T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SONSUZ MATRİSLER VE BAZI YENİ DİZİ UZAYLARI

DOKTORA TEZİ

Rahmet SAVAŞ

Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK
Tez Danışmanı : Prof. Dr. Metin BAŞARIR

Haziran 2006

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SONSUZ MATRİSLER VE BAZI YENİ DİZİ UZAYLARI

DOKTORA TEZİ

Rahmet SAVAŞ

Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK

Bu tez 29/05/ 2006 tarihinde aşağıdaki Jüri tarafından Oybirliği/ Oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

Prof Dr.Metin Başarır Jüri Başkanı	Prof.Dr.Abdullah Yıldız Üye	Prof. Dr.Recep Akkaya Üye
Prof.Dr.Fatih Nuray Üye	Doç.Dr.Ayhan Şerbetçi Üye	

ÖNSÖZ

Bu çalışmayı bana veren ve çalışmalarım süresince karşılaştığım güçlüklerde yardımlarını esirgemeyen hocam sayın **Prof. Dr. Metin Başarır'**a teşekkür eder saygılar sunarım.

Ayrıca çalışmalarım esnasında bana yardımcı olan sevgili Babam sayın Prof. Dr. Ekrem SAVAŞ'a da teşekkür ederim.

Rahmet SAVAŞ

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

N	Doğal sayılar kümesi
C	Kompleks sayılar kümesi
R	Reel sayılar kümesi
K	Reel veya kompleks sayıların bir cismi
s	C üzerinde tanımlı diziler uzayı
$p=(p_n)$	Reel sayıların bir dizisi
l_∞	Kompleks terimli sınırlı diziler uzayı
c	Kompleks terimli yakınsak diziler uzayı
c_0	Kompleks terimli sıfıra yakınsayan diziler uzayı
$A = (a_{nk})$	Sonsuz matris
$A_n(x)$	$(\sum_k a_{nk} x_k)$
$\Lambda = (\lambda_n)$	Sonsuza yakınsayan pozitif reel sayıların azalmayan bir dizisi
B	Banach limitleri kümesi
S	Kaydırma Operatörü
$\hat{c}$	Hemen hemen yakınsak diziler uzayı
$\hat{c}_0$	Sıfıra yakınsayan hemen hemen yakınsak diziler uzayı
$[\hat{c}]$	Kuvvetli hemen yakınsak diziler uzayı
V_σ	İnvariant yakınsak diz uzayı
$V_{\sigma 0}$	Sıfıra yakınsayan invariant yakınsak diziler uzayı
$[V_\sigma]$	Kuvvetli invariant yakınsak diziler uzayı
f	Modulus fonksiyonu
$F = (f_k)$	Modulus fonksiyonların bir dizisi

ÖZET

Anahtar Kelimeler: Modulus fonksiyon, de la Valee-Poussin ortalaması, invariant yakınsaklık, hemen hemen yakınsaklık, matris dönüşümleri.

Dört bölüm olarak hazırlanan bu tezin birinci bölümünde literatür bildirilişi ve daha sonraki bölümlerde kullanılacak olan bazı temel tanım ve teoremler verildi.

İkinci bölümde ise invariant veya $\sigma-$ yakınsaklık kavramı ile de la Valle- Poussin ortalaması kavramını birleştirerek yeni bir dizi uzayı tanımlandı ve bazı topolojik özellikleri incelendi ve ayrıca bazı matris dönüşümleri karakterize edildi.

Üçüncü bölümde; modulüs fonksiyonların bir dizisi, $\sigma-$ yakınsaklık kavramı ve de la Valle- Poussin ortalaması kullanılarak bazı yeni dizi uzayları tanımlandı ve bazı kapsama bağıntıları verildi.

Dördüncü bölümde ise (σ,λ)- asimptotik istatistiksel denk diziler tanımlandı ve bazı toremler ispatlandı.

Son bölümde, elde edilen temel sonuçlar özetlendi.

INFINITE MATRICES AND SOME NEW SEQUENCE SPACES

SUMMARY

Key words: Modulus Function, De la Valee-Poussin means, Invariant Means, Almost Convergence, Matrix Transformation.

This thesis consists of four chapters. In the first chapter, literature notices, some fundamantel definitions and theorems will be used in the later chapters were given respectivelly.

In the second chapter, by combining concepts of invariant or σ- convergence and de la Valee-poussin a new sequence space was defined and some topological properties were examined and also some matrix transformations were characterized

In the third chapter by using a sequence of modulus functions, the concept of σ-convergence and de la Vale-Poussin means some new sequence spaces were defined and some inclusion relations were given.

In the forth chapter, (σ, λ)-asimptotic statistical equivalent sequences were defined and some theorems were proved.

In the last chapter, the main results reached were summarized.

BÖLÜM 1. GİRİŞ

1.1. Temel Tanım ve Teoremler

Bu bölümde, daha sonraki bölümlerde kullanılacak olan bazı temel tanım ve teoremler verilecektir. Şimdi bazı dizi uzaylarının tanımını vererek bu bölüme başlayalım.

Tanım 1.1.1 (Lineer uzay): X boş olmayan bir küme ve K, reel veya kompleks sayılar cismi olsun.

$$+ : X \text{ x } X \to X$$
$$\boldsymbol{.} : X \text{ x } K \to X$$

ikili işlemleri aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa X kümesine K üzerinde bir lineer (vektör) uzay adı verilir [11].

Her $\alpha, \beta \in K$ ve $x, y, z \in X$ için

(L1) $x + y = y + x$

(L2) $(x+y) + z = x + (y + z)$

(L3) $x + \theta = x$ olacak şekilde $\theta \in X$ vardır.

(L4) Her bir $x \in X$ için $x + (-x) = \theta$ olacak şekilde bir $(-x) \in X$

(L5) $1.x = x$

(L6) $\alpha\ (x + y) = \alpha x + \alpha y$

(L7) $(\alpha + \beta)\text{x} = \alpha x + \beta x$

(L8) $\alpha\ (\beta x) = (\alpha\ \beta)\ x.$

Tanım 1.1.2 (Lineer Altuzay): X bir lineer uzay ve M de X in bir alt kümesi olsun. $x, y \in M$ ve α ve β skaler olmak üzere $\alpha\text{x}+\beta\text{y} \in M$ ise M ye X ‘in bir lineer alt uzayı denir [11].

Tanım 1.1.3 (Topolojik Uzay): X boş olmayan herhangi bir küme olsun. X ‘ in alt kümelerinin bir T sınıfı verilsin. Eğer T aşağıdaki şartları sağlıyorsa T ye X üzerinde bir topolojik yapı veya kısaca *topoloji* denir [11].

t1) $X, Ø \in T$

t2) T ye ait olan elemanların sayılabilir bir dizisi $(A_i)_{i \in I}$ ise $\bigcup_{i \in I} A_i \in T$ dır.

t3) T ye ait olan elemanların sonlu bir dizisi $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ ise $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in T$ dır.

Tanım 1.4.4 (Normlu lineer uzay): X, K cismi üzerinde bir lineer uzay olsun.

$$\|.\| : X \to R$$

fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa $\|.\|$ fonksiyonuna X üzerinde bir norm ve $(X, \|.\|)$ çiftine de normlu lineer uzay veya kısaca normlu uzay denir [11].

(N1) $\|x\| \geq 0$

(N2) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

(N3) $\|\lambda x\| = |\lambda| \; \|x\|$, $\lambda \in K$

(N4) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (Üçgen Eşitsizliği)

Tanım 1.1.5 (Dizi Uzayları): Bu tezde kompleks veya reel terimli tüm $x = (x_k)$ ($k = 1,2,.....$) dizilerinin kümesi s ile gösterildi. s , $x = (x_k)$ $y = (y_k)$ ve α bir sabit olmak üzere

$$x + y = (x_k + y_k) \qquad \text{ve} \qquad \alpha x = (\alpha x_k)$$

şeklinde tanımlanan işlemler altında bir lineer uzaydır. Tez boyunca kullanılacak olan diğer bazı dizi uzayları:

$c = \{ x = (x_k) : x_k$, yakınsak $\}$, yakınsak dizilerin uzayı,

$c_0 = \{ x = (x_k) : x_k$, 0 ‘ a yakınsak $\}$, sıfıra yakınsayan dizilerin uzayı,

$\ell_\infty = \{ x = (x_k) | : \sup_k |x_k| < \infty \}$, sınırlı diziler uzayı ve,

$$l = \left\{ x = (x_k) : \sum_k |x_k| < \infty \right\}$$

mutlak yakınsak diziler uzayıdır. Bu uzaylardan c ve ℓ_∞ dizi uzayları, $\|x\| = \sup_k |x_k|$ normu altında ve l dizi uzayı $\|x\| = \sum_k |x_k|$ normu altında birer normlu uzaydırlar. v ile sınırlı salınımlı dizilerin uzayını göstereceğiz, yani,

$v = \left\{ x : \sum_k |x_k - x_{k-1}| < \infty, x_0 = 0 \right\}$ dır. v uzayı, $\|x\| = \sum_k |x_k - x_{k-1}|$ normu altında bir Banach uzayıdır [11].

Tanım 1.1.6 (Matris Dönüşümleri): s, kompleks sayıların bir uzayı, X ve Y de s'nin boş olmayan iki alt kümesi ve $A = (a_{nk})$ $(n,k = 1,2,3,...)$ kompleks sayıların sonsuz bir matrisi olsun. Eğer, her n için,

$$A_n(x) = \sum_k a_{nk} x_k$$

yakınsak ise $A(x) = A_n(x)$ yazılır. Ayrıca, $x = (x_k) \in X$ olması $A(x) = A_n(x) \in Y$ olmasını gerektiriyorsa A' ya X den Y ' ye bir matris dönüşümü tanımlar denir ve $A : X \to Y$ olarak gösterilir. $A : X \to Y$ şeklindeki matrislerin sınıfları (X,Y) ile gösterilir [19].

Tanım 1.1.7(Konservatif Matris): $A = (a_{nk})$ sonsuz matrisi verilmiş olsun. Eğer A matrisi yakınsak her diziyi yakınsak bir diziye dönüştürüyorsa A matrisine konservatif matris denir ve $A \in (c,c)$ şeklinde gösterilir [11].

Tanım 1.1.8 (Reguler Matris): Eğer A matrisi yakınsak her diziyi yakınsak bir diziye limiti koruyarak dönüştürüyorsa A matrisine regüler matris denir ve $A \in (c,c)_{reg}$ şeklinde gösterilir [11].

Tanım 1.1.9 (A-toplanabilirlilik): Bir $A = (a_{nk})$ matrisi verilmiş olsun. Her n için $A_n(x) = \sum_k a_{nk} x_k$ mevcut ve $n \to \infty$ iken $A_n(x) \to a$ ise (x_k) dizisi a 'ya A-toplanabilir yada A- limitlenebilir denir ve $A\text{-}\lim x_k = a$ yazılır [19].

Bir A matrisinin c_A ile gösterilen yakınsaklık alanı, Ax yakınsak olacak şekilde bütün $x = (x_k)$ dizilerinin sınıfı , yani $c_A =\{ x : Ax \in c)$ olarak tanımlanır.

Tanım 1.1.10 (Cauchy Dizisi): X, normlu bir lineer uzay ve (x_n) de bu uzayda bir dizi olsun. Eğer $\forall$ $\varepsilon > 0$ sayısı için $m,n > n_0$ oldukça $\|x_m - x_n\| < \varepsilon$ olacak şekilde bir n_0 sayısı varsa , (x_n) dizisine bir Cauchy dizisi denir [11].

Tanım 1.1.11 (Banach Uzayı) : X normlu bir lineer uzay olsun. X deki her *Cauchy* dizisi X in bir elemanına yakınsıyorsa X' e *Banach* uzayı denir [11].

Tanım 1.1.12 (Lineer Topolojik Uzay): Bir T topolojisine sahip X lineer uzayında toplama ve skaler ile çarpma sürekli ise bu X uzayına lineer topolojik uzay denir [11].

Aşağıda, bilinen bazı dizi uzaylarının tanımlarını verelim [18].

$p=(p_k)$, $p_k>0$ ve $\sup p_k<\infty$ olacak şekilde reel sayıların bir dizisi olsun

$$l_\infty(p) = \left\{ x : \sup_k |x_k|^{p_k} < \infty \right\}$$

$$c_0(p) = \left\{ x : |x_k|^{p_k} \to 0 \right\}$$

$$c(p) = \left\{ x : |x_k - l|^{p_k} \to 0 \; bazı \; l \in C \; ler \; için \right\}$$

$$l(p) = \left\{ x : \sum_k |x_k| < \infty \right\}.$$

Özel olarak bu uzaylarda her k için $p_k=1$ alınırsa $c_0(p) = c_0$, $c(p) = c$, $l_\infty(p) = l_\infty$ ve $l(p) = l_p$ uzayları elde edilir.

Tanım 1.1.13 (Temel Küme): X bir normlu uzay ve $M \subset X$ olsun. $SpanM = X$ ise M ye bir temel küme denir [11].

Tanım 1.1.14 (Paranormlu Uzay): X bir lineer uzay, $g : X \to R$ bir fonksiyon olsun.

(P1) $g(\theta) = 0$

(P2) $g(x) = g(-x)$

(P3) $g(x+y) \le g(x) + g(y)$

(P4) $\lambda \to \lambda_0$, $x \to x_0$ için $\lambda x \to \lambda_0 x_0$ ise

g ye bir paranorm denir. Paranormlu bir (X,g) uzayı g paranormu ile birlikte bir lineer uzaydır [13].

Tanım 1.1.15 (p-normlu Uzay): X bir lineer uzay , $\|.\| : X \to R$ norm ve $p>0$ verilmiş olsun. Aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa (X, $\|.\|$, p) üçlüsüne p- normlu uzay denir [11].

(P'1) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

(P'2) $\|\lambda x\|^p = |\lambda|^p . \|x\|$

(P'3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Tanım 1.1.16. (Tam Paranormlu Uzay) : Bir *(X,g)* paranormlu uzayında alınan her Cauchy dizisi bu uzayın bir noktasına yakınsıyorsa *(X,g)* uzayına tam paranormlu uzay denir [11].

Teorem 1.1.1 (Düzgün Sınırlılık Prensibi): (T_n) bir X Banach uzayından normlu bir Y uzayı içine olan, sınırlı lineer $Tn : X \to Y$ operatörlerinin bir dizisi olsun. Burada $(\|T_n x\|)$ dizisi her $x \in X$ için sınırlı yani

$\|T_n x\| \leq c_x$, n= 1,2,…

olacak şekilde bir c_x reel sayısı varsa $(\|T_n\|)$ dizisi de sınırlıdır [11].

Tanım 1. 1.17: $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$ fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa f 'ye bir modulüs fonksiyonu denir [16].

(i) $f(x) = 0 \Leftrightarrow x=0$,

(ii) her $x,y>0$ için $f(x+y) \leq f(x) + f(y)$,

(iii) f, artan fonksiyon,

(iv) f, 0' da sağdan süreklidir.

$$|f(x)-f(y)| \le f(|x-y|)$$

olduğundan dolayı (iv) den f fonksiyonu $[0,\infty)$ aralığı üzerinde süreklidir. Ayrıca, (ii) den her $n \in N$ için $f(nx) \le nf(x)$ elde edilir ve dolayısıyla

$$f(x) = f(nx\frac{1}{n}) \le nf(\frac{x}{n})$$

ve böylece her $n \in N$ için

$$f(x) = \frac{1}{n}f(x) \le f(\frac{x}{n})$$

olur. Bir modulüs fonksiyonu sınırlı veya sınırsız olabilir. Örneğin,

$f(x) = x^p$ $(0<p<1)$ sınırsız , fakat $f(x) = x/(1+x)$ sınırlıdır.

Maddox [10] ve Ruckle [19], $X(f) = \{x : (f(|x_k|)) \in X\}$ tipindeki bazı dizi uzaylarını oluşturmak için f modulus fonksiyonu kavramını kullandı. Son zamanlarda E. Kolk [3], $F = (f_k)$ şeklinde modulus fonksiyonlarının bir dizisini kullanarak $X(f)$ uzayının bir genellemesini verdi.

Tanım 1.1.18 (Lineer ve Alt Lineer Fonksiyoneller) **:** Bir X reel lineer uzayından reel eksene yapılan bir L dönüşümüne fonksiyonel adı verilir. X deki her x,y için

$$L(x+y) \le L(x) + L(y)$$

yazılabiliyorsa fonksiyonelin alt toplamsal, eşitsizlik yerine , bütün hallerde eşitlik alınabiliyorsa fonksiyonelin toplamsal olduğu söylenir.

X deki her x ve her reel $\alpha \ge 0$ için

$$L(\alpha x) = \alpha L(x)$$

ise L fonksiyoneline homojendir denir.

Toplamsal ve homojen bir fonksiyonele lineer fonksiyonel adı verilir. Alt toplamsal ve homojen bir fonksiyonele alt lineer fonksiyonel denir. L, homojen bir fonksiyonel ise, $L(0) = 0$ dır ve L lineer ise ;

$L(-x) + L(x) = L(-x + x) = L(0) = 0$ olup $L(-x) = -L(x)$

dir. Buna göre, bir lineer fonksiyonel, X deki her x, y ve her reel α ve β için

$$L(\alpha x + \beta y) = \alpha L(x) + \beta L(y)$$

bağıntısını gerçekler [11].

(x_n) sınırlı bir dizi, k pozitif bir tamsayı ve $n_1, n_2, \ldots\ldots, n_k$ tamsayıların değişebilen bir alt kümesi olmak üzere,

$$P(x_n) = \inf_{n1,n2,\ldots\ldots,nk} \lim_{j\to\infty} \sup \frac{1}{k}\sum_{p=1}^{k} x_{n_p} + j$$

olsun. Bu taktirde $P(x_n)$ alt lineer bir fonksiyoneldir [19].

