_{\nu=1}^{k}\varepsilon_\nu\left(\zeta_\nu+\sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{\nu\mu}u_\mu\right)^2\frac{\partial^2 g}{\partial u_\mu\partial u_\nu}$$
$$+\frac{1}{4g^2}\varepsilon_\nu\left(\zeta_\nu+\sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{\nu\mu}u_\mu\right)\sum_{s=1}^{k}\left(\zeta_s+\sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{s\mu}u_\mu\right)\frac{\partial g}{\partial u_s}\frac{\partial g}{\partial u_\mu}$$
$$+\frac{1}{2g^2}\sum_{\nu=1}^{k}\varepsilon_\nu\left(\zeta_\nu+\sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{\nu\mu}u_\mu\right)^2\frac{\partial g}{\partial u_\mu}\frac{\partial g}{\partial u_\nu}-\frac{1}{2g}\sum_{\nu=1}^{k}\varepsilon_\nu\left(\zeta_\nu+\sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{\nu\mu}u_\mu\right)^2\frac{\partial^2 g}{\partial u_\mu\partial u_\nu}$$
$$+\frac{1}{2}\varepsilon_\nu^2\frac{\partial^2 g}{\partial u_\nu\partial u_\mu}-\frac{1}{4g}\varepsilon_\nu^2\frac{\partial g}{\partial u_\nu}\frac{\partial g}{\partial u_\mu}-\frac{1}{4g^2}\varepsilon_\nu\left(\zeta_\nu+\sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{\nu\mu}u_\mu\right)\sum_{s=1}^{k}\left(\zeta_s+\sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{s\mu}u_\mu\right)\frac{\partial g}{\partial u_s}\frac{\partial g}{\partial u_\mu}$$

elde edilir. Bu son denklemde sadeleştirmeler tekrar yapılırsa

$$R_{\nu 0\mu 0}=\frac{1}{2}\varepsilon_\nu^2\frac{\partial^2 g}{\partial u_\nu\partial u_\mu}-\frac{1}{4g}\varepsilon_\nu^2\frac{\partial g}{\partial u_\nu}\frac{\partial g}{\partial u_\mu}$$

bulunur ve $\varepsilon_\nu^2=1$ olduğundan $R_{\nu 0\mu 0}$, $1\le \nu,\mu\le k$, eğriliği M' nün birinci temel formunun matrisinin determinantı g ve g nin birinci ve ikinci mertebeden kısmi türevleri cinsinden

$$R_{\nu 0\mu 0}=\frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial u_\nu\partial u_\mu}-\frac{1}{4g}\frac{\partial g}{\partial u_\nu}\frac{\partial g}{\partial u_\mu} \tag{4.2.20}$$

olarak elde edilir.

Sonuç olarak, $0\le i,j\le k$ ve $1\le \nu,\mu\le k$, olmak üzere, (4.2.17), (4.2.18) ve (4.2.20) denklemlerinden Riemann-Christoffel eğrilik tensörü için,

$$\begin{aligned}R_{ij00}&=0,\\ R_{ij\nu\mu}&=0,\\ R_{\nu 0\mu 0}&=\frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial u_\nu\partial u_\mu}-\frac{1}{4g}\frac{\partial g}{\partial u_\nu}\frac{\partial g}{\partial u_\mu}\end{aligned} \tag{4.2.21}$$

bağıntıları verilebilir.

Tanım 4.2.1. IR_1^n, $n-$boyutlu Minkowski uzayında M', $(k+1)-$boyutlu timelike doğrultman uzaylı timelike regle yüzeyin $\xi \in T_{M'}(\xi)$ noktasında tanjant uzayının iki boyutlu altuzayının bir bazı $\{b,c\}$ olsun. $Sp\{b,c\}$ teğet kesiti nondejenere olmak üzere

$$K_\xi(b,c)=\frac{\langle b,R(b,c)c\rangle}{\langle b,b\rangle\langle c,c\rangle-\langle b,c\rangle^2} \tag{4.2.22}$$

olarak tanımlanan $K_\xi(b,c)$ reel değerine M' nün ξ noktasındaki kesit eğriliği denir.

M' nün lineer bağımsız teğet vektörleri b ve c nin koordinatları, sırasıyla, $(\beta_0,\beta_1,\ldots,\beta_k)$ ve $(\gamma_0,\gamma_1,\ldots,\gamma_k)$ olmak üzere $\xi \in T_{M'}(\xi)$ noktasında M' regle yüzeyinin kesit eğriliği, bileşenler cinsinden

$$K_\xi(b,c)=\frac{\sum\limits_{i,j,r,s=0}^{k} R_{ijrs}\beta_i\beta_r\gamma_j\gamma_s}{\langle b,b\rangle\langle c,c\rangle-\langle b,c\rangle^2} \tag{4.2.23}$$

dir.

IR_1^n, $n-$boyutlu Minkowski uzayında M' timelike doğrultman uzaylı timelike regle yüzeyinin dayanak eğrisi aynı zamanda M' nün Ω merkez regle yüzeyinin de dayanak eğrisi olmak üzere, M' nün $E_k(t)$ ye ortogonal olan bir n normal teğet vektörü $\forall\xi(t,u_v)$ noktasında

$$n=\sum_{\sigma=1}^{m}u_\sigma\kappa_\sigma(t)\,a_{k+\sigma}(t)+\eta_{m+1}a_{k+m+1}(t) \qquad , \qquad (\eta_{m+1}\neq 0) \tag{4.2.24}$$

şeklinde tanımlanır, öyle ki bu normal teğet vektör alanı, timelike doğrultman uzayına ortogonal olduğundan daima spacelike dır. Ayrıca, $E_k(t)$ timelike doğrultman uzayının $\{e_1(t), e_2(t), \ldots, e_{s-1}(t), e_s(t), e_{s+1}(t) \ldots, e_k(t)\}$ asli çatısında

$$\langle e_s(t), e_s(t) \rangle = -1 \quad , \quad 1 \le s \le k$$

olacak şekilde bir tane timelike vektör vardır. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned} &\langle e_\nu, e_\nu \rangle \langle n, n \rangle - \langle e_\nu, n \rangle^2 > 0 \quad , \quad 1 \le \nu \le k \quad , \quad \nu \ne s, \\ &\langle e_s, e_s \rangle \langle n, n \rangle - \langle e_s, n \rangle^2 < 0 \end{aligned}$$

olacağından $E_k(t)$ nin asli çatısına göre ν. asli teğet kesiti (e_ν, n), $1 \le \nu \le k$, $\nu \ne s$ spacelike düzlemdir ve s. asli teğet kesiti (e_s, n) timelike düzlemdir.

Bu iki durum ayrı ayrı göz önünde bulundurularak (4.2.21), (4.2.23) ve (4.2.24) denklemlerinden $\xi \in M'$ noktasında spacelike ve timelike asli kesitlerin eğriliği ile ilgili aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 4.2.2. IR_1^n, $n-$boyutlu Minkowski uzayında timelike doğrultman uzaylı, merkez regle yüzeyli genelleştirilmiş timelike regle yüzey M' olsun. n spacelike normal teğet vektörü ve e_s, $1 \le s \le k$, $E_k(t)$ timelike doğrultman uzayında timelike baz vektörü olmak üzere, $\forall \xi \in M'$ noktasında (e_ν, n), $1 \le \nu \le k$, $\nu \ne s$ spacelike ν. asli kesitinin eğriliği ve (e_s, n) timelike s. asli kesitinin eğriliği, sırasıyla,

$$K_\xi(e_\nu, n) = -\frac{1}{2g}\frac{\partial^2 g}{\partial u_\nu^2} + \frac{1}{4g^2}\left(\frac{\partial g}{\partial u_\nu}\right)^2 \quad , \quad 1 \le \nu \le k \quad , \quad \nu \ne s \qquad (4.2.25)$$

ve

$$K_\xi\left(e_s,n\right)=\frac{1}{2g}\frac{\partial^2 g}{\partial u_s^{\;2}}-\frac{1}{4g^2}\left(\frac{\partial g}{\partial u_s}\right)^2 \tag{4.2.26}$$

dır.

İspat. M', timelike doğrultman uzaylı, merkez regle yüzeyli genelleştirilmiş timelike regle yüzeyinin teğetsel demetinin kanonik bazı, (4.2.5) e göre $\left(e_\nu,n\right)$, $1\le\nu\le k$, asli kesitinin bazını oluşturan e_ν, $1\le\nu\le k$, ve n nin koordinatları, sırasıyla, $\left(\beta_0,\beta_1,\ldots,\beta_k\right)$ ve$\left(\gamma_0,\gamma_1,\ldots,\gamma_k\right)$ olmak üzere, (4.2.23) denkleminden $\left(e_\nu,n\right)$, $1\le\nu\le k$, $\nu.$ asli kesitinin eğriliği

$$K_\xi\left(e_\nu,n\right)=\frac{\beta_\nu\beta_\nu\gamma_0\gamma_0R_{\nu0\nu0}}{\left\langle e_\nu,e_\nu\right\rangle\left\langle n,n\right\rangle-\left\langle e_\nu,n\right\rangle^2}$$

olur. Burada (4.2.21) ve (4.2.24) denklemleri yerine yazılırsa

$$K_\xi\left(e_\nu,n\right)=\frac{\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 g}{\partial u_\nu^{\;2}}-\dfrac{1}{4g}\left(\dfrac{\partial g}{\partial u_\nu}\right)^2}{\left\langle e_\nu,e_\nu\right\rangle\left\langle\sum_{\sigma=1}^{m}u_\sigma\kappa_\sigma a_{k+\sigma}+\eta_{m+1}a_{k+m+1},\sum_{\sigma=1}^{m}u_\sigma\kappa_\sigma a_{k+\sigma}+\eta_{m+1}a_{k+m+1}\right\rangle-\left\langle e_\nu,\sum_{\sigma=1}^{m}u_\sigma\kappa_\sigma a_{k+\sigma}+\eta_{m+1}a_{k+m+1}\right\rangle^2}$$

dir. Ayrıca, $1\le\nu\le k$, $\nu\ne s$ ve $1\le\sigma\le m$, olmak üzere

$$\begin{aligned}
&\left\langle e_\nu,e_\nu\right\rangle=1\\
&\left\langle e_s,e_s\right\rangle=-1\\
&\left\langle a_{k+\sigma},a_{k+\sigma}\right\rangle=\left\langle a_{k+m+1},a_{k+m+1}\right\rangle=1,\\
&\left\langle e_\nu,a_{k+\sigma}\right\rangle=\left\langle e_\nu,a_{k+m+1}\right\rangle=\left\langle e_s,a_{k+\sigma}\right\rangle=\left\langle e_s,a_{k+m+1}\right\rangle=\left\langle a_{k+\sigma},a_{k+m+1}\right\rangle=0
\end{aligned}$$

eşitlikleri kullanılarak, sırasıyla, spacelike $\nu.$ asli kesitin eğriliği ve timelike $s.$ asli kesitin eğriliği

$$K_{\xi}\left(e_{\nu},n\right)=\frac{\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^{2}g}{\partial u_{\nu}^{2}}-\dfrac{1}{4g}\left(\dfrac{\partial g}{\partial u_{\nu}}\right)^{2}}{\sum\limits_{\sigma=1}^{m}\left(u_{\sigma}\kappa_{\sigma}\right)^{2}+\eta_{m+1}^{2}} \quad , \qquad 1\leq\nu\leq k\,,\ \nu\neq s$$

ve

$$K_{\xi}\left(e_{\nu},n\right)=\frac{\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^{2}g}{\partial u_{\nu}^{2}}-\dfrac{1}{4g}\left(\dfrac{\partial g}{\partial u_{\nu}}\right)^{2}}{-\sum\limits_{\sigma=1}^{m}\left(u_{\sigma}\kappa_{\sigma}\right)^{2}-\eta_{m+1}^{2}}$$

dır. Bu son denklemlerde (4.2.6) denklemi ile verilen $g=-\sum\limits_{\sigma=1}^{m}\left(u_{\sigma}\kappa_{\sigma}\right)^{2}-\eta_{m+1}^{2}$ eşitliği de göz önüne alınırsa (4.2.25) ve (4.2.26) denklemleri elde edilir ve ispat tamamlanır.

Böylece aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 4.2.3. IR_{1}^{n}, $n-$boyutlu Minkowski uzayında timelike doğrultman uzaylı, merkez regle yüzeyli genelleştirilmiş timelike regle yüzey M' olsun. $\forall\xi\in M'$ noktasında M' nün $\left(e_{\nu},n\right)$, $1\leq\nu\leq k$, nondejenere (spacelike veya timelike) ν. asli kesitinin eğriliği

$$K_{\xi}\left(e_{\nu},n\right)=\varepsilon_{\nu}\left(-\frac{1}{2g}\frac{\partial^{2}g}{\partial u_{\nu}^{2}}+\frac{1}{4g^{2}}\left(\frac{\partial g}{\partial u_{\nu}}\right)^{2}\right) \quad , \quad 1\leq\nu\leq k \qquad (4.2.27)$$

dır ve burada . $\varepsilon_{\nu}=\left\langle e_{\nu},e_{\nu}\right\rangle=\pm1$ dir.

Bundan sonra $\left(e_{\nu},n\right)$, $1\leq\nu\leq k$, nondejenere ν. asli kesitinin eğriliğine M', timelike doğrultman uzaylı genelleştirilmiş timelike regle yüzeyinin ν. asli kesit eğriliği olarak adlandırılacaktır.

Teorem 4.2.4. IR_{1}^{n}, $n-$boyutlu Minkowski uzayında timelike doğrultman uzaylı, merkez regle yüzeyli genelleştirilmiş timelike regle yüzeyi M' nün spacelike normal teğet vektörü n olsun. $\forall \xi \in M'$ noktasında M' nün σ. asli kesit eğriliği ve $(m+\rho)$. asli kesit eğriliği, sırasıyla,

$$K_{\xi}(e_{\sigma},n) = -\frac{\varepsilon_{\sigma}(\kappa_{\sigma})^2\left[\sum_{\iota=1}^{m}(u_{\iota}\kappa_{\iota})^2 + \eta_{m+1}^2 - (u_{\sigma}\kappa_{\sigma})^2\right]}{\left(\sum_{\iota=1}^{m}(u_{\iota}\kappa_{\iota})^2 + \eta_{m+1}^2\right)^2} \quad , \quad 1 \le \sigma \le m$$

ve

$$K_{\xi}(e_{m+\rho},n) = 0 \quad , \quad 1 \le \rho \le k-m$$

dır ve burada . $\varepsilon_{\sigma} = \langle e_{\sigma}, e_{\sigma} \rangle = \pm 1$ dir..

İspat. (4.2.6) denkleminde verilen g nin σ ya ve $(m+\rho)$ ya göre birinci ve ikinci mertebeden kısmi türevleri

$$\frac{\partial g}{\partial u_{\sigma}} = -2u_{\sigma}\kappa_{\sigma}^2 \quad , \quad \frac{\partial^2 g}{\partial u_{\sigma}^2} = -2\kappa_{\sigma}^2 \quad , \quad \left(\frac{\partial g}{\partial u_{\sigma}}\right)^2 = 4\left(u_{\sigma}\kappa_{\sigma}^2\right)^2\kappa_{\sigma}^2 \quad , \quad 1 \le \sigma \le m$$

ve

$$\frac{\partial g}{\partial u_{m+\rho}} = \frac{\partial^2 g}{\partial u_{m+\rho}^2} = \left(\frac{\partial g}{\partial u_{m+\rho}}\right)^2 = 0 \quad , \quad 1 \le \rho \le k-m ,$$

dır. Bu eşitlikler (4.2.27) denkleminde yerine yazılırsa, $1 \le \sigma \le m$ için nondejenere σ. asli kesitinin eğriliği

$$K_{\xi}(e_{\sigma},n) = -\varepsilon_{\sigma}\frac{-2(\kappa_{\sigma})^2}{-2\left(\sum_{\iota=1}^{m}(u_{\iota}\kappa_{\iota})^2 + \eta_{m+1}^2\right)} + \varepsilon_{\sigma}\frac{4(u_{\sigma}\kappa_{\sigma})^2(\kappa_{\sigma})^2}{4\left(\sum_{\iota=1}^{m}(u_{\iota}\kappa_{\iota})^2 + \eta_{m+1}^2\right)^2}$$

dır. Gerekli sadeleştirmeler yapılarak ispat tamamlanır.

Benzer şekilde, $1 \le \rho \le k-m$, için $(m+\rho)$. asli kesit eğriliği hesaplanırsa

$$K_{\xi}\left(e_{m+\rho},n\right)=0 \quad , \quad 1\leq\rho\leq k-m$$

elde edilir. Böylece aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 4.2.5. IR_1^n, $n-$boyutlu Minkowski uzayında timelike doğrultman uzaylı, merkez regle yüzeyli genelleştirilmiş timelike regle yüzey M' olsun. $\forall\xi\in M'$ noktasında, $1\leq\rho\leq k-m$, için M' nün $(m+\rho)$. asli kesit eğriliği sıfırdır.

Teorem 4.2.6. IR_1^n, $n-$boyutlu Minkowski uzayında timelike doğrultman uzaylı, merkez regle yüzeyli genelleştirilmiş timelike regle yüzey M' ve M' nün σ. asli dağılma parametresi P_σ, $1\leq\sigma\leq m$ olsun. $\forall\zeta\in\Omega$ merkez noktasında M' nün σ. asli kesit eğriliği ve $(m+\rho)$. asli kesit eğriliği, sırasıyla,

$$K_{\zeta}\left(e_{\sigma},n\right)=-\varepsilon_{\sigma}\frac{1}{P_{\sigma}^{2}} \quad , \quad 1\leq\sigma\leq m$$

ve

$$K_{\varsigma}\left(e_{m+\rho},n\right)=0 \quad , \quad 1\leq\rho\leq k-m$$

dır.

İspat. $\zeta\in\Omega$, M' nün merkez noktası olmak üzere (4.2.2) ve (4.2.27) denklemleri göz önüne alınırsa M' nün σ. kesit eğriliği

$$K_{\zeta}\left(e_{\sigma},n\right)=-\frac{\varepsilon_{\sigma}\kappa_{\sigma}^{2}\eta_{m+1}^{2}}{\left(\eta_{m+1}^{2}\right)^{2}} \quad , \quad 1\leq\sigma\leq m$$

bulunur. Gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$$K_{\zeta}\left(e_{\sigma},n\right)=-\varepsilon_{\sigma}\left(\frac{\kappa_{\sigma}}{\eta_{m+1}}\right)^{2} \quad , \quad 1\leq\sigma\leq m$$

elde edilir. Bu son denklem, (3.1.23) denklemi ile birlikte dikkate alınırsa M' nün σ. kesit eğriliği ve σ. asli dağılma parametresi arasındaki bağıntı bulunur. Ayrıca, Sonuç 4.2.5. den dolayı, M' nün $(m+\rho)$. asli kesit eğriliğinin sıfır olduğu açıktır.

IR_1^n, $n-$boyutlu Minkowski uzayında timelike doğrultman uzaylı, merkez regle yüzeyli genelleştirilmiş timelike regle yüzeyin $2-$boyutlu σ. asli ışın yüzeyi M'_σ, $1 \le \sigma \le m$, olsun. M'_σ nın $1-$boyutlu doğrultmanı $h_\sigma = Sp\{e_\sigma\}$, $1 \le \sigma \le m$, $E_k(t)$ içindedir ve Ω, merkez regle yüzeyi timelike iken $F_m(t)$ spacelike altuzay olacağından h_σ, $1 \le \sigma \le m$, doğrultmanları spacelike olacaktır. Dolayısıyla, M' nün spacelike ortogonal yörüngesi boyunca h_σ doğrultmanlarının hareketiyle oluşan $m-$tane striksiyon eğrili asli ışın yüzeyi spacelike dır.

Ayrıca, Ω merkez regle yüzeyi spacelike iken $F_m(t)$ timelike altuzay olacağından $h_\sigma = Sp\{e_\sigma\}$, $1 \le \sigma \le m$, doğrultmanlarından bir tanesi timelike ve diğer $(m-1)-$tanesi spacelike olacaktır. Dolayısıyla, M' nün spacelike ortogonal yörüngesi boyunca h_σ doğrultmanlarının hareketiyle oluşan striksiyon eğrili asli ışın yüzeylerinden $1-$tanesi timelike ve $(m-1)-$tanesi spacelike dır.

Bu iki durum ayrı ayrı incelenirse spacelike asli ışın yüzeylerinin ve timelike doğrultmanlı timelike asli ışın yüzeyinin kesit eğrilikleri ile ilgili aşağıdaki iki teorem verilebilir.

Teorem 4.2.7. IR_1^n, $n-$boyutlu Minkowski uzayında timelike doğrultman uzaylı, merkez regle yüzeyli genelleştirilmiş timelike regle yüzey M' nün $2-$boyutlu σ. spacelike asli ışın yüzeyi M'_σ, $1 \le \sigma \le m$, olsun. $\zeta \in \Omega \subset M'$, $u \in IR$ için $h_\sigma = Sp\{e_\sigma\}$ spacelike doğrultmanı üzerinde $\zeta + ue_\sigma$ noktasında M'_σ, σ. spacelike asli ışın yüzeyinin kesit eğriliği

$$K_{\zeta+ue_\sigma}\left(e_\sigma,n\right)=-\frac{P_\sigma^2}{\left(u^2+P_\sigma^2\right)^2} \quad , \quad 1\leq\sigma\leq m \qquad (4.2.28)$$

dır, burada P_σ, $1\leq\sigma\leq m$, M' nün σ. asli dağılma parametresidir.

