T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

LORENTZ UZAYINDA BİR PARAMETRELİ DUAL HAREKETLER

DOKTORA TEZİ

Mehmet Ali GÜNGÖR

Enstitü Anabilim Dalı	**:**	**MATEMATİK**
Tez Danışmanı	**:**	**Doç. Dr. Murat TOSUN**

Haziran 2006

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

LORENTZ UZAYINDA BİR PARAMETRELİ DUAL HAREKETLER

DOKTORA TEZİ

Mehmet Ali GÜNGÖR

Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK

Bu tez 16 / 06 /2006 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Oybirliği ile kabul edilmiştir.

Prof. Dr. H. Hilmi HACISALİHOĞLU
Jüri Başkanı

Prof. Dr. Nuri KURUOĞLU
Üye

Doç.Dr. Murat TOSUN
Üye

Doç.Dr. İbrahim OKUR
Üye

Yrd.Doç.Dr.İbrahim ÖZGÜR
Üye

TEŞEKKÜR

Doktora danışmanlığımı üstlenip, bilgi ve tecrübesiyle destek veren, çalışmamın her safhasında yardımını esirgemeyen saygıdeğer hocam Doç. Dr. Murat TOSUN'a saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Çalışmalarım esnasında bana vakit ayıran, özenle çalışmalarımı takip eden ve her konuda yardımlarını esirgemeyen, sayın Prof. Dr. H. Hilmi HACISALİHOĞLU'na teşekkürü bir borç bilirim. Ayrıca Matematik Bölümümüzdeki değerli hocalarıma ve yakın desteklerini gördüğüm mesai arkadaşlarıma teşekkürlerimi sunarım.

Güven, anlayış ve desteklerini daima hissettiğim eşim Kamile GÜNGÖR'e, babam Süleyman GÜNGÖR'e, annem Ayfer GÜNGÖR'e ve kardeşlerim Meltem ve Fatma GÜNGÖR'e sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Mehmet Ali GÜNGÖR

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

$\mathbb{E}^3$	: 3-boyutlu Öklid Uzayı
$\mathbb{D}^3$	: 3-boyutlu Dual Uzay
$\mathbb{L}^3$	: 3-boyutlu Lorentz Uzayı
$\mathbb{D}_1^3$	: 3-boyutlu Dual Lorentz Uzayı
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar
A^{-1}	: A matrisinin tersi
A^T	: A matrisinin transpozesi
$\dot{A}$	: A matrisinin t reel parametresine göre türevi
$\det A$	: A matrisinin determinantı
$\mathcal{E}$	: Dual birim
ε	: İşaret matrisi
S_1^2	: Lorentz birim küresi
H_0^2	: Hiperbolik birim küre
$\widetilde{S_1^2}$	: Dual Lorentz birim küre
$\widetilde{H_0^2}$	: Dual Hiperbolik birim küre
D_1	: Öklid uzayında bir parametreli dönme hareketi
$\mathcal{D}_1$	: Lorentz uzayında bir parametreli dönme hareketi
$\wedge$	: Vektörel çarpım
$\langle\ ,\ \rangle$	: İç çarpım
$\Vert\ \Vert$	: Norm
$O_1(3)$	: Lorentz anlamda ortogonal matrislerin cümlesi
$SO_1(3)$	: Lorentz anlamda pozitif ortogonal matrislerin cümlesi

ŞEKİLLER LİSTESİ

ÖZET

Anahtar Kelimeler: Lorentz uzayı, Lorentz uzayında hareketler, Dual Lorentz uzayı, Dual Lorentz uzayında hareketler, E. Study dönüşümü.

Bu tez altı bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmıştır. İkinci bölümde bu çalışma için gerekli kavramlar, tanımlar ve gerekli teoremler verilmiştir.

Üçüncü bölümde $\mathbb{E}^3$, 3-boyutlu Öklid uzayında aynı merkezli ve birbirine göre hareket eden küre yüzeylerinin bir parametreli hareketi, kanonik izafi sistemi ve pol noktalarına değinilmiştir.

Dördüncü bölümde $\mathbb{D}^3$, 3-boyutlu dual uzayda aynı merkezli ve birbirine göre hareket eden dual küre yüzeylerinin bir parametreli hareketi, kanonik izafi sistemi ve pol noktaları işlenmiştir.

Beşinci ve altıncı bölümler çalışmanın orijinal kısımlarıdır.

Beşinci bölümde $\mathbb{L}^3$, 3-boyutlu Lorentz uzayında aynı merkezli ve birbirine göre hareket eden küre yüzeylerinin bir parametreli hareketi, kanonik izafi sistemi ve pol noktaları elde edilmiştir. $\mathbb{L}^3$, 3-boyutlu Lorentz uzayında bir çok kürenin birbirine göre bir parametreli küresel hareketinin ivmeleri, ivme merkezleri, ivme eksenleri ve bunlarla ilgili teoremler elde edilmiştir.

Altıncı bölümde, $\mathbb{D}_1^3$, 3-boyutlu dual Lorentz uzayında aynı merkezli ve birbirine göre hareket eden dual küre yüzeylerinin bir parametreli hareketi, kanonik izafi sistemi ve pol noktaları elde edilmiştir. $\mathbb{D}_1^3$, 3-boyutlu dual Lorentz uzayında bir çok kürenin birbirine göre bir parametreli küresel hareketinin ivmeleri, ivme merkezleri, ivme eksenleri ve bunlarla ilgili teoremler elde edilmiştir.

ON THE ONE PARAMETER DUAL MOTIONS IN THE LORENTZ SPACE

SUMMARY

Key words**:** Lorentz space, Motions in the Lorentz space, Dual Lorentz space, Motions in the dual Lorentz space, E. Study mapping.

This thesis consists of six chapters. First chapter is devoted to the introduction. Second chapter deals with the concepts, definitions and necessary theorems.

Third chapter focuses on the one parameter motion of the surfaces of the spheres with the same center and that move accordingly, in the 3-dimensional Euclid space, $\mathbb{E}^3$. Besides, canonical relative system and the pole points are described.

Fourth chapter focuses on the one parameter motion of the dual surfaces of the spheres with the same center and that move accordingly, in the 3-dimensional dual space, $\mathbb{D}^3$. Besides, canonical relative system and the pole points are described.

Fifth and sixth chapters are the original part of the study.

In chapter five we have obtained the one parameter motion of the spherical surfaces with the same center and that move according to each other, in the 3-dimensional Lorentz space, $\mathbb{L}^3$ as well as canonical relative system and the pole points. Furthermore, the accelerations, acceleration centers, acceleration axes of one parameter spherical motions of many spheres, which are moving relative to each other in the 3-dimensional Lorentz space, $\mathbb{L}^3$ and some theorems related to these are obtained.

In chapter six we have obtained the one parameter motion of the dual spherical surfaces with the same center and that move relative to each other, in the 3-dimensional dual Lorentz space, $\mathbb{D}_1^3$ as well as canonical relative system. Furthermore, the accelerations, acceleration centers, acceleration axes of one parameter spherical motions of many spheres, which are moving relative to each other in the 3-dimensional dual Lorentz space, $\mathbb{D}_1^3$ and some theorems related to these are obtained.

BÖLÜM 1. GİRİŞ

Kinematik, kuvvet ve kütle kavramlarını içermeyen mekaniğin bir dalıdır, yani kinematik, sadece bir nokta veya nokta sistemi (cisim) nin zamana bağlı olarak yer değiştirmesini inceler[10]. $\mathbb{E}^2$, 2-boyutlu Öklid uzayında (Öklid düzlemi) bir parametreli düzlemsel hareketler, bu hareketlerin türev denklemleri, hızları ve hızların lineer bileşimi, ivmeler ve ivmelerin lineer bileşimi ile birlikte pol noktaları H. R. Müller tarafından incelenmiştir[10].

Ayrıca, H. R. Müller, $\mathbb{E}^3$, 3-boyutlu Öklid uzayında küresel hareketleri tanıtmış, bu hareketlerin türev denklemleri, hızları, ivmeleri ve pol noktalarını vermiştir[10].

G. S. Birman, K. Nomizu [3,4] de I. M. Yaglom [17] de $\mathbb{L}^2$, 2-boyutlu Lorentz uzayında diklik kavramını örneklerle incelemiş, hiperbolik radyan kavramını ve dönme matrisini vermişlerdir.

Lorentz düzleminde bir parametreli hareketler ve bu hareketlerin hızları, ivmeleri ve pol noktaları A. A. Ergin tarafından çalışılmıştır[7].

Dual sayılar ilk defa W. K. Clifford (1845-1879) tarafından geometrik araştırmalarında bir araç olarak kullanılmıştır. Daha sonra E. Study çizgi geometrisi ve kinematik araştırmalarında dual sayılar ve dual vektörleri kullanmıştır[6].

Veldkamp (1976) dual birim vektörler ve dual vektör çiftleri yardımıyla dual birim küreyi ifade etmiş ve dual küresel hareketleri vermiştir. Ayrıca dual hareket ve reel uzay hareketi arasındaki bağıntıyı göstermiştir[16].

$\mathbb{D}^3$, 3-boyutlu dual uzayda, dual küresel hareketler, bu hareketlerin hızları, ivmeleri ve ivme polleri H. Hilmi Hacısalihoğlu tarafından verilmiştir[9].

E. Study, $\mathbb{E}^3$, 3-boyutlu Öklid uzayının yönlü doğrularının $\mathbb{D}^3$ dual uzayının S^2 dual birim küresinin noktalarına birebir karşılık geldiğini göstermiştir[13].

$\mathbb{E}^3$, 3-boyutlu Öklid uzayı yerine $\mathbb{L}^3$ Lorentz uzayını göz önüne alarak, bu uzaydaki yönlü space-like (time-like) doğruların, $\mathbb{D}_1^3$ dual Lorentz uzayının $\tilde{S}_1^2$ $\left(\tilde{H}_0^2\right)$ dual Lorentz (Hiperbolik) birim küresinin noktaları ile birebir eşlenebileceği H. Hüseyin Uğurlu tarafından gösterilmiştir[18].

Bu tezde ilk olarak H. R. Müller'in [10] da verdiği $\mathbb{E}^3$, 3-boyutlu Öklid uzayında küresel hareketler esas alınmış ve bu özelikler geniş olarak incelenmiştir. $\mathbb{E}^3$, 3-boyutlu Öklid uzayında yapılan bu çalışmalar $\mathbb{L}^3$ 3-boyutlu Lorentz uzayına aktarılarak küresel hareketler ve bu hareketlerin türev denklemleri, hızları, hızların terkibi ve pol noktaları elde edilmiştir. Sonraki bölümde $\mathbb{L}^3$ 3-boyutlu Lorentz uzayına bir çok kürenin birbirine göre bir parametreli küresel hareketleri incelenmiş ve bu hareketlerin ivmeleri, ivme merkezleri ve ivme eksenleri ile ilgili teoremler elde edilmiştir.

Altıncı bölümde H. Hilmi Hacısalihoğlu'nun [9] da verdiği $\mathbb{D}^3$, 3-boyutlu dual uzayda, dual küresel hareketler ve özelikleri geniş biçimde ele alınarak bu hareketler $\mathbb{D}_1^3$, 3-boyutlu dual Lorentz uzayına aktarılarak dual küresel hareketler ve bu hareketlerin türev denklemleri, hızları ve hızların terkibi ve pol noktaları bulunmuştur. Son olarak da $\mathbb{D}^3$, 3-boyutlu dual Lorentz uzayına bir çok kürenin birbirine göre bir parametreli küresel hareketleri incelenmiş ve bu hareketlerin ivmeleri, ivme merkezleri ve ivme eksenleri ile ilgili teoremler elde edilmiştir.

BÖLÜM 2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, sırasıyla, Öklid uzayı, Dual Öklid uzayı, Lorentz uzayı ve Dual Lorentz uzayındaki temel kavramlar ve teoremlere yer verilecektir.

2. 1. Öklid Uzayında Temel Kavramlar

Tanım 2.1.1. $A \neq \emptyset$ bir cümle ve V de F cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. Eğer

$$\Psi : A \times A \to V$$

dönüşümü P , $Q \in A$ noktaları için

$$(P,Q) \to \left(\overrightarrow{PQ}\right) \in V$$

şeklinde tanımlanmış ve aşağıdaki iki aksiyomu sağlıyor ise, A kümesine V ile birleştirilmiş bir afin uzay adı verilir.

i) Her $P,Q,R \in A$ için $\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR}$ dir,

ii) Her $P \in A$ ve her $\alpha \in V$ için $\overrightarrow{PQ} = \alpha$ olacak biçimde bir tek $Q \in A$ noktası vardır.

Tanım 2.1.2. Bir V vektör uzayı ile birleşen afin uzaylardan biri A olsun. $P_0, P_1, P_2, P_3 \in A$ noktaları için $\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}, \overrightarrow{P_0P_3} \in V$ vektörlerinin sistemi V nin bir bazı ise $\{P_0, P_1, P_2, P_3\}$ nokta dörtlüsüne A afin uzayının bir afin çatısı denir. Burada

P_0 noktasına çatının başlangıç noktası ve P_i noktalarına da çatının birim noktaları denir.

Teorem 2.1.3. Bir vektör uzayı ile birleşen afin uzaylardan biri A olsun. Belli bir $P_0 \in A$ noktası seçildiğinde başlangıcı P_0 olan bir afin çatı vardır[8].

Tanım 2.1.4. A afin uzayında bir P noktasının V vektör uzayındaki standart afin çatısına göre ifadesi

$$\overrightarrow{P_0P} = \sum_{i=1}^{3} a_i \, \overrightarrow{P_0P_i}$$

dir, burada

$$a_i : A \to F \quad , \quad 1 \le i \le 3$$

fonksiyonlarına P noktasının afin koordinat fonksiyonları ve $\{a_1, a_2, a_3\}$ sıralı üçlüsüne de F^3 nin afin koordinat sistemi denir.

Teorem 2.1.5. A bir afin uzay ve $\{P_i\}$ ile $\{Q_i\}$ de A da iki afin çatı olsun. Bu iki çatı

$$\overrightarrow{Q_0P_0} = \sum_{i=1}^{3} a_i \, \overrightarrow{Q_0Q_i} \;\; \text{ve} \;\; \overrightarrow{P_0P_i} = \sum_{j=1}^{3} a_{ij} \, \overrightarrow{Q_0Q_i} \;\; , \;\; 1 \le i \le 3$$

biçiminde bağıntılı ise bu çatıların belirlediği afin koordinat sistemleri olan $\{x_i\}$ ve $\{y_i\}$ de $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ ve $Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$ olmak üzere

$$\begin{bmatrix} Y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ 1 \end{bmatrix} \text{ ve } \begin{bmatrix} X \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^{-1} & -A^{-1}C \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y \\ 1 \end{bmatrix}$$

biçiminde bağıntılıdır[5,11].

Tanım 2.1.6. Bir reel afin uzay A ve A ile birleşen vektör uzayı da V olsun. V de

$$\begin{aligned} \langle\ ,\ \rangle : V \times V &\to \mathbb{R} \\ (X,Y) &\to \langle X,Y \rangle = \sum_{i=1}^{3} x_i\, y_i \end{aligned}$$

şeklinde bir Öklid iç çarpımı tanımlanırsa, A afin uzayına 3-boyutlu Öklid uzayı denir ve $\mathbb{E}^3$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.7. 3-boyutlu bir reel iç çarpım uzayı V ile birleşen bir Öklid uzayı $\mathbb{E}^3$ olsun. V vektör uzayı üzerindeki norm $\|\ ,\ \|$ olmak üzere

$$d : \mathbb{E}^3 \times \mathbb{E}^3 \to \mathbb{R} \quad , \quad d(X,Y) = \left\| \overrightarrow{XY} \right\|$$

olarak tanımlanan fonksiyona $\mathbb{E}^3$ de uzaklık fonksiyonu ve her $X, Y \in \mathbb{E}^3$ için $d(X,Y)$ değerine de X ile Y arasındaki uzaklık adı verilir.

Teorem 2.1.8. $\mathbb{E}^3$, 3-boyutlu Öklid uzayında uzaklık fonksiyonu bir metriktir[8].

Tanım 2.1.9. $\mathbb{E}^3$, 3-boyutlu Öklid uzayında tanımlanan uzaklık fonksiyonuna $\mathbb{E}^3$ de Öklid metriği denir.

Tanım 2.1.10. $\mathbb{E}^3$, 3-boyutlu Öklid uzayında farklı üç nokta X, Y, Z olsun. $\overrightarrow{XY}$ ile $\overrightarrow{XZ}$ vektörleri arasındaki $\theta \in \mathbb{R}$ açısı, $0 \le \theta \le \pi$ olmak üzere,

$$\cos\theta = \frac{\left\langle \overrightarrow{XY}, \overrightarrow{XZ} \right\rangle}{\left\| \overrightarrow{XY} \right\| \left\| \overrightarrow{XZ} \right\|}$$

dır.

Tanım 2.1.11. 3-boyutlu reel iç çarpım uzayı $\mathbb{R}^3$ ile birleşen $\mathbb{E}^3$ Öklid uzayında, sıralı bir $\{P_0, P_1, P_2, P_3\}$ nokta dörtlüsü için eğer $\left\{\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}, \overrightarrow{P_0P_3}\right\}$ vektör sistemi V nin bir ortonormal bazı ise, $\{P_0, P_1, P_2, P_3\}$ çatısına bir dik çatı (veya Öklid çatısı) denir.

Tanım 2.1.12. $\mathbb{E}^3$ de bir X noktasının $\mathbb{E}^3$ deki Standart Öklid Çatısına göre ifadesi

$$\overrightarrow{E_0X} = \sum_{i=1}^{3} x_i \, \overrightarrow{E_0E_i}$$

dir, burada

$$x_i : \mathbb{E}^3 \to \mathbb{R} \quad , \quad 1 \le i \le 3$$

fonksiyonlarına X noktasının Öklid koordinat fonksiyonları ve $\{x_1, x_2, x_3\}$ sıralı ve reel değerli fonksiyonlar üçlüsüne de $\mathbb{E}^3$ in Öklid koordinat sistemi denir.

Teorem 2.1.13. $\mathbb{E}^3$ bir Öklid uzayı ve $\mathbb{E}^3$ de iki Öklid koordinat sistemi $\{x_1, x_2, x_3\}$ ve $\{y_1, y_2, y_3\}$ olmak üzere bu iki koordinat sistemi arasında

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & c_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & c_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

bağıntısı vardır, burada $A=\left[a_{ij}\right]\in\mathbb{R}_3^3$ bir ortogonal matristir[8].

2. 2. Dual Öklid Uzayında Temel Kavramlar

Tanım 2.2.1. Her $a, a^*\in\mathbb{R}$ için $\tilde{A}=\left(a,a^*\right)$ ikilisine bir sıralı reel sayı ikilisi adı verilir. Böylece

$$\mathbb{D}=\mathbb{R}\times\mathbb{R}=\left\{\left(a,a^*\right):\ a,a^*\in\mathbb{R}\right\}$$

cümlesi üzerinde iki iç işlem (toplama ve çarpma) ve eşitlik aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$\oplus:\ \mathbb{D}\times\mathbb{D}\to\mathbb{D}$ iç işlemi $\tilde{A}=\left(a,a^*\right)$ ve $\tilde{B}=\left(b,b^*\right)$ olmak üzere

$$\tilde{A}\oplus\tilde{B}=\left(a,a^*\right)\oplus\left(b,b^*\right)=\left(a+b,a^*+b^*\right)$$

şeklinde tanımlanır ve $\mathbb{D}$ deki toplama olarak isimlendirilir.

$\odot:\mathbb{D}\times\mathbb{D}\to\mathbb{D}$ iç işlemi $\tilde{A}=\left(a,a^*\right)$ ve $\tilde{B}=\left(b,b^*\right)\in\mathbb{D}$ olmak üzere

$$\tilde{A}\odot\tilde{B}=\left(a,a^*\right)\odot\left(b,b^*\right)=\left(ab,ab^*+a^*b\right)$$

şeklinde tanımlanır ve $\mathbb{D}$ deki çarpma olarak isimlendirilir.

$\tilde{A}=\left(a,a^*\right)$ ve $\tilde{B}=\left(b,b^*\right)\in\mathbb{D}$ için

$$a=b \qquad , \qquad a^*=b^*$$

ise $\tilde{A}$ ile $\tilde{B}$ eşittir denir ve $\tilde{A}=\tilde{B}$ şeklinde gösterilir.

Tanım 2.2.2. $\mathbb{R}$ reel sayılar cümlesi olmak üzere,

$$\mathbb{D} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

cümlesi üzerinde toplama, çarpma ve eşitlik işlemleri yukarıdaki gibi tanımlanmış ise, $\mathbb{D}$ cümlesine dual sayılar sistemi ve her $\left(a, a^*\right) \in \mathbb{D}$ elemanına da bir dual sayı denir.

Teorem 2.2.3. $(\mathbb{D}, \oplus, \odot)$ üçlüsü birimli ve değişimli bir halkadır[9].

Teorem 2.2.4. $(\mathbb{D}, \oplus, \odot)$ üçlüsü bir cisim değildir[9].

Tanım 2.2.5. $\tilde{A} \oplus \tilde{X} = \tilde{A}$ denkleminin çözümü olarak tanımlanan dual sayıya $\mathbb{D}$ nin sıfırı denir ve $0 = (0,0)$ ile gösterilir[9].

Teorem 2.2.6. $\mathbb{D}$ dual sayılar halkası, $\mathbb{R}$ reel sayılar cümlesine izomorf bir alt cümleyi alt cisim olarak kapsar[9].

Tanım 2.2.7. Bir $\tilde{A} = \left(a, a^*\right) \in \mathbb{D}$ dual sayısında "a" reel sayısına $\tilde{A}$ nın reel kısmı, "a^*" reel sayısına da $\tilde{A}$ nın dual kısmı denir ve $\operatorname{Re}\tilde{A} = a$, $\operatorname{Du}\tilde{A} = a^*$ şeklinde yazılır.

Tanım 2.2.8. $(1,0) = 1$ dual sayısına $\mathbb{D}$ deki çarpma işleminin birim elemanı veya $\mathbb{D}$ deki reel birim denir ve $(0,1) = \mathcal{E}$ dual sayısı da dual birim olarak adlandırılır.

Tanım 2.2.9. Birimi 1 olan değişmeli bir halka H ve S de bir abel grubu olmak üzere

$$H \times S \to S$$
$$(a, \alpha) \to a\alpha$$

dış işlemi, her $a,b \in H$ ve her $\alpha,\beta \in S$ için

i) $a(\alpha+\beta) = a\alpha + a\beta$;

ii) $(a+b)\alpha = a\alpha + b\alpha$;

iii) $(ab)\alpha = a(b\alpha)$;

iv) $1\alpha = \alpha$

özeliklerini sağlıyor ise S ye H üzerinde bir modül adı verilir.

Tanım 2.2.10. $\mathbb{D}$ dual sayılar halkası olmak üzere

$$\mathbb{D}\times\mathbb{D}\times\mathbb{D} = \mathbb{D}^3 = \left\{\left(\widetilde{A_1},\widetilde{A_2},\widetilde{A_3}\right) : \widetilde{A_1},\widetilde{A_2},\widetilde{A_3} \in \mathbb{D}\right\}$$

cümlesi üzerinde, sırasıyla, toplama, skalarla çarpma ve eşitlik aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$\tilde{A} = \left(\tilde{A}_i\right)$, $\tilde{B} = \left(\tilde{B}_i\right) \in \mathbb{D}^3$, $(i=1,2,3)$ ve $\tilde{\lambda} \in \mathbb{D}$ için;

Toplama :
$$+ : \mathbb{D}^3 \times \mathbb{D}^3 \to \mathbb{D}^3$$
$$\left(\tilde{A},\tilde{B}\right) \to \tilde{A}+\tilde{B} = \left(\tilde{A}_i + \tilde{B}_i\right)$$

Çarpma :
$$\odot : \mathbb{D}^3 \times \mathbb{D}^3 \to \mathbb{D}^3$$
$$\left(\tilde{\lambda},\tilde{A}\right) \to \tilde{\lambda}\,\tilde{A} = \left(\tilde{\lambda}\,\tilde{A}_i\right)$$

Eşitlik : $\tilde{A} = \tilde{B} \Leftrightarrow \tilde{A}_i = \tilde{B}_i$.

Teorem 2.2.11. $\left(\mathbb{D}^3,+\right)$ bir abel grubudur[9].

Teorem 2.2.12. $\left(\mathbb{D}^3,+,\mathbb{D},+,.,\odot\right)$ sistemi $\mathbb{D}$ dual sayılar halkası üzerinde bir modüldür[9].

Tanım 2.2.13. Dual sayılar halkası üzerinde modül olan $\mathbb{D}^3 = \mathbb{D}\times\mathbb{D}\times\mathbb{D}$ cümlesi $\mathbb{D}$-Modül olarak isimlendirilir ve $\mathbb{D}$-Modül'ün elemanları olan sıralı dual sayı üçlülerine, dual vektörler adı verilir.

Teorem 2.2.14. $\vec{a},\ \overrightarrow{a^*} \in \mathbb{R}^3$ olmak üzere $\mathbb{D}$-Modül'de her bir $\tilde{\vec{A}}$ dual vektörü

$$\tilde{\vec{A}} = \vec{a} + \mathcal{E}\,\overrightarrow{a^*}\ , \qquad \left[\mathcal{E} = (0,1) \in \mathbb{D}\right]$$

şeklinde yazılabilir[9].

Teorem 2.2.15. $\tilde{\vec{A}} = \vec{a} + \mathcal{E}\,\overrightarrow{a^*} = \left(\vec{a}, \overrightarrow{a^*}\right)$ dual vektörünün $\tilde{\lambda} \in \mathbb{D}$ skaları ile çarpımı

$$\tilde{\lambda}\,\tilde{\vec{A}} = \left(\tilde{\lambda}\,\vec{a}, \tilde{\lambda}\,\overrightarrow{a^*}\right)$$

dır[9].

Teorem 2.2.16. $\tilde{\vec{A}} = \left(\vec{a}, \overrightarrow{a^*}\right)$ ve $\tilde{\vec{B}} = \left(\vec{b}, \overrightarrow{b^*}\right) \in \mathbb{D}$-Modül için

$$\tilde{\vec{A}} = \tilde{\vec{B}} \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{b} \text{ ve } \overrightarrow{a^*} = \overrightarrow{b^*}$$

dır[9].

Teorem 2.2.17. $\mathbb{R}^3$ vektör uzayı, $\mathbb{D}$-Modül'ün elemanları $\left(\vec{a}, \vec{0}\right)$ şeklinde olan bir alt cümlesine izomorftur[9].

Tanım 2.2.18. $\tilde{\vec{A}} = \vec{a} + \mathcal{E}\,\overrightarrow{a^*}$, $\tilde{\vec{B}} = \vec{b} + \mathcal{E}\,\overrightarrow{b^*} \in \mathbb{D}$-Modül dual vektörlerinin iç çarpımı

$$f : \mathbb{D}^3 \times \mathbb{D}^3 \to \mathbb{D}$$

şeklinde bir dönüşümdür ve

$$f\left(\vec{\tilde{A}},\vec{\tilde{B}}\right)=\left\langle \vec{\tilde{A}},\vec{\tilde{B}}\right\rangle=\left\langle \vec{a}+\mathcal{E}\,\overrightarrow{a^*},\vec{b}+\mathcal{E}\,\overrightarrow{b^*}\right\rangle$$
$$=\left\langle \vec{a},\vec{b}\right\rangle+\mathcal{E}\left[\left\langle \overrightarrow{a^*},\vec{b}\right\rangle+\left\langle \vec{a},\overrightarrow{b^*}\right\rangle\right]$$

olarak tanımlanır.

Tanım 2.2.19. Bir $\vec{\tilde{A}}=\vec{a}+\mathcal{E}\,\overrightarrow{a^*}$ dual vektörünün normu

$$\left\|\vec{\tilde{A}}\right\|=\left(\left\langle \vec{\tilde{A}},\vec{\tilde{A}}\right\rangle\right)^{1/2}=\left(\left\|\vec{a}\right\|,\frac{\left\langle \vec{a},\overrightarrow{a^*}\right\rangle}{\left\|\vec{a}\right\|}\right)\quad,\quad \vec{a}\neq\vec{0}\,,$$

olarak tanımlanan bir dual sayıdır, burada

$$a=\left\|\vec{a}\right\|\ \text{ve}\ a^*=\frac{\left\langle \vec{a},\overrightarrow{a^*}\right\rangle}{\left\|\vec{a}\right\|}$$

olmak üzere,

$$\left\|\vec{\tilde{A}}\right\|=a+\mathcal{E}\,a^*$$

dır.

Tanım 2.2.20. Normu $(1,0)$ reel birimine karşılık gelen dual vektöre birim dual vektör denir.

Teorem 2.2.21. $\vec{\tilde{A}}=\vec{a}+\mathcal{E}\,\overrightarrow{a^*}$ birim dual vektör ise,

$$\left\|\vec{a}\right\| = 1 \quad , \quad \left\langle \vec{a}, \overrightarrow{a^*} \right\rangle = 0$$

dır[9].

Teorem 2.2.22. $\vec{\tilde{A}} \neq \left(\vec{0}, \vec{a}\right) \in \mathbb{D}$-Modül olmak üzere

$$\vec{\tilde{U}} = \frac{\vec{\tilde{A}}}{\left\|\vec{\tilde{A}}\right\|}$$

bir birim dual vektördür[9].

İspat : $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ sistemi $\mathbb{R}^3$ de standart baz olsun.

$$\begin{aligned}\vec{\tilde{A}} = \vec{a} + \mathcal{E}\,\overrightarrow{a^*} &= a_1\,\vec{e}_1 + a_2\,\vec{e}_2 + a_3\,\vec{e}_3 + \mathcal{E}\left(a_1^*\,\vec{e}_1 + a_2^*\,\vec{e}_2 + a_3^*\,\vec{e}_3\right) \\ &= \left(a_1 + \mathcal{E}\,a_1^*\right)\vec{e}_1 + \left(a_2 + \mathcal{E}\,a_2^*\right)\vec{e}_2 + \left(a_3 + \mathcal{E}\,a_3^*\right)\vec{e}_3\end{aligned}$$

ve

$$\left\|\vec{\tilde{A}}\right\| = a + \mathcal{E}\,a^*$$

olduklarından

$$\vec{\tilde{U}} = \frac{\vec{\tilde{A}}}{\left\|\vec{\tilde{A}}\right\|} = \frac{a_1 + \mathcal{E}\,a_1^*}{a + \mathcal{E}\,a^*}\,\vec{e}_1 + \frac{a_2 + \mathcal{E}\,a_2^*}{a + \mathcal{E}\,a^*}\,\vec{e}_2 + \frac{a_3 + \mathcal{E}\,a_3^*}{a + \mathcal{E}\,a^*}\,\vec{e}_3$$

elde edilir. Her terim için bölme işlemi yapılırsa ve neticede

$$a = \left\| \vec{a} \right\| \text{ ve } a^* = \frac{\left\langle \vec{a}, \overrightarrow{a^*} \right\rangle}{\left\| \vec{a} \right\|}$$

konursa

$$\vec{\tilde{U}} = \frac{\vec{a}}{\left\| \vec{a} \right\|} + \mathcal{E} \left(\frac{\overrightarrow{a^*}}{\left\| \vec{a} \right\|} - \frac{\left\langle \vec{a}, \overrightarrow{a^*} \right\rangle}{\left\| \vec{a} \right\|^2} \frac{\vec{a}}{\left\| \vec{a} \right\|} \right)$$

bulunur.

$$k = \frac{\left\langle \vec{a}, \overrightarrow{a^*} \right\rangle}{\left\| \vec{a} \right\|^2}$$

denirse

$$\vec{\tilde{U}} = \vec{u} + \mathcal{E} \, \overrightarrow{u^*} = \frac{\vec{a}}{\left\| \vec{a} \right\|} + \mathcal{E} \, \frac{\overrightarrow{a^*} - k \, \vec{a}}{\left\| \vec{a} \right\|}$$

olur.

$$\vec{\tilde{U}} = \vec{u} + \mathcal{E} \overrightarrow{u^*}$$

birim dual vektöründe

$$\vec{u} = \frac{\vec{a}}{\left\| \vec{a} \right\|} \text{ ve } \overrightarrow{u^*} = \frac{\overrightarrow{a^*} - k \, \vec{a}}{\left\| \vec{a} \right\|}$$

dır.

$$\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = 1 \text{ ve } \left\langle \vec{u}, \overrightarrow{u^*} \right\rangle = 0$$

olduklarından $\vec{\tilde{U}}$ birim dual vektördür.

Teorem 2.2.22' den görüldüğü gibi

$$\vec{\tilde{A}} = \left\| \vec{\tilde{A}} \right\| \vec{\tilde{U}}$$

şeklinde yazılabilmektedir. Bu ifadenin,

$$\vec{\tilde{A}} = a\,\vec{u} + \mathcal{E}\left(a\,\overrightarrow{u^*} + a^*\,\vec{u}\right)$$

veya

$$a^* = k\left\|\vec{a}\right\| = k\,a$$

olduğundan

$$\vec{\tilde{A}} = a\left(1 + \mathcal{E}\,k\right)\vec{\tilde{U}}$$

olarak yazılabileceği açıktır.

Tanım 2.2.23. $\left\{ \vec{\tilde{X}} = \vec{x} + \mathcal{E}\,\overrightarrow{x^*} \;\middle|\; \left\|\vec{\tilde{X}}\right\| = (1, 0);\ \vec{x},\ \overrightarrow{x^*} \in \mathbb{R}^3 \right\}$ cümlesine $\mathbb{D}$-Modül'de birim dual küre adı verilir.

Teorem 2.2.24. (E. Study) $\vec{\tilde{A}} \neq \left(\vec{0}, \vec{a}\right) \in \mathbb{D}$-Modül olmak üzere, $\mathbb{D}$-Modül'de denklemi

$$\left\| \vec{\tilde{A}} \right\| = (1, 0)$$

olan birim dual kürenin dual noktaları, $\mathbb{R}^3$ deki yönlü doğrulara birebir karşılık gelir[13].

Tanım 2.2.25. $\vec{\tilde{A}} = \vec{a} + \mathcal{E}\,\overrightarrow{a^*} \in \mathbb{D}$-Modül olmak üzere

$$\vec{\tilde{U}} = \frac{\vec{\tilde{A}}}{\left\| \vec{\tilde{A}} \right\|}$$

birim dual vektörüne $\vec{\tilde{A}}$ vektörünün ekseni denir.

Tanım 2.2.26. $k = \dfrac{\left\langle \vec{a}, \overrightarrow{a^*} \right\rangle}{\left\| \vec{a} \right\|^2}$ reel sayısına $\vec{\tilde{A}} = \vec{a} + \mathcal{E}\,\overrightarrow{a^*}$ dual vektörünün adımı veya yükselişi denir. Şimdi $\vec{\tilde{A}} = a\left(1 + \mathcal{E}\,k\right)\vec{\tilde{U}}$ dual vektörünü ele alalım.

i) $k =$ sonlu bir sayı ise $\vec{a} \neq \vec{0}$ ve $\overrightarrow{a^*} \neq \vec{0}$ dır ve $\vec{\tilde{A}}$ dual vektörüne has dual vektör veya vida denir.

ii) $k = 0 \Rightarrow \vec{\tilde{A}} = a\vec{\tilde{U}}$ dır. Bu halde $\vec{\tilde{A}}$ dual vektörü $\vec{\tilde{U}}$ ekseni ile çakışık bir doğru gösterir.

iii) $k = \infty \Rightarrow \vec{a} = \vec{0}$ dır.

$$k = \frac{\left\langle \vec{a}, \overrightarrow{a^*} \right\rangle}{\left\| \vec{a} \right\|^2} = \frac{\left\| \vec{a} \right\| \left\| \overrightarrow{a^*} \right\| \cos\theta}{\left\| \vec{a} \right\|^2} = \frac{\left\| \overrightarrow{a^*} \right\| \cos\theta}{\left\| \vec{a} \right\|}$$

dır.

$$k = \frac{\left\|\overrightarrow{a^*}\right\| \cos\theta}{\|\vec{a}\|}$$

ifadesinde $k = \infty$ olması için

$$\|\vec{a}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$$

olmalıdır. Bu halde $\vec{\tilde{A}}$ dual vektörü bir sırf dual vektördür. Yani

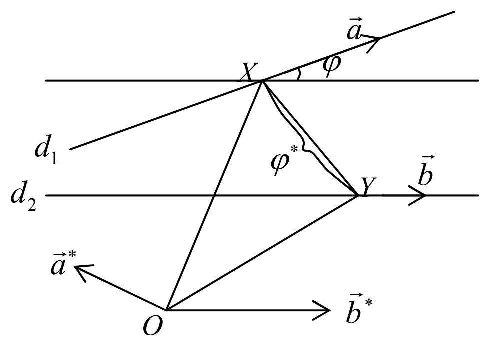
$$\vec{\tilde{A}} = \left(\vec{0}, \overrightarrow{a^*}\right)$$

şeklindedir. Bu tip dual vektörlere çift (couple) denir. Çift dual vektörler için $\overrightarrow{a^*}$ başlangıç noktasının seçilişine bağlı değildir.

Tanım 2.2.27. $\vec{\tilde{A}}$ ve $\vec{\tilde{B}}$ iki birim dual vektör ve bu birim dual vektörlere $\mathbb{R}^3$ de karşılık gelen yönlü doğrular, sırasıyla, d_1 ve d_2 olsunlar. d_1 doğrusunun yönü $\vec{a}$, yeri $\overrightarrow{a^*}$, d_2 doğrusunun yönü $\vec{b}$, yeri de $\overrightarrow{b^*}$ ile belirlidir. $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ arasındaki açı φ olmak üzere

$$\begin{aligned} \left\langle \vec{\tilde{A}}, \vec{\tilde{B}} \right\rangle &= \cos\Phi = \cos\left(\varphi + \mathcal{E}\varphi^*\right) \\ &= \cos\varphi - \mathcal{E}\varphi^* \sin\varphi \qquad , 0 \le \varphi \le \pi,\ \varphi \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

dir (Şekil 2.2.1).



Şekil 2.2.1 Dual açı

Burada $\tilde{\Phi} = \varphi + \mathcal{E}\varphi^*$ dual sayısına $\vec{\tilde{A}}$ ve $\vec{\tilde{B}}$ birim vektörleri arasındaki dual açı denir[9].

$\left\langle \vec{\tilde{A}}, \vec{\tilde{B}} \right\rangle = \left\| \vec{\tilde{A}} \right\| \left\| \vec{\tilde{B}} \right\| \cos \Phi$ formülünden yararlanarak $\mathbb{R}^3$ deki yönlü doğruların birbirine göre durumları incelenebilir.

i) $\left\langle \vec{\tilde{A}}, \vec{\tilde{B}} \right\rangle =$ sırf dual $\Leftrightarrow$ $\cos\varphi = 0 \Rightarrow \varphi = \dfrac{\pi}{2}$, $\varphi^* \neq 0$ ise $\vec{\tilde{A}}$ ve $\vec{\tilde{B}}$ birim vektörlerinin belirttikleri yönlü doğrular dik durumlu fakat aykırıdırlar.

ii) $\left\langle \vec{\tilde{A}}, \vec{\tilde{B}} \right\rangle =$ sırf reel $\Rightarrow$ $\varphi^* = 0$ olsun. Bu halde yönlü iki doğru kesişir ve

$$\left\langle \vec{a}, \vec{b^*} \right\rangle + \left\langle \vec{a^*}, \vec{b} \right\rangle = 0$$

ifadesi bu iki doğrunun kesişme koşuludur.

iii) $\left\langle \vec{\tilde{A}}, \vec{\tilde{B}} \right\rangle = 0 \Rightarrow \cos\varphi = 0 \Rightarrow \varphi = \dfrac{\pi}{2}$ ve $\varphi^* = 0$ ise yönlü doğrular birbirini dik olarak keser.

iv) $\left\langle \vec{\tilde{A}}, \vec{\tilde{B}} \right\rangle = (1,0) \Rightarrow \varphi = 0$ ise yönlü doğrular paralel ve aynı yönlüdürler. Eğer $\varphi^* = 0$ ise bu iki doğru aynı zamanda çakışıktır.

v) $\left\langle \vec{\tilde{A}}, \vec{\tilde{B}} \right\rangle = -(1,0) \Rightarrow \varphi = \pi$ ise yönlü doğrular paralel ve zıt yönlüdürler. Eğer $\varphi^* = 0$ ise doğrular çakışıktır.