1.2. Hemen Hemen Yakınsak Diziler

Hemen hemen yakınsaklık tanımına geçmeden önce Banach-Limitleri hakkında kısa bir bilgi vereceğiz. Bunun için Banach-Limitlerinin varlığını ortaya koyan Hahn-Banach teoremi aşağıdaki şekilde ifade edilir.

Teorem 1.2.1 (Hahn-Banach Teoremi) : X reel lineer bir uzay ve Y bunun bir alt uzayı olsun. p, X üzerinde alt lineer bir fonksiyonel olmak üzere, eğer f, Y üzerinde lineer bir fonksiyonel ve

$f(x) \le p(x)$

ise bu taktirde X üzerinde

$g(x) \le p(x)$

olacak şekilde f 'in X'e bir g lineer genişlemesi vardır [11].

Sonuç 1.2.1. X reel lineer bir uzay ve p, X üzerinde alt lineer bir fonksiyonel olsun. Bu taktirde her $x \in X$ için

$F(x) \le p(x)$

olacak şekilde X de tanımlı bir F lineer fonksiyoneli mevcuttur [11].

Hahn-Banach teoreminin reel değerli bütün sınırlı dizilerin ℓ_∞ lineer uzayına bir uygulaması, Banach limit kavramının doğmasına yol açmıştır. Banach limitleri ilk olarak Banach [19] tarafından aşağıdaki şekilde verilmiştir.

Tanım 1.2.1. (Banach Limiti) **:** L , ℓ_∞ üzerinde tanımlı bir lineer fonksiyonel olsun. Eğer L lineer fonksiyoneli aşağıdaki özelliklere sahip ise bir Banach- limiti adını alır.

(B1) $n = 1,2,.....$ *için* $x_n \geq 0 \Rightarrow L(x_n) \geq 0$

(B2) $L(e) = 1 \quad e = (1,1,1,.......)$

(B3) $L(S x_n) = L(x_n)$ *dir.*

Burada S operatörü, $(S x_n) = x_{n+1.}$ şeklinde tanımlanmış olan kaydırma operatörüdür.

Şimdi, sınırlı $x = (x_n)$ dizilerinin hangileri için bütün $L(x_n)$ değerlerinin aynı olduğunu sorabiliriz. Bunun yakınsak diziler için mümkün olduğu aşikardır. Bundan başka, kolayca görülebileceği gibi $x = ($ 0,1,0,1,.......) dizisi için L (x) = ½ değeri bütün Banach limitleri için aynıdır. Gerçekten, $x_n = (1/2)(1+(-1)^{n+1})$ olarak tanımlanırsa,

$L(x_n) = L[(1/2)(1+(-1)^{n+1})] = (1/2)L(1+(-1)^{n+1})$

ve

$L[(-1)^{n+1}] = L[(-1)^n(-1)] = -L[(-1)^n]$

olduğundan

$2L[(-1)^{n+1}] = 0, \qquad [L(x_{n+1}) = L(x_n)]$

bulunur. O halde

$L(x_n) = (1/2)[1+0] = ½$

dir.

Tanım 1.2.2: Sınırlı bir (x_n) dizisi verildiğinde, eğer her L Banach limiti için, $L(x_n) = s$ oluyorsa, (x_n) dizisine *hemen hemen yakınsak* dizi denir.

Hemen hemen yakınsak bir diziyi karekterize edecek bir özellik Lorentz [6] tarafından aşağıdaki teoremle ifade edilmiştir.

Teorem 1.2.2: (x_n) dizisinin hemen hemen yakınsak olması için gerek ve yeter şart, yakınsama i' ye göre düzgün olarak, $k\to\infty$ iken,

$$t_{ki} = t_{ki}(x) = \frac{x_i + x_{i+1} + \dots\dots + x_{i+k}}{k+1} \to s \tag{1.2.1}$$

olmasıdır. Hemen hemen yakınsak dizilerin sınıfı $\hat{c}$ ile, özel olarak $s = 0$ ise sıfıra hemen hemen yakınsak dizilerin sınıfı $\hat{c}_0$ ile gösterilecektir. Eğer x dizisi s' ye hemen hemen yakınsak ise $\hat{c}$ - $lim\ x = s$ yazılır.

Nanda [18], hemen hemen yakınsak diziler yardımıyla aşağıdaki dizi uzaylarını tanımladı. $p=(p_k)$, pozitif reel sayıların bir dizisi olsun. Bu takdirde, yakınsama i'ye göre düzgün olarak

$$(c_0)^p = \left\{ x : \lim_k \left| t_{ki}(x) \right|^{p_k} = 0 \right\}$$

$$(c)^p = \left\{ x : \lim_k \left| t_{ki}(x-l) \right|^{p_k} = 0 \right\}$$

dir. Eğer p_k=1 alınırsa yukarıdaki dizi uzayları $\hat{c}$ ve $\hat{c}_0$ dizi uzaylarına indirgenir.

Hemen hemen yakınsak dizi uzayları King [2] ve Savaş [22] gibi bir çok yazar tarafından çalışılmıştır.

Bir $x = (x_k)$ dizisi göz önüne alınsın. Eğer $\lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left| x_k - \ell \right| = 0$ oluyorsa $x = (x_k)$ dizisine kuvvetli (Cesaro) toplanabilir denir [5]. Kuvvetli Cesaro toplanabilir dizi uzayları Kuttner [5] ve diğer bazı yazarlar tarafından çalışılmıştır. Bu kavram daha sonraları Maddox [7] tarafından genelleştirilmiştir. Şimdi Maddox tarafından yapılan bu genelleştirmeyi açıklayalım.

$p = (p_k)$ pozitif reel sayıların bir dizisi olsun. Bu takdirde,

$$[C,1,p] = \left\{ x : \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left| x_k - \ell \right|^{p_k} \to 0 \ \ (n \to \infty) \ \ \text{bazi } \ell \textit{ sayisi için} \right\}$$

$$[C,1,p]_0 = \left\{ x : \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |x_k|^{p_k} \to 0 \ \ , \ (n \to \infty) \right\}$$

$$[C,1,p]_\infty = \left\{ x : \sup_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |x_k|^{p_k} < \infty \right\}$$

dizi uzayları tanımlanır. Eğer her k için $p_k = 1$ ise *[C,1,p], [C,1,p]* $_0$ ve *[C,1,p]* $_\infty$ uzayları yerine *[C,1], [C,1]* $_0$ ve *[C,1]* $_\infty$ uzayları elde edilir.

Nasıl ki yakınsaklık kavramından kuvvetli yakınsaklık kavramı doğmuş ise hemen hemen yakınsaklık kavramından yeni bir kavram olarak kuvvetli hemen hemen yakınsaklık kavramının doğmasını beklemek de doğaldır. Kuvvetli hemen hemen yakınsaklık kavramı ilk kez Maddox [7] tarafından tanımlanmış ve çalışılmıştır. Eğer, *[ĉ]* ile kuvvetli hemen hemen yakınsak dizilerin uzayını gösterirsek

$$[\hat{c}] = \left\{ x : \lim_m \frac{1}{m} \sum_{k=n+1}^{n+m} |x_k - \ell| = 0, \ yakinsama \ \ n'ye \ göre \ düzgün \right\}$$

olur. Nanda [17], kuvvetli hemen hemen yakınsaklık kavramını şu şekilde genelleştirmiştir. $p=(p_k)$, pozitif reel sayıların bir dizisi olsun. Bu takdirde, yakınsaklık *n*'ye göre düzgün olmak üzere

$$[\hat{c}, p] = \left\{ x : lim_m \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} |x_{k+n} - \ell|^{p_k} = 0 \right\}$$

$$[\hat{c}, p]_0 = \left\{ x : lim_m \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} |x_{k+n}|^{p_k} = 0 \right\}$$

olur. Eğer her k için $p_k=1$ ise $[\hat{c}, p] = [\hat{c}]$ elde edilir. Daha sonraları Nanda'nın bu genelleştirilmeleri E.Savaş [22] tarafında modulüs fonksiyonları yardımıyla tekrar genelleştirilmiştir. Bu takdirde, yakınsaklık *n*'ye göre düzgün olmak üzere

$$[\hat{c}, f, p] = \left\{ x : lim_m \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} f(|x_{k+n} - \ell|)^{p_k} = 0 \right\}$$

$$[\hat{c}, f, p]_0 = \left\{ x : lim_m \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} f(|x_{k+n}|)^{p_k} = 0 \right\}$$

tanımları verilirse $f(x) = x$ olduğunda bu uzaylar Nanda tarafından tanımlanan uzaylara indirgenirler.

Hemen hemen yakınsaklık kavramı Shaefer [25] tarafından genelleştirilmiş ve invariant yakınsaklık kavramı aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır.

Tanım 1.2.3 (İnvarıant limit) **:** σ: N→ N her m,n pozitif tam sayıları için $\sigma^m(n) \neq n$ olacak şekilde bir bire-bir dönüşüm olsun. Sürekli bir $\phi: \ell_\infty \to R$ lineer fonksiyoneline aşağıdaki özellikleri sağlaması halinde invariant limit veya σ-limit denir [25].

(I1) Her n için $x_n \geq 0$ ise $\phi(x) \geq 0$,

(I2) $\phi(e) = 1$, e = (1,1,1,.......),

(I3) Her $x \in \ell_\infty$ için $\phi(x_{\sigma(n)}) = \phi(x)$.

Özel olarak $\sigma(n) = n+1$, olması halinde, ϕ bir Banach limiti olur.

Tanım 1.2.4 (İnvariant Yakınsak Dizi) **:** İnvariant limitleri eşit olan sınırlı bir diziye invariant yakınsak veya σ-yakınsak dizi denir. σ-yakınsak dizilerin kümesi V_σ ile gösterilir.

Eğer $x = (x_n)$ ise $Tx = (T x_n) = (x_{\sigma(n)})$, $T^2x = x_{\sigma^2(n)}$,......., $T^kx = (x_{\sigma^k(n)})$ olarak alınsın.

$$t_{kn} = t_{kn}(x) = (x_n + Tx_n + ...+ T^kx_n)/(k+1) \text{ ve } t_{-1,n}(x) = 0 ,$$

olmak üzere $x \in V_\sigma$ olması için gerek ve yeter şart n'ye göre düzgün olarak $\lim_m t_{mn}(x)=s$ limitinin mevcut olmasıdır. Bu s limitine $x = (x_n)$ dizisinin σ-limiti denir ve $s = \sigma\text{-}\lim x$ şeklinde yazılır. $V_{\sigma 0}$, kümesi ile de σ-limiti sıfır olan invariant yakınsak dizilerin uzayı gösterilir. Ayrıca, $\sigma(n) = n+1$ olması halinde σ-limitler ℓ_∞ üzerindeki klasik Banach limitlerine ve V_σ kümesi de hemen hemen yakınsak dizilerin $\hat{c}$ kümesine indirgenir. $\sigma^k(n) \neq n$ olmak üzere her invariant limit, her $x \in c$ için $\phi(x) = \lim x$ olması anlamında c üzerindeki limit fonksiyonele genişler.

Hemen hemen yakınsaklık kavramından kuvvetli hemen hemen yakınsaklık kavramı doğmuş ise invariant yakınsaklık kavramından yeni bir kavram olarak kuvvetli invariant yakınsaklık kavramı doğmuştur. Mursaleen [15] kuvvetli σ-yakınsak dizilerin uzayını şu şekilde karekterize etti.

Tanım 1.2.5: (Kuvvetli σ-yakınsaklık) **:** Bir $x = (x_k)$ sınırlı dizisinin bir s sayısına kuvvetli σ-yakınsak olması için gerek ve yeter şart , n'ye göre düzgün yakınsak olmak üzere $\lim_m \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} \left| x_{\sigma^k(n)} - s \right| = 0$ olmasıdır [15].

Kuvvetli σ-yakınsak dizilerin uzayı $[V_\sigma]$ ile gösterilir. Burada özel olarak s = 0 alınırsa, sıfıra kuvvetli yakınsayan invariant dizilerin uzayı olan $[V_\sigma]_0$ elde edilir. $x \in [V_\sigma]$ olması durumunda $[V_\sigma]$-lim$x$ yazılır. $\sigma(n) = n+1$ olması halinde $[V_\sigma]$ ve $[V_\sigma]_0$ uzayları sırasıyla $[\hat{c}]$ ve $[\hat{c}]_0$ uzaylarına indirgenir.

$\Lambda = (\lambda_n)$, sonsuza yakınsayan pozitif reel sayıların azalmayan bir dizisi ve $\lambda_1 = 1$ ve $\lambda_{n+1} \le \lambda_n + 1$ olsun. Bir $x = (x_k)$ dizisi için genelleştirilmiş de la Vallee-Poussin ortalaması aşağıdaki şekilde tanımlanır [13].

$n = 1, 2, \ldots$ için $I_n = [n - \lambda_n + 1, n]$ olmak üzere $t_n(x) = \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} x_k$ dir. Şimdi,

$$[V,\lambda]_0 = \left\{ x \in w : lim_n \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} |x_k| = 0 \right\},$$

$$[V,\lambda] = \left\{ x \in w : lim_n \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} |x_k - l| = 0 \right\},$$

$$[V,\lambda]_\infty = \left\{ x \in w : \sup_n \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} |x_k| < \infty \right\}$$

alınsın. Bu dizi uzaylarına sırasıyla de la Valee-Poussin metoduna göre sıfıra kuvvetli toplanabilir, kuvvetli toplanabilir ve kuvvetli sınırlı diziler uzayı denir. Özel olarak $n = 1,2, \ldots$ için $\lambda_n = n$ alınırsa $[V,\lambda]_0$, $[V,\lambda]$ ve $[V,\lambda]_\infty$ uzayları $[C,1]$, $[C,1]_0$ ve $[C,1]_\infty$ uzaylarına indirgenir.

Malkowsky ve Savas [12] hemen hemen yakınsaklık kavramı ile de la Valee - Poussin ortalamasını birleştirerek aşağıdaki dizi uzaylarını tanımladılar ve çalıştılar. Yakınsamalar n'ye göre düzgün olmak üzere,

$$[V,\lambda,f]_0 = \left\{ x \in w : lim_n \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} f(|x_{k+m}| = 0 \right\} ,$$

$$[V,\lambda,f] = \left\{ x \in w : lim_n \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} f(|x_{k+m} - l| = 0 \right\} ,$$

$$[V,\lambda,f]_\infty = \left\{ x \in w : sup_{n,m} \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} f(|x_{k+m}| < \infty \right\} .$$

n =1,2 , … için $\lambda_n = n$ alınırsa $[V,\lambda,f]_0$, $[V,\lambda,f]$ ve $[V,\lambda,f]_\infty$ uzayları sırasıyla $[\hat{c}(f)],[\hat{c}_0(f)]$ ve $[\hat{c}_\infty(f)]$ uzaylarına indirgenirler[22].

Tanım.1.2.6(Hölder Eşitsizliği) **:** $p>1$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ ve $a_1,a_2,...,a_n \geq 0$, $b_1,b_2,...,b_n \geq 0$ olsun. Bu takdirde $\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leq (\sum_{k=1}^{n} a_k^{\,p})^{\frac{1}{p}} (\sum_{k=1}^{n} b_k^{\,q})^{\frac{1}{q}}$ dır.

BÖLÜM 2. BAZI YENİ DİZİ UZAYLARI

2.1. Yeni Dizi Uzayları ve Bazı Topolojik Özellikleri

Bu bölümde invariant veya $\sigma-$yakınsaklık kavramı ile de la Valle-Poussin ortalaması kavramını birleştirerek yeni bir kavram olarak aşağıda tanımı verilen (V_σ, λ) metodu verilecek ve bazı topolojik özellikleri çalışılacaktır.

$p=(p_n)$,her n için $p_n>0$ ve $\sup p_n<\infty$ olacak şekilde reel sayıların bir dizisi olsun. Bu takdirde aşağıdaki yeni dizi uzaylarını tanımlanır. $d_{mn}(x) = \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k\in I_n} x_{\sigma^k(m)}$ olmak üzere ve yakınsamalar m' ye göre düzgün yakınsak olarak,

$$(V_\sigma, \lambda)_0^p = \left\{x : \lim_n |d_{mn}(x)|^{p_n} = 0\right\}$$

$$(V_\sigma, \lambda)^p = \left\{x : \lim_n |d_{mn}(x-l)|^{p_n} = 0 \text{ bazı } \ell \in C \text{ için}\right\}$$

dır. Özel olarak her n için $p_n=1$ alınırsa $(V_\sigma, \lambda)_0^p$, $(V_\sigma, \lambda)^p$ uzayları $(V_\sigma, \lambda)_0$, (V_σ, λ) uzaylarına indirgenir. $\lambda_n = n$ alınırsa $(V_\sigma, \lambda)_0$, (V_σ, λ) uzayları $(V_\sigma)_0$, (V_σ) uzayların indirgenirler.

Şimdi yukarıda tanımlamış olduğumuz yeni dizi uzaylarının bazı topolojik özelliklerini inceleyelim.

Yardımcı Teorem 2.1.1: $(V_\sigma, \lambda)_0^p$ ve $(V_\sigma, \lambda)^p$ uzayları kompleks sayılar cismi C üzerinde birer lineer uzaylardır.