İspat. IR_1^n, $n-$boyutlu Minkowski uzayında M' nün spacelike ortogonal yörüngesi boyunca $h_\sigma=Sp\{e_\sigma\}$, $1\leq\sigma\leq m$, spacelike asli ışınının oluşturduğu M'_σ, $1\leq\sigma\leq m$, $2-$boyutlu spacelike σ. asli ışın yüzeyi

$$\varphi_\sigma\left(t,u\right)=\alpha\left(t\right)+ue_\sigma\left(t\right) \quad , \quad 1\leq\sigma\leq m$$

parametrizasyonu ile verilir. M'_σ nın birinci temel formunun matrisinin determinantı

$$g=-\left(u\kappa_\sigma\right)^2-\eta_{m+1}^2 \quad , \quad 1\leq\sigma\leq m$$

dir. Böylece, $1\leq\sigma\leq m$, için g nin birinci ve ikinci mertebeden kısmi türevleri

$$\frac{\partial g}{\partial u}=-2u\kappa_\sigma^2 \quad , \quad \frac{\partial^2 g}{\partial u^2}=-2\kappa_\sigma^2 \quad , \quad \left(\frac{\partial g}{\partial u}\right)^2=4\left(u\kappa_\sigma^2\right)^2\kappa_\sigma^2$$

dır. $\left(e_\sigma,n\right)$, $1\leq\sigma\leq m$, spacelike kesitinin eğriliğini bulmak için $\zeta\in\Omega\subset M'$, $u\in IR$ olmak üzere $\zeta+ue_\sigma$ noktasında, sırasıyla, (4.2.23) denklemi göz önüne alınır, son eşitlikler yerine konulur ve gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$$\begin{aligned}
K_{\zeta+ue_\sigma}(e_\sigma,n) &= \frac{R_{\sigma0\sigma0}}{\langle e_\sigma,e_\sigma\rangle\langle n,n\rangle-\langle e_\sigma,n\rangle^2} \\
&= -\frac{1}{2g}\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}+\frac{1}{4g^2}\left(\frac{\partial g}{\partial u}\right)^2 \\
&= -\frac{-2(\kappa_\sigma)^2}{2\left(-(u\kappa_\sigma)^2-\eta_{m+1}^2\right)}+\frac{4(u\kappa_\sigma)^2(\kappa_\sigma)^2}{4\left(-(u\kappa_\sigma)^2-\eta_{m+1}^2\right)^2} \\
&= -\frac{(\kappa_\sigma)^2\left[(u\kappa_\sigma)^2+\eta_{m+1}^2-(u\kappa_\sigma)^2\right]}{\left((u\kappa_\sigma)^2+\eta_{m+1}^2\right)^2} \\
&= -\frac{(\kappa_\sigma\eta_{m+1})^2}{(u\kappa_\sigma)^4+2(u\kappa_\sigma\eta_{m+1})^2+(\eta_{m+1})^4}
\end{aligned}$$

elde edilir. Payı ve paydası κ_σ^4 ile sadeleştirildiğinde

$$K_{\zeta+ue_\sigma}(e_\sigma,n) = -\frac{\left(\dfrac{\eta_{m+1}}{\kappa_\sigma}\right)^2}{u^4+2u^2\left(\dfrac{\eta_{m+1}}{\kappa_\sigma}\right)^2+\left(\dfrac{\eta_{m+1}}{\kappa_\sigma}\right)^4}$$

bulunur. Bu son denklem ile birlikte (3.1.23) denklemi göz alınırsa

$$K_{\zeta+ue_\sigma}(e_\sigma,n) = -\frac{P_\sigma^2}{u^4+2u^2P_\sigma^2+P_\sigma^4} \quad , \qquad 1\le\sigma\le m$$

elde edilir. Böylece, gerekli düzenlemeler sonucu (4.2.28) denklemi elde edilir ve ispat tamamlanır.

IR_1^n de timelike doğrultman uzaylı genelleştirilmiş timelike regle yüzeyin spacelike ortogonal yörüngesi boyunca, spacelike asli ışınlarının hareketiyle oluşan $2-$boyutlu spacelike asli ışın yüzeylerinin (4.2.28) denklemi ile verilen kesit eğriliği, [6] da verilen IR_1^3, $3-$boyutlu Minkowski uzayında spacelike ışın yüzeylerinin Gauss eğriliği ile dağılma parametresi arasındaki bağıntı olan **Lorentzian Lamarle formülünün genelleştirilmişidir**.

Teorem 4.2.8. IR_1^n, $n-$boyutlu Minkowski uzayında timelike doğrultman uzaylı, merkez regle yüzeyli genelleştirilmiş timelike regle yüzey M' nün $2-$boyutlu timelike doğrultmanlı timelike asli ışın yüzeyi M'_s, $1 \le s \le m$, olsun. $\zeta \in \Omega \subset M$, $u \in IR$ için $h_s = Sp\{e_s\}$ doğrultmanı üzerinde $\zeta + ue_s$ noktasında M'_s, $s.$ timelike asli ışın yüzeyinin kesit eğriliği

$$K_{\zeta+ue_s}(e_s, n) = \frac{P_s^2}{\left(u^2 + P_s^2\right)^2} \quad , \quad 1 \le s \le m \tag{4.2.29}$$

dır, burada P_s, $1 \le s \le m$, M' nün $s.$ asli dağılma parametresidir.

İspat. IR_1^n, $n-$boyutlu Minkowski uzayında M' nün ortogonal yörüngesi boyunca $h_s = Sp\{e_s\}$, $1 \le s \le m$, timelike asli ışının oluşturduğu $1-$tane M'_s, $1 \le s \le m$, $2-$boyutlu timelike doğrultmanlı timelike asli ışın yüzeyi

$$\varphi_s(t,u) = \alpha(t) + ue_s(t)$$

parametrizasyonu ile verilir. M'_s nin birinci temel formunun matrisinin determinantı

$$g = -\left(u\kappa_s\right)^2 - \eta_{m+1}^2$$

olur. Böylece, g nin birinci ve ikinci mertebeden kısmi türevleri

$$\frac{\partial g}{\partial u} = -2u\kappa_s^2 \quad , \quad \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} = -2\kappa_s^2 \quad , \quad \left(\frac{\partial g}{\partial u}\right)^2 = 4\left(u\kappa_s^2\right)^2 \kappa_s^2$$

dır. $h_s = Sp\{e_s\}$ doğrultmanı üzerinde yani $\zeta \in \Omega \subset M'$, $u \in IR$ olmak üzere $\zeta + ue_s$ noktasında (e_s, n), $1 \le s \le m$, timelike kesitinin eğriliğini bulmak için, sırasıyla, (4.2.23) denklemi göz önüne alınır, son eşitlikler yerine yazılır ve gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$$\begin{aligned}
K_{\zeta+ue_s}(e_s, n) &= \frac{R_{s0s0}}{\langle e_s, e_s\rangle\langle n, n\rangle - \langle e_s, n\rangle^2} \\
&= \frac{1}{2g}\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} - \frac{1}{4g^2}\left(\frac{\partial g}{\partial u}\right)^2 \\
&= \frac{-2(\kappa_s)^2}{2\left(-(u\kappa_s)^2 - \eta_{m+1}^2\right)} - \frac{4(u\kappa_s)^2(\kappa_s)^2}{4\left(-(u\kappa_s)^2 - \eta_{m+1}^2\right)^2} \\
&= \frac{(\kappa_s)^2\left[(u\kappa_s)^2 + \eta_{m+1}^2 - (u\kappa_s)^2\right]}{\left((u\kappa_s)^2 + \eta_{m+1}^2\right)^2} \\
&= \frac{(\kappa_s \eta_{m+1})^2}{(u\kappa_s)^4 + 2(u\kappa_s\eta_{m+1})^2 + (\eta_{m+1})^4}
\end{aligned}$$

elde edilir. Payı ve paydası κ_s^4 ile sadeleştirildiğinde

$$K_{\zeta+ue_s}(e_s, n) = \frac{-\left(\dfrac{\eta_{m+1}}{\kappa_s}\right)^2}{u^4 + 2u^2\left(\dfrac{\eta_{m+1}}{\kappa_s}\right)^2 + \left(\dfrac{\eta_{m+1}}{\kappa_s}\right)^4}$$

bulunur. Bu son denklem ile birlikte (3.1.23) denklemi ele alınırsa

$$K_{\zeta+ue_s}(e_s, n) = \frac{-P_s^2}{u^4 + 2u^2 P_s^2 + P_s^4}$$

elde edilir. Böylece, $h_s = Sp\{e_s\}$, $1 \le s \le m$, doğrultmanı üzerinde M_s', $1 \le s \le m$, $2-$boyutlu timelike doğrultmanlı timelike asli ışın yüzeyinin kesit eğriliği (4.2.29) bulunur ve ispat tamamlanır.

IR_1^n de timelike doğrultman uzaylı genelleştirilmiş timelike regle yüzeyin spacelike ortogonal yörüngesi boyunca, timelike asli ışının hareketiyle oluşan $2-$boyutlu asli ışın yüzeyinin (4.2.29) denklemi ile verilen kesit eğriliği, [6] da verilen IR_1^3, $3-$boyutlu Minkowski uzayında timelike doğrultmalı timelike ışın yüzeyinin Gauss eğriliği ile dağılma parametresi arasındaki bağıntı olan **Lorentzian Lamarle formülünün genelleştirilmişidir**.

Şimdi M', merkez regle yüzeyli genelleştirilmiş timelike regle yüzeyin timelike doğrultman uzayı $E_k(t)$ içinde bir birim vektör e ve M' nün $E_k(t)$ye ortogonal olan spacelike normal teğet vektörü n olmak üzere, (e,n) teğet kesitinin eğriliğini bulalım.

$E_k(t)$ içinde $e(t)$ birim vektörü

$$e(t) \in Sp\{e_1(t), \ldots, e_m(t), e_{m+1}(t), \ldots, e_k(t)\}$$

dır, böylece

$$e(t) = \sum_{\sigma=1}^{m} \lambda_\sigma e_\sigma(t) + \sum_{\rho=m+1}^{k} \lambda_\rho e_\rho(t) \qquad , \qquad \|e(t)\| = 1$$

olacak şekilde yazılabilir. Ayrıca doğrulman uzayı $E_k(t) = Sp\{e_1(t), \ldots, e_k(t)\}$ olduğundan $F_m(t) = Sp\{e_1(t), \ldots, e_m(t)\}$ ve $Z_{k-m}(t) = Sp\{e_{m+1}(t), \ldots, e_k(t)\}$ dır, öyle ki M' nün timelike doğrultman uzayı içinde bir timelike vektör vardır ve bu timelike vektör ya $F_m(t)$ ya da $Z_{k-m}(t)$ içerisindedir. Yani, merkez uzayı spacelike ise $F_m(t)$ uzayı timelike altuzay veya merkez uzay timelike ise $F_m(t)$ uzayı spacelike altuzaydır. Bu takdirde genelleştirilmiş timelike regle yüzeyinin Ω merkez regle yüzeyi ya spacelike ya da timelike dır. Ayrıca $E_k(t)$ doğrultman uzayı içerisinde

$e(t)$ birim vektörü spacelike veya timelike dır. Böylece, aşağıdaki iki özel durum ortaya çıkar ki bu özel durumlar da kendi içinde iki özel duruma ayrılır.

(a) $Z_{k-m}(t)$ merkez uzayı spacelike iken,

(a1) $e(t)$ birim vektörü spacelike dır

veya

(a2) $e(t)$ birim vektörü timelike dır.

(b) $Z_{k-m}(t)$ merkez uzayı timelike iken,

(b1) $e(t)$ birim vektörü spacelike dır

veya

(b2) $e(t)$ birim vektörü timelike dır.

Şimdi bu özel halleri, sırasıyla, ayrı ayrı inceleyelim.

(a1) $Z_{k-m}(t)$ merkez uzayı spacelike ve $e(t)$ birim vektörü spacelike olsun.

IR_1^n de M' spacelike merkez regle yüzeyli genelleştirilmiş timelike regle yüzeyinin doğrultman uzayı içinde, e birim vektörü spacelike olmak üzere

$$e=\sum_{\sigma=1}^{s-1}\cosh\theta_\sigma e_\sigma+\sinh\theta_s e_s+\sum_{\sigma=s+1}^{m}\cosh\theta_\sigma e_\sigma+\sum_{\rho=m+1}^{k}\cosh\theta_\rho e_\rho$$

yazılabilir. Buradan, $1\le s\le m$, ve $\nu\ne s$ için

$$e=\sum_{\substack{\nu=1\\ \nu\ne s}}^{k}\cosh\theta_\nu e_\nu+\sinh\theta_s e_s \quad \text{ve} \quad \sum_{\substack{\nu=1\\ \nu\ne s}}^{k}\cosh^2\theta_\nu-\sinh^2\theta_s=1 \qquad (4.2.30)$$

dır. Burada e_s, $1\le s\le m$, $F_m(t)$ altuzayı içinde timelike vektördür ve sırasıyla, $\theta_1,\theta_2,\dots,\theta_s,\dots,\theta_k$ açıları, e spacelike birim vektörü ile $e_1,e_2,\dots,e_s,\dots,e_k$ baz vektörleri arasındaki hiperbolik açılardır.

(a2) $Z_{k-m}(t)$ merkez uzayı spacelike ve $e(t)$ birim vektörü timelike olsun.

IR_1^n de M' spacelike merkez regle yüzeyli genelleştirilmiş timelike regle yüzeyin doğrultman uzayı içinde, e birim vektörü timelike olmak üzere

$$e=\sum_{\sigma=1}^{s-1}\sinh\theta_\sigma e_\sigma+\cosh\theta_s e_s+\sum_{\sigma=s+1}^{m}\sinh\theta_\sigma e_\sigma+\sum_{\rho=m+1}^{k}\sinh\theta_\rho e_\rho$$

dır. O halde, $1\le s\le m$, $\nu\ne s$ için

$$e=\sum_{\substack{\nu=1\\ \nu\ne s}}^{k}\sinh\theta_\nu e_\nu+\cosh\theta_s e_s \text{ ve } \sum_{\substack{\nu=1\\ \nu\ne s}}^{k}\sinh^2\theta_\nu-\cosh^2\theta_s=-1 \qquad (4.2.31)$$

dır. Burada e_s, $1\le s\le m$, $F_m(t)$ altuzayı içinde timelike vektördür ve sırasıyla, $\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_s,\ldots,\theta_k$ açıları, e timelike birim vektörü ile $e_1,e_2,\ldots,e_s,\ldots,e_k$ baz vektörleri arasındaki hiperbolik açılardır.

(b1) $Z_{k-m}(t)$ merkez uzayı timelike ve $e(t)$ birim vektörü spacelike olsun.

IR_1^n de M' timelike merkez regle yüzeyli genelleştirilmiş timelike regle yüzeyin doğrultman uzayı içinde, e birim vektörü spacelike olmak üzere

$$e=\sum_{\sigma=1}^{m}\cosh\theta_\sigma e_\sigma+\sum_{\rho=m+1}^{m+s-1}\cosh\theta_\rho e_\rho+\sinh\theta_{m+s}e_{m+s}+\sum_{\rho=m+s+1}^{k}\cosh\theta_\rho e_\rho$$

dır, yani, $1\le s\le k-m$ ve $\nu\ne m+s$, için

$$e=\sum_{\substack{\nu=1\\ \nu\ne m+s}}^{k}\cosh\theta_\nu e_\nu+\sinh\theta_{m+s}e_{m+s} \text{ ve } \sum_{\substack{\nu=1\\ \nu\ne m+s}}^{k}\cosh^2\theta_\nu-\sinh^2\theta_{m+s}=1 \qquad (4.2.32)$$

dır, öyle ki e_{m+s}, $1 \le s \le k-m$, $Z_{k-m}(t)$ merkez uzayı içinde timelike vektördür. Ayrıca, sırasıyla, $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{m+s}, \ldots, \theta_k$ açıları, e spacelike birim vektörü ile $e_1, e_2, \ldots, e_{m+s}, \ldots, e_k$ baz vektörleri arasındaki hiperbolik açılardır.

(b2) $Z_{k-m}(t)$ merkez uzayı timelike ve $e(t)$ birim vektörü timelike olsun.

IR_1^n de M' timelike merkez regle yüzeyli genelleştirilmiş timelike regle yüzeyin doğrultman uzayı içinde, e birim vektörü timelike olmak üzere

$$e = \sum_{\sigma=1}^{m} \sinh\theta_\sigma e_\sigma + \sum_{\rho=m+1}^{m+s-1} \sinh\theta_\rho e_\rho + \cosh\theta_{m+s} e_{m+s} + \sum_{\rho=m+s+1}^{k} \sinh\theta_\rho e_\rho$$

dır. Böylece, $1 \le s \le k-m$ ve $\nu \ne m+s$, için

$$e = \sum_{\substack{\nu=1 \\ \nu \ne m+s}}^{k} \sinh\theta_\nu e_\nu + \cosh\theta_{m+s} e_{m+s} \quad \text{ve} \quad \sum_{\substack{\nu=1 \\ \nu \ne m+s}}^{k} \sinh^2\theta_\nu - \cosh^2\theta_{m+s} = -1, \qquad (4.2.33)$$

dır, öyle ki e_{m+s}, $1 \le s \le k-m$, $Z_{k-m}(t)$ merkez uzayı içinde timelike vektördür ve sırasıyla, $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{m+s}, \ldots, \theta_k$ açıları, e timelike birim vektörü ile $e_1, e_2, \ldots, e_{m+s}, \ldots, e_k$ baz vektörleri arasındaki hiperbolik açılardır.

Böylece (a1), (a2), (b1) ve (b2) durumları göz önüne alınırsa (e,n) teğet kesitinin eğriliği ile ilgili, sırasıyla, aşağıdaki teoremler verilebilir.

Teorem 4.2.9. IR_1^n, $n-$boyutlu Minkowski uzayında timelike doğrultman uzaylı, spacelike merkez regle yüzeyli genelleştirilmiş timelike regle yüzey M' ve $E_k(t)$ içinde spacelike birim vektör e olsun. M' nün $E_k(t)$ye ortogonal olan normal teğet vektörü n olmak üzere $\zeta \in \Omega \subset M'$ noktasında (e,n) spacelike kesitinin eğriliği ile asli kesit eğrilikleri arasında

$$K_{\zeta}\left(e,n\right)=\sum_{\substack{\sigma=1\\ \sigma\neq s}}^{m}\cosh^{2}\theta_{\sigma}K_{\zeta}\left(e_{\sigma},n\right)-\sinh^{2}\theta_{s}K_{\zeta}\left(e_{s},n\right)$$

bağıntısı vardır. Burada e_s, $1\leq s\leq m$, $F_m\left(t\right)$ altuzayı içinde timelike vektör ve sırasıyla, $\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_s,\ldots,\theta_k$ açıları, e spacelike birim vektörü ile $e_1,e_2,\ldots,e_s,\ldots,e_k$ baz vektörleri arasındaki hiperbolik açılardır, öyle ki

$$e=\sum_{\substack{\nu=1\\ \nu\neq s}}^{k}\cosh\theta_{\nu}e_{\nu}+\sinh\theta_{s}e_{s}\ \text{ ve }\ \sum_{\substack{\nu=1\\ \nu\neq s}}^{k}\cosh^{2}\theta_{\nu}-\sinh^{2}\theta_{s}=1$$

dır.