Tanım 2.2.28. $\vec{\tilde{A}}$, $\vec{\tilde{B}} \in \mathbb{D}$-Modül dual vektörlerinin dış çarpımı

$$\vec{\tilde{A}} \wedge \vec{\tilde{B}} = \vec{a} \wedge \vec{b} + \mathcal{E}\left(\vec{a} \wedge \vec{b^*} + \vec{a^*} \wedge \vec{b} \right)$$

olarak tanımlanan

$$\wedge : \mathbb{D}^3 \times \mathbb{D}^3 \rightarrow \mathbb{D}^3$$

şeklinde bir işlemdir.

Teorem 2.2.29. $\vec{\tilde{A}}$, $\vec{\tilde{B}} \in \mathbb{D}$-Modül için

$$\vec{\tilde{A}} \wedge \vec{\tilde{B}} = \left\|\vec{\tilde{A}}\right\| \left\|\vec{\tilde{B}}\right\| \sin\tilde{\Phi}\ \vec{\tilde{N}}$$

dir[9].

Tanım 2.2.30. $\vec{\tilde{A}}$, $\vec{\tilde{B}}$, $\vec{\tilde{C}} \in \mathbb{D}$-Modül has dual vektörler ve $\widetilde{\Lambda_i} = \lambda_i + \mathcal{E}\lambda_i^* \in \mathbb{D}$, $1 \le i \le 3$, olmak üzere

$$\widetilde{\Lambda_1}\,\vec{\tilde{A}} + \widetilde{\Lambda_2}\,\vec{\tilde{B}} + \widetilde{\Lambda_3}\,\vec{\tilde{C}} = \vec{0}$$

eşitliği her $\widetilde{\Lambda_i} = 0$ için sağlanıyorsa $\vec{\tilde{A}}$, $\vec{\tilde{B}}$, $\vec{\tilde{C}}$ has dual vektörleri lineer bağımsızdır denir.

Tanım 2.2.31. $\vec{\tilde{A}}$, $\vec{\tilde{B}}$, $\vec{\tilde{C}} \in \mathbb{D}$-Modül ve $\widetilde{\Lambda_i} = \lambda_i + \mathcal{E}\lambda_i^* \in \mathbb{D}$; $\lambda_i \ne 0$, $1 \le i \le 3$, için

$$\widetilde{\Lambda_1}\,\vec{\tilde{A}} + \widetilde{\Lambda_2}\,\vec{\tilde{B}} + \widetilde{\Lambda_3}\,\vec{\tilde{C}} = \vec{0}$$

eşitliği en az bir $\widetilde{\Lambda_i} \ne 0$ için sağlanıyorsa, $\vec{\tilde{A}}$, $\vec{\tilde{B}}$, $\vec{\tilde{C}}$ dual vektörleri lineer bağımlıdır denir.

Tanım 2.2.32. $\mathbb{D}$-Modül'de birim dual $\vec{\tilde{X}} = \vec{x} + \mathcal{E}\vec{x^*}$ vektörüne $\mathbb{R}^3$ de bir yönlü doğru karşılık gelir. $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ birim reel vektörü $\vec{\tilde{X}}$ doğrusunun yönünü ve $\vec{x^*} = (x_1^*, x_2^*, x_3^*)$ de bir O noktasına göre $\vec{x}$ in vektörel momentini ifade etsin. $\vec{\tilde{X}} = \vec{x} + \mathcal{E}\vec{x^*}$ birim dual vektörü

i) $\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 \\ x_1\, x_1^* + x_2\, x_2^* + x_3\, x_3^* = 0 \end{cases}$

koşulunu sağlar. Eğer bu koşuldan başka altı Plücker doğru koordinatları arasında bir ikinci

ii) $F\left(x_1, x_2, x_3; x_1^*, x_2^*, x_3^*\right) = 0$

bağıntısı varsa bu halde $\vec{\tilde{X}}$ doğrusunun bağımsız parametre sayısı üç olur. Böylece

$\mathbb{R}^3$ de üç bağımsız parametreye bağlı $\left(\infty^3\right)$ sayıda $\vec{\tilde{X}}$ doğrularının cümlesine ışın kompleksi adı verilir.

Tanım 2.2.33. $\vec{\tilde{A}}$ bir has dual vektör olmak üzere

$$\left\langle \vec{a}, \overrightarrow{x^*} \right\rangle + \left\langle \overrightarrow{a^*}, \vec{x} \right\rangle = 0$$

denklemini sağlayan $\vec{\tilde{X}} = \vec{x} + \mathcal{E}\overrightarrow{x^*}$ doğrularının cümlesine bir lineer ışın kompleksi denir.

2. 3. Lorentz Uzayında Temel Kavramlar

Tanım 2.3.1. V sonlu boyutlu reel vektör uzayı olmak üzere,

$$\langle\ ,\ \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$$

bilineer fonksiyonu her $\vec{v}, \vec{w} \in V$ için $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = \langle \vec{w}, \vec{v} \rangle$ özeliğini sağlıyor ise, $\langle\ ,\ \rangle$-ye V üzerinde bir simetrik bilineer form denir.

Tanım 2.3.2. V, vektör uzayı üzerinde bir simetrik bilineer form $\langle\ ,\ \rangle$ olsun. Bu takdirde,

i) $\forall \vec{v} \in V$, $\vec{v} \neq 0$ için $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle > 0$ ise $\langle\ ,\ \rangle$ bilineer formu pozitif definit,

ii) $\forall \vec{v} \in V$, $\vec{v} \neq 0$ için $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle < 0$ ise $\langle\ ,\ \rangle$ bilineer formu negatif definit,

iii) $\forall \vec{v} \in V$, $\vec{v} \neq 0$ için $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle \geq 0$ ise $\langle\ ,\ \rangle$ bilineer formu pozitif semi-definit,

iv) $\forall \vec{v} \in V$, $\vec{v} \neq 0$ için $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle \leq 0$ ise $\langle\ ,\ \rangle$ bilineer formu negatif semi-definit,

v) $\forall \vec{w} \in V$ için $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = 0$ için $\vec{v} = 0$ oluyorsa $\langle\ ,\ \rangle$ bilineer formuna non-dejenere, değilse dejenere adı verilir.

Tanım 2.3.3. $\langle\ ,\ \rangle$, V üzerinde simetrik bilineer form ve W da V nin bir altuzayı olsun. $\langle\ ,\ \rangle$ nin W üzerinde kısıtlanışı $\langle\ ,\ \rangle|_W$ olmak üzere

$$\langle\ ,\ \rangle|_W : W \times W \to \mathbb{R}$$

negatif definit olacak şekilde en büyük boyutlu W altuzayının boyutuna, $\langle\ ,\ \rangle$ simetrik bilineer formun indeksi denir. ν, $\langle\ ,\ \rangle$ nin indeksi olmak üzere $0 \leq \nu \leq \text{boy}V$ dir[12].

Tanım 2.3.4. $\mathbb{R}^3$ üzerinde $\vec{X} = (x_1, x_2, x_3)$, $\vec{Y} = (y_1, y_2, y_3)$ olmak üzere

$$\langle\ ,\ \rangle_{\mathbb{L}} : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$
$$(\vec{X}, \vec{Y}) \to \langle \vec{X}, \vec{Y} \rangle_{\mathbb{L}} = -x_1\, y_1 + x_2\, y_2 + x_3\, y_3$$

şeklinde tanımlanan simetrik, bilineer, non-dejenere metrik tensörüne $\mathbb{R}^3$ üzerinde Lorentz metriği denir.

Tanım 2.3.5. $\mathbb{R}^3$ üzerinde Lorentz metriğinin tanımlanmasıyla meydana gelen $\left\{\mathbb{R}^3, \langle\ ,\ \rangle_{\mathbb{L}}\right\}$ ikilisine 3-boyutlu Lorentz uzayı denir ve $\mathbb{L}^3$ ile gösterilir.

Tanım 2.3.6. $\vec{X} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{L}^3$ olsun. Eğer

i) $\left\langle \vec{X}, \vec{X} \right\rangle_{\mathbb{L}} < 0$ ise $\vec{X}$ e time-like vektör,

ii) $\left\langle \vec{X}, \vec{X} \right\rangle_{\mathbb{L}} > 0$ veya $\vec{X} = 0$ ise $\vec{X}$ e space-like vektör,

iii) $\left\langle \vec{X}, \vec{X} \right\rangle_{\mathbb{L}} = 0$ ve $\vec{X} \neq 0$ ise $\vec{X}$ e null vektör adı verilir.

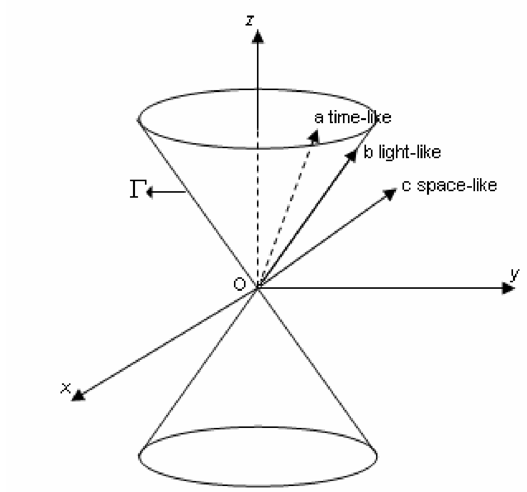
Teorem 2.3.7. W, V Lorentz vektör uzayının bir altuzayı olsun. Bu durumda aşağıdaki önermeler denktir.

i) W light-like dır.

ii) W light-like vektör içerir fakat time-like vektör içermez.

iii) $W \cap \Gamma = F - \{0\}$ dır. Burada F bir boyutlu altuzaydır (burada Γ, V nin null konisidir)[12].

Tanım 2.3.4. ile verilen Lorentz iç çarpımı, $\mathbb{L}^3$ Lorentz uzayındaki vektörleri üç sınıfa ayırır: Time-like vektörler (null koni içinde), Light-like (veya null) vektörler (Γ nın üzerinde) ve Space-like vektörler (Γ nın dışında) (Şekil 2.3.1).



Şekil 2.3.1 $\mathbb{L}^3$ uzayında vektörler

Tanım 2.3.8. $\mathbb{L}^3$, 3-boyutlu Lorentz uzayı ve $\vec{X},\vec{Y}\in\mathbb{L}^3$ olsun. Eğer

$$\left\langle \vec{X},\vec{Y}\right\rangle_{\mathbb{L}}=0$$

ise $\vec{X}$ ve $\vec{Y}$ vektörleri Lorentz anlamında diktirler denir.

Tanım 2.3.9. $\vec{X}\in\mathbb{L}^3$ için $\vec{X}$ in normu

$$\left\|\vec{X}\right\|_{\mathbb{L}}=\sqrt{\left|\left\langle \vec{X},\vec{X}\right\rangle_{\mathbb{L}}\right|}$$

olarak tanımlanır.

Teorem 2.3.10. $\vec{X}\in\mathbb{L}^3$ olsun. Bu takdirde

i) $\left\|\vec{X}\right\|_{\mathbb{L}}>0$ dır,

ii) $\left\|\vec{X}\right\|_{\mathbb{L}}=0\Leftrightarrow\vec{X}$ bir null vektördür,

iii) $\vec{X}$ bir time-like vektör ise $\left\|\vec{X}\right\|_{\mathbb{L}}^2=-\left\langle \vec{X},\vec{X}\right\rangle_{\mathbb{L}}$,

iv) $\vec{X}$ bir space-like vektör ise $\left\|\vec{X}\right\|_{\mathbb{L}}^2=\left\langle \vec{X},\vec{X}\right\rangle_{\mathbb{L}}$

dir[2].

Tanım 2.3.11. $\left(V,\langle\ ,\ \rangle\right)$ bir Lorentz uzayı olsun. $W\subset V$ altuzayını göz önüne alalım.

i) $\langle\ ,\ \rangle|_W : W\times W\to\mathbb{R}$ pozitif ise W ya space-like altuzay,

ii) $\langle\ ,\ \rangle|_W : W\times W\to\mathbb{R}$, 1-indeksli ve non-dejenere ise W ya time-like altuzay,

iii) $\langle\ ,\ \rangle|_W : W\times W\to\mathbb{R}$ dejenere ise W ya light-like altuzay denir.

Tanım 2.3.12. V Lorentz vektör uzayında bütün time-like vektörlerin cümlesi τ olsun. $U \in \tau$, için $\{X \in \tau : \langle U, X \rangle_{\mathbb{L}} < 0\}$ cümlesine V nin U yu ihtiva eden time-konisi denir.

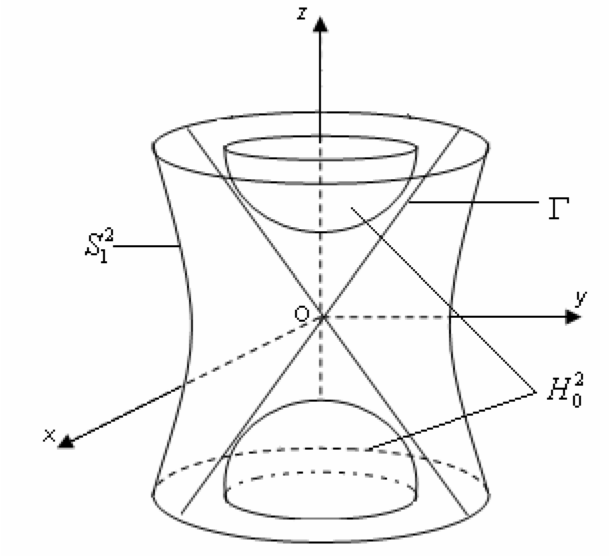
Tanım 2.3.13. $\mathbb{L}^3$ uzayında, sırasıyla,

$$S_1^2 = \left\{ \vec{P} \in \mathbb{R}_1^3 \middle| \ \langle \vec{P}, \vec{P} \rangle_{\mathbb{L}} = 1 \right\}$$

ve

$$H_0^2 = \left\{ \vec{P} \in \mathbb{R}_1^3 \middle| \ \langle \vec{P}, \vec{P} \rangle_{\mathbb{L}} = -1 \right\}$$

cümlelerine, Lorentz ve hiperbolik birim küreler denir (Şekil 2.3.2).



Şekil 2.3.2 $\mathbb{L}^3$ uzayında birim küreler

Tanım 2.3.14. $\varphi = \varphi(u,v)$, $\mathbb{L}^3$ uzayında bir yüzey olsun. Eğer $P \in \varphi(u,v)$ için, $\langle \ , \ \rangle_{\mathbb{L}} : \varphi(u,v)\big|_P \times \varphi(u,v)\big|_P \to \mathbb{R}$ bir Lorentz iç çarpımı ise, $\varphi(u,v)$ ye time-like yüzey denir[12].

Tanım 2.3.15. $\alpha \in \mathbb{L}^3$ Lorentz uzayında bir eğri olsun. α eğrisinin hız vektörü $\dot{\alpha}$ olmak üzere;

i) $\left\langle \dot{\alpha}, \dot{\alpha} \right\rangle_{\mathbb{L}} < 0$ ise, α time-like eğri,

ii) $\left\langle \dot{\alpha}, \dot{\alpha} \right\rangle_{\mathbb{L}} > 0$ ise, α space-like eğri,

iii) $\left\langle \dot{\alpha}, \dot{\alpha} \right\rangle_{\mathbb{L}} = 0$ ise, α null eğri

olarak adlandırılır[12].

Tanım 2.3.16. $\mathbb{L}^3$ Lorentz uzayında $A^{-1} = \varepsilon A^T \varepsilon$ eşitliğini sağlayan A matrisine Lorentz anlamda ortogonal matris denir.

Teorem 2.3.17. Lorentz anlamında ortogonal 3×3 tipindeki matrislerin cümlesi $O_1(3)$ olmak üzere, $A \in O_1(3)$ matrisi için aşağıdaki ifadeler denktir.

i) $A \in O_1(3)$,

ii) $A^T = \varepsilon A^{-1} \varepsilon$,

iii) A nin sütunları $\mathbb{L}^3$ ün bir ortonormal bazını oluşturur,

iv) A, $\mathbb{L}^3$ ün herhangi bir ortonormal bazını ortonormal bir baza taşır[12].

Tanım 2.3.18. $S^T = -\varepsilon S \varepsilon$ eşitliğini sağlayan S matrisine Lorentz anlamında anti-simetrik matris denir.

Tanım 2.3.19. $\vec{v} = (x, y, z)$, $\vec{w} = (a, b, c)$ gibi iki vektörün, Lorentz anlamında vektörel çarpımı

$$\vec{w} \wedge \vec{v} = \det \begin{bmatrix} -\vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{bmatrix}$$
$$= \left(yc - bz, xc - az, ay - bx \right)$$

biçiminde tanımlanır[1].

Teorem 2.3.20. $\mathbb{L}^3$, 3-boyutlu Lorentz uzayında dört vektör $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{\omega}$ ve $\vec{t}$ olsun. Bu durumda aşağıdaki eşitlikler doğrudur.

i) $\langle \vec{u} \wedge \vec{v}, \vec{\omega} \rangle = \det\left(\vec{u}, \vec{v}, \vec{\omega}\right)$,

ii) $\vec{u} \wedge \left(\vec{v} \wedge \vec{\omega}\right) = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle \vec{\omega} - \langle \vec{u}, \vec{\omega} \rangle \vec{v}$,

iii) $\langle \vec{u} \wedge \vec{v}, \vec{u} \rangle = 0$, $\langle \vec{u} \wedge \vec{v}, \vec{v} \rangle = 0$,

iv) $\langle \vec{u} \wedge \vec{v}, \vec{\omega} \wedge \vec{t} \rangle = -\langle \vec{u}, \vec{\omega} \rangle \langle \vec{v}, \vec{t} \rangle + \langle \vec{u}, \vec{t} \rangle \langle \vec{v}, \vec{\omega} \rangle$,

v) $\langle \vec{u} \wedge \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v} \rangle = -\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$.

2. 4. Dual Lorentz Uzayında Temel Kavramlar

Bu bölümde $\mathbb{D}_1^3$, 3-boyutlu dual Lorentz uzayındaki temel tanım ve teoremlere yer verilecektir.

Tanım 2.4.1. $\vec{\vec{A}} = \vec{a} + \mathcal{E}\,\overrightarrow{a^*}$, $\vec{\vec{B}} = \vec{b} + \mathcal{E}\,\overrightarrow{b^*} \in \mathbb{D}^3$ olsun. $\mathbb{D}^3$ uzayı üzerinde,

$$\left\langle \vec{\vec{A}}, \vec{\vec{B}} \right\rangle = \left\langle \vec{a}, \vec{b} \right\rangle + \mathcal{E}\left(\left\langle \vec{a}, \overrightarrow{b^*} \right\rangle + \left\langle \overrightarrow{a^*}, \vec{b} \right\rangle \right)$$

biçiminde dual Lorentz iç çarpımı tanımlanırsa $\left(\mathbb{D}^3, \langle\ ,\ \rangle\right)$ ikilisine dual Lorentz uzayı denir ve $\mathbb{D}_1^3$ ile gösterilir.

Yukarıda verilen eşitliğin sağındaki iç çarpımlar, $\mathbb{R}_1^3$ uzayındaki Lorentz iç çarpımıdır. Böylece

$$\mathbb{D}_1^3 = \left\{ \vec{\vec{A}} = \vec{a} + \mathcal{E}\,\overrightarrow{a^*} \;\middle|\; \vec{a}, \overrightarrow{a^*} \in \mathbb{R}_1^3 \right\}$$

dir.

Tanım 2.4.2. $\vec{\vec{A}} = \vec{a} + \mathcal{E}\,\overrightarrow{a^*} \in \mathbb{D}_1^3$ olmak üzere

i) $\vec{a}$ space-like vektör ise $\vec{\vec{A}}$ ya bir dual space-like vektör,

ii) $\vec{a}$ time-like vektör ise $\vec{\vec{A}}$ ya bir dual time-like vektör,

iii) $\vec{a}$ light-like (null) vektör ise $\vec{\vec{A}}$ ya bir dual light-like (null) vektör

denir.

Tanım 2.4.3. $\vec{\vec{A}} = \vec{a} + \mathcal{E}\,\overrightarrow{a^*} \in \mathbb{D}_1^3$ vektörünün normu

$$\left\| \vec{\vec{A}} \right\| = \sqrt{\left\langle \vec{\vec{A}}, \vec{\vec{A}} \right\rangle} = \left(\left\| \vec{a} \right\|, \frac{\left\langle \vec{a}, \overrightarrow{a^*} \right\rangle}{\left\| \vec{a} \right\|} \right)$$

olarak tanımlanan bir dual sayıdır.

Tanım 2.4.4. $\overrightarrow{\widetilde{A}}, \overrightarrow{\widetilde{B}} \in \mathbb{D}_1^3$ olmak üzere $\overrightarrow{\widetilde{A}}$ ve $\overrightarrow{\widetilde{B}}$ nin dual Lorentz anlamında vektörel çarpımı

$$\begin{aligned} \wedge : \mathbb{D}^3 \times \mathbb{D}^3 &\to \mathbb{D}^3 \\ \left(\overrightarrow{\widetilde{A}}, \overrightarrow{\widetilde{B}}\right) &\to \overrightarrow{\widetilde{A}} \wedge \overrightarrow{\widetilde{B}} = \vec{a} \wedge \vec{b} + \varepsilon\left(\overrightarrow{a^*} \wedge \vec{b} + \vec{a} \wedge \overrightarrow{b^*}\right) \end{aligned}$$

olarak tanımlanır.

Yukarıda verilen eşitliğin sağındaki vektörel çarpımlar, $\mathbb{R}_1^3$ uzayındaki vektörel çarpımlardır.

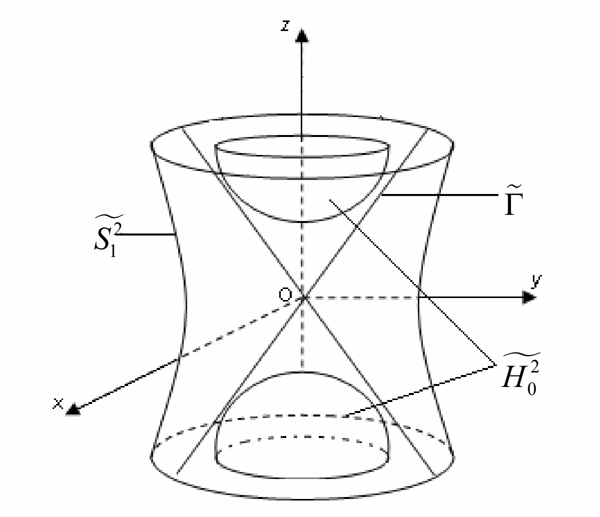
Tanım 2.4.5. $\overrightarrow{\widetilde{A}} = \vec{a} + \varepsilon\,\overrightarrow{a^*} \in \mathbb{D}_1^3$ olmak üzere, sırasıyla,

$$\widetilde{S_1^2} = \left\{ \overrightarrow{\widetilde{A}} = \vec{a} + \varepsilon\,\overrightarrow{a^*} \;\middle|\; \left\|\overrightarrow{\widetilde{A}}\right\| = (1,0);\ \vec{a}, \overrightarrow{a^*} \in \mathbb{R}_1^3 \text{ ve } \vec{a} \text{ space-like vektör} \right\}$$

$$\widetilde{H_0^2} = \left\{ \overrightarrow{\widetilde{A}} = \vec{a} + \varepsilon\,\overrightarrow{a^*} \;\middle|\; \left\|\overrightarrow{\widetilde{A}}\right\| = (1,0);\ \vec{a}, \overrightarrow{a^*} \in \mathbb{R}_1^3 \text{ ve } \vec{a} \text{ time-like vektör} \right\}$$

cümlelerine, dual Lorentz birim küre ve dual hiperbolik birim küre denir

(Şekil 2.4.1).



Şekil 2.4.1 $\widetilde{S_1^2}$ dual Lorentz birim küresi, $\widetilde{H_0^2}$ dual hiperbolik birim küresi ve $\widetilde{\Gamma}$ dual Işık konisi

Teorem 2.4.6. (E. Study) $\mathbb{D}_1^3$ uzayındaki $\widetilde{H_0^2}$ dual hiperbolik ve $\widetilde{S_1^2}$ dual Lorentz birim kürelerin noktaları, sırasıyla, $\mathbb{R}_1^3$ Lorentz çizgiler uzayındaki yönlü time-like ve space-like doğrulara birebir karşılık gelirler[14].

Teorem 2.4.7. $\vec{\tilde{A}} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a^*}$, $\vec{\tilde{B}} = \vec{b} + \varepsilon \vec{b^*} \in \mathbb{D}_1^3$ iki dual time-like birim vektör olsun. $\vec{\tilde{A}}$ ve $\vec{\tilde{B}}$ vektörlerinin iç çarpımı, aralarındaki Lorentz açı $\widetilde{\Phi}$ olmak üzere,

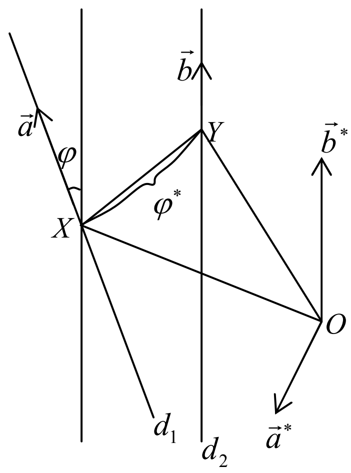
$$\left\langle \vec{\tilde{A}}, \vec{\tilde{B}} \right\rangle = -\cosh \widetilde{\Phi}$$

dir[14].

Tanım 2.4.8. $\vec{\tilde{A}}$ ve $\vec{\tilde{B}}$ dual time-like birim vektörlerine karşılık gelen yönlü time-like doğrular arasındaki hiperbolik açı φ ve en kısa uzaklık φ^* olmak üzere

$$\widetilde{\Phi} = \varphi + \varepsilon \varphi^*$$

dual sayısına, $\overrightarrow{\widetilde{A}}$ ve $\overrightarrow{\widetilde{B}}$ vektörleri arasındaki dual hiperbolik açı denir (Şekil 2.4.2).



Şekil 2.4.2 Yönlü time-like doğrular arasındaki dual hiperbolik açı

Teorem 2.4.9. $\overrightarrow{\widetilde{A}} = \vec{a} + \varepsilon \overrightarrow{a^*}$, $\overrightarrow{\widetilde{B}} = \vec{b} + \varepsilon \overrightarrow{b^*} \in \mathbb{D}_1^3$ iki dual space-like birim vektörler ve $Sp\left\{\overrightarrow{\widetilde{A}}, \overrightarrow{\widetilde{B}}\right\}$ time-like olsun. Bu durumda, $\overrightarrow{\widetilde{A}}$ ve $\overrightarrow{\widetilde{B}}$ vektörlerinin Lorentz iç çarpımı

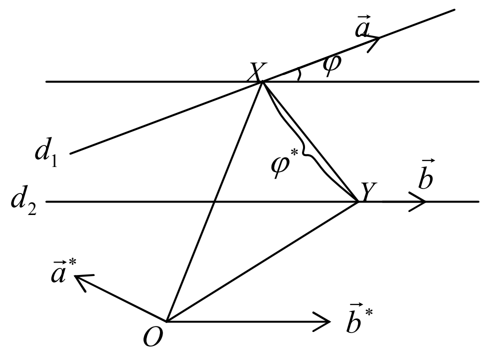
$$\left\langle \overrightarrow{\widetilde{A}}, \overrightarrow{\widetilde{B}} \right\rangle = \cosh \widetilde{\Phi}$$

dir[15].

Tanım 2.4.10. $\overrightarrow{\widetilde{A}}$ ve $\overrightarrow{\widetilde{B}}$ dual space-like birim vektörlerine karşılık gelen yönlü space-like doğrular arasındaki merkez açı φ ve en kısa uzaklık φ^* olmak üzere

$$\widetilde{\Phi} = \varphi + \varepsilon \varphi^*$$

dual sayısına $\overrightarrow{\widetilde{A}}$ ve $\overrightarrow{\widetilde{B}}$ vektörleri arasındaki dual merkez açı adı verilir (Şekil 2.4.3).



Şekil 2.4.3 Space-like doğrular arasındaki dual merkez açı

Teorem 2.4.11. $\vec{\tilde{A}} = \vec{a} + \varepsilon \overrightarrow{a^*}$, $\vec{\tilde{B}} = \vec{b} + \varepsilon \overrightarrow{b^*} \in \mathbb{D}_1^3$ iki dual space-like birim vektörler ve $Sp\left\{\vec{\tilde{A}}, \vec{\tilde{B}}\right\}$ space-like olsun. Bu durumda, $\vec{\tilde{A}}$ ve $\vec{\tilde{B}}$ vektörlerinin Lorentz iç çarpımı

$$\left\langle \vec{\tilde{A}}, \vec{\tilde{B}} \right\rangle = \cos \widetilde{\Phi}$$

dir[15].

BÖLÜM 3. $\mathbb{E}^3$, 3-BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA BİR PARAMETRELİ KÜRESEL HAREKETLER

3. 1. Sabit Bir Nokta Etrafında Dönmeler, Küre Hareketleri

Katı (uzaysal) bir cismin öyle hareketlerini göz önüne alalım ki, bu hareketlerde bir O noktası sabit kalsın. Bu takdirde, sabit bir O noktası etrafındaki hareketlerden bahsedilebilir. O sabit noktası etrafındaki böyle bir harekette katı cismin her X noktası, O dönme merkezine olan uzaklığını korur. Bu sebepten O noktasından geçen OX birleştirme doğrularının hareketlerini inceleyebiliriz. Bir O noktasından geçen doğru ve düzlemlerin tümüne tepe noktası O olan çatı adını verelim. Böylece sabit bir O noktası etrafındaki hareketler O çatısındaki hareketlere denk olurlar. Şimdi tepe noktası O olan bu çatının, merkezi O olan bir küre ile kesitini göz önüne alalım. Böylece her çatı ışını küreyi, karşılıklı bir çift noktada keser. Ama biz O noktasından geçen çatı ışınlarını yönlendirirsek, çatı ışınları ile küre noktaları arasındaki eşleme birebir olur. Bir çatı düzlemi kürenin bir büyük dairesine karşılık gelir. Bir çatı şekli genellikle küre üzerine çizilmiş bir şekle dönüşür. O merkezli çatının aynı merkezli küre ile kesişmesinde metrik bağıntılar da mevcuttur.

Çatıların her hareketinde, aynı merkezli küre kendi içinde hareket eder. Bu takdirde katı ve küresel bir şeklin küre üzerinde hareket ettiğini kabul ederek, küre üzerindeki bir hareketten bahsedebiliriz. Hatta hareketli bir H küre yüzeyinin sabit H' küre yüzeyi üzerinde hareket ettiğini de kabul edebiliriz. O sabit noktası etrafındaki serbest hareket ve dolayısıyla küre üzerindeki serbest hareket üç parametreye bağımlıdır: Bu parametreler üç serbestlik derecesini meydana getirir.

3. 2. Küre Üzerindeki Bir Hareketin Gösterilmesi

Aynı merkezli ve birbirine göre hareketli H ve H' küre yüzeylerini veya bunlara bağlı aynı O tepe noktasına sahip birbirine göre hareket eden ortonormal çatıları, sırasıyla, $\left\{O; \vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\right\}$ ve $\left\{O; \vec{e_1'}, \vec{e_2'}, \vec{e_3'}\right\}$ ile gösterelim. Bu ortonormal çatılar, sırasıyla, H hareketli ve H' sabit kürelerinin temsilcileri olarak kabul edilecektir. Böylece

$$\left\langle \vec{e_i}, \vec{e_j} \right\rangle = \left\langle \vec{e_i'}, \vec{e_j'} \right\rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \tag{3.2.1}$$

dir. Burada hareketlerimizi bu sistemlerden birine (hareketli veya sabit) izafe edebilirdik. Ancak daha genel olması için bu sistemlerden herhangi birini ayrıcalıklı kabul etmeyip üçüncü bir sistemi yani

$$\left\langle \vec{r_i}, \vec{r_j} \right\rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \tag{3.2.2}$$

olacak şekilde $\left\{O; \vec{r_1}, \vec{r_2}, \vec{r_3}\right\}$ (izafi) sistemini ele alalım ve bütün hareketleri, bu izafi sistemine göre verelim. Her üç eksen sistemi, ortak O başlangıç noktasına sahip ve aynı yönde yönlendirildiklerinden dolayı O noktası etrafındaki dönmelerle, sistemlerden birinden diğerine geçilebilir. O halde

$$\vec{r_j} = \sum_{k=1}^{3} a_{jk}\, \vec{e_k} \quad , \quad \vec{r_j} = \sum_{k=1}^{3} a'_{jk}\, \vec{e_k'} \qquad (j = 1,2,3) \tag{3.2.3}$$

lineer dönüşümleri mevcuttur. Burada $\left[a_{jk}\right]$ ve $\left[a'_{jk}\right]$ has ve ortogonal matrislerdir ve sırasıyla H ve H' de belirlenmiş olan eksen sistemlerinden izafi sistemine geçişe karşılık gelirler. Böylece

$$\sum_{i=1}^{3} a_{ij}\, a_{ik} = \sum_{l=1}^{3} a_{jl}\, a_{kl} = \delta_{jk} \qquad (3.2.4)$$

bağıntıları vardır.

a_{jk} ve a'_{jk} katsayıları bir t reel parametresinin uygun fonksiyonları olmak üzere H nın H' ye göre (veya tersine) bir parametreli bir küre hareketi elde edilir. Burada yine a_{jk} , a'_{jk} katsayılarının, yalnızca sürekli değil aynı zamanda istenilen mertebeye kadar türetilebilir olduklarını kabul ediyoruz. Bu şekilde tanımlanmış olan harekete, kısaca O etrafındaki bir parametreli D_1 dönme hareketi adı verilir.

Şimdi $\vec{r_j}$ vektörlerinin, sırasıyla, H ve H' kürelerine göre diferensiyellerini hesaplayalım. Eğer $(3.2.3)$ denklemini göz önüne alırsak

$$d\vec{r_j} = \sum_{k=1}^{3} da_{jk}\,\vec{e_k} \quad , \quad d'\vec{r}_j = \sum_{k=1}^{3} da'_{jk}\,\vec{e'_k} \qquad (3.2.5)$$

elde edilir. Burada da_{jk} , da'_{jk} ifadeleri, bir değişkene göre tam diferensiyeller olup $\vec{e_k}$ ve $\vec{e'_k}$ vektörleri sabittir. $\left[a_{jk}\right]$ ve $\left[a'_{jk}\right]$ matrisleri, has ortogonal matrisler olduğundan, $(3.2.3)$ denklemlerinden dolayı

$$\vec{e_k} = \sum_{l=1}^{3} a_{lk}\,\vec{r_l} \quad , \quad \vec{e'_k} = \sum_{l=1}^{3} a'_{lk}\,\vec{r_l} \qquad (3.2.6)$$

yazılabilir. Bu son denklemler $(3.2.5)$ de yerlerine yazılırsa,

$$d\vec{r_j} = \sum_{k,l=1}^{3} a_{lk}\, da_{jk}\,\vec{r_l} = \sum_{l=1}^{3} \omega_{jl}\,\vec{r_l} \qquad (3.2.7)$$

elde edilir. $(3.2.4)$ ün diferensiyeli alınırsa, $\left[\omega_{jl}\right]$ nin bir anti-simetrik matris olduğu, yani

$$\omega_{jl} + \omega_{lj} = 0 \tag{3.2.8}$$

bağıntısının sağlandığı görülebilir. Burada $\omega_{ii} = 0$ olduğundan, $\left[\omega_{ij}\right]$ matrisinin bileşenlerini i, j, k indislerinin $i, j, k = 1,2,3;\ 2,3,1;\ 3,1,2$, sıralanışlarını

$$\omega_{ij} = \omega_k \tag{3.2.9}$$

ile gösterelim. Bu gösterimle H ye göre değişimler için, türev denklemlerinin aşağıdaki anti-simetrik sistemi elde edilir.

$$\begin{aligned} d\overrightarrow{r_1} &= \omega_3\,\overrightarrow{r_2} - \omega_2\,\overrightarrow{r_3}, \\ d\overrightarrow{r_2} &= -\omega_3\,\overrightarrow{r_1} + \omega_1\,\overrightarrow{r_3}, \\ d\overrightarrow{r_3} &= \omega_2\,\overrightarrow{r_1} - \omega_1\,\overrightarrow{r_2}. \end{aligned} \tag{3.2.10}$$

H' ye göre değişimler için benzer şekilde hareket edilerek aşağıdaki sistem elde edilir.

$$\begin{aligned} d'\overrightarrow{r_1} &= \omega_3'\,\overrightarrow{r_2} - \omega_2'\,\overrightarrow{r_3}, \\ d'\overrightarrow{r_2} &= -\omega_3'\,\overrightarrow{r_1} + \omega_1'\,\overrightarrow{r_3}, \\ d'\overrightarrow{r_3} &= \omega_2'\,\overrightarrow{r_1} - \omega_1'\,\overrightarrow{r_2}. \end{aligned} \tag{3.2.11}$$

Buradaki ω_i, ω_i' büyüklükleri, bir değişkenli, lineer diferansiyel formlardır. Yani

$$\omega_i = f_i(t)\ dt$$

dir.

$(3.2.10)$ ve $(3.2.11)$ denklem sistemleri yerine kısaca

$$d\overrightarrow{r_i} = \omega_k \overrightarrow{r_j} - \omega_j \overrightarrow{r_k} \quad , \quad d'\overrightarrow{r_i} = \omega'_k \overrightarrow{r_j} - \omega'_j \overrightarrow{r_k} \qquad (3.2.12)$$

$$(i, j, k = 1,2,3; 2,3,1; 3,1,2)$$

yazılabilir.

3. 3. Bir D_I Hareketinde Hızlar

İzafi sistemine göre koordinatları x_1, x_2, x_3 olan herhangi bir nokta X olsun. Bu durumda,

$$\overrightarrow{OX} = \vec{x} = x_1 \overrightarrow{r_1} + x_2 \overrightarrow{r_2} + x_3 \overrightarrow{r_3} \qquad (3.3.1)$$

olarak yazılabilir. Eğer X noktası özel olarak birim küre üzerinde ise

$$\vec{x}^{\,2} = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 \qquad (3.3.2)$$

dir.