İspat **:** $M = max(1,\ supp_n = H\ )$ olduğunu varsayalım. $p_n / M \leq 1$ olduğundan her n ve m için

$$\left|d_{mn}(x+y)\right|^{p_n/M} \leq \left|d_{mn}(x)\right|^{p_n/M} + \left|d_{mn}(y)\right|^{p_n/M} \tag{2.1.1}$$

ve $\lambda \in C$ için

$$\left|\lambda\right|^{p_n/M} \leq \max(1, \left|\lambda\right|) \tag{2.1.2}$$

olur. (2.1.1) ve (2.1.2) den $\alpha, \beta \in C$ olmak üzere

$$\left|d_{mn}(\alpha x + \beta y)\right|^{p_n/M} \leq \max(1, \left|\alpha\right|)\left|d_{mn}(x)\right|^{p_n/M} + \max(1, \left|\beta\right|)\left|d_{mn}(y)\right|^{p_n/M}$$

olur ki böylece $\alpha x + \beta y \in (V_\sigma, \lambda)_0^p$ elde edilir.

Yardımcı Teorem 2.1.2: $(V_\sigma, \lambda)_0^p$ ve $(V_\sigma, \lambda)^p$ uzayları

$$g(x) = sup_{mn}\left|d_{mn}(x)\right|^{p_m/M}$$

paranormu altında birer paranormlu lineer topolojik uzaylardır.

İspat: Biz sadece $(V_\sigma, \lambda)_0^p$ uzayı için ispatı yapacağız. $(V_\sigma, \lambda)^p$ uzayı için ispat sadece tekrardan ibarettir. Bunun için *g(0) = 0* ve *g(-x) = x* olduğunu görmek kolaydır. (2.1.1) bize g nin alt toplamsal olduğunu verir. Şimdi g 'nin skalerle çarpıma göre sürekli olduğunu görelim. (2.1.2) den $\lambda \in C$ ve $x \in (V_\sigma, \lambda)_0^p$ olmak üzere

$$g(\lambda x) \leq max(1, \left|\lambda\right|)g(x)$$

elde edilir. Böylece $\lambda \to 0$, $x \to 0$ iken $\lambda x \to 0$ olur. λ sabit ve $x \to 0$ iken $\lambda x \to 0$ elde edilir. Eğer $x \in (V_\sigma, \lambda)_0^p$ sabit ise $\varepsilon > 0$ verildiğinde her m için

$$sup_{n > n_0}\left|\lambda d_{mn}(x)\right|^{p_m/M} < \varepsilon / 2 \tag{2.1.3}$$

olacak şekilde bir n_o sayısı vardır ve bir $\delta > 0$ seçilebilir öyleki $\left|\lambda\right| < \delta$ olmak üzere her m için

$$sup_{n \leq n_0}\left|\lambda d_{mn}(x)\right|^{p_m/M} < \varepsilon / 2 \tag{2.1.4}$$

elde edilir. Dolayısıyla (2.1.3) ve (2.1.4) den

$|\lambda| < \delta$ iken $g(\lambda x) < \varepsilon$

bulunur ki bu ispatı tamamlar.

Yardımcı Teorem 2.1. 3:. $(V_\sigma, \lambda)_0^p$ ve $(V_\sigma, \lambda)^p$ uzayları

$g(x) = sup_{mn}|d_{mn}(x)|^{p_m/M}$

paranorm topolojisine göre tamdır.

İspat: (x^i) dizisi $(V_\sigma, \lambda)_0^p$ uzayında bir Cauch dizisi olsun. Bu durumda her *k* için (x_k^i) , C de bir Cauchy dizisidir ve dolaysıyla her *k* için $(x_k^i) \to (x_k^0)$ olur ve $x^0 = (x_k^0)$ dir. Verilen $\varepsilon > 0$ için öyle bir N_0 sayısı vardır ki $i,j > N_0$ olmak üzere her *m* ve *n* için

$$\left|d_{mn}(x^i - x^j)\right|^{p_n/M} < \varepsilon/5 \tag{2.1.5}$$

bulunur. $j \to \infty$ için limit alınırsa her *m* ve *n* için

$$\left|d_{mn}(x^i - x^0)\right|^{p_n/M} < \varepsilon/5 \tag{2.1.6}$$

elde edilir. Bu nedenle, $x^i - x^o \in (V_\sigma, \lambda)_0^p$ ve lineerlikden $x^o \in (V_\sigma, \lambda)_0^p$ bulunur.

Eğer (x^i) dizisi $(V_\sigma, \lambda)^p$ de bir Cauchy dizisi ise bu durumda yukarıdakine benzer olarak $x^i \to x^0$ olacak şekilde bir x^0 vardır. Şimdi $x^o \in (V_\sigma, \lambda)^p$ olduğunu gösterelim. $x^i \in (V_\sigma, \lambda)^p$ olduğundan her *m* ve *n* için

$$\left|d_{mn}(x^i - l^i e)\right|^{p_n/M} < \varepsilon/5 \tag{2.1.7}$$

olacak şekilde $l^i \in$ C vardır. (2.1.1), (2.1.5) ve (2.1.6) dan her *m* ve *n* için

$$\left|d_{mn}(l^i e - l^j e)\right|^{p_m/M} < \left|d_{mn}(x^i - x^i)\right|^{p_m/M} + \left|d_{mn}(x^i - l^i e)\right|^{p_m/M}$$

$$+\left|d_{mn}(x^i - l^i e)\right|^{p_m/M}$$

$$< \frac{\varepsilon}{5} + \frac{\varepsilon}{5} + \frac{\varepsilon}{5} = \frac{3\varepsilon}{5} \quad . \tag{2.1.8}$$

bulunur. Böylece *(l^i)* nin kompleks sayılar cismi C de bir Cauchy dizisi olduğu görülür. Böylece,

$$\left|d_{mn}(l^i - l)\right|^{p_m/M} < 3\,\varepsilon/5 \tag{2.1.9}$$

olacak şekilde bir $l \in$ C nin var olduğu görülür. Şimdi, (2.1.1),(2.1.6),(2.1.8) ve (2.1.9) den

$$\left|d_{mn}(x^o - l^i e)\right|^{p_m/M} \leq \left|d_{mn}(x^i - x^o)\right|^{p_m/M} + \left|d_{mn}(x^o - l^i e)\right|^{p_m/M}$$

$$+\left|d_{mn}(x^i - le)\right|^{p_m/M}$$

$$< \varepsilon/5 + \varepsilon/5 + 3\varepsilon/5 = \varepsilon,$$

elde edilir ki bu ispatı tamamlar.

Yukarıda verilen yardımcı teoremleri birleştirirsek aşagıdaki teorem elde edilir.

Teorem 2.1.1: $(V_\sigma, \lambda)_0^p$ ve $(V_\sigma, \lambda)^p$ uzayları yardımcı teorem 2 de tanımlanmış olan paranorm altında tam lineer topolojik uzaylardır.

Önerme 2.1.1. $0 < p_m \leq q_m$ olmak üzere $(V_\sigma, \lambda)_0^p \subset (V_\sigma, \lambda)_0^q$ dir.

İspat. $x \in (V_\sigma, \lambda)_0^p$ olsun. Bu takdirde m ye göre düzgün yakınsak olarak $\lim_n |d_{mn}(x-l)|^{p_n} = 0$ olur. Bu ise yeteri kadar büyük n' ler için $|d_{mn}(x-l)|^{p_n} \leq 1$ olmasını gerektirir. Dolaysıyla m ye göre düzgün yakınsak olarak

$$|d_{mn}(x-l)|^{q_n} \leq |d_{mn}(x-l)|^{p_n} = \lim_n |d_{mn}(x-l)|^{p_n} = 0$$

olur . $x \in (V_\sigma, \lambda)_0^q$ elde edilir.

Önerme 2.1. 1. $(V_\sigma, \lambda)_0^p$ ve $(V_\sigma, \lambda)^p$ uzayları mutlak konveksdir.

İspat : $0 < \delta < 1$ ise U = {x : g(x) ≤ δ} kümesi mutlak konveks kümedir ve $a,b \in U$ ve $/\lambda/ + /\mu/ \leq 1$ için $g(\lambda a + \mu b) \leq (/\lambda/ + /\mu/)^{pm/M} \delta \leq \delta$

olur ki bu ispatı tamamlar.

2. 2. Matris Dönüşümleri

Teorem 2.2.1 : $A \in (c, (V_\sigma, \lambda))$ olması için gerekli ve yeter şartlar:

(1.1) $\quad \sup_n \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} \left| \sum_{i \in I_n} a_{\sigma^i(m),k} \right| : n \in N \right\} < \infty, \; m = 0,1,2,3,...$

(1.2) m'ye göre düzgün yakınsak olarak $lim_n \frac{1}{\lambda_n} \sum_{i \in I_n} \sum_{k=o}^{\infty} a_{\sigma^i(m),k} = a$

olacak şekilde $a \in C$ vardır.

(1.3) m'ye göre düzgün yakınsak olarak $lim_n \frac{1}{\lambda_n} \sum_{i \in I_n} a_{\sigma^i(m),k} = a_k$

olacak şekilde $a_k \in C$ vardır.

İspat **:** $A \in (c,((V_\sigma,\lambda))$ olsun. $m \in N$ alalım ve $w_{im} = \sum_{k=0}^{\infty} a_{\sigma^i(m),k} x_k$ olmak üzere $t_{nm}(x) = \frac{1}{\lambda_n} \sum_{i \in I_n} w_{\sigma^i(m)}(x)$ tanımlayalım. $w_{im} \in c^*$**,** $(i,m = 1,2,3,\ldots)$ olduğu açıktır. Böylece, $t_{nm} \in c^*$olur. $A \in (c, (V_\sigma,\lambda)$ olduğundan m'ye göre düzgün yakınsak olarak $\lim_n t_{nm}(x) = t(x)$ elde edilir. Her sabit $m \in N$ *ve* $x \in c$ için $\{t_{nm}(x)\}$ in sınırlı olduğu çıkar. Böylece düzün sınırlılık prensibinden $\{\|t_{nm}\|\}$ nin sınırlı olduğu görülür. Her bir $p\in N$ için $v = v(n,m)$ dizisini

$$v_k = \begin{cases} \operatorname{sgn} \sum_{i\in I_n} a_{\sigma^i(n),k} & 0\le k\le p \\ 0 & p < k. \end{cases}$$

olarak tanımlayalım. Bu takdirde, $v \in c$, $\|v\| = 1$ ve

$$\left|t_{nm}(v)\right| = \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k=0}^{p} \left| \sum_{i\in I_n} a_{\sigma^i(m),k} \right|$$

olur. Böylece, $|t_{nm}(v)| \le \|t_{nm}\| \|v\| = \|t_{nm}\|$ dir. Bu nedenle,

$$\frac{1}{\lambda_n} \sum_{k=0}^{p} \left| \sum_{i\in I_n} a_{\sigma^i(m),k} \right| \le \|t_{nm}\|$$

olur ki bu bize (1.1) yi verir.

e ve e_k dizileri yakınsak diziler olduğundan m' ye göre düzgün yakınsak olarak $\lim_n t_{nm}(e)$ ve $\lim_n t_{nm}(e_k)$ mevcuttur. Böylece (1.2) ve (1.3) sağlanır. Şimdi

$$t_{nm}(x) = \frac{1}{\lambda_n} \sum_{i \in I_n} \sum_{k=0}^{\infty} a_{\sigma^i(m),k} x_k = \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k=0}^{\infty} \left| \sum_{i \in I_n} a_{\sigma^i(m),k} x_k \right|$$

olduğunu varsayalım, dolayısıyla

$$\left|t_{nm}(x)\right| \le \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k=0}^{\infty} \left| \sum_{i \in I_n} a_{\sigma^i(m),k} \right| \|x\| \quad i,m = 0,1,2,...$$

bulunur. Böylece (1.1) den $\left|t_{mn}(x)\right| \le K\|x\|$ olur. Burada K , m den bağımsız bir sabittir. Böylece, $t_{nm} \in c^*$ ve $\{\|t_{nm}\|\}$ dizisi her m için sınırlıdır. Her $m=k= 1,2,3\ldots$ için (1.1) ve (1.2) $lim_n\, t_{nm}(e)$ ve $lim_n\, t_{nm}(e_k)$ olmasını gerektirir. Δ, c de bir temel küme olduğundan fonksiyonel analizin bir sonucu olarak $lim_n\, t_{nm}(x) = t(x)$ vardır ve $t_n \in c^*$ olur. Böylece, $b= lim_k x_k$ olmak üzere

$$t_n(x) = b\left[t_n(e) - \sum_{k=0}^{\infty} t_n(e_k)\right] + \sum_{k=0}^{\infty} x_k t_n(e_k)$$

dir. Fakat, (1.1) ve (1.2) den sırasıyla $t_n(e) = a$ ve $t_n(e_k) = a_k$, $k= 1,2,...$ bulunur. Böylece her bir $x \in c$ ve $m= 0,1,2,...$ için $lim_n\, t_{nm}(x) = t_n(x)$ var olur. Burada,

$$t_n(x) = b\left[a - \sum_{k=0}^{\infty} a_k\right] + \sum_{k=0}^{\infty} x_k a_k \tag{2.2.1}$$

olur. Her n ve m için $t_{nm} \in c^*$ olduğundan

$$t_{nm}(x) = b\left[t_{nm}(e) - \sum_{k=0}^{\infty} t_{nm}(e_k)\right] + \sum_{k=0}^{\infty} x_k t_{nm}(e_k) \tag{2.2.2}$$

şekline sahip olur. (2.2.1) ve (2.2.2) den m' ye göre düzgün yakınsak olarak $lim_n\, t_{nm}(e) = a$ ve $lim_n\, t_{nm}(e_k) = a_k$ olduğundan m' ye göre düzgün yakınsak olarak $t_{nm}(x)$ in $t_n(x)$'e yakınsadığı görülür. Böylece $A \in$ (c, (V_σ, λ) olduğu çıkar ki bu ispatı tamamlar.

Teorem 2.2 2: $A \in (c,(V_\sigma,\lambda))_{reg}$ olması için gerekli ve yeter şartlar:

(2.1) $\quad sup_n \left\{ \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} \left| \sum\limits_{k \in I_n} a_{\sigma^i(m),k} \right| : n \in N \right\} < \infty, \; m = 0,1,2,3,...$

(2.2) $\quad m$'ye göre düzgün yakınsak olarak $lim_n \frac{1}{\lambda_n} \sum\limits_{i \in I_n} \sum\limits_{k=o}^{\infty} a_{\sigma^i(m),k} = 1$

(2.3) $\quad m$'ye göre düzgün yakınsak olarak $lim_n \frac{1}{\lambda_n} \sum\limits_{i \in I_n} a_{\sigma^i(m),k} = 0$ *(k= 0,1,2,...)*

olmasıdır.

İspat: $x \in (c,(V_\sigma,\lambda))_{reg}$ olsun. Bu takdirde $x \in (c, (V_\sigma,\lambda))$ olur ki (2.1) şartı Teorem 1 den çıkar. e ve e_k dizilerinin A-dönüşümleri 0 ve 1 olduğundan (2.2) ve (2.3) sağlanmalıdır.

Şimdi verilen şartların sağlandığını varsayalım. Teorem 1 den $A \in (c, (V_\sigma,\lambda))$ olduğundan her bir $x \in c$ için m' ye göre düzgün yakınsak olarak $lim_n t_{nm}(x) = t_n(x)$ olur.

Teorem 2. 2. 3 : $A \in (v,(V_\sigma,\lambda))$ olması için gerekli ve yeter şartlar:

(3.1) $\quad M = sup_n \left| \sum\limits_{k=r}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} \sum\limits_{k \in I_n} a_{\sigma^i(m),k} \right| < \infty, \qquad r,m = 0,1,2,3,...$

(3.2) $\quad m$'ye göre düzgün yakınsak olarak $lim_n \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} \sum\limits_{i \in I_n} \sum\limits_{k=o}^{\infty} a_{\sigma^i(m),k} = a$

olacak şekilde $a \in C$ vardır.

(3.3) $\quad m$'ye göre düzgün yakınsak olarak $lim_n \frac{1}{\lambda_n} \sum\limits_{i \in I_n} a_{\sigma^i(m),k} = a_k$

olacak şekilde $a_k \in C$ vardır.

İspat: $x \in (v, (V_\sigma, \lambda))$ olduğunu varsayalım. Bu takdirde her $x \in v$ için $Ax \in (V_\sigma, \lambda)$ olur. $(V_\sigma, \lambda) \subset l_\infty$ olduğundan dolayı $Ax \in l_\infty$ olur ve böylece (3.1) sağlanır. e ve e_k dizileri v de olduğundan (3.2) ve (3.3) sağlanır.