İspat. IR_1^n de M', spacelike merkez regle yüzeyli genelleştirilmiş timelike regle yüzeyinin doğrultman uzayı içinde e spacelike birim vektörü ve doğrultman uzayına ortogonal olan n spacelike normal teğet vektörünün koordinatları, sırasıyla, $\left(\beta_0,\beta_1,\ldots,\beta_k\right)$ ve $\left(\gamma_0,\gamma_1,\ldots,\gamma_k\right)$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}
\beta_0&=\left\langle e,e_0\right\rangle=0,\\
\beta_s&=\left\langle e,e_s\right\rangle=\sinh\theta_s \quad , \quad 1\leq s\leq m\\
\beta_\nu&=\left\langle e,e_\nu\right\rangle=\cosh\theta_\nu \quad , \quad 1\leq \nu\leq k \quad , \quad \nu\neq s
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\gamma_0&=\left\langle n,e_0\right\rangle=1,\\
\gamma_\nu&=\left\langle n,e_\nu\right\rangle=0 \quad , \quad 1\leq \nu\leq k
\end{aligned}$$

dır. $\zeta\in\Omega$ merkez noktasında bu denklemler (4.2.23) denkleminde yerine yazılırsa

$$K_{\zeta}\left(e,n\right)=\frac{\sum\limits_{\substack{\sigma=1\\ \sigma\neq s}}^{m}\cosh^{2}\theta_{\sigma}R_{\sigma0\sigma0}+\sinh^{2}\theta_{s}R_{s0s0}}{\left\langle e,e\right\rangle\left\langle n,n\right\rangle-\left\langle e,n\right\rangle^{2}}$$

elde edilir. Bu son denklem ile birlikte (4.2.21) denklemi göz önüne alınırsa

$$K_{\zeta}\left(e,n\right)=\sum_{\substack{\sigma=1\\ \sigma\neq s}}^{m}\cosh^{2}\theta_{\sigma}\left[-\frac{1}{2g}\frac{\partial^{2}g}{\partial u_{\sigma}^{2}}+\frac{1}{4g^{2}}\left(\frac{\partial g}{\partial u_{\sigma}}\right)^{2}\right]+\sinh^{2}\theta_{s}\left[-\frac{1}{2g}\frac{\partial^{2}g}{\partial u_{s}^{2}}+\frac{1}{4g^{2}}\left(\frac{\partial g}{\partial u_{s}}\right)^{2}\right]$$

bulunur. $\forall\zeta\in\Omega$ merkez noktasında (4.2.25) denklemi ile verilen $\left(e_{\sigma},n\right)$, $1\leq\sigma\leq m$, $\sigma\neq s$, spacelike asli kesitinin eğriliği ve (4.2.26) denklemi ile verilen $\left(e_{s},n\right)$, $1\leq s\leq m$, timelike asli kesitinin eğriliği göz önüne alınırsa M' nün $\left(e,n\right)$ spacelike kesitinin eğriliği

$$K_{\zeta}\left(e,n\right)=\sum_{\substack{\sigma=1\\ \sigma\neq s}}^{m}\cosh^{2}\theta_{\sigma}K_{\zeta}\left(e_{\sigma},n\right)-\sinh^{2}\theta_{s}K_{\zeta}\left(e_{s},n\right)$$

olur. Bu bağıntı M', timelike doğrultman uzaylı, spacelike merkez regle yüzeyli genelleştirilmiş timelike regle yüzeyinin $\zeta\in\Omega$ merkez noktasında spacelike kesitinin eğriliği için **I. tip Lorentzian Beltrami-Euler formülü** olarak adlandırıldı.

Teorem 4.2.10. IR_{1}^{n}, $n-$boyutlu Minkowski uzayında timelike doğrultman uzaylı, spacelike merkez regle yüzeyli genelleştirilmiş timelike regle yüzey M' ve $E_{k}\left(t\right)$ içinde timelike birim vektör e olsun. M' nün $E_{k}\left(t\right)$ ye ortogonal olan normal teğet vektörü n olmak üzere, $\zeta\in\Omega\subset M'$ noktasında $\left(e,n\right)$ timelike kesitinin eğriliği ile asli kesit eğrilikleri arasında

$$K_{\zeta}\left(e,n\right)=-\sum_{\substack{\sigma=1\\ \sigma\neq s}}^{m}\sinh^{2}\theta_{\sigma}K_{\zeta}\left(e_{\sigma},n\right)+\cosh^{2}\theta_{s}K_{\zeta}\left(e_{s},n\right)$$

bağıntısı vardır. Burada e_{s}, $1\leq s\leq m$, $F_{m}\left(t\right)$ uzayı içinde timelike vektör ve sırasıyla, $\theta_{1},\theta_{2},\ldots,\theta_{s},\ldots,\theta_{k}$ açıları, e timelike birim vektörü ile $e_{1},e_{2},\ldots,e_{s},\ldots,e_{k}$ baz vektörleri ile arasındaki hiperbolik açılardır, öyle ki

$$e=\sum_{\substack{\nu=1\\ \nu\neq s}}^{k}\sinh\theta_\nu e_\nu+\cosh\theta_s e_s \quad \text{ve} \quad \sum_{\substack{\nu=1\\ \nu\neq s}}^{k}\sinh^2\theta_\nu-\cosh^2\theta_s=-1$$

dır.

İspat. IR_1^n de M', spacelike merkez regle yüzeyli genelleştirilmiş timelike regle yüzeyinin doğrultman uzayı içinde bir e timelike birim vektörü ve $E_k(t)$ ye ortogonal olan n spacelike normal teğet vektörünün koordinatları, sırasıyla, $(\beta_0,\beta_1,\ldots,\beta_k)$ ve $(\gamma_0,\gamma_1,\ldots,\gamma_k)$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
\beta_0&=\langle e,e_0\rangle=0,\\
\beta_s&=\langle e,e_s\rangle=\cosh\theta_s \quad , \quad 1\leq s\leq m\\
\beta_\nu&=\langle e,e_\nu\rangle=\sinh\theta_\nu \quad , \quad 1\leq \nu\leq k \quad , \quad \nu\neq s
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\gamma_0&=\langle n,e_0\rangle=1,\\
\gamma_\nu&=\langle n,e_\nu\rangle=0 \quad , \quad 1\leq \nu\leq k
\end{aligned}$$

dır. $\zeta\in\Omega$ merkez noktası için bu denklemler (4.2.23) denkleminde yerine yazılırsa

$$K_\zeta(e,n)=\frac{\displaystyle\sum_{\substack{\sigma=1\\ \sigma\neq s}}^{m}\sinh^2\theta_\sigma R_{\sigma0\sigma0}+\cosh^2\theta_s R_{s0s0}}{\langle e,e\rangle\langle n,n\rangle-\langle e,n\rangle^2}$$

elde edilir. Eğer bu son denklem ve (4.2.21) denklemi göz önüne alınırsa

$$K_\zeta(e,n)=\sum_{\substack{\sigma=1\\ \sigma\neq s}}^{m}\sinh^2\theta_\sigma\left[\frac{1}{2g}\frac{\partial^2 g}{\partial u_\sigma^{\,2}}-\frac{1}{4g^2}\left(\frac{\partial g}{\partial u_\sigma}\right)^2\right]+\cosh^2\theta_s\left[\frac{1}{2g}\frac{\partial^2 g}{\partial u_s^{\,2}}-\frac{1}{4g^2}\left(\frac{\partial g}{\partial u_s}\right)^2\right]$$

bulunur. $\forall\zeta\in\Omega$ merkez noktasında (4.2.25) denklemi ile verilen (e_σ,n), $1\leq\sigma\leq m$, $\sigma\neq s$, spacelike asli kesitinin ve (4.2.26) denklemi ile verilen (e_s,n),

$1 \leq s \leq m$, timelike asli kesitinin eğriliği göz önüne alınırsa M' nün (e,n) timelike kesitinin eğriliği

$$K_\zeta(e,n) = -\sum_{\substack{\sigma=1\\ \sigma\neq s}}^{m} \sinh^2\theta_\sigma K_\zeta(e_\sigma,n) + \cosh^2\theta_s K_\zeta(e_s,n)$$

olarak elde edilir. Bu bağıntı M', timelike doğrultman uzaylı, spacelike merkez regle yüzeyli genelleştirilmiş timelike regle yüzeyinin $\zeta \in \Omega$ merkez noktasında timelike kesitinin eğriliği için **II. tip Lorentzian Beltrami-Euler formülü** olarak adlandırıldı.

Teorem 4.2.11. IR_1^n, $n-$boyutlu Minkowski uzayında timelike doğrultman uzaylı, timelike merkez regle yüzeyli genelleştirilmiş timelike regle yüzey M' ve $E_k(t)$ içinde bir spacelike birim vektör e olsun. M' nün $E_k(t)$ ye ortogonal olan normal teğet vektörü n olmak üzere, $\zeta \in \Omega \subset M$ noktasında (e,n) spacelike kesitinin eğriliği ile asli kesit eğrilikleri arasında

$$K_\zeta(e,n) = \sum_{\sigma=1}^{m} \cosh^2\theta_\sigma K_\zeta(e_\sigma,n)$$

bağıntısı vardır, burada e_{m+s}, $1 \leq s \leq k-m$, $Z_{k-m}(t)$ merkez uzayı içinde timelike vektördür. $\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_{m+s},\ldots,\theta_k$ açıları, sırasıyla, e, spacelike birim vektörü ile $e_1,e_2,\ldots,e_{m+s},\ldots,e_k$ baz vektörleri arasındaki hiperbolik açılar olmak üzere

$$e = \sum_{\substack{\nu=1\\ \nu\neq m+s}}^{k} \cosh\theta_\nu e_\nu + \sinh\theta_{m+s} e_{m+s} \quad \text{ve} \quad \sum_{\substack{\nu=1\\ \nu\neq m+s}}^{k} \cosh^2\theta_\nu - \sinh^2\theta_{m+s} = 1$$

dır.

İspat. IR_1^n de M' timelike merkez regle yüzeyli genelleştirilmiş timelike regle yüzeyinin doğrultman uzayı içinde e, spacelike birim vektörünün ve doğrultman uzayına ortogonal olan n spacelike normal teğet vektörünün koordinatları, sırasıyla, $\left(\beta_0,\beta_1,\ldots,\beta_k\right)$ ve $\left(\gamma_0,\gamma_1,\ldots,\gamma_k\right)$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}
&\beta_0 = \langle e,e_0\rangle = 0, \\
&\beta_\nu = \langle e,e_\nu\rangle = \cosh\theta_\nu \quad , \quad 1\le \nu \le k \quad , \quad \nu \ne m+s \\
&\beta_{m+s} = \langle e,e_{m+s}\rangle = \sinh\theta_{m+s} \quad , \quad 1\le s\le k-m
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
&\gamma_0 = \langle n,e_0\rangle = 1, \\
&\gamma_\nu = \langle n,e_\nu\rangle = 0 \quad , \quad 1\le \nu \le k
\end{aligned}$$

dır. $\zeta\in\Omega$ merkez noktasında bu son denklemler, (4.2.23) denkleminde yerine yazılırsa

$$K_\zeta\left(e,n\right) = \frac{\sum_{\sigma=1}^{m}\cosh^2\theta_\sigma R_{\sigma0\sigma0}}{\langle e,e\rangle\langle n,n\rangle-\langle e,n\rangle^2}$$

elde edilir. Eğer (4.2.21) denkleminde ki eşitlikleri göz önüne alınırsa

$$K_\zeta\left(e,n\right) = \sum_{\sigma=1}^{m}\cosh^2\theta_\sigma\left[-\frac{1}{2g}\frac{\partial^2 g}{\partial u_\sigma{}^2}+\frac{1}{4g^2}\left(\frac{\partial g}{\partial u_\sigma}\right)^2\right]$$

bulunur. $\forall\zeta\in\Omega$ merkez noktasında (4.2.25) denklemi göz önüne alınırsa M' nün $\left(e,n\right)$ spacelike kesitinin eğriliği

$$K_\zeta\left(e,n\right) = \sum_{\sigma=1}^{m}\cosh^2\theta_\sigma K_\zeta\left(e_\sigma,n\right)$$

olarak elde edilir. Bu bağıntı M', timelike doğrultman uzaylı, timelike merkez regle yüzeyli genelleştirilmiş timelike regle yüzeyinin $\zeta\in\Omega$ merkez noktasında spacelike kesitinin eğriliği için **III. tip Lorentzian Beltrami-Euler formülü** olarak isimlendirildi.

Teorem 4.2.12. IR_1^n, $n-$boyutlu Minkowski uzayında timelike doğrultman uzaylı, time -like merkez regle yüzeyli genelleştirilmiş timelike regle yüzey M' ve $E_k(t)$ içinde timelike birim vektör e olsun. M' nün $E_k(t)$ye ortogonal olan normal teğet vektörü n olmak üzere $\zeta \in \Omega \subset M'$ noktasında (e,n) timelike kesitinin eğriliği ile asli kesit eğrilikleri arasında

$$K_\zeta(e,n) = -\sum_{\sigma=1}^{m} \sinh^2 \theta_\sigma K_\zeta(e_\sigma, n)$$

bağıntısı vardır, burada e_{m+s}, $1 \le s \le k-m$, $Z_{k-m}(t)$ merkez uzayı içinde timelike vektör ve sırasıyla, $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{m+s}, \ldots, \theta_k$ açıları, e timelike birim vektörü ile $e_1, e_2, \ldots, e_{m+s}, \ldots, e_k$ baz vektörleri arasındaki hiperbolik açılardır, öyle ki

$$e = \sum_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq m+s}}^{k} \sinh \theta_\nu e_\nu + \cosh \theta_{m+s} e_{m+s} \text{ ve } \sum_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq m+s}}^{k} \sinh^2 \theta_\nu - \cosh^2 \theta_{m+s} = -1$$

dır.

İspat. IR_1^n de M', timelike merkez regle yüzeyli genelleştirilmiş timelike regle yüzeyin doğrultman uzayı içinde, e timelike birim vektörü ve $E_k(t)$ ye ortogonal olan n spacelike normal teğet vektörünün koordinatları, sırasıyla, $(\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_k)$ ve $(\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_k)$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
\beta_0 &= \langle e, e_0 \rangle = 0, \\
\beta_\nu &= \langle e, e_\nu \rangle = \sinh \theta_\nu \quad , \quad 1 \le \nu \le k \quad , \quad \nu \neq m+s \\
\beta_{m+s} &= \langle e, e_{m+s} \rangle = \cosh \theta_{m+s} \; , \quad 1 \le s \le k-m
\end{aligned}$$

ve

$$\gamma_0 = \langle n, e_0 \rangle = 1,$$
$$\gamma_\nu = \langle n, e_\nu \rangle = 0 \quad , \quad 1 \le \nu \le k$$

dır. $\zeta \in \Omega$ merkez noktası için bu denklemler (4.2.23) de yerine yazılırsa

$$K_\zeta(e,n) = \frac{\sum_{\sigma=1}^{m} \sinh^2 \theta_\sigma R_{\sigma 0 \sigma 0}}{\langle e,e \rangle \langle n,n \rangle - \langle e,n \rangle^2}$$

bulunur. Bu son denklem ve (4.2.21) den dolayı

$$K_\zeta(e,n) = \sum_{\sigma=1}^{m} \sinh^2 \theta_\sigma \left[\frac{1}{2g} \frac{\partial^2 g}{\partial u_\sigma^{\ 2}} - \frac{1}{4g^2} \left(\frac{\partial g}{\partial u_\sigma} \right)^2 \right]$$

dir. $\forall \zeta \in \Omega$ merkez noktasında (4.2.25) denklemi dikkate alınırsa M' nün (e,n) timelike kesitinin eğriliği

$$K_\zeta(e,n) = -\sum_{\sigma=1}^{m} \sinh^2 \theta_\sigma K_\zeta(e_\sigma, n)$$

dır. Bu bağıntı M', timelike doğrultman uzaylı, timelike merkez regle yüzeyli genelleştirilmiş timelike regle yüzeyinin $\zeta \in \Omega$ merkez noktasında timelike kesitinin eğriliği için **IV. tip Lorentzian Beltrami-Euler formülü** olarak adlandırıldı.

Teorem 4.2.13. $IR_1^{\ n}$, $n-$boyutlu Minkowski uzayında Ω, spacelike merkez regle yüzeyinin ζ merkez noktasında, spacelike doğrultmanı $h_\zeta(e) \subset E_k(t)$ olan $2-$boyutlu spacelike regle yüzey M' nün dağılma parametresi P olsun. $\zeta \in \Omega$ merkez noktasında M' nün (e,n) spacelike kesitinin eğriliği

$$K_{\varsigma}\left(e,n\right)=-\frac{1}{P^2}$$

dır.

İspat. IR_1^n, $n-$ boyutlu Minkowski uzayında

$$\varphi\left(t,u\right)=\alpha\left(t\right)+ue\left(t\right)$$

parametrik gösterimine sahip olan $2-$boyutlu spacelike regle yüzeyin spacelike doğrultmanı (4.2.30) denklemine göre

$$e=\sum_{\substack{\nu=1\\ \nu\neq s}}^{k}\cosh\theta_\nu e_\nu+\sinh\theta_s e_s \quad , \quad 1\leq s\leq m \tag{4.2.34}$$

dır. Burada e_s, $1\leq s\leq m$, $F_m\left(t\right)$ uzayı içinde timelike vektördür öyle ki, $\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_s,\ldots,\theta_k$ açıları, sırasıyla, e spacelike birim vektörü ile $e_1,e_2,\ldots,e_s,\ldots,e_k$ baz vektörleri arasındaki hiperbolik açılardır. O halde (4.2.34) denkleminden

$$\dot{e}=\sum_{\substack{\nu=1\\ \nu\neq s}}^{k}\cosh\theta_\nu\,\dot{e}_\nu+\sinh\theta_s\,\dot{e}_s \quad , \quad 1\leq s\leq m$$

elde edilir. Son denklemi ile birlikte Teorem 3.2.8. göz önüne alınarak

$$\begin{aligned}
\overset{\circ}{e}&=\dot{e}-\sum_{\mu=1}^{k}\varepsilon_\mu\left\langle\dot{e},e_\mu\right\rangle e_\mu\\
&=\sum_{\substack{\nu=1\\ \nu\neq s}}^{k}\cosh\theta_\nu\,\dot{e}_\nu+\sinh\theta_s\,\dot{e}_s-\sum_{\mu=1}^{k}\varepsilon_\mu\left\langle\sum_{\substack{\nu=1\\ \nu\neq s}}^{k}\cosh\theta_\nu\,\dot{e}_\nu+\sinh\theta_s\,\dot{e}_s,e_\mu\right\rangle e_\mu\\
&=\sum_{\substack{\nu=1\\ \nu\neq s}}^{k}\cosh\theta_\nu\left(\dot{e}_\nu-\sum_{\mu=1}^{k}\varepsilon_\mu\left\langle\dot{e}_\nu,e_\mu\right\rangle e_\mu\right)+\sinh\theta_s\left(\dot{e}_s-\sum_{\mu=1}^{k}\varepsilon_\mu\left\langle\dot{e}_s,e_\mu\right\rangle e_\mu\right)
\end{aligned}$$

bulunur. $A(t)=Sp\left\{e_1(t),\ldots,e_k(t),\dot{e}_1(t),\ldots\dot{e}_k(t)\right\}$ asimptotik demetinin bir ortogonal bazı $\left\{e_1(t),\ldots,e_k(t),\overset{\circ}{e}_1(t),\ldots\overset{\circ}{e}_m(t)\right\}$ olduğundan

$$\overset{\circ}{e}=\sum_{\substack{\sigma=1\\ \sigma\neq s}}^{m}\cosh\theta_\sigma\,\overset{\circ}{e}_\sigma+\sinh\theta_s\,\overset{\circ}{e}_s\quad,\quad 1\leq s\leq m$$

dır. Bu vektörün kendisiyle iç çarpımından

$$\left\|\overset{\circ}{e}\right\|^2=\sum_{\substack{\sigma=1\\ \sigma\neq s}}^{m}\cosh^2\theta_\sigma\left\|\overset{\circ}{e}_\sigma\right\|^2+\sinh^2\theta_s\left\|\overset{\circ}{e}_s\right\|^2$$

bulunur. $\left\|\overset{\circ}{e}\right\|=\kappa$, $\left\|\overset{\circ}{e}_\sigma\right\|=\kappa_\sigma$, $1\leq\sigma\leq m$, ($\sigma\neq s$) ve $\left\|\overset{\circ}{e}_s\right\|=\kappa_s$, $1\leq s\leq m$, olduğu göz önüne alınırsa

$$\kappa^2=\sum_{\substack{\sigma=1\\ \sigma\neq s}}^{m}\cosh^2\theta_\sigma\kappa_\sigma^2+\sinh^2\theta_s\kappa_s^2 \tag{4.2.35}$$

elde edilir. Ayrıca $\zeta\in\Omega$ merkez noktasında $u_\sigma=0$, $1\leq\sigma\leq m$, şartı da göz önüne alınarak Teorem 4.2.4. e göre (e_σ,n), $1\leq\sigma\leq m$, $\sigma\neq s$ spacelike ve (e_s,n), $1\leq s\leq m$, timelike asli kesitinin eğrilikleri, sırasıyla,

$$K_\zeta(e_\sigma,n)=-\frac{\kappa_\sigma^2}{\eta_{m+1}^2}\quad,\quad 1\leq\sigma\leq m\quad,\quad\sigma\neq s$$

ve

$$K_\zeta(e_s,n)=\frac{\kappa_s^2}{\eta_{m+1}^2}\quad,\quad 1\leq s\leq m$$

dır. Bu son denklemler, Teorem 4.2.9. da verilen (e,n) spacelike kesitinin eğriliği ile asli kesit eğrilikler arasındaki bağıntı olan

$$K_{\zeta}(e,n)=\sum_{\substack{\sigma=1\\ \sigma\neq s}}^{m}\cosh^2\theta_{\sigma}K_{\zeta}(e_{\sigma},n)-\sinh^2\theta_s K_{\zeta}(e_s,n)$$

denkleminde yerine yazılırsa

$$K_{\zeta}(e,n)=-\sum_{\substack{\sigma=1\\ \sigma\neq s}}^{m}\cosh^2\theta_{\sigma}\frac{\kappa_{\sigma}^2}{\eta_{m+1}^2}-\sinh^2\theta_s\frac{\kappa_s^2}{\eta_{m+1}^2}$$

bulunur. Gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$K_{\zeta}(e,n)=-\frac{\sum\limits_{\substack{\sigma=1\\ \sigma\neq s}}^{m}\cosh^2\theta_{\sigma}\kappa_{\sigma}^2+\sinh^2\theta_s\kappa_s^2}{\eta_{m+1}^2}$$

olur. Bu son denklemde (4.2.35) denklemi yerine yazılırsa

$$K_{\zeta}(e,n)=-\left(\frac{\kappa}{\eta_{m+1}}\right)^2$$

bulunur. M' nün dağılma parametresi göz önüne alınırsa

$$K_{\zeta}(e,n)=-\frac{1}{P^2}$$

elde edilir. Bu bağıntı $\zeta\in\Omega$ merkez noktasında spacelike doğrultmanlı $2-$boyutlu spacelike yüzeyin (e,n) spacelike kesitinin eğriliği için **Lorentzian Lamarle formülü** olarak adlandırıldı.