Şimdi $(3.2.10)$ ve $(3.2.11)$ türev denklemleri yardımıyla X noktasının H ve H' ye göre değişimlerini hesaplayalım. H ye göre değişimi

$$d\vec{x} = x_1\, d\overrightarrow{r_1} + x_2\, d\overrightarrow{r_2} + x_3\, d\overrightarrow{r_3} + \overrightarrow{r_1}\, dx_1 + \overrightarrow{r_2}\, dx_2 + \overrightarrow{r_3}\, dx_3 \qquad (3.3.3)$$

veya

$$d\vec{x} = (dx_1 - x_2\,\omega_3 + x_3\,\omega_2)\overrightarrow{r_1} + (dx_2 - x_3\,\omega_1 + x_1\,\omega_3)\overrightarrow{r_2} + (dx_3 - x_1\,\omega_2 + x_2\,\omega_1)\overrightarrow{r_3} \qquad (3.3.4)$$

dır. Böylece X noktasının relatif hız vektörü (X in H ye göre hızı)

$$\overrightarrow{v_r} = \frac{d\vec{x}}{dt} \qquad (3.3.5)$$

dır. $\overrightarrow{v_r} = 0$ yani $d\vec{x} = 0$ ise, X noktası H de sabittir. O halde X in H de sabit olma şartı

$$\begin{aligned} dx_1 &= x_2\,\omega_3 - x_3\,\omega_2, \\ dx_2 &= x_3\,\omega_1 - x_1\,\omega_3, \\ dx_3 &= x_1\,\omega_2 - x_2\,\omega_1 \end{aligned} \qquad (3.3.6)$$

denklemleri ile ifade edilir.

Benzer şekilde X in H' ye göre değişimi

$$d'\vec{x} = \left(dx_1 - x_2\,\omega_3' + x_3\,\omega_2'\right)\vec{r_1} + \left(dx_2 - x_3\,\omega_1' + x_1\,\omega_3'\right)\vec{r}_2 + \left(dx_3 - x_1\,\omega_2' + x_2\,\omega_1'\right)\vec{r_3} \qquad (3.3.7)$$

şeklinde elde edilir. Bu takdirde mutlak hız vektörü (X in H' ye göre hızı)

$$\overrightarrow{v_a} = \frac{d'\vec{x}}{dt} \qquad (3.3.8)$$

dır. $\overrightarrow{v_a} = 0$ veya $d'\vec{x} = 0$ ise, X noktası H' de sabittir. Böylece X in H' de sabit olma şartı olarak aşağıdaki denklemler elde edilir.

$$\begin{aligned} dx_1 &= x_2\,\omega_3' - x_3\,\omega_2', \\ dx_2 &= x_3\,\omega_1' - x_1\,\omega_3', \\ dx_3 &= x_1\,\omega_2' - x_2\,\omega_1'. \end{aligned} \qquad (3.3.9)$$

Eğer X noktası H de sabit ise, X in H' ye göre hızına X in sürüklenme hızı denir ve

$$\overrightarrow{v_f} = \frac{d_f \vec{x}}{dt} \qquad (3.3.10)$$

ile gösterilir. Böylece $(3.3.6)$ ve $(3.3.7)$ denklemleri göz önüne alınırsa,

$$d_f \vec{x} = (\psi_2 x_3 - \psi_3 x_2)\vec{r_1} + (\psi_3 x_1 - \psi_1 x_3)\vec{r_2} + (\psi_1 x_2 - \psi_2 x_1)\vec{r_3} \qquad (3.3.11)$$

bulunur, burada $\psi_i = \omega_i' - \omega_i$ dir. Eğer

$$\vec{\psi} = \psi_1 \vec{r_1} + \psi_2 \vec{r_2} + \psi_3 \vec{r_3} \qquad (3.3.12)$$

Pfaff vektörü ele alınırsa, $(3.3.11)$ denklemi

$$d_f \vec{x} = \vec{\psi} \wedge \vec{x} \qquad (3.3.13)$$

olarak elde edilir.

Bu formülü geometrik olarak yorumlamadan önce, sürüklenme hızı için, yani ona karşılık gelen $d_f \vec{x}$ değişimi için, $(3.3.4)$ ve $(3.3.7)$ denklemlerinden

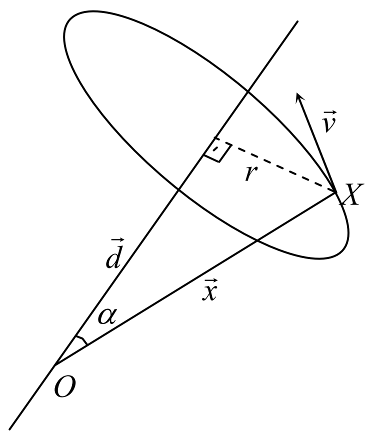
$$d_f \vec{x} = d'\vec{x} - d\vec{x} \qquad (3.3.14)$$

olduğu kolayca görülebilir. Bu ifade eder ki

$$\overrightarrow{v_a} = \overrightarrow{v_f} + \overrightarrow{v_r} \qquad (3.3.15)$$

dir. Şimdi $\vec{\psi}$ Pfaff vektörü ve $(3.3.13)$ denkleminin anlamını öğrenmek için önce Darboux dönme vektörünün önemini belirtelim.

Bir eksen etrafında bir dönme hareketini göz önüne alalım. Kabul edelim ki bu eksen koordinat sisteminin başlangıç noktasından geçsin ve eksenin yönü de bir $\vec{d}$ vektörüyle verilsin ve dönme hareketi $\omega = \pm\|\vec{d}\|$ açısal hızı ile meydana gelsin. Yer vektörü $\overrightarrow{OX} = \vec{x}$ olan bir X noktasını bu dönme hareketinin etkisine tabii tutalım (Şekil 3.3.1). Bu noktanın hız vektörü $\vec{v}$ olmak üzere



Şekil 3.3.1 Darboux dönme vektörü

$$\vec{v} = \vec{d} \wedge \vec{x} \qquad (3.3.16)$$

dir. Bu son denklem ifade eder ki $\vec{v}$ vektörü, hem $\vec{x}$ hem de $\vec{d}$ ye diktir. Ayrıca $\vec{v}$ nin normu için, $\vec{d}$ ile $\vec{x}$ arasındaki açı α ve X in dönme ekseninden uzaklığı r olduğuna göre,

$$\|\vec{v}\| = \|\vec{d}\|\,\|\vec{x}\|\sin\alpha = \pm\omega r \qquad (3.3.17)$$

bağıntısı geçerlidir. Buradan, $\vec{v}$ nin gerçekten $\vec{d}$ ekseni etrafında $\pm d$ açısal hızı ile dönmede X noktasının hız vektörü olduğu sonucu elde edilir. Burada $\vec{d}$ nin yönü dönme yönü ile ilişkilendirilebilir. Bu sebepten $\vec{\psi}$ vektörüne, bir parametreli D_I dönme hareketimizin t anındaki dönme vektörü diyebiliriz.

Böylece aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.3.1. Bir parametreli bir D_I dönme hareketinde, t anında, hareketli sistemin her X noktası için sonsuz küçük bir dönme hareketi meydana gelir. Bu dönme hareketinde $\vec{\psi}$ Pfaff vektörü Darboux dönme vektörünün rolünü oynar. Burada X noktasının $d_f\vec{x}$ ilerleme vektörü $(3.3.13)$ ile verilmiştir[10].

Şimdi $\vec{\psi}$ dönme vektörü doğrultusunda bir $\vec{p}$ birim vektörünü hesaplara dahil edelim.

$$\vec{p}^{\,2}=1 \tag{3.3.18}$$

olduğundan dolayı

$$\vec{\psi}=\vec{p}\sqrt{\psi_1^2+\psi_2^2+\psi_3^2} \tag{3.3.19}$$

dir, burada

$$\psi=\pm\left\|\vec{\psi}\right\|=\sqrt{\psi_1^2+\psi_2^2+\psi_3^2} \tag{3.3.20}$$

dt zaman aralığında dönmeyi meydana getiren sonsuz küçük dönme açısını gösterir. $\overrightarrow{OP}=\vec{p}$ ile birim küre üzerinde gösterilen P noktası ani dönme polüdür. Yani P noktası gerçekte, sürüklenme hızının sıfır olması ile karakterize edilmiştir. Gerçekten $(3.3.13)$ e göre,

$$\vec{\psi}\wedge\vec{x}=0 \quad , \quad \vec{x}^{\,2}=1 \tag{3.3.21}$$

şartı ancak

$$\vec{x}=\pm\vec{p} \tag{3.3.22}$$

olduğu zaman sağlanır. P dönme polü ile onun $\hat{P}$ karşı noktası t anında sabit kalırlar. Bundan sonra kürenin iki karşı noktasından sadece birini dikkate alınacaktır.

$\vec{\psi}$ ve $\vec{x} = \overrightarrow{OX}$ vektörleri, birim kürenin P, $\hat{P}$ ve X noktalarından geçerek onu bir büyük dairesi boyunca kesen bir düzlem meydana getirirler. X noktası H de belirlenmişse, $(3.3.13)$ gereğince X in $d_f \vec{x}$ ilerleme doğrultusu bu büyük daireye dik olur. Böylece, aşağıdaki teoremler verilebilir.

Teorem 3.3.2. Bir parametreli bir harekette küre üzerinde, her anda, sürüklenme hızları sıfır olan bir çift P, $\hat{P}$ karşı nokta (P dönme polü ve onun $\hat{P}$ karşı noktası) vardır. Yani bu noktalar, t anında her iki küre yüzeyi üzerinde sabit kalırlar[10].

Teorem 3.3.3. Hareketli H küresinin her noktası, t anında P polü (ve onun $\hat{P}$ karşı noktası) etrafında, $\psi : dt$ açısal hızı ile bir dönme hareketi (ani dönme hareketi) yapar. O halde küre üzerindeki bir parametreli hareket t anında H küre yüzeyinin tamamının H' sabit küresine göre böyle bir dönmesinden ibaret olur[10].

Teorem 3.3.4. Bir parametreli bir küre hareketinde H hareketli küresinin bir X noktası H' sabit küresi üzerinde, küresel yörünge normali her defasında P dönme polünden (ve onun $\hat{P}$ karşı noktasından) geçen bir yörünge çizer[10].

3. 4. Kanonik İzafi Sistemi, Pol Eğrilerinin Yuvarlanması

Şimdi izafi sisteminin

$$\vec{p} = \vec{r_3} \qquad (3.4.1)$$

olacak şekilde bir özel seçimini hesaplayalım. Böylece $\vec{p}$, $\vec{r_1}$ ve $\vec{r_2}$ ye diktir. Dolayısıyla

$$\langle \vec{\psi}, \vec{r_1} \rangle = \psi_1 = 0 , \qquad \langle \vec{\psi}, \vec{r_2} \rangle = \psi_2 = 0 \qquad (3.4.2)$$

dır. Bu şartlar da

$$\psi_i = \omega_i' - \omega_i \tag{3.4.3}$$

olduğundan dolayı

$$\omega_1 = \omega_1' \quad , \quad \omega_2 = \omega_2' \tag{3.4.4}$$

şartlarına eşdeğerdir. O halde ani dönmenin sonsuz küçük dönme açısı

$$\psi = \psi_3 \tag{3.4.5}$$

şeklinde olur. Böylece ani dönme vektörü

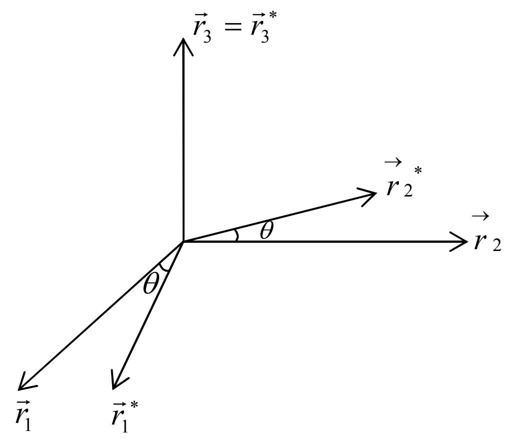
$$\vec{\psi} = \psi_3 \vec{r_3} = \left(\omega_3' - \omega_3\right)\vec{r_3} \tag{3.4.6}$$

dır. Bundan sonra daima

$$\psi_3 \neq 0 \tag{3.4.7}$$

kabul edilecektir.

İzafi sistemi $(3.4.1)$ şartıyla henüz tek anlamlı olarak tespit edilmiş değildir. Çünkü $(3.4.1)$ şartına uygun olarak elde edilen sistem, $\vec{r_3}$ ekseni etrafında keyfi olarak döndürülebilir. Şimdi bu serbestiyet derecesini $\vec{r_1}$ ve $\vec{r_2}$ yi özel şekilde seçmek için kullanalım. Bu amaçla elde edilen sistemi $\vec{p} = \vec{r_3}$ ekseni etrafında θ açısı kadar döndürelim (Şekil 3.4.1). Bu takdirde



Şekil 3.4.1 Dönme eksenleri

$$\begin{aligned} \overrightarrow{r_1^*} &= \cos\theta\, \overrightarrow{r_1} + \sin\theta\, \overrightarrow{r_2}, \\ \overrightarrow{r_2^*} &= -\sin\theta\, \overrightarrow{r_1} + \cos\theta\, \overrightarrow{r_2}, \\ \overrightarrow{r_3^*} &= \overrightarrow{r_3} \end{aligned} \tag{3.4.8}$$

bağıntıları yazılabilir. Burada döndürülmüş olan üçayaklı, $\left\{O; \overrightarrow{r_1^*}, \overrightarrow{r_2^*}, \overrightarrow{r_3^*}\right\}$ ile gösterilmiştir. Bu yeni sistem için $(3.2.10)$ ve $(3.2.11)$ formüllerine karşılık gelen türev denklemleri

$$d\overrightarrow{r_i^*} = \omega_k^* \overrightarrow{r_j^*} - \omega_j^* \overrightarrow{r_k^*} \quad , \quad d'\overrightarrow{r_i^*} = \omega_k'^* \overrightarrow{r_j^*} - \omega_j'^* \overrightarrow{r_k^*} \tag{3.4.9}$$
$$\left(i, j, k = 1,2,3; 2,3,1; 3,1,2\right)$$

dir. Şimdi ω lardan ω^* ların nasıl hesap edileceğini, yani sistemin θ açısı kadar dönmesinde ω ların ω^* lara ne şekilde dönüştüğünü inceleyelim. Eğer $(3.2.12)$ göz önüne alınırsa

$$d\overrightarrow{r_1^*} = \left(-\sin\theta \overrightarrow{r_1} + \cos\theta \overrightarrow{r_2}\right)\left(\omega_3 + d\theta\right) - \left(-\omega_1 \sin\theta + \omega_2 \cos\theta\right)\overrightarrow{r_3} \tag{3.4.10}$$

yazılabilir. Bu da $(3.4.8)$ den dolayı,

$$d\overrightarrow{r_1^*} = (\omega_3 + d\theta)\overrightarrow{r_2^*} - (-\omega_1 \sin\theta + \omega_2 \cos\theta)\overrightarrow{r_3} \qquad (3.4.11)$$

şeklinde yazılabilir. Diğer taraftan $(3.4.9)$ a göre

$$d\overrightarrow{r_1^*} = \omega_3^* \overrightarrow{r_2^*} - \omega_2^* \overrightarrow{r_3^*} \qquad (3.4.12)$$

dir. Bu son iki denklemdeki katsayılar karşılaştırılırsa,

$$\omega_2^* = -\omega_1 \sin\theta + \omega_2 \cos\theta \quad , \qquad \omega_3^* = \omega_3 + d\theta \qquad (3.4.13)$$

bağıntıları bulunur. Benzer şekilde hareket edilerek $d\overrightarrow{r_3^*}$ nin iki ifade şekli oluşturulur ve yine katsayıları karşılaştırılarak,

$$\omega_1^* = \omega_1 \cos\theta + \omega_2 \sin\theta \qquad (3.4.14)$$

bağıntısı bulunur. Demek ki, eksen takımının böyle bir dönmesinde, Pfaff formları aynı $\overrightarrow{r_1}$, $\overrightarrow{r_2}$ birim vektörleri gibi dönüşürler.

Şimdi izafi sistemimizi normlamak için θ dönme açısını,

$$\omega_1^* = \omega_1 \cos\theta + \omega_2 \sin\theta = 0 \qquad (3.4.15)$$

bağıntısı sağlanacak şekilde seçelim. Bu θ dönme açısı için bir şart denklemini gösterir. Şimdi yardımcı sistemi $\overrightarrow{r_3}$ etrafında yukarıdaki şart denklemini sağlayan θ açısı kadar döndürülmüş olarak kabul edelim ve bu döndürülmüş sistemin gösterilmesindeki $(*)$ yıldızları tekrar kaldıralım.

Böylece kanonik izafi sistemimize ait türev denklemlerinin sistemi $(3.4.4)$ ve $(3.4.15)$ den dolayı aşağıdaki şekilde olur.

H ye göre değişmeler için

$$\begin{aligned} d\vec{r_1} &= \omega_3 \vec{r_2} - \omega_2 \vec{r_3}, \\ d\vec{r_2} &= -\omega_3 \vec{r_1}, \\ d\vec{r_3} &= \omega_2 \vec{r_1} \end{aligned} \qquad (3.4.16)$$

ve H' ye göre değişmeler için de

$$\begin{aligned} d'\vec{r_1} &= \omega_3' \vec{r_2} - \omega_2 \vec{r_3}, \\ d'\vec{r_2} &= -\omega_3' \vec{r_1}, \\ d'\vec{r_3} &= \omega_2 \vec{r_1} \end{aligned} \qquad (3.4.17)$$

bağıntıları geçerli olur.

$\vec{p} = \vec{r_3}$ vektörü hareketli H küresi üzerinde, bir parametreli D_I hareketinin hareketli pol eğrisi diyeceğimiz bir (P) eğrisi çizer. $(3.4.16)$ nın son formülüne göre $\vec{r_1}$ vektörü (P) nin P noktasındaki teğet birim vektörü olur ve $\omega_2 = ds$ de (P) nin yay elementini ifade eder.

$\vec{p} = \vec{r_3}$ vektörünün uç noktası aynı şekilde K' küresi üzerinde, P noktasındaki birim teğeti $\vec{r_1}$ ve yay elementi $\omega_2 = ds'$ olan, (P') sabit pol eğrisini çizer.

Böylece aşağıdaki teoremler verilebilir.

Teorem 3.4.1. P dönme polü hareketli ve sabit küreler üzerinde, sırasıyla, (P) ve (P') pol eğrilerini çizerken sahip olduğu hız vektörleri daima birbirinin aynıdır[10].

Teorem 3.4.2. Bir parametreli küresel bir D_I hareketinde, H nın küresel (P) hareketli pol eğrisi H' nün (P') sabit pol eğrisi üzerinde kaymaksızın yuvarlanır[10].

BÖLÜM 4. $\mathbb{D}$ -MODÜL'DE BİR PARAMETRELİ HAREKETLER

4. 1. Dual Küre Üzerindeki Bir Hareketin Gösterilmesi

$\mathbb{R}^3$ de sabit ve hareketli sistemler, sırasıyla, H' ve H olsun. H' ve H sistemlerinin ortonormal koordinat sistemleri de, sırasıyla, $\left\{O'; \overrightarrow{e_1'}, \overrightarrow{e_2'}, \overrightarrow{e_3'}\right\}$ ve $\left\{O; \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\right\}$ ve

$$\left\langle \overrightarrow{e_i'}, \overrightarrow{e_j'} \right\rangle = \left\langle \overrightarrow{e_i}, \overrightarrow{e_j} \right\rangle = \delta_{ij} \qquad 1 \leq i, j \leq 3,$$

olsun. H' ve H aynı şekilde yönlendirilmiş olsun. Yani bir has ortogonal dönüşümle birinden diğerine geçilebilsin. H' sistemini sabit olma gibi bir ayrıcalıktan kurtarmak için H nın H' ye göre H/H' hareketi, hem H' ye hem de H ya göre hareket eden H_1 sistemine oranlanır. Bu üçüncü sisteme izafi sistemi denir. H_1 deki ortonormal koordinat sistemi

$$\left\{Q; \overrightarrow{r_1}, \overrightarrow{r_2}, \overrightarrow{r_3}\right\} \qquad , \qquad \left\langle \overrightarrow{r_i}, \overrightarrow{r_j} \right\rangle = \delta_{ij} \qquad 1 \leq i, j \leq 3$$

olsun ve H_1, H' ve H ile aynı şekilde yönlendirilmiş olsun.

Teorem 2.2.26 gereğince $\overrightarrow{e_i'}$, $\overrightarrow{e_i}$, $\overrightarrow{r_i}$, $(1 \leq i \leq 3)$, eksenlerine $\mathbb{D}$-Modülde, sırasıyla, aynı $\widetilde{M}$ merkezli K, K' ve K_1 birim dual kürelerinin dual noktaları karşılık geleceğinden H_1/H', H_1/H dolayısıyla H/H' hareketleri, sırasıyla, K_1/K', K_1/K ve K/K' dual küresel hareketler veya dual dönme hareketleri olarak incelenebilir.

K', K ve K_1 birim dual kürelerinin ortak merkezi $\widetilde{M}$ olsun. Bu birim dual küreye sıkı sıkıya bağlı ortonormal baz sistemleri de, sırasıyla

$$\left\{\widetilde{M};\ \overrightarrow{\widetilde{E}'_1}, \overrightarrow{\widetilde{E}'_2}, \overrightarrow{\widetilde{E}'_3}\right\}\ ,\ \left\{\widetilde{M};\ \overrightarrow{\widetilde{E}_1}, \overrightarrow{\widetilde{E}_2}, \overrightarrow{\widetilde{E}_3}\right\}\quad \text{ve}\quad \left\{\widetilde{M};\ \overrightarrow{\widetilde{R}_1}, \overrightarrow{\widetilde{R}_2}, \overrightarrow{\widetilde{R}_3}\right\}$$

olsun, burada

$$\overrightarrow{\widetilde{E}'_i} = \overrightarrow{e'_i} + \varepsilon\, \overrightarrow{e'^{*}_i}\ ,\qquad \overrightarrow{\widetilde{E}_i} = \overrightarrow{e_i} + \varepsilon\, \overrightarrow{e^{*}_i}\ ,\ \overrightarrow{\widetilde{R}_i} = \overrightarrow{r_i} + \varepsilon\, \overrightarrow{r^{*}_i}\quad ,\ 1 \le i \le 3$$

$$\overrightarrow{e'^{*}_i} = \overrightarrow{\widetilde{M}O'} \wedge \overrightarrow{e'_i}\quad ,\qquad \overrightarrow{e^{*}_i} = \overrightarrow{\widetilde{M}O} \wedge \overrightarrow{e_i}\ ,\qquad \overrightarrow{r^{*}_i} = \overrightarrow{\widetilde{M}Q} \wedge \overrightarrow{r_i}$$

dırlar. Bu baz sistemleri de aynı yönlü olurlar. Yani bir has dual ortogonal dönüşümle birinden diğerine geçilebilir. O halde bu dönüşümler, $\widetilde{M}$ etrafındaki dual dönmelerdir.

$\widetilde{A} = \left[\widetilde{A_{ij}}\right]$ ve $\widetilde{A}' = \left[\widetilde{A'_{ij}}\right]$ 3×3 tipinde has ortogonal dual matrisler olmak üzere

$$\widetilde{E} = \widetilde{A}\,\widetilde{R} \quad \text{ve} \quad \widetilde{E}' = \widetilde{A}'\,\widetilde{R} \qquad (4.1.1)$$

yazılabilir, burada

$$\widetilde{R} = \begin{bmatrix} \overrightarrow{\widetilde{R}_1} \\ \overrightarrow{\widetilde{R}_2} \\ \overrightarrow{\widetilde{R}_3} \end{bmatrix},\quad \widetilde{E} = \begin{bmatrix} \overrightarrow{\widetilde{E}_1} \\ \overrightarrow{\widetilde{E}_2} \\ \overrightarrow{\widetilde{E}_3} \end{bmatrix}\quad ,\quad \widetilde{E}' = \begin{bmatrix} \overrightarrow{\widetilde{E}'_1} \\ \overrightarrow{\widetilde{E}'_2} \\ \overrightarrow{\widetilde{E}'_3} \end{bmatrix}$$

dual sütun matrisleridir.

$\widetilde{A}$ ve $\widetilde{A}'$ has ortogonal dual matrislerinin elemanları $\tilde{t} = t + \varepsilon t^*$ dual parametresinin yeteri kadar türetilebilen fonksiyonlarıdır. Burada aksi söylenmedikçe $t^* = 0$ alınacaktır. Böylece bir parametreli hareketler söz konusudur.

$\widetilde{A}$ ve $\widetilde{A}'$ has dual ortogonal matrisler olduklarından

$$\widetilde{A}^{\mathrm{T}}\,\widetilde{A} = \mathrm{I} \ \text{ ve } \ \widetilde{A}'^{\mathrm{T}}\,\widetilde{A}' = \mathrm{I} \tag{4.1.2}$$

dır. O halde t reel parametresine göre diferansiyel alınırsa

$$d\widetilde{A}^{\mathrm{T}}\,\widetilde{A} + \widetilde{A}^{\mathrm{T}}\,d\widetilde{A} = 0$$

elde edilir. Buradan

$$d\widetilde{A}^{\mathrm{T}}\,\widetilde{A} = -\left(d\widetilde{A}^{\mathrm{T}}\,\widetilde{A}\right)^{\mathrm{T}}$$

yazılabileceğinden dolayı

$$\widetilde{\Omega} = d\widetilde{A}^{\mathrm{T}}\,\widetilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & \widetilde{\Omega}_3 & -\widetilde{\Omega}_2 \\ -\widetilde{\Omega}_3 & 0 & \widetilde{\Omega}_1 \\ \widetilde{\Omega}_2 & -\widetilde{\Omega}_1 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.1.3}$$

dual matrisi, bir anti-simetrik matristir. Benzer şekilde,

$$\widetilde{\Omega}' = d\widetilde{A}'^{\mathrm{T}}\,\widetilde{A}' = \begin{bmatrix} 0 & \widetilde{\Omega}'_3 & -\widetilde{\Omega}'_2 \\ -\widetilde{\Omega}'_3 & 0 & \widetilde{\Omega}'_1 \\ \widetilde{\Omega}'_2 & -\widetilde{\Omega}'_1 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.1.4}$$

dır, burada

$$\widetilde{\Omega}_i = \omega_i + \mathcal{E}\,\omega_i^* \ \text{ ve } \ \widetilde{\Omega}'_i = \omega'_i + \mathcal{E}\,\omega_i'^* \qquad , \qquad 1 \le i \le 3\,,$$

şeklinde dual Pfaff formları (1-formlar) dır.

K_1/K ve K_1/K' dual dönmelerinde $\overrightarrow{\widetilde{R}_i}$ ortonormal dual baz vektörlerinin değişimleri incelenirse, $(4.1.1)$ denkleminden

$$\widetilde{R} = \widetilde{A}^{\mathrm{T}}\, \widetilde{E} \;\text{ ve }\; \widetilde{R} = \widetilde{A'}^{\mathrm{T}}\, \widetilde{E'}$$

yazılabileceğinden, K_1/K bir parametreli dual dönme hareketi için

$$d\widetilde{R} = d\widetilde{A}^{\mathrm{T}}\, \widetilde{E} + \widetilde{A}^{\mathrm{T}} \underbrace{d\widetilde{E}}_{0} = d\widetilde{A}^{\mathrm{T}}\, \widetilde{A}\, \widetilde{R} = \widetilde{\Omega}\, \widetilde{R} \qquad (4.1.5)$$

elde edilir. Benzer şekilde K_1/K' dual dönme hareketleri için, değişimler "d'" ile gösterilirse

$$d'\widetilde{R} = \widetilde{\Omega'}\, \widetilde{R} \qquad (4.1.6)$$

dır.

$(4.1.5)$ ve $(4.1.6)$ denklemleri reel ve dual kısımlarına ayrılırsa, reel kısımlar, sırasıyla, H_1/H ve H_1/H' bir parametreli uzay hareketlerinin, dönme kısmı ile ilgili Pfaff formlarını verir. Genellikle $\mathbb{R}^3$ de her H/H' hareketi ile bir "D" dönme ve bir "S" kayma hareketi ilgilidir.

K_1 birim dual küresi üzerindeki bir $\widetilde{X}$ noktası

$$\overrightarrow{\widetilde{X}} = \widetilde{X}^{\mathrm{T}}\, \widetilde{R} \qquad (4.1.7)$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada $\widetilde{X}$ noktasının, $\left\{\widetilde{M}; \overrightarrow{\widetilde{R}_1}, \overrightarrow{\widetilde{R}_2}, \overrightarrow{\widetilde{R}_3}\right\}$ izafi sistemine göre koordinatları

$$\widetilde{X}_1^2+\widetilde{X}_2^2+\widetilde{X}_3^2=(1,0) \quad , \quad \widetilde{X}_i=x_i+\mathcal{E}\,x_i^* \quad , \quad 1\le i\le 3$$

dır ve

$$\widetilde{X}=\begin{bmatrix}\widetilde{X}_1\\ \widetilde{X}_2\\ \widetilde{X}_3\end{bmatrix}$$

şeklinde bir dual sütun matristir.

$\widetilde{X}$ noktası, K_1 birim dual küresinin keyfi hareketli bir noktası olsun. K_1/K ve K_1/K' dual dönmelerine göre $\vec{\widetilde{X}}$ birim dual vektörünün değişimleri, sırasıyla,

$$d\vec{\widetilde{X}}=d\widetilde{X}^{\mathrm{T}}\,\widetilde{R}+\widetilde{X}^{\mathrm{T}}\,d\widetilde{R}, \quad d\widetilde{R}=\widetilde{\Omega}\,\widetilde{R}, \quad \widetilde{\Omega}=d\widetilde{A}^{\mathrm{T}}\,\widetilde{A}$$

ve

$$d'\vec{\widetilde{X}}=d\widetilde{X}^{\mathrm{T}}\,\widetilde{R}+\widetilde{X}^{\mathrm{T}}\,d'\widetilde{R}, \quad d'\widetilde{R}=\widetilde{\Omega}'\,\widetilde{R}, \quad \widetilde{\Omega}'=d\widetilde{A}'^{\mathrm{T}}\,\widetilde{A}'$$

dir. $(4.1.5)$ ve $(4.1.6)$ formüllerinden de, bu değişimler için, sırasıyla,

$$d\vec{\widetilde{X}}=\left(d\widetilde{X}^{\mathrm{T}}+\widetilde{X}^{\mathrm{T}}\,\widetilde{\Omega}\right)\widetilde{R} \qquad (4.1.8)$$

ve

$$d'\vec{\widetilde{X}}=\left(d\widetilde{X}^{\mathrm{T}}+\widetilde{X}^{\mathrm{T}}\,\widetilde{\Omega}'\right)\widetilde{R} \qquad (4.1.9)$$

elde edilir.

X noktasının K ve K' birim dual küreleri üzerinde sabit kalma koşulları, sırasıyla, $d\vec{\widetilde{X}} = 0$ ve $d'\vec{\widetilde{X}} = 0$ olacağından bu koşullar için

$$d\widetilde{X}^{\mathrm{T}} = \widetilde{X}^{\mathrm{T}}\widetilde{\Omega}^{\mathrm{T}} \quad \text{ve} \quad d\widetilde{X}^{\mathrm{T}} = \widetilde{X}^{\mathrm{T}}\widetilde{\Omega}'^{\mathrm{T}}$$

veya

$$d\widetilde{X} = \widetilde{\Omega}\widetilde{X} \quad \text{ve} \quad d\widetilde{X} = \widetilde{\Omega}'\widetilde{X} \qquad (4.1.10)$$

ifadeleri elde edilir.

Şimdi $\widetilde{X}$ noktası K üzerinde sabit kabul edilsin. Yani $\vec{\widetilde{X}}$ doğrusu H da sabit olsun. O halde K/K' hareketinde $\vec{\widetilde{X}}$ in K' ye göre $d_f\vec{X}$ ile gösterilen değişimi, $(4.1.9)$ denkleminde $d\widetilde{X}^{\mathrm{T}} = -\widetilde{X}^{\mathrm{T}}\widetilde{\Omega}$ koymakla elde edilir. Böylece

$$d_f\vec{\widetilde{X}} = \widetilde{X}^{\mathrm{T}}\left(\widetilde{\Omega}' - \widetilde{\Omega}\right)\widetilde{R} \qquad (4.1.11)$$

dir.

Bileşenleri

$$\widetilde{\Psi}_i = \widetilde{\Omega}'_i - \widetilde{\Omega}_i \quad , \quad 1 \leq i \leq 3$$

olan yeni bir

$$\vec{\widetilde{\Psi}} = \vec{\psi} + \varepsilon\vec{\psi^*}$$

dual vektörü göz önüne alınırsa,

$$d_f \vec{\tilde{X}} = \vec{\tilde{\Psi}} \wedge \vec{\tilde{X}} \qquad (4.1.12)$$

şeklinde yazılabilir.

$\vec{\tilde{\Psi}}$ dual vektörüne K/K' hareketinin ani dual Pfaff vektörü de denir. $\vec{\tilde{\Psi}}$ nün $\vec{\psi}$ reel ve $\overrightarrow{\psi^*}$ dual kısımları K/K' dual dönme hareketine karşılık gelen H/H' uzay hareketinin, sırasıyla, ani dönme ve ani kayma Pfaff vektörlerine karşılık gelirler. Hareketin, sırf dönme ve sırf kayma olmaması için aksi söylenmedikçe $\vec{\psi} \neq \vec{0}$ ve $\overrightarrow{\psi^*} \neq \vec{0}$ alınacaktır.

$$\vec{\psi} \neq \vec{0}$$

olmak üzere,

$$\vec{\tilde{\Psi}} = \left\| \vec{\tilde{\Psi}} \right\| \vec{\tilde{P}}$$

şeklinde yazılabildiğinden,

$$\vec{\tilde{P}} = \vec{p} + \mathcal{E}\, \overrightarrow{p^*}$$

birim dual vektörü ± 1 çarpan farkı ile tek anlamlı olarak belirlenmiş olur. Burada

$$\left\| \vec{\tilde{\Psi}} \right\| = \psi + \mathcal{E}\, \psi^* = \tilde{\Psi}$$

ani dual dönme açısıdır.

$\vec{\tilde{\Psi}}$ ani dual dönme vektörü ile birim dual kürenin ani dual dönmesi belli olur. Bu dual dönme, $\tilde{P}$ dönme polü etrafında $\tilde{\Psi}$ dual ani dönme açısı ile oluşur.

$\overrightarrow{\widetilde{\Psi}}$ dual vektörü $\mathbb{R}^3$ çizgiler uzayında $\widetilde{P}$ ekseni etrafında oluşan ani helis hareketini belirtir. Burada ψ, $\widetilde{P}$ etrafında sonsuz küçük dönme açısını ve ψ^* da $\overrightarrow{\widetilde{P}}$ boyunca sonsuz küçük kayma uzunluğunu gösterir. Bu ani helis hareketinin adımı

$$k = \frac{\left\langle \overrightarrow{\psi}, \overrightarrow{\psi^*} \right\rangle}{\left\langle \overrightarrow{\psi}, \overrightarrow{\psi} \right\rangle} = \frac{\psi^*}{\psi}$$

dır.

Böylece aşağıdaki teoremler verilebilir.

Teorem 4.1.1. Bir t anında bir parametreli H/H' hareketi, H hareketli sisteminin H' sabit sistemine göre $\overrightarrow{\widetilde{P}}$ ani helis ekseni etrafında k adımlı sonsuz küçük bir ani helisel hareketinden ibarettir[9].

Teorem 4.1.2. Bir parametreli H/H' uzay hareketinde H nın $\left(\infty^3\right)$ noktası H' de yörüngeler çizer. Bu noktalardaki ani yörünge normalleri devamlı bir lineer ışın kompleksi oluştururlar[9].

Teorem 4.1.3. Bir parametreli H/H' hareketinde, H' nün bir doğrusu H nın bir noktasının yörüngesini dik olarak keserse, bu doğru aynı zamanda H ya ait düşünülen, kendisinin bütün noktalarının yörüngeleri için de normal olur[9].

Ani helis hareketine bağlı lineer ışın kompleksinin denklemi

$$\left\langle \overrightarrow{\psi}, \overrightarrow{x^*} \right\rangle + \left\langle \overrightarrow{\psi^*}, \overrightarrow{x} \right\rangle = 0$$

dır ve bu kompleksin adımı da

$$k = \frac{\psi^*}{\psi}$$

dır. $k = 0$ için, ani helis hareketi $\tilde{\vec{P}}$ ekseni etrafındaki sırf dönmeye dejenere olur. Helis hareketine ait ışın kompleksi de dejenere olarak ekseni $\tilde{\vec{P}}$ olan ışın demetinden ibaret olur.

$\vec{\psi} = 0$ için $(4.1.12)$ ifadesi reel ve dual kısımlarına ayrılırsa

$$d_f \vec{X} = \vec{0} \text{ ve } d_f \vec{X^*} = \vec{\psi^*} \wedge \vec{x}$$

olduğu görülür. Buradan H/H' hareketinde $\tilde{\vec{X}}$ doğrusunun kendi doğrultusunu değiştirmediği sonucuna varılır. Demek ki $\vec{\psi} = \vec{0}$ olması "S" kayma hareketlerini karakterize eder.

4. 2. Kanonik Koordinat Sistemi ve Eksen Yüzeyleri

$k \neq 0$ koşulu altında $\tilde{\vec{P}} = \widetilde{\vec{R_3}}$ olacak şekilde yeni bir izafi sistemi seçilmiş olsun. $\tilde{\vec{P}} = \widetilde{\vec{R_3}}$ olması,

$$\widetilde{\Psi_1} = 0 \quad , \quad \widetilde{\Psi_2} = 0 \Rightarrow \widetilde{\Omega_1'} = \widetilde{\Omega_1} \quad , \quad \widetilde{\Omega_2'} = \widetilde{\Omega_2}$$

olmasını gerektirir. Bu takdirde hareketin adımı

$$k = \frac{\psi_3^*}{\psi_3}$$

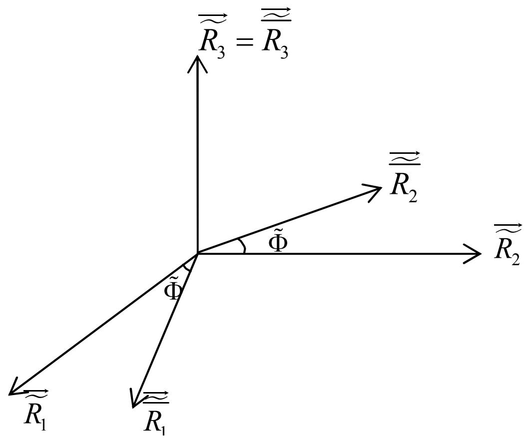
olur.

Seçilen izafi sistemi $\overrightarrow{\widetilde{P}} = \overrightarrow{\widetilde{R}}_3$ koşulu ile tek anlamlı olarak belirlenmemiştir. Çünkü bu sistemin $\overrightarrow{\widetilde{R}}_3$ etrafında keyfi olarak dönebilme olanağı vardır. Yani $\left\{Q; \vec{r}_i, 1 \le i \le 3\right\}$ izafi sistemi $\widetilde{P}$ ekseni etrafında helisel hareket yapabilir. Bu serbestiyet derecesi $\overrightarrow{\widetilde{R}}_1$ ve $\overrightarrow{\widetilde{R}}_2$ nin özel olarak seçilmesi için kullanışlıdır.