Tersine verilen şartların sağlandığını ve $x \in v$ olduğunu varsayalım. $v \subset c$ olduğundan $x_k \to l$ dir. Şimdi,

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left|\frac{1}{\lambda_n}\sum_{i\in I_n} a_{\sigma^i(m),k}x_k\right| \leq \sum_{k=0}^{\infty}\left|x_k - x_{k-1}\right|\left|\sum_{k=1}^{r}\frac{1}{\lambda_n}\sum_{i\in I_n} a_{\sigma^i(m),k}x_k\right|$$

$$+\,l\left|\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n}\sum_{i\in I_n} a_{\sigma^i(m),k}x_k\right|.$$

olur. (3.2) ve (3.3) den her r için

$$sup_{m,n}\left|\sum_{k=1}^{r}\frac{1}{\lambda_n}\sum_{i\in I_n} a_{\sigma^i(m),k}x_k\right|<\infty$$

dur . Böylece her m ve $x \in v$ için

$$\frac{1}{\lambda_n}\sum_{i\in I_n} A_{\sigma^i(m)}(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n}\sum_{i\in I_n} a_{\sigma^i(m),k}x_k$$

olur. Ayrıca her $x \in v$ için $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x_k$ vardır. Verilen $\varepsilon > 0$ için

$\sum_{k=K+1}^{\infty}\left|x_k - x_{k-1}\right| < \varepsilon / 4M$ olacak şekilde bir $K > 0$ tamsayısı seçelim.

$$\left|\ \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n}i\sum_{k\in I_n} a_{\sigma(m),k}x_k \ - \sum_{k=0}^{\infty} a_k x_k - l\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\lambda_n}\sum_{i\in I_n} a_{\sigma^i(m),k} - a_k\right)\ \right|$$

$$\leq I_1 + I_2 .$$

olur. Buradan,

$$I_1 = \sum_{k=1}^{K}\left|\sum_{k=1}^{r}\left(\frac{1}{\lambda_n}\sum_{i\in I_n} a_{\sigma^i(m),k} - a_k\right)\right|\left|x_k - x_{k-1}\right|,$$

ve

$$I_2 \leq = sup_k \left|\sum_{k=1}^{r}\left(\frac{1}{\lambda_n}\sum_{i\in I_n} a_{\sigma^i(m),k} - a_k\right)\right| \sum_{k=K+1}^{\infty}\left|x_k - x_{k-1}\right|,$$

çıkar ve (3.2) den dolayı $n \geq n_0$ için $I_1 < \varepsilon/2$ olacak şekilde bir $n_0 > 0$ tamsayısı vardır. Açıkçası $I_1 \leq \varepsilon/2$ olur. Ayrıca , (3.3) den $n \geq n_0$ için

$$\left| \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n}\sum_{i\in I_n} a_{\sigma^i(m),k}\, x_k - \sum_{k=0}^{\infty} a_k x_k - l(a\sum_{k=0}^{\infty} a_k) \right| \leq \varepsilon$$

bulunur. Böylece, m'ye göre düzgün yakınsak olarak

$$lim_n \frac{1}{\lambda_n}\sum_{i\in I_n} A_{\sigma^i(m)}(x) = \ell a + \sum_k a_k (x - \ell),$$

elde edilir.

Teorem 2.2.4 : $A \in (v, (V_\sigma, \lambda))_{reg}$ olması için gerekli ve yeter şartlar:

(4.1) Teorem 3 ‘ ün (3.1) şartı sağlanmalı,

(4.2) m'ye göre düzgün yakınsak olarak $lim_n \frac{1}{\lambda_n}\sum_{i\in I_n}\sum_{k=o}^{\infty} a_{\sigma^i(m),k} = 1$,

(4.3) m'ye göre düzgün yakınsak olarak $lim_n \frac{1}{\lambda_n}\sum_{i\in I_n} a_{\sigma^i(m),k} = 0$.

İspat. $A \in (v, (V_\sigma, \lambda))_{reg}$ olsun. Bir önceki teoremden şartlar sağlanır. Şimdi (4.1)-(4.2) şartları sağlansın. Bir önceki teoremden $A \in (v, (V_\sigma, \lambda))$ ve m'ye göre düzgün yakınsak olarak

$$lim_n \left| \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n}\sum_{i\in I_n} a_{\sigma^i(m),k}\, x_k = 1\right.$$

olur ki bu ispatı tamamlar.

Teorem 2.2.5: $A \in (c_0\ (p),\ (V_\sigma, \lambda)_o^p)$ olması için gerek ve yeter şartlar: Her m için

(5.1) $$C_m = sup_n \sum_{k=0}^{\infty} \left| \frac{1}{\lambda_n} \sum_{i \in I_n} a_{\sigma^i m),k} \right| B^{-1/p_k} \}^{p_n} < \infty$$

olacak şekilde bir $B > 1$ vardır,

(5.2) $$lim_n \left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} \sum_{i \in I_n} a_{\sigma^i(m),k} \right|^{p_n} = 0,$$ (m'ye göre düzgün yakınsak).

İspat. $A \in (c_0\ (p),\ (V_\sigma, \lambda)_o^p)$ olduğunu varsayalım. e_k dizisini ele alalaım .
$e_k \in (c_0\ (p)$ olduğundan (5.2) sağlanır.

$$f_{mn}\ (x) = d_{mn}(Ax)\ |^{pn}$$

alalım. $\{f_{mn}\}_n$ dizisi $lim_n\ f_{mn}(x)$ var olacak şekilde sürekli lineer fonksiyonellerin bir dizisidir. Düzgün sınırlılık prensibinden $0 < \delta < 1$ olmak üzere $x \in S_\delta\ [0]$ ve her n için $f_{mn}(x) \leq K$ olacak bir K sabiti ve $S_\delta\ [0] \subset (c_0\ (p)$ vardır. Her bir r için

$$y_k^{(r)} = \begin{cases} K/p_k\ \mathrm{sgn}(\frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} a_{\sigma^i(m),k}) & 0 \leq k \leq r, \\ \delta & \\ 0 & r < k. \end{cases}$$

tanımlayalım. Şimdi, $y^{(r)} \in S_r\ [0]$ alalım ve her n ve r için

$$\left\{ \sum_{k=1}^{r} \left| \frac{1}{\lambda_n} \sum_{i \in I_n} a_{\sigma^i(m),k} B^{-1/pk} \right\}^{p_n} \leq K$$

olur. Burada, $B = \delta^K$ dır. Böylece (5.1) şartı sağlanır.

Yeterlilik: (5.1) ve (5.2) şartlarının sağlandığını varsayalım ve $x \in c_0(p)$ olsun. $m \in Z^+$ sabit olsun. Verilen $\varepsilon > 0$ için k_0 dan büyük olan her k ve n için

$$B^{1/p_k} |x_k| < \left(\frac{\varepsilon}{C_n}\right)^{1/p_n}$$

olacak şekilde bir k_0 sabiti vardır. $C = max(1,2^H)$ için

$$\left| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} \sum_{i \in I_n} a_{\sigma^i(m),k} x_k \right|^{p_n} \leq (S_1 + S_2)$$

elde edilir. Burada,

$$S_1 = \left| \sum_{k \leq k_0} \frac{1}{\lambda_n} \sum_{i \in I_n} a_{\sigma^i(m),k} x_k \right|^{p_n}.$$

ve

$$S_2 = \left| \sum_{k \leq k_0} \frac{1}{\lambda_n} \sum_{i \in I_n} a_{\sigma^i(m),k} x_k \right|^{p_n}$$

dır.

(5.1) sağlandığından dolayı $n > n_0$ için

$$\left| \frac{1}{\lambda_n} \sum_{i \in I_n} a_{\sigma_{i(m),k}} \right| < \varepsilon^{1/p_m}$$

olacak şekilde bir $n_0 \in Z^+$ vardır. Böylece her n için

$$S_1 \leq \left| \sum_{k \leq k_0} \frac{1}{\lambda_n} \sum_{i \in I_n} a_{\sigma^{i(m),k}} x_k \right|^{p_n} < \varepsilon \Big(\sum_{k \leq k_0} |x_k| \Big)^{p_n}$$

$$< \varepsilon \max\left[1, \Big(\sum_{k \leq k_0} |x_k| \Big)^M \right] \tag{2.2.3}$$

Tekrar, $n > n_0$ için

$$S_2^{1/p_m} \leq \sum_{k>k_0} \left| \frac{1}{\lambda_n} \sum_{i \in I_n} a_{\sigma^i(m),k} x_k \right| < \varepsilon^{1/p_m}$$

olur. Sonuç olarak $n > n_0$ için

$$S_2 < \varepsilon \tag{2.2.4}$$

elde edilir. (2.2.3) ve (2.2.4) den ispat tamamlanır.

Teorem 2.2.6: $A \in (c(p),(V_\sigma,\lambda))$ olması için gerek ve yeter şartlar her m için

(6.1) $D_m = sup_n \sum_k \left| \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} a_{\sigma^i(m),k} \right| B^{-1/p_k} < \infty$ olacak şekilde bir $B>1$ tamsayısı vardır.

(6.2) *m' ye göre düzgün yakınsak olarak* $lim_n \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} a_{\sigma^i(m),k} = \alpha_k$ olacak şekilde $\alpha_k \in C$ vardır.

(6.3) *m' ye göre düzgün yakınsak olarak* $lim_m \sum_k \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} a_{\sigma^i(m),k} = \alpha$ olacak şekilde $\alpha \in C$ vardır.

İspat : Gereklilik : $A \in (c(p),(V_\sigma,\lambda))$ olsun. e_k ve e dizileri $c(p)$ de olduğundan (6.2) ve (6.3) sağlanır. $m \in Z^+$ alalım. $\sigma_{mn}(x) = d_{mn}(Ax)$ yazalım. $(c(p),(V_\sigma,\lambda)) \subset (c(p),(V_\sigma,\lambda)_0)$ olduğundan $\{\sigma_{mn}\}$, $(V_\sigma,\lambda)_0$ üzerinde sürekli lineer fonksiyonellerin bir dizisidir öyleki $lim_n \sigma_{mn}(x)$ m' ye göre düzgün yakınsak olarak vardır. Bir önceki teoremdeki aynı yolu izleyerek düzgün sınırlılık prensibinden gerekliliğin ispatı çıkar.

Yeterlilik**:** Şartların sağlandığını varsayalım. $x \in c(p)$ olsun. $|x_k - \ell| \to 0$ olacak şekilde $\ell \in C$ vardır. Böylece, verilen $0 < \varepsilon < 1$ için her $k < k_0$ olmak üzere

$$|x_k - \ell|^{p_k/M} \leq \frac{\varepsilon}{B(2D_m + 1)} < 1$$

olacak şekilde *k₀* vardır. Ayrıca, $k < k_0$ için,

$$B^{1/p_k}|x_k - \ell| < B^{M/p_k}|x_k - \ell| < (\varepsilon / 2D_m + 1)^{M/p_k} < \varepsilon / 2D_m + 1$$

(6.1) ve (6.2) den

$$\sum_k \left| \frac{1}{\lambda_n} \sum_{i \in I_n} a_{\sigma^i(m),k} - \alpha_k \right| B^{1/p_k} < 2D_n$$

elde edilir. Böylece,

$$\sum_{k > k_0} \left| \left(\frac{1}{\lambda_n} \sum_{i \in I_n} a_{\sigma^i(m),k} - \alpha_k\right)(x_k - \ell) \right| < \varepsilon \tag{2.2.5}$$

Ayrıca, *m*' ye göre düzgün yakınsak olarak

$$lim_n \sum_{k \leq k_0} \left| \left(\frac{1}{\lambda_n} \sum_{i \in I_n} a_{\sigma^i(m),k} - \alpha_k\right)(x_k - \ell) \right| = 0 \tag{2.2.6}$$

olur. Böylece, (2.2.5) ve (2.2.6) den *m* 'ye göre düzgün yakınsak olarak

$$lim_n \sum_k \left(\frac{1}{\lambda_n} \sum_{i \in I_n} a_{\sigma^i(m),k}\right) x_k = \ell\alpha + \sum_k \alpha_k (x_k - \ell)$$

elde edilir.

Sonuç 2.2 1 : $A \in (c_0(p),(V_\sigma, \lambda))$ olması için gerek ve yeter şartlar Teorem 2.2.6 nın (6.1)-(6.2) şartlarının sağlanmasıdır.

Teorem 2.2. 7: $A \in (c(p),(V_\sigma, \lambda))_{reg}$ olması için gerek ve yeter şartlar

(7.1) Teorem 6 nın ilk şartının sağlanması

(7.2.) *m' ye göre düzgün yakınsak olarak* $lim_n \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} a_{\sigma^i(m),k} = 0$

(7.2) *m' ye göre düzgün yakınsak olarak* $lim_m \sum_k \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} a_{\sigma^i(m),k} = 1$

olmasıdır..

Teorem 2.2. 8: $A \in (l_p,(V_\sigma,\lambda))$ olması için gerek ve yeter şartlar :

(8.1) $$D = sup_n \sum_k \left| \frac{1}{\lambda_n} \sum_{i \in I_n} a_{\sigma^i(m),k} \right|^q < \infty \quad (1<p<\propto, \quad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1)$$

$$sup_{n,k} \left| \frac{1}{\lambda_n} \sum_{i \in I_n} a_{\sigma^i(m),k} \right| < \infty, \quad (0<p<1)\ (\forall m)$$

(8.2) *m*' ye göre düzgün yakınsak olarak her sabit *k* için

$lim_n (\frac{1}{\lambda_n} \sum_{i \in I_n} a_{\sigma^i(m),k}) = \alpha_k$ olacak şekilde $\alpha_k \in C$ vardır.

İspat: Biz sadece $1<p<\propto$ durumunu inceleyeceğiz. $A \in (l_p,(V_\sigma,\lambda))$ olduğunu varsayalım. $e_k \in \ell_p$ olduğundan (7.2) kolayca çıkar. Tekrar $(l_p,(V_\sigma,\lambda)) \subset (\ell_p,\ell_\infty)$ olduğundan (8.1) sağlanır.

Şimdi şartların sağlandığını varsayalım. Sabit olarak $m \in Z^+$ alalım. Bu takdirde, $x \in \ell_p$ ve her m için $t_{mn}(Ax)$ vardır. (8.1) ve (8.2) den $\sum_k |\alpha_k|^q < D$ elde edilir. Hölder eşitsizliğinden her bir $x \in \ell_p$ için $\sum_k \alpha_k x_k < \infty$ olduğu çıkar. $\varepsilon>0$ için

$$(\sum_{k=k_0+1} |x_k|^p)^{1/p} < \frac{\varepsilon}{4D^{1/4}}$$

olacak şekilde sabit bir $k_0 \in Z^+$ seçelim. Şimdi ,

$$\left|d_{mn}(Ax)-\sum_k \alpha_k x_k\right| \le \left|\sum_{k=1}^{k_0}\left(\frac{1}{\lambda_n}\sum_{i\in I_n} a_{\sigma^i(m),k}-\alpha_k\right)x_k\right|$$

$$+\left(\sum_k\left|\frac{1}{\lambda_n}\sum_{i\in I_n} a_{\sigma^i(m),k}\right|^q\right)^{1/q}+\left(\sum_k\left|\alpha_k\right|^q\right)^{1/q}\left(\sum_{k=k_0+1}\left|x_k\right|^p\right)^{1/p}$$

$$<\left|\sum_{k=1}^{k_0}\left(\frac{1}{\lambda_n}\sum_{i\in I_n} a_{\sigma^i(m),k}-\alpha_k\right)x_k\right|+\frac{\varepsilon}{2}.$$

olur. (8.2) sağlandığından *m'* ye göre düzgün yakınsak olarak

$$\left|\sum_{k=1}^{k_0}\left(\frac{1}{\lambda_n}\sum_{i\in I_n} a_{\sigma^i(m),k}-\alpha_k\right)\right|<\frac{\varepsilon}{2} \qquad (\forall \mathrm{n}\ge \mathrm{n}_0).$$

olacak şekilde $m_0 \in Z^+$ vardır. Böylece *m*' ye göre düzgün yakınsak olarak,

$$\left|d_{mn}(Ax)-\sum_k \alpha_k x_k\right|<\varepsilon \qquad (\forall \mathrm{n}\ge \mathrm{n}_0)$$

olur ve bu ispatı tamamlar.

BÖLÜM 3. MODULÜS FONKSİYONLARININ DİZİSİ YARDIMIYLA TANIMLANAN BAZI YENİ DİZİ UZAYLARI

3. 1. Modulüs Fonksiyonların Dizisi Yardımıyla Tanımlanan Bazı Yeni Dizi Uzayları

Bu bölümde modulüs fonksiyonların bir dizisini, $\sigma-$ yakınsaklık kavramını ve de la Valle- Poussin ortalamasını kullanarak aşağıda verilen bazı yeni dizi uzayları tanımlanacak ve onların bazı topolojik özellikleri ile kapsam bağıntıları incelenecektir.

F = (f_k) modülüs fonksiyonlarının bir dizisi olsun. Bu takdirde aşağıdaki dizi uzayları tanımlansın.

$$[V_\sigma,\lambda,F]=\left\{x:\lim_n \frac{1}{\lambda_n}\sum_{k\in I_n} f_k(\left|x_{\sigma^k(m)}-l\right|)=0, m\ ye\ göre\ düzgün\ yakinsak, bazı\ l\in C\right\}$$

$$[V_\sigma,\lambda,F]_0=\left\{x:\lim_n \frac{1}{\lambda_n}\sum_{k\in I_n} f_k(\left|x_{\sigma^k(m)}\right|)=0, m\ ye\ göre\ düzgün\ yakinsak\right\}$$

$$[V_\sigma,\lambda,F]_\infty=\left\{x:\sup_{n,m} \frac{1}{\lambda_n}\sum_{k\in I_n} f_k(\left|x_{\sigma^k(m)}\right|)<\infty\right\}.$$

Eğer, her k için $f_k(x) = x$ alınırsa bu dizi uzayları $[V_\sigma,\lambda]$, $[V_\sigma,\lambda]_0$ ve $[V_\sigma,\lambda]_\infty$ dizi uzaylarına dönüşür ki bunlar şu şekilde tanımlanır.

$$[V_\sigma,\lambda]=\left\{x:\lim_n \frac{1}{\lambda_n}\sum_{k\in I_n} (\left|x_{\sigma^k(m)}-l\right|)=0, m\ ye\ göre\ düzgün\ yakinsak, bazı\ l\in C\right\}$$

$$[V_\sigma,\lambda,f]_0=\left\{x:\lim_n \frac{1}{\lambda_n}\sum_{k\in I_n} (\left|x_{\sigma^k(m)}\right|)=0, m\ ye\ göre\ düzgün\ yakinsak\right\}$$

$$[V_\sigma, \lambda]_\infty = \left\{ x : \sup_{n,m} \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} (\left| x_{\sigma^k(m)} \right|) < \infty \right\}.$$

Özel olarak her k için $f_k(x) = f$ alınırsa aşağıdaki dizi uzayları elde edilir.

$$[V_\sigma, \lambda, f] = \left\{ x : \lim_n \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} f(\left| x_{\sigma^k(m)} - l \right|) = 0, m \text{ ye göre düzgün yakinsak}, \text{bazı } l \in C \right\}$$

$$[V_\sigma, \lambda, f]_0 = \left\{ x : \lim_n \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} f\ (\left| x_{\sigma^k(m)} \right|) = 0, m \text{ ye göre düzgün yakinsak} \right\}$$

$$[V_\sigma, \lambda, f]_\infty = \left\{ x : \sup_{n,m} \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} f\ (\left| x_{\sigma^k(m)} \right|) < \infty \right\}.$$

Ayrıca $\sigma(n) = n + 1$ alındığında yukarıda tanımlanmış olan dizi uzayları aşağıdaki dizi uzaylarına indirgenir.

$$[V_\sigma, \lambda, F] = \left\{ x : \lim_n \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} f_k(\left| x_{k+m} - l \right|) = 0, m \text{ ye göre düzgün yakinsak}, \text{bazı } l \in C \right\}$$

$$[V_\sigma, \lambda, F]_0 = \left\{ x : \lim_n \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} f_k(\left| x_{k+m} \right|) = 0, m \text{ ye göre düzgün yakinsak} \right\}$$

$$[V_\sigma, \lambda, F]_\infty = \left\{ x : \sup_{n,m} \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} f_k(\left| x_{k+m} \right|) < \infty \right\}.$$

Bu tanımları verdikten sonra aşağıdaki sonuçlar ispatlanabilir.