Teorem 4.2.14. IR_1^n, $n-$boyutlu Minkowski uzayında Ω, spacelike merkez regle yüzeyin ζ noktasında, timelike doğrultmanı $h_\zeta(e)\subset E_k(t)$ olan $2-$boyutlu timelike regle yüzey M' nün dağılma parametresi P olsun. $\zeta\in\Omega$ merkez noktasında M' nün (e,n) timelike kesitinin eğriliği

$$K_\zeta(e,n)=\frac{1}{P^2}$$

dır.

İspat. IR_1^n de timelike doğrultmanı $h_\zeta(e)\subset E_k(t)$ olan $2-$boyutlu timelike regle yüzeyi M' parametrik olarak

$$\varphi(t,u)=\alpha(t)+ue(t)$$

ile verilir. $F_m(t)$ altuzayı içinde e_s, $1\leq s\leq m$, bir timelike vektör olsun. e, timelike birim vektörü ile $e_1,e_2,\ldots,e_s,\ldots,e_k$ baz vektörleri arasındaki hiperbolik açılar, sırasıyla, $\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_s,\ldots,\theta_k$ olmak üzere

$$e=\sum_{\substack{\nu=1\\ \nu\neq s}}^{k}\sinh\theta_\nu e_\nu+\cosh\theta_s e_s \quad , \quad 1\leq s\leq m$$

yazılabilir. Böylece,

$$\dot{e}=\sum_{\substack{\nu=1\\ \nu\neq s}}^{k}\sinh\theta_\nu \dot{e}_\nu+\cosh\theta_s \dot{e}_s \quad , \quad 1\leq s\leq m$$

olduğundan $A(t)=Sp\left\{e_1(t),\ldots,e_k(t),\dot{e}_1(t),\ldots\dot{e}_k(t)\right\}$ asimptotik demetinin, bir ortogonal bazı $\left\{e_1(t),\ldots,e_k(t),\mathring{e}_1(t),\ldots\mathring{e}_m(t)\right\}$ şeklindedir. O halde Teorem 3.2.8. den

$$\begin{aligned}
\mathring{e} &= \dot{e}-\sum_{\mu=1}^{k}\varepsilon_\mu\left\langle \dot{e},e_\mu\right\rangle e_\mu \\
&= \sum_{\substack{\nu=1\\ \nu\neq s}}^{k}\sinh\theta_\nu\,\dot{e}_\nu+\cosh\theta_s\,\dot{e}_s-\sum_{\mu=1}^{k}\varepsilon_\mu\left\langle \sum_{\substack{\nu=1\\ \nu\neq s}}^{k}\sinh\theta_\nu\,\dot{e}_\nu+\cosh\theta_s\,\dot{e}_s,e_\mu\right\rangle e_\mu \\
&= \sum_{\substack{\nu=1\\ \nu\neq s}}^{k}\sinh\theta_\nu\left(\dot{e}_\nu-\sum_{\mu=1}^{k}\varepsilon_\mu\left\langle \dot{e}_\nu,e_\mu\right\rangle e_\mu\right)+\cosh\theta_s\left(\dot{e}_s-\sum_{\mu=1}^{k}\varepsilon_\mu\left\langle \dot{e}_s,e_\mu\right\rangle e_\mu\right)
\end{aligned}$$

bulunur. Buna göre

$$\mathring{e}=\sum_{\substack{\sigma=1\\ \sigma\neq s}}^{m}\sinh\theta_\sigma\,\mathring{e}_\sigma+\cosh\theta_s\,\mathring{e}_s \quad,\quad 1\leq s\leq m$$

elde edilir. Bu vektörün kendisiyle iç çarpımından

$$\kappa^2=\left\|\mathring{e}\right\|^2=\sum_{\substack{\sigma=1\\ \sigma\neq s}}^{m}\sinh^2\theta_\sigma\left\|\mathring{e}_\sigma\right\|^2+\cosh^2\theta_s\left\|\mathring{e}_s\right\|^2$$

bulunur. Böylece, $\left\|\mathring{e}_\sigma\right\|=\kappa_\sigma$, $1\leq\sigma\leq m$, $\sigma\neq s$ ve $\left\|\mathring{e}_s\right\|=\kappa_s$, $1\leq s\leq m$, olduğundan

$$\kappa^2=\sum_{\substack{\sigma=1\\ \sigma\neq s}}^{m}\sinh^2\theta_\sigma\kappa_\sigma^2+\cosh^2\theta_s\kappa_s^2 \tag{4.2.36}$$

dır. Ayrıca $\zeta \in \Omega$ merkez noktasında $u_\sigma = 0$, $1 \le \sigma \le m$, olduğundan, Teorem 4.2.4. e göre (e_σ, n), $1 \le \sigma \le m$, $\sigma \ne s$ spacelike ve (e_s, n), $1 \le s \le m$, timelike asli kesitlerin eğrilikleri, sırasıyla,

$$K_\zeta(e_\sigma, n) = -\frac{\kappa_\sigma^2}{\eta_{m+1}^2} \quad , \quad 1 \le \sigma \le m \quad , \quad \sigma \ne s$$

ve

$$K_\zeta(e_s, n) = \frac{\kappa_s^2}{\eta_{m+1}^2} \quad , \quad 1 \le s \le m$$

dır. Bu son denklemler, Teorem 4.2.10. da verilen (e, n) timelike kesitinin eğriliği ile asli kesit eğrilikler arasındaki bağıntı olan

$$K_\zeta(e, n) = -\sum_{\substack{\sigma=1 \\ \sigma \ne s}}^{m} \sinh^2\theta_\sigma K_\zeta(e_\sigma, n) + \cosh^2\theta_s K_\zeta(e_s, n)$$

denkleminde yerine yazılırsa

$$K_\zeta(e, n) = \sum_{\substack{\sigma=1 \\ \sigma \ne s}}^{m} \sinh^2\theta_\sigma \frac{\kappa_\sigma^2}{\eta_{m+1}^2} + \cosh^2\theta_s \frac{\kappa_s^2}{\eta_{m+1}^2}$$

bulunur. Gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$K_\zeta(e, n) = \frac{\displaystyle\sum_{\substack{\sigma=1 \\ \sigma \ne s}}^{m} \sinh^2\theta_\sigma \kappa_\sigma^2 + \cosh^2\theta_s \kappa_s^2}{\eta_{m+1}^2}$$

elde edilir. (4.2.36) denklemi bu son denklemde yerine yazılırsa

$$K_\zeta(e, n) = \left(\frac{\kappa}{\eta_{m+1}}\right)^2$$

bulunur. M' nün dağılma parametresi $P=\frac{\eta_{m+1}}{\kappa}$ olduğundan

$$K_\zeta\left(e,n\right)=\frac{1}{P^2}$$

elde edilir. Bu bağıntı $\zeta\in\Omega$ merkez noktasında timelike doğrultmanlı $2-$boyutlu timelike yüzeyin $\left(e,n\right)$ timelike kesitinin eğriliği için **Lorentzian Lamarle formülü** olarak adlandırıldı.

Teorem 4.2.15. IR_1^n, $n-$boyutlu Minkowski uzayında Ω, timelike merkez regle yüzeyinin ζ noktasında spacelike doğrultmanı $h_\zeta\left(e\right)\subset E_k\left(t\right)$ olan, $2-$boyutlu spacelike regle yüzeyi M' ve M' nün dağılma parametresi P olsun. $\zeta\in\Omega$ merkez noktasında M' nün $\left(e,n\right)$ spacelike kesitinin eğriliği

$$K_\zeta\left(e,n\right)=-\frac{1}{P^2}$$

dır.

İspat. IR_1^n $n-$boyutlu Minkowski uzayında $2-$boyutlu spacelike regle yüzeyi parametrik olarak

$$\varphi\left(t,u\right)=\alpha\left(t\right)+ue\left(t\right)$$

ile verilir. Bu $2-$boyutlu regle yüzeyi spacelike doğrultmanı (4.2.32) denklemine göre

$$e=\sum_{\substack{\nu=1\\ \nu\neq m+s}}^{k}\cosh\theta_\nu e_\nu+\sinh\theta_{m+s}e_{m+s} \tag{4.2.37}$$

dır, burada e_{m+s}, $1 \le s \le k-m$, $Z_{k-m}(t)$ merkez uzayı içinde timelike vektördür. e spacelike birim vektörü ile $e_1, e_2, \ldots, e_{m+s}, \ldots, e_k$ baz vektörleri arasındaki hiperbolik açılar, sırasıyla, $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{m+s}, \ldots, \theta_k$ dır. (4.2.37) denkleminden

$$\dot{e} = \sum_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq m+s}}^{k} \cosh\theta_\nu\, \dot{e}_\nu + \sinh\theta_{m+s}\, \dot{e}_{m+s} \quad , \quad 1 \le s \le k-m$$

elde edilir. Son denklem ve Teorem 3.2.8. den

$$\begin{aligned}
\overset{\circ}{e} &= \dot{e} - \sum_{\mu=1}^{k} \varepsilon_\mu \left\langle \dot{e}, e_\mu \right\rangle e_\mu \\
&= \sum_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq m+s}}^{k} \cosh\theta_\nu\, \dot{e}_\nu + \sinh\theta_{m+s}\, \dot{e}_{m+s} - \sum_{\mu=1}^{k} \varepsilon_\mu \left\langle \sum_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq m+s}}^{k} \cosh\theta_\nu\, \dot{e}_\nu + \sinh\theta_{m+s}\, \dot{e}_{m+s}, e_\mu \right\rangle e_\mu \\
&= \sum_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq m+s}}^{k} \cosh\theta_\nu \left(\dot{e}_\nu - \sum_{\mu=1}^{k} \varepsilon_\mu \left\langle \dot{e}_\nu, e_\mu \right\rangle e_\mu \right) + \sinh\theta_{m+s} \left(\dot{e}_{m+s} - \sum_{\mu=1}^{k} \varepsilon_\mu \left\langle \dot{e}_{m+s}, e_\mu \right\rangle e_\mu \right)
\end{aligned}$$

bulunur. $A(t) = Sp\left\{ e_1(t), \ldots, e_k(t), \dot{e}_1(t), \ldots \dot{e}_k(t) \right\}$ asimptotik demetinin bir ortogonal bazı $\left\{ e_1(t), \ldots, e_k(t), \overset{\circ}{e}_1(t), \ldots \overset{\circ}{e}_m(t) \right\}$ olduğundan

$$\overset{\circ}{e} = \sum_{\sigma=1}^{m} \cosh\theta_\sigma\, \overset{\circ}{e}_\sigma$$

yazılabilir. Böylece son denklemden ve $\left\| \overset{\circ}{e}_\sigma \right\| = \kappa_\sigma$, $1 \le \sigma \le m$, den

$$\kappa^2 = \left\| \overset{\circ}{e} \right\|^2 = \sum_{\sigma=1}^{m} \cosh^2\theta_\sigma \left\| \overset{\circ}{e}_\sigma \right\|^2 = \sum_{\sigma=1}^{m} \cosh^2\theta_\sigma \kappa_\sigma^2 \qquad (4.2.38)$$

elde edilir. $\zeta \in \Omega$ merkez noktasında $u_\sigma = 0$, $1 \le \sigma \le m$, şartı da göz önünde bulundurularak, (e_σ, n) spacelike asli kesitlerin eğriliği

$$K_{\zeta}\left(e_{\sigma},n\right)=-\frac{\kappa_{\sigma}^{2}}{\eta_{m+1}^{2}} \quad , \quad 1\leq\sigma\leq m$$

olarak elde edilir. Bu son denklem ve Teorem 4.2.11. göz önüne alınırsa

$$K_{\zeta}\left(e,n\right)=-\frac{\sum_{\sigma=1}^{m}\cosh^{2}\theta_{\sigma}\kappa_{\sigma}^{2}}{\eta_{m+1}^{2}}$$

elde edilir. Burada (4.2.38) denklemi yerine yazılırsa

$$K_{\zeta}\left(e,n\right)=-\left(\frac{\kappa}{\eta_{m+1}}\right)^{2}$$

bulunur. M' nün dağılma parametresi $P=\frac{\eta_{m+1}}{\kappa}$ olduğu göz önüne alınırsa

$$K_{\zeta}\left(e,n\right)=-\frac{1}{P^{2}}$$

elde edilir. Bu formül, $\zeta\in\Omega$ merkez noktasında spacelike doğrultmanlı $2-$boyutlu spacelike yüzeyin $\left(e,n\right)$ spacelike kesitinin eğriliği için **Lorentzian Lamarle formülü** olarak adlandırıldı.

Teorem 4.2.16. IR_{1}^{n}, $n-$boyutlu Minkowski uzayında M', Ω timelike merkez regle yüzeyli $2-$boyutlu timelike regle yüzey ve $\zeta\in\Omega$ noktasında M' nün timelike doğrultmanı $h_{\zeta}\left(e\right)\subset E_{k}\left(t\right)$ olsun. M' nün dağılma parametresi P olmak üzere $\zeta\in\Omega$ merkez noktasında M' nün $\left(e,n\right)$ timelike kesitinin eğriliği

$$K_{\zeta}\left(e,n\right)=\frac{1}{P^{2}}$$

dır.

İspat. IR_1^n de M' parametrik olarak

$$\varphi(t,u)=\alpha(t)+ue(t)$$

ile verilir. M', $2-$boyutlu timelike regle yüzeyin timelike doğrultmanı (4.2.33) denklemine göre

$$e=\sum_{\substack{\nu=1\\ \nu\neq m+s}}^{k}\sinh\theta_\nu e_\nu+\cosh\theta_{m+s}e_{m+s}\quad,\quad 1\leq s\leq k-m \tag{4.2.39}$$

dır, burada e_{m+s}, $1\leq s\leq k-m$, $Z_{k-m}(t)$ merkez uzayı içinde timelike vektördür. e timelike birim vektörü ile $e_1,e_2,\ldots,e_{m+s},\ldots,e_k$ baz vektörleri arasındaki hiperbolik açılar, sırasıyla, $\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_{m+s},\ldots,\theta_k$ dir. O halde (4.2.39) denkleminden

$$\dot{e}=\sum_{\substack{\nu=1\\ \nu\neq m+s}}^{k}\sinh\theta_\nu\,\dot{e}_\nu+\cosh\theta_{m+s}\,\dot{e}_{m+s}\quad,\quad 1\leq s\leq k-m$$

elde edilir. (4.2.39) ve Teorem 3.2.8. den dolayı

$$\begin{aligned}\overset{\circ}{e}&=\sum_{\substack{\nu=1\\ \nu\neq m+s}}^{k}\sinh\theta_\nu\,\dot{e}_\nu+\cosh\theta_{m+s}\,\dot{e}_{m+s}-\sum_{\mu=1}^{k}\varepsilon_\mu\left\langle\sum_{\substack{\nu=1\\ \nu\neq m+s}}^{k}\sinh\theta_\nu\,\dot{e}_\nu+\cosh\theta_{m+s}\,\dot{e}_{m+s},e_\mu\right\rangle e_\mu\\&=\sum_{\substack{\nu=1\\ \nu\neq m+s}}^{k}\sinh\theta_\nu\left(\dot{e}_\nu-\sum_{\mu=1}^{k}\varepsilon_\mu\left\langle\dot{e}_\nu,e_\mu\right\rangle e_\mu\right)+\cosh\theta_{m+s}\left(\dot{e}_{m+s}-\sum_{\mu=1}^{k}\varepsilon_\mu\left\langle\dot{e}_{m+s},e_\mu\right\rangle e_\mu\right)\end{aligned}$$

bulunur. $A(t)=Sp\left\{e_1(t),\ldots,e_k(t),\dot{e}_1(t),\ldots\dot{e}_k(t)\right\}$ asimptotik demetinin $\left\{e_1(t),\ldots,e_k(t),\overset{\circ}{e}_1(t),\ldots\overset{\circ}{e}_m(t)\right\}$ olacak şekilde bir ortogonal bazı olduğundan

$$\overset{\circ}{e} = \sum_{\sigma=1}^{m} \sinh\theta_\sigma \overset{\circ}{e}_\sigma$$

elde edilir ve bu vektörün kendisiyle iç çarpımından

$$\left\| \overset{\circ}{e} \right\|^2 = \sum_{\sigma=1}^{m} \sinh^2\theta_\sigma \left\| \overset{\circ}{e}_\sigma \right\|^2$$

bulunur. $\left\| \overset{\circ}{e} \right\| = \kappa$ ve $\left\| \overset{\circ}{e}_\sigma \right\| = \kappa_\sigma$, $1 \le \sigma \le m$, olduğu göz önüne alınırsa

$$\kappa^2 = \sum_{\sigma=1}^{m} \sinh^2\theta_\sigma \kappa_\sigma^2 \tag{4.2.40}$$

dır. $\zeta \in \Omega$ merkez noktasında $u_\sigma = 0$, $1 \le \sigma \le m$, şartı da göz önüne alınırsa (e_σ, n), $1 \le \sigma \le m$, spacelike asli kesitlerin eğriliği

$$K_\zeta(e_\sigma, n) = -\frac{\kappa_\sigma^2}{\eta_{m+1}^2} \quad , \quad 1 \le \sigma \le m$$

dır. Bu son denklemler, Teorem 4.2.12. de verilen (e,n) timelike kesitinin eğriliği ile asli kesit eğrilikler arasındaki bağıntı olan

$$K_\zeta(e,n) = -\sum_{\sigma=1}^{m} \sinh^2\theta_\sigma K_\zeta(e_\sigma, n)$$

denkleminde yerine yazılırsa

$$K_\zeta(e,n) = \sum_{\sigma=1}^{m} \sinh^2\theta_\sigma \frac{\kappa_\sigma^2}{\eta_{m+1}^2}$$

bulunur ve gerekli düzenlemeler sonucu

$$K_{\zeta}\left(e,n\right)=\frac{\sum_{\sigma=1}^{m}\sinh^{2}\theta_{\sigma}\kappa_{\sigma}^{2}}{\eta_{m+1}^{2}}$$

elde edilir. (4.2.40) denklemi göz önüne alınırsa

$$K_{\zeta}\left(e,n\right)=\left(\frac{\kappa}{\eta_{m+1}}\right)^{2}$$

bulunur. M' nün dağılma parametresi $P=\frac{\eta_{m+1}}{\kappa}$ olduğu göz önüne alınarak ispat tamamlanır.

$$K_{\zeta}\left(e,n\right)=\frac{1}{P^{2}}$$

formülü $\zeta\in\Omega$ merkez noktasında timelike doğrultmanlı $2-$boyutlu timelike yüzeyin $\left(e,n\right)$ timelike kesitinin eğriliği için **Lorentzian Lamarle formülü** olarak adlandırıldı.

Böylece, Teorem 4.2.13. ve Teorem 4.2.15. dan aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 4.2.17. IR_{1}^{n}, $n-$boyutlu Minkowski uzayında M' nün ortogonal yörüngesi boyunca $h_{\zeta}\left(e\right)\subset E_{k}\left(t\right)$, spacelike doğrultmanın hareketiyle oluşan $2-$boyutlu spacelike yüzeyin kesit eğriliği, IR_{1}^{3}, $3-$boyutlu Minkowski uzayında spacelike yüzeylerin Gauss eğriliğine dejenere olur.

Ayrıca, Teorem 4.2.14. ve Teorem 4.2.16. den aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 4.2.18. IR_{1}^{n}, $n-$boyutlu Minkowski uzayında M' nün ortogonal yörüngesi boyunca $h_{\zeta}\left(e\right)\subset E_{k}\left(t\right)$, timelike doğrultmanın hareketiyle oluşan $2-$boyutlu timelike yüzeyin kesit eğriliği, IR_1^3, $3-$boyutlu Minkowski uzayında timelike doğrultmanlı timelike yüzeylerin Gauss eğriliğine dejenere olur.

IR_1^n de timelike doğrultman uzaylı genelleştirilmiş timelike regle yüzey M' nün Ω merkez regle yüzeyi, spacelike veya timelike dır. Böylece, $\forall \zeta \in \Omega$ merkez noktasında e_σ, $1 \leq \sigma \leq m$, ile lineer bağımsız herhangi a birim vektörü

$$a = \lambda_0 \frac{n}{\|n\|} + \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \ldots + \lambda_{s-1} e_{s-1} + \lambda_s e_s + \lambda_{s+1} e_{s+1} + \ldots + \lambda_k e_k \quad , \quad \|a\| = 1$$

olarak yazılır. Burada $F_m(t)$ altuzayı veya $Z_{k-m}(t)$ merkez uzayı içinde timelike birim vektör e_s olmak üzere,

$$\langle a, a \rangle = \lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \ldots + \lambda_{s-1}^2 - \lambda_s^2 + \lambda_{s+1}^2 + \ldots + \lambda_k^2 = \pm 1$$

dir. Bu ifade eder ki a birim spacelike veya timelike vektördür. Böylece M' nün Ω merkez regle yüzeyinin spacelike ($Z_{k-m}(t)$, spacelike) veya timelike ($Z_{k-m}(t)$, timelike) olmasına göre aşağıdaki durumlar söz konusudur.