$\overrightarrow{\widetilde{R}}_1$ ve $\overrightarrow{\widetilde{R}}_2$ eksenleri $\overrightarrow{\widetilde{R}}_3$ etrafında $\widetilde{\Phi} = \varphi + \mathcal{E}\,\varphi^*$ dual açısı kadar aynı yönde döndürülsün ve yeni sistem $\left\{\widetilde{M}; \overrightarrow{\widetilde{\widetilde{R}}}_i, 1 \le i \le 3\right\}$ ile gösterilsin (Şekil 4.2.1). Bu sistem için

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\widetilde{\widetilde{R}}}_1 &= \cos\widetilde{\Phi}\,\overrightarrow{\widetilde{R}}_1 + \sin\widetilde{\Phi}\,\overrightarrow{\widetilde{R}}_2, \\
\overrightarrow{\widetilde{\widetilde{R}}}_2 &= -\sin\widetilde{\Phi}\,\overrightarrow{\widetilde{R}}_1 + \cos\widetilde{\Phi}\,\overrightarrow{\widetilde{R}}_2, \\
\overrightarrow{\widetilde{\widetilde{R}}}_3 &= \overrightarrow{\widetilde{R}}_3
\end{aligned} \tag{4.2.1}$$

bağıntıları yazılabilir.



Şekil 4.2.1 Dual dönme eksenleri

$$\widetilde{B}\,\widetilde{B}^{\mathrm{T}} = \mathrm{I} \text{ ve } \widetilde{B'}\,\widetilde{B'}^{\mathrm{T}} = \mathrm{I}$$

olmak üzere

$$\tilde{\tilde{R}} = \tilde{B}\,\tilde{E} \text{ ve } \tilde{\tilde{R}} = \tilde{B}'\,\tilde{E}'$$

olarak ifade edilebilir. $\vec{\tilde{\tilde{R}}}_i$, $(1 \le i \le 3)$, birim dual vektörlerinin $\tilde{E}$ ve $\tilde{E}'$ sistemlerine göre değişimleri, sırasıyla,

$$d\tilde{\tilde{R}} = d\tilde{B}^{\mathrm{T}}\,\tilde{B}\,\tilde{\tilde{R}} \quad , \quad d'\tilde{\tilde{R}} = d\tilde{B}'^{\mathrm{T}}\,\tilde{B}'\,\tilde{\tilde{R}}$$

veya

$$\tilde{\tilde{\Omega}} = d\tilde{B}^{\mathrm{T}}\,\tilde{B} \quad , \quad \tilde{\tilde{\Omega}}' = d\tilde{B}'^{\mathrm{T}}\,\tilde{B}'$$

denirse,

$$d\tilde{\tilde{R}} = \tilde{\tilde{\Omega}}\,\tilde{\tilde{R}} \text{ ve } d'\tilde{\tilde{R}} = \tilde{\tilde{\Omega}}'\,\tilde{\tilde{R}}$$

dir. Burada bilindiği gibi $\tilde{\tilde{\Omega}}$ ve $\tilde{\tilde{\Omega}}'$ anti-simetrik dual matrislerdir.

$$d\tilde{R} = \tilde{\Omega}\,\tilde{R} \quad \text{ve} \quad d'\tilde{R} = \tilde{\Omega}'\,\tilde{R}$$

olduklarından,

$$\vec{\tilde{\tilde{R}}}_1 = \cos\tilde{\Phi}\,\vec{\tilde{R}}_1 + \sin\tilde{\Phi}\,\vec{\tilde{R}}_2$$
$$\vec{\tilde{\tilde{R}}}_3 = \vec{\tilde{R}}_3$$

ifadelerinden diferensiyel alarak, $\tilde{\tilde{\Omega}}_1$, $\tilde{\tilde{\Omega}}_2$ ve $\tilde{\tilde{\Omega}}_3$ dual 1-formları $\tilde{\Omega}_1$, $\tilde{\Omega}_2$ ve $\tilde{\Omega}_3$ dual 1-formlar cinsinden ifade edilebilir. (4.2.1) denkleminden

$$d\vec{\tilde{\tilde{R}}}_1 = \cos\tilde{\Phi}\,d\vec{\tilde{R}}_1 - d\tilde{\Phi}\sin\tilde{\Phi}\,\vec{\tilde{R}}_1 + \sin\tilde{\Phi}\,d\vec{\tilde{R}}_2 + d\tilde{\Phi}\cos\tilde{\Phi}\,\vec{\tilde{R}}_2$$

yazılabilir. Son denklem ve (4.1.5) denkleminden

$$\begin{aligned}
\overline{\widetilde{\Omega}_3}\,\overrightarrow{\overline{\widetilde{R}_2}} - \overline{\widetilde{\Omega}_2}\,\overrightarrow{\overline{\widetilde{R}_3}} &= \cos\widetilde{\Phi}\left(\widetilde{\Omega}_3\,\overrightarrow{\widetilde{R}_2} - \widetilde{\Omega}_2\,\overrightarrow{\widetilde{R}_3}\right) - d\widetilde{\Phi}\sin\widetilde{\Phi}\,\overrightarrow{\widetilde{R}_1} \\
&\quad + d\widetilde{\Phi}\cos\widetilde{\Phi}\,\overrightarrow{\widetilde{R}_2} + \sin\widetilde{\Phi}\left(-\widetilde{\Omega}_3\,\overrightarrow{\widetilde{R}_1} + \widetilde{\Omega}_1\,\overrightarrow{\widetilde{R}_3}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overline{\widetilde{\Omega}_3}\left(-\sin\widetilde{\Phi}\,\overrightarrow{\widetilde{R}_1} + \cos\widetilde{\Phi}\,\overrightarrow{\widetilde{R}_2}\right) - \overline{\widetilde{\Omega}_2}\,\overrightarrow{\overline{\widetilde{R}_3}} &= \left(-\sin\widetilde{\Phi}\,\widetilde{\Omega}_3 - d\widetilde{\Phi}\sin\widetilde{\Phi}\right)\overrightarrow{\widetilde{R}_1} \\
&\quad + \left(\cos\widetilde{\Phi}\,\widetilde{\Omega}_3 + d\widetilde{\Phi}\cos\widetilde{\Phi}\right)\overrightarrow{\widetilde{R}_2} \\
&\quad + \left(-\cos\widetilde{\Phi}\,\widetilde{\Omega}_2 + \sin\widetilde{\Phi}\,\widetilde{\Omega}_1\right)\overrightarrow{\widetilde{R}_3}
\end{aligned}$$

bulunur. Bu takdirde son eşitlikten

$$\begin{aligned}
\overline{\widetilde{\Omega}_2} &= \cos\widetilde{\Phi}\,\widetilde{\Omega}_2 - \sin\widetilde{\Phi}\,\widetilde{\Omega}_1 \\
\overline{\widetilde{\Omega}_3} &= \widetilde{\Omega}_3 + d\widetilde{\Phi}
\end{aligned}$$

olduğu açıktır. $\overrightarrow{\overline{\widetilde{R}_3}} = \overrightarrow{\widetilde{R}_3}$ için de benzer işlemler yapılırsa

$$\overline{\widetilde{\Omega}_1} = \cos\widetilde{\Phi}\,\widetilde{\Omega}_1 + \sin\widetilde{\Phi}\,\widetilde{\Omega}_2$$

elde edilir. $\overline{\widetilde{\Omega}_1} = 0$ olacak şekilde $\widetilde{\Phi} = \varphi + \mathcal{E}\varphi^*$ dual açısını belirlemek mümkündür:

$$\begin{aligned}
\overline{\widetilde{\Omega}_1} = 0 \Rightarrow \overline{\omega_1} &= \cos\varphi\,\omega_1 + \sin\varphi\,\omega_2 \\
\overline{\omega_1^*} &= \cos\varphi\,\omega_1^* + \sin\varphi\,\omega_2^* + \varphi^*\,\overline{\omega_2} = 0
\end{aligned}$$

denklemlerinden $\widetilde{\Phi}$ dual açısı tespit edilebilir. Bu takdirde hesap edilen $\widetilde{\Phi}$ dual açısı kadar, dual küre üzerinde bir dual dönmenin veya $\mathbb{R}^3$ de helisel hareketin yapıldığı kabul edilir ve " ~ " işareti sadelik amacı ile kaldırılırsa,

$$d\overline{\widetilde{R}} = \overline{\widetilde{\Omega}}\,\overline{\widetilde{R}} \text{ ve } d'\overline{\widetilde{R}} = \overline{\widetilde{\Omega}'}\,\overline{\widetilde{R}}$$

ifadeleri, sırasıyla,

$$\begin{bmatrix} d\overrightarrow{\widetilde{R}_1} \\ d\overrightarrow{\widetilde{R}_2} \\ d\overrightarrow{\widetilde{R}_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \widetilde{\Omega}_3 & -\widetilde{\Omega}_2 \\ -\widetilde{\Omega}_3 & 0 & 0 \\ \widetilde{\Omega}_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overrightarrow{\widetilde{R}_1} \\ \overrightarrow{\widetilde{R}_2} \\ \overrightarrow{\widetilde{R}_3} \end{bmatrix} \tag{4.2.2}$$

ve

$$\begin{bmatrix} d'\overrightarrow{\widetilde{R}_1} \\ d'\overrightarrow{\widetilde{R}_2} \\ d'\overrightarrow{\widetilde{R}_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \widetilde{\Omega}'_3 & -\widetilde{\Omega}_2 \\ -\widetilde{\Omega}'_3 & 0 & 0 \\ \widetilde{\Omega}_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overrightarrow{\widetilde{R}_1} \\ \overrightarrow{\widetilde{R}_2} \\ \overrightarrow{\widetilde{R}_3} \end{bmatrix} \tag{4.2.3}$$

olur. Aynı şekilde $(4.1.10)$ ifadeleri de

$$\begin{bmatrix} d\widetilde{X}_1 \\ d\widetilde{X}_2 \\ d\widetilde{X}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \widetilde{\Omega}_3 & -\widetilde{\Omega}_2 \\ -\widetilde{\Omega}_3 & 0 & 0 \\ \widetilde{\Omega}_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widetilde{X}_1 \\ \widetilde{X}_2 \\ \widetilde{X}_3 \end{bmatrix} \tag{4.2.4}$$

$$\begin{bmatrix} d\widetilde{X}_1 \\ d\widetilde{X}_2 \\ d\widetilde{X}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \widetilde{\Omega}'_3 & -\widetilde{\Omega}_2 \\ -\widetilde{\Omega}'_3 & 0 & 0 \\ \widetilde{\Omega}_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widetilde{X}_1 \\ \widetilde{X}_2 \\ \widetilde{X}_3 \end{bmatrix} \tag{4.2.5}$$

şeklinde olur.

$\overrightarrow{\widetilde{R}_3} = \overrightarrow{\widetilde{P}}$ birim dual vektörü, hareketli K birim dual küresi üzerinde $(\widetilde{P})$ hareketli dual pol eğrisini ve sabit K' birim dual küresi üzerinde de $(\widetilde{P'})$ sabit dual pol eğrisini çizer. H/H' hareketi yapılırken bu pol eğrileri birbiri üzerinde yuvarlanırlar, yani dual yay uzunlukları aynı kalarak $\widetilde{P}$ noktasında birbirlerine teğet olurlar.

Dual pol eğrilerinin H ve H' uzaylarındaki karşılıkları H/H' hareketinin eksen yüzeyleri denen iki regle yüzeydir. Burada $\left(\widetilde{P}\right)$ ye karşılık gelen hareketli eksen yüzeyi $\vec{\widetilde{P}}$ ani ekseninin H hareketli uzayındaki geometrik yeridir. Aynı şekilde $\left(\widetilde{P'}\right)$ ye karşılık gelen sabit eksen yüzeyi de $\vec{\widetilde{P}}$ ekseninin H' deki geometrik yeridir.

$\left(\widetilde{P}\right)$ hareketli eksen yüzeyinin komşu iki ana doğrusu $\vec{\widetilde{P}}(t)=\overrightarrow{\widetilde{R_3}}(t)$ ve $\vec{\widetilde{P}}(t+dt)=\overrightarrow{\widetilde{R_3}}(t+dt)=\overrightarrow{\widetilde{R_3}}(t)+d\overrightarrow{\widetilde{R_3}}(t)$ dual vektörleri ile bellidir. Aynı şekilde $\left(\widetilde{P'}\right)$ sabit eksen yüzeyinin komşu iki ana doğrusu da $\overrightarrow{\widetilde{P'}}(t)=\overrightarrow{\widetilde{R_3}}(t)$ ve $\overrightarrow{\widetilde{P'}}(t+dt)=\overrightarrow{\widetilde{R_3}}(t)+d'\overrightarrow{\widetilde{R_3}}(t)$ dir.

$(4.2.2)$ ve $(4.2.3)$ formüllerinden $d\overrightarrow{\widetilde{R_3}}=d'\overrightarrow{\widetilde{R_3}}$ dür. Böylece her iki eksen yüzeyi için komşu ana doğru ortaktır. Yani her iki eksen yüzeyi ortak $\vec{\widetilde{P}}$ ana doğrusu boyunca birbirlerine teğet olurlar. Buradan $\left(\widetilde{P}\right)$ ve $\left(\widetilde{P'}\right)$ eksen yüzeylerinin $\widetilde{P}$ üzerinde aynı merkez noktasına sahip oldukları ve dağılma parametrelerinin de

$$\frac{1}{d}=\frac{\left\langle d\vec{r_3},d\vec{r_3^*}\right\rangle}{\left\|d\vec{r_3}\right\|^2}=\frac{\left\langle d'\vec{r_3},d'\vec{r_3^*}\right\rangle}{\left\|d'\vec{r_3}\right\|^2}=\frac{\omega_2^*}{\omega_2}$$

olduğu sonucuna varılır.

Böylece şu teorem ifade edilebilir.

Teorem 4.2.1. H/H' hareketinin meydana gelişinde, hareketli $\left(\widetilde{P}\right)$ eksen yüzeyi sabit $\left(\widetilde{P'}\right)$ eksen yüzeyi üzerinde her birine ait sonsuz yakın iki ana doğru ortak olacak, yani her iki yüzey $\widetilde{P}$ ekseni boyunca temas edecek ve merkez noktaları ile dağılma parametreleri de aynı olacak şekilde hareket eder. Bununla beraber her iki yüzey genel olarak kaymaksızın yuvarlanmazlar, tam tersine yuvarlanma ile kaymadan oluşan bir hareket yaparlar. Burada her seferinde ortak olan $\vec{\widetilde{P}}$ ana doğrusu etrafında dönme açısı $\psi_3 = \omega_3' - \omega_3$ ve kayma uzunluğu $\psi_3^* = \omega_3'^* - \omega_3^*$ olan ani helis hareketi meydana gelir[9].

H/H' hareketi bir "D" dönmesi ile bir "S" kaymasından ibarettir. K ve K' birim dual küreleri üzerindeki dual pol eğrileri, $\vec{\widetilde{P}} = \vec{\widetilde{R_3}}$ birim dual vektörü tarafından çizilir. Bu dual pol eğrileri birbiri üzerinde kaymaksızın yuvarlanırlar.

Teorem 4.2.2. Bir H/H' bir parametreli uzay hareketinde eksen yüzeylerinin küresel tasvirleri birbirleri üzerinde kaymaksızın yuvarlanırlar. Eğer

$$k = \frac{\psi^*}{\psi} = 0$$

ise, $\left(\widetilde{P}\right)$ eksen yüzeyi $\left(\widetilde{P'}\right)$ eksen yüzeyi üzerinde kaymaksızın yuvarlanır[9].

BÖLÜM 5. LORENTZ UZAYINDA BİR PARAMETRELİ KÜRESEL HAREKETLER

Bu bölüm çalışmamızın orijinal ilk kısmını oluşturmaktadır. Bu bölümde ilk olarak $\mathbb{L}^3$, 3-boyutlu Lorentz uzayında bir parametreli küresel hareketler tanıtılmış ve bu hareketlerin hızları ve pol eğrileri arasındaki teoremlere yer verilmiştir. Daha sonra, bir çok kürenin birbirine göre küresel hareketleri tanıtılarak, bu hareketlerin hızları, ivmeleri ve ivme eksenleri ile ilgili bağıntılara yer verilmiştir.

5. 1. Lorentz Uzayında Küre Üzerinde Bir Hareketin Gösterilmesi

$\mathbb{L}$ Lorentz küresinde, $\{O;\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$ Lorentz anlamda ortonormal koordinat sistemi olsun. Bu koordinat sistemine kısaca hareketli koordinat sistemi diyeceğiz. Aynı şekilde $\{O;\vec{e}_1',\vec{e}_2',\vec{e}_3'\}$ sistemi de $\mathbb{L}'$ sabit Lorentz küresinde Lorentz anlamda bir ortonormal koordinat sistemi olsun. Bu koordinat sistemine de sabit koordinat sistemi diyeceğiz. Bu koordinat sistemleri, sırasıyla, $\mathbb{L}$ ve $\mathbb{L}'$ Lorentz kürelerinin temsilcileri olarak kabul edilecektir. Böylece

$$\left\langle \vec{e}_i,\vec{e}_j \right\rangle = \left\langle \vec{e}_i',\vec{e}_j' \right\rangle = \varepsilon_i\,\delta_{ij} \quad , \quad \varepsilon_i = \begin{cases} 1, \; \vec{e}_i \text{ veya } \vec{e}_i' \text{ space-like} \\ \text{-}1, \; \vec{e}_i \text{ veya } \vec{e}_i' \text{ time-like} \end{cases} \quad , \quad 1 \le i, j \le 3$$

dir. Bu iki sistemden herhangi birini imtiyazlı saymayıp bir diğer üçüncü $\mathbb{L}_1$ ile gösterilen $\{O;\vec{r}_1,\vec{r}_2,\vec{r}_3\}$ izafi ortonormal sistemini ele alalım. Bütün hareketlerimizi bu izafi sisteme göre vereceğiz. Böylece

$$\left\langle \vec{r}_i,\vec{r}_j \right\rangle = \varepsilon_i\,\delta_{ij} \quad , \quad \varepsilon_i = \begin{cases} 1, \; \vec{r}_i \text{ space-like} \\ \text{-}1, \; \vec{r}_i \text{ time-like} \end{cases} \quad , \quad 1 \le i, j \le 3$$

dir. Kısalık için

$$E=\begin{bmatrix}\vec{e}_1\\ \vec{e}_2\\ \vec{e}_3\end{bmatrix} \ , \ R=\begin{bmatrix}\vec{r}_1\\ \vec{r}_2\\ \vec{r}_3\end{bmatrix} \ , \ E'=\begin{bmatrix}\vec{e}_1'\\ \vec{e}_2'\\ \vec{e}_3'\end{bmatrix}$$

notasyonlarını kullanalım. Bu sistemlerin her biri aynı şekilde yönlendiğinden O noktası etrafındaki dönmeler ile sistemlerin birinden ötekine geçilebilir. Böylece

$$R = A\,E \ , \ R = A'\,E' \tag{5.1.1}$$

yazabiliriz, burada $A', A \in O_1(3)$ dir.

A ve A' Lorentz anlamda ortogonal matrislerinin bileşenleri t reel parametresinin C^{∞}-sınıfından türevlenebilen fonksiyonları olarak kabul edilecektir. Böylece O noktası etrafındaki harekete bir parametreli $\mathcal{D}_1$ Lorentz dönme hareketi adını vereceğiz.

Şimdi $\vec{r}_j$ vektörlerinin, sırasıyla, $\mathbb{L}$ ve $\mathbb{L}'$ Lorentz kürelerine göre diferensiyellerini hesaplayalım.

Eğer (5.1.1) denklemini göz önüne alınırsa, R nin $\mathbb{L}$ Lorentz küresine göre diferensiyeli

$$\begin{aligned} dR &= dA\,E \\ &= dA\,A^{-1}\,R \end{aligned} \tag{5.1.2}$$

dir. Eğer $S = dA\,A^{-1}$ olarak alınırsa, (5.1.2) denklemi

$$dR = S\,R \tag{5.1.3}$$

olur. Benzer şekilde, (5.1.1) denklemi göz önüne alınırsa, $R = A' E'$ denkleminden,

$$d'R = S' R \tag{5.1.4}$$

elde edilir, burada $S' = dA'(A')^{-1}$ dir. Kolayca gösterebiliriz ki $S = dA\, A^{-1}$ ve $S' = dA'(A')^{-1}$ matrisleri Lorentz anlamda birer anti-simetrik matrislerdir, yani $S^T = -\varepsilon\, S\, \varepsilon$ ve $S'^T = -\varepsilon\, S'\, \varepsilon$ dir, burada S^T, S matrisinin transpozesidir. Lorentz anlamda anti-simetrik S matrisinin bileşenleri ω_{ij}, $(1 \le i, j \le 3)$ olmak üzere, i, j, k indislerinin $i, j, k = 1,2,3 ; 2,3,1 ; 3,1,2$, sıralanışını

$$\omega_{ij} = \omega_k \tag{5.1.5}$$

ile gösterirsek kolayca elde edebiliriz ki

$$S = \begin{bmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix} \tag{5.1.6}$$

dır. Aynı şekilde hareket edilerek Lorentz anlamda anti-simetrik S' matrisi

$$S' = \begin{bmatrix} 0 & \omega_3' & -\omega_2' \\ \omega_3' & 0 & -\omega_1' \\ -\omega_2' & \omega_1' & 0 \end{bmatrix} \tag{5.1.7}$$

olur.

5. 2. $\mathcal{D}_l$ Hareketindeki Hızlar

İzafi sisteme göre koordinatları x_1, x_2, x_3 olan herhangi bir nokta X olsun.

$$\overrightarrow{OX} = \vec{x} = X^T\, R \qquad (\ 5.2.1\ )$$

vektörünü ele alalım. X noktası birim Lorentz küresi üzerinde bir nokta ise,

$$\left\|\vec{x}\right\|^2 = -x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$$

dir. Şimdi X noktasının, sırasıyla, $\mathbb{L}$ ve $\mathbb{L}'$, hareketli ve sabit Lorentz kürelerine göre değişimlerini hesaplayalım.

Eğer (5.2.1) denklemi göz önüne alınırsa

$$d\vec{x} = dX^T\, R + X^T\, dR$$

yazılabilir. Bu son denklemde, (5.1.3) denklemi yerine konulursa

$$d\vec{x} = \left(dX^T + X^T\, S\right)R \qquad (\ 5.2.2\ )$$

elde edilir. Böylece X noktasının relatif hız vektörü (X in $\mathbb{L}$ ya göre hızı)

$$\vec{V}_r = \frac{d\vec{x}}{dt}$$

dir. Eğer $\vec{V}_r = 0$ yani $d\vec{x} = 0$ ise, X noktası $\mathbb{L}$ hareketli Lorentz küresinde sabittir. O halde X in $\mathbb{L}$ da sabit olma şartı

$$dX^T = -X^T\, S \qquad (5.2.3\ )$$

denklemiyle verilir.

Benzer şekilde, X noktasının $\mathbb{L}'$ Lorentz küresine göre değişimi,

$$d'\vec{x} = dX^T\, R + X^T\, d'R$$

dir. Bu son denklemde, (5.1.4) denklemi yerine konulursa

$$d'\vec{x} = \left(dX^T + X^T\, S'\right) R \qquad (5.2.4)$$

elde edilir. Böylece mutlak hız vektörü (X in $\mathbb{L}'$ ye göre hızı)

$$\vec{V}_a = \frac{d'\vec{x}}{dt}$$

dir. Eğer $\vec{V}_a = 0$ veya aynı şey demek olan $d'\vec{x} = 0$ ise, X noktası $\mathbb{L}'$ de sabittir. O halde X in $\mathbb{L}'$ de sabit olma şartı aşağıdaki denklemle verilir.

$$dX^T = -X^T\, S' \qquad (5.2.5)$$

Eğer X noktası $\mathbb{L}$ de sabit ise X in $\mathbb{L}'$ ye göre hızına X in sürüklenme hızı adı verilir ve

$$\vec{V}_f = \frac{d_f\vec{x}}{dt}$$

ile gösterilir. O halde (5.2.3) denklemi (5.2.4) denkleminde yerine yazılırsa

$$d_f\vec{x} = X^T\, \Psi\, R \qquad (5.2.6)$$

elde edilir, burada $\Psi = S' - S$ dır. $\vec{\psi}$ Pfaff vektörü

$$\vec{\psi} = -\psi_1\,\vec{r}_1 + \psi_2\,\vec{r}_2 + \psi_3\,\vec{r}_3 \qquad (5.2.7)$$

olarak alınırsa, (5.2.6) denklemi

$$d_f\vec{x} = \vec{\psi} \wedge \vec{x} \qquad (5.2.8)$$

şeklini alır. (5.2.2) ve (5.2.4) denklemleri göz önüne alınırsa

$$d_f\vec{x} = d'\vec{x} - d\vec{x}$$

olduğu kolayca görülebilir. Bu son denklem ifade eder ki

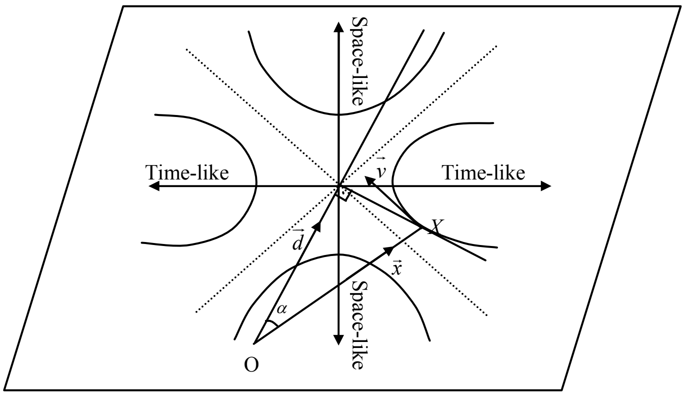
$$\vec{V}_a = \vec{V}_r + \vec{V}_f$$

dir.

Böylece aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 5.2.1. $\mathbb{L}^3$, Lorentz uzayında küresel harekette, bir X noktasının mutlak hız vektörü, relatif hız vektörü ile sürüklenme hız vektörünün toplamına eşittir.

Şimdi $\vec{\psi}$ Pfaff vektörü ve (5.2.8) denkleminin anlamını daha iyi anlamak için Darboux dönme vektörünün önemini belirtelim. Bir eksen etrafında dönme hareketini göz önüne alalım. Kabul edelim ki bu eksen başlangıç noktasından geçsin ve doğrultusu $\vec{d}$ olsun. Dönme hareketi $\omega = \mp\left\|\vec{d}\right\|$ açısal hızı ile meydana gelsin. Yer vektörü $\overrightarrow{OX} = \vec{x}$ olan bir X noktasını bu dönme hareketinin etkisine tabi tutalım ve bu noktanın hız vektörü de $\vec{v}$ olsun (Şekil 5.2.1).



Şekil 5.2.1 Lorentz anlamda Darboux vektörü

Böylece

$$\vec{v} = \vec{d} \wedge \vec{x}$$

dir. Bu son denklem $\vec{v}$, vektörünün hem $\vec{x}$ hem de $\vec{d}$ vektörüne dik olduğunu ifade eder. Ayrıca;

$$\|\vec{v}\| = \|\vec{d}\| \, \|\vec{x}\| \sinh \alpha = \mp \omega r$$

dir, burada $\|\vec{x}\| \sinh \alpha = r$ dir. O halde $\vec{v}$, gerçekten $\vec{d}$ ekseni etrafında $\mp\|\vec{d}\|$ açısal hızı ile o noktanın dönme polünden uzaklığı ile çarpımına eşittir. Bu ise $\vec{v}$ nin X noktasının hız vektörü olduğunu ifade eder. Böylece $\vec{\psi}$ Pfaff vektörüne, bir parametreli $\mathcal{D}_1$ dönme hareketinin t anındaki dönme vektörü diyebiliriz. O halde aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 5.2.2. Bir parametreli $\mathcal{D}_1$ dönme hareketinde, t anında, hareketli sistemin her X noktası için bir sonsuz küçük dönme hareketi meydana gelir. Bu dönme hareketinde $\vec{\psi}$ Pfaff vektörü, Darboux dönme vektörünün rolünü oynar. Burada X noktasının $d_f\vec{x}$ ilerleme vektörü (5.2.8) ile verilmiştir.

Şimdi $\vec{\psi}$ dönme vektörü doğrultusundaki $\vec{p}$ birim vektörünü hesaplarımıza dahil edelim.

$$\|\vec{p}\| = 1$$

olduğundan dolayı

$$\vec{\psi} = \vec{p}\sqrt{-\psi_1^2 + \psi_2^2 + \psi_3^2}$$

dir. Burada $\psi = \mp\left\|\vec{\psi}\right\| = \sqrt{-\psi_1^2 + \psi_2^2 + \psi_3^2}$, dt zaman aralığında dönmeyi meydana getiren sonsuz küçük dönme açısını gösterir (Burada ψ nin işareti $\vec{p}$ yönüne bağlıdır). $\overrightarrow{OP} = \vec{p}$ ile birim Lorentz küresi üzerinde gösterilen P noktası, ani dönme polüdür. P noktası, sürüklenme hızının sıfır olması ile karakterize edildiğinden dolayı (5.2.8) denkleminden,

$$\vec{\psi} \wedge \vec{x} = 0 \quad , \quad \left\|\vec{x}\right\|^2 = 1$$

ise

$$\vec{x} = \mp\vec{p}$$

dir. P dönme polü ile ona karşılık gelen $\overline{P}$ noktası bir t anında sabit kalırlar. $\vec{\psi}$ ve $\overrightarrow{OX} = \vec{x}$ vektörleri, birim Lorentz küresinin P, $\overline{P}$ ve X noktalarından geçerek onu bir büyük dairesi boyunca kesen, bir Lorentz düzlemi meydana getirirler. X noktası $\mathbb{L}$ küresinde sabit ise (5.2.8) den dolayı X in $d_f\vec{x}$ sürüklenme hızı (ilerleme doğrultusu), bu büyük daireye dik olur. Böylece aşağıdaki teoremler verilebilir.

Teorem 5.2.3. Bir parametreli bir harekette Lorentz küresi üzerinde, her anda sürüklenme hızları sıfır olan bir çift P, $\overline{P}$ noktaları (P dönme polü ve ona karşılık gelen $\overline{P}$ noktası) vardır. Yani bu noktalar, t anında her iki küre yüzeyi üzerinde sabit kalır.

Teorem 5.2.4. Hareketli $\mathbb{L}$ küresinin her noktası t anında P polü (ve ona karşılık gelen $\overline{P}$ noktası) etrafında $\psi : dt$ açısal hızı ile bir dönme hareketi (Ani dönme hareketi) yapar. O halde küre üzerindeki bir parametreli hareket, t anında $\mathbb{L}$ küre yüzeyinin tamamının $\mathbb{L}'$ sabit küresine göre böyle bir dönmesinden ibaret olur.

Teorem 5.2.5 : Bir parametreli bir küre hareketinde $\mathbb{L}$ hareketli küresinin bir X noktası $\mathbb{L}'$ sabit küresi üzerinde, küresel yörünge normali her defasında P dönme polünden (ve ona karşılık gelen $\overline{P}$ noktasından) geçen, bir yörünge çizer.

5. 3. Kanonik İzafi Sistemi ve Pol Eğrilerinin Yuvarlanması

Şimdi izafi sisteminin

$$\vec{p} = \vec{r}_3 \tag{5.3.1}$$

olacak şekilde bir özel seçimini hesaplayalım. Eğer $\vec{p} = \vec{r}_3$ alınırsa, $\vec{p}$ vektörü $\vec{r}_1$ ve $\vec{r}_2$ vektörlerine dik olur. Böylece (5.2.7) denklemi göz önüne alınırsa

$$\psi_1 = 0\,,\ \ \psi_2 = 0$$

elde edilir. $\Psi = S' - S$ olduğundan dolayı, (5.1.5) ve (5.1.6) denklemleri göz önüne alınırsa

$$\omega_1' = \omega_1\,,\ \ \omega_2' = \omega_2$$

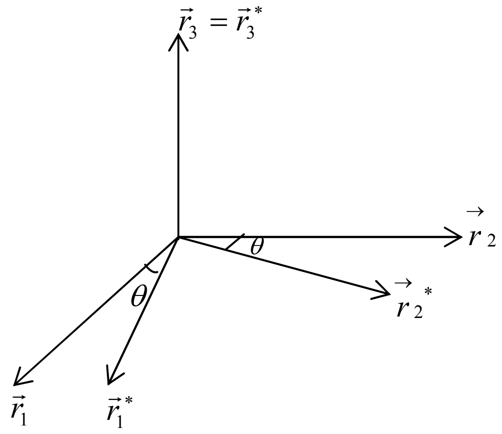
bulunur. Böylece ani dönmenin sonsuz küçük dönme açısı

$$\psi = \psi_3$$

şeklini alır. Bu takdirde ani dönme

$$\vec{\psi} = \psi_3\,\vec{r}_3 = \left(\omega_3' - \omega_3\right)\vec{r}_3$$

olur. Bundan sonra daima $\psi_3 \neq 0$ kabul edilecektir. İzafi sistemi (5.3.1) şartıyla henüz tek anlamlı olarak vermiş değiliz. Çünkü $\vec{p} = \vec{r}_3$ şartına uygun olarak elde edilen sistem $\vec{r}_3$ ekseni etrafında keyfi olarak döndürülebilir. Böylece elde edilen sistemi $\vec{p} = \vec{r}_3$ ekseni etrafında θ açısı kadar döndürülürse (Şekil 5.3.1)



Şekil 5.3.1 Lorentz uzayında dönme eksenleri

$$R^* = A(\theta)\ R \qquad (5.3.2\ )$$

elde edilir, burada $R^* = \begin{bmatrix} \vec{r}_1^{\,*} \\ \vec{r}_2^{\,*} \\ \vec{r}_3^{\,*} \end{bmatrix}$, $R = \begin{bmatrix} \vec{r}_1 \\ \vec{r}_2 \\ \vec{r}_3 \end{bmatrix}$ ve $A(\theta) = \begin{bmatrix} \cosh\theta & \sinh\theta & 0 \\ \sinh\theta & \cosh\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ dir.

Bu yeni $\{0; \vec{r}_1^{\,*}, \vec{r}_2^{\,*}, \vec{r}_3^{\,*}\}$ sistemi, (5.1.3) ve (5.1.4) denklemlerine karşılık gelen

$$dR^* = S^*\ R^*,\ \ d'R^* = S'^*\ R^* \qquad (\ 5.3.3\ )$$

türev denklemlerine sahiptir. Şimdi ω lardan ω^* ların nasıl elde edilebileceğini yani sistemin θ açısı kadar dönmesi halinde ω ile ω^* lar arasındaki bağıntıyı araştıralım. Eğer (5.3.2) denklemi göz önüne alınırsa

$$dR^* = dA(\theta)\ R + A(\theta)\ dR$$

elde edilir. Bu son denklemde (5.1.3) denklemi yerine yazılırsa

$$dR^* = \left(dA(\theta) \ + A(\theta)\ S \right) R \qquad (\ 5.3.4\ )$$

bulunur. (5.3.4) denkleminde, $dR^* = S^*\ R^*$ ve $R^* = A(\theta)\ R$ denklemleri kullanılırsa

$$S^*\ A(\theta) = dA(\theta) + A(\theta)\ S \qquad (\ 5.3.5\ )$$

denklemi elde edilir. Bu son denklem matris formunda açık olarak yazılırsa

$$\begin{bmatrix} \omega_3^* \sinh\theta & \omega_3^* \cosh\theta & -\omega_2^* \\ \omega_3^* \cosh\theta & \omega_3^* \sinh\theta & -\omega_1^* \\ -\omega_2^* \cosh\theta + \omega_1^* \sinh\theta & -\omega_2^* \sinh\theta + \omega_1^* \cosh\theta & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\omega_3 + d\theta)\sinh\theta & (\omega_3 + d\theta)\cosh\theta & -\omega_2 \cosh\theta - \omega_1 \sinh\theta \\ (\omega_3 + d\theta)\cosh\theta & (\omega_3 + d\theta)\sinh\theta & -\omega_2 \sinh\theta - \omega_1 \cosh\theta \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix}$$

olduğu kolayca görülebilir. Buradan

$$\begin{aligned} \omega_1^* &= \omega_1 \cosh\theta + \omega_2 \sinh\theta, \\ \omega_2^* &= \omega_1 \sinh\theta + \omega_2 \cosh\theta, \\ \omega_3^* &= \omega_3 + d\theta \end{aligned}$$

elde edilir. O halde eksen takımının böyle bir dönmesinde, Pfaff formları tıpkı $\vec{r}_1$ ve $\vec{r}_2$ birim vektörleri gibi dönüşürler.

Şimdi izafi sistemimizi normlamak için, θ dönme açısını,

$$\omega_1^* = \omega_1 \cosh\theta + \omega_2 \sinh\theta = 0 \qquad (\ 5.3.6\ )$$

bağıntısını sağlayacak şekilde seçelim. Bu, θ dönme açısı için bir şart denklemidir. Şimdi yardımcı sistemi $\vec{r}_3$ etrafında (5.3.6) denklemini sağlayan θ dönme açısı kadar döndürülmüş kabul edelim ve döndürülmüş sistemin gösterimindeki $(*)$ yıldızları tekrar kaldıralım. Böylece, kanonik izafi sistemine ait türev denklemlerinin sistemi, (5.3.3) ve (5.3.6) denklemlerini göz önüne alınırsa aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$\mathbb{L}$ ye göre değişimler için,

$$\begin{bmatrix} d\vec{r}_1 \\ d\vec{r}_2 \\ d\vec{r}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ \omega_3 & 0 & 0 \\ -\omega_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{r}_1 \\ \vec{r}_2 \\ \vec{r}_3 \end{bmatrix} \tag{5.3.7}$$

ve $\mathbb{L}'$ ye göre değişimler için

$$\begin{bmatrix} d'\vec{r}_1 \\ d'\vec{r}_2 \\ d'\vec{r}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \omega_3' & -\omega_2 \\ \omega_3' & 0 & 0 \\ -\omega_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{r}_1 \\ \vec{r}_2 \\ \vec{r}_3 \end{bmatrix} \tag{5.3.8}$$

dir.

$\vec{p} = \vec{r}_3$ vektörü, hareketli $\mathbb{L}$ küresi üzerinde, bir parametreli Lorentz $\mathcal{D}_l$ hareketinin hareketli pol eğrisi olarak isimlendirilen bir (P) eğrisi çizer. (5.3.7) denklemi göz önüne alınırsa

$$d\vec{r}_3 = -\,\omega_2\,\vec{r}_1$$

eşitliğinden

$$\frac{d\vec{r}_3}{\omega_2} = \frac{d\vec{r}_3}{ds} = -\vec{r}_1$$

bulunur. Bu son denklem ifade eder ki (P) hareketli pol eğrisinin birim teğet vektörü "$-\vec{r}_1$" vektörüdür ve $\omega_2 = ds$ de (P) nin yay elementidir.

Aynı şekilde (5.3.8) denkleminden, $\vec{p} = \vec{r}_3$ vektörünün uç noktası, $\mathbb{L}'$ sabit küresi üzerinde, P noktasındaki birim teğet vektörü "$-\vec{r}_1$" ve yay elementi $\omega_2 = ds'$ olan, bir (P') sabit pol eğrisini çizer.

O halde (5.3.7) ve (5.3.8) denklemleri göz önüne alınırsa

$$d\vec{r}_3 = -\omega_2 \vec{r}_1 \text{ ve } d'\vec{r}_3 = -\omega_2 \vec{r}_1$$

olduklarından P nin $\mathbb{L}$ ve $\mathbb{L}'$ deki hızları birbirinin aynıdır. Başka bir değişle iki eğri daima birbirine teğettir.

Böylece aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 5.3.1. P dönme polü, hareketli ve sabit küreler üzerinde, sırasıyla, (P) ve (P') pol eğrilerini çizerken sahip olduğu hız vektörleri her anda birbirinin aynısıdır.