Teorem 3.1.1: $[V_\sigma, \lambda, F]$, $[V_\sigma, \lambda, F]_0$ ve $[V_\sigma, \lambda, F]_\infty$ uzayları kompleks sayılar cismi üzerinde birer lineer uzaydırlar.

İspat. Biz sadece $[V_\sigma, \lambda, F]$ uzayını göz önüne alacağız. Diğer uzaylarda ispat benzer şekilde yapılabilir. $x_k \to l \quad [V_\sigma, \lambda, F]$ ve $y_k \to l' \, [V_\sigma, \lambda, F]$ olduğunu varsayalım ve $\alpha, \beta \in C$ olsun. Bu takdirde, $|\alpha| \le K_\alpha$ ve $|\gamma| \le M_\gamma$ olacak şekilde K_α ve M_γ tamsayıları vardır.

$$\frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} f_k\left(\left| \alpha x_{\sigma^k(m)} + \gamma y_{\sigma^k(m)} - (\alpha l + \gamma l') \right| \right) \le K_\alpha \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} f_k\left(\left| \alpha x_{\sigma^k(m)} - l \right| \right)$$

$$+ M\gamma \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} f_k\left(\left| \alpha x_{\sigma^k(m)} - l' \right| \right).$$

Böylece, $\alpha\, x + \gamma\, y \to \alpha\, l + \gamma\, l' \, [V_\sigma, \lambda, F]$ olmasını gerektirir.

Teorem 3.1.2: $[V_\sigma, \lambda, F]_0$ ve $[V_\sigma, \lambda, F]$ uzayları

$$H(x) = sup_{n,m} \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} f_k\left(\left| x_{\sigma^k(m)} \right| \right) \tag{3.1.1}$$

şeklinde tanımlanan paranorm altında tam lineer topolojik uzaydırlar.

Bu teoremin ispatı aşağıdaki yardımcı teoreme dayanmaktadır. Bu nedenle önce bu yardımcı teorem ifade ve ispat edilsin.

Yardımcı Teorem 3.1.1: f_k modulüs fonksiyonların bir dizisi olsun. Bu takdirde, $[V_\sigma, \lambda, F]_\infty = \ell_\infty(F) = \{ x \in w : (f_k(|x_k|))_{k=1}^{\infty} \in l_\infty \}$ dır.

İspat**:** $x \in [V_\sigma, \lambda, F]_\infty$ olsun. Bu takdirde, her m için,

$$\frac{1}{\lambda_1} f_k\left(\left| x_{\sigma^1(m)} \right| \right) \le sup_{mn} \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} f_k\left(\left| x_{\sigma^k(m)} \right| \right) \le M$$

ve dolayısı ile $f_k(|x_k|)_{k=1}^{\infty} \in \ell_\infty$ olur.

Tersine, $x \in \ell_\infty(F)$ olsun. Her j için $f_k(|x_j|) \le M$ olacak şekilde bir $M \rangle 0$ vardır ve dolayısı ile her m ve n için,

$$\frac{1}{\lambda_n}\sum_{k\in I_n} f_k\left(\left|x_{\sigma^k(m)}\right|\right)\leq M\,\frac{1}{\lambda_n}\sum_{k\in I_n}1\leq M$$

olur. Böylece, $x\in\left[V_\sigma,\lambda,F\right]_\infty$ bulunur.

Şimdi teoremin ispatını verebiliriz.

İspat. Her şeyden önce $\left[V_\sigma,\lambda,F\right]$ nin (3.1) de tanımlanan H paranormuna göre tam paranormlu bir uzay olduğunu göstereceğiz. $\left[V_\sigma,\lambda,F\right]_o$ için ispat tamamen aynıdır.

Her $x\in\left[V_\sigma,\lambda,F\right]$ için *H(-x) = H(x)*'dir. *x,y*$\in\left[V_\sigma,\lambda,F\right]$ olsun. Modulüs fonksiyonun (iii) ve(ii) şartından

$$H(x+y)\leq\sup_{mn}\frac{1}{\lambda_n}\sum_{k\in I_n} f_k\left(\left|x_{\sigma^h(m)}\right|\right)+f_k\left(\left|y_{\sigma^k(m)}\right|\right)\leq\sup_{mn}\frac{1}{\lambda_n}\sum_{k\in I_n} f_k\left(\left|x_{\sigma^h(m)}\right|\right).$$

$$+\sup_{mn}\frac{1}{\lambda_n}\sum_{k\in I_n} f\left(\left|y_{\sigma^k(m)}\right|\right)\leq H(x)+H(y$$

elde edilir. Şimdi, $(\gamma\to\infty)$ iken $\mu_r\to\mu$ ve $H(x^{(r)})\to 0$ olsun. Bu takdirde, (μ_r) dizini sınırlıdır; böylece her *r* için $(\mu_r)\leq M$ olacaktır. Modulüs fonksiyonunun (i) ve (iii) şartlarından

$$H(\mu_r x^{(r)})=\sup_{mn}\frac{1}{\lambda_n}\sum_{k\in I_n} f_k\left(\left|\mu_r x^{(r)}_{\sigma^{(k)}m}\right|\right)\leq\sup_{mn}\frac{1}{\lambda_n}\sum_{k\in I_n} f_k\left(\left|Mx^{(r)}_{\sigma^{(k)}m}\right|\right)$$

$$\leq M\sup_{mn}\frac{1}{\lambda_n}\sum_{k\in I_n} f_k\left(\left|x^{(r)}_{\sigma^{(k)}m}\right|\right)=M.H(x^{(r)})\to 0\quad (r\to\infty).$$

Son olarak $x\in\left[V_\sigma,\lambda,F\right]$ verilsin ve $\mu_r\to 0$ $(r\to\infty)$ olsun. $\varepsilon>0$ verilsin, her *m* ve $n\rangle n_o$ için

$$\frac{1}{\lambda_n}\sum_{k\in I_n} f_k\left(\left|y_{k_{\sigma}(m)}-\ell\right|\right)<\frac{\varepsilon}{2} \tag{3.1.2}$$

olacak şekilde $n_0 \in N$ vardır. $x \in \ell_\infty(F)$ olduğundan Yardımcı Teorem 3.1.1 den ve f_k ' lar sürekli olduğundan her $r > r_0$ ve $1 \le n \le n_0$ özellikli her n ve m için

$$\frac{1}{\lambda_n}\sum_{k\in I_n} f_k\left(\left|\mu_r y_{k_{\sigma}(m)}-\ell\right|\right)<\varepsilon \tag{3.1.3}$$

olacak şekilde $r_0 \in N$ vardır. Şimdi $n \rangle n_o$ olsun. f_k' lar sürekli ve , $(r \to \infty)$ için $\mu_r \to 0$ olduğundan her $r \ge r_1$ için

$$f_k\left(\left|\mu_r \ell\right|\right)\langle\frac{\varepsilon}{2} \text{ ve } |\mu_r| \ \langle\ 1 \tag{3.1.4}$$

olacak şekilde $r_1 \in N$ seçebiliriz. (3.1.2)ve (3.1.3) de her $r \ge r_1$ ve her m için

$$\frac{1}{\lambda_n}\sum_{k\in I_n} f_k\left(\left|\mu_r x_{k_{\sigma}(m)}\right|\right)\le\frac{1}{\lambda_n}\sum_{k\in I_n} f_k\left(\left|\mu_r \ell\right|\right)+\frac{1}{\lambda_n}\sum_{k\in I_n} f_k\left(\left|\mu_r\left(x_{k_{\sigma}(m)}-\ell\right)\right|\right)$$

$$\le f\left(\left|\mu_r \ell\right|\right)+\left(\left[\left|\mu_r\right|\right]+1\right)\frac{1}{\lambda_n}\sum_{k\in I_n} f_k\left(\left|x_{k_{\sigma}(m)}-\ell\right|\right)$$

$$<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon . \tag{3.1.5}$$

olur. Şimdi $r_2 = max\{r_{1,} r_0\}$ seçelim.(3.1.3) ve (3.1.5) den her $r \ge r_2$ için $H\left(\mu_{r^2}\right) \le \varepsilon$ yani $r \to \infty$ için $H(\mu_r x) \to 0$ olur. Böylece H'nin bir paranorm olduğu görülür.

Şimdi $[V_\sigma, \lambda, F]$ uzayının tam olduğunu göstereceğiz. $\left(x^{(r)}\right)_{r=0}^{\infty}$ dizisinin $[V_\sigma, \lambda, F]$ uzayında bir Cauchy dizisi olduğunu varsayalım. Bu takdirde $\varepsilon > 0$ verilmek üzere her $r, s \geq r_0$ ve her *m,n* için ,

$$\frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} f_k \left(\left| x^{(r)}_{\sigma^k(m)} - x^{(s)}_{\sigma^k(m)} \right| \right) \leq \varepsilon \tag{3.1.6}$$

olacak şekilde $r_0 \in N$ vardır. Bu, her bir *j* için $r, s \geq r_0$ olmak üzere

$$f_k \left(\left| x^{(r)}_{\sigma^k(m)} - x^{(s)}_{\sigma^k(m)} \right| \right) < \varepsilon \tag{3.1.7}$$

olmasını gerektirir. Sonuç olarak, her bir sabit j için $(x_j^{(r)})_{r=0}^{\infty}$ dizisi **C** de bir Cauchy dizisidir. Böylece C tam olduğundan dolayı $x_j = \lim_r x_j^{(r)}$ olur. Sabit bir şekilde $r \geq r_0$ alarak ve s 'yi sonsuza götürerek (3.16) dan f_k' ların sürekliliğini de kullanırsak her $r \geq r_0$ ve her *m,n* için ,

$$\frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} f_k \left(\left| x^{(r)}_{\sigma^k(m)} - x_{\sigma^k(m)} \right| \right) \leq \varepsilon \tag{3.1.8}$$

yani her $r \geq r_0$ için,

$$H(x^{(r)} - x) \leq \varepsilon \tag{3.1.9}$$

elde edilir. Ayrıca, her bir r için $n \geq n_r$ *ve* m için

$$\frac{1}{\lambda_n}\sum_{k\in I_n} f_k\left(\left|x_{\sigma^k(m)}^{(r)}-\ell^{(r)}\right|\right)\langle\varepsilon \tag{3.1.10}$$

olacak şekilde bir $n_r \in N$ vardır. $r,s \geq r_0$ ve $n_0 = max\{n_r, n_s\}$olsun. (3.1.6) ve (3.1.10) den her m için

$$f_k\left(\left|\ell^{(r)}-\ell^{(s)}\right|\right)$$

$$=\frac{1}{\lambda_{n_o}}\sum_{k\in I_{n_o}} f_k\left(\left|\ell^{(r)}-\ell^{(s)}\right|\right)\leq\frac{1}{\lambda_{n_o}}\sum_{k\in I_{n_o}} f_k\left(\left|x_{\sigma^k(m)}^{(r)}-\ell^{(r)}\right|\right)$$

$$+\frac{1}{\lambda_{n_o}}\sum_{k\in I_{n_o}} f_k\left(\left|\lambda_{\sigma^k(m)}^{s}-\ell\ldots\right|\right)+\frac{1}{\lambda_{n_o}}\sum_{k\in I_{n_o}} f_k\left(\left|x_{\sigma^k(m)}^{(r)}-x_{\sigma^k(m)}^{(s)}\right|\right)$$

$$\langle\varepsilon+\varepsilon+\varepsilon$$

Bu $r\to\infty$ iken $\ell^{(r)}\to\ell$ olmasını gerektirir. Buradan (3.1.9) ve (3.1.10) kullanılarak, yeteri kadar büyük n ve her m için

$$\frac{1}{\lambda_n}\sum_{k\in I_n} f_k\left(\left|x_{\sigma^k(m)}-\ell\right|\right)\leq\frac{1}{\lambda_{n_o}}\sum_{k\in I_{n_o}} f_k\left(\left|x_{\sigma^k(m)}-x_{\sigma^k(m)}^{(r_0)}\right|\right)+$$

$$\frac{1}{\lambda_{n_o}}\sum_{k\in I_{n_o}} f_k\left(\left|x_{\sigma^k(m)}^{(r)}-\ell^{(r)}\right|\right)+\frac{1}{\lambda_{n_o}}\sum_{k\in I_{n_o}} f_k\left(\left|\ell-\ell^{(r_0)}\right|\right)< 4\varepsilon$$

olur. Böylece $x\in\left[V_\sigma,\lambda,F\right]$ olur ki bu ispatı tamamlar.

Teorem 3.1.3: $F = (f_k)$ modulüs fonksiyonlarının bir dizisi için her $t > 0$ olmak üzere

(1)$\sup_k f_k(t) <\infty$

ise $\left[V_\sigma, \lambda, F\right] \subset \left[V_\sigma, \lambda, F\right]_\infty$ olur.

İspat *:* $x \in \left[V_\sigma, \lambda, F\right]$ olsun. Modulüs fonksiyonun tanımını kullanarak ,

$$\sum_{k \in I_n} f_k\left(\left|x_{\sigma^k(m)}\right|\right) = \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} f_k\left(\left|x_{\sigma^k(m)} - l + l\right|\right.$$

$$\leq \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} f_k\left(\left|x_{\sigma^k(m)} - l\right| + f_k(|l|)\lambda_n\right..$$

elde edilir. Böylece,

$$\frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} f_k\left(\left|x_{\sigma^k(m)}\right|\right) \leq \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} f_k\left(\left|x_{\sigma^k(m)} - l\right| + f_k(|l|)\right)$$

olur ki (i) den sonuç çıkar.

Teorem 3.1.4. Aşağıdaki ifadeler denktirler:

(a) $\left[V_\sigma, \lambda\right]_\infty \subset \left[V_\sigma, \lambda, F\right]_\infty$

(b) $\left[V_\sigma, \lambda\right]_0 \subset \left[V_\sigma, \lambda, F\right]_\infty$

(c) Her *t>0* için $sup_n \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} f_k(t) < \infty$

İspat :*(a)* nın *(b)* yi gerektirdiğini görmek kolaydır. Şimdi *(b)* nin *(c)* yi gerektirdiğini görelim. *(b)* nin sağlandığını fakat *(c)* nin sağlanmadığını varsayalım. Bu takdirde *t>0* için

$$sup_n \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} f_k(t) = \infty$$

olur. Böylece

$$\frac{1}{\lambda_{n(i)}} \sum_{k \in I_{n(i)}} f_k(i^{-1}) > i, \quad i = 1,2,.... \tag{3.1.11}$$

olacak şekilde bir $I_{n(i)}$ alt aralığı vardır. $x = (x_k)$ dizisi

$$x_k = \begin{cases} i^{-1} & k \in I_{n(i)} \\ 0 & k \notin I_{n(i)} \end{cases}$$

olarak tanımlansın. $x \in [V_\sigma, \lambda]_0$ olduğu açıktır. Fakat (3.1.11) den $x \notin [V_\sigma, \lambda, F]_\infty$ olduğu çıkar. Bu ise (b) ile çelişir. O halde (c) sağlanmalıdır.

Şimdi (c) nin (a) yı gerektirdiğini gösterelim. (c) sağlansın ve $x \in [V_\sigma, \lambda]_\infty$ olsun. $x \notin [V_\sigma, \lambda, F]_0$ olduğunu varsayalım. Böylece, $x \in [V_\sigma, \lambda]_\infty$ için

$$sup_{n,m} \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} f_k(\left| x_{\sigma^k(m)} - l \right|) = \infty \tag{3.1.12}$$

olur. Her bir k ve sabit m için $t = \left| \sigma^k(m) \right|$ alalım. Bu takdirde (3.1.12) den

$$sup_{n,m} \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} f_k(t) = \infty$$

olur ki bu (c) ile çelişir. Böylece (a) sağlanmalıdır.

Teorem 3.1.5: Aşağıdaki ifadeler denktir.

(a) $[V_\sigma, \lambda, F]_0 \subset [V_\sigma, \lambda]_0$

(b) $[V_\sigma, \lambda, F]_0 \subset [V_\sigma, \lambda]_\infty$,

(c) Her *t>0* için $inf_n \frac{1}{\lambda_n}\sum_{k\in I_n} f_k(t) > 0$.