(a) $Z_{k-m}(t)$ merkez uzayı spacelike iken,

(a1) a birim vektörü spacelike dır

veya

(a2) a birim vektörü timelike dır.

(b) $Z_{k-m}(t)$ merkez uzayı timelike iken,

(b1) a birim vektörü spacelike dır

veya

(b2) a birim vektörü timelike dır.

Şimdi söz konusu durumları, sırasıyla, ayrı ayrı inceleyelim.

(a1) Merkez uzayı spacelike ve a birim vektörü spacelike olsun.

IR_1^n de M', timelike doğrultman uzaylı, spacelike merkez regle yüzeyli genelleştirilmiş timelike regle yüzey olsun. M' nün asli çatısı $\{e_1,\ldots,e_s,\ldots,e_m,\ldots,e_k\}$ ve M' nün $E_k(t)$ doğrultman uzayına ortogonal olan normal teğet vektörü n olmak üzere $\forall\zeta\in\Omega$ merkez noktasında herhangi a spacelike birim vektörü, $1\le s\le m$ ve $\nu\ne s$, için

$$a=\cosh\psi_0\frac{n}{\|n\|}+\sum_{\substack{\nu=1\\ \nu\ne s}}^{k}\cosh\psi_\nu e_\nu+\sinh\psi_s e_s \text{ ve } \sum_{\substack{\nu=0\\ \nu\ne s}}^{k}\cosh^2\theta_\nu-\sinh^2\theta_s=1 \qquad (4.2.41)$$

olarak yazılır. Burada e_s, $1\le s\le m$, $F_m(t)$ altuzayı içinde timelike vektördür ve sırasıyla, $\psi_0,\psi_1,\ldots,\psi_s,\ldots,\psi_k$ açıları, a spacelike birim vektörü ile $n,e_1,\ldots,e_s,\ldots,e_k$ vektörleri arasındaki hiperbolik açılardır.

(a2) Merkez uzayı spacelike ve a birim vektörü timelike olsun.

IR_1^n de M', timelike doğrultman uzaylı, spacelike merkez regle yüzeyli genelleştirilmiş timelike regle yüzey olsun. M' nün asli çatısı $\{e_1,\ldots,e_s,\ldots,e_m,\ldots,e_k\}$ ve M' nün $E_k(t)$ doğrultman uzayına ortogonal olan normal teğet vektörü n olmak üzere $\forall\zeta\in\Omega$ merkez noktasında herhangi a timelike birim vektörü, $1\le s\le m$ ve $\nu\ne s$, için

$$a=\sinh\psi_0\frac{n}{\|n\|}+\sum_{\substack{\nu=1\\ \nu\ne s}}^{k}\sinh\psi_\nu e_\nu+\cosh\psi_s e_s \text{ ve } \sum_{\substack{\nu=0\\ \nu\ne s}}^{k}\sinh^2\theta_\nu-\cosh^2\theta_s=-1 \qquad (4.2.42)$$

şeklindedir, öyle ki burada e_s, $1\le s\le m$, $F_m(t)$ altuzayı içinde bir timelike vektördür ve a timelike birim vektörü ile $n,e_1,\ldots,e_s,\ldots,e_k$ vektörleri arasındaki hiperbolik açılar, sırasıyla, $\psi_0,\psi_1,\ldots,\psi_s,\ldots,\psi_k$ dır.

(b1) Merkez uzayı timelike ve a birim vektörü spacelike olsun.

IR_1^n de M', timelike doğrultman uzaylı, timelike merkez regle yüzeyli genelleştirilmiş timelike regle yüzey olsun. M' nün $\{e_1,\ldots,e_m,\ldots,e_{m+s},\ldots,e_k\}$ asli çatısı ve M' nün $E_k(t)$ doğrultman uzayına ortogonal olan normal teğet vektörü n ise $\forall\zeta\in\Omega$ merkez noktasında herhangi a spacelike birim vektörü, $1\le s\le k-m$ ve $\nu\neq m+s$, için

$$a=\cosh\psi_0\frac{n}{\|n\|}+\sum_{\substack{\nu=1\\ \nu\neq m+s}}^{k}\cosh\psi_\nu e_\nu+\sinh\psi_{m+s}e_{m+s} \tag{4.2.43}$$

ve

$$\sum_{\substack{\nu=0\\ \nu\neq m+s}}^{k}\cosh^2\theta_\nu-\sinh^2\theta_{m+s}=1$$

dır. Burada e_{m+s}, $1\le s\le k-m$, $Z_{k-m}(t)$ merkez uzayı içinde timelike vektördür ve sırasıyla, $\psi_0,\psi_1,\ldots,\psi_{m+s},\ldots,\psi_k$ açıları a, spacelike birim vektörü ile $n,e_1,\ldots,e_{m+s},\ldots,e_k$ baz vektörleri arasındaki hiperbolik açılardır.

(b2) Merkez uzayı timelike ve a birim vektörü timelike olsun.

IR_1^n de M', timelike doğrultman uzaylı, timelike merkez regle yüzeyli genelleştirilmiş timelike regle yüzey olsun. M' nün $\{e_1,\ldots,e_m,\ldots,e_{m+s},\ldots,e_k\}$ asli çatısı ve $E_k(t)$ doğrultman uzayına ortogonal olan normal teğet vektörü n olmak üzere, $\forall\zeta\in\Omega$ merkez noktasında herhangi a timelike birim vektörü, $1\le s\le k-m$ ve $\nu\neq m+s$, için

$$a=\sinh\psi_0\frac{n}{\|n\|}+\sum_{\substack{\nu=1\\ \nu\neq m+s}}^{k}\sinh\psi_\nu e_\nu+\cosh\psi_{m+s}e_{m+s} \tag{4.2.44}$$

ve

$$\sum_{\substack{\nu=0\\ \nu\neq m+s}}^{k}\sinh^2\theta_\nu-\cosh^2\theta_{m+s}=-1$$

olarak yazılır. Burada e_{m+s}, $1 \le s \le k-m$, $Z_{k-m}(t)$ merkez uzayı içinde timelike vektördür ve sırasıyla, $\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_{m+s}, \ldots, \psi_k$ açıları, a timelike birim vektörü ile $n, e_1, \ldots, e_{m+s}, \ldots, e_k$ baz vektörleri arasındaki hiperbolik açılardır.

Böylece yukarıda verilmiş olan (a1), (a2), (b1) ve (b2) durumları göz önüne alınırsa (e_σ, a), $1 \le \sigma \le m$, kesitinin eğriliği ile (e_σ, n), $1 \le \sigma \le m$, σ. asli kesitinin eğriliği arasında bağıntı için aşağıdaki teoremler verilebilir.

Teorem 4.2.19. IR_1^n, $n-$boyutlu Minkowski uzayında timelike doğrultman uzaylı, spacelike merkez regle yüzeyli genelleştirilmiş timelike regle yüzeyi M' nün herhangi spacelike birim vektörü a ve $F_m(t)$ altuzayı içinde timelike vektör e_s, $1 \le s \le m$, olsun.

i. e_σ, $1 \le \sigma \le m$, ($\sigma \ne s$), spacelike vektörü ile lineer bağımsız herhangi a spacelike birim vektörü verildiğinde $(\zeta + ue_\sigma) \in M'$ noktasında (e_σ, a) timelike kesitinin eğriliği ile (e_σ, n) spacelike σ. asli kesitinin eğriliği arasında

$$\left(1-\cosh^2\psi_\sigma\right)K_{\zeta+ue_\sigma}(e_\sigma, a) = \cosh^2\psi_0 K_{\zeta+ue_\sigma}(e_\sigma, n)$$

bağıntısı vardır. Burada a ile n arasındaki hiperbolik açı ψ_0 ve a ile e_σ, $1 \le \sigma \le m$, ($\sigma \ne s$), arasındaki hiperbolik açı ψ_σ dır.

ii. e_s, $1 \le s \le m$, timelike vektörü ile lineer bağımsız herhangi a spacelike birim vektörü verildiğinde $(\zeta + ue_s) \in M'$ noktasında (e_s, a) timelike kesitinin eğriliği ile (e_s, n) timelike s. asli kesitinin eğriliği arasında

$$\left(1+\sinh^2\psi_s\right)K_{\zeta+ue_s}(e_s, a) = \cosh^2\psi_0 K_{\zeta+ue_s}(e_s, n)$$

bağıntısı vardır. Burada a ile n arasındaki hiperbolik açı ψ_0 ve a ile e_s arasındaki hiperbolik açı ψ_s dır.

İspat. IR_1^n, $n-$boyutlu Minkowski uzayında timelike doğrultman uzaylı, spacelike merkez regle yüzeyli genelleştirilmiş timelike regle yüzey M' nün herhangi spacelike birim vektörü a olsun.

i. (4.1.23) denklemi göz önüne alınırsa, $1 \leq \sigma \leq m$, $\sigma \neq s$, olmak üzere $\left(\zeta + ue_\sigma\right) \in M'$ noktasında $\left(e_\sigma, a\right)$ timelike kesitinin eğriliği

$$K_{\zeta+ue_\sigma}\left(e_\sigma, a\right) = \frac{\beta_\sigma \beta_\sigma \lambda_0 \lambda_0 R_{\sigma 0 \sigma 0}}{\left\langle e_\sigma, e_\sigma \right\rangle \left\langle a, a \right\rangle - \left\langle e_\sigma, a \right\rangle^2} \quad , \quad 1 \leq \sigma \leq m \qquad (4.2.45)$$

olarak verilir. e_ν, $1 \leq \nu \leq k$, ν. baz vektörünün ve (3.2.41) denklemi ile verilen a spacelike birim vektörünün koordinatları, sırasıyla, $\left(\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_\nu, \ldots, \beta_k\right)$ ve $\left(\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_s, \ldots, \gamma_k\right)$ olmak üzere

$$\beta_0 = \left\langle e_\nu, e_0 \right\rangle = 0 \quad , \quad \beta_\nu = \left\langle e_\nu, e_\nu \right\rangle = \varepsilon_\nu \quad , \quad 1 \leq \nu \leq k$$

ve

$$\gamma_0 = \left\langle a, e_0 \right\rangle = \frac{\cosh \psi_0}{\|n\|} \quad , \quad \gamma_\nu = \left\langle a, e_\nu \right\rangle = \cosh \psi_\nu \quad , \quad 1 \leq \nu \leq k \quad , \quad \nu \neq s$$

$$\gamma_s = \left\langle a, e_s \right\rangle = \sinh \psi_s \quad , \quad 1 \leq s \leq m$$

dır. Bu son eşitlikler ile (4.2.21) denklemi (4.2.45) denkleminde yerine yazılırsa

$$K_{\zeta+ue_\sigma}\left(e_\sigma, a\right) = \frac{\dfrac{\cosh^2 \psi_0}{\|n\|^2}\left(\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 g}{\partial u_\sigma^2} - \dfrac{1}{4g}\left(\dfrac{\partial g}{\partial u_\sigma}\right)^2\right)}{1 - \cosh^2 \psi_\sigma}$$

bulunur. $\|n\|^2 = -g$ olduğundan

$$K_{\zeta+ue_\sigma}\left(e_\sigma,a\right)=\frac{\cosh^2\psi_0\left(-\frac{1}{2g}\frac{\partial^2 g}{\partial u_\sigma^2}+\frac{1}{4g^2}\left(\frac{\partial g}{\partial u_\sigma}\right)^2\right)}{1-\cosh^2\psi_\sigma}$$

elde edilir. (4.2.25) denklemi göz önüne alınırsa $\left(e_\sigma,n\right)$, $1\leq\sigma\leq m$, $\sigma\neq s$, spacelike σ. asli kesitinin eğriliği ile $\left(e_\sigma,a\right)$ timelike kesitinin eğriliği arasındaki bağıntı bulunur.

ii. Benzer şekilde (4.1.23) denklemi göz önüne alınırsa, $1\leq s\leq m$, $s\neq\sigma$, olmak üzere $\left(\zeta+ue_s\right)\in M'$ noktasında $\left(e_s,a\right)$ timelike kesitinin eğriliği

$$K_{\zeta+ue_s}\left(e_s,a\right)=\frac{\beta_s\beta_s\lambda_0\lambda_0R_{s0s0}}{\left\langle e_s,e_s\right\rangle\left\langle a,a\right\rangle-\left\langle e_s,a\right\rangle^2}\tag{4.2.46}$$

olarak verilir. (4.2.21) denklemi (4.2.46) denkleminde yerine yazılır ve $\left\|n\right\|^2=-g$ olduğu göz önüne alınırsa

$$\left(1+\sinh^2\psi_s\right)K_{\zeta+ue_s}\left(e_s,a\right)=\cosh^2\psi_0\left(\frac{1}{2g}\frac{\partial^2 g}{\partial u_s^2}-\frac{1}{4g^2}\left(\frac{\partial g}{\partial u_s}\right)^2\right)$$

elde edilir. Böylece, (4.2.26) denklemi göz önüne alınırsa $\left(e_s,n\right)$ timelike s. asli kesitinin eğriliği ile $\left(e_s,a\right)$ timelike kesitinin eğriliği arasındaki bağıntı elde edilir.

Teorem 4.2.20. IR_1^n, $n-$boyutlu Minkowski uzayında timelike doğrultman uzaylı, spacelike merkez regle yüzeyli genelleştirilmiş timelike regle yüzeyi M' nün herhangi timelike birim vektör a ve $F_m\left(t\right)$ altuzayı içinde timelike vektör e_s, $1\leq s\leq m$, olsun. e_σ, $1\leq\sigma\leq m$, $\sigma\neq s$, spacelike vektörleri ile ayrı ayrı lineer bağımsız olan herhangi bir a timelike birim vektörü verildiğinde, $\left(\zeta+ue_\sigma\right)\in M'$

noktasında (e_σ, a) timelike kesitinin eğriliği ile (e_σ, n) spacelike σ. asli kesitinin eğriliği arasında

$$\left(1+\cosh^2\psi_\sigma\right)K_{\zeta+ue_\sigma}(e_\sigma, a) = -\sinh^2\psi_0 K_{\zeta+ue_\sigma}(e_\sigma, n)$$

bağıntısı vardır, öyle ki ψ_0 ve ψ_σ, sırasıyla, a ile n ve a ile e_σ arasındaki hiperbolik açılardır.

İspat. (4.1.23) denklemi göz önüne alınırsa, $1 \le \sigma \le m$, $\sigma \ne s$, olmak üzere $(\zeta + ue_\sigma) \in M'$ noktasında (e_σ, a) timelike kesitinin eğriliği

$$K_{\zeta+ue_\sigma}(e_\sigma, a) = \frac{\beta_\sigma\beta_\sigma\lambda_0\lambda_0 R_{\sigma0\sigma0}}{\langle e_\sigma, e_\sigma\rangle\langle a, a\rangle - \langle e_\sigma, a\rangle^2} \quad , \quad 1 \le \sigma \le m \qquad (4.2.47)$$

olur. e_ν, $1 \le \nu \le k$, ν. baz vektörünün ve (4.2.42) denklemi ile verilen a spacelike birim vektörünün koordinatları, sırasıyla, $(\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_\nu, \ldots, \beta_k)$ ve $(\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_s, \ldots, \gamma_k)$ ise

$$\beta_0 = \langle e_\nu, e_0\rangle = 0 \quad , \quad \beta_\nu = \langle e_\nu, e_\nu\rangle = \varepsilon_\nu \quad , \quad 1 \le \nu \le k$$

ve

$$\gamma_0 = \langle a, e_0\rangle = \frac{\sinh\psi_0}{\|n\|} \quad , \quad \gamma_\nu = \langle a, e_\nu\rangle = \sinh\psi_\nu \quad , \quad 1 \le \nu \le k \quad , \quad \nu \ne s$$

$$\gamma_s = \langle a, e_s\rangle = \cosh\psi_s \quad , \quad 1 \le s \le m$$

dır. Bu eşitlikler ve (4.2.21) denklemi (4.2.47) denkleminde yerine yazılır ve $\|n\|^2 = -g$ olduğu göz önüne alınırsa

$$\left(-1-\cosh^2\psi_\sigma\right)K_{\zeta+ue_\sigma}(e_\sigma, a) = \sinh^2\psi_0\left(-\frac{1}{2g}\frac{\partial^2 g}{\partial u_\sigma^2} + \frac{1}{4g^2}\left(\frac{\partial g}{\partial u_\sigma}\right)^2\right)$$

elde edilir. Böylece, (4.2.25) denklemi ile verilen $\left(e_\sigma, n\right)$, $1 \leq \sigma \leq m$, $\sigma \neq s$, spacelike σ. asli kesitinin eğriliği ile $\left(e_\sigma, a\right)$ timelike kesitinin eğriliği arasındaki bağıntı elde edilir ve ispat tamamlanır.

Teorem 4.2.21. IR_1^n, $n-$boyutlu Minkowski uzayında timelike doğrultman uzaylı, timelike merkez regle yüzeyli genelleştirilmiş timelike regle yüzey M' nün herhangi spacelike birim vektörü a ve e_{m+s}, $1 \leq s \leq k-m$, de $Z_{k-m}(t)$ merkez uzayı içinde bir timelike vektör olsun. e_σ, $1 \leq \sigma \leq m$, spacelike vektörleri ile ayrı ayrı lineer bağımsız herhangi a timelike birim vektörü verildiğinde $\left(\zeta + ue_\sigma\right) \in M'$ noktasında $\left(e_\sigma, a\right)$ timelike kesitinin eğriliği ile $\left(e_\sigma, n\right)$ spacelike σ. asli kesitinin eğriliği arasındaki bağıntı

$$\left(1-\cosh^2 \psi_\sigma\right) K_{\zeta+ue_\sigma}\left(e_\sigma, a\right) = \cosh^2 \psi_0 K_{\zeta+ue_\sigma}\left(e_\sigma, n\right)$$

dır. Burada a vektörünün ile n ve e_σ arasındaki hiperbolik açılar, sırasıyla, ψ_0 ve ψ_σ dır

İspat. (4.1.23) denkleminden $\left(\zeta + ue_\sigma\right) \in M'$, $1 \leq \sigma \leq m$, noktasında $\left(e_\sigma, a\right)$ timelike kesitinin eğriliği

$$K_{\zeta+ue_\sigma}\left(e_\sigma, a\right) = \frac{\beta_\sigma \beta_\sigma \lambda_0 \lambda_0 R_{\sigma 0 \sigma 0}}{\left\langle e_\sigma, e_\sigma\right\rangle \left\langle a, a\right\rangle - \left\langle e_\sigma, a\right\rangle^2} \quad , \quad 1 \leq \sigma \leq m \tag{4.2.48}$$

olarak verilir. e_ν, $1 \leq \nu \leq k$, ν. baz vektörünün ve (4.2.43) denklemi ile verilen a spacelike birim vektörünün koordinatları, sırasıyla, $\left(\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_\nu, \ldots, \beta_k\right)$ ve $\left(\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_{m+s}, \ldots, \gamma_k\right)$ olmak üzere

$$\beta_0 = \left\langle e_\nu, e_0\right\rangle = 0 \quad , \quad \beta_\nu = \left\langle e_\nu, e_\nu\right\rangle = \varepsilon_\nu \quad , \quad 1 \leq \nu \leq k$$

ve

$$\gamma_0 = \langle a, e_0 \rangle = \frac{\cosh\psi_0}{\|n\|} \quad , \quad \gamma_\nu = \langle a, e_\nu \rangle = \cosh\psi_\nu \quad , \quad 1 \le \nu \le k \quad , \quad \nu \ne m+s$$

$$\gamma_{m+s} = \langle a, e_{m+s} \rangle = \sinh\psi_{m+s} \quad , \quad 1 \le s \le k-m$$

dır. Bu eşitlikler ve (4.2.21) denklemi (4.2.48) denkleminde yerine yazılırsa

$$K_{\zeta+ue_\sigma}(e_\sigma, a) = \frac{\dfrac{\cosh^2\psi_0}{\|n\|^2}\left(\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 g}{\partial u_\sigma^2} - \dfrac{1}{4g}\left(\dfrac{\partial g}{\partial u_\sigma}\right)^2\right)}{1-\cosh^2\psi_\sigma}$$

bulunur. Bu son denklem ile birlikte $\|n\|^2 = -g$ olduğu göz önüne alınırsa

$$\left(1-\cosh^2\psi_\sigma\right)K_{\zeta+ue_\sigma}(e_\sigma, a) = \cosh^2\psi_0\left(-\frac{1}{2g}\frac{\partial^2 g}{\partial u_\sigma^2} + \frac{1}{4g^2}\left(\frac{\partial g}{\partial u_\sigma}\right)^2\right)$$

elde edilir. Böylece, (4.2.25) denklemi ile verilen (e_σ, n), $1 \le \sigma \le m$, spacelike σ. asli kesitinin eğriliği ile (e_σ, a) timelike kesitinin eğriliği arasındaki bağıntı elde edilir ve ispat tamamlanır.