Teorem 5.3.1. den dolayı her t anında (P) nin t_0, t_1 e karşılık gelen noktaları arasındaki yay uzunluğu,

$$s = \int_{t_0}^{t} \left\| d\vec{r}_3 \right\| dt$$

ve

$$ds = \left\| d\vec{r}_3 \right\| dt$$

dir.

(P') nin t_0 ve t_1 e karşılık gelen noktaları arasındaki yay uzunluğu,

$$s' = \int_{t_0}^{t} \left\| d'\vec{r}_3 \right\| dt$$

ve

$$ds' = \|d'\vec{r}_3\| dt$$

olur. Teorem 5.3.1 den $d\vec{r}_3 = d'\vec{r}_3$ olduğu gösterilmişti. Dolayısıyla

$$\|d\vec{r}_3\| = \|d'\vec{r}_3\|$$

olur. Böylece

$$ds = ds'$$

bulunur.

Böylece aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 5.3.2. $\mathbb{L}^3$, 3-boyutlu Lorentz uzayında, $\mathcal{D}_1$ bir parametreli küresel harekette $\mathbb{L}$ nin küresel (P) hareketli pol eğrisi, $\mathbb{L}'$ nün (P') sabit pol eğrisi üzerinde kaymaksızın yuvarlanır.

Bu son teorem bize zamandan bahsetmeden bir Lorentz hareketinin tanımlanabileceğini göstermektedir. Şöyle ki; bir parametreli bir $\mathbb{L}/\mathbb{L}'$ Lorentz hareketi, $\mathbb{L}$ nin (P) hareketli pol eğrisinin, $\mathbb{L}'$ nün (P') sabit pol eğrisi üzerinde kaymaksızın yuvarlanması ile tanımlanabilir.

Teorem 5.3.3. Lorentz uzayında bir parametreli küresel dönme hareketinin ters hareketinde $\mathbb{L}$, $\mathbb{L}'$ küre yüzeyleri ve aynı şekilde (P), (P') küresel pol eğrileri rollerini değişirler.

5. 4. Lorentz Uzayında Bir Çok Kürenin Birbirine Göre Hareketleri

$\mathbb{L}^3$, 3-boyutlu Lorentz uzayında bir cismin bir parametreli hareketi

$$\begin{bmatrix} X' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & U' \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ 1 \end{bmatrix} \qquad (5.4.1)$$

dönüşümü ile verilir, burada $A \in SO_1(3)$, X, X' ve U', 3x1 tipinde matrislerdir. Ayrıca, A ve U' matrisleri bir t reel parametresinin C^∞-sınıfından diferensiyellenebilir fonksiyonlarıdır. $\vec{x}$ ve $\vec{x}'$ vektörleri aynı bir X noktasının, sırasıyla, $\mathbb{L}$ hareketli ve $\mathbb{L}'$ sabit uzaydaki ortonormal koordinat sistemine göre yer vektörlerini göstermektedir. $t = t_0$ başlangıç noktasında $\mathbb{L}$ ve $\mathbb{L}'$ deki koordinat sistemlerini çakışık kabul ediyoruz.

$\mathbb{L}$ ve $\mathbb{L}'$ Lorentz küreleri, sırasıyla, $\{O;\ \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\}$ ve $\{O';\ \overrightarrow{e_1'}, \overrightarrow{e_2'}, \overrightarrow{e_3'}\}$ Lorentz anlamda ortonormal koordinat sistemleri ile temsil edilsin.

Şimdi, bu iki koordinat sisteminin birbirine göre durumlarını inceleyelim. (5.4.1) denkleminden,

$$X' = AX + U' \qquad (5.4.2)$$

dır. Bu son denklemde $U' = -AU$ ve $U = -A^{-1}U'$ bağıntıları yerlerine konulursa

$$X = A^{-1}X' + U \qquad (5.4.3)$$

elde edilir. Böylece iki sistem arasındaki koordinat geçişleri verilmiş olur.

5. 5. Hızlar ve Ani Dönme Ekseni

X noktasının $\mathbb{L}'$ sabit Lorentz küresine göre hızını hesaplayalım. Bunun için (5.4.2) denkleminin t reel parametresine göre diferensiyeli alınırsa

$$\dot{X}' = \dot{A}X + A\dot{X} + \dot{U}' \qquad (5.5.1)$$

bulunur. Burada

$$V_a' = \dot{X}'$$

mutlak hız olarak isimlendirilir. Bu kısımda t ye göre türevler "•" ile gösterilecektir.

X noktasını hareketli sisteme göre sabit kabul eder ve (5.4.2) denkleminin diferensiyeli alınırsa, X noktasının sürüklenme hızı

$$V_f' = \dot{A}X + \dot{U}' \qquad (5.5.2)$$

dır.

X noktasının relatif hızı, X noktasının sabit sisteme göre sabit olması yani sürüklenme hızının sıfır olma durumudur. Böylece relatif hız

$$V_r' = A\dot{X} \qquad (5.5.3)$$

şeklinde elde edilir. Bu ifadelerden (Teorem 5.2.1. deki gibi)

$$V_a = V_f + V_r$$

olduğu görülür.

Şimdi her iki sistemde aynı anda sabit kalan noktaları (pol noktalarını) araştıralım. Bu noktalar, sürüklenme hızının sıfır olması ile karakterize edildiğinden

$$\dot{X}' = \dot{A}X + \dot{U}' = 0$$

olmalıdır. $U' = -AU$ olduğundan, $\dot{U}' = -\dot{A}U - A\dot{U}$ göz önüne alınırsa,

$$A^{-1}\dot{A}X = A^{-1}\dot{A}U + \dot{U}$$

elde edilir. Böylece pol noktaları için

$$\dot{X}' = \dot{A}X + \dot{U}' = 0 \text{ veya } A^{-1}\dot{A}X = A^{-1}\dot{A}U + \dot{U} \qquad (5.5.4)$$

olmalıdır.

Bu lineer denklem sisteminin çözümü tek değildir. Çünkü, $A^{-1}A = AA^{-1} = I_3$ olduğundan

$$\left(\dot{A}^{-1}\right)A + A^{-1}\dot{A} = 0 \quad , \quad \dot{A}A^{-1} + A\left(\dot{A}^{-1}\right) = 0$$

elde edilir. Burada $S = \left(\dot{A}^{-1}\right)A$ ve $S' = A\left(\dot{A}^{-1}\right)$ kabul edilirse, S ve S' matrisleri Lorentz anlamda anti-simetrik matrislerdir.

Lorentz anlamda anti-simetrik S matrisinin bileşenleri ω_{ij}, $(1 \le i, j \le 3)$ olmak üzere, i, j, k indislerinin $i, j, k = 1,2,3 ; 2,3,1 ; 3,1,2$, sıralanışı

$$\omega_{ij} = \omega_k$$

ile gösterilirse kolayca elde edilebilir ki

$$S = \begin{bmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix}$$

dır.

Benzer şekilde

$$S' = \begin{bmatrix} 0 & \overline{\omega}_3' & -\overline{\omega}_2' \\ \overline{\omega}_3' & 0 & -\overline{\omega}_1' \\ -\overline{\omega}_2' & \overline{\omega}_1' & 0 \end{bmatrix}$$

bulunur. Herhangi bir $\Omega = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix}$ ve $\overline{\Omega}' = \begin{bmatrix} \overline{\omega}_1' \\ \overline{\omega}_2' \\ \overline{\omega}_3' \end{bmatrix}$ için,

$$S\,\Omega = 0 \quad , \quad S'\,\overline{\Omega}' = 0$$

dır. Burada $\det S = 0$ ve $\det S' = 0$ dır.

$$A^{-1} = \varepsilon A^T \varepsilon \Rightarrow \det A^{-1} = \det A = \det A^T$$

olduğundan

$$A\varepsilon A^T = \varepsilon$$

$$\det A \det \varepsilon \det A^T = \det \varepsilon$$

$$\left(\det A\right)^2 = 1$$

$$\det A = \mp 1 \qquad (5.5.5)$$

dir. Yani $\det A \neq 0$ dır.

Böylece $S = \left(\dot{A}^{-1}\right) A$ olduğundan

$$\det S = \det\left(\dot{A}^{-1}\right) A = \det\left(\dot{A}^{-1}\right) \det A = \det \dot{A} = 0$$

bulunur. O halde $\dot{A}$ singülerdir ve $rank(S) = rank\left(\dot{A}\right)$ dır. Şimdi $n = 3$ ve $A \in SO_1(3)$ durumunda $rank\,\dot{A}$ yı bulalım.

$A \in SO_1(3)$ olmak üzere,

$$A^T \varepsilon A = \varepsilon$$

ifadesinin t parametresine göre diferensiyeli alınırsa

$$\left(\dot{A^T}\right)\varepsilon A + A^T \varepsilon \dot{A} = 0$$

bulunur.

$$h = \left(\dot{A^T}\right)\varepsilon A$$

olarak seçilirse

$$\begin{aligned} h + h^T &= 0 \\ h^T &= -h \end{aligned}$$

olduğu görülür. Bu ifade eder ki h anti-simetrik bir matristir. Bu son denklemden

$$\begin{aligned} \det h &= (-1)^3 \det h \\ \det h &= 0 \end{aligned} \tag{5.5.6}$$

olur. Bu durumda $rank\ h \leq 2$ olmalıdır. Şayet $rank\ h = r$ ise, r çift olmak zorundadır. Çünkü, h nin bütün tek mertebeden karesel alt matrislerinin determinantı sıfırdır.

Şimdi $h = \left(\overset{\bullet}{A^T}\right)\varepsilon A$ eşitliğinin her iki tarafının determinantı alınırsa

$$\det h = \det\left(\overset{\bullet}{A^T}\right)\det\varepsilon \det A$$

elde edilir. Bu son denklem, (5.5.5) ve (5.5.6) denklemlerinden dolayı

$$\det \overset{\bullet}{A} = 0$$

dır. Buradan

$$rank\ h = rank\ \overset{\bullet}{A} = r$$

bulunur. $n = 3$ olduğundan dolayı

$$rank\ \overset{\bullet}{A} = 2$$

dir. O halde sonuç olarak, $A^{-1}\overset{\bullet}{A}X = A^{-1}\overset{\bullet}{A}U + \overset{\bullet}{U}$ ve $S = \left(\overset{\bullet}{A^{-1}}\right)A$ denklemleri göz önüne alınırsa, (5.5.4) denklemi

$$-SX = -SU + \overset{\bullet}{U}$$

olarak yazılabilir. S anti-simetrik bir matris olduğundan, son denklem

$$\varepsilon S^T \varepsilon X = \varepsilon S^T \varepsilon U + \overset{\bullet}{U} \qquad (5.5.7)$$

şeklini alır. Böylece

$$rank\left(-S\right) = rankS = rank\ \overset{\bullet}{A} = 2 \qquad (5.5.8)$$

olduğundan $rank\left(-S,\overset{\bullet}{U}\right)=rank\left(A^{-1}\overset{\bullet}{A},\overset{\bullet}{U}\right)=rank\,\overset{\bullet}{A}=2$ bulunur. O halde (5.5.7) denklemi soldan ε ile çarpılırsa

$$S^T\varepsilon X=S^T\varepsilon U+\varepsilon\overset{\bullet}{U}$$

elde edilir. Bu son denklem soldan Ω^T ile çarpılır ve $S\,\Omega=0$ dolayısıyla $\Omega^T S^T=0$ olduğu göz önünde bulundurulursa,

$$\Omega^T\varepsilon\overset{\bullet}{U}=0 \qquad (5.5.9)$$

bulunur. Burada $\vec{\omega}\neq 0$ kabul edilmiştir.

Eğer (5.5.5) ve (5.5.8) denklemleri göz önüne alınırsa, (5.5.4) denklem sistemi çözülebilir ve bir doğru denklemi elde edilir. Bu doğru t anında her iki sistemde birden sabit kalan ani dönme eksenidir. Y bu eksen üzerinde herhangi bir değişken nokta olmak üzere (5.5.4) sisteminden,

$$-SY=-SU+\overset{\bullet}{U}$$

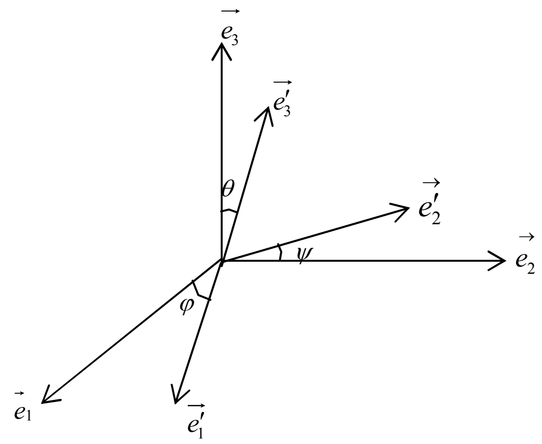
yazılabilir. Sistemin çözümünden, ani dönme ekseninin doğrultusunun $\vec{\omega}$ vektörüne paralel olduğu anlaşılır. $\vec{\omega}$ vektörüne açısal hız vektörü de denir. Bunun bileşenlerini kolayca hesaplayabilmek için A Lorentz anlamda ortogonal matrisini Euler açıları cinsinden ifade edelim.

Kayma düşünülmeden üç farklı dönme hareketiyle hareketli sistemden sabit sisteme geçilebilir. Böylece

i) $\overrightarrow{e_3}$-ekseni etrafında φ açısı kadar,

ii) $\overrightarrow{e_1'}$-ekseni etrafında θ açısı kadar,

iii) $\overrightarrow{e_3'}$-ekseni etrafında ψ açısı kadar bir dönme yapılırsa (Şekil 5.5.1)



Şekil 5.5.1 Lorentz uzayında 3 dönme hareketi

bu dönmelere karşılık gelen matrisler, sırasıyla,

$$A_1 = \begin{bmatrix} \cosh\varphi & \sinh\varphi & 0 \\ \sinh\varphi & \cosh\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \qquad A_3 = \begin{bmatrix} \cosh\psi & \sinh\psi & 0 \\ \sinh\psi & \cosh\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

olur. O halde hareketli sistemden sabit sisteme geçişteki dönme matrisi,

$$\begin{aligned} A &= A_3 A_2 A_1 \\ &= \begin{bmatrix} \cosh\psi\cosh\varphi + \sinh\psi\sinh\varphi\cos\theta & \cosh\psi\sinh\varphi + \sinh\psi\cosh\varphi\cos\theta & -\sinh\psi\sin\theta \\ \sinh\psi\cosh\varphi + \cosh\psi\sinh\varphi\cos\theta & \sinh\psi\sinh\varphi + \cosh\psi\cosh\varphi\cos\theta & -\cosh\psi\sin\theta \\ \sin\theta\sinh\varphi & \sin\theta\cosh\varphi & \cos\theta \end{bmatrix} \end{aligned}$$

dır. $A^{-1} = \varepsilon A^T \varepsilon$ olduğundan

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \cosh\psi\cosh\varphi + \sinh\psi\sinh\varphi\cos\theta & -\sinh\psi\cosh\varphi - \cosh\psi\sinh\varphi\cos\theta & -\sinh\varphi\sin\theta \\ -\cosh\psi\sinh\varphi - \sinh\psi\cosh\varphi\cos\theta & \sinh\psi\sinh\varphi + \cosh\psi\cosh\varphi\cos\theta & \cosh\varphi\sin\theta \\ \sin\theta\sinh\psi & -\sin\theta\cosh\psi & \cos\theta \end{bmatrix}$$

dır. Buradan $S = \left(\dot{A}^{-1}\right)A$ hesaplanırsa

$$S=\begin{bmatrix} 0 & -\dot{\varphi}-\dot{\psi}\cos\theta & \dot{\psi}\cosh\varphi\sin\theta-\dot{\theta}\sinh\varphi \\ -\dot{\varphi}-\dot{\psi}\cos\theta & 0 & -\dot{\psi}\sinh\varphi\sin\theta+\dot{\theta}\cosh\varphi \\ \dot{\psi}\cosh\varphi\sin\theta-\dot{\theta}\sinh\varphi & \dot{\psi}\sinh\varphi\sin\theta-\dot{\theta}\cosh\varphi & 0 \end{bmatrix}$$

bulunur.

$$S\ \Omega=0$$

olduğundan

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \dot{\psi}\sinh\varphi\sin\theta-\dot{\theta}\cosh\varphi, \\ \omega_2 &= -\dot{\psi}\cosh\varphi\sin\theta+\dot{\theta}\sinh\varphi, \\ \omega_3 &= -\dot{\varphi}-\dot{\psi}\cos\theta \end{aligned}$$

bulunur. Ayrıca $\Omega'=A\Omega$ ifadesinden

$$\begin{aligned} \omega_1' &= \dot{\varphi}\sinh\psi\sin\theta-\dot{\theta}\cosh\psi, \\ \omega_2' &= \dot{\varphi}\cosh\psi\sin\theta-\dot{\theta}\sinh\psi, \\ \omega_3' &= -\dot{\psi}-\dot{\varphi}\cos\theta \end{aligned}$$

elde edilir.

$$S'\ \overline{\Omega'}=0$$

olduğundan

$$\begin{aligned} \overline{\omega}_1' &= \dot{\varphi}\sinh\psi\sin\theta-\dot{\theta}\cosh\psi, \\ \overline{\omega}_2' &= \dot{\varphi}\cosh\psi\sin\theta-\dot{\theta}\sinh\psi, \\ \overline{\omega}_3' &= -\dot{\psi}-\dot{\varphi}\cos\theta \end{aligned}$$

dır. Böylece Ω' ve $\overline{\Omega'}$ nın eşit olduğu görülür.

Şimdi t anında bir X noktasına ait sürüklenme hızının, o andaki ani dönme ekseni ile arasındaki bağıntıyı araştıralım. (5.5.2) denkleminden

$$V_f = A^{-1}V_f' = \varepsilon S^T \varepsilon X - \varepsilon S^T \varepsilon U - \dot{U}$$

elde edilir. Bu eşitliğin her iki yanı $\Omega^T \varepsilon$ ile çarpılırsa

$$\Omega^T \varepsilon V_f = \Omega^T S^T \varepsilon X - \Omega^T S^T \varepsilon U - \Omega^T \varepsilon \dot{U}$$

bulunur. Burada $\Omega^T S^T = 0$ ve (5.5.9) denklemleri göz önünde bulundurulursa

$$\Omega^T \varepsilon V_f = 0$$

elde edilir.

Böylece aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 5.5.1. $\mathbb{L}^3$, 3-boyutlu Lorentz uzayında bir parametreli harekette, t anında bir X noktasına ait sürüklenme hızı o andaki ani dönme eksenine diktir.

5. 6. İvmeler ve İvme Merkezi

Eğer (5.5.1) denklemi göz önüne alınırsa

$$\ddot{X}' = \ddot{A} X + \ddot{U}' + 2\dot{A}\dot{X} + A\ddot{X} \qquad (5.6.1)$$

bulunur. Burada

$$\gamma_a' = \ddot{X}' \qquad (5.6.2)$$

mutlak ivme,

$$\gamma_f' = \ddot{A}X + \ddot{U}' \qquad (5.6.3)$$

sürüklenme ivmesi,

$$\gamma_c' = 2\dot{A}\dot{X} \qquad (5.6.4)$$

Coriolis ivmesi ve

$$\gamma_r' = A\ddot{X} \qquad (5.6.5)$$

relatif ivmedir. Böylece ivmeler arasında

$$\gamma_a = \gamma_f + \gamma_c + \gamma_r$$

bağıntısı vardır. İvmelerin meydana gelmesinde, tamamlayıcı bir ivme olan Coriolis ivmesi vardır. (5.6.4) denkleminden

$$\gamma_c = A^{-1}\gamma_c' = -2S\dot{X} = 2\varepsilon S^t \varepsilon \dot{X}$$

yazılabilir. Burada (5.5.3) denklemi göz önünde bulundurulursa

$$\vec{\gamma}_c = 2\left(\vec{\omega} \wedge \vec{V}_r\right)$$

bağıntısı elde edilir.

Böylece aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 5.6.1. $\mathbb{L}^3$, 3-boyutlu Lorentz uzayında bir parametreli harekette, bir X noktasına ait t anındaki Coriolis ivmesi, o andaki relatif hıza ve o andaki ani dönme eksenine diktir.

Şimdi t anında sürüklenme ivmesi sıfır olan noktaları araştıralım. Böyle noktalar için, (5.6.3) denkleminden

$$\ddot{A}X + \ddot{U}' = 0 \qquad (5.6.6)$$

veya

$$A^{-1}\ddot{A}X + A^{-1}\ddot{U}' = 0$$

olmalıdır. O halde $A^{-1}\ddot{A}$ nın eşitini bulmaya çalışalım. Böylece

$$AA^{-1} = I \Rightarrow A\left(\dot{A}^{-1}\right) + \dot{A}A^{-1} = 0 \Rightarrow \dot{A}\left(\dot{A}^{-1}\right) + A\left(\ddot{A}^{-1}\right) + \ddot{A}A^{-1} + \dot{A}\left(\dot{A}^{-1}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \ddot{A}A^{-1} = -\dot{A}\left(\dot{A}^{-1}\right) - A\left(\ddot{A}^{-1}\right) - \dot{A}\left(\dot{A}^{-1}\right)$$

$$\Rightarrow \ddot{A} = -\dot{A}\left(\dot{A}^{-1}\right)A - A\left(\ddot{A}^{-1}\right)A - \dot{A}\left(\dot{A}^{-1}\right)A$$

$$\Rightarrow A^{-1}\ddot{A} = -A^{-1}\dot{A}\left(\dot{A}^{-1}\right)A - \left(\ddot{A}^{-1}\right)A - A^{-1}\dot{A}\left(\dot{A}^{-1}\right)A$$

$$= \left(\dot{A}^{-1}\right)A\left(\dot{A}^{-1}\right)A - \left(\ddot{A}^{-1}\right)A + \left(\dot{A}^{-1}\right)A\left(\dot{A}^{-1}\right)A$$

$$= \left(\dot{A}^{-1}\right)A\left(\dot{A}^{-1}\right)A - \left(\ddot{A}^{-1}\right)A - \left(\dot{A}^{-1}\right)\dot{A}A^{-1}A$$

$$= \left(\dot{A}^{-1}\right)A\left(\dot{A}^{-1}\right)A - \left(\ddot{A}^{-1}\right)A - \left(\dot{A}^{-1}\right)\dot{A}$$

dır. O halde $S = \left(\dot{A}^{-1}\right)A$ olduğundan

$$A^{-1}\ddot{A} = S^2 - \dot{S} \qquad , \qquad \det\left(S^2 - \dot{S}\right) = \left\|\vec{\omega} \wedge \dot{\vec{\omega}}\right\|^2 \qquad (5.6.7)$$

bulunur. (5.6.6) denklem sisteminden, $A^{-1}\ddot{A}X = -A^{-1}\ddot{U}'$ ve $U' = -AU$ olduğundan, $\ddot{U}' = -\ddot{A}U - 2\dot{A}\dot{U} - A\ddot{U}$ değeri yerine yazılırsa

$$A^{-1}\ddot{A}X = A^{-1}\ddot{A}U + 2A^{-1}\dot{A}\dot{U} + \ddot{U}$$

elde edilir. Bu son denklem ve (5.6.7) den

$$\left(S^2 - \dot{S}\right)X = \left(S^2 - \dot{S}\right)U - 2S\dot{U} + \ddot{U} \qquad (5.6.8)$$

dir. Böylece

$$\left\|\vec{\omega} \wedge \dot{\vec{\omega}}\right\|^2 \neq 0 \qquad (5.6.9)$$

ise (5.6.8) sistemi tek türlü olarak çözülebilir ve (5.6.6) denkleminden,

$$p_1 = -\left(\ddot{A}\right)^{-1}\ddot{U} \qquad\qquad p_1' = U' - A\left(\ddot{A}\right)^{-1}\ddot{U}' \qquad (5.6.10)$$

şeklinde ivme merkezleri bulunur. (5.6.3) denklemindeki sürüklenme ivmesi bu koordinatlar cinsinden ifade edilebilir. Böylece $\gamma_f' = \ddot{A}X + \ddot{U}'$ ve $\gamma_f = A^{-1}\gamma_f'$ olduğundan

$$\gamma_f = A^{-1}\ddot{A}X + A^{-1}\ddot{U}'$$

bulunur. Burada $A^{-1}\ddot{A}$ parantezine alınırsa, (5.6.10) dan dolayı

$$\gamma_f = A^{-1}\ddot{A}\left[X + \left(\ddot{A}\right)^{-1}\ddot{U}'\right]$$

$$= A^{-1}\ddot{A}\left(X - p_1\right) \qquad (5.6.11)$$

dır. Aynı şekilde $\gamma'_f = \ddot{A}X + \ddot{U}'$ olduğundan, burada $X = A^{-1}X' + U$ ve $U = -A^{-1}U'$ değerleri yerlerine yazılırsa,

$$\gamma'_f = \ddot{A}A^{-1}X' - \ddot{A}A^{-1}U' + \ddot{U}'$$

$$\left(\ddot{A}\right)^{-1}\gamma'_f = A^{-1}X' - A^{-1}U' + \left(\ddot{A}\right)^{-1}\ddot{U}'$$

$$A\left(\ddot{A}\right)^{-1}\gamma'_f = X' - U' + A\left(\ddot{A}\right)^{-1}\ddot{U}'$$

bulunur. Bu son denklem ve (5.6.10) denkleminden

$$A\left(\ddot{A}\right)^{-1}\gamma'_f = X' - p'_1$$

$$\Rightarrow \left(\ddot{A}\right)^{-1}\gamma'_f = A^{-1}\left(X' - p'_1\right)$$

$$\Rightarrow \gamma'_f = \ddot{A}A^{-1}\left(X' - p'_1\right) \qquad (5.6.12)$$

elde edilir.

Böylece aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 5.6.2: $\mathbb{L}^3$, 3-boyutlu Lorentz uzayında bir parametreli hareketin sürüklenme ivmesi p_1 ve p'_1 koordinatları cinsinden, sırasıyla,

$$\gamma_f = A^{-1}\ddot{A}\left(X - p_1\right) \qquad \text{ve} \qquad \gamma'_f = \ddot{A}A^{-1}\left(X' - p'_1\right)$$

şeklindedir.

5. 7. İvme Eksenleri

Şimdi (5.6.9) şartının tersini ele alalım. Yani

$$\det\left(S^2 - \overset{\bullet}{S}\right) = \left\|\vec{\omega} \wedge \overset{\bullet}{\vec{\omega}}\right\|^2 = 0 \qquad (5.7.1)$$

olduğunu kabul edelim. Bu takdirde

$$rank\left(S^2 - \overset{\bullet}{S}\right) \leq 2 \qquad (5.7.2)$$

olur ve

$$\left\|\vec{\omega} \wedge \overset{\bullet}{\vec{\omega}}\right\| = 0 \qquad (5.7.3)$$

olması için, $\vec{\omega} = \vec{k}$ sabit bir vektör veya $\overset{\bullet}{\vec{\omega}} = c\vec{\omega}$ olmak zorundadır. Burada c bir sabiti ve $\vec{k}$ sabit bir vektörü göstermektedir.

Her iki durumu ayrı ayrı inceleyelim.

1. Hal

$$\vec{\omega} = \vec{k} \qquad (5.7.4)$$

olsun. Bu takdirde $\vec{\omega} \neq 0$ olduğundan, en az bir i, $\left(1 \leq i \leq 3\right)$ için

$$\omega_i = k_i \neq 0 \qquad (5.7.5)$$

dir. Bu şartlar altında

$$\dot{S} = 0 \qquad (5.7.6)$$

ve

$$rank\left(S^2 - \dot{S}\right) = rank\left(S^2\right) \qquad (5.7.7)$$

olur. Diğer taraftan, $\det\left(S^2\right)$ nin minörleri arasında

$$\det\left(a_{ii}\right) = \varepsilon_i \omega_i^2 \left(-\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2\right) \qquad (5.7.8)$$

şeklinde olanlardan en az biri sıfırdan farklıdır. O halde

$$rank\left(S^2\right) = 2 \qquad (5.7.9)$$

dir. Böylece (5.6.8) denklem sisteminin çözülebilmesi için gerek ve yeter şart

$$rank\left(S^2, S^2 U - 2S\dot{U} + \ddot{U}\right) = 2 \qquad (5.7.10)$$

olmasıdır. Bu şart ise

$$\left(S^2 - \dot{S}\right)X = \left(S^2 - \dot{S}\right)U - 2S\dot{U} + \ddot{U}$$

$$S^2 X = S^2 U - 2S\dot{U} + \ddot{U}$$

$$S^2 X = S^2 U + 2\,\varepsilon\, S^T \varepsilon \dot{U} + \ddot{U}$$

$$\varepsilon S^2 X = \varepsilon S^2 U + 2 S^T \varepsilon \dot{U} + \varepsilon \ddot{U}$$

$$\Omega^T \varepsilon S^2 X = \Omega^T \varepsilon S^2 U + 2\Omega^T S^T \varepsilon \dot{U} + \Omega^T \varepsilon \ddot{U}$$

$$\Omega^T \varepsilon \ddot{U} = 0 \qquad (5.7.11)$$

ile eşdeğerdir. O halde (5.6.8) denklem sistemi, (5.7.11) şartı altında çözülebilir. Böylece çözüm yapılırsa, ani dönme eksenine paralel olan bir doğru denklemi elde edilir. Bu doğruya ivme ekseni adı verilir.

2. Hal

$$\dot{\vec{\omega}} = c\vec{\omega} \tag{5.7.12}$$

olsun. Burada ise en az bir ω_i elemanının sabit olmadığını kabul edeceğiz, aksi takdirde

$$\dot{\omega}_i = c\omega_i$$

olduğundan

$$\dot{\vec{\omega}} = c\vec{\omega} = 0 \tag{5.7.13}$$

olur ki hareket bir sırf kayma hareketi olur. Şimdi $\det\left(S^2 - \dot{S}\right)$ nin minörleri ele alınırsa, bunların içerisinde

$$\varepsilon_i\omega_i^2\left(-\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2\right) - \varepsilon_i\left(\dot{\omega}_i\right)^2$$

şeklinde olanlardan en az bir tanesi sıfırdan farklı olur. O halde

$$rank\left(S^2 - \dot{S}\right) = 2 \tag{5.7.14}$$

dir. Böylece (5.6.8) denklem sisteminin çözülebilmesi için gerek ve yeter şart

$$rank\left(S^2 - \dot{S}, \left(S^2 - \dot{S} \right)U - 2S\dot{U} + \dot{U} \right) = 2 \qquad (5.7.15)$$

olmasıdır. Diğer taraftan bu şart yine

$$\left(S^2 - \dot{S} \right)X = \left(S^2 - \dot{S} \right)U - 2S\dot{U} + \ddot{U}$$

$$\varepsilon\left(S^2 - \dot{S} \right)X = \varepsilon\left(S^2 - \dot{S} \right)U + 2S^T\varepsilon\dot{U} + \varepsilon\ddot{U}$$

$$\Omega^T\varepsilon\left(S^2 - \dot{S} \right)X = \Omega^T\varepsilon\left(S^2 - \dot{S} \right)U + 2\Omega^T S^T\varepsilon\dot{U} + \Omega^T\varepsilon\ddot{U}$$

$$\Omega^T\varepsilon\ddot{U} = 0 \qquad (5.7.16)$$

şartı ile eşdeğerdir. Bu şartlar altında (5.6.8) denklem sistemi çözülebilir ve yine ani dönme eksenine paralel olan bir doğru denklemi elde edilir. Bundan başka (5.7.1) şartını sağlaması halinde (5.7.4) ve (5.7.12) deki iki ihtimal haricinde başka bir ihtimal mevcut olamayacağı için

$$rank\left(S^2 - \dot{S} \right) = 1$$

olamaz. O halde (5.6.8) denklem sistemi, bir düzlem denklemi temsil edemez.

Böylece aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 5.7.1. $\mathbb{L}^3$, 3-boyutlu Lorentz uzayında bir parametreli hareket bir t anında hareketli sistemin sürüklenme ivme vektörlerinin o andaki ani dönme eksenine dik oldukları noktaların geometrik yeri, $\vec{\omega} \wedge \dot{\vec{\omega}}$ vektörüne dik bir düzlemdir. Bu düzlem o anda ivme polü mevcutsa O noktasından, ivme ekseni mevcutsa O' noktasından geçer.

p_1 noktası mevcutsa (5.6.11) denklemindeki sürüklenme ivmesini $\Omega^T\varepsilon$ ile soldan çarpılırsa

$$\gamma_f = \left(S^2 - \dot{S} \right)\left(X - p_1 \right)$$

$$\Omega^T \varepsilon \gamma_f = \Omega^T \varepsilon \left(S^2 - \dot{S} \right)\left(X - p_1 \right)$$

$$\Omega^T \varepsilon \gamma_f = 0$$

elde edilir.

Böylece aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 5.7.2. $\mathbb{L}^3$, 3-boyutlu Lorentz uzayında bir parametreli harekette ivme merkezleri mevcut ise, bir t anında X noktasına ait sürüklenme ivmesi o andaki ani dönme eksenine diktir.

BÖLÜM 6. DUAL LORENTZ UZAYINDA BİR PARAMETRELİ KÜRESEL HAREKETLER

Bu bölüm de, çalışmamızın orijinal kısmı olup, $\mathbb{D}_1^3$, 3-boyutlu dual Lorentz uzayında ilk olarak bir parametreli küresel hareketler tanıtıldı ve bu hareketlerin hızları arasındaki bağıntılara yer verilerek, $\mathbb{L}^3$, 3-boyutlu Lorentz uzayda bir parametreli hareketlerle aralarındaki ilişkiler incelendi.

Daha sonra, $\mathbb{D}_1^3$, 3-boyutlu dual Lorentz uzayında bir çok kürenin birbirlerine göre küresel hareketleri incelenerek, bu hareketlerin ivmeleri, ivme merkezleri ve ivme eksenleri ile ilgili teoremler verildi.

6. 1. Dual Lorentz Uzayında Küre Hareketlerinin Gösterilmesi

$\mathbb{R}_1^3$ de sabit ve hareketli sistemler, sırasıyla, $\mathbb{L}'$ ve $\mathbb{L}$ olsun. $\mathbb{L}'$ ve $\mathbb{L}$ sistemlerinin ortonormal koordinat sistemleri de, sırasıyla, $\{O; \vec{e}_1', \vec{e}_2', \vec{e}_3'\}$ ve $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ olmak üzere

$$\langle \vec{e}_i, \vec{e}_j \rangle = \langle \vec{e}_i', \vec{e}_j' \rangle = \varepsilon_i \, \delta_{ij} \quad , \quad \varepsilon_i = \begin{cases} 1, \ \vec{e}_i \text{ veya } \vec{e}_i' \text{ space-like} \\ \text{-}1, \ \vec{e}_i \text{ veya } \vec{e}_i' \text{ time-like} \end{cases} \quad , \quad 1 \leq i, j \leq 3$$

dır. $\mathbb{L}'$ ve $\mathbb{L}$ aynı şekilde yönlendirilmiş olsun. Yani, Lorentz ortogonal dönüşüm ile birinden diğerine geçilebilsin. Bu iki sistemden herhangi birini imtiyazlı saymayıp bir diğer üçüncü sistem $\mathbb{L}_1$ olsun. $\mathbb{L}_1$ deki ortonormal koordinat sistemi $\{O; \vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3\}$ olmak üzere

$$\left\langle \vec{r}_i, \vec{r}_j \right\rangle = \varepsilon_i \, \delta_{ij} \quad , \quad \varepsilon_i = \begin{cases} 1, \; \vec{r}_i \text{ space-like} \\ -1, \; \vec{r}_i \text{ time-like} \end{cases} \quad , \quad 1 \le i, j \le 3$$

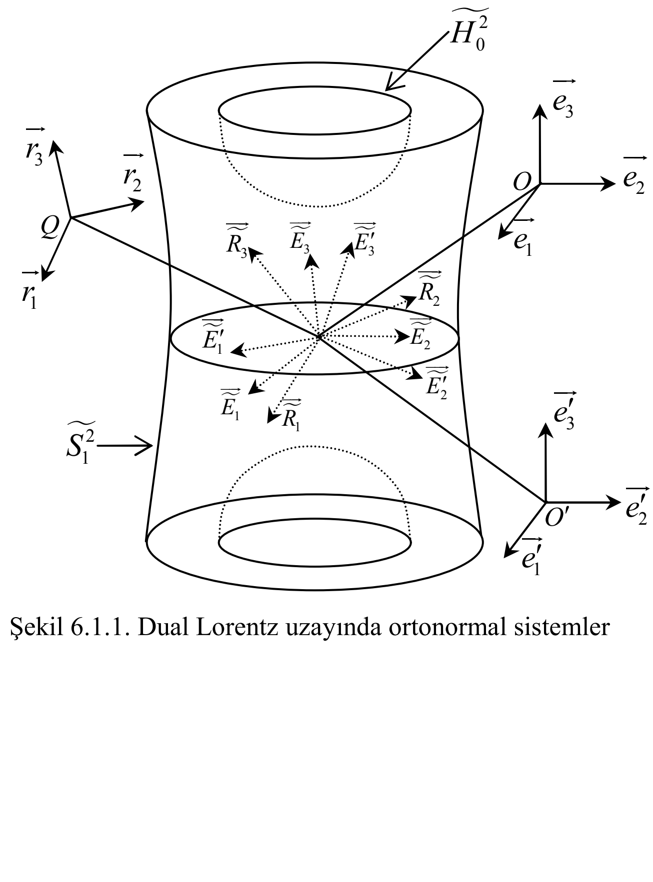
olsun ve $\mathbb{L}_1$ de $\mathbb{L}'$ ve $\mathbb{L}$ ile aynı şekilde yönlendirilmiş olsun.

Teorem 2.4.6 ile verilen E. Study teoremine göre $\vec{e}_i'$, $\vec{e}_i$, $\vec{r}_i$ $(1 \le i \le 3)$, eksenlerine, dual Lorentz uzayında, sırasıyla, aynı $\widetilde{M}$ merkezli K', K ve K_1 birim dual Lorentz kürelerinin noktaları karşılık geleceğinden, $\mathbb{L}_1 / \mathbb{L}$, $\mathbb{L}_1 / \mathbb{L}'$ dolayısıyla $\mathbb{L} / \mathbb{L}'$ hareketleri, sırasıyla, K_1 / K, K_1 / K' ve K / K' dual küresel hareketler veya dual dönme hareketleri olarak incelenebilir.

K', K ve K_1 birim dual kürelerinin ortak merkezi $\widetilde{M}$ olsun. Bu birim dual kürelere sıkı sıkıya bağlı ortonormal baz sistemleri de, sırasıyla,

$$\left\{ \widetilde{M}; \overrightarrow{\widetilde{E}_1'}, \overrightarrow{\widetilde{E}_2'}, \overrightarrow{\widetilde{E}_3'} \right\} \; , \; \left\{ \widetilde{M}; \overrightarrow{\widetilde{E}_1}, \overrightarrow{\widetilde{E}_2}, \overrightarrow{\widetilde{E}_3} \right\} \quad \text{ve} \quad \left\{ \widetilde{M}; \overrightarrow{\widetilde{R}_1}, \overrightarrow{\widetilde{R}_2}, \overrightarrow{\widetilde{R}_3} \right\}$$

olsun (Şekil 6.1.1).