İspat: *(a)* nın *(b)* yi gerektirdiğini görmek kolaydır. Şimdi *(b)* nin *(c)* yi gerektirdiğini görelim. *(b)* nin sağlandığını fakat *(c)* nin sağlanmadığını varsayalım. Bu takdirde *t>0* için

$$\inf_n \frac{1}{\lambda_n}\sum_{k\in I_n} f_k(t) = 0$$

olur. Böylece

$$\frac{1}{\lambda_{n(i)}}\sum_{k\in I_{n(i)}} f_k(i) < \frac{1}{i}, \quad i = 1,2,\ldots \tag{3.1.13}$$

olacak şekilde bir $I_{n(i)}$ alt aralığı vardır. $x = (x_k)$ dizisi

$$x_k = \begin{cases} i & k\in I_{n(i)} \\ 0 & k\notin I_{n(i)} \end{cases}$$

olarak tanımlansın. $x\in [V_\sigma, \lambda, F]_0$ olduğu açıktır. Fakat $x\notin [V_\sigma, \lambda]_\infty$ olduğu çıkar. Bu ise (b) ile çelişir. O halde (c) sağlanmalıdır.

Şimdi (c) nin (a) yı sağladığını gösterelim. (c) sağlansın ve $x\in [V_\sigma, \lambda, F]_0$ olsun. Bu takdirde *m'* ye göre düzgün yakınsak olarak

$$lim_n \frac{1}{\lambda_n}\sum_{k\in I_n} f_k(|x_{\sigma^k(m)}|) = 0 \tag{3.1.14}$$

elde edilir.

$x \notin [V_\sigma, \lambda]_0$ olduğunu varsayalım. $\varepsilon > 0$ ve $I_{n'} \subset I_n$ olmak üzere $n \geq n'$ ve $k \in I_{n'}$ için $|\sigma^k(m)| > \varepsilon$ elde edilir. Böylece, $f_k(\varepsilon) \leq f_k(|\sigma^k(m)|$ olur ve sonuç olarak (3.1.14) den

$$lim_n \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} f_k(\varepsilon) = 0$$

olur ki bu (c) ile çelişir. Böylece (a) sağlanmalıdır.

Teorem 3.1. 6: $[V_\sigma, \lambda, F]_\infty \subset [V_\sigma, \lambda]_0$ olması için gerek ve yeter şart

$$lim_n \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} f_k(t) = \infty \qquad (3.1.15)$$

olmasıdır.

İspat : $[V_\sigma, \lambda, F]_\infty \subset [V_\sigma, \lambda]_0$ olsun ve (3.1.15) sağlanmasın. Bu takdirde,

$$\lim_{n(i)} \frac{1}{\lambda_{n(i)}} \sum_{k \in I_{n(i)}} f_k(t_0) \leq M < \infty,\ i=1,2,3,.... \qquad (3.1.16)$$

olacak şekilde bir $I_{n(i)}$ alt aralığı ve $t_n > 0$ vardır. $x = (x_k)$ dizisini

$$x_k = \begin{cases} t_0 & k \in I_{n(i)} \\ 0 & k \notin I_{n(i)} \end{cases}$$

olarak tanımlansın. Böyece (3.1.16) dan $x \in [V_\sigma, \lambda, F]_\infty$ olduğu açıktır. Fakat $x \notin [V_\sigma, \lambda]_0$ olur.

Tersine, (3.1.15) sağlansın ve $x \in [V_\sigma, \lambda, F]_\infty$ olsun. Her bir n ve m için

$$\frac{1}{\lambda_n}\sum_{k\in I_n} f_k(\left|x_{\sigma^k(m)}\right|)\leq M<\infty \tag{3.1.17}$$

olur. $x\notin[V_\sigma,\lambda]_0$ olduğunu varsayalım. $\varepsilon>0$ için ve $I_{n'}\subset I_n$ olmak üzere $n\geq n_0$ için $\left|\sigma^k(m)\right|>\varepsilon_0$ olacak şekilde bir n_0 sayısı vardır. Böylece, $f_k(\varepsilon_0)\leq f_k(\left|x_{\sigma^k(m)}\right|)$ olur ki bu (3.1.15) ile çelişir. Böylece, $x\in[V_\sigma,\lambda]_0$ olur yani $[V_\sigma,\lambda,F]_\infty\subset[V_\sigma,\lambda]_0$ elde edilir.

Teorem 3.1.7: $[V_\sigma,\lambda]_\infty\subset[V_\sigma,\lambda,F]_0$ olması için gerek ve yeter şart her t> 0 için

$$lim_n\frac{1}{\lambda_n}\sum_{k\in I_n} f_k(t)=0 \tag{3.1.18}$$

olmasıdır.

İspat: $[V_\sigma,\lambda]_\infty\subset[V_\sigma,\lambda,F]_0$ olsun ve (3.1.8) şartı sağlanmasın. Bu takdirde, bazı $t_0>0$ için

$$lim\frac{1}{\lambda_n}\sum_{k\in I_n} f_k(t)=l\neq 0 \tag{3.1.19}$$

elde edilir. $x=(x_k)$ dizisi $x_k=t_0$ şeklinde tanımlansın. Böylece, (3.1.19) dan $x\notin[V_\sigma,\lambda,F]_0$ olduğu açıktır. Fakat $x\notin[V_\sigma,\lambda]_0$ olur.

Tersine, (3.1.18) sağlansın ve $x\in[V_\sigma,\lambda,F]_0$ olsun. Her bir n ve m için

$$\frac{1}{\lambda_n}\sum_{k\in I_n} f_k(\left|x_{\sigma^k(m)}\right|)\leq M<\infty\,. \tag{3.1.20}$$

olur. $x\notin[V_\sigma,\lambda]_0$ olur. $x\in[V_\sigma,\lambda]_\infty$ olur ki bu bizim sonucumuz ile çelişir. O halde (3.1.18) sağlanmalıdır.

Tersine, (3.1.19) sağlansın ve $x \in [V_\sigma, \lambda]_\infty$ olsun. Bu takdirde her k ve m için

$|\sigma^k(m)| \leq M < \infty$

olur . Böylece, $f_k(|x_{\sigma^k(m)}|) \leq f_k(M)$ ve (3.1.19) dan

$$\lim_n \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} f_k(|x_{\sigma^k(m)}|) \leq \lim_n \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} f_k(M) = 0$$

olur. Böylece, $x \in [V_\sigma, \lambda, F]_0$, yani $[V_\sigma, \lambda]_\infty \subset [V_\sigma, \lambda, F]_0$ olur. Bu ispatı tamamlar.

Teorem 3.1. 8 : $F = (f_k)$ modülüs fonksiyonların bir dizisi olsun. Bu takdirde, $[V_\sigma, \lambda] \subset [V_\sigma, \lambda, F]$ dir.

Bu teoremin ispatı aşağıdaki yardımcı teoreme dayanır.

Yardımcı Teorem 3. 1. 2: f_k modulüs fonksiyonların bir dizisi ve $0 < \delta < 1$ olsun. Her bir $x \geq \delta$ için $f_k(x) \leq 2 f_k(1)\delta^{-1} x$ olur.

İspat. $f_k(x) \leq f_k(1 + [x/\delta] \leq f_k(1) + f_k([x/\delta])$

$\leq f_k(1) + [x/\delta] f_k(1).$

$= \ f_k(1)(1 + [x/\delta]) \leq f_k(1)(1 + x/\delta) \leq 2 f(1) x/\delta.$

Burada, $[x/\delta]$, x/δ ' nın tam kısmını gösterir.

Teoremin ispatı. $x \in [V_\sigma, \lambda]$ olsun. Bu takdirde m' ye göre düzgün yakınsak olarak

$A_{nm} = \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} f_k(|\alpha x_{\sigma^k(m)} - l|) \to 0$ as $n \to \infty$ olur. $\varepsilon > 0$ olsun. 0<δ<1 olmak üzere her u ($0 \leq u \leq \delta$) için $f_k(u) < \varepsilon$ olacak şekilde $\delta > 0$ seçelim. Böylece Yardımcı Teorem 1 den

$$\frac{1}{\lambda_n}\sum_{k\in I_n} f_k\left(\left|x_{\sigma^k(m)}-l\right|\right)=\frac{1}{\lambda_n}\sum_{k\in I_n,\left|x_{\sigma^k(m)}-l\right|\le\varepsilon} f_k\left(\left|x_{\sigma^k(m)}-l\right|\right)$$

$$+\frac{1}{\lambda_n}\sum_{k\in I_n,\left|x_{\sigma^k(m)}-l\right|>\varepsilon} f_k\left(\left|x_{\sigma^k(m)}-l\right|\right)$$

$$\le\frac{1}{\lambda_n}(\lambda_n\varepsilon)+\frac{1}{\lambda_n}2M\delta^{-1}\lambda_n A_{nm}$$

elde edilir. $n\to\infty$ iken m' ye göre düzgün yakınsak olarak $x\in\left[V_\sigma,\lambda,F\right]$ elde edilir ki bu
ispatı tamamlar.

Teorem 3.1. 9 : $F=(f_k)$ modulüs fonksiyonlarının bir dizisi olsun. Eğer, $\lim_u \inf_k f_k(u)/u>0$ ise bu takdirde, $\left[V_\sigma,\lambda,F\right]=\left[V_\sigma,\lambda\right]$ dir.

İspat. $\lim_u \inf_k f_k(u)/u>0$ ise u>0 için $f_k(u)>cu$ olacak şekilde bir c>0 sayısı vardır. $x\in\left[V_\sigma,\lambda,F\right]$ alalım. Bu takdirde,

$$\frac{1}{\lambda_n}\sum_{k\in I_n} f_k\left(\left|x_{\sigma^k(m)}-l\right|\right)\ge$$

$$\frac{1}{\lambda_n}\sum_{k\in I_n} c\left(\left|x_{\sigma^k(m)}-l\right|\right)=\frac{1}{\lambda_n}\sum_{k\in I_n} c\left(\left|x_{\sigma^k(m)}-l\right|\right)$$

olur. Böylece $x\in\left[V_\sigma,\lambda\right]$ elde edilir. Bir önceki teoremi kullanarak ispat tamamlanır.

BÖLÜM 4. (σ,λ) - ASİMPTOTİK İSTATİSTİKSEL DENKLİK

4.1. (σ,λ) - Asimptotik İstatistiksel Denk Diziler

Bu bölümde (σ,λ) - asimptotik istatistiksel denklik tanımlanacak ve bazı teoremler ispatlanacaktır. Bazı tanımlar vererek işe başlayalım.

Fridy [1] istatistiksel yakınsaklık kavramını aşağıdaki şekilde tanımlamıştır.

$x=(x_k)$ bir dizi olsun. Eğer, her $\varepsilon > 0$ için,

$$lim_n \frac{1}{n}\left|\left\{k \le n : |x_k - l| \ge \varepsilon\right\}\right| = 0$$

oluyorsa $x=(x_k)$ dizisine istatistiksel yakınsak dizi denir. Bu durumda, $s-$ $limit\, x$ $= L$ veya $x_k \to L(s)$ yazılır ve $s = \{x : \exists L \in R : s - lim\, x = L\}$ ile gösterilir.

Bu kavram daha sonra Mursaleen [14] tarafından De la Valee-Poussin ortalaması kullanılarak aşağıdaki şekilde genelleştirilmiştir.

Tanım 4.1.1: $x=(x_k)$ bir dizi olsun. Eğer, her $\varepsilon > 0$ için,

$$lim_n \frac{1}{\lambda_n}\left|\left\{k \in I_n : |x_k - l| \ge \varepsilon\right\}\right| = 0$$

oluyorsa $x=(x_k)$ dizisine λ- istatistiksel yakınsak dizi denir. Bu durumda, $S_\lambda -$ $limit\, x = L$ veya $x_k \to L(S_\lambda)$ yazılır ve $S_\lambda = \{x : \exists L \in R : S_\lambda - \lim x = L\}$ ile gösterilir.

Patterson [19], L çarpanlı asimptotik istatistiksel yakınsaklığı şu şekilde tanımlamıştır.

Tanım 4.1. 2: $x=(x_k)$ *ve* $y=(y_k)$ negatif olmayan iki dizi olsun. Eğer, her $\varepsilon>0$ için,

$$lim_n \frac{1}{n}\left|\left\{k \le n : \left|\frac{x_k}{y_k} - L\right| \ge \varepsilon\right\}\right| = 0$$

oluyorsa $x=(x_k)$ *ve* $y=(y_k)$ dizilerine L çarpanlı asimptotik istatistiksel denk diziler denir. Bu kısaca $x \approx y$ (s) şeklinde gösterilir.

E. Savas ve R. Savas [23] aşağıdaki tanımı verdiler.

Tanım 4.1.3: $x=(x_k)$ bir dizi olsun. Eğer, her $\varepsilon>0$ için, m'ye göre düzgün yakınsak olarak

$$lim_n \frac{1}{\lambda_n}\left|\left\{k \in I_n : \left|x_{\sigma^k(m)} - L\right| \ge \varepsilon\right\}\right| = 0$$

oluyorsa $x=(x_k)$ dizisine invariant λ - istatistiksel denk dizi denir. Bu durumda, $S_{\sigma\lambda} - limit\ x = L$ veya $x_k \to L(S_{\sigma\lambda})$ yazılır ve $S_{\sigma\lambda} = \{x : \exists L \in R : S_{\sigma\lambda} - lim\ x = L\}$ ile gösterilir.

Doğal olarak bu tanımlardan yola çıkarak aşağıdaki yeni tanımları gözönüne aldık.

Tanım 4.1.4: $x=(x_k)$ *ve* $y=(y_k)$ negatif olmayan iki dizi olsun. Eğer, her $\varepsilon>0$ için m' ye göre düzgün yakınsak olarak

$$lim_n \frac{1}{n}\left|\left\{k \le n : \left|\frac{x_{\sigma^k(m)}}{y_{\sigma^k(m)}} - L\right| \ge \varepsilon\right\}\right| = 0$$

oluyorsa $x=(x_k)$ ve $y=(y_k)$ dizilerine L çarpanlı invariant asimptotik istatistiksel denk dizilerdir denir. Bu kısaca $x \approx y\,(S_\sigma)$ şeklinde gösterilir.

Tanım 4.1.5: $x=(x_k)$ ve $y=(y_k)$ negatif olmayan iki dizi olsun. Eğer, her $\varepsilon > 0$ için, m' ye göre düzgün yakınsak olarak

$$lim_n \frac{1}{\lambda_n}\left|\left\{k \le n : \left|\frac{x_{\sigma^k(m)}}{y_{\sigma^k(m)}} - L\right| \ge \varepsilon\right\}\right| = 0$$

oluyorsa $x=(x_k)$ ve $y=(y_k)$ dizilerine L çarpanlı invariant λ- asimptotik istatistiksel denk dizilerdir denir. Bu kısaca $x \approx y\,(S_{\sigma\lambda})$ şeklinde gösterilir.

Tanım 4.1.6: $x=(x_k)$ ve $y=(y_k)$ negatif olmayan iki dizi olsun. Eğer, m' ye göre düzgün yakınsak olarak

$$lim_n \frac{1}{\lambda_n}\sum_{k\in I_n}\left|\frac{x_{\sigma^k(m)}}{y_{\sigma^k(m)}} - L\right| = 0$$

oluyorsa $x=(x_k)$ ve $y=(y_k)$ dizilerine L çarpanlı invariant kuvvetli λ- asimptotik denk dizilerdir denir.

Eğer $\sigma(n) = n+1$ alınırsa yukarıdaki tanımlar aşağıdaki tanımlara indirgenir.

Tanım 4.1.7: $x=(x_k)$ bir dizi olsun. Eğer, her $\varepsilon > 0$ için, m'ye göre düzgün yakınsak olarak

$$lim_n \frac{1}{\lambda_n}\left|\left\{k \in I_n : \left|x_{k+m} - L\right| \ge \varepsilon\right\}\right| = 0$$

oluyorsa $x=(x_k)$ dizisine hemen hemen λ- istatistiksel denk dizi denir. Bu durumda, $\hat{S}_\lambda -$ limit $x = L$ veya $x_k \to L(\hat{S}_\lambda)$ yazılır ve $\hat{S}_\lambda = \{x : \exists L \in R : S_{\sigma\lambda} - \lim x = L\}$ ile gösterilir.

Tanım 4.1.8: $x=(x_k)$ *ve* $y=(y_k)$ negatif olmayan iki dizi olsun.. Eğer, her $\varepsilon > 0$ için, *m*' ye göre düzgün yakınsak olarak

$$lim_n \frac{1}{n}\left|\left\{k \le n : \left|\frac{x_{k+m}}{y_{k+m}} - L\right| \ge \varepsilon\right\}\right| = 0$$

oluyorsa $x=(x_k)$ *ve* $y=(y_k)$ dizilerine L çarpanlı hemen hemen kuvvetli asimptotik denk diziler denir. Bu kısaca $x \approx y\,(\widehat{S})$ şeklinde gösterilir.

Tanım 4.1.9 : $x=(x_k)$ *ve* $y=(y_k)$ negatif olmayan iki dizi olsun.. Eğer, her $\varepsilon > 0$ için, *m*' ye göre düzgün yakınsak olarak

$$lim_n \frac{1}{\lambda_n}\left|\left\{k \le n : \left|\frac{x_{k+m}}{y_{k+m}} - L\right| \ge \varepsilon\right\}\right| = 0$$

oluyorsa $x=(x_k)$ *ve* $y=(y_k)$ dizilerine L çarpanlı hemen hemen λ- asimptotik istatistiksel denk diziler denir. Bu kısaca $x \approx y\,(\widehat{S}_\lambda)$ şeklinde gösterilir.