Teorem 4.2.22. IR_1^n, $n-$boyutlu Minkowski uzayında timelike doğrultman uzaylı, timelike merkez regle yüzeyli genelleştirilmiş timelike regle yüzey M' ve M' nün herhangi bir timelike birim vektörü a, $Z_{k-m}(t)$ merkez uzayı içinde timelike vektör e_{m+s}, $1 \le s \le k-m$, olsun. e_σ, $1 \le \sigma \le m$, spacelike vektörü ile lineer bağımsız herhangi a timelike birim vektörü verildiğinde $(\zeta + ue_\sigma) \in M'$ noktasında (e_σ, a), $1 \le \sigma \le m$, timelike kesitinin eğriliği ile (e_σ, n), $1 \le \sigma \le m$, spacelike σ. asli kesitinin eğriliği arasındaki bağıntı

$$\left(1+\cosh^2\psi_\sigma\right)K_{\zeta+ue_\sigma}(e_\sigma, a) = -\sinh^2\psi_0 K_{\zeta+ue_\sigma}(e_\sigma, n)$$

dır. Burada ψ_0 ve ψ_σ, $1 \le \sigma \le m$, sırasıyla, a ile n ve a ile e_σ, $1 \le \sigma \le m$, arasındaki hiperbolik açılardır.

İspat. (4.1.23) denklemi göz önüne alınırsa, $1 \le \sigma \le m$, olmak üzere $\left(\zeta + ue_\sigma\right) \in M'$ noktasında $\left(e_\sigma, a\right)$ timelike kesitinin eğriliği

$$K_{\zeta+ue_\sigma}\left(e_\sigma, a\right) = \frac{\beta_\sigma\beta_\sigma\lambda_0\lambda_0 R_{\sigma 0\sigma 0}}{\left\langle e_\sigma, e_\sigma\right\rangle\left\langle a, a\right\rangle - \left\langle e_\sigma, a\right\rangle^2} \quad , \quad 1 \le \sigma \le m \tag{4.2.49}$$

olarak verilir. e_ν, $1 \le \nu \le k$, ν. baz vektörünün ve (4.2.44) denklemi ile verilen a spacelike birim vektörünün koordinatları, sırasıyla, $\left(\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_\nu, \ldots, \beta_k\right)$ ve $\left(\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_{m+s}, \ldots, \gamma_k\right)$ ise

$$\beta_0 = \left\langle e_\nu, e_0\right\rangle = 0 \quad , \quad \beta_\nu = \left\langle e_\nu, e_\nu\right\rangle = \varepsilon_\nu \quad , \quad 1 \le \nu \le k$$

ve

$$\gamma_0 = \left\langle a, e_0\right\rangle = \frac{\sinh\psi_0}{\|n\|} \quad , \quad \gamma_\nu = \left\langle a, e_\nu\right\rangle = \sinh\psi_\nu \quad , \quad 1 \le \nu \le k \quad , \quad \nu \ne m+s$$

$$\gamma_{m+s} = \left\langle a, e_{m+s}\right\rangle = \cosh\psi_{m+s}, \quad 1 \le s \le k-m$$

dır. Bu eşitlikler ve (4.2.21) denklemi (4.2.49) denkleminde yerine yazılırsa

$$K_{\zeta+ue_\sigma}\left(e_\sigma, a\right) = \frac{\dfrac{\sinh^2\psi_0}{\|n\|^2}\left(\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 g}{\partial u_\sigma^2} - \dfrac{1}{4g}\left(\dfrac{\partial g}{\partial u_\sigma}\right)^2\right)}{-1-\cosh^2\psi_\sigma}$$

bulunur. $\|n\|^2 = -g$ olduğu göz önüne alınırsa

$$\left(-1-\cosh^2\psi_\sigma\right)K_{\zeta+ue_\sigma}\left(e_\sigma, a\right) = \sinh^2\psi_0\left(-\frac{1}{2g}\frac{\partial^2 g}{\partial u_\sigma^2} + \frac{1}{4g^2}\left(\frac{\partial g}{\partial u_\sigma}\right)^2\right)$$

elde edilir. (4.2.25) denklemi ile verilen (e_σ, n), $1 \leq \sigma \leq m$, spacelike σ. asli kesitinin eğriliği ile (e_σ, a) timelike kesitinin eğriliği arasındaki bağıntı bulunur ve böylece ispat tamamlanır.

(4.2.30), (4.2.31), (4.2.32) ve (4.2.33) denklemleri ile verilen e vektörü, $E_k(t)$ içinde bir birim vektör ve (4.2.41), (4.2.42), (4.2.43) ve (4.2.44) denklemleri ile verilen a vektörü, $\forall \zeta \in \Omega$ merkez noktasında birim vektör olmak üzere M' nün (e,a) kesitinin eğriliği ile ilgili aşağıdaki teoremler verilebilir.

Teorem 4.2.23. IR_1^n, $n-$boyutlu Minkowski uzayında timelike doğrultman uzaylı, spacelike merkez regle yüzeyli genelleştirilmiş timelike regle yüzey M' olsun. M' nün $E_k(t)$ doğrultman uzayı içinde spacelike birim vektör e ile lineer bağımsız olan a vektörü $\forall \zeta \in \Omega$ merkez noktasında herhangi spacelike birim vektör olmak üzere, M' nün (e,a) nondejenere kesitinin eğriliği ile (e,n) spacelike kesitinin eğriliği arasındaki bağıntı

$$K_\zeta(e,a) = \frac{\cosh^2 \psi_0}{1-\langle e,a\rangle^2} K_\zeta(e,n)$$

dır. Burada a, spacelike birim vektörü ile n, spacelike normal teğet vektörü arasındaki açı ψ_0 dır.

İspat. (4.2.23) denklemleri göz önüne alınırsa $\zeta \in \Omega$ merkez noktasında (e,a) spacelike kesitinin eğriliği

$$K_\zeta(e,a) = \frac{\sum\limits_{\substack{\sigma=1 \\ \sigma \neq s}}^{m} \beta_\sigma \beta_\sigma \lambda_0 \lambda_0 R_{\sigma 0 \sigma 0} + \beta_s \beta_s \lambda_0 \lambda_0 R_{s0s0}}{\langle e,e\rangle\langle a,a\rangle - \langle e,a\rangle^2} \tag{4.2.50}$$

olarak verilir. (4.2.30) ve (4.2.41) denklemlerinden e ve a teğet vektörlerinin koordinatları, sırasıyla, $(\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_s, \ldots, \beta_k)$ ve $(\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_s, \ldots, \gamma_k)$ olmak üzere

$$\beta_0 = \langle e, e_0 \rangle = 0,$$
$$\beta_s = \langle e, e_s \rangle = \sinh \theta_s \quad , \quad 1 \le s \le m$$
$$\beta_\nu = \langle e, e_\nu \rangle = \cosh \theta_\nu \quad , \quad 1 \le \nu \le k \quad , \quad \nu \ne s$$

ve

$$\gamma_0 = \langle a, e_0 \rangle = \frac{\cosh \psi_0}{\|n\|},$$
$$\gamma_s = \langle a, e_s \rangle = \sinh \psi_s \quad , \quad 1 \le s \le m$$
$$\gamma_\nu = \langle a, e_\nu \rangle = \cosh \psi_\nu \quad , \quad 1 \le \nu \le k \quad , \quad \nu \ne s$$

dır. Bu eşitlikler ile (4.2.21) denklemi (4.2.50) denkleminde yerine yazılırsa

$$K_\zeta(e,a) = \frac{\dfrac{\cosh^2 \psi_0}{\|n\|^2}\left(\sum_{\sigma=1}^{m} \cosh^2 \theta_\sigma \left(\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 g}{\partial u_\sigma^2} - \dfrac{1}{4g}\left(\dfrac{\partial g}{\partial u_\sigma}\right)^2\right) + \sinh^2 \theta_s \left(\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 g}{\partial u_s^2} - \dfrac{1}{4g}\left(\dfrac{\partial g}{\partial u_s}\right)^2\right)\right)}{1 - \langle e, a \rangle^2}$$

bulunur. Bu son denklem ve $\|n\|^2 = -g$ göz önüne alınırsa

$$K_\zeta(e,a) = \frac{\cosh^2 \psi_0 \left(\sum_{\sigma=1}^{m} \cosh^2 \theta_\sigma \left(-\dfrac{1}{2g}\dfrac{\partial^2 g}{\partial u_\sigma^2} + \dfrac{1}{4g^2}\left(\dfrac{\partial g}{\partial u_\sigma}\right)^2\right) + \sinh^2 \theta_s \left(-\dfrac{1}{2g}\dfrac{\partial^2 g}{\partial u_s^2} + \dfrac{1}{4g^2}\left(\dfrac{\partial g}{\partial u_s}\right)^2\right)\right)}{1 - \langle e, a \rangle^2}$$

elde edilir. $\zeta \in \Omega$ merkez noktasında (4.2.25) denklemi ile verilen (e_σ, n), $1 \le \sigma \le m$, $\sigma \ne s$, spacelike σ. asli kesitinin eğriliği ve (4.2.26) denklemi ile verilen (e_s, n), $1 \le s \le m$, timelike s. asli kesitinin eğriliği göz önüne alınırsa

$$K_\zeta(e,a) = \frac{\cosh^2 \psi_0 \left(\sum_{\sigma=1}^{m} \cosh^2 \theta_\sigma K_\zeta(e_\sigma, a) - \sinh^2 \theta_s K_\zeta(e_s, a)\right)}{1 - \langle e, a \rangle^2}$$

bulunur. Burada Teorem 4.2.9. da verilen I. tip Lorentzian Beltrami-Euler formülü göz önüne alınırsa ispat tamamlanır.

Teorem 4.2.24. IR_1^n, $n-$boyutlu Minkowski uzayında timelike doğrultman uzaylı, spacelike merkez regle yüzeyli genelleştirilmiş timelike regle yüzey M' olsun. M' nün $E_k(t)$ doğrultman uzayı içinde spacelike birim vektör e ile lineer bağımsız olan bir a birim vektörü, $\forall\zeta\in\Omega$ merkez noktasında herhangi timelike birim vektör olmak üzere, M' nün (e,a) timelike kesitinin eğriliği ile (e,n) spacelike kesitinin eğriliği arasında

$$K_\zeta(e,a)=-\frac{\sinh^2\psi_0}{1+\langle e,a\rangle^2}K_\zeta(e,n)$$

bağıntısı vardır. Burada ψ_0 açısı, a timelike birim vektörü ile n, spacelike normal teğet vektörü arasındaki açıdır.

İspat. (4.2.23) denklemleri göz önüne alınırsa $\zeta\in\Omega$ merkez noktasında (e,a) timelike kesitinin eğriliği

$$K_\zeta(e,a)=\frac{\sum\limits_{\substack{\sigma=1\\ \sigma\neq s}}^{m}\beta_\sigma\beta_\sigma\lambda_0\lambda_0R_{\sigma0\sigma0}+\beta_s\beta_s\lambda_0\lambda_0R_{s0s0}}{\langle e,e\rangle\langle a,a\rangle-\langle e,a\rangle^2} \tag{4.2.51}$$

olarak verilir. (4.2.30) ve (4.2.42) denklemlerinden e ve a teğet vektörlerinin koordinatları, sırasıyla, $(\beta_0,\beta_1,\ldots,\beta_s,\ldots,\beta_k)$ ve $(\gamma_0,\gamma_1,\ldots,\gamma_s,\ldots,\gamma_k)$ ise

$$\begin{aligned}
\beta_0&=\langle e,e_0\rangle=0,\\
\beta_s&=\langle e,e_s\rangle=\sinh\theta_s \quad , \quad 1\le s\le m\\
\beta_\nu&=\langle e,e_\nu\rangle=\cosh\theta_\nu \quad , \quad 1\le\nu\le k \quad , \quad \nu\neq s
\end{aligned}$$

ve

$$\gamma_0 = \langle a, e_0 \rangle = \frac{\sinh \psi_0}{\|n\|},$$
$$\gamma_s = \langle a, e_s \rangle = \cosh \psi_s \quad , \quad 1 \le s \le m$$
$$\gamma_\nu = \langle a, e_\nu \rangle = \sinh \psi_\nu \quad , \quad 1 \le \nu \le k \quad , \quad \nu \ne s$$

olarak elde edilir. Bu son eşitlikler ve (4.2.21) denklemi (4.2.51) denkleminde yerine yazılırsa

$$K_\zeta(e,a) = \frac{\dfrac{\sinh^2 \psi_0}{\|n\|^2}\left(\sum_{\sigma=1}^{m} \cosh^2 \theta_\sigma \left(\frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial u_\sigma^2} - \frac{1}{4g}\left(\frac{\partial g}{\partial u_\sigma}\right)^2\right) + \sinh^2 \theta_s \left(\frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial u_s^2} - \frac{1}{4g}\left(\frac{\partial g}{\partial u_s}\right)^2\right)\right)}{-1 - \langle e,a \rangle^2}$$

bulunur. $\|n\|^2 = -g$ olduğundan

$$K_\zeta(e,a) = -\frac{\sinh^2 \psi_0 \left(\sum_{\sigma=1}^{m} \cosh^2 \theta_\sigma \left(-\frac{1}{2g}\frac{\partial^2 g}{\partial u_\sigma^2} + \frac{1}{4g^2}\left(\frac{\partial g}{\partial u_\sigma}\right)^2\right) + \sinh^2 \theta_s \left(-\frac{1}{2g}\frac{\partial^2 g}{\partial u_s^2} + \frac{1}{4g^2}\left(\frac{\partial g}{\partial u_s}\right)^2\right)\right)}{1 + \langle e,a \rangle^2}$$

elde edilir. $\zeta \in \Omega$ merkez noktasında (4.2.25) denklemi ile verilen (e_σ, n), $1 \le \sigma \le m$, $\sigma \ne s$, spacelike σ. asli kesitinin eğriliği ve (4.2.26) denklemi ile verilen (e_s, n), $1 \le s \le m$, timelike s. asli kesitinin eğriliği göz önüne alınırsa

$$K_\zeta(e,a) = -\frac{\sinh^2 \psi_0 \left(\sum_{\sigma=1}^{m} \cosh^2 \theta_\sigma K_\zeta(e_\sigma, a) - \sinh^2 \theta_s K_\zeta(e_s, a)\right)}{1 + \langle e,a \rangle^2}$$

bulunur. Bu son denklem ve Teorem 4.2.9. da verilen I. tip Lorentzian Beltrami-Euler formülü göz önüne alınırsa ispat tamamlanır.

Teorem 4.2.25. IR_1^n, $n-$boyutlu Minkowski uzayında timelike doğrultman uzaylı, spacelike merkez regle yüzeyli genelleştirilmiş timelike regle yüzey M' olsun.

$E_k(t)$ doğrultman uzayı içinde timelike birim vektör e ile lineer bağımsız olan a vektörü $\forall\zeta\in\Omega$ merkez noktasında herhangi spacelike birim vektör olmak üzere M' nün (e,a) timelike kesitinin eğriliği ile (e,n) timelike kesitinin eğriliği arasında

$$K_\zeta(e,a)=\frac{\cosh^2\psi_0}{1+\langle e,a\rangle^2}K_\zeta(e,n)$$

bağıntısı vardır. Burada a, spacelike birim vektörü ile n, spacelike normal teğet vektörü arasındaki açı ψ_0 dır.

İspat. (4.2.23) denklemleri göz önüne alınırsa $\zeta\in\Omega$ merkez noktasında (e,a) timelike kesitinin eğriliği

$$K_\zeta(e,a)=\frac{\sum\limits_{\substack{\sigma=1\\ \sigma\neq s}}^{m}\beta_\sigma\beta_\sigma\lambda_0\lambda_0R_{\sigma0\sigma0}+\beta_s\beta_s\lambda_0\lambda_0R_{s0s0}}{\langle e,e\rangle\langle a,a\rangle-\langle e,a\rangle^2} \tag{4.2.52}$$

olarak verilir. (4.2.31) ve (4.2.44) denklemlerinden e ve a teğet vektörlerinin koordinatları, sırasıyla, $(\beta_0,\beta_1,\ldots,\beta_s,\ldots,\beta_k)$ ve $(\gamma_0,\gamma_1,\ldots,\gamma_s,\ldots,\gamma_k)$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
&\beta_0=\langle e,e_0\rangle=0,\\
&\beta_s=\langle e,e_s\rangle=\cosh\theta_s \quad , \quad 1\leq s\leq m\\
&\beta_\nu=\langle e,e_\nu\rangle=\sinh\theta_\nu \quad , \quad 1\leq\nu\leq k \quad , \quad \nu\neq s
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
&\gamma_0=\langle a,e_0\rangle=\frac{\cosh\psi_0}{\|n\|},\\
&\gamma_s=\langle a,e_s\rangle=\sinh\psi_s \quad , \quad 1\leq s\leq m\\
&\gamma_\nu=\langle a,e_\nu\rangle=\cosh\psi_\nu \quad , \quad 1\leq\nu\leq k \quad , \quad \nu\neq s
\end{aligned}$$

dır. Bu eşitlikler ve (4.2.21) denklemi (4.2.52) denkleminde yerine yazılırsa

$$K_\zeta(e,a)=\frac{\dfrac{\cosh^2\psi_0}{\|n\|^2}\left(\sum_{\sigma=1}^{m}\sinh^2\theta_\sigma\left(\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 g}{\partial u_\sigma^2}-\dfrac{1}{4g}\left(\dfrac{\partial g}{\partial u_\sigma}\right)^2\right)+\cosh^2\theta_s\left(\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 g}{\partial u_s^2}-\dfrac{1}{4g}\left(\dfrac{\partial g}{\partial u_s}\right)^2\right)\right)}{-1-\langle e,a\rangle^2}$$

bulunur. $\|n\|^2=-g$ olduğu göz önüne alınırsa

$$K_\zeta(e,a)=-\frac{\cosh^2\psi_0\left(\sum_{\sigma=1}^{m}\sinh^2\theta_\sigma\left(-\dfrac{1}{2g}\dfrac{\partial^2 g}{\partial u_\sigma^2}+\dfrac{1}{4g^2}\left(\dfrac{\partial g}{\partial u_\sigma}\right)^2\right)+\cosh^2\theta_s\left(-\dfrac{1}{2g}\dfrac{\partial^2 g}{\partial u_s^2}+\dfrac{1}{4g^2}\left(\dfrac{\partial g}{\partial u_s}\right)^2\right)\right)}{1+\langle e,a\rangle^2}$$

elde edilir. Bu son denklemde $\zeta\in\Omega$ merkez noktasında (4.2.25) denklemi ile verilen (e_σ,n), $1\le\sigma\le m$, $\sigma\ne s$, spacelike σ. asli kesitinin eğriliği ve (4.2.26) denklemi ile verilen (e_s,n), $1\le s\le m$, timelike s. asli kesitinin eğriliği yerine yazılırsa

$$K_\zeta(e,a)=\frac{\cosh^2\psi_0\left(-\sum_{\sigma=1}^{m}\sinh^2\theta_\sigma K_\zeta(e_\sigma,a)+\cosh^2\theta_s K_\zeta(e_s,a)\right)}{1+\langle e,a\rangle^2}$$

bulunur. Teorem 4.2.10. da verilen II. tip Lorentzian Beltrami-Euler formülünden (e,n) timelike kesitinin eğriliği göz önüne alınırsa ispat tamamlanır.

Teorem 4.2.26. IR_1^n, $n-$boyutlu Minkowski uzayında timelike doğrultman uzaylı, timelike merkez regle yüzeyli genelleştirilmiş timelike regle yüzey M' olsun. $E_k(t)$ doğrultman uzayı içinde spacelike birim vektör e ile lineer bağımsız a vektörü $\forall\zeta\in\Omega$ merkez noktasında herhangi spacelike birim vektör olmak üzere M' nün (e,a) nondejenere kesitinin eğriliği ile (e,n) spacelike kesitinin eğriliği arasında

$$K_\zeta(e,a)=\frac{\cosh^2\psi_0}{1-\langle e,a\rangle^2}K_\zeta(e,n)$$

bağıntısı vardır, öyle ki ψ_0 açısı a, spacelike birim vektörü ile n, spacelike normal teğet vektörü arasındaki açıdır.