Şekil 6.1.1. Dual Lorentz uzayında ortonormal sistemler

Burada

$$\overrightarrow{\widetilde{E}'_i} = \overrightarrow{e'_i} + \mathcal{E}\,\overrightarrow{e'^{*}_i}\ , \quad \overrightarrow{\widetilde{E}_i} = \overrightarrow{e_i} + \mathcal{E}\,\overrightarrow{e^{*}_i}\ ,\ \overrightarrow{\widetilde{R}_i} = \overrightarrow{r_i} + \mathcal{E}\,\overrightarrow{r^{*}_i}\quad ,\ 1 \le i \le 3$$

ve

$$\overrightarrow{e'^{*}_i} = \overrightarrow{\widetilde{MO'}} \wedge \overrightarrow{e'_i}\quad ,\quad \overrightarrow{e^{*}_i} = \overrightarrow{\widetilde{MO}} \wedge \overrightarrow{e_i}\ ,\qquad \overrightarrow{r^{*}_i} = \overrightarrow{\widetilde{MQ}} \wedge \overrightarrow{r_i}$$

dir. Bu sistemlerde aynı yönlü olurlar. Yani; bir dual Lorentz anlamda ortogonal dönüşüm ile birinden diğerine geçilebilir. Bu dönüşümler, $\widetilde{M}$ etrafındaki dual Lorentz dönmelerdir.

$$\widetilde{A} = \left[\widetilde{A_{ij}}\right],\quad \widetilde{A_{ij}} = a_{ij} + \mathcal{E}\,a^{*}_{ij}\ ,\ \widetilde{A}' = \left[\widetilde{A'_{ij}}\right],\quad \widetilde{A'_{ij}} = a'_{ij} + \mathcal{E}\,a'^{*}_{ij}$$

matrisleri, 3×3 tipinde dual Lorentz anlamda ortogonal matrisler olmak üzere,

$$\widetilde{R} = \widetilde{A}\,\widetilde{E} \ \text{ ve } \ \widetilde{R}' = \widetilde{A}'\ \widetilde{E}' \tag{6.1.1}$$

yazılabilir, burada

$$\widetilde{R} = \begin{bmatrix} \overrightarrow{\widetilde{R}_1} \\ \overrightarrow{\widetilde{R}_2} \\ \overrightarrow{\widetilde{R}_3} \end{bmatrix}\ ,\ \widetilde{E} = \begin{bmatrix} \overrightarrow{\widetilde{E}_1} \\ \overrightarrow{\widetilde{E}_2} \\ \overrightarrow{\widetilde{E}_3} \end{bmatrix}\ ,\ \widetilde{E}' = \begin{bmatrix} \overrightarrow{\widetilde{E}'_1} \\ \overrightarrow{\widetilde{E}'_2} \\ \overrightarrow{\widetilde{E}'_3} \end{bmatrix}$$

dual sütun matrisleridir.

$\widetilde{A}$ ve $\widetilde{A}'$ dual Lorentz anlamda ortogonal matrislerinin elemanları, $\tilde{t} = t + \mathcal{E}\,t^{*}$ dual parametresinin yeteri kadar türetilebilen fonksiyonlarıdır. Burada aksi söylenmedikçe $t^{*} = 0$ alınacaktır. Böylece dual Lorentz uzayında bir parametreli hareketler söz konusu olacaktır.

Şimdi $\widetilde{\vec{R}}_i$ vektörlerinin, sırasıyla, K ve K' dual Lorentz kürelerine göre diferensiyellerini hesaplayalım.

Eğer (6.1.1) denklemini göz önüne alırsak, $\tilde{R}$ nin K hareketli dual Lorentz küresine göre diferensiyeli

$$\begin{aligned} d\widetilde{R} &= d\widetilde{A}\,\widetilde{E} \\ &= d\widetilde{A}\,\widetilde{A}^{-1}\,\widetilde{R} \end{aligned} \tag{6.1.2}$$

dir. $\widetilde{\Omega} = d\widetilde{A}\,\widetilde{A}^{-1}$ olarak seçilirse, (6.1.2) denklemi

$$d\widetilde{R} = \widetilde{\Omega}\,\widetilde{R} \tag{6.1.3}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} d\widetilde{\vec{R}}_1 \\ d\widetilde{\vec{R}}_2 \\ d\widetilde{\vec{R}}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \widetilde{\Omega}_3 & -\widetilde{\Omega}_2 \\ \widetilde{\Omega}_3 & 0 & -\widetilde{\Omega}_1 \\ -\widetilde{\Omega}_2 & \widetilde{\Omega}_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widetilde{\vec{R}}_1 \\ \widetilde{\vec{R}}_2 \\ \widetilde{\vec{R}}_3 \end{bmatrix}$$

şeklinde olur. Bu denklem bileşenleri cinsinden

$$\begin{aligned} d\widetilde{\vec{R}}_1 &= \widetilde{\Omega}_3\,\widetilde{\vec{R}}_2 - \widetilde{\Omega}_2\,\widetilde{\vec{R}}_3, \\ d\widetilde{\vec{R}}_2 &= \widetilde{\Omega}_3\,\widetilde{\vec{R}}_1 - \widetilde{\Omega}_1\,\widetilde{\vec{R}}_3, \\ d\widetilde{\vec{R}}_3 &= -\widetilde{\Omega}_2\,\widetilde{\vec{R}}_1 + \widetilde{\Omega}_1\,\widetilde{\vec{R}}_2 \end{aligned}$$

dir. Bu son denklem reel ve dual bileşenlerine ayrılırsa

$$\begin{aligned} d\widetilde{\vec{R}}_1 &= \omega_3\,\vec{r}_2 - \omega_2\,\vec{r}_3 + \mathcal{E}\left(\omega_3\,\vec{r}_2^{\,*} + \omega_3^*\,\vec{r}_2 - \omega_2\,\vec{r}_3^{\,*} - \omega_2^*\,\vec{r}_3\right), \\ d\widetilde{\vec{R}}_2 &= \omega_3\,\vec{r}_1 - \omega_1\,\vec{r}_3 + \mathcal{E}\left(\omega_3\,\vec{r}_1^{\,*} + \omega_3^*\,\vec{r}_1 - \omega_1\,\vec{r}_3^{\,*} - \omega_1^*\,\vec{r}_3\right), \\ d\widetilde{\vec{R}}_3 &= -\omega_2\,\vec{r}_1 + \omega_1\,\vec{r}_2 + \mathcal{E}\left(-\omega_2\,\vec{r}_1^{\,*} - \omega_2^*\,\vec{r}_1 + \omega_1\,\vec{r}_2^{\,*} + \omega_1^*\,\vec{r}_2\right) \end{aligned} \tag{6.1.4}$$

elde edilir. Benzer şekilde (6.1.1) denklemi göz önüne alınırsa, $\widetilde{R'} = \widetilde{A'}\,\widetilde{E'}$ denkleminden

$$d'\widetilde{R} = \widetilde{\Omega'}\,\widetilde{R} \qquad (6.1.5)$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} d'\overrightarrow{\widetilde{R_1}} \\ d'\overrightarrow{\widetilde{R_2}} \\ d'\overrightarrow{\widetilde{R_3}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \widetilde{\Omega'_3} & -\widetilde{\Omega'_2} \\ \widetilde{\Omega'_3} & 0 & -\widetilde{\Omega'_1} \\ -\widetilde{\Omega'_2} & \widetilde{\Omega'_1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overrightarrow{\widetilde{R_1}} \\ \overrightarrow{\widetilde{R_2}} \\ \overrightarrow{\widetilde{R_3}} \end{bmatrix}$$

yani

$$\begin{aligned} d'\overrightarrow{\widetilde{R_1}} &= \widetilde{\Omega'_3}\,\overrightarrow{\widetilde{R_2}} - \widetilde{\Omega'_2}\,\overrightarrow{\widetilde{R_3}}, \\ d'\overrightarrow{\widetilde{R_2}} &= \widetilde{\Omega'_3}\,\overrightarrow{\widetilde{R_1}} - \widetilde{\Omega'_1}\,\overrightarrow{\widetilde{R_3}}, \\ d'\overrightarrow{\widetilde{R_3}} &= -\widetilde{\Omega'_2}\,\overrightarrow{\widetilde{R_1}} + \widetilde{\Omega'_1}\,\overrightarrow{\widetilde{R_2}} \end{aligned}$$

dir. Son denklem reel ve dual bileşenleri cinsinden

$$\begin{aligned} d'\overrightarrow{\widetilde{R_1}} &= \omega'_3\,\vec{r}_2 - \omega'_2\,\vec{r}_3 + \varepsilon\left(\omega'_3\,\vec{r}_2^{\,*} + \omega'^{*}_3\,\vec{r}_2 - \omega'_2\,\vec{r}_3^{\,*} - \omega'^{*}_2\,\vec{r}_3\right), \\ d'\overrightarrow{\widetilde{R_2}} &= \omega'_3\,\vec{r}_1 - \omega'_1\,\vec{r}_3 + \varepsilon\left(\omega'_3\,\vec{r}_1^{\,*} + \omega'^{*}_3\,\vec{r}_1 - \omega'_1\,\vec{r}_3^{\,*} - \omega'^{*}_1\,\vec{r}_3\right), \\ d'\overrightarrow{\widetilde{R_3}} &= -\omega'_2\,\vec{r}_1 + \omega'_1\,\vec{r}_2 + \varepsilon\left(-\omega'_2\,\vec{r}_1^{\,*} - \omega'^{*}_2\,\vec{r}_1 + \omega'_1\,\vec{r}_2^{\,*} + \omega'^{*}_1\,\vec{r}_2\right) \end{aligned} \qquad (6.1.6)$$

dir.

Burada $\widetilde{\Omega'} = d\widetilde{A'}\left(\widetilde{A'}\right)^{-1}$ dir. Kolayca gösterilebilir ki $\widetilde{\Omega} = d\widetilde{A}\,\widetilde{A^{-1}}$ ve $\widetilde{\Omega'} = d\widetilde{A'}\left(\widetilde{A'}\right)^{-1}$ matrisleri Lorentz anlamında birer anti-simetrik matrislerdir, yani $\widetilde{\Omega^T} = -\varepsilon\,\widetilde{\Omega}\,\varepsilon$ ve $\widetilde{\Omega'^T} = -\varepsilon\,\widetilde{\Omega'}\,\varepsilon$ dir, burada $\widetilde{\Omega^T}$, $\widetilde{\Omega}$ matrisinin transpozesidir. O halde $\widetilde{\Omega}$ anti-simetrik bir matris olduğundan, $\widetilde{\Omega_{ii}} = 0$ dır. Böylece $\widetilde{\Omega}$ matrisinde üç esas büyüklük kalır. Bu üç esas büyüklüğü i, j, k indislerinin $i, j, k = 1, 2, 3$; 2,3,1 ; 3,1,2 sıralanışları ile gösterelim. $\widetilde{\Omega_{ij}} = \widetilde{\Omega_k}$ olmak üzere

$$\widetilde{\Omega}=\begin{bmatrix}0 & \widetilde{\Omega_3} & -\widetilde{\Omega_2}\\ \widetilde{\Omega_3} & 0 & -\widetilde{\Omega_1}\\ -\widetilde{\Omega_2} & \widetilde{\Omega_1} & 0\end{bmatrix} \tag{6.1.7}$$

$$\widetilde{\Omega}=\begin{bmatrix}0 & \omega_3+\mathcal{E}\,\omega_3^* & -\omega_2-\mathcal{E}\,\omega_2^*\\ \omega_3+\mathcal{E}\,\omega_3^* & 0 & -\omega_1-\mathcal{E}\,\omega_1^*\\ -\omega_2-\mathcal{E}\,\omega_2^* & \omega_1+\mathcal{E}\,\omega_1^* & 0\end{bmatrix}$$

dual Lorentz anlamda anti-simetrik matrisi ve aynı şekilde diğer bir

$$\widetilde{\Omega}'=\begin{bmatrix}0 & \widetilde{\Omega_3'} & -\widetilde{\Omega_2'}\\ \widetilde{\Omega_3'} & 0 & -\widetilde{\Omega_1'}\\ -\widetilde{\Omega_2'} & \widetilde{\Omega_1'} & 0\end{bmatrix} \tag{6.1.8}$$

$$\widetilde{\Omega}'=\begin{bmatrix}0 & \omega_3'+\mathcal{E}\,\omega_3'^* & -\omega_2'-\mathcal{E}\,\omega_2'^*\\ \omega_3'+\mathcal{E}\,\omega_3'^* & 0 & -\omega_1'-\mathcal{E}\,\omega_1'^*\\ -\omega_2'-\mathcal{E}\,\omega_2'^* & \omega_1'+\mathcal{E}\,\omega_1'^* & 0\end{bmatrix}$$

dual Lorentz anlamda anti-simetrik matrisi elde edilir. Burada $\widetilde{\Omega_i}=\omega_i+\mathcal{E}\,\omega_i^*$ ve $\widetilde{\Omega_i'}=\omega_i'+\mathcal{E}\,\omega_i'^*$, $\left(1\le i\le 3\right)$ dual Pfaff formları (1-formları) dırlar.

(6.1.4) ve (6.1.6) denklemleri reel ve dual kısımlarına ayrılırsa reel kısımları, sırasıyla, $\mathbb{L}_1/\mathbb{L}$ ve $\mathbb{L}_1/\mathbb{L}'$ Lorentz uzayında bir parametreli hareketlerin dönme kısmı ile ilgili Pfaff formlarını verir. $\mathbb{R}_1^3$ deki her $\mathbb{L}/\mathbb{L}'$ hareketi bir "D" dönme ve bir "S" kayma hareketi ile ilgilidir.

K_1 birim dual Lorentz küresi üzerinde bir $\widetilde{X}$ noktası

$$\overrightarrow{\widetilde{X}}=\widetilde{X^T}\,\widetilde{R} \tag{6.1.9}$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada $\widetilde{X}$ noktasının $\left\{\widetilde{M}; \vec{\widetilde{R}}_1, \vec{\widetilde{R}}_2, \vec{\widetilde{R}}_3\right\}$ izafi sistemine göre koordinatları $\widetilde{X}_i = x_i + \mathcal{E}\, x_i^*$ $\left(1 \le i \le 3\right)$ olmak üzere

$$-\widetilde{X}_1^2 + \widetilde{X}_2^2 + \widetilde{X}_3^2 = \left(1,0\right) = 1$$

dır ve

$$\widetilde{X} = \begin{bmatrix} \widetilde{X}_1 \\ \widetilde{X}_2 \\ \widetilde{X}_3 \end{bmatrix}$$

şeklinde bir dual sütun matrisidir.

$\widetilde{X}$ noktası K_1 birim dual Lorentz küresinin keyfi hareketli bir noktası olsun. K_1 / K ve K_1 / K' dual Lorentz dönmelerine göre $\vec{\widetilde{X}}$ birim dual vektörünün değişimlerini inceleyelim $\widetilde{X}$ noktasının K hareketli dual Lorentz küresine göre değişimi, (6.1.9) denkleminden

$$d\vec{\widetilde{X}} = d\widetilde{X}^T \widetilde{R} + \widetilde{X}^T d\widetilde{R}$$

dir. Burada $d\widetilde{R} = \widetilde{\Omega}\widetilde{R}$ değeri yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} d\vec{\widetilde{X}} &= d\widetilde{X}^T \widetilde{R} + \widetilde{X}^T \widetilde{\Omega}\widetilde{R} \\ &= \left(d\widetilde{X}^T + \widetilde{X}^T \widetilde{\Omega}\right)\widetilde{R} \qquad (6.1.10) \end{aligned}$$

bulunur. (6.1.10) denklemi bileşenleri cinsinden yazılırsa

$$d\overrightarrow{\widetilde{X}} = \left(\begin{bmatrix} d\widetilde{X}_1 & d\widetilde{X}_2 & d\widetilde{X}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \widetilde{X}_1 & \widetilde{X}_2 & \widetilde{X}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \widetilde{\Omega}_3 & -\widetilde{\Omega}_2 \\ \widetilde{\Omega}_3 & 0 & -\widetilde{\Omega}_1 \\ -\widetilde{\Omega}_2 & \widetilde{\Omega}_1 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \overrightarrow{\widetilde{R}_1} \\ \overrightarrow{\widetilde{R}_2} \\ \overrightarrow{\widetilde{R}_3} \end{bmatrix}$$

veya

$$d\overrightarrow{\widetilde{X}} = \left(d\widetilde{X}_1 + \widetilde{X}_2 \widetilde{\Omega}_3 - \widetilde{X}_3 \widetilde{\Omega}_2 \right) \overrightarrow{\widetilde{R}_1} + \left(d\widetilde{X}_2 + \widetilde{X}_1 \widetilde{\Omega}_3 + \widetilde{X}_3 \widetilde{\Omega}_1 \right) \overrightarrow{\widetilde{R}_2} + \left(d\widetilde{X}_3 - \widetilde{X}_1 \widetilde{\Omega}_2 - \widetilde{X}_2 \widetilde{\Omega}_1 \right) \overrightarrow{\widetilde{R}_3}$$

elde edilir. Bu son denklem reel ve dual bileşenlerine ayrılırsa

$$\begin{aligned} d\overrightarrow{\widetilde{X}} = {} & \left(dx_1 + x_2\,\omega_3 - x_3\,\omega_2 \right) \vec{r}_1 + \mathcal{E}\left[\left(dx_1^* + x_2\,\omega_3^* + x_2^*\,\omega_3 - x_3\,\omega_2^* - x_3^*\,\omega_2 \right) \vec{r}_1 + \left(dx_1 + \omega_3\,x_2 - x_3\,\omega_2 \right) \vec{r}_1^{\,*} \right] \\ & + \left(dx_2 + x_1\,\omega_3 + x_3\,\omega_1 \right) \vec{r}_2 + \mathcal{E}\left[\left(dx_2^* + x_1\,\omega_3^* + x_1^*\,\omega_3 + x_3\,\omega_1^* + x_3^*\,\omega_1 \right) \vec{r}_2 + \left(dx_2 + \omega_3\,x_1 + x_3\,\omega_1 \right) \vec{r}_2^{\,*} \right] \\ & + \left(dx_3 - x_1\,\omega_2 - x_2\,\omega_1 \right) \vec{r}_3 + \mathcal{E}\left[\left(dx_3^* - x_1\,\omega_2^* - x_1^*\,\omega_2 - x_2\,\omega_1^* - x_2^*\,\omega_1 \right) \vec{r}_3 + \left(dx_3 - \omega_2\,x_1 - x_2\,\omega_1 \right) \vec{r}_3^{\,*} \right] \end{aligned}$$

bulunur. Böylece $\widetilde{X}$ noktasının relatif hız vektörü bulunmuş olur.

Benzer şekilde, $\widetilde{X}$ noktasının K' sabit dual Lorentz küresine göre değişimi (6.1.9) denkleminden

$$d'\overrightarrow{\widetilde{X}} = d\widetilde{X}^T \widetilde{R} + \widetilde{X}^T d'\widetilde{R}$$

ve burada $d'\widetilde{R} = \widetilde{\Omega}'\widetilde{R}$ değeri yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} d'\overrightarrow{\widetilde{X}} &= d\widetilde{X}^T \widetilde{R} + \widetilde{X}^T \widetilde{\Omega}' \widetilde{R} \\ &= \left(d\widetilde{X}^{\mathrm{T}} + \widetilde{X}^{\mathrm{T}} \widetilde{\Omega}' \right) \widetilde{R} \end{aligned} \qquad (6.1.11)$$

dır. (6.1.11) denklemi bileşenlerine ayrılırsa,

$$d'\overrightarrow{\widetilde{X}} = \left(\begin{bmatrix} d\widetilde{X}_1 & d\widetilde{X}_2 & d\widetilde{X}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \widetilde{X}_1 & \widetilde{X}_2 & \widetilde{X}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \widetilde{\Omega}'_3 & -\widetilde{\Omega}'_2 \\ \widetilde{\Omega}'_3 & 0 & -\widetilde{\Omega}'_1 \\ -\widetilde{\Omega}'_2 & \widetilde{\Omega}'_1 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \overrightarrow{\widetilde{R}_1} \\ \overrightarrow{\widetilde{R}_2} \\ \overrightarrow{\widetilde{R}_3} \end{bmatrix}$$

veya

$$d'\overrightarrow{\widetilde{X}} = \left(d\widetilde{X}_1 + \widetilde{X}_2 \widetilde{\Omega}'_3 - \widetilde{X}_3 \widetilde{\Omega}'_2 \right) \overrightarrow{\widetilde{R}_1} + \left(d\widetilde{X}_2 + \widetilde{X}_1 \widetilde{\Omega}'_3 + \widetilde{X}_3 \widetilde{\Omega}'_1 \right) \overrightarrow{\widetilde{R}_2} + \left(d\widetilde{X}_3 - \widetilde{X}_1 \widetilde{\Omega}'_2 - \widetilde{X}_2 \widetilde{\Omega}'_1 \right) \overrightarrow{\widetilde{R}_3}$$

bulunur. Bu son denklem reel ve dual bileşenleri cinsinden

$$\begin{aligned} d'\overrightarrow{\widetilde{X}} = {} & \left(dx_1 + x_2\,\omega'_3 - x_3\,\omega'_2 \right) \vec{r}_1 + \mathcal{E}\left[\left(dx_1^* + x_2\,\omega_3'^* + x_2^*\,\omega'_3 - x_3\,\omega_2'^* - x_3^*\,\omega'_2 \right) \vec{r}_1 + \left(dx_1 + \omega'_3\,x_2 - x_3\,\omega'_2 \right) \vec{r}_1^{\,*} \right] \\ & + \left(dx_2 + x_1\,\omega'_3 + x_3\,\omega'_1 \right) \vec{r}_2 + \mathcal{E}\left[\left(dx_2^* + x_1\,\omega_3'^* + x_1^*\,\omega'_3 + x_3\,\omega_1'^* + x_3^*\,\omega'_1 \right) \vec{r}_2 + \left(dx_2 + \omega'_3\,x_1 + x_3\,\omega'_1 \right) \vec{r}_2^{\,*} \right] \\ & + \left(dx_3 - x_1\,\omega'_2 - x_2\,\omega'_1 \right) \vec{r}_3 + \mathcal{E}\left[\left(dx_3^* - x_1\,\omega_2'^* - x_1^*\,\omega'_2 - x_2\,\omega_1'^* - x_2^*\,\omega'_1 \right) \vec{r}_3 + \left(dx_3 - \omega'_2\,x_1 - x_2\,\omega'_1 \right) \vec{r}_3^{\,*} \right] \end{aligned}$$

dir. Böylece $\widetilde{X}$ noktasının mutlak hız vektörü bulunmuş olur.

$\widetilde{X}$ noktasının K birim dual Lorentz küresi üzerinde sabit kalma koşulu $d\overrightarrow{\widetilde{X}} = 0$ olacağından, (6.1.10) denkleminden

$$d\widetilde{X}^T = -\widetilde{X}^T \widetilde{\Omega} \qquad (6.1.12)$$

yani

$$d\widetilde{X}_1 = -\widetilde{X}_2 \widetilde{\Omega}_3 + \widetilde{X}_3 \widetilde{\Omega}_2 \quad , \quad d\widetilde{X}_2 = -\widetilde{X}_1 \widetilde{\Omega}_3 - \widetilde{X}_3 \widetilde{\Omega}_1 \quad , \quad d\widetilde{X}_3 = \widetilde{X}_1 \widetilde{\Omega}_2 + \widetilde{X}_2 \widetilde{\Omega}_1$$

elde edilir. Buradan,

$$\begin{aligned} & dx_1 = -x_2\,\omega_3 + x_3\,\omega_2 , \; dx_1^* = -x_2\,\omega_3^* - x_2^*\,\omega_3 + x_3\,\omega_2^* + x_3^*\,\omega_2 , \\ & dx_2 = -x_1\,\omega_3 - x_3\,\omega_1 , \; dx_2^* = -x_1\,\omega_3^* - x_1^*\,\omega_3 - x_3\,\omega_1^* - x_3^*\,\omega_1 , \end{aligned}$$

$$dx_3 = x_1\,\omega_2 + x_2\,\omega_1\,,\ dx_3^* = x_1\,\omega_2^* + x_1^*\,\omega_2 + x_2\,\omega_1^* + x_2^*\,\omega_1$$

olur.

$\widetilde{X}$ noktasının K' birim dual Lorentz küresi üzerinde sabit kalma koşulu $d'\overrightarrow{\widetilde{X}} = 0$ olacağından, (6.1.11) denkleminden

$$d\,\widetilde{X}^T = -\widetilde{X}^T\,\widetilde{\Omega}' \qquad (6.1.13)$$

yani

$$d\,\widetilde{X}_1 = -\widetilde{X}_2\,\widetilde{\Omega}_3' + \widetilde{X}_3\,\widetilde{\Omega}_2' \quad , \quad d\,\widetilde{X}_2 = -\widetilde{X}_1\,\widetilde{\Omega}_3' - \widetilde{X}_3\,\widetilde{\Omega}_1' \quad , \quad d\,\widetilde{X}_3 = \widetilde{X}_1\,\widetilde{\Omega}_2' + \widetilde{X}_2\,\widetilde{\Omega}_1'$$

dir, böylece

$$\begin{aligned}
dx_1 &= -x_2\,\omega_3' + x_3\,\omega_2' \quad , \quad dx_1^* = -x_2\,\omega_3'^* - x_2^*\,\omega_3' + x_3\,\omega_2'^* + x_3^*\,\omega_2'\,,\\
dx_2 &= -x_1\,\omega_3' - x_3\,\omega_1' \quad , \quad dx_2^* = -x_1\,\omega_3'^* - x_1^*\,\omega_3' - x_3\,\omega_1'^* - x_3^*\,\omega_1'\,,\\
dx_3 &= x_1\,\omega_2' + x_2\,\omega_1' \quad , \quad dx_3^* = x_1\,\omega_2'^* + x_1^*\,\omega_2' + x_2\,\omega_1'^* + x_2^*\,\omega_1'
\end{aligned}$$

olur.

Şimdi kabul edelim ki $\widetilde{X}$ noktası K birim dual Lorentz küresi üzerinde sabit olsun. O halde $\overrightarrow{\widetilde{X}}$ dual vektörünün K' birim dual Lorentz küresine göre hızına $\overrightarrow{\widetilde{X}}$ dual vektörünün sürüklenme hızı denir ve $d_f\overrightarrow{\widetilde{X}}$ ile gösterilir.

$\overrightarrow{\widetilde{X}}$ in K da sabit olma şartı (6.1.12) denklemini (6.1.11) denkleminde yerine koymakla elde edilir. Böylece

$$d_f\overrightarrow{\widetilde{X}} = \left(-\widetilde{X}^T\,\widetilde{\Omega} + \widetilde{X}^T\,\widetilde{\Omega}'\right)\widetilde{R}$$

$$= \widetilde{X}^T \left(\widetilde{\Omega}' - \widetilde{\Omega}\right)\widetilde{R} \qquad (6.1.14)$$

dir. (6.1.14) denklemi açık bir ifade ile

$$d_f \overrightarrow{\widetilde{X}} = \begin{bmatrix} \widetilde{X}_1 & \widetilde{X}_2 & \widetilde{X}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \widetilde{\Omega}'_3 - \widetilde{\Omega}_3 & -\left(\widetilde{\Omega}'_2 - \widetilde{\Omega}_2\right) \\ \widetilde{\Omega}'_3 - \widetilde{\Omega}_3 & 0 & -\left(\widetilde{\Omega}'_1 - \widetilde{\Omega}_1\right) \\ -\left(\widetilde{\Omega}'_2 - \widetilde{\Omega}_2\right) & \widetilde{\Omega}'_1 - \widetilde{\Omega}_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overrightarrow{\widetilde{R}_1} \\ \overrightarrow{\widetilde{R}_2} \\ \overrightarrow{\widetilde{R}_3} \end{bmatrix}$$

yani

$$\begin{aligned} d_f \overrightarrow{\widetilde{X}} = {} & \left(\widetilde{X}_2\left(\widetilde{\Omega}'_3 - \widetilde{\Omega}_3\right) - \widetilde{X}_3\left(\widetilde{\Omega}'_2 - \widetilde{\Omega}_2\right)\right)\overrightarrow{\widetilde{R}_1} + \left(\widetilde{X}_1\left(\widetilde{\Omega}'_3 - \widetilde{\Omega}_3\right) + \widetilde{X}_3\left(\widetilde{\Omega}'_1 - \widetilde{\Omega}_1\right)\right)\overrightarrow{\widetilde{R}_2} \\ & + \left(-\widetilde{X}_1\left(\widetilde{\Omega}'_2 - \widetilde{\Omega}_2\right) - \widetilde{X}_2\left(\widetilde{\Omega}'_1 - \widetilde{\Omega}_1\right)\right)\overrightarrow{\widetilde{R}_3} \end{aligned} \qquad (6.1.15)$$

şeklini alır. Bu son denklem reel ve dual bileşenleri cinsinden

$$\begin{aligned} d_f \overrightarrow{\widetilde{X}} = {} & \left(x_2\left(\omega'_3 - \omega_3\right) - x_3\left(\omega'_2 - \omega_2\right)\right)\vec{r}_1 + \mathcal{E}\begin{pmatrix} \left(x_2\left(\omega'^*_3 - \omega^*_3\right) + x^*_2\left(\omega'_3 - \omega_3\right) - x_3\left(\omega'^*_2 - \omega^*_2\right) - x^*_3\left(\omega'_2 - \omega_2\right)\right)\vec{r}_1 \\ +\left(x_2\left(\omega'_3 - \omega_3\right) - x_3\left(\omega'_2 - \omega_2\right)\right)\vec{r}^{\,*}_1 \end{pmatrix} \\ & + \left(x_1\left(\omega'_3 - \omega_3\right) + x_3\left(\omega'_1 - \omega_1\right)\right)\vec{r}_2 + \mathcal{E}\begin{pmatrix} \left(x_1\left(\omega'^*_3 - \omega^*_3\right) + x^*_1\left(\omega'_3 - \omega_3\right) + x_3\left(\omega'^*_1 - \omega^*_1\right) + x^*_3\left(\omega'_1 - \omega_1\right)\right)\vec{r}_2 \\ +\left(x_1\left(\omega'_3 - \omega_3\right) + x_3\left(\omega'_1 - \omega_1\right)\right)\vec{r}^{\,*}_2 \end{pmatrix} \\ & + \left(-x_1\left(\omega'_2 - \omega_2\right) - x_2\left(\omega'_1 - \omega_1\right)\right)\vec{r}_3 + \mathcal{E}\begin{pmatrix} \left(-x_1\left(\omega'^*_2 - \omega^*_2\right) - x^*_1\left(\omega'_2 - \omega_2\right) - x_2\left(\omega'^*_1 - \omega^*_1\right) - x^*_2\left(\omega'_1 - \omega_1\right)\right)\vec{r}_3 \\ +\left(-x_1\left(\omega'_2 - \omega_2\right) - x_2\left(\omega'_1 - \omega_1\right)\right)\vec{r}^{\,*}_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

olur. Burada bileşenleri

$$\widetilde{\Psi}_i = \widetilde{\Omega}'_i - \widetilde{\Omega}_i \quad , \quad 1 \le i \le 3 \qquad (6.1.16)$$

olan yeni bir

$$\overrightarrow{\widetilde{\Psi}} = -\widetilde{\Psi}_1 \overrightarrow{\widetilde{R}_1} + \widetilde{\Psi}_2 \overrightarrow{\widetilde{R}_2} + \widetilde{\Psi}_3 \overrightarrow{\widetilde{R}_3}$$

vektörü göz önüne alınırsa,

$$\overrightarrow{\widetilde{\Psi}} \wedge \overrightarrow{\widetilde{X}} = \begin{vmatrix} -\overrightarrow{\widetilde{R}}_1 & \overrightarrow{\widetilde{R}}_2 & \overrightarrow{\widetilde{R}}_3 \\ -\widetilde{\Psi}_1 & \widetilde{\Psi}_2 & \widetilde{\Psi}_3 \\ \widetilde{X}_1 & \widetilde{X}_2 & \widetilde{X}_3 \end{vmatrix} = \left(\widetilde{X}_2\widetilde{\Psi}_3 - \widetilde{X}_3\widetilde{\Psi}_2\right)\overrightarrow{\widetilde{R}}_1 + \left(\widetilde{X}_1\widetilde{\Psi}_3 + \widetilde{X}_3\widetilde{\Psi}_1\right)\overrightarrow{\widetilde{R}}_2 + \left(-\widetilde{X}_2\widetilde{\Psi}_1 - \widetilde{X}_1\widetilde{\Psi}_2\right)\overrightarrow{\widetilde{R}}_3$$

elde edilir. Bu son denklem ile birlikte (6.1.15) ve (6.1.16) denklemleri göz önüne alınırsa

$$d_f \overrightarrow{\widetilde{X}} = \overrightarrow{\widetilde{\Psi}} \wedge \overrightarrow{\widetilde{X}} \qquad (6.1.17)$$

olduğu görülür.

$$\widetilde{X}_i = x_i + \mathcal{E}\, x_i^*, \quad \widetilde{\Psi}_i = \psi_i + \mathcal{E}\,\psi_i^*, \quad 1 \le i \le 3$$

olduğundan, (6.1.15) denklemi reel ve dual kısımlarına ayrılırsa

$$\begin{aligned} d_f \overrightarrow{\widetilde{X}} &= \left(x_2\psi_3 - x_3\psi_2\right)\vec{r}_1 + \mathcal{E}\left(\left(x_2\psi_3^* + x_2^*\psi_3 - x_3\psi_2^* - x_3^*\psi_2\right)\vec{r}_1 + \left(x_2\psi_3 - x_3\psi_2\right)\vec{r}_1^{\,*}\right) \\ &+ \left(x_1\psi_3 + x_3\psi_1\right)\vec{r}_2 + \mathcal{E}\left(\left(x_1\psi_3^* + x_1^*\psi_3 + x_3\psi_1^* + x_3^*\psi_1\right)\vec{r}_2 + \left(x_1\psi_3 + x_3\psi_1\right)\vec{r}_2^{\,*}\right) \\ &+ \left(-x_1\psi_2 - x_2\psi_1\right)\vec{r}_3 + \mathcal{E}\left(\left(-x_1\psi_2^* - x_1^*\psi_2 - x_2\psi_1^* - x_2^*\psi_1\right)\vec{r}_3 + \left(-x_1\psi_2 - x_2\psi_1\right)\vec{r}_3^{\,*}\right) \end{aligned} \qquad (6.1.18)$$

bulunur.

$\overrightarrow{\widetilde{\Psi}}$ dual vektörüne K/K' hareketinin ani dual Lorentz Pfaff vektörü de denir. $\overrightarrow{\widetilde{\Psi}}$ nin $\vec{\psi}$ reel ve $\vec{\psi}^*$ dual kısımları K/K' dual Lorentz dönme hareketine karşılık gelen $\mathbb{L}/\mathbb{L}'$ Lorentz uzay hareketinin, sırasıyla, ani dönme ve ani kayma Pfaff vektörlerine karşılık gelir. Sırf dönme ve sırf kayma hareketlerini hariç tutmak için, aksi söylenmedikçe $\vec{\psi} \neq \vec{0}$ ve $\vec{\psi}^* \neq \vec{0}$ alınacaktır.

$\vec{\psi} \neq \vec{0}$ olmak üzere,

$$\vec{\widetilde{\Psi}} = \left\|\vec{\widetilde{\Psi}}\right\| \vec{\widetilde{P}} \quad , \quad \left\|\vec{\widetilde{P}}\right\|^2 = 1$$

şeklinde yazılabileceğinden,

$$\vec{\widetilde{P}} = \vec{p} + \mathcal{E}\,\vec{p}^{\,*}$$

birim dual vektörü ∓ 1 çarpan farkı ile tek anlamlı olarak belirlenmiş olur.

$$\left\|\vec{\widetilde{\Psi}}\right\| = \psi + \mathcal{E}\,\psi^* = \widetilde{\Psi}$$

ani dual Lorentz dönme açısıdır, burada $\psi = \left\|\vec{\psi}\right\|$ ve $\psi^* = \dfrac{\left\langle \vec{\psi}, \vec{\psi}^{\,*} \right\rangle}{\left\|\vec{\psi}\right\|}$ dır.

$\vec{\widetilde{\Psi}}$ ani dual dönme vektörü ile birim dual Lorentz küresinin ani dual Lorentz dönmesi belli olur. Bu dual Lorentz dönme, $\widetilde{P}$ dönme polü etrafında $\widetilde{\Psi}$ ani dual Lorentz dönme açısı ile oluşur.

$\vec{\widetilde{\Psi}}$ dual vektörü, $\mathbb{R}_1^3$ çizgiler uzayında $\vec{\widetilde{P}}$ ekseni etrafında oluşan ani helis hareketini belirtir. Burada ψ değeri, $\vec{\widetilde{P}}$ ekseni etrafındaki sonsuz küçük dönme açısını ve ψ^* da $\vec{\widetilde{P}}$ ekseni boyunca sonsuz küçük kayma uzunluğunu gösterir. Ani helis hareketinin k parametresi (adımı), kayma uzunluğunun dönme açısına oranı ile yani

$$k = \frac{\left\langle \vec{\psi}, \vec{\psi}^{\,*} \right\rangle}{\left\|\vec{\psi}\right\|^2} = \frac{-\psi_1\,\psi_1^* + \psi_2\,\psi_2^* + \psi_3\,\psi_3^*}{-\psi_1^2 + \psi_2^2 + \psi_3^2} = \frac{\psi^*}{\psi}$$

ile verilir. Böylece şu teorem elde edilir.

Teorem 6.1.1. Bir t anında Lorentz uzayında bir parametreli $\mathbb{L}/\mathbb{L}'$ hareketi, $\mathbb{L}$ hareketli sistemin $\mathbb{L}'$ sabit sistemine göre $\overrightarrow{\overline{P}}$ ani helis ekseni etrafında k adımlı sonsuz küçük bir ani helisel hareketinden ibarettir.

Teorem 6.1.2. Lorentz uzayında bir parametreli $\mathbb{L}/\mathbb{L}'$ hareketinde, $\mathbb{L}'$ nün bir doğrusu $\mathbb{L}$ nin bir noktasının yörüngesini dik olarak keserse, bu doğru aynı zamanda $\mathbb{L}$ ye ait ifade edilen, kendisinin bütün noktalarının yörüngeleri içinde normal olur.

$k=0$ için ani helis hareketi $\overrightarrow{\overline{P}}$ ekseni etrafındaki sırf dönmeye dejenere olur. İlk olarak $\vec{\psi} \neq \vec{0}$ edilmişti. Şimdi kabul edelim ki $\vec{\psi} = \vec{0}$ ve $\vec{\psi}^* \neq \vec{0}$ olsun. Bu takdirde,

$$d_f \overrightarrow{\overline{X}} = \overrightarrow{\overline{\Psi}} \wedge \overrightarrow{\overline{X}}$$

formülünü reel ve dual kısımlara ayıralım. $\vec{\psi} = \vec{0}$ olduğundan $\psi_1 = \psi_2 = \psi_3 = 0$ olur. Böylece (6.1.18) denkleminden

$$d_f \overrightarrow{\overline{X}} = \varepsilon\left(\left(x_2 \psi_3^* - x_3 \psi_2^*\right)\vec{r}_1 + \left(x_1 \psi_3^* + x_3 \psi_1^*\right)\vec{r}_2 + \left(-x_1 \psi_2^* - x_2 \psi_1^*\right)\vec{r}_3\right)$$

elde edilir. O halde $d_f \overrightarrow{\overline{X}}$ in reel ve dual kısımları, sırasıyla,

$$d_f \vec{x} = 0 \quad , \quad d_f \vec{x}^* = \vec{\psi}^* \wedge \vec{x}$$

dir. Buradan $\mathbb{L}/\mathbb{L}'$ hareketinde $\overrightarrow{\overline{X}}$ doğrultusunun kendi doğrultusunu değiştirmediği, yani, t anında hareketin bir kayma olduğu sonucuna varılır. Demek ki, $\vec{\psi}$ nin özdeş olarak sıfır olması S kayma hareketini karakterize eder.