Tanım 4.1.10 : $x=(x_k)$ *ve* $y=(y_k)$ negatif olmayan iki dizi olsun. Eğer *m*' ye göre düzgün yakınsak olarak

$$lim_n \frac{1}{\lambda_n}\sum_{k\in I_n}\left|\frac{x_{k+m}}{y_{k+m}} - L\right| = 0$$

oluyorsa $x=(x_k)$ ve $y=(y_k)$ dizilerine L çarpanlı hemen hemen kuvvetli λ-asimptotik denk dizilerdir denir. Kısaca $x \approx y\,(\widehat{V}_\lambda)$ şeklinde gösterilir

Şimdi bu tanımlara dayanaak aşağıdaki teoremleri verebiliriz.

Δ, sonsuza giden ve $\lambda_1 = 1$ $ve\, \lambda_{n+1} \leq \lambda_n + 1$ özelliğine sahip pozitif sayıların azalmayan dizilerinin kümesini göstersin.

Teorem 4.1.1: $\lambda \in \Delta$ olsun. Bu takdirde,

i) $x \approx y(V_{\sigma,\lambda})$ ise $x \approx y(S_{\sigma,\lambda})$,

ii) $x \in \ell_\infty$ ve $x \approx y(S_{\sigma,\lambda})$ ise $x \approx y(V_{\sigma,\lambda})$ ve $x \approx y(C,1)$,

iii) $S_{\sigma,\lambda} \cap \ell_\infty = V_{\sigma,\lambda} \cap \ell_\infty$

olur.

İspat. Eğer $\varepsilon > 0$ ve $x \approx y(V_{\sigma,\lambda})$ ise

$$\sum_{k\in I_n}\left|\frac{x_{\sigma^k(m)}}{y_{\sigma^k(m)}} - L\right| \geq \sum_{k\in I_n,\ \left|\frac{x_{\sigma^k(m)}}{y_{\sigma^k(m)}}\right| \geq \varepsilon}\left|\frac{x_{\sigma^k(m)}}{y_{\sigma^k(m)}} - L\right| \geq \varepsilon\left|\left\{k \leq n : \left|\frac{x_{\sigma^k(m)}}{y_{\sigma^k(m)}} - L\right| \geq \varepsilon\right\}\right|.$$

olur. Böylece, $x \approx y(S_{\sigma,\lambda})$ bulunur.

ii) $x=(x_k)$ ve $y=(y_k)$ dizilerinin ℓ_∞ da olduğunu ve $x \approx y(S_{\sigma,\lambda})$ olduğunu varsayalım. Bu takdirde her *k* ve *m* için,

$$\left|\frac{x_{\sigma^k(m)}}{y_{\sigma^k(m)}} - L\right| \leq M$$

olduğunu kabul edelim. Verilen $\varepsilon > 0$ için ,

$$\frac{1}{\lambda_n}\sum_{k\in I_n}\left|\frac{x_{\sigma^k(m)}}{y_{\sigma^k(m)}}-L\right| = \frac{1}{\lambda_n}\sum_{k\in I_n,\left|\frac{x_{\sigma^k(m)}}{y_{\sigma^k(m)}}\right|\geq\varepsilon}\left|\frac{x_{\sigma^k(m)}}{y_{\sigma^k(m)}}-L\right| + \frac{1}{\lambda_n}\sum_{k\in I_n,\left|\frac{x_{\sigma^k(m)}}{y_{\sigma^k(m)}}\right|<\varepsilon}\left|\frac{x_{\sigma^k(m)}}{y_{\sigma^k(m)}}-L\right|$$

$$\leq \frac{M}{\lambda_n}\left|\left\{k\leq n : \left|\frac{x_{k+m}}{y_{k+m}}-L\right|\geq\varepsilon\right\}\right| + \varepsilon .$$

Böylece,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{x_{\sigma^k(m)}}{y_{\sigma^k(m)}}-L\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-\lambda_n}\left(\frac{x_{\sigma^k(m)}}{y_{\sigma^k(m)}}-L\right)+\frac{1}{n}\sum_{k\in I_n}^{n}\left(\frac{x_{\sigma^k(m)}}{y_{\sigma^k(m)}}-L\right)$$

$$\leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-\lambda_n}\left|\frac{x_{\sigma^k(m)}}{y_{\sigma^k(m)}}-L\right| + \frac{1}{n}\sum_{k\in I_n}^{n}\left|\frac{x_{\sigma^k(m)}}{y_{\sigma^k(m)}}-L\right|$$

$$\leq \frac{2}{n}\sum_{k\in I_n}^{n}\left|\frac{x_{\sigma^k(m)}}{y_{\sigma^k(m)}}-L\right| .$$

olur. Böylece, $x \approx y(V_{\sigma,\lambda})$ olduğundan $x \approx y(C,1)$ elde edilir.

ispatı (i) ve (ii) den çıkar.

Teorem 4.1. 2: Eğer,

$$\liminf \frac{1}{\lambda_n} > 0 \qquad (4.1.1)$$

ise $x \approx y(S_\sigma)$ olması $x \approx y(S_{\sigma,\lambda})$ olmasını gerektirir.

İspat. $\varepsilon > 0$ için

$$\frac{1}{n}\left\{k\leq n : \left|\frac{x_{\sigma^k(m)}}{y_{\sigma^k(m)}}-L\right|\geq\varepsilon\right\} \supset \left\{k\in I_n : \left|\frac{x_{\sigma^k(m)}}{y_{\sigma^k(m)}}-L\right|\geq\varepsilon\right\}.$$

Böylece,

$$\frac{1}{n}\left\{k \le n : \left|\frac{x_{\sigma^k(m)}}{y_{\sigma^k(m)}} - L\right| \ge \varepsilon\right\} \ \ge \ \frac{1}{n}\left\{k \in I_n : \left|\frac{x_{\sigma^k(m)}}{y_{\sigma^k(m)}} - L\right| \ge \varepsilon\right\}$$

$$\ge \frac{1}{\lambda_n}\frac{\lambda_n}{n}\left\{k \in I_n : \left|\frac{x_{\sigma^k(m)}}{y_{\sigma^k(m)}} - L\right| \ge \varepsilon\right\},$$

$n \to \infty$ iken limit alırsak ve (4.1.1) kullanılırsa sonuç elde edilir.

4. 2. Modulüs Fonksiyonu Yardımıyla Tanımlanmış (σ,λ)-Asimptotik İstatistiksel Denk Diziler

Yukarıda verilen bir tanım bu bölümde modulus fonksiyonu yardımıyla aşağıdaki şekilde genelleştirilmiş ve bazı temel teoremler ispatlanmıştır.

Tanım 4.2.1: $x = (x_k)$ *ve* $y = (y_k)$ negatif olmayan iki dizi, f bir modulus fonksiyonu ve $p=(p_k)$ pozitif reel sayıların bir dizisi olsun. Eğer *m*' ye göre düzgün yakınsak olarak

$$\lim_n \frac{1}{\lambda_n}\sum_{k\in I_n} f\left(\left|\frac{x_{\sigma^k(m)}}{y_{\sigma^k(m)}} - L\right|\right)^{p_k} = 0$$

oluyorsa $x = (x_k)$ *ve* $y = (y_k)$ dizilerine *f* modulus fonksiyonuna göre L çarpanlı invariant kuvvetli λ - asimptotik denk dizilerdir denir ve kısaca $x \approx y\,(V_{\sigma,\lambda,})(p)$ şeklinde gösterilir. Eğer *p* sabit ve ≥ 1 ise $x \approx y\,(V_{\sigma,\lambda,})(p) = x \approx y\,(V_{\sigma,\lambda,p})$ olur.

Teorem 4.2.1: (i) $x \approx y\,(V_{\sigma,\lambda,p})$, $0 < p < \infty$ olması $x \approx y(S_{\sigma,\lambda})$ olmasını,

(ii) $x_k \in l_\infty$ ve $x \approx y(S_{\sigma,\lambda})$ olması $x \approx y\,(V_{\sigma,\lambda,p})$ olmasını gerektirir.

İspat. (i) $\varepsilon > 0$ ve $x \approx y\,(V_{\sigma,\lambda,p})$, $0 < p < \infty$ ise

$$\sum_{k\in I_n}\left|\frac{x_{\sigma^k(m)}}{y_{\sigma^k(m)}}-L\right|^p \geq \sum_{k\in I_n,\left|\frac{x_{\sigma^k(m)}}{y_{\sigma^k(m)}}\right|\geq\varepsilon}\left|\frac{x_{\sigma^k(m)}}{y_{\sigma^k(m)}}-L\right|^p$$

$$\geq \varepsilon^p\left|\left\{k\leq n:\left|\frac{x_{\sigma^k(m)}}{y_{\sigma^k(m)}}-L\right|\geq\varepsilon\right\}\right|$$

olur ki bu bize istenilen sonucu verir.

$x=(x_k)$ *ve* $y=(y_k)$ dizilerinin ℓ_∞ da ve $x\approx y(S_{\sigma,\lambda})$ olduğunu varsayalım.

Bu takdirde her *k* ve *m* için, $B = sup_{km}\left|\frac{x_{\sigma^k(m)}}{y_{\sigma^k(m)}}\right| + L$ alalım. Verilen $\varepsilon>0$ için

her *m* ve $n>N_\varepsilon$ olmak üzere

$$\frac{1}{\lambda_n}\left|\left\{k\leq n:\left|\frac{x_{\sigma^k(m)}}{y_{\sigma^k(m)}}-L\right|\geq(\varepsilon/2)^{1/p}\right\}\right|<\varepsilon/'B^p\ .$$

olacak şekilde N_ε seçeriz. Ve $E_{nm}=\left\{k\leq n:\left|\frac{x_{\sigma^k(m)}}{y_{\sigma^k(m)}}-L\right|\geq(\varepsilon/2)^{1/p}\right\}$ alalım ve her

m ve $n>N_\varepsilon$ için

$$\frac{1}{\lambda_n}\sum_{k\in I_n}\left|\frac{x_{\sigma^k(m)}}{y_{\sigma^k(m)}}-L\right|^p=\frac{1}{\lambda_n}\sum_{k\in E_{nm}}\left|\frac{x_{\sigma^k(m)}}{y_{\sigma^k(m)}}-L\right|^p+\frac{1}{\lambda_n}\sum_{k\notin E_{nm}}\left|\frac{x_{\sigma^k(m)}}{y_{\sigma^k(m)}}-L\right|^p$$

$$<\frac{M}{\lambda_n}(\lambda_n\varepsilon/2B^p)B^p+\frac{1}{\lambda_n}(\varepsilon/2)\lambda_n=\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon$$

olur ki istenileni verir. Bu ispatı tamamlar.

Teorem 4.2. 2: *f*, bir modulus fonksiyon olsun. Bu takdirde, $(V_{\sigma,\lambda})(p)\subset(S_{\sigma,\lambda})$ dir.

İspat**:** $x\in(V_{\sigma,\lambda})(p)$ ve $\varepsilon>0$ verilsin. Bu takdirde,

$$\frac{1}{\lambda_n}\sum_{k\in I_n} f\left(\left|\frac{x_{\sigma^k(m)}}{y_{\sigma^k(m)}}-L\right|\right)^{p_k} = \frac{1}{\lambda_n}\sum_{k\in I_n,\left|\frac{x_{\sigma^k(m)}}{y_{\sigma^k(m)}}\right|\geq\varepsilon} f\left(\left|\frac{x_{\sigma^k(m)}}{y_{\sigma^k(m)}}-L\right|\right)^{p_k} + \frac{1}{\lambda_n}\sum_{k\in I_n,\left|\frac{x_{\sigma^k(m)}}{y_{\sigma^k(m)}}\right|<\varepsilon} f\left(\left|\frac{x_{\sigma^k(m)}}{y_{\sigma^k(m)}}-L\right|\right)^{p_k}$$

$$\geq \frac{1}{\lambda_n}\sum_{k\in I_n,\left|\frac{x_{\sigma^k(m)}}{y_{\sigma^k(m)}}\right|\geq\varepsilon} f\left(\left|\frac{x_{\sigma^k(m)}}{y_{\sigma^k(m)}}-L\right|\right)^{p_k}$$

$$\geq \frac{1}{\lambda_n}\sum_{k\in I_n} f(\varepsilon)^{p_k}$$

$$\geq \frac{1}{\lambda_n}\sum_{k\in I_n,\left|\frac{x_{\sigma^k(m)}}{y_{\sigma^k(m)}}\right|\geq\varepsilon} \min\left(\left[f(\varepsilon)^{\inf p_k}, f(\varepsilon)^H\right]\right)$$

$$\geq \frac{1}{\lambda_n}\left|\left\{k\in I_n : \left|\frac{x_{\sigma^k(m)}}{y_{\sigma^k(m)}}-L\right|\geq\varepsilon\right\}\right| min\left(\left[f(\varepsilon)^{inf\ p_k}, f(\varepsilon)^H\right]\right.$$

Böylece, $x\in(S_{\sigma,\lambda})$. Burada $H = sup\ p_k$ dir.

Teorem 4.2.3 : f, sınırlı bir modulus fonksiyon ve $0 < h = inf\ p_k \leq p_k \leq sup\ p_k \leq H \leq \infty$ olsun. Bu takdirde $(S_{\sigma,\lambda}) \subset (V_{\sigma,\lambda})(p)$ dır.

İspat: f' in sınırlı olduğunu varsayalım. Bu takdirde her $t\geq 0$ için $f(t) < K$ olacak şekilde bir K tamsayısı vardır. Bu takdirde,

$$\frac{1}{\lambda_n}\sum_{k\in I_n} f\left(\left|\frac{x_{\sigma^k(m)}}{y_{\sigma^k(m)}}-L\right|\right)^{p_k} = \frac{1}{\lambda_n}\sum_{k\in I_n,\left|\frac{x_{\sigma^k(m)}}{y_{\sigma^k(m)}}\right|\geq\varepsilon} f\left(\left|\frac{x_{\sigma^k(m)}}{y_{\sigma^k(m)}}-L\right|\right)^{p_k} + \frac{1}{\lambda_n}\sum_{k\in I_n,\left|\frac{x_{\sigma^k(m)}}{y_{\sigma^k(m)}}\right|<\varepsilon} f\left(\left|\frac{x_{\sigma^k(m)}}{y_{\sigma^k(m)}}-L\right|\right)^{p_k}$$

$$\leq \frac{1}{\lambda_n}\sum_{k\in I_n,\left|\frac{x_{\sigma^k(m)}}{y_{\sigma^k(m)}}\right|\geq\varepsilon} max(K^h, K^H) + \frac{1}{\lambda_n}\sum_{k\in I_n} f(\varepsilon)^{p_k}$$

$$\leq \max(K^h, K^H)\ \frac{1}{\lambda_n}\left|\left\{k\in I_n : \left|\frac{x_{\sigma^k(m)}}{y_{\sigma^k(m)}}-L\right|\geq\varepsilon\right\}\right| + max\left(\left[f(\varepsilon)^h, f(\varepsilon)^H\right]\right.$$

Böylece, $x \in (V_{\sigma,\lambda})(p)$ olur. Bu ispatı tamamlar.

Eğer $\sigma(n) = n+1$ alırsak yukarıdaki teoremler aşağıdaki sonuçlara indirgenir.

Sonuç 4.2.1: $\lambda \in \Delta$ olsun. Bu takdirde,

i) $x \approx y(\widehat{V}_\lambda)$ ise $x \approx y(\widehat{S}_\lambda)$,

ii) $x \in \ell_\infty$ ve $x \approx y(\widehat{S}_\lambda)$ ise $x \approx y(\widehat{V}_\lambda)$ ve $x \approx y(C,1)$,

iii) $\widehat{S}_\lambda \cap \ell_\infty = \widehat{V}_\lambda \cap \ell_\infty$

olur.

Sonuç 4.2. 2: Eğer,

$$\lim\inf \frac{1}{\lambda_n} > 0 \qquad (4.1.2)$$

ise $x \approx y(\widehat{S})$ olması $x \approx y(\widehat{S}_\lambda)$ olmasını gerektirir.

Sonuç 4.2.3: (i) $x \approx y\,(\widehat{V}_{\lambda,p})$, $0 < p < \infty$ olması $x \approx y(\widehat{S}_\lambda)$ olmasını,

(ii) $x_k \in l_\infty$ ve $x \approx y(\widehat{S}_\lambda)$ olması $x \approx y\,(\widehat{V}_{\lambda,p})$ olmasını gerektirir.

Sonuç 4.2.4: f, bir modulus fonksiyon olsun. Bu takdirde, $(\widehat{V}_\lambda)(p) \subset (\widehat{S}_\lambda)$ dir.

Sonuç 4.2.5: f sınırlı bir modulus fonksiyon ve $0 < h = \inf p_k \le p_k \le \sup p_k \le H \le \infty$ olsun. Bu takdirde, $(\widehat{S}_\lambda) \subset (\widehat{V}_\lambda)(p)$ dır.

BÖLÜM 5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu bölümde, tezde elde edilen önceki bölümlerdeki orijinal sonuçlar özetlenecektir. Bunlar, matematiğe yeni tanımlarla katkı sağlayan ve bir boşluğu dolduran kavramlardır. Tezdeki ikinci, üçüncü ve dördüncü bölümler orijinal çalışmaları bulundurmaktadır.

Buradaki ikinci bölümde, invariant veya $\sigma -$yakınsaklık kavramı ile de la Valle-Poussin ortalaması kavramı birleştirilerek yeni bir kavram olarak tanımı verilen (V_σ, λ) metodu ile bazı topolojik özellikleri çalışılmıştır. Aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir.

Teorem 2.1.1: $(V_\sigma,\lambda)_0^p$ ve $(V_\sigma,\lambda)^p$ uzayları $g(x) = sup_{mn}\left|d_{mn}(x)\right|^{p_m/M}$ paranormu altında tam lineer topolojik uzaylardır.

Önerme 2.1.1. $0 < p_m \le q_m$ olmak üzere $(V_\sigma,\lambda)_0^p \subset (V_\sigma,\lambda)_0^q$ dir.