İspat. (4.2.23) denklemleri göz önüne alınırsa $\zeta \in \Omega$ merkez noktasında (e,a) spacelike kesitinin eğriliği

$$K_\zeta(e,a) = \frac{\sum_{\sigma=1}^{m} \beta_\sigma \beta_\sigma \lambda_0 \lambda_0 R_{\sigma 0 \sigma 0}}{\langle e,e\rangle \langle a,a\rangle - \langle e,a\rangle^2} \tag{3.2.53}$$

dır. (4.2.32) ve (4.2.43) denklemlerinden e ve a teğet vektörlerinin koordinatları, sırasıyla, $(\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{m+s}, \ldots, \beta_k)$ ve $(\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_{m+s}, \ldots, \gamma_k)$ ise

$$\begin{aligned}
\beta_0 &= \langle e, e_0\rangle = 0, \\
\beta_{m+s} &= \langle e, e_{m+s}\rangle = \sinh\theta_{m+s}, \quad 1 \le s \le k-m \\
\beta_\nu &= \langle e, e_\nu\rangle = \cosh\theta_\nu \quad , \quad 1 \le \nu \le k \quad , \quad \nu \ne m+s
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\gamma_0 &= \langle a, e_0\rangle = \frac{\cosh\psi_0}{\|n\|}, \\
\gamma_{m+s} &= \langle a, e_{m+s}\rangle = \sinh\psi_{m+s}, \quad 1 \le s \le k-m \\
\gamma_\nu &= \langle a, e_\nu\rangle = \cosh\psi_\nu \quad , \quad 1 \le \nu \le k \quad , \quad \nu \ne m+s
\end{aligned}$$

bulunur. Bu eşitlikler ve (4.2.21) denklemi (4.2.53) denkleminde yerine yazılırsa

$$K_\zeta(e,a) = \frac{\frac{\cosh^2\psi_0}{\|n\|^2} \sum_{\sigma=1}^{m} \cosh^2\theta_\sigma \left(\frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial u_\sigma^2} - \frac{1}{4g}\left(\frac{\partial g}{\partial u_\sigma}\right)^2 \right)}{1 - \langle e,a\rangle^2}$$

elde edilir ve $\|n\|^2 = -g$ olduğundan

$$K_{\zeta}\left(e,a\right)=\frac{\cosh^2\psi_0\sum_{\sigma=1}^{m}\cosh^2\theta_{\sigma}\left(-\frac{1}{2g}\frac{\partial^2 g}{\partial u_{\sigma}^2}+\frac{1}{4g^2}\left(\frac{\partial g}{\partial u_{\sigma}}\right)^2\right)}{1-\left\langle e,a\right\rangle^2}$$

bulunur. $\zeta\in\Omega$ merkez noktasında (4.2.25) denklemi ile verilen $\left(e_{\sigma},n\right)$, $1\leq\sigma\leq m$, spacelike σ. asli kesitinin eğriliği göz önüne alınırsa

$$K_{\zeta}\left(e,a\right)=\frac{\cosh^2\psi_0\sum_{\sigma=1}^{m}\cosh^2\theta_{\sigma}K_{\zeta}\left(e_{\sigma},a\right)}{1-\left\langle e,a\right\rangle^2}$$

elde edilir. Teorem 4.2.11. de verilen III. tip Lorentzian Beltrami-Euler formülünden $\left(e,n\right)$ spacelike kesitinin eğriliği ile $\left(e,a\right)$ spacelike kesitinin eğriliği arasındaki bağıntı elde edilir ve ispat tamamlanır.

Teorem 4.2.27. IR_1^n, $n-$boyutlu Minkowski uzayında timelike doğrultman uzaylı, timelike merkez regle yüzeyli genelleştirilmiş timelike regle yüzey M' olsun. M' nün $E_k\left(t\right)$ doğrultman uzayı içinde spacelike birim vektör e ile lineer bağımsız a vektörü $\forall\zeta\in\Omega$ merkez noktasında herhangi timelike birim vektör olmak üzere M' nün $\left(e,a\right)$ timelike kesitinin eğriliği ile $\left(e,n\right)$ spacelike kesitinin eğriliği arasında

$$K_{\zeta}\left(e,a\right)=-\frac{\sinh^2\psi_0}{1+\left\langle e,a\right\rangle^2}K_{\zeta}\left(e,n\right)$$

bağıntısı vardır. Burada ψ_0 açısı a, timelike birim vektörü ile n, spacelike normal teğet vektörü arasındaki açıdır.

İspat. (4.2.23) denklemleri göz önüne alınırsa $\zeta\in\Omega$ merkez noktasında $\left(e,a\right)$ timelike kesitinin eğriliği

$$K_{\zeta}\left(e,a\right)=\frac{\sum_{\sigma=1}^{m}\beta_{\sigma}\beta_{\sigma}\lambda_{0}\lambda_{0}R_{\sigma0\sigma0}}{\left\langle e,e\right\rangle\left\langle a,a\right\rangle-\left\langle e,a\right\rangle^{2}} \tag{4.2.54}$$

olarak verilir. (4.2.32) ve (4.2.44) denklemlerinden e ve a teğet vektörlerinin koordinatları, sırasıyla, $\left(\beta_{0},\beta_{1},\ldots,\beta_{m+s},\ldots,\beta_{k}\right)$ ve $\left(\gamma_{0},\gamma_{1},\ldots,\gamma_{m+s},\ldots,\gamma_{k}\right)$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
\beta_{0} &= \left\langle e,e_{0}\right\rangle = 0,\\
\beta_{m+s} &= \left\langle e,e_{m+s}\right\rangle = \sinh\theta_{m+s}, \quad 1\leq s\leq k-m\\
\beta_{\nu} &= \left\langle e,e_{\nu}\right\rangle = \cosh\theta_{\nu} \quad , \quad 1\leq \nu\leq k \quad , \quad \nu\neq m+s
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\gamma_{0} &= \left\langle a,e_{0}\right\rangle = \frac{\sinh\psi_{0}}{\left\|n\right\|},\\
\gamma_{m+s} &= \left\langle a,e_{m+s}\right\rangle = \cosh\psi_{m+s}, \quad 1\leq s\leq k-m\\
\gamma_{\nu} &= \left\langle a,e_{\nu}\right\rangle = \sinh\psi_{\nu} \quad , \quad 1\leq \nu\leq k \quad , \quad \nu\neq m+s
\end{aligned}$$

dır. Bu eşitlikler ile (4.2.21) denklemi (4.2.54) denkleminde yerine yazılırsa

$$K_{\zeta}\left(e,a\right)=\frac{\dfrac{\sinh^{2}\psi_{0}}{\left\|n\right\|^{2}}\sum_{\sigma=1}^{m}\cosh^{2}\theta_{\sigma}\left(\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^{2}g}{\partial u_{\sigma}^{2}}-\dfrac{1}{4g}\left(\dfrac{\partial g}{\partial u_{\sigma}}\right)^{2}\right)}{-1-\left\langle e,a\right\rangle^{2}}$$

bulunur. $\left\|n\right\|^{2}=-g$ olduğundan

$$K_{\zeta}\left(e,a\right)=-\frac{\sinh^{2}\psi_{0}\sum_{\sigma=1}^{m}\cosh^{2}\theta_{\sigma}\left(-\dfrac{1}{2g}\dfrac{\partial^{2}g}{\partial u_{\sigma}^{2}}+\dfrac{1}{4g^{2}}\left(\dfrac{\partial g}{\partial u_{\sigma}}\right)^{2}\right)}{1+\left\langle e,a\right\rangle^{2}}$$

elde edilir. $\zeta\in\Omega$ merkez noktasında (4.2.25) denklemi ile verilen $\left(e_{\sigma},n\right)$, $1\leq\sigma\leq m$, spacelike σ. asli kesitinin eğriliği göz önüne alınırsa

$$K_\zeta(e,a) = -\frac{\sinh^2\psi_0 \sum_{\sigma=1}^{m} \cosh^2\theta_\sigma K_\zeta(e_\sigma, a)}{1+\langle e,a\rangle^2}$$

bulunur. Burada, Teorem 4.2.11. de verilen III. tip Lorentzian Beltrami-Euler formülünden (e,n) spacelike kesitinin eğriliği yerine yazılırsa ispat tamamlanır.

Teorem 4.2.28. IR_1^n, $n-$boyutlu Minkowski uzayında timelike doğrultman uzaylı, timelike merkez regle yüzeyli genelleştirilmiş timelike regle yüzey M' olsun. M' nün $E_k(t)$ doğrultman uzayı içinde timelike birim vektör e ile lineer bağımsız a vektörü $\forall\zeta\in\Omega$ merkez noktasında herhangi spacelike birim vektör olmak üzere M' nün (e,a) timelike kesitinin eğriliği ile (e,n) timelike kesitinin eğriliği arasında

$$K_\zeta(e,a) = \frac{\cosh^2\psi_0}{1+\langle e,a\rangle^2} K_\zeta(e,n)$$

bağıntısı vardır, öyle ki ψ_0 açısı a, spacelike birim vektörü ile n, spacelike normal teğet vektörü arasındaki açıdır.

İspat. (4.2.23) denklemleri göz önüne alınırsa $\zeta\in\Omega$ merkez noktasında (e,a) timelike kesitinin eğriliği

$$K_\zeta(e,a) = \frac{\sum_{\sigma=1}^{m} \beta_\sigma\beta_\sigma\lambda_0\lambda_0 R_{\sigma0\sigma0}}{\langle e,e\rangle\langle a,a\rangle - \langle e,a\rangle^2} \tag{4.2.55}$$

olarak verilir. (4.2.33) ve (4.2.43) denklemlerinden e ve a teğet vektörlerinin koordinatları, sırasıyla, $(\beta_0,\beta_1,\ldots,\beta_{m+s},\ldots,\beta_k)$ ve $(\gamma_0,\gamma_1,\ldots,\gamma_{m+s},\ldots,\gamma_k)$ olmak üzere

$$\beta_0 = \langle e, e_0 \rangle = 0,$$
$$\beta_{m+s} = \langle e, e_{m+s} \rangle = \cosh \theta_{m+s}, \quad 1 \leq s \leq k-m$$
$$\beta_\nu = \langle e, e_\nu \rangle = \sinh \theta_\nu \quad , \quad 1 \leq \nu \leq k \quad , \quad \nu \neq m+s$$

ve

$$\gamma_0 = \langle a, e_0 \rangle = \frac{\cosh \psi_0}{\|n\|},$$
$$\gamma_{m+s} = \langle a, e_{m+s} \rangle = \sinh \psi_{m+s}, \quad 1 \leq s \leq k-m$$
$$\gamma_\nu = \langle a, e_\nu \rangle = \cosh \psi_\nu \quad , \quad 1 \leq \nu \leq k \quad , \quad \nu \neq m+s$$

dır. Bu eşitlikler ile (4.2.21) denklemi (4.2.55) denkleminde yerine yazılırsa

$$K_\zeta(e,a) = \frac{\dfrac{\cosh^2 \psi_0}{\|n\|^2} \displaystyle\sum_{\sigma=1}^{m} \sinh^2 \theta_\sigma \left(\frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial u_\sigma^2} - \frac{1}{4g} \left(\frac{\partial g}{\partial u_\sigma} \right)^2 \right)}{-1 - \langle e, a \rangle^2}$$

elde edilir. $\|n\|^2 = -g$ olduğu göz önüne alınırsa

$$K_\zeta(e,a) = -\frac{\cosh^2 \psi_0 \displaystyle\sum_{\sigma=1}^{m} \sinh^2 \theta_\sigma \left(-\frac{1}{2g} \frac{\partial^2 g}{\partial u_\sigma^2} + \frac{1}{4g^2} \left(\frac{\partial g}{\partial u_\sigma} \right)^2 \right)}{1 + \langle e, a \rangle^2}$$

bulunur. Bu son denklemde $\zeta \in \Omega$ merkez noktasında (4.2.25) denklemi ile verilen (e_σ, n), $1 \leq \sigma \leq m$, spacelike σ. asli kesitinin eğriliği yerine yazılırsa

$$K_\zeta(e,a) = -\frac{\cosh^2 \psi_0 \displaystyle\sum_{\sigma=1}^{m} \sinh^2 \theta_\sigma K_\zeta(e_\sigma, a)}{1 + \langle e, a \rangle^2}$$

elde edilir. Burada, Teorem 4.2.13. de verilen IV. tip Lorentzian Beltrami-Euler formülünden (e, n) timelike kesitinin eğriliği göz önüne alınırsa ispat tamamlanır.

Bu son altı teoremden görülür ki M' nün merkez regle yüzeyi spacelike veya timelike iken (e,a) kesit eğrilikleri için elde edilen bağıntılar aynıdır. Böylece, aşağıdaki sonuçlar verilir.

Teorem 4.2.23. ve Teorem 4.2.26. den dolayı aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 4.2.29. IR_1^n, $n-$boyutlu Minkowski uzayında timelike doğrultman uzaylı, (spacelike veya timelike) merkez regle yüzeyli genelleştirilmiş timelike regle yüzey M' olsun. M' nün $E_k(t)$ doğrultman uzayı içinde spacelike birim vektör e ile lineer bağımsız a vektörü $\forall\zeta\in\Omega$ merkez noktasında herhangi spacelike birim vektör olmak üzere M' nün herhangi (e,a) spacelike kesitinin eğriliği, e ve a vektörlerine, (e,n) spacelike kesiti için verilen Lorentzian Beltrami-Euler formülüne ve $\psi_0 = \sphericalangle(a,n)$ açısına dayanır. M' nün (e,a) spacelike kesitinin eğriliği ile (e,n) spacelike kesitinin eğriliği arasında

$$K_\zeta(e,a) = \frac{\cosh^2\psi_0}{1-\langle e,a\rangle^2} K_\zeta(e,n)$$

bağıntısı vardır ve bu bağıntı timelike doğrultman uzaylı genelleştirilmiş timelike regle yüzeyinin merkez noktasında kesit eğriliğinin **I. tip Lorentzian Beltrami-Meusnier formülü** olarak adlandırıldı.

Teorem 4.2.24. ve Teorem 4.2.27. den aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 4.2.30. IR_1^n, $n-$boyutlu Minkowski uzayında timelike doğrultman uzaylı, (spacelike veya timelike) merkez regle yüzeyli genelleştirilmiş timelike regle yüzey M' olsun. M' nün $E_k(t)$ doğrultman uzayı içinde spacelike birim vektör e ile lineer bağımsız a vektörü $\forall\zeta\in\Omega$ merkez noktasında herhangi timelike birim vektör olmak üzere M' nün herhangi (e,a) timelike kesitinin eğriliği, e ve a vektörlerine, (e,n) spacelike kesiti için verilen Lorentzian Beltrami-Euler formülüne ve $\psi_0 = \sphericalangle(a,n)$ açısına dayanır. M' nün (e,a) timelike kesitinin eğriliği ile (e,n) spacelike kesitinin eğriliği arasında

$$K_\zeta(e,a) = -\frac{\sinh^2 \psi_0}{1+\langle e,a\rangle^2} K_\zeta(e,n)$$

bağıntısı vardır ve bu bağıntı timelike doğrultman uzaylı genelleştirilmiş timelike regle yüzeyinin merkez noktasında kesit eğriliğinin **II. tip Lorentzian Beltrami-Meusnier formülü** olarak adlandırıldı.

Teorem 4.2.25. ve Teorem 4.2.28. dan aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 4.2.31. IR_1^n, $n-$boyutlu Minkowski uzayında timelike doğrultman uzaylı, (spacelike veya timelike) merkez regle yüzeyli genelleştirilmiş timelike regle yüzey M' olsun. M' nün $E_k(t)$ doğrultman uzayı içinde timelike birim vektör e ile lineer bağımsız a vektörü $\forall \zeta \in \Omega$ merkez noktasında herhangi spacelike birim vektör olmak üzere M' nün herhangi (e,a) timelike kesitinin eğriliği, e ve a vektörlerine, (e,n) timelike kesiti için verilen Lorentzian Beltrami-Euler formülüne ve $\psi_0 = \sphericalangle(a,n)$ açısına dayanır. M' nün (e,a) timelike kesitinin eğriliği ile (e,n) timelike kesitinin eğriliği arasında

$$K_\zeta(e,a) = \frac{\cosh^2 \psi_0}{1+\langle e,a\rangle^2} K_\zeta(e,n)$$

bağıntısı vardır ve bu bağıntı timelike doğrultman uzaylı genelleştirilmiş timelike regle yüzeyinin merkez noktasında kesit eğriliğinin **III. tip Lorentzian Beltrami-Meusnier formülü** olarak adlandırıldı.

Örnek 4.2.32. $X=(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)$, $Y=(y_1,y_2,y_3,y_4,y_5)\in IR^5$ olmak üzere

$$\langle X,Y\rangle = x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3+x_4y_4-x_5y_5$$

Lorentz metriği ile verilen $5-$boyutlu Minkowski uzayı IR_1^5 olsun. IR_1^5 de κ, τ ve $\varepsilon=\sqrt{\kappa^2+\tau^2}$ keyfi sabitler olmak üzere $\alpha: I\to IR_1^5$ eğrisi

$$\alpha(t)=\frac{1}{\varepsilon}\left(2\tau\varepsilon t, \sqrt{3}\kappa\cosh\varepsilon t+\kappa\sinh\varepsilon t+\varepsilon\tau t, 2\kappa\varepsilon t, \sqrt{3}\tau\cosh\varepsilon t+\tau\sinh\varepsilon t-\kappa\varepsilon t, \sqrt{3}\varepsilon\sinh\varepsilon t+\varepsilon\cosh\varepsilon t\right)$$

olsun. $\left\langle \dot{\alpha},\dot{\alpha}\right\rangle=3\varepsilon^2>0$ olduğundan α spacelike bir eğridir. Bu α eğrisinin her noktasında tanımlı $\{e_1(t),e_2(t)\}$ ortonormal vektör alan sistemi

$$e_1(t)=\frac{1}{\varepsilon}\left(\kappa+\tau,\ \sqrt{3}\kappa\sinh\varepsilon t,\ \kappa-\tau,\ \sqrt{3}\tau\sinh\varepsilon t,\ \sqrt{3}\varepsilon\cosh\varepsilon t\right)$$
$$e_2(t)=\frac{1}{\sqrt{3}\varepsilon}\left(\tau-\kappa,\ \kappa\cosh\varepsilon t,\ \kappa+\tau,\ \tau\cosh\varepsilon t,\ \varepsilon\sinh\varepsilon t\right)$$

ile verilsin. Bu sistem $\alpha(t)\in IR_1^5$ noktasında tanjant uzayının $2-$boyutlu bir altuzayını gerer. Bu altuzay $E_2(t)$ ile gösterilsin. $\langle e_1,e_1\rangle=-1$, $\langle e_2,e_2\rangle=1$ olduğundan $E_2(t)$ timelike bir altuzaydır. IR_1^5 de

$$\varphi(t,u_1,u_2)=\alpha(t)+\sum_{v=1}^{2}u_v e_v(t)$$

dönüşümü spacelike dayanak eğrili, timelike doğrultman uzaylı $3-$boyutlu timelike regle yüzey tanımlar. Bu timelike doğrultman uzaylı $3-$boyutlu timelike regle yüzeyi M' ile gösterilirse, M' nün $E_2(t)$ doğrultman uzayının asli çatısı

$\{e_1(t), e_2(t)\}$ ve teğetsel demetinin bazı $\left\{e_1(t), e_2(t), \dot{e}_1(t), \dot{e}_2(t), \dot{\alpha}(t)\right\}$ olmak üzere Gramm-Schmidth yöntemi kullanılarak

$$a_3(t) = \frac{1}{\sqrt{6}\varepsilon}(\kappa - \tau, 2\kappa \cosh \varepsilon t, -\kappa - \tau, 2\tau \cosh \varepsilon t, 2\varepsilon \sinh \varepsilon t)$$

$$a_4(t) = -\frac{1}{\sqrt{2}\varepsilon}\left(\sqrt{3}(\kappa + \tau), 2\kappa \sinh \varepsilon t, \sqrt{3}(\kappa - \tau), 2\tau \sinh \varepsilon t, 2\varepsilon \cosh \varepsilon t\right)$$

$$a_5(t) = \frac{1}{\varepsilon}(0, \tau, 0, -\kappa, 0)$$

ortonormal baz vektörleri elde edilir. Böylece, M' nün teğetsel demetinin $\{e_1(t), e_2(t), a_3(t), a_4(t), a_5(t)\}$ ortonormal bazı bulunur. M' nün doğrultman uzayının asli çatısı $\{e_1(t), e_2(t)\}$ için türev denklemleri ve α dayanak eğrisinin hız vektörü, sırasıyla,

$$\dot{e}_1(t) = \varepsilon \mathrm{e}_2(t) + \sqrt{2}\varepsilon a_3(t),$$

$$\dot{e}_2(t) = \varepsilon e_1(t) + \sqrt{\frac{2}{3}}\varepsilon a_4(t),$$

$$\dot{\alpha} = -\varepsilon e_1 + \sqrt{3}\varepsilon e_2 + \varepsilon a_5$$

dır. Bu takdirde, timelike doğrultman uzaylı $3-$boyutlu timelike regle yüzeyin birinci temel formunun katsayıları

$$g_{00} = 2\sqrt{3}\varepsilon^2 u_1 - 2\varepsilon^2 u_2 + 3\varepsilon^2 u_1^2 - \frac{\varepsilon^2}{3}u_2^2 + 3\varepsilon^2$$
$$g_{10} = g_{01} = -\varepsilon - \varepsilon u_2$$
$$g_{20} = g_{02} = \sqrt{3}\varepsilon + \varepsilon u_1$$
$$g_{12} = g_{21} = 0$$
$$g_{11} = -1$$
$$g_{22} = 1$$

elde edilir ve birinci temel formun regüler matrisi

$$\left[g_{ij}\right]_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 2\sqrt{3}\varepsilon^2 u_1 - 2\varepsilon^2 u_2 + 3\varepsilon^2 u_1^2 - \dfrac{\varepsilon^2}{3}u_2^2 + 3\varepsilon^2 & -\varepsilon - \varepsilon u_2 & \sqrt{3}\varepsilon + \varepsilon u_1 \\ -\varepsilon - \varepsilon u_2 & -1 & 0 \\ \sqrt{3}\varepsilon + \varepsilon u_1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir. Buradan M' nün birinci temel formunun matrisinin determinantı

$$g = \det\left[g_{ij}\right] = -2\varepsilon^2 u_1^2 - \frac{2}{3}\varepsilon^2 u_2^2 - \varepsilon^2$$

olur. M', $3-$boyutlu timelike regle yüzeyinin $E_2(t)$ doğrultman uzayına ortogonal olan normal teğet vektörü $\forall \xi \in M'$ noktasında

$$n = \sqrt{2}\varepsilon u_1 a_3 + \sqrt{\frac{2}{3}}\varepsilon u_2 a_4 + \varepsilon a_5$$