6. 2. Dual Kanonik Koordinat Sistemi ve Dual Eksen Yüzeyleri

$k \neq 0$ koşulu altında $\vec{\tilde{P}} = \vec{\tilde{R}}_3$ olacak şekilde yeni bir izafi sistemi seçelim. $\vec{\tilde{P}} = \vec{\tilde{R}}_3$ olması, $\vec{\tilde{P}}$ nın $\vec{\tilde{R}}_1$ ve $\vec{\tilde{R}}_2$ ya dik olduğunu ifade eder.

$$
\begin{aligned}
\vec{\tilde{\Psi}} &= -\tilde{\Psi}_1 \vec{\tilde{R}}_1 + \tilde{\Psi}_2 \vec{\tilde{R}}_2 + \tilde{\Psi}_3 \vec{\tilde{R}}_3 \\
&= -\left(\psi_1 + \mathcal{E}\psi_1^*\right)\vec{\tilde{R}}_1 + \left(\psi_2 + \mathcal{E}\psi_2^*\right)\vec{\tilde{R}}_2 + \left(\psi_3 + \mathcal{E}\psi_3^*\right)\vec{\tilde{R}}_3
\end{aligned}
$$

ve

$$
\vec{\tilde{\Psi}} = \left\| \vec{\tilde{\Psi}} \right\| \vec{\tilde{P}} \quad , \quad \left\| \vec{\tilde{P}} \right\|^2 = 1
$$

ifadeleri

$$
\begin{aligned}
0 &= \left\langle \vec{\tilde{\Psi}}, \vec{\tilde{R}}_1 \right\rangle = \psi_1 + \mathcal{E}\psi_1^* = \tilde{\Psi}_1 \Rightarrow \psi_1 = \psi_1^* = 0 \\
0 &= \left\langle \vec{\tilde{\Psi}}, \vec{\tilde{R}}_2 \right\rangle = \psi_2 + \mathcal{E}\psi_2^* = \tilde{\Psi}_2 \Rightarrow \psi_2 = \psi_2^* = 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
0 &= \tilde{\Psi}_1 = \tilde{\Omega}_1' - \tilde{\Omega}_1 \Rightarrow \tilde{\Omega}_1' = \tilde{\Omega}_1 \\
0 &= \tilde{\Psi}_2 = \tilde{\Omega}_2' - \tilde{\Omega}_2 \Rightarrow \tilde{\Omega}_2' = \tilde{\Omega}_2
\end{aligned}
\qquad (6.2.1)
$$

olmasını gerektirir. O halde sonsuz küçük helis hareketinin adımı

$$
k = \frac{\left\langle \vec{\psi}, \vec{\psi}^* \right\rangle}{\left\| \vec{\psi} \right\|^2} = \frac{\psi^*}{\psi} = \frac{-\psi_1\psi_1^* + \psi_2\psi_2^* + \psi_3\psi_3^*}{-\psi_1^2 + \psi_2^2 + \psi_3^2} = \frac{\psi_3^*}{\psi_3}
$$

olur.

Seçilen izafi sistemi, $\vec{\tilde{P}} = \vec{\tilde{R}}_3$ koşulu ile tek anlamlı olarak belirlenmemiştir. Çünkü, bu sistemin $\vec{\tilde{R}}_3$ etrafında keyfi olarak dönebilme olanağı vardır.

Yani, $\left\{\widetilde{Q};\ \overrightarrow{\widetilde{R}}_i,\ 1 \le i \le 3\right\}$ izafi sistemi $\overrightarrow{\widetilde{P}}$ ekseni etrafında helisel hareket yapabilir. Bu serbestlik derecesi $\overrightarrow{\widetilde{R}}_1$ ve $\overrightarrow{\widetilde{R}}_2$ nin özel olarak seçilmesi için kullanışlıdır.

$\overrightarrow{\widetilde{R}}_1$ ve $\overrightarrow{\widetilde{R}}_2$ eksenleri, $\overrightarrow{\widetilde{R}}_3$ ekseni etrafında $\widetilde{\Phi} = \varphi + \mathcal{E}\varphi^*$ dual açısı kadar aynı yönde döndürülsün ve yeni sistem $\left\{\widetilde{M};\ \overrightarrow{\widetilde{\widetilde{R}}}_i,\ 1 \le i \le 3\right\}$ ile gösterilsin. Bu sistem için

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\widetilde{\widetilde{R}}}_1 &= \cosh\widetilde{\Phi}\ \overrightarrow{\widetilde{R}}_1 + \sinh\widetilde{\Phi}\ \overrightarrow{\widetilde{R}}_2\,, \\
\overrightarrow{\widetilde{\widetilde{R}}}_2 &= \sinh\widetilde{\Phi}\ \overrightarrow{\widetilde{R}}_1 + \cosh\widetilde{\Phi}\ \overrightarrow{\widetilde{R}}_2\,, \\
\overrightarrow{\widetilde{\widetilde{R}}}_3 &= \overrightarrow{\widetilde{R}}_3
\end{aligned} \qquad (6.2.2)$$

bağıntıları yazılabilir. Bu yeni sistemde Bölüm 6. 1. deki gibi, benzer şekilde,

$$\widetilde{B}\,\varepsilon\,\widetilde{B}^T = \varepsilon \quad \text{ve} \quad \widetilde{B}'\,\varepsilon\,\widetilde{B}'^T = \varepsilon$$

olmak üzere

$$\widetilde{\widetilde{R}} = \widetilde{B}\,\widetilde{E} \quad \text{ve} \quad \widetilde{\widetilde{R}} = \widetilde{B}'\,\widetilde{E}'$$

yazılabilir. $\overrightarrow{\widetilde{\widetilde{R}}}_i$, $(1 \le i \le 3)$, birim dual vektörlerinin $\widetilde{E}$ ve $\widetilde{E}'$ sistemlerine göre değişimleri, sırasıyla,

$$\begin{aligned}
d\widetilde{\widetilde{R}} &= d\widetilde{B}\ \widetilde{E} \\
d\widetilde{\widetilde{R}} &= d\widetilde{B}\ \widetilde{B}^{-1}\ \widetilde{\widetilde{R}}
\end{aligned}\ ,\qquad
\begin{aligned}
d'\widetilde{\widetilde{R}} &= d\widetilde{B}'\ \widetilde{E}' \\
d'\widetilde{\widetilde{R}} &= d\widetilde{B}'\ \left(\widetilde{B}'\right)^{-1}\ \widetilde{\widetilde{R}}
\end{aligned}$$

dir. Eğer

$$\widetilde{\widetilde{\Omega}} = d\widetilde{B}\ \widetilde{B}^{-1} \quad , \quad \widetilde{\widetilde{\Omega}}' = d\widetilde{B}'\left(\widetilde{B}'\right)^{-1}$$

olarak seçilirse

$$d\widetilde{\widetilde{R}} = \widetilde{\widetilde{\Omega}}\ \widetilde{\widetilde{R}} \quad , \quad d'\widetilde{\widetilde{R}} = \widetilde{\widetilde{\Omega}}'\ \widetilde{\widetilde{R}} \qquad (6.2.3)$$

olur, burada $\widetilde{\widetilde{\Omega}}$ ve $\widetilde{\widetilde{\Omega}}'$ dual Lorentz anlamda anti-simetrik matrislerdir.

$$d\widetilde{R} = \widetilde{\Omega}\ \widetilde{R} \quad , \quad d'\widetilde{R} = \widetilde{\Omega}'\ \widetilde{R} \qquad (6.2.4)$$

olduğundan,

$$\overrightarrow{\widetilde{\widetilde{R}}}_1 = \cosh\widetilde{\Phi}\ \overrightarrow{\widetilde{R}}_1 + \sinh\widetilde{\Phi}\ \overrightarrow{\widetilde{R}}_2 , \qquad (6.2.5)$$

$$\overrightarrow{\widetilde{\widetilde{R}}}_2 = \sinh\widetilde{\Phi}\ \overrightarrow{\widetilde{R}}_1 + \cosh\widetilde{\Phi}\ \overrightarrow{\widetilde{R}}_2 \qquad (6.2.6)$$

ifadelerinde diferensiyel alarak $\widetilde{\widetilde{\Omega}}_1$, $\widetilde{\widetilde{\Omega}}_2$, $\widetilde{\widetilde{\Omega}}_3$ dual Lorentz 1-formları, $\widetilde{\Omega}_1$, $\widetilde{\Omega}_2$, $\widetilde{\Omega}_3$ dual Lorentz 1-formları cinsinden ifade edilebilir. (6.2.5) denklemi göz önüne alınırsa

$$d\overrightarrow{\widetilde{\widetilde{R}}}_1 = d\overrightarrow{\widetilde{R}}_1 \cosh\widetilde{\Phi} + \overrightarrow{\widetilde{R}}_1 \sinh\widetilde{\Phi}\, d\widetilde{\Phi} + d\overrightarrow{\widetilde{R}}_2 \sinh\widetilde{\Phi} + \overrightarrow{\widetilde{R}}_2 \cosh\widetilde{\Phi}\, d\widetilde{\Phi}$$

olur. Eğer (6.2.3) ve (6.2.4) denklemlerinde bu değerler yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} \widetilde{\widetilde{\Omega}}_3 \overrightarrow{\widetilde{\widetilde{R}}}_2 - \widetilde{\widetilde{\Omega}}_2 \overrightarrow{\widetilde{\widetilde{R}}}_3 = {} & \left(\widetilde{\Omega}_3 \overrightarrow{\widetilde{R}}_2 - \widetilde{\Omega}_2 \overrightarrow{\widetilde{R}}_3\right)\cosh\widetilde{\Phi} + \overrightarrow{\widetilde{R}}_1 \sinh\widetilde{\Phi}\, d\widetilde{\Phi} \\ & + \left(\widetilde{\Omega}_3 \overrightarrow{\widetilde{R}}_1 - \widetilde{\Omega}_1 \overrightarrow{\widetilde{R}}_3\right)\sinh\widetilde{\Phi} + \overrightarrow{\widetilde{R}}_2 \cosh\widetilde{\Phi}\, d\widetilde{\Phi} \end{aligned}$$

bulunur. Bu son denklem ile birlikte (6.2.2) denkleminden

$$\overline{\widetilde{\Omega}}_3\left(\sinh\widetilde{\Phi}\;\overline{\overrightarrow{R}}_1+\cosh\widetilde{\Phi}\;\overline{\overrightarrow{R}}_2\right)-\overline{\widetilde{\Omega}}_2\,\overline{\overline{\overrightarrow{R}}}_3=\left(\sinh\widetilde{\Phi}\,d\widetilde{\Phi}+\widetilde{\Omega}_3\sinh\widetilde{\Phi}\right)\overline{\overrightarrow{R}}_1$$
$$+\left(\cosh\widetilde{\Phi}\,d\widetilde{\Phi}+\widetilde{\Omega}_3\cosh\widetilde{\Phi}\right)\overline{\overrightarrow{R}}_2$$
$$+\left(-\widetilde{\Omega}_1\sinh\widetilde{\Phi}-\widetilde{\Omega}_2\cosh\widetilde{\Phi}\right)\overline{\overrightarrow{R}}_3$$

elde edilir. Buradan

$$\overline{\widetilde{\Omega}}_2=\widetilde{\Omega}_1\sinh\widetilde{\Phi}+\widetilde{\Omega}_2\cosh\widetilde{\Phi}$$
$$\overline{\widetilde{\Omega}}_3=\widetilde{\Omega}_3+d\widetilde{\Phi} \qquad (6.2.7)$$

bulunur. (6.2.6) ile verilen denklemin diferensiyeli alınırsa

$$d\overline{\overline{\overrightarrow{R}}}_2=d\overline{\overrightarrow{R}}_1\sinh\widetilde{\Phi}+\overline{\overrightarrow{R}}_1\cosh\widetilde{\Phi}\,d\widetilde{\Phi}+d\overline{\overrightarrow{R}}_2\cosh\widetilde{\Phi}+\overline{\overrightarrow{R}}_2\sinh\widetilde{\Phi}\,d\widetilde{\Phi}$$

bulunur. (6.2.3) ve (6.2.4) deki ifadeler bu son denklemde yerine yazılırsa

$$\overline{\widetilde{\Omega}}_3\,\overline{\overline{\overrightarrow{R}}}_1-\overline{\widetilde{\Omega}}_1\,\overline{\overline{\overrightarrow{R}}}_3=\left(\widetilde{\Omega}_3\,\overline{\overrightarrow{R}}_2-\widetilde{\Omega}_2\,\overline{\overrightarrow{R}}_3\right)\sinh\widetilde{\Phi}+\overline{\overrightarrow{R}}_1\cosh\widetilde{\Phi}\,d\widetilde{\Phi}$$
$$+\left(\widetilde{\Omega}_3\,\overline{\overrightarrow{R}}_1-\widetilde{\Omega}_1\,\overline{\overrightarrow{R}}_3\right)\cosh\widetilde{\Phi}+\overline{\overrightarrow{R}}_2\sinh\widetilde{\Phi}\,d\widetilde{\Phi} \qquad (6.2.8)$$

elde edilir. (6.2.2) ve (6.2.8) denklemlerinden

$$\overline{\widetilde{\Omega}}_3\left(\cosh\tilde{\Phi}\,\overline{\overrightarrow{R}}_1+\sinh\tilde{\Phi}\,\overline{\overrightarrow{R}}_2\right)-\overline{\widetilde{\Omega}}_1\,\overline{\overline{\overrightarrow{R}}}_3=\left(\cosh\tilde{\Phi}\,d\tilde{\Phi}+\widetilde{\Omega}_3\cosh\tilde{\Phi}\right)\overline{\overrightarrow{R}}_1$$
$$+\left(\sinh\tilde{\Phi}\,d\tilde{\Phi}+\widetilde{\Omega}_3\sinh\tilde{\Phi}\right)\overline{\overrightarrow{R}}_2$$
$$+\left(-\widetilde{\Omega}_1\cosh\tilde{\Phi}-\widetilde{\Omega}_2\sinh\tilde{\Phi}\right)\overline{\overrightarrow{R}}_3$$

elde edilir. Buradan

$$\overline{\widetilde{\Omega}}_1=\widetilde{\Omega}_1\cosh\widetilde{\Phi}+\widetilde{\Omega}_2\sinh\widetilde{\Phi}$$

$$\widetilde{\widetilde{\Omega}}_3 = \widetilde{\Omega}_3 + d\widetilde{\Phi} \qquad (6.2.9)$$

olur. Böylece (6.2.7) ve (6.2.9) denklemlerinden

$$\begin{aligned} \widetilde{\widetilde{\Omega}}_1 &= \widetilde{\Omega}_1 \cosh\widetilde{\Phi} + \widetilde{\Omega}_2 \sinh\widetilde{\Phi}, \\ \widetilde{\widetilde{\Omega}}_2 &= \widetilde{\Omega}_1 \sinh\widetilde{\Phi} + \widetilde{\Omega}_2 \cosh\widetilde{\Phi}, \\ \widetilde{\widetilde{\Omega}}_3 &= \widetilde{\Omega}_3 + d\widetilde{\Phi} \end{aligned} \qquad (6.2.10)$$

bulunur. Şimdi $\widetilde{\widetilde{\Omega}}_1 = 0$ olacak şekilde $\widetilde{\Phi} = \varphi + \mathcal{E}\varphi^*$ açısını ele alalım. Böylece

$$\begin{aligned} \widetilde{\widetilde{\Omega}}_1 &= \overline{\omega}_1 + \mathcal{E}\,\overline{\omega}_1^* = 0 \\ \Rightarrow 0 &= \overline{\omega}_1 + \mathcal{E}\,\overline{\omega}_1^* = \left(\omega_1 + \mathcal{E}\,\omega_1^*\right)\cosh\widetilde{\Phi} + \left(\omega_2 + \mathcal{E}\,\omega_2^*\right)\sinh\widetilde{\Phi} \end{aligned} \qquad (6.2.11)$$

bulunur. Taylor formülünden $f\left(x + \mathcal{E}x^*\right) = f(x) + \mathcal{E}x^* f'(x)$ olduğunu biliyoruz. Böylece

$$\begin{aligned} \cosh\left(\varphi + \mathcal{E}\varphi^*\right) &= \cosh\varphi + \mathcal{E}\varphi^* \sinh\varphi, \\ \sinh\left(\varphi + \mathcal{E}\varphi^*\right) &= \sinh\varphi + \mathcal{E}\varphi^* \cosh\varphi \end{aligned}$$

değerleri, (6.2.11) denkleminde yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned} 0 = \overline{\omega}_1 + \mathcal{E}\,\overline{\omega}_1^* &= \left(\omega_1 + \mathcal{E}\,\omega_1^*\right)\left(\cosh\varphi + \mathcal{E}\varphi^*\sinh\varphi\right) + \left(\omega_2 + \mathcal{E}\,\omega_2^*\right)\left(\sinh\varphi + \mathcal{E}\varphi^*\cosh\varphi\right) \\ &= \omega_1\cosh\varphi + \omega_2\sinh\varphi + \mathcal{E}\left(\omega_1^*\cosh\varphi + \omega_1\varphi^*\sinh\varphi + \omega_2\varphi^*\cosh\varphi + \omega_2^*\sinh\varphi\right) \end{aligned}$$

elde edilir. O halde yukarıdaki son eşitlikten dolayı

$$\begin{aligned} \overline{\omega}_1 &= \omega_1\cosh\varphi + \omega_2\sinh\varphi, \\ \overline{\omega}_1^* &= \omega_1^*\cosh\varphi + \omega_2^*\sinh\varphi + \varphi^*\left(\omega_1\sinh\varphi + \omega_2\cosh\varphi\right) \end{aligned} \qquad (6.2.12)$$

olur. Eğer (6.2.10) denklemi göz önüne alınırsa,

$$\bar{\omega}_2 + \mathcal{E}\,\bar{\omega}_2^* = \left(\omega_1 + \mathcal{E}\,\omega_1^*\right)\left(\sinh\varphi + \mathcal{E}\,\varphi^*\cosh\varphi\right) + \left(\omega_2 + \mathcal{E}\,\omega_2^*\right)\left(\cosh\varphi + \mathcal{E}\,\varphi^*\sinh\varphi\right)$$
$$= \omega_1\sinh\varphi + \omega_2\cosh\varphi + \mathcal{E}\left(\omega_1^*\sinh\varphi + \omega_1\,\varphi^*\cosh\varphi + \omega_2^*\cosh\varphi + \omega_2\,\varphi^*\sinh\varphi\right)$$

bulunur. Son eşitlikten dolayı da

$$\begin{aligned} \bar{\omega}_2 &= \omega_1\sinh\varphi + \omega_2\cosh\varphi\,, \\ \bar{\omega}_2^* &= \omega_1^*\sinh\varphi + \omega_2^*\cosh\varphi + \varphi^*\left(\omega_1\cosh\varphi + \omega_2\sinh\varphi\right) \end{aligned} \qquad (6.2.13)$$

dir. (6.2.13) denkleminde, $\bar{\omega}_2 = \omega_1\sinh\varphi + \omega_2\cosh\varphi$ değeri (6.2.12) denkleminde yerine yazılırsa, (6.2.12) denklemi

$$\begin{aligned} \bar{\omega}_1 &= \omega_1\cosh\varphi + \omega_2\sinh\varphi\,, \\ \bar{\omega}_1^* &= \omega_1^*\cosh\varphi + \omega_2^*\sinh\varphi + \varphi^*\,\bar{\omega}_2 \end{aligned}$$

şeklini alır.

Bu denklemlerden $\widetilde{\Phi}$ dual açısı tayin edilebilir. Şimdi hesap edilen $\widetilde{\Phi}$ dual açısı kadar dual Lorentz küresi üzerinde bir dual dönmenin veya $\mathbb{R}_1^3$ de helisel hareketin yapıldığı kabul edilir ve "$-$" işareti sadelik amacı ile kaldırılırsa

$$d\overline{\widetilde{R}} = \overline{\widetilde{\Omega}}\;\overline{\widetilde{R}} \quad , \quad d'\overline{\widetilde{R}} = \overline{\widetilde{\Omega}'}\;\overline{\widetilde{R}}$$

ifadeleri, sırasıyla,

$$\begin{bmatrix} d\vec{\widetilde{R}}_1 \\ d\vec{\widetilde{R}}_2 \\ d\vec{\widetilde{R}}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \widetilde{\Omega}_3 & -\widetilde{\Omega}_2 \\ \widetilde{\Omega}_3 & 0 & 0 \\ -\widetilde{\Omega}_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{\widetilde{R}}_1 \\ \vec{\widetilde{R}}_2 \\ \vec{\widetilde{R}}_3 \end{bmatrix} \qquad (6.2.14)$$

ve

$$\begin{bmatrix} d'\overrightarrow{\widetilde{R}_1} \\ d'\overrightarrow{\widetilde{R}_2} \\ d'\overrightarrow{\widetilde{R}_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \widetilde{\Omega_3'} & -\widetilde{\Omega_2} \\ \widetilde{\Omega_3'} & 0 & 0 \\ -\widetilde{\Omega_2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overrightarrow{\widetilde{R}_1} \\ \overrightarrow{\widetilde{R}_2} \\ \overrightarrow{\widetilde{R}_3} \end{bmatrix} \qquad (6.2.15)$$

olur.

$\overrightarrow{\widetilde{P}} = \overrightarrow{\widetilde{R}_3}$ birim dual vektörü, hareketli K birim dual Lorentz küresi üzerinde $\left(\widetilde{P}\right)$ hareketli dual Lorentz pol eğrisini ve sabit K' birim dual Lorentz küresi üzerinde de $\left(\widetilde{P'}\right)$ sabit dual Lorentz pol eğrisini çizer. $\mathbb{L}/\mathbb{L}'$ hareketi yapılırken, bu dual pol eğrileri bir biri üzerinde yuvarlanırlar,

O halde (6.2.14) ve (6.2.15) denklemleri göz önüne alınırsa

$$d\overrightarrow{\widetilde{R}_3} = -\widetilde{\Omega_2}\,\overrightarrow{\widetilde{R}_1} \text{ ve } d'\overrightarrow{\widetilde{R}_3} = -\widetilde{\Omega_2}\,\overrightarrow{\widetilde{R}_1}$$

olduklarından $\widetilde{P}$ nin K ve K' deki hızları birbirinin aynıdır. Başka bir değişle iki eğri daima birbirine teğettir.

Böylece aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 6.2.1. $\widetilde{P}$ dual dönme polü, hareketli ve sabit küreler üzerinde, sırasıyla, $\left(\widetilde{P}\right)$ ve $\left(\widetilde{P'}\right)$ dual pol eğrilerini çizerken sahip olduğu hız vektörleri her anda birbirinin aynısıdır.

Teorem 6.2.1 den dolayı her t anında $\left(\widetilde{P}\right)$ nin t_0, t_1 e karşılık gelen noktaları arasındaki dual yay uzunluğu,

$$\tilde{s} = \int_{t_0}^{t} \left\| d\overrightarrow{\widetilde{R}_3} \right\| dt$$

ve

$$d\tilde{s} = \left\| d\overrightarrow{\widetilde{R_3}} \right\| dt$$

dir.

$\left(\widetilde{P'}\right)$ nin t_0 ve t_1 e karşılık gelen noktaları arasındaki dual yay uzunluğu,

$$\tilde{s}' = \int_{t_0}^{t} \left\| d'\overrightarrow{\widetilde{R_3}} \right\| dt$$

ve

$$d\tilde{s}' = \left\| d'\overrightarrow{\widetilde{R_3}} \right\| dt$$

olur. Teorem 6.2.1. den $d\overrightarrow{\widetilde{R_3}} = d'\overrightarrow{\widetilde{R_3}}$ olduğu gösterilmişti. Dolayısıyla

$$\left\| d\overrightarrow{\widetilde{R_3}} \right\| = \left\| d'\overrightarrow{\widetilde{R_3}} \right\|$$

olur. Böylece

$$d\tilde{s} = d\tilde{s}'$$

bulunur.

Böylece aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 6.2.2. $\mathbb{D}_1^3$, 3-boyutlu dual Lorentz uzayında bir parametreli dual küresel harekette K nin küresel $\left(\widetilde{P}\right)$ hareketli dual pol eğrisi, K' nün $\left(\widetilde{P'}\right)$ sabit dual pol eğrisi üzerinde kaymaksızın yuvarlanır.

6. 3. Dual Lorentz Uzayında Bir Çok Kürenin Birbirine Göre Hareketleri

$\mathbb{D}_1^3$, 3-boyutlu dual Lorentz uzayında bir cismin bir parametreli hareketi

$$\begin{bmatrix} \widetilde{X}' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \widetilde{A} & \widetilde{U}' \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widetilde{X} \\ 1 \end{bmatrix} \qquad (6.3.1.)$$

ile tanımlanan dönüşüm yardımıyla verilir, burada $\widetilde{A}$, 3×1 tipinde dual Lorentz ortogonal matris, $\widetilde{X}$, $\widetilde{X}'$ ve $\widetilde{U}'$ 3×1 tipinde matrislerdir. Ayrıca $\widetilde{A}$ ve $\widetilde{U}'$ matrisleri, bir $\tilde{t} = t + \varepsilon t^*$ dual parametresinin yeteri kadar türetilebilen fonksiyonlarıdır. Burada aksi söylenmedikçe $t^* = 0$ alınacaktır. Böylece dual Lorentz uzayda bir parametreli hareketler söz konusu olacaktır. $\vec{\widetilde{X}}$ ve $\vec{\widetilde{X}'}$ vektörleri aynı bir $\widetilde{X}$ noktasının, sırasıyla, K hareketli ve K' sabit uzaydaki ortonormal koordinat sistemine göre yer vektörlerini göstermektedir. $t = t_0$ başlangıç anında K ve K' deki koordinat sistemlerini çakışık kabul ediyoruz.

K ve K' dual Lorentz kürelerinde, sırasıyla, $\left\{\widetilde{M};\, \vec{\widetilde{E}_1}, \vec{\widetilde{E}_2}, \vec{\widetilde{E}_3}\right\}$ ve $\left\{\widetilde{M};\, \vec{\widetilde{E}'_1}, \vec{\widetilde{E}'_2}, \vec{\widetilde{E}'_3}\right\}$ dual Lorentz ortonormal koordinat sistemleri olsun, burada

$$\vec{\widetilde{E}'_i} = \vec{e'_i} + \varepsilon \vec{e'^*_i}\ , \qquad \vec{\widetilde{E}_i} = \vec{e_i} + \varepsilon \vec{e^*_i}\ , \ 1 \le i \le 3$$

ve

$$\vec{e'^*_i} = \overrightarrow{\widetilde{M}O'} \wedge \vec{e'_i} \quad , \qquad \vec{e^*_i} = \overrightarrow{\widetilde{M}O} \wedge \vec{e_i}\ , \ 1 \le i \le 3$$

dir. Şimdi bu iki koordinat sisteminin birbirine göre durumlarını inceleyelim. (6.3.1) denkleminden

$$\widetilde{X}' = \widetilde{A}\widetilde{X} + \widetilde{U}' \qquad (6.3.2)$$

dir. Bu son denklemde $\widetilde{U}' = -\widetilde{A}\widetilde{U}$ ve $\widetilde{U} = -\widetilde{A^{-1}}\,\widetilde{U}'$ bağıntıları kullanılırsa

$$\widetilde{X} = \widetilde{A^{-1}}\,\widetilde{X}' + \widetilde{U} \qquad (6.3.3)$$

elde edilir. Böylece, iki sistem arasındaki koordinat geçişlerini temsil etmiş oluruz.

6. 4. Dual Hızlar ve Ani Dönme Ekseni

$\widetilde{X}$ dual noktasının sabit dual Lorentz küresine göre hızını hesaplayalım. Bunun için (6.3.2) denkleminin t reel parametresine göre diferensiyeli alınırsa

$$\dot{\widetilde{X}}' = \dot{\widetilde{A}}\widetilde{X} + \widetilde{A}\dot{\widetilde{X}} + \dot{\widetilde{U}}' \qquad (6.4.1)$$

olur. Böylece, $\widetilde{X}$ nın mutlak hızı,

$$\widetilde{V}_a' = \dot{\widetilde{X}}'$$

dır. Bu kısımda t ye göre türevler "•" ile gösterilecektir.

$\widetilde{X}$ noktası hareketli sisteme göre sabit kabul edilerek, (6.3.2) denkleminde diferensiyel alınırsa, $\widetilde{X}$ noktasının sürüklenme hızı

$$\widetilde{V}_f' = \dot{\widetilde{A}}\widetilde{X} + \dot{\widetilde{U}}' \qquad (6.4.2)$$

olarak elde edilir.

$\widetilde{X}$ noktasının relatif hızı, $\widetilde{X}$ noktasının sabit sisteme göre sabit olması yani sürüklenme hızının sıfır olma durumunda söz konusudur. Böylece relatif hız

$$\widetilde{V}_r' = \widetilde{A}\dot{\widetilde{X}} \qquad (6.4.3)$$

şeklinde elde edilir. Bu ifadelerden

$$\widetilde{V}_a = \widetilde{V}_f + \widetilde{V}_r$$

olduğu görülür.

Böylece aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 6.4.1. $\mathbb{D}_1^3$, dual Lorentz uzayında bir $\widetilde{X}$ noktasının mutlak hız vektörü, relatif hız vektörü ile sürüklenme hız vektörünün toplamına eşittir.

Şimdi her iki sistemde aynı anda sabit kalan noktaları (pol noktalarını) araştıralım. Bu noktalar sürüklenme hızının sıfır olması ile karakterize edilir, yani,

$$\dot{\widetilde{X}}' = \dot{\widetilde{A}}\widetilde{X} + \dot{\widetilde{U}}' = 0$$

olmalıdır. $\widetilde{U}' = -\widetilde{A}\widetilde{U}$ olduğundan, $\dot{\widetilde{U}}' = -\dot{\widetilde{A}}\widetilde{U} - \widetilde{A}\dot{\widetilde{U}}$ göz önüne alınırsa,

$$\widetilde{A^{-1}}\dot{\widetilde{A}}\widetilde{X} = \widetilde{A^{-1}}\dot{\widetilde{A}}\widetilde{U} + \dot{\widetilde{U}}$$

elde edilir. O halde pol noktaları için aşağıdaki iki denklem sağlanır.

$$\dot{\widetilde{X}}' = \dot{\widetilde{A}}\widetilde{X} + \dot{\widetilde{U}}' = 0 \text{ veya } \widetilde{A^{-1}}\dot{\widetilde{A}}\widetilde{X} = \widetilde{A^{-1}}\dot{\widetilde{A}}\widetilde{U} + \dot{\widetilde{U}} \quad . \qquad (6.4.4)$$

Bu lineer denklem sisteminin çözümü tek değildir. Çünkü; $\widetilde{A^{-1}}\widetilde{A} = \widetilde{A}\widetilde{A^{-1}} = I_3$ olduğundan,

$$\left(\dot{\widetilde{A^{-1}}}\right)\widetilde{A} + \widetilde{A^{-1}}\dot{\widetilde{A}} = 0 \quad , \quad \dot{\widetilde{A}}\widetilde{A^{-1}} + \widetilde{A}\left(\dot{\widetilde{A^{-1}}}\right) = 0$$

elde edilir. Burada $\widetilde{S} = \left(\overset{\bullet}{\widetilde{A^{-1}}}\right)\widetilde{A}$ ve $\widetilde{S'} = \widetilde{A}\left(\overset{\bullet}{\widetilde{A^{-1}}}\right)$ kabul edilirse, $\widetilde{S}$ ve $\widetilde{S'}$ matrislerinin Lorentz anlamda anti-simetrik matris oldukları kolayca gösterilebilir.

Lorentz anlamda anti-simetrik $\widetilde{S}$ matrisinin bileşenleri $\widetilde{\Omega_{ij}}$, $\left(1 \leq i, j \leq 3\right)$ olmak üzere i, j, k indislerinin $i, j, k = 1,2,3\,;\,2,3,1\,;\,3,1,2$, sıralanışı

$$\widetilde{\Omega_{ij}} = \widetilde{\Omega_k}$$

ile gösterilirse kolayca elde ederiz ki

$$\widetilde{S} = \begin{bmatrix} 0 & \widetilde{\Omega_3} & -\widetilde{\Omega_2} \\ \widetilde{\Omega_3} & 0 & -\widetilde{\Omega_1} \\ -\widetilde{\Omega_2} & \widetilde{\Omega_1} & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & \omega_3 + \mathcal{E}\,\omega_3^* & -\omega_2 - \mathcal{E}\,\omega_2^* \\ \omega_3 + \mathcal{E}\,\omega_3^* & 0 & -\omega_1 - \mathcal{E}\,\omega_1^* \\ -\omega_2 - \mathcal{E}\,\omega_2^* & \omega_1 + \mathcal{E}\,\omega_1^* & 0 \end{bmatrix}$$

matrisi dual Lorentz anlamda anti-simetrik matristir. Benzer şekilde

$$\widetilde{S'} = \begin{bmatrix} 0 & \widetilde{\widetilde{\Omega_3'}} & -\widetilde{\widetilde{\Omega_2'}} \\ \widetilde{\widetilde{\Omega_3'}} & 0 & -\widetilde{\widetilde{\Omega_1'}} \\ -\widetilde{\widetilde{\Omega_2'}} & \widetilde{\widetilde{\Omega_1'}} & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & \overline{\omega_3'} + \mathcal{E}\,\overline{\omega_3'^*} & -\overline{\omega_2'} - \mathcal{E}\,\overline{\omega_2'^*} \\ \overline{\omega_3'} + \mathcal{E}\,\overline{\omega_3'^*} & 0 & -\overline{\omega_1'} - \mathcal{E}\,\overline{\omega_1'^*} \\ -\overline{\omega_2'} - \mathcal{E}\,\overline{\omega_2'^*} & \overline{\omega_1'} + \mathcal{E}\,\overline{\omega_1'^*} & 0 \end{bmatrix}$$

matrisi dual Lorentz anlamda anti-simetrik matristir, burada

$$\widetilde{\Omega}_i = \omega_i + \mathcal{E}\,\omega_i^* \quad \text{ve} \quad \widetilde{\widetilde{\Omega}}_i' = \overline{\omega_i'} + \mathcal{E}\,\overline{\omega_i'^*} \quad , \; 1 \le i \le 3$$

dual Pfaff formları (1-formları) dır.

Herhangi bir $\tilde{\Omega} = \begin{bmatrix} \widetilde{\Omega}_1 \\ \widetilde{\Omega}_2 \\ \widetilde{\Omega}_3 \end{bmatrix}$ ve $\widetilde{\widetilde{\Omega}}' = \begin{bmatrix} \widetilde{\widetilde{\Omega}}_1' \\ \widetilde{\widetilde{\Omega}}_2' \\ \widetilde{\widetilde{\Omega}}_3' \end{bmatrix}$ için

$$\tilde{S}\,\widetilde{\Omega} = 0 \qquad , \qquad \widetilde{S'}\,\widetilde{\widetilde{\Omega}}' = 0$$

olduğu görülebilir. Burada $\det \widetilde{S} = 0$ ve $\det \widetilde{S'} = 0$ dır.

$$\widetilde{A^{-1}} = \varepsilon\,\widetilde{A}^T\varepsilon \Rightarrow \det \widetilde{A^{-1}} = \det \widetilde{A} = \det \widetilde{A}^T$$

olduğundan,

$$\begin{aligned} \widetilde{A}\,\varepsilon\,\widetilde{A}^T &= \varepsilon \\ \det \widetilde{A} \det \varepsilon \det \widetilde{A}^T &= \det \varepsilon \\ \left(\det \widetilde{A}\right)^2 &= 1 \\ \det \widetilde{A} &= \mp 1 \end{aligned}$$

yani

$$\det \widetilde{A} \neq 0$$

dır. Böylece $\tilde{S} = \left(\dot{\widetilde{A^{-1}}}\right)\widetilde{A}$ olduğundan

$$\det \tilde{S} = \det\left(\dot{\widetilde{A^{-1}}}\right)\widetilde{A} = \det\left(\dot{\widetilde{A^{-1}}}\right)\det \widetilde{A} = \det \dot{\widetilde{A}} = 0$$

bulunur. O halde $\dot{\tilde{A}}$ singülerdir ve $rank\left(\tilde{S}\right)=rank\left(\dot{\tilde{A}}\right)$ dır. Şimdi $n=3$ ve $\tilde{A}\in SO_1(3)$ iken $rank\,\dot{\tilde{A}}$ yı bulalım.

$\tilde{A}^T\varepsilon\tilde{A}=\varepsilon$ eşitliğinin *t* parametresine göre diferensiyeli alınırsa

$$\left(\dot{\tilde{A}}^T\right)\varepsilon\tilde{A}+\tilde{A}^T\varepsilon\dot{\tilde{A}}=0$$

bulunur.

$$\tilde{h}=\left(\dot{\tilde{A}}^T\right)\varepsilon\tilde{A}$$

olarak seçilirse

$$\begin{aligned}\tilde{h}+\tilde{h}^T&=0\\ \tilde{h}^T&=-\tilde{h}\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ifade eder ki $\tilde{h}$ anti-simetrik bir matristir. Böylece $\tilde{A}\in SO_1(3)$ olduğundan

$$\begin{aligned}\det\tilde{h}&=(-1)^3\det\tilde{h}\\ \det\tilde{h}&=0\end{aligned}$$

olur. Bu durumda $rank\,\tilde{h}\leq 2$ olmalıdır. Şayet $rank\,\tilde{h}=r$ ise r çift olmak zorundadır. Çünkü, $\tilde{h}$ nin bütün tek mertebeden karesel alt matrislerinin determinantı sıfırdır.

Şimdi $\tilde{h} = \left(\dot{\tilde{A}}^{T}\right)\varepsilon\tilde{A}$ eşitliğinin her iki tarafının determinantını alalım:

$$\det\tilde{h} = \det\left(\dot{\tilde{A}}^{T}\right)\det\varepsilon\det\tilde{A}$$

olduğundan,

$$\det\dot{\tilde{A}} = 0$$

olur. Buradan,

$$rank\ \tilde{h} = rank\ \dot{\tilde{A}} = r$$

bulunur. $n = 3$ olduğuna göre

$$rank\ \dot{\tilde{A}} = 2$$

olur. Böylece (6.4.4) denkleminden

$$\widetilde{A^{-1}}\,\dot{\tilde{A}}\,\widetilde{X} = \widetilde{A^{-1}}\,\dot{\tilde{A}}\,\widetilde{U} + \dot{\widetilde{U}}$$

$$-\widetilde{S}\,\widetilde{X} = -\widetilde{S}\,\widetilde{U} + \dot{\widetilde{U}}$$

veya

$$\varepsilon\,\widetilde{S}^{T}\varepsilon\,\widetilde{X} = \varepsilon\,\widetilde{S}^{T}\varepsilon\,\widetilde{U} + \dot{\widetilde{U}} \qquad (6.4.5)$$

elde edilir. O halde

$$rank\left(-\widetilde{S}\right) = rank\widetilde{S} = rank\,\dot{\widetilde{A}} = 2$$

olduğundan $rank\left(-\widetilde{S},\dot{\widetilde{U}}\right) = rank\left(\widetilde{A^{-1}}\,\dot{\widetilde{A}},\dot{\widetilde{U}}\right) = rank\,\dot{\widetilde{A}} = 2$ bulunur. Bu şart altında (yani $rank\,\dot{\widetilde{A}} = 2$ ise), $\widetilde{S}\,\widetilde{\Omega} = 0$ ve $\widetilde{\Omega}^T\,\widetilde{S}^T = 0$ eşitliklerini göz önünde bulundurarak, (6.4.5) denklemi soldan $\widetilde{\Omega}^T\,\varepsilon$ ile çarpılırsa

$$\widetilde{\Omega}^T\,\varepsilon\,\dot{\widetilde{U}} = 0 \qquad (6.4.6)$$

elde edilir, burada $\vec{\widetilde{\Omega}} \neq 0$ kabul edilmiştir.