Önerme 2.1. 1. $(V_\sigma,\lambda)_0^p$ ve $(V_\sigma,\lambda)^p$ uzayları mutlak konveksdir.

Teorem 2.2.1 : $A \in (c, (V_\sigma,\lambda))$ olması için gerekli ve yeter şartlar:

(1.1) $$\sup_n\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n}\left|\sum_{i\in I_n} a_{\sigma^i(m),k}\right| : n\in N\right\} < \infty,\ m = 0,1,2,3,...$$

(1.2) m'ye göre düzgün yakınsak olarak $lim_n \frac{1}{\lambda_n}\sum_{i\in I_n}\sum_{k=o}^{\infty} a_{\sigma^i(m),k} = a$

olacak şekilde $a \in C$ vardır.

(1.3) m'ye göre düzgün yakınsak olarak $lim_n \frac{1}{\lambda_n} \sum_{i \in I_n} a_{\sigma^i(m),k} = a_k$

olacak şekilde $a_k \in C$ vardır.

Teorem 2.2 2: $A \in (c, (V_\sigma, \lambda))_{reg}$ olması için gerekli ve yeter şartlar:

(2.1) $sup_n \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} \left| \sum_{k \in I_n} a_{\sigma^i(m),k} \right| : n \in N \right\} < \infty, \ m = 0,1,2,3,...$

(2.2) m'ye göre düzgün yakınsak olarak $lim_n \frac{1}{\lambda_n} \sum_{i \in I_n} \sum_{k=o}^{\infty} a_{\sigma^i(m),k} = 1$

(2.3) m'ye göre düzgün yakınsak olarak $lim_n \frac{1}{\lambda_n} \sum_{i \in I_n} a_{\sigma^i(m),k} = 0$ *(k= 0,1,2,...)* olmasıdır.

Teorem 2. 2. 3 : $A \in (v, (V_\sigma, \lambda))$ olması için gerekli ve yeter şartlar:

(3.1) $M = sup_n \left| \sum_{k=r}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} a_{\sigma^i(m),k} \right| < \infty, \qquad r,m = 0,1,2,3,...$

(3.2) m'ye göre düzgün yakınsak olarak $lim_n \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} \sum_{i \in I_n} \sum_{k=o}^{\infty} a_{\sigma^i(m),k} = a$

olacak şekilde $a \in C$ vardır.

(3.3) m'ye göre düzgün yakınsak olarak $lim_n \frac{1}{\lambda_n} \sum_{i \in I_n} a_{\sigma^i(m),k} = a_k$

olacak şekilde $a_k \in C$ vardır.

Teorem 2.2.4 : $A \in (v, (V_\sigma, \lambda))_{reg}$ olması için gerekli ve yeter şartlar:

(4.1) Teorem 2.2.3 ‘ ün (3.1) şartı sağlanmalı,

(4.2) *m*’ye göre düzgün yakınsak olarak $lim_n \frac{1}{\lambda_n} \sum_{i \in I_n} \sum_{k=o}^{\infty} a_{\sigma^i(m),k} = 1$,

(4.3) *m*’ye göre düzgün yakınsak olarak $lim_n \frac{1}{\lambda_n} \sum_{i \in I_n} a_{\sigma^i(m),k} = 0$.

Teorem 2.2.5: $A \in (c_0(p), (V_\sigma, \lambda)_o^p)$ olması için gerek ve yeter şartlar: Her *m* için

(5.1) $C_m = sup_n \sum_{k=0}^{\infty} \left| \frac{1}{\lambda_n} \sum_{i \in I_n} a_{\sigma^i m),k} \right| B^{-1/p_k} \}^{p_n} < \infty$

olacak şekilde bir *B* > 1 vardır,

(5.2) $lim_n \left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} \sum_{i \in I_n} a_{\sigma^i(m),k} \right|^{p_n} = 0$, (*m*’ye göre düzgün yakınsak).

Teorem 2.2.6: $A \in (c(p), (V_\sigma, \lambda))$ olması için gerek ve yeter şartlar her *m* için

(6.1) $D_m = sup_n \sum_k \left| \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} a_{\sigma^i(m),k} \right| B^{-1/p_k} < \infty$ olacak şekilde bir *B>1*

tamsayısı vardır.

(6.2) *m’ ye göre düzgün yakınsak olarak* $lim_n \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} a_{\sigma^i(m),k} = \alpha_k$ olacak

şekilde $\alpha_k \in C$ vardır.

(6.3) *m' ye göre düzgün yakınsak olarak* $lim_m \sum_k \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} a_{\sigma^i(m),k} = \alpha$ olacak

şekilde $\alpha \in C$ vardır.

Sonuç 2.2 1 : $A \in (c_0(p),(V_\sigma,\lambda))$ olması için gerek ve yeter şartlar Teorem 2.2.6 nın (6.1)-(6.2) şartlarının sağlanmasıdır.

Teorem 2.2. 7: A$\in$$(c(p),(V_\sigma,\lambda))_{reg}$ olması için gerek ve yeter şartlar

(7.1) Teorem 2.2.6 nın ilk şartının sağlanması

(7.2) *m' ye göre düzgün yakınsak olarak* $lim_n \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} a_{\sigma^i(m),k} = 0$

(7.3) *m' ye göre düzgün yakınsak olarak* $lim_m \sum_k \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} a_{\sigma^i(m),k} = 1$

olmasıdır.

Teorem 2.2. 8: $A \in (l_p,(V_\sigma,\lambda))$ olması için gerek ve yeter şartlar :

(8.1) $D = sup_n \sum_k \left| \frac{1}{\lambda_n} \sum_{i \in I_n} a_{\sigma^i(m),k} \right|^q < \infty$ $(1<p<\infty,\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1)$

$$sup_{n,k} \left| \frac{1}{\lambda_n} \sum_{i \in I_n} a_{\sigma^i(m),k} \right| < \infty, \quad (0<p<1)\ (\forall m)$$

(8.2.) *m*' ye göre düzgün yakınsak olarak her sabit k için

$lim_n (\frac{1}{\lambda_n} \sum_{i \in I_n} a_{\sigma^i(m),k}) = \alpha_k$ olacak şekilde $\alpha_k \in C$ vardır.

Üçüncü bölümde modulüs fonksiyonların bir dizisini, $\sigma -$ yakınsaklık kavramını ve de la Valle- Poussin ortalaması kullanılarak bazı yeni dizi uzayları tanımlanmış ve onların bazı topolojik özellikleri ile kapsam bağıntılarının incelenmesi sonucunda aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir.

Teorem 3.1.1: $[V_\sigma,\lambda,F]$, $[V_\sigma,\lambda,F]_0$ ve $[V_\sigma,\lambda,F]_\infty$ uzayları kompleks sayılar cismi üzerinde birer lineer uzaylardır.

Teorem 3.1.2: $[V_\sigma,\lambda,F]_0$ ve $[V_\sigma,\lambda,F]$ uzayları

$$H(x)=sup_{n,m}\frac{1}{\lambda_n}\sum_{k\in I_n} f_k(\left|x_{\sigma^k(m)}\right|)$$

şeklinde tanımlanan paranorm altında tam lineer topolojik uzaylardır.

Teorem 3.1.3: $F = (f_k)$ modulüs fonksiyonlarının bir dizisi için her $t > 0$ olmak üzere $sup_k f_k(t) <\infty$ $[V_\sigma,\lambda,F]\subset[V_\sigma,\lambda,F]_\infty$ olur.

Teorem 3.1.4. Aşağıdaki ifadeler denktirler:

(a) $[V_\sigma,\lambda]_\infty\subset[V_\sigma,\lambda,F]_\infty$

(b) $[V_\sigma,\lambda]_0\subset[V_\sigma,\lambda,F]_\infty$

(c) Her $t>0$ için $sup_n\frac{1}{\lambda_n}\sum_{k\in I_n} f_k(t)<\infty$

Teorem 3.1.5: Aşağıdaki ifadeler denktir.

(a) $[V_\sigma,\lambda,F]_0\subset[V_\sigma,\lambda]_0$

(b) $[V_\sigma,\lambda,F]_0\subset[V_\sigma,\lambda]_\infty$,

(c) Her *t>0* için $inf_n \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} f_k(t) > 0$.

Teorem 3.1. 6: $[V_\sigma, \lambda, F]_\infty \subset [V_\sigma, \lambda]_0$ olması için gerek ve yeter şart

$$lim_n \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} f_k(t) = \infty$$

olmasıdır.

Teorem 3.1.7: $[V_\sigma, \lambda]_\infty \subset [V_\sigma, \lambda, F]_0$ olması için gerek ve yeter şart her t> 0 için

$$lim_n \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} f_k(t) = 0$$

olmasıdır.

Teorem 3.1. 8 : $F = (f_k)$ modülüs fonksiyonların bir dizisi olsun. Bu takdirde, $[V_\sigma, \lambda] \subset [V_\sigma, \lambda, F]$ dir.

Teorem 3.1. 9 : $F = (f_k)$ modulüs fonksiyonların bir dizisi olsun. Eğer, $\lim_u \inf_k f_k(u)/u > 0$ ise bu takdirde, $[V_\sigma, \lambda, F] = [V_\sigma, \lambda]$ dir.

Dördüncü bölümde (σ, λ)- asimptotik istatistiksel denk diziler tanımlanmış ve bazı teoremler ispatlanmıştır.

Δ kümesi, sonsuza giden ve $\lambda_1 = 1$ $ve\, \lambda_{n+1} \le \lambda_n + 1$ özelliğine sahip pozitif sayıların azalmayan dizilerinin kümesini göstersin. Aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 4.1.1: $\lambda \in \Delta$ olsun. Bu takdirde,

i) $x \approx y(V_{\sigma,\lambda})$ ise $x \approx y(S_{\sigma,\lambda})$,

ii) $x \in \ell_\infty$ ve $x \approx y(S_{\sigma,\lambda})$ ise $x \approx y(V_{\sigma,\lambda})$ ve $x \approx y(C,1)$,

iii) $S_{\sigma,\lambda} \cap \ell_\infty = V_{\sigma,\lambda} \cap \ell_\infty$

olur.

Teorem 4.1. 2: Eğer $\liminf \frac{1}{\lambda_n} > 0$ ise $x \approx y(S_\sigma)$ olması $x \approx y(S_{\sigma,\lambda})$ olmasını gerektirir.

Modulüs fonksiyonu yardımıyla tanımlanmış (σ,λ)- asimptotik istatistiksel denk dizilerle ilgili şunlar elde edilmiştir.

Teorem 4.2.1: (i) $x \approx y\,(V_{\sigma,\lambda,p})$, $0 < p < \infty$ olması $x \approx y(S_{\sigma,\lambda})$ olmasını,

(ii) $x_k \in l_\infty$ ve $x \approx y(S_{\sigma,\lambda})$ olması $x \approx y\,(V_{\sigma,\lambda,p})$ olmasını gerektirir.

Teorem 4.2. 2: f, bir modulus fonksiyon olsun. Bu takdirde, $(V_{\sigma,\lambda})(p) \subset (S_{\sigma,\lambda})$ dir.

Teorem 4.2.3 : f, sınırlı bir modulus fonksiyon ve $0 < h = \inf p_k \le p_k \le \sup p_k \le H \le \infty$ olsun. Bu takdirde, $(S_{\sigma,\lambda}) \subset (V_{\sigma,\lambda})(p)$ dır.

Sonuç 4.2.1: $\lambda \in \Delta$ olsun. Bu takdirde,

i) $x \approx y(\widehat{V}_\lambda)$ ise $x \approx y(\widehat{S}_\lambda)$,

ii) $x \in \ell_\infty$ ve $x \approx y(\widehat{S}_\lambda)$ ise $x \approx y(\widehat{V}_\lambda)$ ve $x \approx y(C,1)$,

iii) $\widehat{S}_\lambda \cap \ell_\infty = \widehat{V}_\lambda \cap \ell_\infty$

olur.

Sonuç 4.2. 2: Eğer $\liminf \frac{1}{\lambda_n} > 0$ ise $x \approx y(\widehat{S})$ olması $x \approx y(\widehat{S}_\lambda)$ olmasını gerektirir.

Sonuç 4.2.3: (i) $x \approx y(\widehat{V}_{\lambda,p})$, $0 < p < \infty$ olması $x \approx y(\widehat{S}_\lambda)$ olmasını,

(ii) $x_k \in l_\infty$ ve $x \approx y(\widehat{S}_\lambda)$ olması $x \approx y(\widehat{V}_{\lambda,p})$ olmasını gerektirir.

Sonuç 4.2.4: f, bir modulus fonksiyon olsun. Bu takdirde, $(\widehat{V}_\lambda)(p) \subset (\widehat{S}_\lambda)$ dir.

Sonuç 4.2.5: f sınırlı bir modulus fonksiyon ve $0 < h = \inf p_k \le p_k \le \sup p_k \le H \le \infty$ olsun. Bu takdirde, $(\widehat{S}_\lambda) \subset (\widehat{V}_\lambda)(p)$ dır.

KAYNAKLAR

[1] FRIDY J. A., " On statistical convergence", Analysis, 5, 301-313, 1985

[2] KING , J.P., " Almost Summable Sequences". Proc. Amer. Math. Soc. 16, 1219-1225, 1966.

[3] KOLK, E., "On strong boundedness and summability with respect to a sequence of moduli", Acta et Comment. Univ. Tartu . 960 , 41-56, 1994

[5] KUTTNER, B., "Note On Strong Summability". J. London Math. Soc. 21, 118-122. 1946

[6] LORENTZ, G.G., "A Contribution to the theory of divergent Sequences", Acta Math. 80 , 345-355. 1948

[7] MADDOX, I. J., "Spaces of Strongly Summable Sequences". Quart. J. Math. Oxford (2)18 ,345-355.

[8] MADDOX, I .J,. "Continous Köthe_toeplitz duals of certain sequence spaces,". ". Math. Proc. Camb. Philos. Soc. 65 : 541-545, 1969

[9] MADDOX, I. J., " A new type of Convergence". Math. Proc. Camb. Philos. Soc. 83 : 61-64, 1978

[10] MADDOX, I. J., " Sequence space defined by a moduli", Math.Proc. Camb.Phil.Soc. 100, 161-166,1986.

[11] MADDOX, I.J., " *Elements of Functional Analysis*",Camb. Univ. Pres. (1970).

[12] MAROUF, M., "Asymptotic equivalence and summability", Int. Math. Math. Sci. 16(4), 755-762, 1993

[13] MALKOWSKY, E. and SAVAS, E., "Some -sequence spaces defined by a modulus", Archivium Math. 36, 219-228, 2000

[14] MURSALEEN, M., "$\lambda -$ statistical convergence", Math. Slovaca 50(1), 111-115, 2000

[15] MURSALEEN, M., ".Matrix Transformations Between Some New Sequence Spaces", Houston J. Math. 9(4), 505-509, 1983

[16] NAKANO, H.,. "Concave Modulus". *J. Math. Soc. Japon*, **5** , 29-49, 1953

[17] NANDA, S., "Strongly Almost Convergent Sequences", Bull. Call. Math. Soc. 76 , 236-240 ,1984

[18] NANDA, S.,. “Infinite Matrices and almost convergence”. J. Indian Math. Soc.. 40 , 173-184 ,1976.

[19] PERTERSEN, G. M., “ Regular Matrix transformations”, MCGrav-Hill Publishing Company Limited, London 1966.

[20] PATTERSON, R.F., “ On asimptotically statistically equivalent sequences”, Demonst. Math. 36(1), 2003,149-153.

[21] RUCKLE, W.H., “ FK spaces in which the sequence of coordinate vectors is bounded”, Canad. J.Math .25, 973-978, 1973.

[22] SAVAŞ, E.,. “On Some Generalized Sequence Spaces Defined by a Modulus”, Indian J. Pure Appl. Math. 30(5),459-464, 1999

[23] SAVAŞ, E., “Strongly σ-Convergence Sequences” Bull. Call. Math. Soc. 81 : 295-300, 1989

[24] SAVAŞ , R and SAVAŞ, E. “Sequence spaces defined by Orlicz Functions”, Indian J. Pure Appl. Math. 21(4): 359-365, 1990

[25] SCHAEFER, P., “ Infinite Matrices and Invariant Means”, Proc. Amer. Math. Soc. 36(1),104-110, 1972

ÖZGEÇMİŞ

1980 yılında Ankara'da doğdu. İlk ve Orta Öğretimini Elazığ'da, Liseyi Van Özel Halime Hatun Lisesinde bitirdi Daha sonra Yüzüncü Yıl Üniversitesi Matematik Bölümüne girdi. 2000 yılında bu bölümden iyi derece ile mezun oldu. Aynı bölümden 2002 yılında Yüksek lisans derecesi aldı. Yayınlanmış bazı çalışmaları aşağıda verilmiştir.

1- Savas, Ekrem; Savas, Rahmet "On some sequence spaces and lacunary $sigma$-statistical convergence". 3rd International Conference on Mathematical and Computational Applications -ICMCA2002-Konya-.Math.Comput. Appl.8-2003,no.1-3,165—172.

2- R. Savas, E.Savas: "Some sequence spaces defined by Orlicz functions". *Arch. Math. (Brno)* **40** (2004), no. 1, 33--40.

3- E.Savas, R.Savas. "Some λ-sequence spaces defined by Orlicz functions." *Indian J. Pure Appl. Math.* **34**(2003) ,no.12,1673—1680.,

4- Karakaya, Vatan; Kara, Hasan; Sava\c s, Rahmet On strongly Cesaro convergent sequence spaces defined by Orlicz function. *An. Univ. Timi\csoara Ser. Mat.-Inform.* **40** (2002), no. 2, 67--74.