şeklinde tanımlanır, öyle ki

$$\langle n, n \rangle = 2\varepsilon^2 u_1^2 + \frac{2}{3}\varepsilon^2 u_2^2 + \varepsilon^2$$

olduğundan n normal vektörünün spacelike bir vektör olduğu açıktır. Böylece, $E_2(t)$ nin asli çatısına göre 1. asli teğet kesiti (e_1, n), timelike bir düzlem ve 2. asli teğet kesiti (e_2, n), spacelike bir düzlemdir. Teorem 4.2.2. den 1. ve 2. asli kesit eğrilikleri, sırasıyla,

$$K_\xi(e_1, n) = \frac{1}{2g}\frac{\partial^2 g}{\partial u_1^2} - \frac{1}{4g^2}\left(\frac{\partial g}{\partial u_1}\right)^2$$

ve

$$K_{\xi}\left(e_2,n\right)=-\frac{1}{2g}\frac{\partial^2 g}{\partial u_2^{\,2}}+\frac{1}{4g^2}\left(\frac{\partial g}{\partial u_2}\right)^2$$

dır. Burada

$$\frac{\partial g}{\partial u_1}=-4\varepsilon^2 u_1 \quad , \quad \frac{\partial^2 g}{\partial u_1^2}=-4\varepsilon^2 \quad , \quad \left(\frac{\partial g}{\partial u_1}\right)^2=16\varepsilon^4 u_1^2$$

ve

$$\frac{\partial g}{\partial u_2}=-\frac{4}{3}\varepsilon^2 u_2 \quad , \quad \frac{\partial^2 g}{\partial u_2^2}=-\frac{4}{3}\varepsilon^2 \quad , \quad \left(\frac{\partial g}{\partial u_2}\right)^2=\frac{16}{9}\varepsilon^4 u_2^2$$

olduğundan timelike 1. asli teğet kesiti $\left(e_1,n\right)$ ve spacelike 2. asli teğet kesiti $\left(e_2,n\right)$ nin kesit eğrilikleri, sırasıyla,

$$K_{\xi}\left(e_1,n\right)=\frac{12u_2^2+18}{\left(6u_1^2+2u_2^2+3\right)^2}$$

ve

$$K_{\xi}\left(e_2,n\right)=-\frac{12u_1^2+6}{\left(6u_1^2+2u_2^2+3\right)^2}$$

bulunur. $\forall\zeta\in\Omega$ merkez noktasında $u_1=u_2=0$ göz önüne alınırsa $K_{\zeta}\left(e_1,n\right)$ ve $K_{\zeta}\left(e_2,n\right)$ asli kesit eğrilikleri, sırasıyla,

$$K_{\zeta}\left(e_1,n\right)=2 \text{ ve } K_{\zeta}\left(e_2,n\right)=-\frac{2}{3}$$

dır. Aynı zamanda M' nün $\forall\zeta\in\Omega$ merkez noktasında 1. ve 2. asli dağılma parametresi, sırasıyla,

$$P_1 = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}\varepsilon} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ve } P_2 = \frac{\varepsilon}{\sqrt{\frac{2}{3}}\varepsilon} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

olduğundan Teorem 4.2.6. dan da aynı sonuç

$$K_\zeta(e_1, n) = \frac{1}{P_1^2} = 2 \text{ ve } K_\zeta(e_2, n) = -\frac{1}{P_2^2} = -\frac{2}{3}$$

olarak elde edilir.

Şimdi IR_1^5 de $2-$boyutlu asli ışın yüzeylerini göz önüne alalım.

$$\varphi_1(t,u) = \alpha(t) + ue_1(t)$$

parametrizasyonu ile verilen timelike doğrultmanlı timelike asli ışın yüzeyi M_1 olsun. Teorem 4.2.8. de verilen timelike doğrultmanlı timelike asli ışın yüzeyi için genelleştirilmiş Lorentzian Lamarle formülünden M_1 in $\zeta + ue_\sigma$ noktasında (e_1, n) timelike kesitinin eğriliği

$$K_{\zeta+ue_1}(e_1, n) = \frac{2}{(2u^2+1)^2}$$

bulunur.

$$\varphi_2(t,u) = \alpha(t) + ve_2(t)$$

parametrizasyonu ile verilen spacelike doğrultmanlı spacelike asli ışın yüzeyi M_2 olsun. Teorem 4.2.7. de verilen spacelike asli ışın yüzeyi için genelleştirilmiş Lorentzian Lamarle formülünden M_2 in $\zeta + ue_\sigma$ noktasında (e_2, n) spacelike kesitinin eğriliği

$$K_{\zeta+ue_2}\left(e_2,n\right)=-\frac{6}{\left(2v^2+3\right)^2}$$

elde edilir.

$E_2(t)$ timelike bir altuzay olduğundan $E_2(t)$ içinde bir birim vektör spacelike veya timelike olabilir. Bu iki durumu ayrı ayrı ele alalım.

İlk olarak, $E_2(t)$ içinde e spacelike birim vektörünü göz önüne alalım. e spacelike birim vektörü ile e_1 ve e_2 baz vektörleri arasındaki açılar, sırasıyla, θ_1 ve θ_2 hiperbolik açıları olmak üzere, e spacelike birim vektörü

$$e=\sinh\theta_1 e_1+\cosh\theta_2 e_2 \quad , \quad -\sinh^2\theta_1+\cosh^2\theta_2=1$$

olarak yazılır. Bu takdirde, Teorem 4.2.9 da verilen I. tip Lorentzian Beltrami-Euler formülünden M' nün merkez noktasında (e,n) spacelike kesitinin eğriliği

$$K_\zeta\left(e,n\right)=-2\sinh^2\theta_1-\frac{2}{3}\cosh^2\theta_2$$

bulunur.

İkinci olarak, e^* birim vektörü, $E_2(t)$ içinde timelike bir vektör olsun. e^* birim vektörü ile e_1 ve e_2 baz vektörleri arasındaki açılar, sırasıyla, θ_1^* ve θ_2^* hiperbolik açıları olmak üzere, e^* timelike birim vektörü

$$e^*=\cosh\theta_1^* e_1+\sinh\theta_2^* e_2 \quad , \quad -\cosh^2\theta_1^*+\sinh^2\theta_2^*=-1$$

olarak yazılır. Böylece, Teorem 4.2.10. da verilen II. tip Lorentzian Beltrami-Euler formülünden M' nün merkez noktasında $\left(e^*,n\right)$ timelike kesitinin eğriliği

$$K_{\zeta}\left(e^{*},n\right)=2\cosh^{2}\theta_{1}^{*}+\frac{2}{3}\sinh^{2}\theta_{2}^{*}$$

elde edilir.

Şimdi IR_1^5 de timelike doğrultman uzaylı genelleştirilmiş timelike regle yüzey M' nün $\forall\zeta\in\Omega$ merkez noktasında herhangi bir birim vektörü göz önüne alalım. Bu birim vektör spacelike veya timelike olabileceğinden bu iki durumu ayrı ayrı inceleyelim.

İlk olarak $\forall\zeta\in\Omega$ merkez noktasında herhangi bir a spacelike birim vektörünü göz önüne alalım. ψ_0, ψ_1 ve ψ_2 hiperbolik açıları, sırasıyla, a birim vektörü ile n, e_1 ve e_2 vektörleri arasındaki açılar olmak üzere, a spacelike birim vektörü

$$a=\cosh\psi_0\frac{n}{\|n\|}+\sinh\psi_1 e_1+\cosh\psi_2 e_2$$

olarak yazılır. Bu durumda, Sonuç 4.2.29 ve Sonuç 4.2.31 de verilen I. ve III. tip Lorentzian Beltrami-Meusnier formüllerinden M' nün merkez noktasında (e,a) nondejenere kesitinin eğriliği ve $\left(e^{*},a\right)$ timelike kesitinin eğriliği, sırasıyla,

$$K_{\zeta}\left(e,a\right)=\frac{\cosh^{2}\psi_0\left(2\sinh^{2}\theta_1+\frac{2}{3}\cosh^{2}\theta_2\right)}{1-\left(-\sinh\psi_1\sinh\theta_1+\cosh\psi_2\cosh\theta_2\right)^{2}}$$

ve

$$K_{\zeta}\left(e^{*},a\right)=\frac{\cosh^{2}\psi_0\left(2\sinh^{2}\theta_1^{*}+\frac{2}{3}\cosh^{2}\theta_2^{*}\right)}{1+\left(-\sinh\psi_1\cosh\theta_1^{*}+\cosh\psi_2\sinh\theta_2^{*}\right)^{2}}$$

bulunur.

Son olarak, $\forall \zeta \in \Omega$ merkez noktasında herhangi bir timelike a^* birim vektörünü göz önüne alalım. ψ_0^*, ψ_1^* ve ψ_2^* hiperbolik açıları, sırasıyla, a^* birim vektörü ile n, e_1 ve e_2 vektörleri arasındaki açılar olmak üzere, a^* timelike birim vektörü

$$a^* = \sinh \psi_0^* \frac{n}{\|n\|} + \cosh \psi_1^* e_1 + \sinh \psi_2^* e_2$$

olarak yazılır. Böylece, Sonuç 4.2.30.da verilen II. tip Lorentzian Beltrami-Meusnier formülünden M' nün merkez noktasında $\left(e, a^*\right)$ timelike kesitinin eğriliği

$$K_\zeta\left(e, a^*\right) = \frac{\sinh^2 \psi_0^* \left(2\sinh^2 \theta_1 + \frac{2}{3}\cosh^2 \theta_2\right)}{1 + \left(-\cosh \psi_1^* \sinh \theta_1 + \sinh \psi_2^* \cosh \theta_2\right)^2}$$

elde edilir.

BÖLÜM 5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmadaki orijinal bölüm iki alt bölümden oluşmaktadır. İlk alt bölümünde IR_1^n, $n-$boyutlu Minkowski uzayında spacelike doğrultman uzaylı genelleştirilmiş timelike regle yüzeyin birinci temel formu ve metrik katsayıları hesaplanmış ve bunlara bağlı olarak Christoffel sembolleri ve Riemann-Christoffel eğrilikleri elde edilmiştir. Böylece spacelike doğrultman uzaylı timelike regle yüzeyin kesit eğrilikleri hesap edilmiştir. İlk olarak bu timelike regle yüzeyin her bir noktasında nondejenere asli teğet kesitlerinin kesit eğrilikleri birinci temel formun matrisinin determinantı cinsinden elde edilmiştir. Buna ek olarak her bir merkez noktada da nondejenere asli teğet kesitlerinin kesit eğrilikleri incelenmiş ve böylece, spacelike doğrultman uzaylı genelleştirilmiş timelike regle yüzeyin asli kesit eğriliği ile asli dağılma parametresi arasında bağıntı elde edilmiştir. Daha sonra spacelike doğrultmanlı timelike asli ışın yüzeyi göz önüne alınarak bu yüzeyin kesit eğriliği ile asli dağılma parametresi arasındaki bağıntı elde edilmiş ve bu bağıntının IR_1^3, $3-$boyutlu Minkowski uzayında spacelike doğrultmanlı $2-$boyutlu timelike regle yüzey için verilen Lorentzian Lamarle formülünün genelleştirilmişi olduğu görülmüştür. Ayrıca, spacelike doğrultman uzaylı genelleştirilmiş timelike regle yüzeyin merkez noktasında normal kesit eğriliği ile asli kesit eğrilikleri arasındaki bağıntı elde edilmiş ve bu bağıntı spacelike doğrultman uzaylı genelleştirilmiş timelike regle yüzeyin teğet kesiti için Lorentzian Beltrami-Euler formülü olarak adlandırılmıştır. Bu alt bölümde son olarak, spacelike doğrultman uzaylı genelleştirilmiş timelike regle yüzeyin herhangi nondejenere teğet kesitlerinin eğriliği araştırılmış ve bu timelike regle yüzeyin kesit eğriliği için üç farklı tip bağıntı elde edilerek I., II. ve III. tip Beltrami-Meusnier formülü olarak adlandırılmıştır.

Orijinal bölümün ikinci alt bölümünde ise IR_1^n, $n-$boyutlu Minkowski uzayında timelike doğrultman uzaylı genelleştirilmiş timelike regle yüzeyin birinci temel formu ve metrik katsayıları hesaplanarak Christoffel sembolleri ve Riemann-Christoffel eğrilikleri bulunmuş. Timelike doğrultman uzaylı timelike regle yüzeyin her bir noktasında ayrı ayrı spacelike ve timelike asli teğet kesitlerinin kesit eğrilikleri birinci temel formun matrisinin determinantı cinsinden elde edilmiştir. Her bir merkez noktada da spacelike ve timelike asli teğet kesitlerinin kesit eğrilikleri incelenmiştir. Böylece, timelike doğrultman uzaylı genelleştirilmiş timelike regle yüzeyin asli kesit eğriliği ile asli dağılma parametresi arasında bağıntı elde edilmiştir. Daha sonra spacelike asli ışın yüzeyinin kesit eğriliği ile asli dağılma parametresi arasındaki bağıntı elde edilmiş ve bu bağıntının IR_1^3, $3-$boyutlu Minkowski uzayında $2-$boyutlu spacelike regle yüzey için verilen Lorentzian Lamarle formülünün genelleştirilmişi olduğu belirlenmiştir. Ayrıca timelike doğrultmanlı timelike asli ışın yüzeyi göz önüne alınarak bu yüzeyin kesit eğriliği ile asli dağılma parametresi arasındaki bağıntının da IR_1^3, $3-$boyutlu Minkowski uzayında timelike doğrultmanlı $2-$boyutlu timelike regle yüzey için verilen Lorentzian Lamarle formülünün genelleştirilmişi olduğu görülmüştür. Timelike doğrultman uzaylı genelleştirilmiş timelike regle yüzeyin merkez noktasında normal kesit eğriliği ile asli kesit eğrilikleri arasında dört farklı tip bağıntı elde edilmiş ve bu bağıntılar timelike doğrultman uzaylı genelleştirilmiş timelike regle yüzeyin teğet kesitleri için I., II., III. ve IV. tip Lorentzian Beltrami-Euler formülü olarak adlandırılmıştır. Son olarak, timelike doğrultman uzaylı genelleştirilmiş timelike regle yüzeyin herhangi teğet kesitlerinin eğriliği araştırılmış ve bu timelike regle yüzeyin kesit eğriliği için üç farklı tip bağıntı elde edilerek I., II. ve III. tip Beltrami-Meusnier formülü olarak adlandırılmıştır.

Bu çalışmada IR_1^n, $n-$boyutlu Minkowski uzayında genelleştirilmiş timelike regle yüzeylerin kesit eğrilikleri için elde edilen teorem ve sonuçlar IR_1^n, $n-$boyutlu Minkowski uzayında genelleştirilmiş spacelike regle yüzeylerin kesit eğrilikleri için de araştırılabilir.

KAYNAKLAR

[1] AYDEMİR, I., "*Minkowski Uzayında Time-like Doğrultman Uzaylı Genelleştirilmiş Regle Yüzeyler*", Ondokuz Mayıs Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktora Tezi ,1995.

[2] AYDEMİR, I., KURUOĞLU, N., "*Edge, Center and Principal Ruled Surfaces of* (*k*+1)*-dimensional Generalized Time-like Ruled Surface in the Minkowski Space* IR_1^n", Pure Appl. Math. Sci., 51 (2000), no.1-2, 19-24.

[3] AYDEMİR, I., KURUOĞLU, N., "*Time-like Ruled Surfaces in the Minkowski Space* IR_1^n", Int. J. Appl. Math. 10 (2002), no.2, 149-158.

[4] BEEM, J. K., EHRLICH, P. E., "*Global Lorentzian Geometry*", Marcel Dekker Inc. New York, 1981.

[5] BLASCHKE, W., "*Vorlesungen über Differentialgeometrie*", 14. Ayfl. Berlin, 1945.

[6] ERSOY, S., TOSUN, M., "*On the Lorentzian Lamarle Formulas in* IR_1^3", Submitted, 2007.

[7] ERGÜT, M., "*Genelleştirilmiş Regle Yüzeylere Dair*", Fırat Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, Doktora Tezi, 1983.

[8] FERAH, G., "*Genelleştirilmiş Regle Yüzeylerin Kesit Eğriliği Üzerine*", Osmangazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, 2001.

[9] FRANK, H., GIERING, O., "*Verallgemeinerte Regelflachen*", Math. Z., 150 (1976), 261-271.

[10] FRANK, H. GIERING, O., "*Regelflachen mit Zentralchen*", Math. Öster. Akad. Wiss., Wien Math-Naturwiss. Kl. Abst.II, 187 (1978), 139-163.

[11] FRANK, H., GIERING, O., "*Zur Schnittkrümmung Verallgemeinerter Regelflachen*", Archiv Der Mathematik, Fasc.1, 32 (1979), 86-90.

[12] FRANK, H. GIERING, O., "*Verallgemeinerte Regelflachen im Grassen II*", Journal of Geometry, Vol. 1, 23 (1984), 128-140.

[13] HACISALİHOĞLU, H. H., "*Diferensiyel Geometri*", Inonu Üniversitesi, Fen-Edeb. Fakültesi, 1983.

[14] İYİGÜN, E., "*Lorentz Geometrisi Relativite ve L^3 de Meusnier Teoremi*", Uludağ Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, 1991.

[15] İYİGÜN, E., "*L^n Uzayında Meusnier Teoremi*", Uludağ Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktora Lisans Tezi, 1998.

[16] JUZA, M., "*Ligne de striction sur une généralisation* à *plusieurs dimensions d'une surface réglée",* Czechoslovak Math. J., 12 (87), 1962, 243-250.

[17] KRUPPA, E. "*Analytische und Konstruktive Differential Geometrie*", Wien Springer-Verlag, 1957.

[18] O'NEILL, B., "*Semi-Riemannian Geometry*", Academic Press, New York 1983.

[19] ÖRNEK, N., "*Lorentz Uzayında Hiperyüzeyler için Euler Teoremi*", Gazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, 1991.

[20] RATCLIFFE, J. G., "*Foundations of Hyperbolic Manifolds*", Department of Mathematics, Vanderbilt University, 1994.

[21] SABUNCUOĞLU, A., "*Genelleştirilmiş Regle Yüzeyler*", Ankara Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, Doçentlik Tezi, 1982.

[22] THAS, C., "*Properties of Ruled Surfaces in the Euclidean space E^n*", Bull. Inst. Math. Acad. Sinica, 6 (1978), no. 1, 133-142.

[23] TOSUN, M., "*Minkowski Uzayında Space-like Doğrultman Uzaylı Genelleştirilmiş Regle Yüzeyler*", Ondokuz Mayıs Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktora Tezi ,1995.

[24] TOSUN, M., KURUOĞLU, N., "*On $(k+1)-$dimensional Time-like Ruled Surface in the Minkowski space R_1^n*", J. Inst. Math. Comput. Sci. Math. Ser., 11 (1998), no. 1, 1--9.

[25] TOSUN, M., KURUOĞLU, N., "*On Properties of Generalized Time-like Ruled Surfaces in the Minkowski Space R_1^n*" Antarct. J. Math., 2 (2005), no. 2, 173-180.

ÖZGEÇMİŞ

Soley ERSOY, 25.02.1978 tarihinde Hatay'ın İskenderun ilçesinde doğdu. İlköğrenimini Aydın'ın Didim ilçesinde Yenihisar İlkokulunda, ortaöğrenimini Aydın Adnan Menderes Anadolu Lisesinde tamamladı. 1996 yılında Dokuz Eylül Üniversitesi Buca Eğitim Fakültesi Matematik Öğretmenliği bölümünde başladığı lisans eğitimini 2000 yılında tamamladı. 2000–2001 öğretim yılında Aydın'ın Köşk ilçesinde Adnan Menderes İlköğretim Okulunda, 2001–2002 yılları arasında Sakarya Atatürk Lisesinde Matematik Öğretmeni olarak görev yaptı. Şubat 2002'de Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünde Matematik Anabilim Dalında başladığı yüksek lisans öğrenimini sürdürürken Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünde Araştırma Görevlisi olarak göreve başladı. Yüksek lisans eğitimini 2004 yılında tamamladı ve aynı yıl yine Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünde Matematik Anabilim Dalında doktora öğrenimine başladı. Halen, Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünden görevlendirme ile Sakarya Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde Araştırma Görevlisi olarak görevini sürdürmektedir. Soley ERSOY evli ve bir kız çocuğu annesidir.