Bu şartlar altında (yani $\widetilde{\Omega}^T\,\varepsilon\,\dot{\widetilde{U}} = 0$), (6.4.4) denklem sistemi çözülebilir ve bir doğru denklemi elde edilir. Bu doğru *t* anında her iki sistemde birden sabit kalan ani dönme eksenidir. $\widetilde{Y}$ bu eksen üzerinde değişken herhangi bir nokta olmak üzere (6.4.4) sisteminden

$$-\widetilde{S}\,\widetilde{Y} = -\widetilde{S}\,\widetilde{U} + \dot{\widetilde{U}}$$

yazılabilir. Sistemin çözümünden, ani dönme ekseninin doğrultusunun $\vec{\widetilde{\Omega}}$ dual vektörüne paralel olduğu görülür. $\vec{\widetilde{\Omega}}$ dual vektörüne açısal hız vektörü de denir. Bunun bileşenlerini kolayca hesaplayabilmek için $\widetilde{A}$ dual Lorentz ortogonal matrisini Euler açıları cinsinden ifade edelim.

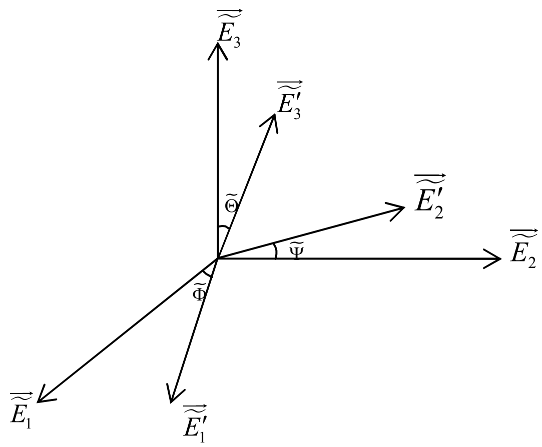
Kaymaksızın üç farklı dönme hareketiyle hareketli sistemden sabit sisteme geçilebilir. Böylece

i) $\vec{\widetilde{E}}_3$ -ekseni etrafında $\widetilde{\Phi}$ dual açısı kadar,

ii) $\vec{\widetilde{E}}_1'$ -ekseni etrafında $\widetilde{\Theta}$ dual açısı kadar,

iii) $\overrightarrow{\widetilde{E}_3'}$ -ekseni etrafında $\widetilde{\Psi}$ dual açısı kadar

bir dönme yapılırsa (Şekil 6.4.1),



Şekil 6.4.1 Dual Lorentz uzayında 3 dönme hareketi

dönme matrisleri

$$\widetilde{A}_1=\begin{bmatrix}\cosh\widetilde{\Phi} & \sinh\widetilde{\Phi} & 0\\ \sinh\widetilde{\Phi} & \cosh\widetilde{\Phi} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\quad \widetilde{A}_2=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\widetilde{\Theta} & -\sin\widetilde{\Theta}\\ 0 & \sin\widetilde{\Theta} & \cos\widetilde{\Theta}\end{bmatrix}\quad \widetilde{A}_3=\begin{bmatrix}\cosh\widetilde{\Psi} & \sinh\widetilde{\Psi} & 0\\ \sinh\widetilde{\Psi} & \cosh\widetilde{\Psi} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

şeklinde olmak üzere, dönme matrisi

$$\widetilde{A}=\widetilde{A}_3\widetilde{A}_2\widetilde{A}_1$$

$$\widetilde{A}=\begin{bmatrix}\cosh\widetilde{\Psi}\cosh\widetilde{\Phi}+\sinh\widetilde{\Psi}\sinh\widetilde{\Phi}\cos\widetilde{\Theta} & \cosh\widetilde{\Psi}\sinh\widetilde{\Phi}+\sinh\widetilde{\Psi}\cosh\widetilde{\Phi}\cos\widetilde{\Theta} & -\sinh\widetilde{\Psi}\sin\widetilde{\Theta}\\ \sinh\widetilde{\Psi}\cosh\widetilde{\Phi}+\cosh\widetilde{\Psi}\sinh\widetilde{\Phi}\cos\widetilde{\Theta} & \sinh\widetilde{\Psi}\sinh\widetilde{\Phi}+\cosh\widetilde{\Psi}\cosh\widetilde{\Phi}\cos\widetilde{\Theta} & -\cosh\widetilde{\Psi}\sin\widetilde{\Theta}\\ \sin\widetilde{\Theta}\sinh\widetilde{\Phi} & \sin\widetilde{\Theta}\cosh\widetilde{\Phi} & \cos\widetilde{\Theta}\end{bmatrix}$$

dır. $\widetilde{A^{-1}}=\varepsilon\widetilde{A}^T\varepsilon$ olduğundan,

$$\widetilde{A^{-1}}=\begin{bmatrix}\cosh\widetilde{\Psi}\cosh\widetilde{\Phi}+\sinh\widetilde{\Psi}\sinh\widetilde{\Phi}\cos\widetilde{\Theta} & -\sinh\widetilde{\Psi}\cosh\widetilde{\Phi}-\cosh\widetilde{\Psi}\sinh\widetilde{\Phi}\cos\widetilde{\Theta} & -\sinh\widetilde{\Phi}\sin\widetilde{\Theta}\\ -\cosh\widetilde{\Psi}\sinh\widetilde{\Phi}-\sinh\widetilde{\Psi}\cosh\widetilde{\Phi}\cos\widetilde{\Theta} & \sinh\widetilde{\Psi}\sinh\widetilde{\Phi}+\cosh\widetilde{\Psi}\cosh\widetilde{\Phi}\cos\widetilde{\Theta} & \cosh\widetilde{\Phi}\sin\widetilde{\Theta}\\ \sin\widetilde{\Theta}\sinh\widetilde{\Psi} & -\sin\widetilde{\Theta}\cosh\widetilde{\Psi} & \cos\widetilde{\Theta}\end{bmatrix}$$

olur. Buradan $\widetilde{S} = \left(\dot{\widetilde{A^{-1}}}\right)\widetilde{A}$ hesaplanırsa

$$\widetilde{S} = \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\widetilde{\Phi}} - \dot{\widetilde{\Psi}}\cos\widetilde{\Theta} & \dot{\widetilde{\Psi}}\cosh\widetilde{\Phi}\sin\widetilde{\Theta} - \dot{\widetilde{\Theta}}\sinh\widetilde{\Phi} \\ -\dot{\widetilde{\Phi}} - \dot{\widetilde{\Psi}}\cos\widetilde{\Theta} & 0 & -\dot{\widetilde{\Psi}}\sinh\widetilde{\Phi}\sin\widetilde{\Theta} + \dot{\widetilde{\Theta}}\cosh\widetilde{\Phi} \\ \dot{\widetilde{\Psi}}\cosh\widetilde{\Phi}\sin\widetilde{\Theta} - \dot{\widetilde{\Theta}}\sinh\widetilde{\Phi} & \dot{\widetilde{\Psi}}\sinh\widetilde{\Phi}\sin\widetilde{\Theta} - \dot{\widetilde{\Theta}}\cosh\widetilde{\Phi} & 0 \end{bmatrix}$$

bulunur. Burada $\widetilde{S}\ \widetilde{\Omega} = 0$ eşitliği göz önüne alınırsa

$$\widetilde{\Omega_1} = \dot{\widetilde{\Psi}}\sinh\widetilde{\Phi}\sin\widetilde{\Theta} - \dot{\widetilde{\Theta}}\cosh\widetilde{\Phi},$$

$$\widetilde{\Omega_2} = -\dot{\widetilde{\Psi}}\cosh\widetilde{\Phi}\sin\widetilde{\Theta} + \dot{\widetilde{\Theta}}\sinh\widetilde{\Phi},$$

$$\widetilde{\Omega_3} = -\dot{\widetilde{\Phi}} - \dot{\widetilde{\Psi}}\cos\widetilde{\Theta}$$

elde edilir. O halde $\widetilde{\Omega'} = \widetilde{A}\widetilde{\Omega}$ ifadesinden

$$\widetilde{\Omega'_1} = \dot{\widetilde{\Phi}}\sinh\widetilde{\Psi}\sin\widetilde{\Theta} - \dot{\widetilde{\Theta}}\cosh\widetilde{\Psi},$$

$$\widetilde{\Omega'_2} = \dot{\widetilde{\Phi}}\cosh\widetilde{\Psi}\sin\widetilde{\Theta} - \dot{\widetilde{\Theta}}\sinh\widetilde{\Psi},$$

$$\widetilde{\Omega'_3} = -\dot{\widetilde{\Psi}} - \dot{\widetilde{\Phi}}\cos\widetilde{\Theta}$$

bulunur. Ayrıca, $\widetilde{S'}\ \widetilde{\widetilde{\Omega}} = 0$ eşitliğinden

$$\widetilde{\widetilde{\Omega'_1}} = \dot{\widetilde{\Phi}}\sinh\widetilde{\Psi}\sin\widetilde{\Theta} - \dot{\widetilde{\Theta}}\cosh\widetilde{\Psi},$$

$$\widetilde{\widetilde{\Omega'_2}} = \dot{\widetilde{\Phi}}\cosh\widetilde{\Psi}\sin\widetilde{\Theta} - \dot{\widetilde{\Theta}}\sinh\widetilde{\Psi},$$

$$\widetilde{\widetilde{\Omega'_3}} = -\dot{\widetilde{\Psi}} - \dot{\widetilde{\Phi}}\cos\widetilde{\Theta}$$

elde edilir. Böylece $\widetilde{\Omega'}$ ve $\widetilde{\widetilde{\Omega'}}$ nın eşit olduğu görülür.

Şimdi t anında bir $\widetilde{X}$ noktasına ait sürüklenme hızının, o andaki ani dönme eksenine çakışık dik olduğunu gösterelim. (6.4.2) denkleminden,

$$\widetilde{V_f} = \widetilde{A^{-1}}\,\widetilde{V_f'} = \varepsilon \widetilde{S}^T \varepsilon \widetilde{X} - \varepsilon \widetilde{S}^T \varepsilon \widetilde{U} - \dot{\widetilde{U}}$$

elde edilir ve bu eşitliğin her iki yanı $\widetilde{\Omega}^T \varepsilon$ ile çarpılırsa

$$\widetilde{\Omega}^T \varepsilon \widetilde{V_f} = \widetilde{\Omega}^T \widetilde{S}^T \varepsilon \widetilde{X} - \widetilde{\Omega}^T \widetilde{S}^T \varepsilon \widetilde{U} - \widetilde{\Omega}^T \varepsilon \dot{\widetilde{U}}$$

bulunur. Buradan ise

$$\widetilde{\Omega}^T \varepsilon \widetilde{V_f} = 0$$

eşitliğinin doğruluğu açıktır.

Böylece aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 6.4.2. $\mathbb{D}_1^3$ dual Lorentz uzayında bir parametreli dual küresel harekette t anında bir $\widetilde{X}$ noktasına ait sürüklenme hızı o andaki ani dönme eksenini dik keser.

6. 5. Dual İvme ve Dual İvme Merkezi

(6.4.1) denklemini ele alırsak

$$\ddot{\widetilde{X}}' = \ddot{\widetilde{A}}\widetilde{X} + \ddot{\widetilde{U}}' + 2\dot{\widetilde{A}}\dot{\widetilde{X}} + \widetilde{A}\ddot{\widetilde{X}} \qquad (6.5.1)$$

bulunur. Burada

$$\widetilde{\gamma_a'} = \ddot{\widetilde{X}}' \qquad (6.5.2)$$

mutlak ivme,

$$\widetilde{\gamma'_f} = \ddot{\widetilde{A}}\,\widetilde{X} + \ddot{\widetilde{U'}} \qquad (6.5.3)$$

sürüklenme ivmesi,

$$\widetilde{\gamma'_c} = 2\,\dot{\widetilde{A}}\,\dot{\widetilde{X}} \qquad (6.5.4)$$

Coriolis ivmesi ve

$$\widetilde{\gamma'_r} = \widetilde{A}\,\ddot{\widetilde{X}} \qquad (6.5.5)$$

relatif ivmedir. Böylece ivmeler arasında

$$\widetilde{\gamma_a} = \widetilde{\gamma_f} + \widetilde{\gamma_c} + \widetilde{\gamma_r}$$

bağıntısı vardır.

Böylece aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 6.5.1. $\mathbb{D}_1^3$, dual Lorentz uzayında bir parametreli hareketler altında bir $\widetilde{X}$ noktasının mutlak ivmesi; sürüklenme ivmesi, relatif ivmesi ve Coriolis ivmesinin toplamına eşittir.

İvmelerin meydana gelmesinde tamamlayıcı bir ivme olan Coriolis ivmesi vardır. Eğer (6.5.4) denklemi göz önüne alınırsa,

$$\widetilde{\gamma_c} = \widetilde{A^{-1}}\,\widetilde{\gamma'_c} = -2\widetilde{S}\,\dot{\widetilde{X}} = 2\varepsilon\,\widetilde{S}^T\varepsilon\,\dot{\widetilde{X}}$$

yazılabilir. Buradan (6.4.3) denkleminden

$$\widetilde{\vec{\gamma}}_c = 2\left(\widetilde{\vec{\Omega}} \wedge \widetilde{\vec{V}}_r\right)$$

bağıntısı elde edilir.

Böylece aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 6.5.2. $\mathbb{D}_1^3$, dual Lorentz uzayında bir parametreli hareketler altında bir $\widetilde{X}$ noktasına ait t anındaki Coriolis ivme vektörü, o andaki relatif hız vektörüne ve o andaki ani dönme vektörüne diktir.

Şimdi bir t anında sürüklenme ivmesi sıfır olan noktaları araştıralım. Böylece (6.5.3) denkleminden

$$\ddot{\widetilde{A}}\,\widetilde{X} + \ddot{\widetilde{U}}' = 0 \qquad (6.5.6)$$

veya

$$\widetilde{A^{-1}}\,\ddot{\widetilde{A}}\,\widetilde{X} + \widetilde{A^{-1}}\,\ddot{\widetilde{U}}' = 0$$

bulunur. O halde $\widetilde{A^{-1}}\,\ddot{\widetilde{A}}$ nın eşitini bulalım.

$$\widetilde{A}\widetilde{A^{-1}} = I \Rightarrow \widetilde{A}\left(\dot{\widetilde{A^{-1}}}\right) + \dot{\widetilde{A}}\,\widetilde{A^{-1}} = 0 \Rightarrow \dot{\widetilde{A}}\left(\dot{\widetilde{A^{-1}}}\right) + \widetilde{A}\left(\ddot{\widetilde{A^{-1}}}\right) + \ddot{\widetilde{A}}\,\widetilde{A^{-1}} + \dot{\widetilde{A}}\left(\dot{\widetilde{A^{-1}}}\right) = 0$$

$$\ddot{\widetilde{A}}\,\widetilde{A^{-1}} = -\dot{\widetilde{A}}\left(\dot{\widetilde{A^{-1}}}\right) - \widetilde{A}\left(\ddot{\widetilde{A^{-1}}}\right) - \dot{\widetilde{A}}\left(\dot{\widetilde{A^{-1}}}\right)$$

$$\ddot{\widetilde{A}} = -\dot{\widetilde{A}}\left(\dot{\widetilde{A^{-1}}}\right)\widetilde{A} - \widetilde{A}\left(\ddot{\widetilde{A^{-1}}}\right)\widetilde{A} - \dot{\widetilde{A}}\left(\dot{\widetilde{A^{-1}}}\right)\widetilde{A}$$

$$\widetilde{A^{-1}}\,\ddot{\widetilde{A}} = -\widetilde{A^{-1}}\,\dot{\widetilde{A}}\left(\dot{\widetilde{A^{-1}}}\right)\widetilde{A} - \left(\ddot{\widetilde{A^{-1}}}\right)\widetilde{A} - \widetilde{A^{-1}}\,\dot{\widetilde{A}}\left(\dot{\widetilde{A^{-1}}}\right)\widetilde{A}$$

$$= \left(\dot{\widetilde{A^{-1}}}\right)\widetilde{A}\left(\dot{\widetilde{A^{-1}}}\right)\widetilde{A} - \left(\ddot{\widetilde{A^{-1}}}\right)\widetilde{A} + \left(\dot{\widetilde{A^{-1}}}\right)\widetilde{A}\left(\dot{\widetilde{A^{-1}}}\right)\widetilde{A}$$

$$= \left(\dot{\widetilde{A^{-1}}}\right)\widetilde{A}\left(\dot{\widetilde{A^{-1}}}\right)\widetilde{A} - \left(\ddot{\widetilde{A^{-1}}}\right)\widetilde{A} - \left(\dot{\widetilde{A^{-1}}}\right)\dot{\widetilde{A}}\,\widetilde{A^{-1}}\,\widetilde{A}$$

$$= \left(\dot{\widetilde{A^{-1}}}\right)\widetilde{A}\left(\dot{\widetilde{A^{-1}}}\right)\widetilde{A} - \left(\ddot{\widetilde{A^{-1}}}\right)\widetilde{A} - \left(\dot{\widetilde{A^{-1}}}\right)\dot{\widetilde{A}} \; .$$

Buradan $\widetilde{S} = \left(\dot{\widetilde{A^{-1}}}\right)\widetilde{A}$ olduğundan,

$$\widetilde{A^{-1}}\,\ddot{\widetilde{A}} = \widetilde{S^2} - \dot{\widetilde{S}} \qquad , \qquad \det\left(\widetilde{S^2} - \dot{\widetilde{S}}\right) = \left\| \vec{\widetilde{\Omega}} \wedge \dot{\vec{\widetilde{\Omega}}} \right\|^2 \tag{6.5.7}$$

bulunur. Eğer (6.5.6) denklemi göz önüne alınırsa $\widetilde{A^{-1}}\,\ddot{\widetilde{A}}\,\widetilde{X} = -\widetilde{A^{-1}}\,\ddot{\widetilde{U}}'$ ve $\widetilde{U}' = -\widetilde{A}\,\widetilde{U}$ olacağından dolayı, $\ddot{\widetilde{U}}' = -\ddot{\widetilde{A}}\,\widetilde{U} - 2\,\dot{\widetilde{A}}\,\dot{\widetilde{U}} - \widetilde{A}\,\ddot{\widetilde{U}}$ eşitliği yerine yazılırsa,

$$\widetilde{A^{-1}}\,\ddot{\widetilde{A}}\,\widetilde{X} = \widetilde{A^{-1}}\,\ddot{\widetilde{A}}\,\widetilde{U} + 2\,\widetilde{A^{-1}}\,\dot{\widetilde{A}}\,\dot{\widetilde{U}} + \ddot{\widetilde{U}}$$

$$\left(\widetilde{S^2} - \dot{\widetilde{S}}\right)\widetilde{X} = \left(\widetilde{S^2} - \dot{\widetilde{S}}\right)\widetilde{U} - 2\widetilde{S}\,\dot{\widetilde{U}} + \ddot{\widetilde{U}} \tag{6.5.8}$$

elde edilir. Böylece

$$\left\| \vec{\widetilde{\Omega}} \wedge \dot{\vec{\widetilde{\Omega}}} \right\|^2 \neq 0 \tag{6.5.9}$$

ise, (6.5.8) sistemi tek türlü olarak çözülebilir. O halde (6.5.6) denkleminden dolayı ivme merkezi

$$\widetilde{P_1} = -\left(\ddot{\widetilde{A}}\right)^{-1}\ddot{\widetilde{U}} \qquad\qquad \widetilde{P_1'} = \widetilde{U}' - \widetilde{A}\left(\ddot{\widetilde{A}}\right)^{-1}\ddot{\widetilde{U}}' \tag{6.5.10}$$

olarak elde edilirler. Bu takdirde (6.5.3) denklemi ile verilen sürüklenme ivmesi bu koordinatlar cinsinden ifade edilebilir. $\widetilde{\gamma'_f} = \ddot{\widetilde{A}}\,\widetilde{X} + \ddot{\widetilde{U'}}$ ve $\widetilde{\gamma_f} = \widetilde{A^{-1}}\,\widetilde{\gamma'_f}$ olduğundan

$$\widetilde{\gamma_f} = \widetilde{A^{-1}}\,\ddot{\widetilde{A}}\,\widetilde{X} + \widetilde{A^{-1}}\,\ddot{\widetilde{U'}}$$

bulunur. Burada $\widetilde{A^{-1}}\,\ddot{\widetilde{A}}$ parantezine alırsak

$$\widetilde{\gamma_f} = \widetilde{A^{-1}}\,\ddot{\widetilde{A}}\left[\widetilde{X} + \left(\ddot{\widetilde{A}}\right)^{-1}\ddot{\widetilde{U'}}\right]$$

$$\widetilde{\gamma_f} = \widetilde{A^{-1}}\,\ddot{\widetilde{A}}\left(\widetilde{X} - \widetilde{P_1}\right) \qquad (6.5.11)$$

elde edilir. Aynı şekilde $\widetilde{\gamma'_f} = \ddot{\widetilde{A}}\,\widetilde{X} + \ddot{\widetilde{U'}}$ olduğundan, $\widetilde{X} = \widetilde{A^{-1}}\,\widetilde{X'} + \widetilde{U}$ ve $\widetilde{U} = -\widetilde{A^{-1}}\,\widetilde{U'}$ değerleri yerlerine yazılırsa

$$\widetilde{\gamma'_f} = \ddot{\widetilde{A}}\,\widetilde{A^{-1}}\,\widetilde{X'} - \ddot{\widetilde{A}}\,\widetilde{A^{-1}}\,\widetilde{U'} + \ddot{\widetilde{U'}}$$

$$\left(\ddot{\widetilde{A}}\right)^{-1}\widetilde{\gamma'_f} = \widetilde{A^{-1}}\,\widetilde{X'} - \widetilde{A^{-1}}\,\widetilde{U'} + \left(\ddot{\widetilde{A}}\right)^{-1}\ddot{\widetilde{U'}}$$

$$\widetilde{A}\left(\ddot{\widetilde{A}}\right)^{-1}\widetilde{\gamma'_f} = \widetilde{X'} - \widetilde{U'} + \widetilde{A}\left(\ddot{\widetilde{A}}\right)^{-1}\ddot{\widetilde{U'}}$$

elde edilir. Eğer (6.5.11) denklemini göz önüne alırsak,

$$\widetilde{A}\left(\ddot{\widetilde{A}}\right)^{-1}\widetilde{\gamma'_f} = \widetilde{X'} - \widetilde{P'_1}$$

$$\left(\ddot{\widetilde{A}}\right)^{-1}\widetilde{\gamma'_f} = \widetilde{A^{-1}}\left(\widetilde{X'} - \widetilde{P'_1}\right)$$

$$\widetilde{\gamma'_f} = \ddot{\widetilde{A}}\,\widetilde{A^{-1}}\left(\widetilde{X'} - \widetilde{P'_1}\right) \qquad (6.5.12)$$

bulunur.

Böylece aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 6.5.3. $\mathbb{D}_1^3$, 3-boyutlu dual Lorentz uzayında bir parametreli dual küresel hareketin sürüklenme ivmesi $\widetilde{P_1}$ ve $\widetilde{P_1'}$ koordinatları cinsinden, sırasıyla,

$$\widetilde{\gamma_f} = \widetilde{A^{-1}}\,\ddot{\widetilde{A}}\left(\widetilde{X} - \widetilde{P_1}\right) \qquad\qquad \widetilde{\gamma_f'} = \ddot{\widetilde{A}}\,\widetilde{A^{-1}}\left(\widetilde{X'} - \widetilde{P_1'}\right)$$

şeklindedir.

6. 6. İvme Eksenleri

Şimdi (6.5.9) koşulunun tersini göz önüne alalım ve

$$\det\left(\widetilde{S^2} - \dot{\widetilde{S}}\right) = \left\|\overrightarrow{\widetilde{\Omega}} \wedge \dot{\overrightarrow{\widetilde{\Omega}}}\right\|^2 = 0 \tag{6.6.1}$$

olduğunu kabul edelim. Bu takdirde,

$$rank\left(\widetilde{S^2} - \dot{\widetilde{S}}\right) \leq 2 \tag{6.6.2}$$

olur ve

$$\left\|\overrightarrow{\widetilde{\Omega}} \wedge \dot{\overrightarrow{\widetilde{\Omega}}}\right\| = 0 \tag{6.6.3}$$

olması için $\overrightarrow{\widetilde{\Omega}} = \overrightarrow{\widetilde{K}}$ sabit bir dual vektör veya $\dot{\overrightarrow{\widetilde{\Omega}}} = \widetilde{C}\,\overrightarrow{\widetilde{\Omega}}$ olmak zorundadır. Burada $\widetilde{C}$ bir dual sabiti ve $\overrightarrow{\widetilde{K}}$ sabit bir dual vektörü göstermektedir.

Her iki durumu ayrı ayrı inceleyelim

1. Kabul edelim ki

$$\overrightarrow{\widetilde{\Omega}} = \overrightarrow{\widetilde{K}} \qquad (6.6.4)$$

olsun. Bu takdirde $\overrightarrow{\widetilde{\Omega}} \neq 0$ olduğundan en az bir i $(1 \leq i \leq 3)$ için,

$$\widetilde{\Omega}_i = \widetilde{K}_i \neq 0 \qquad (6.6.5)$$

dir. Bu şartlar altında,

$$\dot{\widetilde{S}} = 0 \qquad (6.6.6)$$

ve

$$rank\left(\widetilde{S^2} - \dot{\widetilde{S}}\right) = rank\left(\widetilde{S^2}\right) \qquad (6.6.7)$$

olur. Diğer taraftan $\det\left(\widetilde{S^2}\right)$ nin minörlerinden

$$\det\left(\widetilde{A_{ii}}\right) = \varepsilon_i \widetilde{\Omega_i^2}\left(-\widetilde{\Omega_1^2} + \widetilde{\Omega_2^2} + \widetilde{\Omega_3^2}\right) \qquad (6.6.8)$$

şeklinde olanlardan en az birinin sıfırdan farklı olduğu görülür. O halde

$$rank\left(\widetilde{S^2}\right) = 2 \qquad (6.6.9)$$

dir. Böylece (6.5.8) denklem sisteminin çözülebilmesi için gerek ve yeter şart

$$rank\left(\widetilde{S^2}, \widetilde{S^2}\widetilde{U} - 2\widetilde{S}\dot{\widetilde{U}} + \ddot{\widetilde{U}}\right) = 2 \qquad (6.6.10)$$

olmasıdır. Bu şart ise

$$\left(\widetilde{S^2} - \dot{\widetilde{S}}\right)\widetilde{X} = \left(\widetilde{S^2} - \dot{\widetilde{S}}\right)\widetilde{U} - 2\widetilde{S}\dot{\widetilde{U}} + \ddot{\widetilde{U}}$$

$$\widetilde{S^2}\widetilde{X} = \widetilde{S^2}\widetilde{U} - 2\widetilde{S}\dot{\widetilde{U}} + \ddot{\widetilde{U}}$$

$$\widetilde{S^2}\widetilde{X} = \widetilde{S^2}\widetilde{U} + 2\varepsilon\widetilde{S}^T\varepsilon\dot{\widetilde{U}} + \ddot{\widetilde{U}}$$

$$\varepsilon\widetilde{S^2}\widetilde{X} = \varepsilon\widetilde{S^2}\widetilde{U} + 2\widetilde{S}^T\varepsilon\dot{\widetilde{U}} + \varepsilon\ddot{\widetilde{U}}$$

$$\widetilde{\Omega}^T\varepsilon\widetilde{S^2}\widetilde{X} = \widetilde{\Omega}^T\varepsilon\widetilde{S^2}\widetilde{U} + 2\widetilde{\Omega}^T\widetilde{S}^T\varepsilon\dot{\widetilde{U}} + \widetilde{\Omega}^T\varepsilon\ddot{\widetilde{U}}$$

$$\widetilde{\Omega}^T\varepsilon\ddot{\widetilde{U}} = 0 \qquad (6.6.11)$$

ile eşdeğerdir. O halde (6.5.8) denklem sistemi (6.6.11) şartı altında çözülebilir. Böylece çözüm yapılırsa, ani dönme eksenine paralel olan bir doğru denklemi elde edilir. Bu doğru ivme ekseni olarak isimlendirilir.

2. Şimdi kabul edelim ki

$$\dot{\overrightarrow{\widetilde{\Omega}}} = \widetilde{C}\overrightarrow{\widetilde{\Omega}} \qquad (6.6.12)$$

olsun. Burada ise en az bir Ω_i elemanının sabit olmadığını kabul edelim. Aksi takdirde

$$\dot{\widetilde{\Omega}}_i = \widetilde{C}\widetilde{\Omega}_i$$

olduğundan,

$$\dot{\overrightarrow{\widetilde{\Omega}}} = \widetilde{C}\overrightarrow{\widetilde{\Omega}} = 0 \qquad (6.6.13)$$

olur. Bu durumda hareket bir sırf kayma hareketi olur. Şimdi $\det\left(\widetilde{S^2}-\dot{\widetilde{S}}\right)$ nin minörleri ele alınacak olursa, minörler içerisinde

$$\varepsilon_i\,\widetilde{\Omega_i^2}\left(-\widetilde{\Omega_1^2}+\widetilde{\Omega_2^2}+\widetilde{\Omega_3^2}\right)-\varepsilon_i\left(\dot{\widetilde{\Omega}}_i\right)^2$$

şeklinde olanlardan en az bir tanesinin sıfırdan farklı olduğu görülür. O halde

$$rank\left(\widetilde{S^2}-\dot{\widetilde{S}}\right)=2 \tag{6.6.14}$$

dir. Böylece (6.5.8) denklem sisteminin çözülebilmesi için gerek ve yeter şart

$$rank\left(\widetilde{S^2}-\dot{\widetilde{S}},\left(\widetilde{S^2}-\dot{\widetilde{S}}\right)\widetilde{U}-2\widetilde{S}\dot{\widetilde{U}}+\dot{\widetilde{U}}\right)=2 \tag{6.6.15}$$

olmasıdır. Diğer taraftan, bu şart yine

$$\left(\widetilde{S^2}-\dot{\widetilde{S}}\right)\widetilde{X}=\left(\widetilde{S^2}-\dot{\widetilde{S}}\right)\widetilde{U}-2\widetilde{S}\dot{\widetilde{U}}+\ddot{\widetilde{U}}$$

$$\varepsilon\left(\widetilde{S^2}-\dot{\widetilde{S}}\right)\widetilde{X}=\varepsilon\left(\widetilde{S^2}-\dot{\widetilde{S}}\right)\widetilde{U}+2\widetilde{S}^T\varepsilon\dot{\widetilde{U}}+\varepsilon\ddot{\widetilde{U}}$$

$$\widetilde{\Omega}^T\varepsilon\left(\widetilde{S^2}-\dot{\widetilde{S}}\right)\widetilde{X}=\widetilde{\Omega}^T\varepsilon\left(\widetilde{S^2}-\dot{\widetilde{S}}\right)\widetilde{U}+2\widetilde{\Omega}^T\widetilde{S}^T\varepsilon\dot{\widetilde{U}}+\widetilde{\Omega}^T\varepsilon\ddot{\widetilde{U}}$$

$$\widetilde{\Omega}^T\varepsilon\ddot{\widetilde{U}}=0 \tag{6.6.16}$$

şartı ile eşdeğerdir. Bu şartlar altında (6.5.8) denklem sistemi çözülebilir ve yine ani dönme eksenine paralel olan bir doğru denklemi elde edilir. Bundan başka (6.6.1) sağlanması halinde (6.6.4) ve (6.6.12) deki iki ihtimal haricinde başka bir ihtimal mevcut olamayacağı için,

$$rank\left(\widetilde{S}^2-\dot{\widetilde{S}}\right)=1$$

olamaz. O halde (6.5.8) denklem sistemi bir düzlem denklemi temsil edemez.

Böylece aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 6.6.1 : $\mathbb{D}_1^3$, 3-boyutlu dual Lorentz uzayında bir parametreli dual küresel hareket bir t anında hareketli sistemin sürüklenme ivme vektörlerinin o andaki ani dönme eksenine dik oldukları noktaların geometrik yeri $\vec{\widetilde{\Omega}}\wedge\dot{\vec{\widetilde{\Omega}}}$ vektörüne dik bir düzlemdir. Bu düzlem o anda ivme polü mevcutsa $\widetilde{O}$ noktasından, ivme ekseni mevcutsa $\widetilde{O}'$ noktasından geçer.

$\widetilde{P}_1$ noktası mevcutsa (6.5.12) denklemindeki sürüklenme ivmesini $\widetilde{\Omega}^T\varepsilon$ ile soldan çarparsak

$$\widetilde{\gamma_f}=\left(\widetilde{S}^2-\dot{\widetilde{S}}\right)\left(\widetilde{X}-\widetilde{P}_1\right)$$

$$\widetilde{\Omega}^T\varepsilon\widetilde{\gamma_f}=\widetilde{\Omega}^T\varepsilon\left(\widetilde{S}^2-\dot{\widetilde{S}}\right)\left(\widetilde{X}-\widetilde{P}_1\right)$$

$$\widetilde{\Omega}^T\varepsilon\widetilde{\gamma_f}=0$$

elde edilir.

Teorem 6.6.2. $\mathbb{D}_1^3$, 3-boyutlu dual Lorentz uzayında bir parametreli dual küresel harekette ivme merkezleri mevcut ise, bir t anında X noktasına ait sürüklenme ivme vektörü o andaki ani dönme vektörüne diktir.

SONUÇLAR ve ÖNERİLER

$\mathbb{E}^3$, 3-boyutlu Öklid uzayında bir parametreli küresel hareketler, bu hareketlerin hızları, ivmeleri ve pol noktaları ile ilgili bağıntılar. H. R. Müller tarafından [10] da verilmiştir. Dual sayılar ilk olarak W. K. Clifford (1845-1879) tarafından geometrik araştırmalarda bir araç olarak kullanıldı[6]. Veldkamp (1976) dual birim vektörler ve dual birim küreyi ifade ederek, dual küresel hareketleri vermiştir[16].

$\mathbb{D}^3$, 3-boyutlu Dual uzayda, dual küresel hareketlerin hızları, ivmeleri ve ivme polleri ile ilgili bağıntılar H. H. Hacısalihoğlu tarafından verildi[9]. $\mathbb{E}^3$, 3-boyutlu Öklid uzayı yerine $\mathbb{L}^3$, 3-boyutlu Lorentz uzayı alarak, E. Study dönüşümü H. H. Uğurlu tarafından tanıtıldı[14].

Bu tezde ilk olarak $\mathbb{L}^3$, 3-boyutlu Lorentz uzayında bir parametreli küresel hareketler tanıtılarak, bu hareketlerin, hızları, ivmeleri ve pol noktaları, ivme merkezleri ve ivme eksenleri ile ilgili teoremlere yer verildi.

Daha sonra, $\mathbb{D}^3_1$, 3-boyutlu dual Lorentz uzayında bir parametreli dual küresel hareketler tanıtıldı. Bu hareketlerin hızları, ivmeleri, ivme polleri ve ivme eksenleri ile ilgili bağıntılar elde edildi.

Bu çalışmadaki bir parametreli küresel hareketler için elde edilen bağıntılar düşünülerek, eğer iki parametreli küresel hareketler göz önüne alınırsa, ne gibi bağıntıların elde edileceği araştırılabilir.

KAYNAKLAR

[1] AKUTAGAWA, K., NISHIKAWA, S., “The Gauss Map and Space-like Surfaces with Prescribed Mean Curvature in Minkowski 3-Space”, Tohoku Math. J., 42, 68-82, 1990.

[2] BEEM, J.K., EHRLICH, P.E., “Global Lorentzian Geometry”, Marcel Decker Inc., New York, 1981.

[3] BIRMAN, G.S., NOMIZU, K., “Trigonometry in Lorentzian Geometry”, Am., Math. Mont., 91(9), 543-549, 1984-A.

[4] BIRMAN, G.S., NOMIZU, K., “The Gauss-Bonnet Theorem for 2-Dimensional Space-Times”, Michigan Math. J., 31, 77-81, 1984-B.

[5] BOTTEMA, O., ROTH, B., “Theoretical Kinematics”, North Holland Publ. Company, New York, 1979.

[6] CLIFFORD, W.K., “Preliminary sketch of bi-quaternions”, Proceedings of London Mathematical Society, 4, nos.64, 65, 361-395, 1873.

[7] ERGİN, A.A., “Lorentz Düzleminde Kinematik Geometri”, Ankara Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktora Tezi, 1989.

[8] HACISALİHOĞLU, H.H., “İki ve Üç Boyutlu Uzaylarda Dönüşümler ve Geometriler”, Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü, Ocak 1998.

[9] HACISALİHOĞLU, H.H., “Hareket Geometrisi ve Kuaterniyonlar Teorisi”, Gazi Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Yayınları, Math. No. 2, 1983.

[10] MULLER, H.R., “Kinematik Dersleri” (çeviri), Ankara Üniversitesi Fen-Fakültesi yayınları 27, 1963.

[11] NOMIZU, K., “Fundamentals of Linear Algebra”, McGraw-Hill Book Company, New York, 1979.

[12] O'NEILL, B., “Semi Riemannian Geometry”, Academic Press, New York, 1983.

[13] STUDY, E., “Geometrie der Dynamen Leipzig“, Verlag Teubner, 603 p., 1903.

[14] UĞURLU, H.H., ÇALIŞKAN, A., "The Study mapping for directed spacelike and timelike lines in Minkowski 3-space $\mathbb{R}_1^3$", Mathematical & Computational Applications, Vol.1, No:2, pp. 142-148, 1996.

[15] UĞURLU, H.H., ÇALIŞKAN, A., KILIÇ, O., "On the geometry of spacelike congruences", Communication, Faculty of Science, Ankara University, All Series, Vol. 50, 2001.

[16] VELDKAMP, G.R., "On the Use of Dual Numbers, Vectors and Matrices in Instantaneous", Spatial Kinematics, Mech. Mach. Theory. Vol.11, No.2.E, 141-156, 1976.

[17] YAGLOM, I.M., "A simple non-Euclidean geometry and its physical basis", Springer-Verlag, New York, 1979.

[18] YAYLI, Y., ÇALIŞKAN, A., UĞURLU, H.H., "The E. Study Maps of Circles on Dual Hyperbolic and Lorentzian Unit Spheres H_0^2 and S_1^2", Math. Proc. R. Ir. Acad., 102 A, No.1, 37-47, 2000.

ÖZGEÇMİŞ

30.04.1977 tarihinde Denizli'nin Çivril ilçesinde doğdu. İlköğrenimini Denizli'nin Çivril ilçesinin Kızılcasöğüt kasabasında, ortaöğrenimini Denizli Cumhuriyet Lisesinde tamamladı. 1994 yılında Sakarya Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde başladığı lisans eğitimini 1998 yılında tamamladı. 1998–1999 öğretim yılında Sakarya'nın Hendek Endüstri Meslek Lisesinde Matematik Öğretmeni olarak görev yaptı. Eylül 1999'da Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Ana Bilim Dalında başladığı Yüksek Lisans öğrenimini 2002 yılında tamamladı ve aynı yıl Doktora öğrenimine başladı. Aralık 1999'da Sakarya Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde Araştırma Görevlisi olarak göreve başladı ve halen bu görevi yürütmektedir. Evli ve bir çocuk babasıdır.